La taverne de l'Irlandais
**vous présente**

# La ballade du barycentre

*racomptée par Jérôme ONILLON,*
*Prof. désagrégé de Math*
*Diffusée exclusivement par la taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com).*
*Il aurait pu vous la chanter mais le temps était déjà suffisamment perturbé comme ça.*

## Un mot d'introduction

*A l'origine notion purement physique, le barycentre a évolué en un puissant instrument mathématique.*
*Le premier à se pencher sur cette question fut d'ailleurs le physicien allemand August Ferdinand Möbius (1790-1868), plus célèbre pour son ruban sans fin que pour son mémoire* Der barycentrische Calcul.
*Hier entièrement traité en Terminale, le barycentre est aujourd'hui pulvérisé sur les deux années de ce qui reste de la section scientifique.*
*A ceux que cela intéresse et aux autres, nous allons compter cette ballade d'abord théorique puis concrète, une ballade en vert et blanc, celle du barycentre.*

## *Au sommaire :*



*Edition du mardi 1er décembre 2009*
*Une petite ballade en vert et blanc...*

## Barycentre : de la théorie et de ses conséquences

Face à un problème, il y a deux attitudes possibles : la bonne et la nôtre. Nous pourrions d'abord chercher à définir le barycentre de deux points avant de généraliser cette notion. Mais rien ne nous effrayant, nous décidons de passer directement à cette seconde étape.

Les points $A_1, A_2, ..., A_n$ sont n points de l'espace (ou du plan pour les timides).
A chacun de ces points $A_k$, nous décidons de lui associer un coefficient $\alpha_k$.
Chaque $\alpha_k$ est un réel quelconque qui peut être négatif, nul ou positif. D'un strict point de vue physique, il peut s'agir d'une masse ou d'une charge électrique.
Nous venons de constituer le système de n points pondérés (avec poids) $A_1(\alpha_1);...;A_n(\alpha_n)$.

La question que se posent les physiciens de savoir s'il existe un point d'équilibre G où toutes les actions induites par nos n points pondérés s'annulent.
Autrement dit, existe-t-il un ou des points G vérifiant l'égalité vectorielle :

$$\alpha_1.\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{GA_n} = \vec{o}$$

La seule chose que nous puissions entreprendre est de décomposer cette relation. Il vient :

$$\alpha_1.\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2.\left(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_2A_n}\right) + ... + \alpha_n.\left(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_n}\right) = \vec{o}$$

*Big merci to M. Chasles !*

$$\alpha_1.\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{A_1A_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{GA_1} + \alpha_n.\overrightarrow{A_1A_n} = \vec{o}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n).\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{A_1A_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{A_1A_n} = \vec{o}$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n).\overrightarrow{A_1G} = \alpha_2.\overrightarrow{A_1A_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{A_1A_n}$$

La prochaine étape qui se profile clairement, est une division par la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.
Mais le pouvons-nous ? Car diviser par zéro est un crime capital ! Deux cas se présentent.

1. ***La somme $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ est nulle***
   A ce moment-là, il est impossible de diviser par celle-ci. Il vient alors que :
   $$\alpha_2.\overrightarrow{A_1A_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{A_1A_n} = \vec{o}$$
   Tous les points G de l'espace (ou du plan pour les timides) vérifient alors l'égalité.
2. ***La somme $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ n'est pas nulle***
   Il est alors possible de diviser. Notre dernière relation vectorielle devient alors :
   $$\overrightarrow{A_1G} = \frac{\alpha_2.\overrightarrow{A_1A_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{A_1A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$$
   Les points $A_1, A_2, ..., A_n$ étant fixés, il n'existe alors qu'un seul point G vérifiant cette relation vectorielle. En sa personne, nous tenons et définissons le barycentre (ou le centre d'inertie) du système de points pondérés $A_1(\alpha_1), ..., A_n(\alpha_n)$.

### *Définition de barycentre d'un système de n points pondérés*

**Définition du barycentre d'un système de n points pondérés**

$A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$, .... et $A_n(\alpha_n)$ sont n points pondérés de l'espace (ou du plan).
Si la somme des coefficients $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ est non nulle alors il existe un unique point G tel que :

$$\alpha_1.\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{GA_n} = \vec{o} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{A_1G} = \frac{\alpha_2.\overrightarrow{A_1A_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{A_1A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$$

Le point G est appelé barycentre du système de points pondérés $A_1(\alpha_1), ..., A_n(\alpha_n)$

Chez les physiciens, au lieu de barycentre, on parle plus volontiers de centre de gravité voire de centre d'inertie. Mais tout cela ne nous regarde pas !
Parmi les autres choses que nous pourrions préciser est que les points $A_1, A_2, ..., A_n$ ne sont pas nécessairement tous distincts. Certains peuvent être confondus.
De même, il n'est pas interdit d'avoir un coefficient $\alpha_k$ égal à 0. Mais alors, tout se passe comme si le point $A_k$ n'existait pas car le terme $\alpha_k.\overrightarrow{GA_k}$ disparaît de la relation vectorielle.

Notre définition a plusieurs conséquences. Détaillons-les !

### *La notion de barycentre est commutative*

Derrière ces grands mots se cache le fait que l'ordre d'énoncé des points importe peu.
En effet, le barycentre des points $A_1(\alpha_1)$ et $A_2(\alpha_2)$ est le même que celui du système de points pondérés $A_2(\alpha_2)$ et $A_1(\alpha_1)$. En effet, il est clair :

$$\alpha_1.\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{GA_2} = \alpha_2.\overrightarrow{GA_2} + \alpha_1.\overrightarrow{GA_1} = \vec{o}$$

Quand on parle d'un système de points pondérés $A_1(\alpha_1), ..., A_n(\alpha_n)$, peu importe l'ordre.

Pour éviter toute ambiguïté, précisons qu'il existe une grande différence entre le système de points $A(2) ; B(7)$ et le système $A(7) ; B(2)$. Il s'agit là de deux systèmes distincts.
En effet, les coefficients affectés aux points dans les deux cas ne sont pas les mêmes.

### *La notion de barycentre est homogène*

Là encore, nous employons de grands mots pour une réalité assez simple.
Appelons G le barycentre du système de points pondérés $A_1(\alpha_1), ..., A_n(\alpha_n)$. Nous avons alors la relation vectorielle :

$$\alpha_1.\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{GA_n} = \vec{o}$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par un réel ***k*** non nul, elle devient :

$$\boldsymbol{k}.\left[\alpha_1.\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2.\overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{GA_n}\right] = \vec{o} \times \boldsymbol{k}$$

$$\underbrace{\boldsymbol{k} \times \alpha_1}.\overrightarrow{GA_1} + \underbrace{\boldsymbol{k} \times \alpha_2}.\overrightarrow{GA_2} + ... + \underbrace{\boldsymbol{k} \times \alpha_n}.\overrightarrow{GA_n} = \vec{o}$$

Donc G est aussi le barycentre des points pondérés $A_1(\boldsymbol{k} \times \alpha_1), ..., A_n(\boldsymbol{k} \times \alpha_n)$.
Multiplier ou diviser par un même réel non nul ***k*** les coefficients d'un système de points pondérés ne change donc pas le barycentre du système. C'est cela l'homogénéité.

**Théorème**
Si le point G est le barycentre du système $A_1(\alpha_1), ..., A_n(\alpha_n)$ alors il est aussi celui du système de points pondérés $A_1(\boldsymbol{k} \times \alpha_1), ..., A_n(\boldsymbol{k} \times \alpha_n)$ où ***k*** est un réel non nul.

La conséquence de tout cela est qu'au lieu de s'intéresser au barycentre des points pondérés A(-28) et B(-56), on peut très bien se rabattre sur celui des points A(1) et B(2).

### *Tous les coefficients sont égaux : isobarycentre*

Si tous les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sont égaux alors le barycentre G est appelé <u>isobarycentre</u>, voire <u>équibarycentre</u> ou encore <u>centre des distances moyennes</u> des points $A_1, A_2, ..., A_n$.
En règle générale, lorsque l'on parle d'isobarycentre, on omet les coefficients. En effet, si le point G est le barycentre des points pondérés $A_1(\alpha), A_2(\alpha), ..., A_n(\alpha)$ alors :

$$\alpha.\overrightarrow{GA_1}+\alpha.\overrightarrow{GA_2}+....+\alpha.\overrightarrow{GA_n}=\vec{o} \Leftrightarrow \alpha.\left(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+....+\overrightarrow{GA_n}\right)=\vec{o}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+....+\overrightarrow{GA_n}=\vec{o}$$

**On divise par $\alpha$**

En fait, on fait comme si tous les coefficients étaient égaux à 1. Ou bien on les omet carrément.

### *Réduction d'une somme vectorielle*

L'un des apports le plus remarquable du barycentre est la capacité qu'il offre de réduire et simplifier des sommes affreusement compliquées.
Par exemple, intéressons-nous à la somme $\beta_1.\overrightarrow{MA_1}+\beta_2.\overrightarrow{MA_2}+....+\beta_n.\overrightarrow{MA_n}$ où

- Les points $A_1, A_2, ..., A_n$ sont des points fixés de l'espace ou du plan.
- $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ sont des réels fixés que nous supposerons non nuls.

Le but du jeu est d'obtenir une relation simple qui permette par exemple de placer le point M.

Avant d'entamer toute décomposition, nous décidons d'introduire le barycentre G du système de points pondérés $A_1(\beta_1),...,A_n(\beta_n)$. Autrement dit : $\beta_1.\overrightarrow{GA_1}+\beta_2.\overrightarrow{GA_2}+....+\beta_n.\overrightarrow{GA_n}=\vec{o}$
Les réjouissances peuvent à présent commencer !

$$\begin{aligned}\beta_1.\overrightarrow{MA_1}+\beta_2.\overrightarrow{MA_2}+....+\beta_n.\overrightarrow{MA_n} &= \beta_1.\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_1}\right)+\beta_2.\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_2}\right)+....+\beta_n.\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_n}\right)\\ &= (\beta_1+\beta_2+...+\beta_n).\overrightarrow{MG}+\underbrace{\beta_1.\overrightarrow{GA_1}+\beta_2.\overrightarrow{GA_2}+....+\beta_n.\overrightarrow{GA_n}}_{\substack{=\vec{o}\\ \text{car } G \text{ est le barycentre de } A(\beta_1),...,A(\beta_n)}}\\ &= (\beta_1+\beta_2+...+\beta_n).\overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

D'une improbable somme vectorielle comportant de nombreux termes, nous sommes passés à un simple produit. Comme quoi, un barycentre peut vous simplifier la vie.

**Théorème de réduction d'une somme vectorielle**
Si G est le barycentre du système de points pondérés $A_1(\alpha_1), A_2(\alpha_2),.., A_n(\alpha_n)$ alors pour tout point M de l'espace ou du plan :
$$\alpha_1.\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2.\overrightarrow{MA_2}+....+\alpha_n.\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n).\overrightarrow{MG}$$

### *La notion de barycentre est associative*

Pour placer le barycentre G d'un système de n points pondérés $A_1(\alpha_1),...,A_n(\alpha_n)$, nous ne disposons pour l'instant que de la relation de la définition. A savoir :
$$\overrightarrow{A_1G}=\frac{\alpha_2.\overrightarrow{A_1A_2}+...+\alpha_n.\overrightarrow{A_1A_n}}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}$$
C'est une belle relation mais qui est peu pratique lorsque le nombre n de points devient important.
Heureusement, en utilisant le précédent théorème, il est possible de se simplifier la vie. Expliquons dans quelle mesure !

Comme G est le barycentre du système de points pondérés $A_1(\alpha_1),...,A_n(\alpha_n)$ alors :
$$\alpha_1.\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2.\overrightarrow{GA_2}+...+\alpha_n.\overrightarrow{GA_n}=\vec{o}$$
Par bonheur, nous savons que le point G' est le barycentre du système de k points pondérés $A_1(\alpha_1),...,A_k(\alpha_k)$.
La relation précédent devient alors :

$$\underbrace{\alpha_1.\overrightarrow{GA_1}+....+\alpha_k.\overrightarrow{GA_k}}_{\text{On réduit cette somme avec G'}}+\alpha_{k+1}.\overrightarrow{GA_{k+1}}...+\alpha_n.\overrightarrow{GA_n}=\vec{o}$$

$$(\alpha_1+...+\alpha_k).\overrightarrow{GG'}+\alpha_{k+1}.\overrightarrow{GA_{k+1}}...+\alpha_n.\overrightarrow{GA_n}=\vec{o}$$

Donc G est aussi le barycentre du système de points $G'(\alpha_1+...+\alpha_k), A_{k+1}(\alpha_{k+1}),...,A_n(\alpha_n)$.
Nous avons un nouveau théorème !

**Théorème d'associativité du barycentre**
Dans ce qui suit, n et k sont deux entiers naturels non nuls tels que $k < n$.
Si

- le point G est le barycentre du système des n points pondérés $A_1(\alpha_1),...,A_n(\alpha_n)$
- le point G' est le barycentre du système des k points pondérés $A_1(\alpha_1),...,A_n(\alpha_k)$

alors G est aussi le barycentre du système $G'(\alpha_1+...+\alpha_k), A_{k+1}(\alpha_{k+1}),...,A_n(\alpha_n)$.

Le progrès introduit par une telle démarche réside dans la réduction du nombre de points pondérés constituant le système. Ce qui permet parfois de placer le barycentre plus aisément. Nous verrons cela ultérieurement.

### *Les coordonnées d'un barycentre*

Le théorème de réduction ne sert pas seulement à réduire des sommes vectorielles. Il permet aussi d'établir les formules donnant les coordonnées d'un barycentre dans un repère.

Recherchant la grandeur, nous décidons de travailler dans l'espace que nous munissons d'un repère quelconque $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Donc pas nécessairement très sympa !

Quant au point G, il est toujours l'éternel barycentre des points pondérés $A_1(\alpha_1),...,A_n(\alpha_n)$.
Appliquant notre théorème de réduction à partir point O, il vient alors :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha_1.\overrightarrow{OA_1}+....+\alpha_n.\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1+...+\alpha_n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1.x_{A_1}+...+\alpha_n.x_{A_n}}{\alpha_1+...+\alpha_n} \\ \dfrac{\alpha_1.y_{A_1}+...+\alpha_n.y_{A_n}}{\alpha_1+...+\alpha_n} \\ \dfrac{\alpha_1.z_{A_1}+...+\alpha_n.z_{A_n}}{\alpha_1+...+\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Car ne l'oublions pas : deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales !
Pour le amis du plan complexe, il existe également un équivalent complexe !

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha_1.\overrightarrow{OA_1}+....+\alpha_n.\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1+...+\alpha_n} \Leftrightarrow z_G=\frac{\alpha_1.z_{A_1}+....+\alpha_n.z_{A_n}}{\alpha_1+...+\alpha_n}$$

où $z_G$, $z_{A_1},...,z_{A_2}$ désignent les affixes respectives des points G, $A_1,...,A_n$.

### *Pour conclure : on aurait pu faire pire !*

Tout cela peut vous sembler bien théorique. Mais nous aurions pu l'être beaucoup plus si nous avions attaqué ce premier paragraphe sous l'angle de la fonction de Leibniz qui a tout point M associe le vecteur $\overrightarrow{f(M)}=\alpha_1.\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2.\overrightarrow{MA_2}+....+\alpha_n.\overrightarrow{MA_n}$. Tout un programme !
A présent, nous avons en main tous les outils pour aborder concrètement les barycentres.

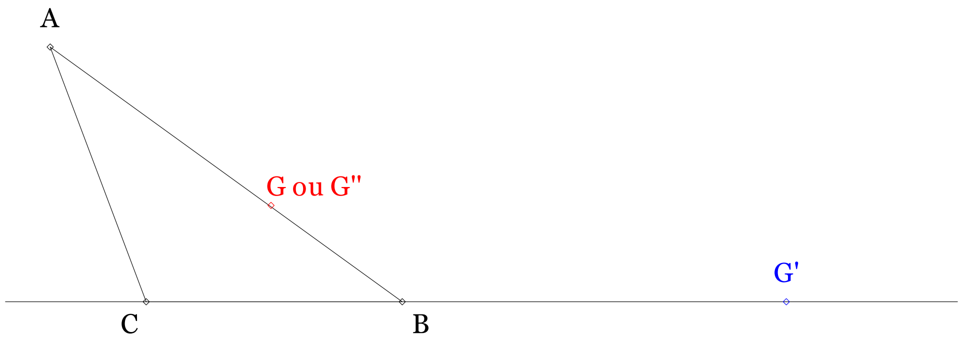
## Etudes de quelques cas particuliers

Reprend espoir malheureux car voici venir le moment qu'attendent beaucoup parmi vous, celui où ils vont enfin pouvoir toucher cette réalité mathématique qu'est le barycentre !
Ce que nous allons faire, est autant valable dans l'espace que dans le plan.
Mais assez palabré et commençons dés à présent notre exploration barycentrique.

### *Le barycentre de deux points*

Pour les besoins de la cause, nous allons bosser dans un triangle quelconque ABC
Nous allons nous intéresser à certains barycentres de couples et essayer de les placer.

- ***Le point G est le barycentre des points pondérés A(3) et B(5)***
  La première chose à dire est que comme la somme des coefficients est non nulle alors ce barycentre G existe.
  De plus, cela signifie que $3.\overrightarrow{GA}+5.\overrightarrow{GB}=\vec{o}$.
  Cette relation est peu parlante pour pouvoir placer G. Aussi modifions la !
  $$3.\overrightarrow{GA}+5.\overrightarrow{GB}=\vec{o} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{GA}+5.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{5}{8}.\overrightarrow{AB}$$
  Le point G est donc placé aux cinq huitièmes du segment [AB] à partir de A.




- ***Le point G' est le barycentre des points pondérés B(-5) et C(3)***
  Là encore, avant d'aller plus loin il convient de s'assurer qu'un tel barycentre existe bien. La somme des coefficients $-5+3=-2$ étant non nulle, nous sommes rassurés.
  Comme G' est le barycentre de B(-5) et C(3) alors
  $$-5.\overrightarrow{G'B}+3.\overrightarrow{G'C}=\vec{o} \Leftrightarrow -5.\overrightarrow{G'B}+3.\left(\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{BC}\right)=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG'}=\frac{3}{-2}.\overrightarrow{BC}=-1,5.\overrightarrow{BC}$$
  Le point G' est donc situé sur la droite (BC) mais à l'opposé de C par rapport au point B.

- ***Le point G" est le barycentre des points pondérés A(-6) et B(-10)***
  Là encore, le barycentre G" existe car la somme des coefficients $-6-10=-16$ est non nulle.
  De plus en application de la définition du barycentre, nous pouvons écrire que :
  $$-6.\overrightarrow{G''A}-10.\overrightarrow{G''B}=\vec{o} \Leftrightarrow -6.\overrightarrow{G''A}-10.\left(\overrightarrow{G''A}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG''}=\frac{-10}{-16}.\overrightarrow{AB}=\frac{5}{8}.\overrightarrow{AB}$$
  Autrement dit, le point G" est situé aux cinq huitièmes du segment [AB] à partir de A. Comme le point G avec lequel il est confondu !
  Coïncidence ? Faut-il voir là un de ces hasards de la vie qui fait que ... ?
  En fait, il n'en est rien. Ce qui se passe est tout à fait normal car les coefficients des systèmes de points pondérés $A(3);B(5)$ et $A(-6);B(-10)$ sont proportionnels.
  Ce n'est ni plus, ni moins que l'homogénéité du barycentre qui s'exprime...

Ce qui ressort de tous nos cas particuliers est que le barycentre de deux points est toujours placé sur la droite que définissent ces derniers.
Ce qui est normal car le barycentre repose avant tout sur une relation de colinéarité impliquant trois points. En effet, si G est le barycentre des points pondérés $A(\alpha)$ et $B(\beta)$ alors

$$\alpha.\overrightarrow{GA}+\beta.\overrightarrow{GB}=\vec{o} \Leftrightarrow \alpha.\overrightarrow{GA}+\beta.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}.\overrightarrow{AB}$$

Donc G est un point de la droite (AB).

Mais réciproquement tout point d'une droite (AB) peut être vu comme étant un barycentre de ces deux points. Il suffit juste de déterminer les bons coefficients de pondération.
En effet, si H est un point de la droite (AB) alors les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Donc il existe un réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\overrightarrow{AH}=\boldsymbol{k}.\overrightarrow{AB}$. Travaillons cette égalité.

$$\overrightarrow{AH}=\boldsymbol{k}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=\boldsymbol{k}.\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right) \Leftrightarrow \vec{o}=\left(1-\boldsymbol{k}\right).\overrightarrow{HA}+\boldsymbol{k}.\overrightarrow{HB}$$

Comme la somme des coefficients est égale à 1 et est surtout non nulle, alors le point H est le barycentre des points pondérés $A\left(1-\boldsymbol{k}\right)$ et $B\left(\boldsymbol{k}\right)$. Cela nous amène au théorème suivant :

**Théorème**
La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.

Pour être complet, précisons que pour que le barycentre fasse partie du segment [AB], il faut et il suffit que les deux coefficients de pondération des points A et B soient de même signe.
Enfin si le coefficient de l'un des points est nul alors le barycentre est confondu avec l'autre point.

Mais quid de l'isobarycentre de deux points A et B ?
Dire que le point G est l'isobarycentre des points A et B signifie que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{o}$.
De fil en aiguille, on en arrive à la relation :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$$

L'isobarycentre de deux points est donc le milieu du segment qu'ils définissent.

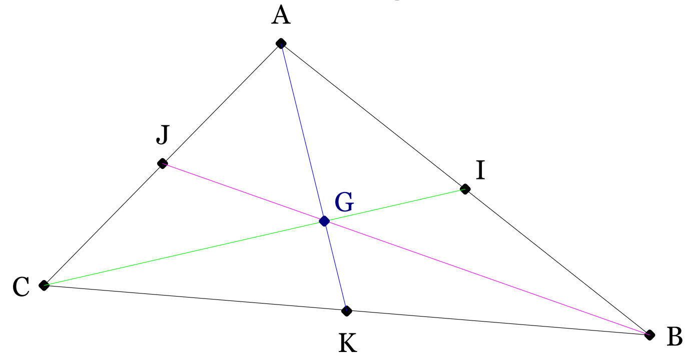
### *Le barycentre de trois points*

Construire le barycentre de trois points ne présente guère de difficultés. A condition de connaître le truc.

- ***L'isobarycentre G de trois points A, B et C***
  Qui peut bien être cette bestiole ? En fait, comme nous allons le voir, l'isobarycentre de trois points est une vieille connaissance...
  Dire que G est l'isobarycentre des points A, B et C signifie que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{o}$.
  En travaillant cette relation, on aboutit à : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$.
  Il s'agit là d'une belle relation mais peu parlante et peu pratique pour placer G. Nous devons donc nous y prendre autrement ! Avec le théorème d'associativité par exemple.
  Appellons I l'isobarycentre (c'est-à-dire le milieu) des points A et B.
  Le point G qui est le barycentre des points pondérés $\underbrace{A(1),B(1)}_{\text{Barycentre } I},C(1)$ est donc aussi le celui du système de points pondérés I(2),C(1). Par conséquent, il vient :

$$2.\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\vec{o} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{GI}+\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{CI}$$

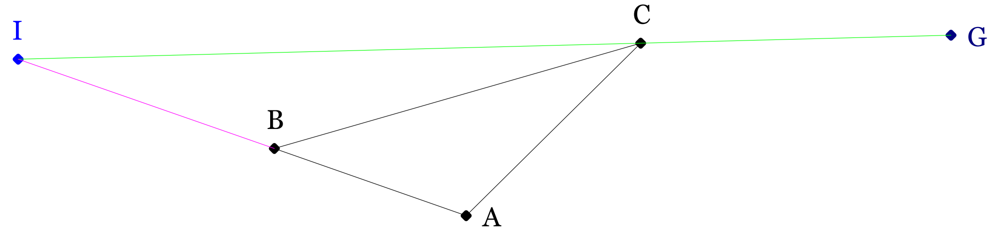
Donc G est un point de la médiane (CI) du triangle ABC.




Et ce qui a été fait avec le milieu I de [AB], peut être refait avec les milieux J et K des côtés [AC] et [BC]. Notre isobarycentre G fait aussi partie des médianes (BJ) et (AK).

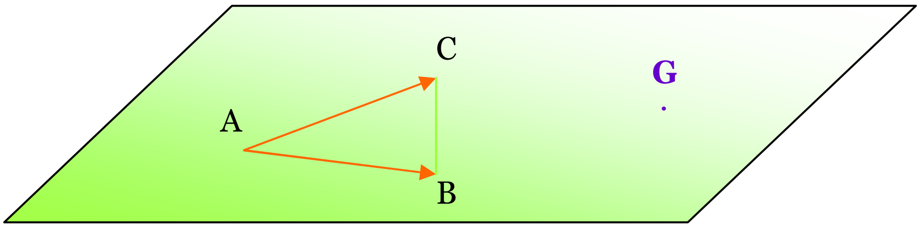
Ainsi, l'isobarycentre des trois points A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC. Et si le centre de gravité d'un triangle se trouve aux deux tiers de chacune des médianes à partir du sommet, c'est parce qu'il est aussi un isobarycentre...

- ***Le barycentre G du système de points pondérés A(4), B(-7) et C(9)***
Première formalité à remplir : le barycentre G existe bel et bien car la somme des coefficients $4+(-7)+9=6$ est non nulle.
Ensuite à partir de la définition, il nous est possible de dire que :
$$4.\overrightarrow{GA}-7.\overrightarrow{GB}+9.\overrightarrow{GC}=\vec{o} \Leftrightarrow 4.\overrightarrow{GA}-7.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+9.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{-7.\overrightarrow{AB}+9.\overrightarrow{AC}}{6}$$
Ces trois relations sont assez peu pratiques dés lors qu'il s'agit de construire le point G. Là encore, si nous voulons nous fatiguer un minimum, il va falloir être malin et exploiter cette propriété du barycentre qu'est le théorème d'associativité.
En fait, nous allons reproduire ce qui a été fait précédemment avec l'isobarycentre. Nous commençons donc par nous intéresser à deux points du trio de pondérés. Appelons I le barycentre des points A(4) et B(-7).
Il existe car la somme des coefficients $4+(-7)$ est non nulle. De plus :
$$4.\overrightarrow{IA}-7.\overrightarrow{IB}=\vec{o} \Leftrightarrow 4.\overrightarrow{IA}-7.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{-7.\overrightarrow{AB}}{-3}=\frac{7}{3}.\overrightarrow{AB}$$
Cette dernière relation nous permet de placer sans problème le point I.
Maintenant la relation barycentrique initiale se transforme sous l'action du théorème d'associativité.
$$\underbrace{4.\overrightarrow{GA}-7.\overrightarrow{GB}}_{\substack{\textit{I barycentre}\\ \textit{de A(4) et B(-7)}}}+9.\overrightarrow{GC}=\vec{o} \Leftrightarrow (4-7).\overrightarrow{GI}+9.\overrightarrow{GC}=\vec{o} \Leftrightarrow -3.\overrightarrow{GI}+9.\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{o}$$
Finalement, on aboutit à : $\overrightarrow{IG}=\frac{9}{6}.\overrightarrow{IC}=1,5\times\overrightarrow{IC}$. Le point G se construit alors tout seul !




Une remarque : nous avons pris le duo A(4) et B(-7). Mais nous aurions très bien pu nous intéresser au couple A(4) et C(9) voire B(-7) et C(9). Nous avons considéré le premier qui s'est présenté mais parfois, certains sont plus indiqués que d'autres !

Cela n'aura échappé qu'aux cancres et aux endormis mais trois points non alignés A, B et C sont toujours coplanaires. C'est-à-dire qu'ils se trouvent dans un même plan !
Etant liés à ceux-ci par une relation vectorielle du type $\alpha.\overrightarrow{GA}+\beta.\overrightarrow{GB}+\gamma.\overrightarrow{GC}=\vec{o}$, tous leurs barycentres G font partie du plan (ABC).




Mais réciproquement, si un point G fait partie du plan (ABC) alors il existe deux réels $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{l}$ tels que :

$$\overrightarrow{AG}=\boldsymbol{k}.\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{l}.\overrightarrow{AC}$$

Ces deux réels ne sont rien d'autre que les coordonnées du point G dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ qui est un repère du plan ABC.
Modifions cette relation vectorielle.

$$\overrightarrow{AG}=\boldsymbol{k}.\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{l}.\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\boldsymbol{k}.\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)+\boldsymbol{l}.\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)\Leftrightarrow\left(1-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}\right).\overrightarrow{GA}+\boldsymbol{k}.\overrightarrow{GB}+\boldsymbol{l}.\overrightarrow{GC}=\vec{o}$$

Comme la somme des coefficients $\left(1-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}\right)+\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}=1$ est non nulle alors on peut dire que G est le barycentre des points pondérés $A\left(1-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}\right)$, $B\left(\boldsymbol{k}\right)$ et $C\left(\boldsymbol{l}\right)$.
Finalement, nous aboutissons donc au théorème :

**Théorème**
A, B et C sont trois points de l'espace non alignés.
Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C.

Nous avons là un théorème similaire à celui qui avait été établi pour le barycentre de deux points. Car si deux points distincts définissent une droite, trois points non alignés définissent un plan ! A condition de bosser dans l'espace bien sûr !

### *Le barycentre de quatre points*

Les "petites natures" diront que les choses se compliquent. Mais elles ont tort car elles ne font que se complexifier. Certains ne verront pas la différence mais c'est pas grave !
L'unique défi que nous allons nous imposer dans ce sous-paragraphe sera de positionner l'isobarycentre de quatre points de l'espace non coplanaires, c'est-à-dire en fait le centre de gravité d'un tétraèdre.

Nous considérons donc quatre points de l'espace A, B, C et D non coplanaires. Nous appelons G leur isobarycentre.
En application de la définition, nous avons entre ces cinq points la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{o}$$

L'isobarycentre de trois points l'avait laissé présagé mais il parait hasardeux d'essayer de placer G avec une telle relation. Là encore, notre salut de paresseux va venir du théorème d'associativité.
De la même manière que deux sommes d'entiers positifs ($1+3$ et $2+2$) ont pour résultat 4, il existe deux manières de faire les choses.

- ***Première méthode : en considérant le centre de gravité d'une face***

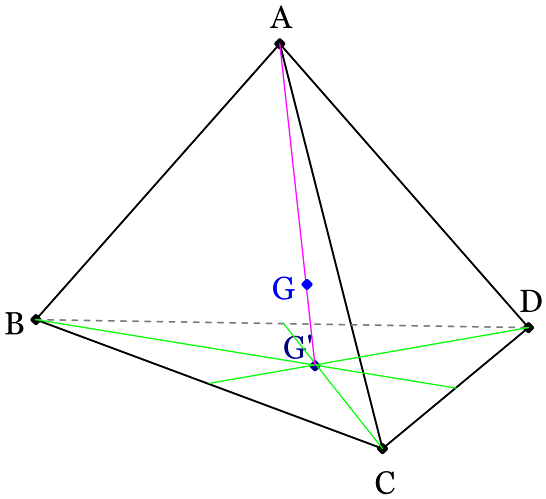
Appelons G' le centre gravité ou l'isobarycentre du triangle BCD.

Nous avons alors que $\overrightarrow{G'B}+\overrightarrow{G'C}+\overrightarrow{G'D}=\vec{o}$ mais aussi que $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3.\overrightarrow{GG'}$.

On peut dire tout cela ou bien se contenter d'appliquer le théorème d'associativité à la relation vectorielle initiale. Il vient :

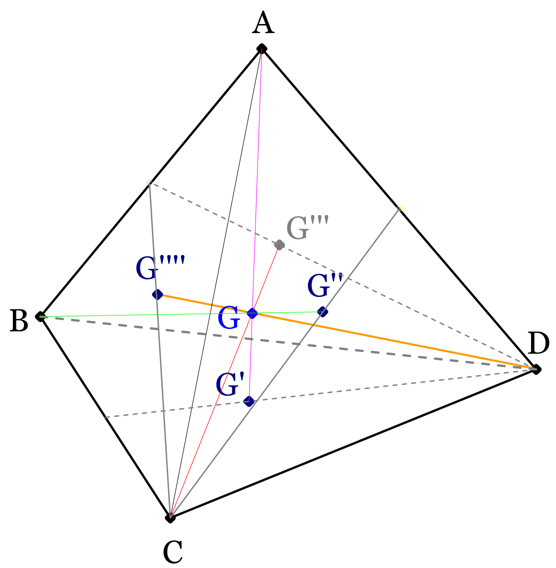
$$\overrightarrow{GA}+\underbrace{\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}}_{\substack{G' \text{ isobarycentre}\\ \text{de } B,C \text{ et } D}}=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GG'}=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+3.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG'}\right)=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{AG'}$$

Le point G est donc situé aux trois quarts du segment reliant le sommet A et le centre de gravité G' du triangle opposé BCD.




Or ce qui a été fait en particulier pour le sommet A et sa face opposée BCD, peut être reproduit avec les trois autres sommets. De cela, on en déduit le théorème suivant :

**Théorème**
Dans un tétraèdre, les quatre droites joignant chacun des quatre sommets au centre de gravité de sa face triangulaire opposée sont concourantes en un point qui est le centre de gravité d'un tétraèdre.




Sur figure ci-contre, G' est le centre de gravité de la face BCD, G'' celui de la face ACD, G''' celui de la face BCD et G'''' celui de la face ABD (celle du fond).

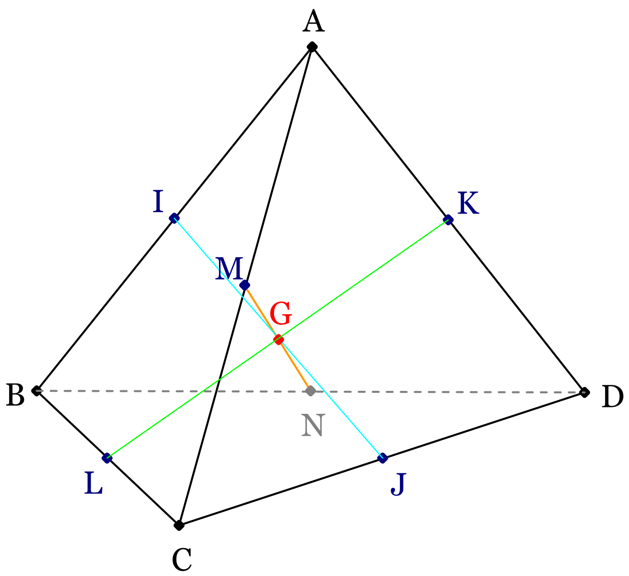
Les quatre droites (AG'), (BG''), (CG''') et (DG'''') sont sécantes en G. Ce dernier est l'isobarycentre ou centre de gravité du tétraèdre ABCD.

*Certes voir dans l'espace avec une telle figure n'est pas très aisé, mais en se concentrant, on y arrive très bien !*

- ***En considérant les milieux des arêtes opposées***
  Appelons I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD]. Ces deux points sont aussi les isobarycentres des couples A;B et C;D.
  Nous allons appliquer deux fois de suite le théorème d'associativité à la relation vectorielle initiale.
  $$\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}}_{\textit{Isobarycentre I}} + \underbrace{\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}}_{\textit{Isobarycentre J}} = \vec{o} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{GI}+2.\overrightarrow{GJ}=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\vec{o}$$
  Donc G est l'isobarycentre c'est-à-dire le milieu des points I et J.

  Mais ce qui a été fait avec les points I et J peut être reproduit avec les milieux K et L des arêtes opposées [AD] et [BC].
  Même chose avec les milieux M et N des arêtes opposées [AC] et [BD].

  Dans les deux cas, l'isobarycentre G est aussi le milieu des segments [KL] et [MN].
  Cela nous amène tout naturellement au théorème suivant :




**Théorème.**
Dans un tétraèdre, les trois segments joignant les milieux des arêtes opposées ont même milieu. Leur point de concours est le centre de gravité du tétraèdre.

Tout cela illustre le fait que le barycentre peut servir à bien d'autres choses que des simples problèmes de centre de gravité. Le calcul barycentrique est un outil qui peut se révéler très utile et puissant.

Nous pourrions à présent nous lancer dans le placement du barycentre de cinq points mais de toute bonne chose, il ne faut jamais excéder. Et puis, nous tenons aussi à ménager notre gentil lecteur.
Dans le prochain paragraphe, nous allons voir toute la puissance du barycentre. Nous allons voir comment il permet de solutionner certains problèmes d'ensemble de points..

## Quelques bonnes raisons de recourir au barycentre

Ce qui suit, est un florilège de situations dans lesquelles le recours à un barycentre peut vous tirer d'affaire. Car le barycentre n'est pas seulement un notion de torture inventée pour vous faire peur. C'est aussi un instrument puissant !
C'est en particulier le cas lorsque l'on recherche des ensembles de points devant remplir une certaine égalité de distances ou de produit scalaire. Voici ces problèmes.

### *L'ensemble des points M vérifiant MA/MB = k*

Dans ce qui suit, $\boldsymbol{k}$ est un réel positif non nul différent de 1 et, A et B sont deux points distincts du plan ou de l'espace.

Déterminons l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan ou de l'espace vérifiant $\dfrac{\text{MA}}{\text{MB}} = \boldsymbol{k}$.

Si nous avons supposé $\boldsymbol{k}$ différent de 1, c'est qu'alors le problème se solutionne tout seul.
En effet, $\mathcal{E}$ est alors l'ensemble des points M tels que $\text{MA} = \text{MB}$, c'est-à-dire des points qui sont équidistants de A et B.
Lorsque $\boldsymbol{k} = 1$, l'ensemble n'est rien d'autre que la médiatrice (ou le plan médiateur si on travaille dans l'espace) du segment [AB].

Revenons au cas général. Désormais $\boldsymbol{k}$ est donc un réel positif différent de 1.
Pour les décérébrés, précisons que la relation de Chasles est ici inopérante car il s'agit de distances et non de vecteurs. En fait sous cette forme, nous n'avons aucune chance de pouvoir conclure. Nous devons modifier la nature cette égalité.

Si M fait partie de $\mathcal{E}$ alors $\dfrac{\text{MA}}{\text{MB}} = \boldsymbol{k}$ donc $\text{MA} = \boldsymbol{k}.\text{MB}$.
Elévant cette égalité au carré, il vient alors que :

$$\text{MA}^2 = (\boldsymbol{k}.\text{MB})^2 \Leftrightarrow \text{MA}^2 - (\boldsymbol{k}.\text{MB})^2 = 0$$

Nous arrivons donc à une identité remarquable. Apparemment, nous n'avons fait que déplacer le problème. En fait, nous nous sommes mis en position de pouvoir introduire le produit scalaire. Ceci car :

- D'une part, nous savons que : $\text{MA}^2 = \overrightarrow{\text{MA}}^2 = \overrightarrow{\text{MA}}.\overrightarrow{\text{MA}}$
- De l'autre, il existe des identités remarquables pour le produit scalaire.

  Ainsi : $\text{MA}^2 - (\boldsymbol{k}.\text{MB})^2 = \overrightarrow{\text{MA}}^2 - \left(\boldsymbol{k}.\overrightarrow{\text{MB}}\right)^2 = \left[\overrightarrow{\text{MA}} + \boldsymbol{k}.\overrightarrow{\text{MB}}\right].\left[\overrightarrow{\text{MA}} - \boldsymbol{k}.\overrightarrow{\text{MB}}\right]$

Par suite :

Si le point M fait partie de l'ensemble $\mathcal{E}$ <u>alors</u> $\left[\overrightarrow{\text{MA}} + \boldsymbol{k}.\overrightarrow{\text{MB}}\right].\left[\overrightarrow{\text{MA}} - \boldsymbol{k}.\overrightarrow{\text{MB}}\right] = 0$

On peut encore améliorer cette égalité en introduisant des barycentres.
Appelons G le barycentre des points pondérés $\text{A}(1)$ et $\text{B}(\boldsymbol{k})$, et G' celui de $\text{A}(1)$ et $\text{B}(-\boldsymbol{k})$.
Ces deux barycentres existent car dans les deux cas, les sommes des coefficients $1 + \boldsymbol{k}$ et $1 - \boldsymbol{k}$ sont non nulles.
Appliquant deux fois le théorème de réduction d'une somme du barycentre, il vient :

$$\left[\overrightarrow{\text{MA}} + \boldsymbol{k}.\overrightarrow{\text{MB}}\right].\left[\overrightarrow{\text{MA}} - \boldsymbol{k}.\overrightarrow{\text{MB}}\right] = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(1+\boldsymbol{k}).\overrightarrow{\text{MG}}}.\underbrace{(1-\boldsymbol{k}).\overrightarrow{\text{MG'}}} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MG}}.\overrightarrow{\text{MG'}} = 0$$

***On peut diviser par 1+k et 1-k qui sont non nuls***

Or si les deux vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MG'}$ ont leur produit scalaire nul, c'est qu'ils sont orthogonaux. Nous pourrions aussi dire que le triangle GG'M est rectangle en M ou encore que M appartient au cercle ou à la sphère de diamètre [GG'].
Quoiqu'il en soit, nous pouvons conclure :

Si M fait parti de $\mathcal{E}$ alors M fait parti du cercle ou de la sphère de diamètre [GG'].

A présent, la question qui se pose est :
Tous les points du cercle ou de la sphère de diamètre [GG'] font-ils partie de l'ensemble $\mathcal{E}$ ?

Pertinente question qui trouve sa réponse dans ce qui vient d'être fait. En effet :
Si M fait partie du cercle ou de la sphère de diamètre [GG'] alors les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MG'}$ sont orthogonaux.
Donc le produit scalaire de ces deux là est nul. Par suite :

$$\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'} = 0$$

***On multiplie par les réels non nuls 1 + k et 1 - k***

$$\underbrace{(1+\boldsymbol{k}).\overrightarrow{MG}}_{\substack{\text{G barycentre} \\ \text{de A(1) et B(}\boldsymbol{k}\text{)}}} \;.\; \underbrace{(1-\boldsymbol{k}).\overrightarrow{MG'}}_{\substack{\text{G' barycentre} \\ \text{de A(1) et B(-}\boldsymbol{k}\text{)}}} = 0$$

***Certaines des égalités vues précédemment sont toujours vraies***

$$\left(\overrightarrow{MA} + \boldsymbol{k}.\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - \boldsymbol{k}.\overrightarrow{MB}\right) = 0$$

***Identité remarquable du produit scalaire...***

$$MA^2 - (\boldsymbol{k}.MB)^2 = 0$$

$$MA^2 = (\boldsymbol{k}.MB)^2$$

Là, nous ne devons pas perdre de vue que les deux nombres MA et $\boldsymbol{k}$.MB sont des nombres positifs. Donc si leurs carrés sont égaux, c'est qu'eux-mêmes le sont !
Par suite, nous en arrivons donc à :

Tout point M du cercle ou de la sphère de diamètre [GG'] vérifie l'égalité $\dfrac{MA}{MB} = \boldsymbol{k}$

Ce qui résout notre problème et nous permet finalement d'affirmer ce qui suit !

**Théorème.**
$\boldsymbol{k}$ est un réel strictement positif et, A et B sont deux points distincts du plan (ou de l'espace).
On appelle l'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\dfrac{MA}{MB} = \boldsymbol{k}$.

- Si $\boldsymbol{k} = 1$ alors $\mathcal{E}$ est la médiatrice (ou le plan médiateur) du segment [AB].
- Si $\boldsymbol{k} \neq 1$ alors $\mathcal{E}$ est le cercle (ou la sphère) de diamètre [GG']
  où G et G' sont les barycentres des systèmes $A(1);B(\boldsymbol{k})$ et $A(1);B(\boldsymbol{-k})$.

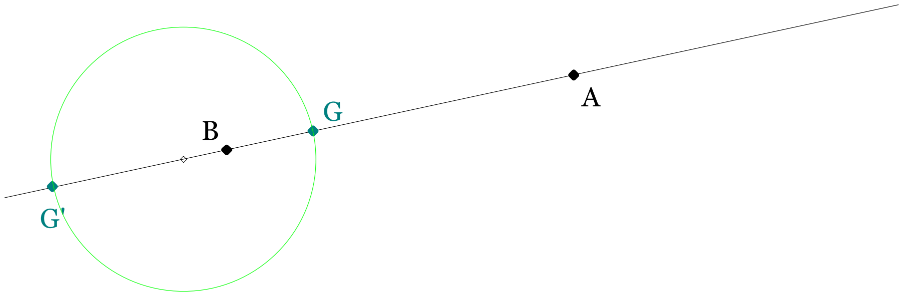
A titre d'exemple, représentons l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant $\dfrac{MA}{MB} = 3$.

Pour définir cet ensemble, nous devons auparavant parler de deux points.

- G est le barycentre des points A(1) et B(3) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{GA} + 3.\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}.\overrightarrow{AB}$
- G' est le barycentre des points A(1) et B(-3) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{G'A} - 3.\overrightarrow{G'B} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AG'} = \dfrac{3}{2}.\overrightarrow{AB}$

D'après notre théorème, l'ensemble $\mathcal{E}$ est donc le cercle de diamètre [GG'].

Sur la figure suivante, l'ensemble $\mathcal{E}$. est représenté en vert.




### *L'ensemble des points M vérifiant 3.MA² + 5.MB² + 2.MC² = k*

Avant d'aborder la résolution de ce problème, précisons que nous aurions très bien pu nous lancer dans l'étude théorique des ensembles de points M vérifiant l'égalité

$$\boldsymbol{a}.\mathrm{MA}^2 + \boldsymbol{b}.\mathrm{MB}^2 + \mathbf{c}.\mathrm{MC}^2 = \boldsymbol{k}$$

Cela aurait été très beau mais aurait rendu la chose trop abstraite. Ce qui nous intéresse, c'est de montrer à quel point l'introduction du barycentre peut se révéler décisive.

Commençons par planter le décor.
A, B et C sont trois points distincts du plan ou de l'espace. $\boldsymbol{k}$ est un réel quelconque.
Nous allons essayer de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M vérifiant

$$3.\mathrm{MA}^2 + 5.\mathrm{MB}^2 + 2.\mathrm{MC}^2 = \boldsymbol{k}$$

Tout un programme !

Là encore, toute notre manoeuvre va reposer sur l'introduction d'un barycentre. En l'occurrence, celui des points pondérés A(3), B(5) et C(2) que nous appelons G. Nous avons :

$$3.\overrightarrow{\mathrm{GA}} + 5.\overrightarrow{\mathrm{GB}} + 2.\overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$$

Là encore, nous allons faire appel à certaines propriétés du produit scalaire dont les identités remarquables.

Dire que M fait partie de l'ensemble $\mathcal{E}$ équivaut à dire que :

$$3.\mathrm{MA}^2 + 5.\mathrm{MB}^2 + 2.\mathrm{MC}^2 = \boldsymbol{k}$$

*Il s'agit de produit scalaire*

$$3.\overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 + 5.\overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 + 2.\overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 = \boldsymbol{k}$$

$$3.\left(\overrightarrow{\mathrm{MG}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}}\right)^2 + 5.\left(\overrightarrow{\mathrm{MG}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}\right)^2 + 2.\left(\overrightarrow{\mathrm{MG}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)^2 = \boldsymbol{k}$$

*On développe et réordonne...*

$$10.\overrightarrow{\mathrm{MG}}^2 + 2.\overrightarrow{\mathrm{MG}}.\underbrace{\left(3.\overrightarrow{\mathrm{GA}} + 5.\overrightarrow{\mathrm{GB}} + 2.\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)}_{=\vec{0}} + 3.\overrightarrow{\mathrm{GA}}^2 + 5.\overrightarrow{\mathrm{GB}}^2 + 2.\overrightarrow{\mathrm{GC}}^2 = \boldsymbol{k}$$

*Car G est leur barycentre*

$$10.\mathrm{MG}^2 + 3.\mathrm{GA}^2 + 5.\mathrm{GB}^2 + 2.\mathrm{GC}^2 = \boldsymbol{k}$$

Les choses se sont tout de même notablement simplifiées. De trois termes au carré faisant intervenir le point M, nous sommes passés à un seul. Big merci au barycentre !

Les points A, B et C sont des points fixés. Il en va donc de même pour leur barycentre G.
La quantité $3.\mathrm{GA}^2 + 5.\mathrm{GB}^2 + 2.\mathrm{GC}^2$ est donc constante. Pour alléger les notations, nous l'appellerons désormais **h**. La dernière égalité s'écrit donc :

$$10.\mathrm{MG}^2 = \boldsymbol{k} - \mathbf{h} \Leftrightarrow \mathrm{MG}^2 = \frac{\boldsymbol{k} - \mathbf{h}}{10}$$

N'oublions surtout pas que $\boldsymbol{k}$ est un réel quelconque.
Plusieurs cas se présentent suivant la valeur du second membre $\boldsymbol{k} - \mathbf{h}$.

- Si $\boldsymbol{k} - \mathbf{h}$ est négatif alors aucun point M ne peut satisfaire l'égalité $MG^2 = \frac{\boldsymbol{k} - \mathbf{h}}{10}$.

  Ceci car le carré d'un nombre réel n'est jamais négatif.
  L'ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble vide.

- Si $\boldsymbol{k} - \mathbf{h}$ est nul alors l'égalité devient $MG^2 = 0$.
  L'ensemble $\mathcal{E}$ se réduit donc au seul point G.

- Si $\boldsymbol{k} - \mathbf{h}$ est positif alors $\mathcal{E}$ est le cercle (ou la sphère dans l'espace) de centre G et de rayon $\sqrt{\frac{\boldsymbol{k} - \mathbf{h}}{10}}$.

Il n'est guère possible de faire mieux avec les conditions que nous nous sommes fixées. En fait, il apparaît clairement que beaucoup de choses dépendent des positions des points A, B et C ainsi que de celle de leur barycentre G car ce sont elles qui donnent sa valeur à **h**.
Mais là encore, c'est le recours à un barycentre qui nous a tiré d'affaire !

### *Quelques grands classiques pour terminer*

Pour achever notre ballade, nous allons évoquer ce qu'il est convenu d'appeler des "grands classiques" où l'introduction du barycentre permet de résoudre le problème. Nous éviterons de nous lancer dans de grandes chevauchées théoriques qui n'aboutissent à rien. Non, nous allons travailler sur des cas concrets qui pourront vous servir d'exemples.

- ***L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que*** $\left(4.\overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{MB} + 5.\overrightarrow{MC}\right).\vec{u} = \boldsymbol{k}$

  Précisons le décor. Nous travaillons dans le plan ou dans l'espace. A, B et C sont des points fixes, $\boldsymbol{k}$ est un réel quelconque et $\vec{u}$ est un vecteur quelconque.

  Appelons G le barycentre des points pondérés A(4), B(3) et C(5). Celui-ci existe car la somme des coefficients $4 + 3 + 5 = 12$ est non nulle.
  D'après le théorème de réduction, nous pouvons écrire que :
  $$4.\overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{MB} + 5.\overrightarrow{MC} = 12.\overrightarrow{MG}$$
  Devant faire appel aux propriétés du produit scalaire, nous conseillons aux défavorisés à ce sujet de consulter le chapitre qui y est consacré.

  Mais revenons plutôt à notre ensemble $\mathcal{E}$.
  Dire qu'un point M fait partie de $\mathcal{E}$ équivaut à dire que :
  $$\left(4.\overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{MB} + 5.\overrightarrow{MC}\right).\vec{u} = \boldsymbol{k} \Leftrightarrow 12.\overrightarrow{MG}.\vec{u} = \boldsymbol{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\vec{u} = \frac{\boldsymbol{k}}{12}$$
  Là, plusieurs cas sont à envisager suivant la nullité du paramètre $\boldsymbol{k}$.

  $\rightarrow$ Si $\boldsymbol{k} = 0$ alors l'égalité devient $\overrightarrow{MG}.\vec{u} = 0$
  L'ensemble $\mathcal{E}$ est alors la droite ou le plan passant par G et dont $\vec{u}$ est un vecteur normal.

  $\rightarrow$ Si $\boldsymbol{k} \neq 0$ alors le point G et le vecteur directeur $\vec{u}$ définissent une droite $\mathcal{D}$.

  On appelle H le point de cette droite $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{GH} = -\frac{\boldsymbol{k}}{12 \times \|\vec{u}\|^2}.\vec{u}$.

Ce point H existe et est unique ! De plus : $\overrightarrow{HG}.\vec{u} = \dfrac{\boldsymbol{k}}{12 \times \|\vec{u}\|^2}.\vec{u}.\vec{u} = \dfrac{\boldsymbol{k}}{12 \times \|\vec{u}\|^2} \times \|\vec{u}\|^2 = \dfrac{\boldsymbol{k}}{12}$

Le point H fait donc partie du si convoité ensemble $\mathcal{E}$.

Mais ce n'est pas tout ! En effet, pour tout point M de l'ensemble $\mathcal{E}$, il vient que :

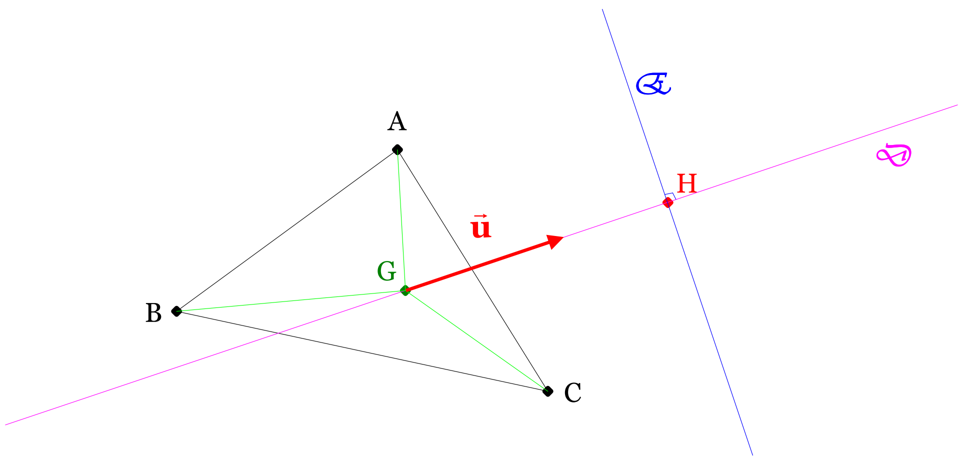
$$\overrightarrow{MG}.\vec{u} = \frac{\boldsymbol{k}}{12} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HG}\right).\vec{u} = \frac{\boldsymbol{k}}{12} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} + \underbrace{\overrightarrow{HG}.\vec{u}}_{=\boldsymbol{k}/12} = \frac{\boldsymbol{k}}{12} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0$$

Donc M appartient à la droite (ou du plan) $\Delta$ passant par H dont $\vec{u}$ est l'un des vecteurs normaux. Pour les égarés, $\Delta$ est aussi la perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ passant par H.
Réciproquement, on voit sans problème que tout point de $\Delta$ fait aussi partie de $\mathcal{E}$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite (ou le plan) dont $\vec{u}$ est l'un des vecteurs normaux et passant par le point H qui lui est défini par :

$$\overrightarrow{GH} = -\frac{\boldsymbol{k}}{12 \times \|\vec{u}\|^2}.\vec{u}$$

Représentons un tel ensemble $\mathcal{E}$ dans le plan. La figure qui suit est indicative.




Là encore, le barycentre a rendu possible le dénouement. Qu'il en soit remercié !

- ***L'ensemble des points M tels que $\|5.\overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{MB}\| = \|3.\overrightarrow{MA} - 4.\overrightarrow{MC}\|$***

Plantons le décor ! A, B et C sont trois points distincts du plan ou de l'espace.
Notre mission (que nous acceptons) est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M vérifiant l'égalité $\|5.\overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{MB}\| = \|3.\overrightarrow{MA} - 4.\overrightarrow{MC}\|$.

Là encore, le salut viendra de l'introduction de barycentres. Remarquez que si ce n'était pas le cas, nous n'en n'aurions sans doute pas parlé dans notre belle ballade !
On appelle G le barycentre des points A(5) et B(3). G' est celui des points A(3) et C(-1) qui existent car les sommes des coefficients $5+3$ et $3+(-1)$ sont non nulles
D'emblée par une simple application du théorème de réduction, il vient :

$$5.\overrightarrow{MA} + 4.\overrightarrow{MB} = 9.\overrightarrow{MG} \qquad \text{et} \qquad 3.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MG'}$$

Ainsi :

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \|5.\overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{MB}\| = \|3.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow \|8.\overrightarrow{MG}\| = \|2.\overrightarrow{MG'}\| \Leftrightarrow 8.MG = 2.MG'$$

$$\Leftrightarrow \frac{MG'}{MG} = 4$$

Et là, nous tombons sur un problème que nous avons déjà traité !
Avec ce qui a déjà été fait, nous pouvons conclure directement que :

L'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle (ou la sphère dans l'espace) de diamètre [HH'] où H et H' sont les barycentres respectifs des systèmes de points pondérés G'(1);G(4) et G'(1);G(-4).

Nous pourrions à l'envi multiplier les exemples où se manifeste la toute puissance du barycentre. Mais d'autres que moi, vous chanteront les exploits de cette notion bâtarde. Car au-delà de mes mots et de mon regard, se prolonge la ballade du barycentre...