La taverne de l'Irlandais
vous présente

Ma conquête de l'espace

Une certaine introduction à la géométrie analytique

Une aventure racomptée par Jérôme ONILLON,
Prof. désagrégé de Maths.

Diffusée exclusivement par la taverne de l'Irlandais(http://www.tanopah.com)

L'introduction de la géométrie analytique constitua en son temps une véritable révolution en ce sens qu'elle remplaçait des problèmes de formes par des problèmes de nombres.
Ce qui va être entrepris ici, est la suite de ce qui a déjà été fait dans le plan.
Aux points, nous allons substituer des triplets de réels. Les plans et les droites seront remplacés par des équations. A la fin, tout ne sera plus que problèmes de nombres.
Car après nos ébats, il demeurera des problèmes, c'est-à-dire de quoi s'occuper !
Nous appuyant sur d'innombrables exemples, nous allons chevaucher à travers les grands espaces.
Après quatre années d'attente, voici venu le temps de cette aventure en vert et blanc, voici venu le temps de Ma conquête de l'espace...

Nous tenons à avertir notre lecteur ou lectrice que certains développements n'apparaissent dans aucun programme officiel. En quelque sorte, nous allons innover...
Ce cours s'adresse aux élèves de Première et Terminale scientifique (et aux autres...)
La table des matières se trouve en dernière page !

Edition du samedi 26 juillet 2003
Le vent emporte mes pensées

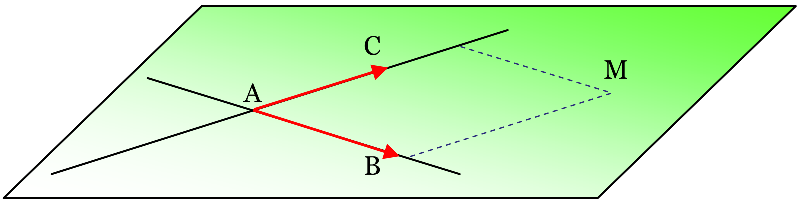
Première époque : au commencement . . .

Contrairement à ce que le titre pourrait laisser entendre, ce n'est pas la première fois que nous nous aventurons dans l'espace. Les droites et autres plans sont de vieilles connaissances.
A l'instar de la géométrie plane, notre ambition est de numériser celle de l'espace.
Au commencement de notre aventure, les seules choses que nous sachions, portent sur des histoires de droites, de plans, de parallélisme, d'orthogonalité et aussi de vecteurs. Ultime remarque : la géométrie de l'espace restreinte à un plan devient de la géométrie plane.

Une relation vectorielle pour quatre points coplanaires

Si deux points sont toujours alignés, il est aussi connu que trois points sont toujours coplanaires. A partir de quatre points, les choses se compliquent.
Notre premier objectif va être de répondre à cette obsédante question : à quelle condition quatre points sont-ils alignés ? Précisons que nous cherchons une condition vectorielle.

Soient donc A, B et C trois points non alignés. Ils définissent donc un plan ABC.
Ce qui a été fait en géométrie plane, est applicable au plan ABC : nous pouvons munir le plan ABC d'un repère.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant non colinéaires, le triplet $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est donc un repère du plan ABC.



Par conséquent, pour tout point M du plan ABC, il existe deux réels x_M et y_M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x_M.\overrightarrow{AB} + y_M.\overrightarrow{AC}$$

Ces deux réels sont les coordonnées du point M dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Réciproquement, la question que l'on peut se poser est :

S'il existe deux réels $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{l}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{k}.\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{l}.\overrightarrow{AC}$, peut-on dire pour autant que le point M fait partie du plan ABC ?

Pour répondre sur cette question, nous devons introduire le point N défini par $\overrightarrow{AN} = \boldsymbol{k}.\overrightarrow{AB}$
La première chose à dire est qu'appartenant à la droite (AB), N fait partie aussi du plan ABC.
Ensuite, la relation vectorielle définissant le point M évolue :

$$\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{k}.\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{l}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \boldsymbol{l}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \boldsymbol{l}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \boldsymbol{l}.\overrightarrow{AC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires. Donc les droites (NM) et (AC) sont parallèles.
Or deux droites parallèles sont toujours coplanaires. Nous en déduisons donc que les quatre points A, N, C et M sont coplanaires.
Trois d'entre eux appartenant au plan ABC, il en va de même pour le quatrième point M.

Théorème
Dire que quatre points A, B, C et D sont coplanaires équivaut à dire qu'il existe deux réels $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{l}$ tels que $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{k}.\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{l}.\overrightarrow{AC}$

Un mot sur l'utilité de ce théorème : avant qu'il n'existe, rien ne garantissait qu'un point M défini par une relation vectorielle du type $\overrightarrow{AM} = \boldsymbol{k}.\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{l}.\overrightarrow{AC}$, appartiendrait au plan ABC même si cela pouvait sembler naturel ! C'est une chose dont à présent nous sommes sûrs ! Merci le théorème !

Une conséquence de ce théorème, est que l'ensemble des points de l'espace engendré par un point et deux vecteurs non colinéaires est un plan. C'est exactement comme si on avait deux droites sécantes...

Une famille de trois vecteurs libre

Contrairement à ce que certains pourraient penser, il ne s'agit pas là d'un nouveau mouvement d'émancipation mais plutôt d'une intrusion de l'algèbre linéaire.

Définition
Dire que trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une famille libre signifie que le seul triplet de réels $(\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b} ; \boldsymbol{c})$ vérifiant l'égalité $\boldsymbol{a}.\vec{u} + \boldsymbol{b}.\vec{v} + \boldsymbol{c}.\vec{w} = \vec{o}$ est le triplet (0 ; 0 : 0).

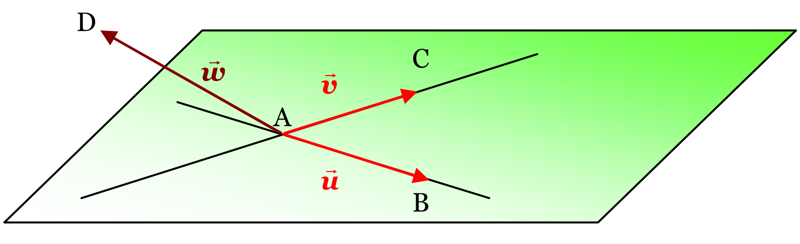
En clair, lorsqu'une famille de trois vecteurs $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ est libre, il n'est pas possible de les lier linéairement entre eux. En ayant deux, il n'est pas possible d'obtenir le troisième au moyen d'une relation linéaire de la forme $\vec{w} = \boldsymbol{k}.\vec{u} + \boldsymbol{l}.\vec{v}$.
D'ailleurs au terme de "famille libre", certains préfèrent l'appellation de "vecteurs linéairement indépendants".

Dans l'espace, lorsque trois vecteurs sont linéairement indépendants alors ils ne sont pas coplanaires. C'est-à-dire que lorsque l'on les représente à partir d'un même point A alors ils ne sont pas portés par un même plan. Voyons pourquoi !

Soit $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ une famille libre de trois vecteurs non nuls et A un point de l'espace.
Nous définissons les points B, C et D par :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \qquad \overrightarrow{AC} = \vec{v} \qquad \overrightarrow{AD} = \vec{w}$$

Les points A, B, C et D ne peuvent pas être coplanaires. En effet, si tel était le cas alors il existerait deux réels $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{l}$ tels que $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{k}.\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{l}.\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire tels que $\vec{w} = \boldsymbol{k}.\vec{u} + \boldsymbol{l}.\vec{v}$.
Or cette dernière relation pourrait aussi s'écrire $\boldsymbol{k}.\vec{u} + \boldsymbol{l}.\vec{v} - \vec{w} = \vec{o}$.
Elle contredirait alors le fait que la famille $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ fut libre.



En conséquence, nous pouvons l'affirmer.

Trois vecteurs libres ne sont jamais coplanaires.

Vers la notion de repère et de coordonnées

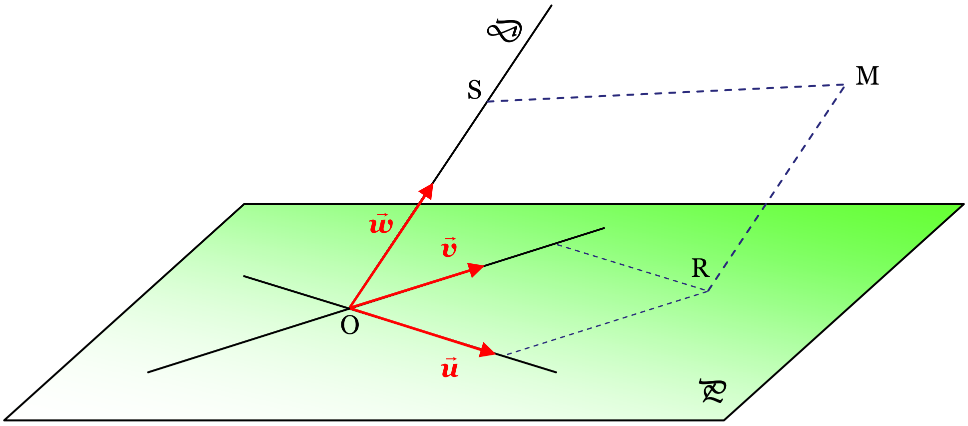
Dans tout ce qui suit, la famille de vecteurs $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ est et sera une famille libre. O est lui un point quelconque de l'espace.
La première chose à dire est que le point O définit avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un plan $\mathcal{P}$.

Ensuite, le point O définit avec le vecteur $\vec{w}$ une droite $\mathcal{D}$.
Comme les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires (car non liés) alors le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants et leur point d'intersection est O.
Ainsi que cela a déjà été fait dans le plan, nous allons à présent user de projections pour accomplir notre oeuvre. Sauf qu'il s'agit ici de projections dans l'espace...

Soit M un point quelconque de l'espace. On appelle alors :

- R son projeté sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite $\mathcal{D}$.
  Ce point R est l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la parallèle à la droite $\mathcal{D}$ passant par M.
- S son projeté sur la droite $\mathcal{D}$ parallèlement au plan $\mathcal{P}$.
  Ce point S est l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par M.

Bref la situation est la suivante :



Du fait de toutes nos projections, nous devons préciser que les points O, R, M et S sont coplanaires et surtout qu'ils forment un parallélogramme. Ainsi avons-nous que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{RM}$

Cette situation a deux conséquences :

- D'abord, comme R est un point du plan $\mathcal{P}$ dont l'un des repères est $(O;\vec{u},\vec{v})$ alors il existe deux réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ tels que $\overrightarrow{OR} = \boldsymbol{a}.\vec{u} + \boldsymbol{b}.\vec{v}$.
- Ensuite, comme S est un point de la droite $\mathcal{D}$ alors il existe un réel $\boldsymbol{c}$ tel que $\overrightarrow{OS} = \boldsymbol{c}.\vec{w}$.

Utilisant ces deux trouvailles, nous pouvons écrire que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RM} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = \boldsymbol{a}.\vec{u} + \boldsymbol{b}.\vec{v} + \boldsymbol{c}.\vec{w}$$

Ainsi pour tout point M, existe-t-il au moins un triplet $(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{c})$ tel que $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a}.\vec{u} + \boldsymbol{b}.\vec{v} + \boldsymbol{c}.\vec{w}$
Ce qui serait bien, c'est qu'il soit unique ! Car alors, nous pourrions parler de coordonnées comme dans le plan. Voyons si c'est le cas.

Supposons que pour un point M, il existe deux triplets de réels $(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{c})$ et $(\boldsymbol{a'}\,;\boldsymbol{b'}\,;\boldsymbol{c'})$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a}.\vec{u} + \boldsymbol{b}.\vec{v} + \boldsymbol{c}.\vec{w} = \boldsymbol{a'}.\vec{u} + \boldsymbol{b'}.\vec{v} + \boldsymbol{c'}.\vec{w}$$

Nous pouvons alors écrire que :

$$(\boldsymbol{a}.\vec{u} + \boldsymbol{b}.\vec{v} + \boldsymbol{c}.\vec{w}) - (\boldsymbol{a'}.\vec{u} + \boldsymbol{b'}.\vec{v} + \boldsymbol{c'}.\vec{w}) = \vec{o} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a'}).\vec{u} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b'}).\vec{v} + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c'}).\vec{w} = \vec{o}$$

Or la famille de vecteurs $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ a été choisie comme étant libre. En application de la définition de la liberté, cela implique donc que $\begin{cases} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a'} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b'} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b'} \\ \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c'} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c'} \end{cases}$

Autrement, par chaque point M, il existe un unique triplet de réels (***a*** ; ***b*** ; ***c***) vérifiant l'égalité

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a}.\vec{u} + \boldsymbol{b}.\vec{v} + \boldsymbol{c}.\vec{w}$$

Nous venons de définir ce que sont les coordonnées d'un point M dans un repère $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

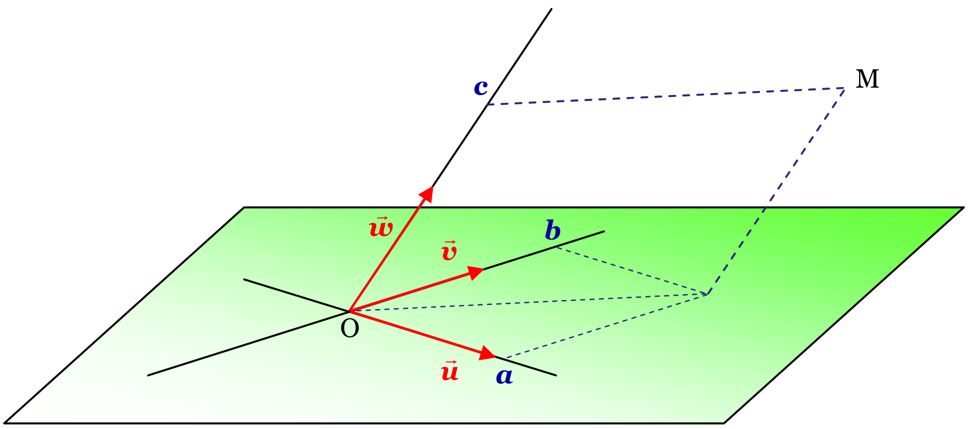
Ayant vu ce qu'étaient les coordonnées d'un point dans un repère. A présent, il nous reste à mettre tout cela en forme...

Ce qu'il faut retenir de tout cela

Voici arrivé le moment où nous allons révéler à la face du monde ce que nous avons découvert.

Définition d'une base, d'un repère et des coordonnées d'un point

- On appelle base de l'espace toute famille libre de trois vecteurs non nuls.
- Un repère est la donnée d'un point O de l'espace et d'une base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.
- Si $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est un repère de l'espace alors pour tout point M, il existe un unique triplet de trois réels (***a*** ; ***b*** ; ***c***) tels que $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{a}.\vec{u} + \boldsymbol{b}.\vec{v} + \boldsymbol{c}.\vec{w}$.
  Ce triplet (***a*** ; ***b*** ; ***c***) est les coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.
  La première coordonnée ***a*** est appelée abscisse, la seconde ***b*** ordonnée et la troisième ***c*** cote.



Ce qui vient d'être écrit, n'est pas sans rappeler ce qui avait été fait dans le plan. Là déjà, nous avions parlé de coordonnées, de repère et de base.
Revenons sur cette notion de base. Pour que famille de trois vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit une base, il suffit qu'elle soit libre. Nous pourrions nous contenter de dire qu'ils ne doivent pas être coplanaires. De toute façon, il s'agit de deux notions équivalentes.

Depuis le début de notre chevauchée, nous avons travaillé avec les vecteurs $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Cependant, l'usage veut plutôt que la base soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Le plus souvent, on est amené à travailler dans des repères particuliers que l'on qualifie orthonormé. Nous avons déjà parlé des différents types de repères dans le plan. Définissons-les dans l'espace.

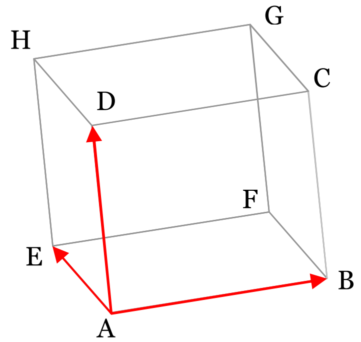
- Dire qu'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (ou la base associée) est normé signifie que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont des normes égales. Leur norme est alors l'unité de longueur du repère.
- Dire qu'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (ou la base associé) est orthogonal signifie que les directions des vecteurs sont deux à deux orthogonales.

- Un repère <u>orthonormé</u> est un repère qui à la fois orthogonal et normé. C'est un des types de repères les plus prisés par l'Education Nationale. On se demande pourquoi...

Dans la suite, nous travaillerons dans un repère quelconque $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Un repère dans un pavé

Avant de nous attaquer aux coordonnées d'un vecteur, nous allons nous familiariser avec les notions de repère et de coordonnées. Pour cela, nous allons travailler dans le pavé non nécessairement droit ABCDEFGH.



Donnons les coordonnées des huit sommets dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

- Le point A pour coordonnées (0 ; 0 ; 0) car c'est l'origine.
- B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0) et E(0 ; 0 ; 1) car ces points marquent les unités sur les axes de coordonnées.
- Le point F a pour coordonnées (1 ; 1 ; 0) car $\overrightarrow{AF}=1\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AD}+0\times\overrightarrow{AE}$
- Les points C et H ont respectivement pour coordonnées (1 ; 1 ; 0) et (0 ; 1 ;1).
- Le point G a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1) car $\overrightarrow{AF}=1\times\overrightarrow{AB}+1\times\overrightarrow{AD}+1\times\overrightarrow{AE}$

L'ordre d'énoncé des vecteurs d'une base ou d'un repère à son importance. Le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ n'est pas le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$.

En effet, dans le premier le point F a pour coordonnées (1 ; 1 ; 0) alors que dans le second repère ses coordonnées sont (1 ; 0 ; 1).

Dans l'énoncé d'une base ou d'un repère, l'ordre des vecteurs à son importance.

Nous avons parlé des coordonnées d'un point. A présent, nous allons nous intéresser à celle d'un vecteur. Ce qui nous permettra de revenir sur cette notion de base.

Les coordonnées d'un vecteur

Le vecteur a ceci de désagréable sur le point qu'il n'est pas fixe et qu'il peut se trouver un peu partout dans l'espace. Nous allons travailler avec un vecteur sympa que nous noterons $\vec{u}$.

Appelons A le point de l'espace défini par $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$.

Ce point A a des coordonnées (***a*** ; ***b*** ; ***c***). Ensembles, ils vérifient l'égalité vectorielle :

$$\vec{u}=\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}$$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe donc (au moins) un triplet de réels (***a*** ; ***b*** ; ***c***) vérifiant l'égalité vectorielle $\vec{u}=\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}$. Reste à savoir combien il y en a ?

Supposons que pour notre vecteur $\vec{u}$, il existe deux triplets (***a*** ; ***b*** ; ***c***) et (***a'*** ; ***b'*** ; ***c'***) vérifiant l'égalité précédente. On peut alors écrire que :

$$\underbrace{\left(\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}\right)}_{\vec{u}\text{ avec premier triplet}}-\underbrace{\left(\boldsymbol{a'}.\vec{i}+\boldsymbol{b'}.\vec{j}+\boldsymbol{c'}.\vec{k}\right)}_{\vec{u}\text{ avec second triplet}}=\vec{o}\Leftrightarrow\left(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a'}\right).\vec{i}+\left(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b'}\right).\vec{j}+\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c'}\right).\vec{k}=\vec{o}$$

Or la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est aussi une famille de vecteurs libres. Appliquant la définition, il vient

donc que $\begin{cases} \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a'}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b}-\boldsymbol{b'}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{b}=\boldsymbol{b'} \\ \boldsymbol{c}-\boldsymbol{c'}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{c}=\boldsymbol{c'} \end{cases}$.

Pour chaque vecteur $\vec{u}$, il n'existe donc qu'un seul triplet ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$) tel que $\vec{u}=\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}$.
En lui, nous tenons les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Définition des coordonnées d'un vecteur
Si les trois vecteurs $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ forment une base de l'espace alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet de réels ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}$) vérifiant l'égalité $\vec{u}=\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}$.
Ce triplet est appelé coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Cette définition nous amène à faire plusieurs remarques :

- A l'instar de ce qui se dit pour les points, la première coordonnées d'un vecteur est appelée abscisse, la seconde ordonnée et la troisième cote. L'habitude veut que les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ soient notées $\left(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}};z_{\vec{u}}\right)$.

- Pareillement à ce qui se fait dans le plan, les coordonnées d'un vecteur ne sont pas relatives à un repère mais à une base. Car un vecteur n'a pas d'origine et peut se trouver partout dans l'espace. Par abus de langage, on en reste bien souvent au repère.

- Nous avons dit qu'une base de l'espace était une famille libre de trois vecteurs. Sachez que dans l'espace, il n'existe pas de famille libre comportant quatre vecteurs. Trois est le maximum.
  Une famille libre de deux vecteurs est un couple de deux vecteurs non colinéaires.
  Une base est aussi une famille génératrice. C'est-à-dire qu'à partir des trois vecteurs qui la composent, on peut obtenir tous les autres via de combinaisons linéaires du type $\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}$.
  Il n'existe pas de famille génératrice comportant moins de trois vecteurs. C'est le minimum requis. Par contre, rien n'empêche de constituer des familles génératrices de quatre voire cinq vecteurs. Même si alors, un voire deux ne servent à rien.
  En algèbre linéaire, on dit qu'une base est une famille libre et génératrice.

Notre dernière définition énonce que les coordonnées d'un vecteur existent toujours et qu'en plus, elles sont uniques. Cela nous permet de caractériser l'égalité de deux vecteurs.

Théorème
Dire que deux vecteurs sont égaux équivaut à dire que leurs trois coordonnées sont égales.

Cela peut paraître naturel mais encore fallait-il le dire !

Un vecteur peut être additionné à un autre, voire multiplié par un réel. Et comme dans le plan, ces opérations se répercutent au niveau des coordonnées.
Toutes nos définitions combinées aux propriétés des diverses opérations vectorielles nous permettent d'affirmer ce qui suit.

Intéressons-nous à la somme de deux vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$.

Si $\vec{u}$ a pour coordonnées (***a*** ; ***b*** ; ***c***) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ alors $\vec{u}=\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}$.

De même, si le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées (***a'*** ; ***b'*** ; ***c'***) alors $\vec{v}=\boldsymbol{a'}.\vec{i}+\boldsymbol{b'}.\vec{j}+\boldsymbol{c'}.\vec{k}$

Nous pouvons alors écrire :

$$\vec{u}+\vec{v}=\underbrace{\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}}_{}+\underbrace{\boldsymbol{a'}.\vec{i}+\boldsymbol{b'}.\vec{j}+\boldsymbol{c'}.\vec{k}}_{}=\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a'}\right).\vec{i}+\left(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b'}\right).\vec{j}+\left(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c'}\right).\vec{k}$$

Donc les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ sont $\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a'};\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b'};\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c'}\right)$.

De même, pour tout réel λ, nous avons :

$$\lambda.\vec{u}=\lambda.\left[\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}\right]=\left(\lambda.\boldsymbol{a}\right).\vec{i}+\left(\lambda.\boldsymbol{b}\right).\vec{j}+\left(\lambda.\boldsymbol{c}\right).\vec{k}$$

Donc les coordonnées du vecteur $\lambda.\vec{u}$ sont $\left(\lambda.\boldsymbol{a};\lambda.\boldsymbol{b};\lambda.\boldsymbol{c}\right)$

De même, si A et B sont deux points de l'espace, alors nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\\&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=\left[x_B.\vec{i}+y_B.\vec{j}+z_B.\vec{k}\right]-\left[x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}+z_A.\vec{k}\right]=\left(x_B-x_A\right).\vec{i}+\left(y_B-y_A\right).\vec{j}+\left(z_B-z_A\right).\vec{k}\end{aligned}$$

Donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par $\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$.

Nous avons étendu à l'espace des propriétés déjà rencontrées dans le plan. Elles vont entrées en action avec l'exemple qui suit...

Les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle

Pour conclure cette première époque, nous allons voir comment déterminer les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle.

La situation est donc la suivante :

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, nous disposons des points $A(2;-1;3)$, $B(4;1;5)$ et $C(-2;5;-7)$.

Déterminons les coordonnées du point M défini par $2.\overrightarrow{AM}+3.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MB}$.

La première chose à faire est de mettre un nom sur nos trois inconnues. Faisant preuve d'une exceptionnelle inventivité, nous notons $\left(x_M;y_M;z_M\right)$ les coordonnées de M. Nous avons que :

- Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $\left(x_M-2;y_M+1;z_M-3\right)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-4;6;-10)$
- Le vecteur $\overrightarrow{MB}$ a pour coordonnées $\left(4-x_M;1-y_M;5-z_M\right)$.

L'égalité vectorielle $2.\overrightarrow{AM}+3.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MB}$ peut être écrite en remplaçant chacun des trois vecteurs par ses coordonnées. Il vient alors :

$$2.\begin{pmatrix}x_M-2\\y_M+1\\z_M-3\end{pmatrix}+3.\begin{pmatrix}-4\\6\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-x_M\\1-y_M\\5-z_M\end{pmatrix}\underset{\text{On distribue les facteurs 2 et 3 sur les coordonnées}}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}2.x_M-4\\2.y_M+2\\2.z_M-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12\\18\\-30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-x_M\\1-y_M\\5-z_M\end{pmatrix}\underset{\text{On additionne les coordonnées}}{\Leftrightarrow}\begin{pmatrix}2.x_M-16\\2.y_M+20\\2.z_M-36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-x_M\\1-y_M\\5-z_M\end{pmatrix}$$

Pour contrer toute critique précisons qu'une fois qu'un repère a été fixé, chaque vecteur est parfaitement défini par ses coordonnées. Réciproquement, à chaque triplet de coordonnées correspond un vecteur unique ! La seule chose que nous ayons faite, c'est numériser les vecteurs.
Mais de notre point de vue, le problème n'est pas là ! En effet, nous le savons : deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales. La dernière égalité de coordonnées nous amène donc à trois équations toutes simples.

$$\begin{pmatrix} 2.x_M - 16 \\ 2.y_M + 20 \\ 2.z_M - 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x_M \\ 1 - y_M \\ 5 - z_M \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Abscisses égales :} & 2.x_M - 16 = 4 - x_M \\ \text{Ordonnées égales :} & 2.y_M + 20 = 1 - y_M \\ \text{Cotes égales :} & 2.z_M - 36 = 5 - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 20/3 \\ y_M = -19/3 \\ z_M = 41/3 \end{cases}$$

Les coordonnées du point M dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ sont donc $\left(\frac{20}{3};-\frac{19}{3};\frac{41}{3}\right)$.

Là encore, on entend déjà les récriminations des bonnes âmes : des coordonnées de vecteurs qui étaient notées horizontalement, viennent de l'être verticalement. Quelle horreur !
Un psy vous dirait qu'il s'agit là d'un signe évidement de versatilité ou d'un manque de confiance en soi. Il est vrai qu'en règle générale, on choisit un sens et l'on s'y tient !
Mais de nôtre point de vue, la seule chose qui importe, est la clarté du propos !

Un point particulier qui peut être défini par une égalité vectorielle, est le milieu d'un segment.
En effet, si un point I est le milieu d'un segment [AB] alors nous avons $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$.
Traduisons cette égalité vectorielle en terme de coordonnées. Il vient alors :

$$\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \\ z_I - z_A \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I - x_A = x_B/2 - x_A/2 \\ y_I - y_A = y_B/2 - y_A/2 \\ z_I - z_A = z_B/2 - z_A/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \left(x_A + x_B\right)/2 \\ y_I = \left(y_A + y_B\right)/2 \\ z_I = \left(z_A + Z_B\right)/2 \end{cases}$$

Deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales

Ainsi, retombons-nous sur une formule bien connue dans le plan :

Les coordonnées du milieu du segment [AB] sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2};\frac{y_A + y_B}{2};\frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

C'est sur cette propriété que s'achève la première époque de notre conquête...

Seconde époque : à propos des droites dans l'espace

Dans le plan et pour peu que l'on travaille dans un repère, à chaque droite correspond une flopée d'équations qui peuvent cartésiennes, réduites ou autres. Il s'agit là de tests d'appartenance. Si les coordonnées d'un point vérifient l'équation de ladite droite alors il en fait partie.
Dans l'espace, les choses vont autrement. Les équations de droite n'existent pas. Tout du moins, pas sous la forme que nous leur connaissions...
Dans ce qui suit, nous supposerons l'espace muni d'un repère quelconque $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Des vecteurs colinéaires

Ce n'est un scoop pour personne, mais dans l'espace comme dans le plan, dire de deux vecteurs qu'ils sont colinéaires, cela signifie qu'ils ont la même direction. Autrement dit, qu'ils sont portés par des droites parallèles.
Dans le plan, il existe un test sur les coordonnées permettant de dire si deux vecteurs sont colinéaires : c'est le déterminant. Voyons s'il existe un équivalent dans l'espace.

Pour notre enquête, nous allons travailler avec les vecteurs $\vec{u}\,(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{c})$ et $\vec{v}\,(\boldsymbol{a'}\,;\boldsymbol{b'}\,;\boldsymbol{c'})$.
Si ces deux vecteurs sont colinéaires alors d'une certaine façon, ils sont proportionnels.
C'est-à-dire qu'il existe un réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\vec{u}=\boldsymbol{k}.\vec{v}$. A partir de là, les étapes s'enchaînent...

$$\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \vec{u}=\boldsymbol{k}.\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\end{pmatrix}=\boldsymbol{k}.\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k.a'}\\\boldsymbol{b}=\boldsymbol{k.b'}\\\boldsymbol{c}=\boldsymbol{k.c'}\end{cases}$$

Et là, il est impossible d'aller plus loin car on a un seul paramètre et trois équations. Il nous restera donc toujours un cas. La seule chose que nous puissions dire est :

Deux vecteurs colinéaires ont leurs coordonnées sont proportionnelles. Et réciproquement !

Faut-il se résigner à cette peu glorieuse réalité et abandonner l'idée d'un test de colinéarité à l'image du déterminant dans le plan ?
La réponse est non mais ce que nous allons faire, ne figure dans aucun manuel scolaire.

Lorsque deux couples $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a'}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{b'}\end{pmatrix}$ sont proportionnelles, leurs produits en croix $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b'}$ et $\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{b}$ sont égaux. Nous pourrions aussi dire que leur différence $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{b}$ est nulle.
Passons maintenant à trois couples.
Pour que les couples $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a'}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{b'}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{c'}\end{pmatrix}$ soient proportionnels, il faut et il suffit que le premier le soit avec le second, qu'il le soit aussi avec le troisième et enfin que le second le soit avec le troisième.
Bref, il faut et suffit que les trois différences $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{b'}\times\boldsymbol{c}$ soient nulles toutes les trois. Notre test de colinéarité découle de cette observation.

Théorème : MON TEST de colinéarité dans l'espace
Dire que deux vecteurs $\vec{u}\,(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{c})$ et $\vec{v}\,(\boldsymbol{a'}\,;\boldsymbol{b'}\,;\boldsymbol{c'})$ sont colinéaires équivaut à dire que la quantité $\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{b}\right|+\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{c}\right|+\left|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{b'}\times\boldsymbol{c}\right|$ est nulle.

J'ignore si ce test porte déjà un nom. Sinon, je propose de lui donner le mien. Au moins, aurais-je laissé quelque chose de valeur derrière moi ! A ce propos, démontrons qu'il en a !

La preuve de MON TEST !

Nous devons établir une implication et sa réciproque.

- Si $\vec{u}\,(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{c})$ et $\vec{v}\,(\boldsymbol{a'}\,;\boldsymbol{b'}\,;\boldsymbol{c'})$ sont deux vecteurs colinéaires alors nous avons vu que les différences $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{b'}\times\boldsymbol{c}$ étaient nulles.
  Il en va alors de même pour la quantité $\underbrace{\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{b}\right|}_{=0}+\underbrace{\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{c}\right|}_{=0}+\underbrace{\left|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{b'}\times\boldsymbol{c}\right|}_{=0}$.
- Si $\vec{u}\,(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{c})$ et $\vec{v}\,(\boldsymbol{a'}\,;\boldsymbol{b'}\,;\boldsymbol{c'})$ sont deux vecteurs tels que la somme de valeurs absolues $\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{b}\right|+\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{c}\right|+\left|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{b'}\times\boldsymbol{c}\right|$ est nulle alors la première chose à dire que la somme de deux nombres positifs n'est nulle que lorsque les deux termes le sont eux-mêmes.
  Une valeur absolue étant toujours positive ou nulle, il vient donc que :
  $$\underbrace{\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{b}\right|}_{\text{Une valeur absolue}}+\underbrace{\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{c}\right|}_{\text{Autre valeur absolue}}+\underbrace{\left|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{b'}\times\boldsymbol{c}\right|}_{\text{Autre valeur absolue}}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{b}\right|=0\\\left|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{c}\right|=0\\\left|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{b'}\times\boldsymbol{c}\right|=0\end{cases}$$
  Or le seul nombre dont la valeur absolue soit nulle, est 0.
  Nécessairement les différences $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{a'}\times\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c'}-\boldsymbol{b'}\times\boldsymbol{c}$ sont donc nulles. De là, nous pouvons affirmer que les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles et que donc ces derniers sont colinéaires.

Ce qui prouve la valeur de mon test !

Mettons en application MON TEST sur deux exemples.

- Pour déterminer si $\vec{u}\,(3\,;-5\,;9)$ et $\vec{v}\,(-6\,;10\,;-18)$ sont colinéaires, appliquons leur MON TEST !
  $$|3\times10-(-5)\times(-6)|+|3\times(-18)-9\times(-6)|+|(-5)\times(-18)-9\times10|=|0|+|0|+|0|=0$$
  Comme le test est nul alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  Les plus observateurs d'entre nous auront remarqué que : $\vec{u}=-2.\vec{v}$.

- Regardons à présent, si les points A(2 ; 7 ; 9), B(-3 ; 8 ; 3) et C(12 ; 5 ; 19) sont alignés.
  Pour cela, testons la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}\,(-5\,;1\,;-6)$ et $\overrightarrow{AC}\,(10\,;-2\,;10)$.
  $$|(-5)\times(-2)-10\times1|+|(-5)\times10-(-6)\times10|+|1\times10-(-2)\times(-6)|=|0|+|10|+|-2|=12$$
  Comme le test n'est pas nul alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
  Mais là encore, nous aurions pu voir directement que les coordonnées n'étaient pas proportionnelles. Notamment au niveau des cotes…

Avant d'aller plus loin, nous devons apporter quelques précisions quant à MON TEST.

- Pour MON TEST, nous recourons à la valeur absolue. Mais sachez que nous aurions pu tout aussi bien nous rabattre sur la fonction carrée ou sur toute autre fonction par laquelle 0 est sa propre image et qui sinon, et à valeurs strictement positives (ou bien strictement négatives).
- Pour établir la proportionnalité de trois couples, on pourrait penser qu'il suffit de prouver que le premier est proportionnel avec le second, puis qu'il l'est avec le troisième. La transitivité ("les amis de mes amis…") ferait alors que le second couple serait proportionnel au troisième. Mais c'est faux lorsque le premier couple est $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$!

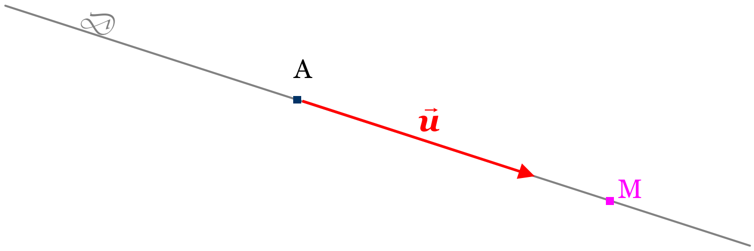
MON TEST semblera à beaucoup assez lourd et peu pratique. Au risque de nous répéter, précisons que ce test de colinéarité n'est pas reconnu par l'Education Nationale ou toute autre instance de référence. Et pourtant, il va nous servir !

Une équation pour les droites ?

Dans le plan pour peu qu'on le munisse d'un repère, chaque droite peut être modélisée par toute une cargaison d'équations cartésiennes du type $a.x + b.y + c = 0$.
Dans l'espace, les choses ne sont pas aussi simples. Voyons cela !

Dans l'espace comme dans le plan, une droite peut être définie par deux points ou, par un point et un vecteur que l'on dit directeur.

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et dont l'un des vecteurs directeurs est $\vec{u}\,(\boldsymbol{a}\,;\,\boldsymbol{b}\,;\,\boldsymbol{c})$.
La situation est donc la suivante :



Il est clair que si M est un point de cette droite $\mathcal{D}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Et réciproquement ! En enchaînant, on arrive alors à :

$$M(x_M;y_M;z_M) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$
$$\iff \text{Il existe un réel } \boldsymbol{k} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \boldsymbol{k}.\vec{u}$$
$$\iff \text{Il existe un réel } \boldsymbol{k} \text{ tel que } \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \\ z_M - z_A \end{pmatrix} = \boldsymbol{k}.\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_M = x_A + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{a} \\ y_M = y_A + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{b} \\ z_M = z_A + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{c} \end{cases}$$

Et là, on ne peut pas aller plus loin ! C'est le mieux que nous puissions faire...dans cette voie ! Car dans l'espace, une droite ne peut pas être modélisée par une équation linéaire du type $\boldsymbol{a}.x + \boldsymbol{b}.y + \boldsymbol{c}.z + \boldsymbol{d} = 0$. Ce genre d'équation est réservée aux plans.
Sauf à verser dans les équations exotiques, le seul test d'appartenance sympathique à la droite $\mathcal{D}$ que l'on puisse trouver est ce à quoi nous avons abouti : un système d'équations paramétriques aussi appelé représentation paramétrique.
L'adjectif paramétrique fait référence au paramètre $\boldsymbol{k}$ qui est unique pour un point M donné.

Réciproquement, en remontant notre raisonnement, on prouve que si les coordonnées d'un point M vérifient le système $\begin{cases} x_M = x_0 + \boldsymbol{a}.t \\ y_M = y_0 + \boldsymbol{b}.t \\ z_M = z_0 + \boldsymbol{c}.t \end{cases}$ pour un certain réel t alors ce point M fait partie de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(\boldsymbol{a}\,;\,\boldsymbol{b}\,;\,\boldsymbol{c})$.
On aboutit au théorème suivant :

Théorème
La droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(\boldsymbol{a}\,;\,\boldsymbol{b}\,;\,\boldsymbol{c})$ est l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = x_0 + \boldsymbol{a}.t \\ y = y_0 + \boldsymbol{b}.t \\ z = z_0 + \boldsymbol{c}.t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un réel décrivant } \mathbb{R}.$$

Nous avons mis en place un assez bel outil. Voyons à présent comment marche ce test d'appartenance à une droite sur un exemple.

Par exemple, intéressons-nous à la droite qui passe par les points A(3 ; -2 ; 1) et B(-4 ; 7 ; 2).
En disant que cette droite (AB) passe par le point A et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ (-7 ; 9 ; 1), on arrive alors à la représentation paramétrique de la droite (AB) suivante.

$$(AB) : \begin{cases} x = 3 - 7.t \\ y = -2 + 9.t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un réel décrivant } \mathbb{R}$$

Pour savoir si le point C(-18 ; 25 ; 4) fait partie de la droite (AB), nous devons chercher s'il existe un réel *t* qui ferait que les coordonnées de C vérifieraient le système d'équations paramétriques.
Pratiquement, nous devons résoudre le système de trois équations mais à une seule inconnue *t* suivant :

$$\begin{cases} -18 = 3 - 7.t \\ 25 = -2 + 9.t \\ 4 = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21 = -7.t \\ 27 = 9.t \\ 3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = t \\ 3 = t \\ 3 = t \end{cases}$$

Comme les trois équations admettent pour solution 3 alors 3 est la solution du système.
Comme pour $t = 3$, les coordonnées de C vérifient la représentation paramétrique de la droite (AB) qu'est $\begin{cases} x = 3 - 7.t \\ y = -2 + 9.t \\ z = 1 + t \end{cases}$, alors nous pouvons conclure que C appartient de la droite (AB).

Il en va différemment avec le point D(17 ; -20 ; -2). Introduisant ces coordonnées dans la représentation paramétrique de la droite (AB), nous devons alors résoudre le système :

$$\begin{cases} 17 = 3 - 7.t \\ -20 = -2 + 9.t \\ -2 = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14 = -7.t \\ -18 = 9.t \\ -3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = t \\ -2 = t \\ 3 = t \end{cases}$$

Et là, ça coince ! En effet, comme les trois équations n'ont pas la même solution alors le système n'a aucune solution.
Comme il n'existe aucun réel t permettant aux coordonnées du D de vérifier la représentation paramétrique de la droite (AB) alors le point D n'appartient pas à la droite (AB).

Un petit mea culpa : tout au long de nos deux exemples, nous avons parlé de la représentation paramétrique de la droite (AB). En fait, nous aurions dû dire une représentation paramétrique.
En observant la définition, on comprend qu'une droite a autant de représentations paramétriques qu'elle a de points et de vecteurs directeurs.

Pour pratique que soit cette représentation paramétrique, elle ne comble pas notre soif d'une équation-test ! Faut-il pour autant tout abandonner ?
Non car en dépit de ce que certains peuvent dire, les équations de droites dans l'espace existent bel et bien ! Nous allons vous le prouver !

L'histoire oubliée des équations de droite dans l'espace

L'autre vision que nous proposons, repose sur notre test de colinéarité. A l'instar de ce dernier, il s'agit d'une aventure vers des contrées perdue. C'est pourquoi nous y allons !

Comme précédemment, nous allons travailler avec la droite $\mathcal{D}$ qui passe par le point $A(x_0;y_0;z_0)$ et dont l'un des vecteurs directeurs est $\vec{u}\,(\boldsymbol{a}\;;\boldsymbol{b}\;;\boldsymbol{c})$. Nous pouvons écrire que :

$$M(x;y;z)\in\mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x-x_0;y-y_0;z-z_0) \text{ et } \vec{u}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}) \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \left|(x-x_0)\times\boldsymbol{b}-(y-y_0)\times\boldsymbol{a}\right|+\left|(x-x_0)\times\boldsymbol{c}-(z-z_0)\times\boldsymbol{a}\right|+\left|(y-y_0)\times\boldsymbol{c}-(z-z_0)\times\boldsymbol{b}\right|=0$$

$$\Leftrightarrow \left|\boldsymbol{b}.x-\boldsymbol{a}.y+(\boldsymbol{a}.y_0-\boldsymbol{b}.x_0)\right|+\left|\boldsymbol{c}.x-\boldsymbol{a}.z+(\boldsymbol{a}.z_0-\boldsymbol{c}.x_0)\right|+\left|\boldsymbol{c}.y-\boldsymbol{b}.z+(\boldsymbol{b}.z_0-\boldsymbol{c}.y_0)\right|=0$$

On applique notre test de colinéarité !

Certes, il ne s'agit pas d'une équation cartésienne sympa ! On pourrait même dire que tout cela est un peu barbare. Cela dit, ce n'est déjà plus du paramétrique !

En tout cas, il est clair que toute droite de l'espace peut être modélisée par une équation de la forme

$$\left|\boldsymbol{b}.x-\boldsymbol{a}.y+\boldsymbol{d}\right|+\left|\boldsymbol{c}.x-\boldsymbol{a}.z+\boldsymbol{d'}\right|+\left|\boldsymbol{c}.y-\boldsymbol{b}.z+\boldsymbol{d''}\right|=0$$

où $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont non réels non tous nuls (car un vecteur directeur ne peut être nul) et, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d'}$ et $\boldsymbol{d''}$ sont trois réels quelconques.

Note : *Un tel type d'équation a peut-être déjà une appellation. Dans le cas contraire, je suis prêt à me sacrifier en lui donnant le mien ! Que ne ferait-on pas pour la cause !*

Réciproquement, nous pourrions chercher à savoir si l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient une équation du type $\left|\boldsymbol{b}.x-\boldsymbol{a}.y+\boldsymbol{d}\right|+\left|\boldsymbol{c}.x-\boldsymbol{a}.z+\boldsymbol{d'}\right|+\left|\boldsymbol{c}.y-\boldsymbol{b}.z+\boldsymbol{d''}\right|=0$ est une droite.
Peut-être est-ce le cas ? Cependant, nous n'essayerons pas de lever cette interrogation car l'important n'est pas là. Ce qui nous intéresse, c'est la mise sur pied d'un test d'appartenance à une droite donnée.

Un exemple valant mieux que de longs discours, nous allons en produire un en revenant sur la droite (AB) définie par les points A(3 ; -2 ; 1) et B(-4 ; 7 ; 2). C'est l'exemple pris avec la représentation paramétrique. Reproduisant ce que nous venons de faire, il vient :

$$M(x;y;z)\in(AB) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM}(x-3;y+2;z-1) \text{ et } \overrightarrow{AB}(-7;9;1) \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \left|9\times(x-3)+7\times(y+2)\right|+\left|1\times(x-3)+7\times(z-1)\right|+\left|1\times(y+2)-9\times(z-1)\right|=0$$

$$\Leftrightarrow \left|9.x+7.y-13\right|+\left|x+7.z-10\right|+\left|y-9.z+11\right|=0$$

On applique encore notre test de colinéarité !

Une équation de la droite (AB) est $\left|9.x+7.y-13\right|+\left|x+7.z-10\right|+\left|y-9.z+11\right|=0$

Mettons ce test à l'épreuve avec les mêmes candidats qu'avec la représentation paramétrique !

- Le point C(-18 ; 25 ; 4) fait-il partie de la droite (AB) ?
  Pour cela, il nous suffit juste de vérifier si les coordonnées de C sont solutions de l'équation trouvée pour (AB).
  Nous regardons donc le premier membre de l'équation de la droite (AB) :
  $$\left|9.x_C+7.y_C-13\right|+\left|x_C+7.z_C-10\right|+\left|y_C-9.z_C+11\right|=\left|0\right|+\left|0\right|+\left|0\right|=0$$
  Ses coordonnées vérifiant l'équation, C appartient sans surprise à la droite (AB). !

- Le point D(17 ; -20 ; -2) fait-il partie de la droite (AB) ?
  Là encore, nous devons regarder si les coordonnées de D vérifient l'équation de (AB).
  $$\left|9.x_D+7.y_D-13\right|+\left|x_D+7.z_D-10\right|+\left|y_D-9.z_D+11\right|=\left|0\right|+\left|-7\right|+\left|9\right|=16\neq 0$$
  Les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation de (AB), le test est négatif.
  Sans surprise, nous retrouvons que le point D n'appartient pas à la droite (AB).

Il apparaît clairement que la droite (AB) n'a pas qu'une seule équation de la forme

$$|\boldsymbol{b}.x-\boldsymbol{a}.y+\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{c}.x-\boldsymbol{a}.z+\boldsymbol{d'}|+|\boldsymbol{c}.y-\boldsymbol{b}.z+\boldsymbol{d''}|=0$$

En effet, en multipliant tous les coefficients par le même réel $\boldsymbol{k}$, on obtient alors une nouvelle équation équivalente à la première. En effet :

$$|\boldsymbol{k}.\boldsymbol{b}.x-\boldsymbol{k}.\boldsymbol{a}.y+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}.x-\boldsymbol{k}.\boldsymbol{a}.z+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{d'}|+|\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}.y-\boldsymbol{k}.\boldsymbol{b}.z+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{d''}|=0$$

$$|\boldsymbol{k}|\times|\boldsymbol{b}.x-\boldsymbol{a}.y+\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{k}|\times|\boldsymbol{c}.x-\boldsymbol{a}.z+\boldsymbol{d'}|+|\boldsymbol{k}|\times|\boldsymbol{c}.y-\boldsymbol{b}.z+\boldsymbol{d''}|=0$$

$$|\boldsymbol{k}|\times\left[|\boldsymbol{b}.x-\boldsymbol{a}.y+\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{c}.x-\boldsymbol{a}.z+\boldsymbol{d'}|+|\boldsymbol{c}.y-\boldsymbol{b}.z+\boldsymbol{d''}|\right]=0$$

On divise par |k|

$$|\boldsymbol{b}.x-\boldsymbol{a}.y+\boldsymbol{d}|+|\boldsymbol{c}.x-\boldsymbol{a}.z+\boldsymbol{d'}|+|\boldsymbol{c}.y-\boldsymbol{b}.z+\boldsymbol{d''}|=0$$

C'est ce qui se passe pour les équations cartésiennes de droite dans le plan !

Les bonnes âmes et les grenouilles de bénitier dénigreront nos équations au motif qu'elles n'apportent pas de mieux par rapport aux représentations paramétriques.
C'est peut-être vrai ! Cela dit, elles démontrent que le concept d'équation de droite dans l'espace est une réalité. Avec la troisième époque, nous allons voir qu'en fait, nous avons mis le doigt sur les équations de plans...

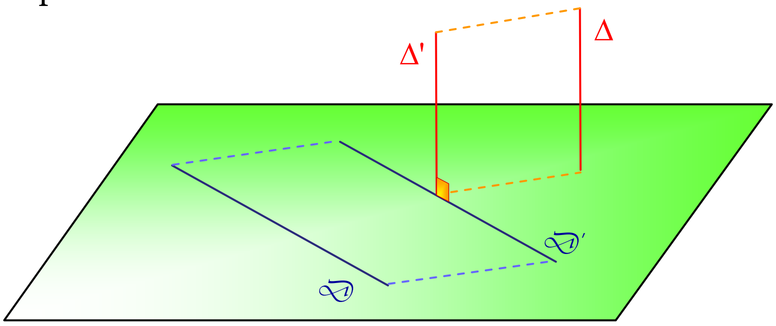
Troisième époque : à propos des plans dans l'espace

Dans cette partie, nous supposerons que l'espace est muni d'un repère quelconque $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

La question qui se posait précédemment pour les droites, vaut aussi pour les plans : existe-t-il un test comme une équation qui permettrait de dire qu'un point ferait partie de celui-ci ?
Et si pour les droites, il était question de parallélisme, c'est l'orthogonalité qui ici jouera.

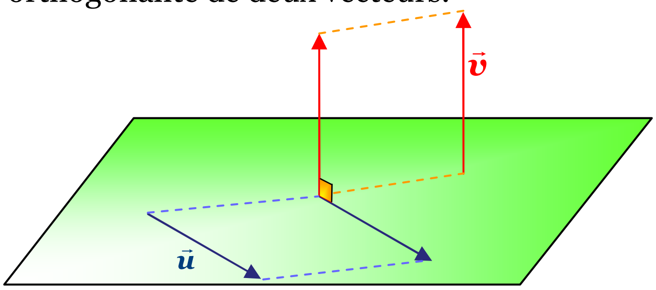
Vecteurs orthogonaux et normaux

Deux droites de l'espace sont dites orthogonales lorsqu'une parallèle de l'une est perpendiculaire à une parallèle de l'autre.



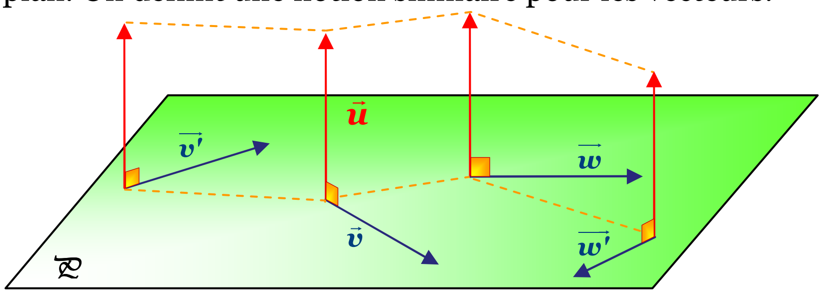
Par extension, on peut alors dire que les directions portées par ces deux droites sont perpendiculaires. On en déduit la définition de l'orthogonalité de deux vecteurs.

Dire que deux vecteurs sont orthogonaux signifie que leurs directions sont orthogonales.



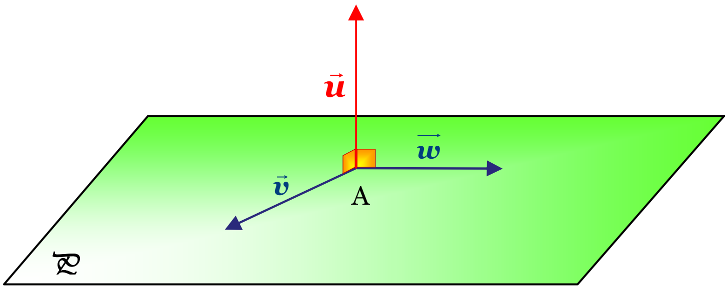
Nous l'avons déjà vu : une droite est dite orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites contenues dans ce plan. On définit une notion similaire pour les vecteurs.

Dire qu'un vecteur $\vec{u}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ signifie qu'il est orthogonal à tous les vecteurs portés par ce plan.



Les paresseux objecteront que si pour établir qu'un vecteur $\vec{u}$ est normal à un plan, on doit prouver qu'il est orthogonal à tous les vecteurs portés par ce plan, alors cela risque de prendre un certain temps et qu'il n'est même pas sûr qu'une vie y suffise.
Heureusement, il se passe pour les vecteurs ce qui existe déjà pour les droites : si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale au dit plan.

Théorème
Si un vecteur $\vec{u}$ est normal à deux vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ portés par un plan $\mathcal{P}$ alors il est orthogonal à ce plan $\mathcal{P}$.



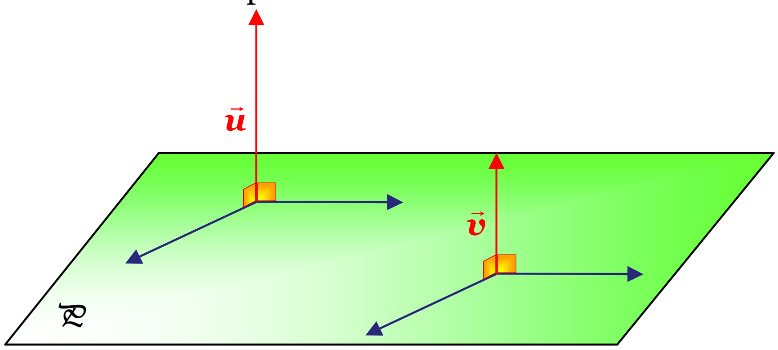
Ce théorème est la conséquence vectorielle de [celui des droites]. Comme la droite $(A, \vec{u})$ est orthogonale aux droites $(A, \vec{v})$ et $(A, \vec{w})$ alors cette première est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Dans les deux cas, il s'agit d'histoires de direction !

Nous pourrions aussi dire que pour que le vecteur $\vec{u}$ soit normal au plan $\mathcal{P}$, il faut et il suffit qu'il le soit à deux des ses vecteurs directeurs non colinéaires.

Il est de notoriété publique que si deux droites sont orthogonales à un même plan alors elles sont parallèles entre elles. Une propriété similaire existe pour les vecteurs normaux.

Deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires.

Et réciproquement :
Tout vecteur $\vec{v}$ colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ normal d'un plan $\mathcal{P}$ est lui-même un vecteur normal de $\mathcal{P}$.



Encore une fois, tout est ici affaire de direction. Des directions orthogonales !

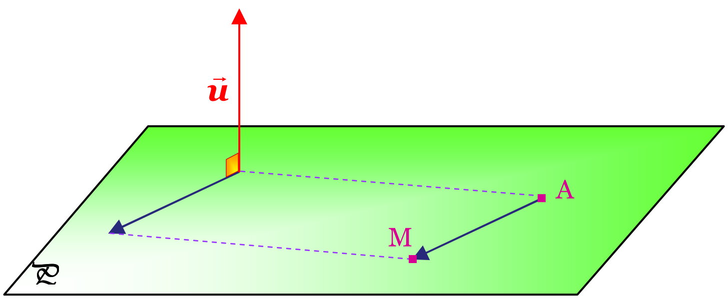
Nous avons mis en place tous les outils dont nous allons avoir besoin. A présent, nous allons enfin savoir s'il existe un ou des tests d'appartenance aux plans.

Des équations pour les plans

Un plan peut être défini par trois points, ou par un point et deux de ses vecteurs directeurs. Mais il peut aussi l'être par un point et l'un de ses vecteurs normaux. C'est la simple conséquence de la propriété énonçant que par un point donné, il ne passe qu'un seul plan qui soit orthogonal à une droite donnée.
Notre but est de trouver une condition sur les coordonnées d'un point permettant de dire si oui ou non, il appartient à un plan. Dans les faits, ce que nous cherchons, est une équation.

Plantons le décor de nos ébats !
$\mathcal{P}$ est un plan de l'espace dont l'un des points est A et l'un des vecteurs normaux est $\vec{u}$.

Le plan $\mathcal{P}$ est parfaitement défini par son point A et son vecteur normal qu'est $\vec{u}$. Comprenez par là que le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.



Or deux vecteurs orthogonaux ont leur produit scalaire nul ! Exploitons cette lueur !

$$
\begin{aligned}
M(x;y;z)\in\mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A;z-z_A) \text{ et } \vec{u}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}) \text{ sont orthogonaux}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\\
&\Leftrightarrow \left[(x-x_A).\vec{i}+(y-y_A).\vec{j}+(z-z_A).\vec{k}\right].\left[\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}\right]=0
\end{aligned}
$$

Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition vectorielle

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x.\underbrace{\left[\boldsymbol{a}.\vec{i}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{i}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{i}.\vec{k}\right]}_{\boldsymbol{\alpha}}+y.\underbrace{\left[\boldsymbol{a}.\vec{j}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{j}.\vec{k}\right]}_{\boldsymbol{\beta}}+z.\underbrace{\left[\boldsymbol{a}.\vec{k}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{k}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}.\vec{k}\right]}_{\boldsymbol{\chi}}\\
&\quad+\underbrace{\left(-x_A.\vec{i}-y_A.\vec{j}-z_A.\vec{k}\right).\left(\boldsymbol{a}.\vec{i}+\boldsymbol{b}.\vec{j}+\boldsymbol{c}.\vec{k}\right)}_{\boldsymbol{\delta}}=0
\end{aligned}
$$

Ce à quoi nous venons d'aboutir, est certes assez monstrueux, il n'empêche que nous avons trouvé ce test d'appartenance d'un point à un plan. Et nous pouvons le clamer !

Théorème
Pour tout plan $\mathcal{P}$, il existe au moins un quadruplet de réels $(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\delta})$ où $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\chi}$ ne sont pas tous les trois nuls, tels que :

$$M(x;y;z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}.x+\boldsymbol{\beta}.y+\boldsymbol{\chi}.z+\boldsymbol{\delta}=0$$

On dit que $\boldsymbol{\alpha}.x+\boldsymbol{\beta}.y+\boldsymbol{\chi}.z+\boldsymbol{\delta}=0$ est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Ce théorème nous conduit à faire plusieurs remarques :

- Le terme d'équation cartésienne n'est pas nouveau. Nous l'avions en effet rencontré dans le plan lorsque nous nous étions intéressés aux équations de droites.
  En simplifiant à l'extrême, une équation cartésienne est du type : Tout = 0.

- Dans le théorème, il est spécifié que les trois premiers coefficients $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\chi}$ ne peuvent pas être tous les trois nuls. Nous aurions pu aussi dire qu'au moins un des trois était nécessairement non nul.
  Cette condition est posée pour éviter que les coordonnées (x ; y ; z) ne disparaissent. Nous aurions l'air malin si nous devions nous coltiner une équation du type $\boldsymbol{\delta}=0$!

- Une conséquence de cet énoncé est que si $\boldsymbol{\alpha}.x+\boldsymbol{\beta}.y+\boldsymbol{\chi}.z+\boldsymbol{\delta}=0$ est une équation du plan $\mathcal{P}$ alors pour tout réel non nul $\boldsymbol{k}$, l'équation $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\alpha}.x+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\beta}.y+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\chi}.z+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\delta}=0$ en est une autre. Il suffit juste de multiplier par $\boldsymbol{k}$ les deux membres de la première équation et de toiletter.

Après ce que nous avons fait, une interrogation pointe à l'horizon :

Réciproquement, l'ensemble des points M(x ; y z) de l'espace vérifiant une équation du type $\boldsymbol{\alpha}.x+\boldsymbol{\beta}.y+\boldsymbol{\chi}.z+\boldsymbol{\delta}=0$ est-il un plan ?

Une interrogation que nous allons nous empresser de lever !

Avant d'entamer le gros de la manoeuvre, nous devons développer certaines choses à propos des plans.
Un plan $\mathcal{P}$ peut être défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Nous avons alors :

$$M\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{l} \text{ tels que } \overrightarrow{AM}=\boldsymbol{k}.\vec{u}+\boldsymbol{l}.\vec{v}$$

Car le triplet $(A;\vec{u},\vec{v})$ est alors un repère du plan $\mathcal{P}$.

Si l'on cherche à traduire cette dernière égalité sous forme de coordonnées dans le repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, il vient alors :

$$M(x;y;z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{l} \text{ tels que } \overrightarrow{AM}=\boldsymbol{k}.\vec{u}+\boldsymbol{l}.\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{l} \text{ tels que } \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix}=\boldsymbol{k}.\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}+\boldsymbol{l}.\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ \boldsymbol{b'} \\ \boldsymbol{c'} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{l} \text{ tels que } \begin{cases} x=x_A+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{a}+\boldsymbol{l}.\boldsymbol{a'} \\ y=y_A+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{b}+\boldsymbol{l}.\boldsymbol{b'} \\ z=z_A+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}+\boldsymbol{l}.\boldsymbol{c'} \end{cases}$$

Et là, nous sommes retombés sur une chose déjà rencontrée avec les droites : une représentation paramétrique. Sauf qu'ici, il y a deux paramètres que sont $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{l}$.
Tout plan $\mathcal{P}$ de l'espace admet au moins une représentation paramétrique. Et réciproquement nous avons que :

L'ensemble des points l'espace $M(x;y;z)$ vérifiant la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x=x_0+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{a}+\boldsymbol{l}.\boldsymbol{a'} \\ y=y_0+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{b}+\boldsymbol{l}.\boldsymbol{b'} \\ z=z_0+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{c}+\boldsymbol{l}.\boldsymbol{c'} \end{cases}$$

est le plan passant par le point $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c})$ et $\vec{v}(\boldsymbol{a'};\boldsymbol{b'};\boldsymbol{c'})$

Précisons que pour que cet énoncé soit effectif, les coefficients employés $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a'} & \boldsymbol{b'} & \boldsymbol{c'} \end{pmatrix}$ ne doivent pas être proportionnels entre eux. Cela afin d'éviter que les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient colinéaires.

A présent, nous allons nous attaquer à cet énigmatique objet qui nous intrigue :

L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M(x ; y z) de l'espace vérifiant l'équation $\boldsymbol{\alpha}.x+\boldsymbol{\beta}.y+\boldsymbol{\chi}.z+\boldsymbol{\delta}=0$

A toutes fins utiles, précisons que les coefficients $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\chi}$ ne peuvent pas être tous les trois nuls.
De ces trois coefficients, l'un est donc non nul. Supposons que ce soit $\boldsymbol{\alpha}$.
Comme $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$, on peut alors diviser par celui-ci. L'équation originelle s'écrit :

$$\boldsymbol{\alpha}.x+\boldsymbol{\beta}.y+\boldsymbol{\chi}.z+\boldsymbol{\delta}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}.y-\frac{\boldsymbol{\chi}}{\boldsymbol{\alpha}}.z-\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\alpha}}$$

Pour tout point $M(x;y;z)$ de l'ensemble $\mathcal{E}$, il existe alors deux réels $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{l}$ tels que

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{k}\times\left(-\dfrac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha}}\right)+\boldsymbol{l}\times\left(-\dfrac{\boldsymbol{\chi}}{\boldsymbol{\alpha}}\right) \\ y=0+\boldsymbol{k}\times 1+\boldsymbol{l}\times 0 \\ z=0+\boldsymbol{k}\times 0+\boldsymbol{l}\times 1 \end{cases}$$

On pourrait croire que Harry Potter est passé par là. En fait, il s'agit juste d'une petite astuce d'écriture. Les deux paramètres $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{l}$ ne sont rien d'autres que les ordonnée et cote du point M. Et l'abscisse du point M dépend de ces deux paramètres !
Une question surgit alors de l'esprit de certains : ben pourquoi qu'il a fait ça ?
Ca s'appelle plus précisément une représentation paramétrique de plan.

A partir de cette représentation paramétrique, nous pouvons affirmer que tout point $M(x;y;z)$ de l'ensemble $\mathcal{E}$ fait partie du plan $\mathcal{P}$ défini par le point $A\left(-\frac{\delta}{\alpha};0;0\right)$ et les vecteurs directeurs $\vec{u}\left(-\frac{\beta}{\alpha};1;0\right)$ et $\vec{v}\left(-\frac{\chi}{\alpha};0;1\right)$.

Et réciproquement, tous les points de $\mathcal{P}$ vérifient-ils l'équation $\alpha.x+\beta.y+\chi.z+\delta=0$?
Si le point $N(x;y;z)$ fait partie du plan $\mathcal{P}$ alors il existe deux réels k et l tels que :

$$\begin{cases} x=-\frac{\delta}{\alpha}+k\times\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+l\times\left(-\frac{\chi}{\alpha}\right) \\ y=0+k\times 1+l\times 0 \\ z=0+k\times 0+l\times 1 \end{cases}$$

Dans le premier membre de l'équation, remplaçons les coordonnées de N par ce qu'elles valent en k et l. Il vient alors :

$$\alpha\times\underbrace{\left[-\frac{\delta}{\alpha}+k\times\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+l\times\left(-\frac{\chi}{\alpha}\right)\right]}_{x}+\beta\times\underbrace{[k]}_{y}+\chi\times\underbrace{[l]}_{z}+\delta=-\delta-k\times\beta-l\times\chi+\beta\times k+\chi\times l+\delta=0$$

Comme les coordonnées du point N vérifient l'équation $\alpha.x+\beta.y+\chi.z+\delta=0$, alors celui-ci fait partie de l'ensemble $\mathcal{E}$.

En conclusion, lorsque le coefficient α est non nul, l'ensemble $\mathcal{E}$ est un plan.

Les esprits critiques nous diront que nous savons ce qui se passe lorsque α est non nul mais que nous ignorons ce qu'il en est lorsque $\alpha=0$.
Juste remarque mais qui a une réponse rapide !
Si α est égal à 0 alors nécessairement, des deux coefficients β et χ, l'un des deux (au moins) est non nul. Les deux peuvent l'être mais un seul suffit à notre bonheur !
Ce que nous venons de faire, peut alors être reproduit. Certes les acteurs changent mais le raisonnement et sa conclusion demeurent les mêmes : l'ensemble $\mathcal{E}$ est un plan !
On en arrive au théorème suivant :

Théorème
α, β et χ sont trois réels dont l'un au moins est non nul.
L'ensemble des points de l'espace $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation $\alpha.x+\beta.y+\chi.z+\delta=0$ est un plan.

Ce théorème clôt la boucle. Dans l'espace muni d'un repère quelconque $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, tout plan a au moins une équation cartésienne de la forme $\alpha.x+\beta.y+\chi.z+\delta=0$.
Et réciproquement, toute équation cartésienne est celle d'un plan !
Nous verrons ultérieurement que lorsque le repère est orthonormé alors les choses se simplifient.
Mais maintenant que nous savons ce que nous devons chercher, nous allons nous intéresser à la manière de le trouver. Après tant de théorie, voici la pratique !

Une équation d'un plan orthogonal dans un repère orthogonal

Pour ce premier exemple, nous allons travailler dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ qui a les caractéristiques suivantes :

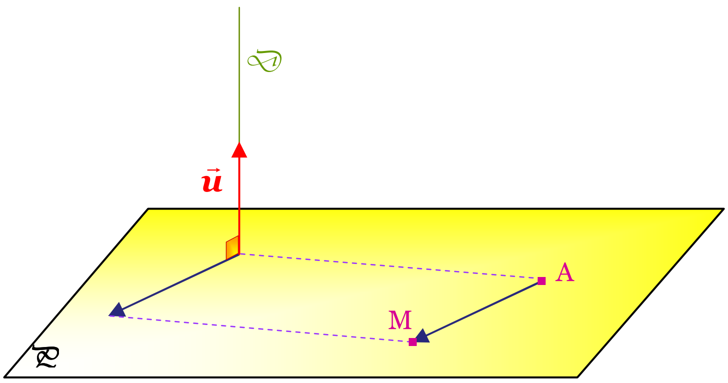
$$\left\|\vec{i}\right\| = 3 \qquad \left\|\vec{j}\right\| = 2 \qquad \left\|\vec{k}\right\| = 1$$

Bien sûr, il est inutile de rappeler que comme le repère est orthogonal alors les trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux. C'est d'ailleurs pour cela que nous le faisons !

$\mathscr{P}$ est le plan orthogonal à la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2+3.\boldsymbol{t} \\ y = -5+4.\boldsymbol{t} \\ z = 1-2.\boldsymbol{t} \end{cases}$ et qui passe par le point $A(-2;5;-1)$

Notre mission (que nous acceptons) est de déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Si l'on fait abstraction du repère, globalement, la situation est celle ci-contre.
On pourrait croire la situation désespérée. En fait, elle l'est à peine !



En effet, la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ va nous donner l'un de ses vecteurs directeurs. Ce dernier est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Entamons la manoeuvre !

Comme $\begin{cases} x = 2+3.\boldsymbol{t} \\ y = -5+4.\boldsymbol{t} \\ z = 1-2.\boldsymbol{t} \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ alors $\vec{u}(3;4;-2)$ est l'un de ses vecteurs directeurs.

Comme la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ alors $\vec{u}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.

Le plan $\mathscr{P}$ est parfaitement défini par son point $A(-2;5;-1)$ et son vecteur normal $\vec{u}(3;4;-2)$.

A certains, la suite va sembler être du déjà-vu !

$$\begin{aligned} M(x;y;z)\in\mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x+2;y-5;z+1) \text{ et } \vec{u}(3;4;-2) \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[(x+2).\vec{i}+(y-5).\vec{j}+(z+1).\vec{k}\right].\left[3.\vec{i}+4.\vec{j}-2.\vec{k}\right] = 0 \end{aligned}$$

Le produit scalaire est toujours distributif par rapport à l'addition vectorielle

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\ & (x+2)\times 3.\underbrace{\vec{i}.\vec{i}}_{=9}+(x+2)\times 4.\underbrace{\vec{i}.\vec{j}}_{=0}+(x+2)\times(-2).\underbrace{\vec{i}.\vec{k}}_{=0} \\ & +(y-5)\times 3.\underbrace{\vec{j}.\vec{i}}_{=0}+(y-5)\times 4.\underbrace{\vec{j}.\vec{j}}_{=4}+(y-5)\times(-2).\underbrace{\vec{j}.\vec{k}}_{=0} \\ & +(z+1)\times 3.\underbrace{\vec{k}.\vec{i}}_{=0}+(z+1)\times 4.\underbrace{\vec{k}.\vec{i}}_{=0}+(z+1)\times(-2).\underbrace{\vec{k}.\vec{k}}_{=1} = 0 \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, nous devons apporter quelques éclaircissements.

- Lorsque deux vecteurs sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul. Cela explique que tous les produits scalaires $\vec{i}.\vec{j}$, $\vec{i}.\vec{k}$ et $\vec{j}.\vec{k}$ sont nuls.

- Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est égal au carré de sa norme.
  Cela nous amène donc à dire que :

$$\vec{i}.\vec{i} = \left\|\vec{i}\right\|^2 = 3^2 = 9 \qquad \vec{j}.\vec{j} = \left\|\vec{j}\right\|^2 = 4 \qquad \vec{k}.\vec{k} = \left\|\vec{k}\right\|^2 = 1$$

La dernière égalité obtenue se simplifie donc sacrément. Reprenons la manoeuvre !

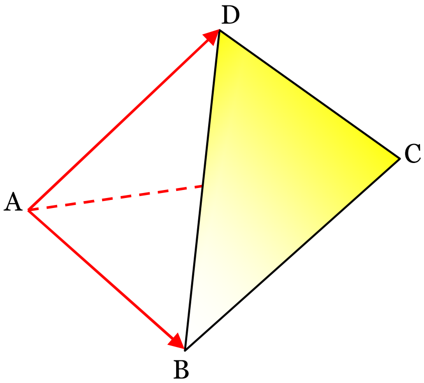
$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow (x+2)\times 3\times 9 + (y-5)\times 4\times 4 + (z+1)\times(-2)\times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 27.x + 54 + 16.y - 80 - 2.z - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 27.x + 16.y - 2.z - 28 = 0 \end{aligned}$$

Nous avons trouvé une équation cartésienne pour ce si sympathique plan $\mathcal{P}$.

Conclusion : une équation du plan $\mathcal{P}$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est $27.x + 16.y - 2.z - 28 = 0$

Une équation tétraédrique !

Plaçons-nous dans un tétraèdre régulier ABCD dont nous dirons que chaque côté mesure 1.



Nous allons déterminer une équation du plan (BCD) dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$

Avant tout développement, il est utile de donner les coordonnées des différents points dans ce repère.

A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(0 ; 1 ; 0) et D(0 ; 0 ; 1)

Même les plus endormis auront remarqué que nous ne connaissons aucun vecteur normal au plan (BCD). Devons-nous pour autant renoncer ? La réponse est non car le plan BCD est parfaitement défini par le point B et ses vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{BD}(-1;0;1)$.

Nous allons faire avec ces seuls renseignements.

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in (BCD) &\Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{l} \text{ tels que } \overrightarrow{BM} = \boldsymbol{k}.\overrightarrow{BC} + \boldsymbol{l}.\overrightarrow{BD} \\ &\Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{l} \text{ tels que } \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{k}.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{l}.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{l} \text{ tels que } \begin{cases} x-1 = -\boldsymbol{k} - \boldsymbol{l} \\ y = \boldsymbol{k} \\ z = \boldsymbol{l} \end{cases} \end{aligned}$$

Par suite, si le point $M(x;y;z)$ fait partie du plan (BCD) alors $x - 1 = -\underbrace{y}_{\boldsymbol{k}} - \underbrace{z}_{\boldsymbol{l}} \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$.

Réciproquement, nous pourrions chercher si tout point de l'espace vérifiant l'équation $x + y + z - 1 = 0$ fait partie du plan (BCD).

En application d'un certain théorème, nous savons déjà que $x + y + z - 1 = 0$ est l'équation d'un plan.

De plus, les coordonnées des points non alignés B, C et D vérifiant l'équation, cela nous amène à dire que $x + y + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (BCD).

Conclusion : une équation du plan (BCD) dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ est $x + y + z - 1 = 0$

En fin d'aventure, nous reviendrons sur les "équations tétraédriques"...

Le monde merveilleux des repères orthonormés

Parfois, on en viendrait presque à se demander pourquoi tous les repères ne sont pas orthonormés, c'est-à-dire avec des vecteurs deux à deux orthogonaux et tous de norme 1. Bien sûr, tout ce qui a été fait, reste valable dans le cadre douillet des repères orthonormés. Cependant, les équations cartésiennes de plans s'y simplifient. Voyons comment.

Dans ce qui suit, nous travaillerons dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Appelons $\mathcal{P}$ le plan défini par son point A et l'un de ses vecteurs normaux $\vec{u}$.

A présent, il s'agit de trouver une condition sur les coordonnées d'un point M permettant de dire si oui ou non, il appartient à un plan. Démarrons !

$$\begin{aligned}
M(x;y;z)\in\mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A;z-z_A) \text{ et } \vec{u}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}) \text{ sont orthogonaux}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\\
&\Leftrightarrow \left[(x-x_A).\vec{i}+(y-y_A).\vec{j}+(z-z_A).\vec{k}\right].\left[3.\vec{i}+4.\vec{j}-2.\vec{k}\right]=0
\end{aligned}$$

Le produit scalaire est toujours distributif par rapport à l'addition vectorielle

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x-x_A)\times\boldsymbol{a}.\underbrace{\vec{i}.\vec{i}}_{=1}+(x-x_A)\times\boldsymbol{b}.\underbrace{\vec{i}.\vec{j}}_{=0}+(x-x_A)\times\boldsymbol{c}.\underbrace{\vec{i}.\vec{k}}_{=0}\\
&\quad+(y-y_A)\times\boldsymbol{a}.\underbrace{\vec{j}.\vec{i}}_{=0}+(y-y_A)\times\boldsymbol{b}.\underbrace{\vec{j}.\vec{j}}_{=1}+(y-y_A)\times\boldsymbol{c}.\underbrace{\vec{j}.\vec{k}}_{=0}\\
&\quad+(z-z_A)\times\boldsymbol{a}.\underbrace{\vec{k}.\vec{i}}_{=0}+(z-z_A)\times\boldsymbol{b}.\underbrace{\vec{k}.\vec{i}}_{=0}+(z-z_A)\times\boldsymbol{c}.\underbrace{\vec{k}.\vec{k}}_{=1}=0
\end{aligned}$$

Car ne l'oublions pas, le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est orthonormé. Donc :

- Comme les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, alors leurs produits scalaires $\vec{i}.\vec{j}$, $\vec{i}.\vec{k}$ et $\vec{j}.\vec{k}$ sont nuls.
- Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est égal au carré de sa norme. Par suite :

$$\vec{i}.\vec{i}=\left\|\vec{i}\right\|^2=1 \qquad \vec{j}.\vec{j}=\left\|\vec{j}\right\|^2=1 \qquad \vec{k}.\vec{k}=\left\|\vec{k}\right\|^2=1$$

Revenons à notre raisonnement. Les choses se simplifient :

$$\begin{aligned}
M(x;y;z)\in\mathcal{P} &\Leftrightarrow (x-x_A)\times\boldsymbol{a}+(y-y_A)\times\boldsymbol{b}+(z-z_A)\times\boldsymbol{c}=0\\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}.z+(-\boldsymbol{a}.x_A-\boldsymbol{b}.x_A-\boldsymbol{c}.z_A)=0
\end{aligned}$$

Nous avons établi une relation claire entre équation cartésienne d'un plan et vecteur normal.

Théorème

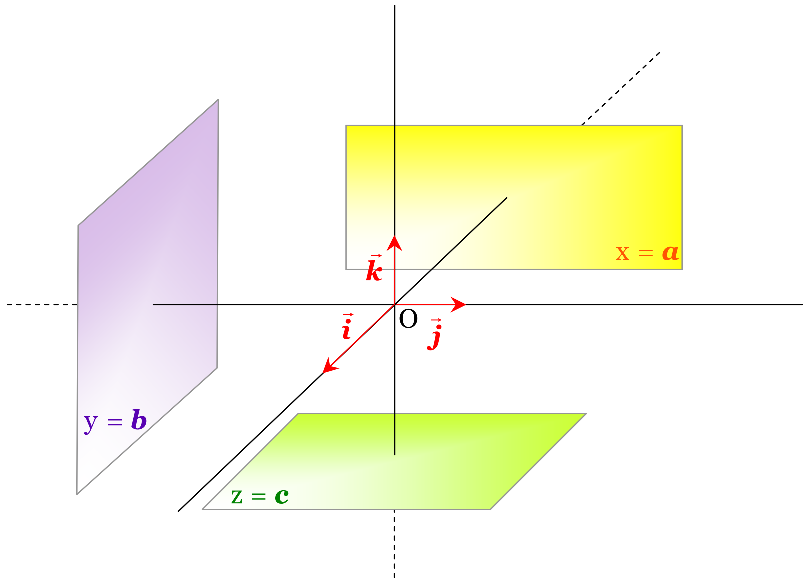
On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Dire qu'un plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{u}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c})$ équivaut à dire que l'une de ses équations cartésiennes est de la forme $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}.z+\boldsymbol{d}=0$.

Ainsi :

- Si un plan $\mathcal{P}$ a pour équation $4.x+6.y-7.z-8=0$ alors l'un de ses vecteurs normaux est $\vec{u}(4;6;-7)$.
- Si l'un des vecteurs normaux d'un plan $\mathcal{P}$ est le vecteur $\vec{u}(-3;4;-1)$ alors une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $-3.x+4.y-z+\boldsymbol{d}=0$.
  Pour déterminer le coefficient ***d***, il suffit de connaître les coordonnées d'un point de $\mathcal{P}$.

Certains plans ont pour vecteurs normaux les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. Evoquons leurs cas !



Les plans de vecteur normal $\vec{i}$ ont pour équation $x = \boldsymbol{a}$. Ils sont parallèles au plan $(O;\vec{j},\vec{k})$.

Les plans de vecteur normal $\vec{j}$ ont pour équation $y = \boldsymbol{b}$. Ils sont parallèles au plan $(O;\vec{i},\vec{k})$.

Les plans de vecteur normal $\vec{k}$ ont pour équation $z = \boldsymbol{c}$. Ils sont parallèles au plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Tous ces plans sont appelés <u>plans de coordonnées</u>.

L'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment

Travaillant toujours dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminons à quelle condition sur ses coordonnées, un point M est-il équidistant des deux points $A(3;7;-1)$ et $B(4;-7;6)$.

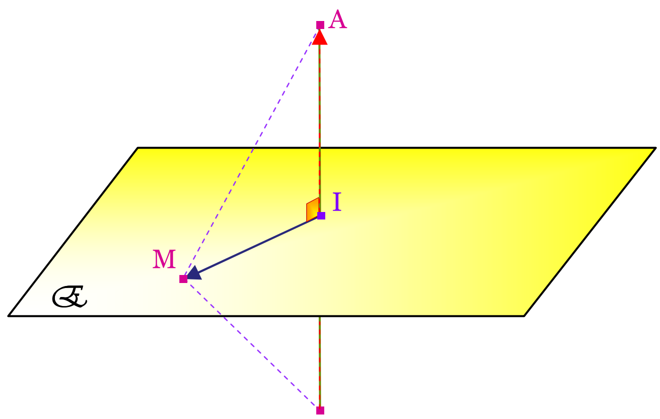
Face à un telle difficulté, deux options sont envisageables. La première consiste à partir d'une égalité du type $MA = MB$ et à essayer de progresser. La seconde est plus archéologique et fait appel à une vieille notion : celle de <u>plan médiateur</u>.

Le plan médiateur est à l'espace ce que la médiatrice est au plan : <u>l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment</u> !

Nous appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B.

Nous savons déjà que $\mathcal{E}$ est le plan médiateur du segment [AB].

Ce que nous devons déterminer est donc une équation de plan.



En tant que <u>plan médiateur</u>, $\mathcal{E}$ peut être vu comme le plan orthogonal au segment [AB] passant par son <u>milieu</u> $I\left(\frac{7}{2};0;\frac{5}{2}\right)$. Donc $\overrightarrow{AB}(1;-14;7)$ est un vecteur normal du $\mathcal{E}$.

Ayant la chance d'évoluer dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, nous pouvons <u>affirmer</u> qu'une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ est $x - 14.y + 7.z + \boldsymbol{d} = 0$.

Pour déterminer les coordonnées du coefficient ***d***, nous allons recourir au point I.

Comme le point I fait partie du plan E alors ses coordonnées en vérifient l'équation. Ainsi :

$$\frac{7}{2} - 14 \times 0 + 7 \times \frac{5}{2} + \underbrace{\boldsymbol{d}}_{\text{l'inconnue}} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{d} = -21$$

Conclusion : dire qu'un point $M(x;y;z)$ est équidistant des points $A(3;7;-1)$ et $B(4;-7;6)$ équivaut à dire que : $x - 14.y + 7.z - 21 = 0$

Quatrième époque : les droites et plans entre eux

Après avoir caractérisé analytiquement les droites et les plans, nous allons nous intéresser à leurs positions relatives. Nous allons voir à quelle condition deux droites sont parallèles, sécantes, orthogonales ou rien du tout ! Puis, nous embrayerons sur les plans avant d'achever notre enquête sur les positions relatives d'une droite et d'un plan.

Dans ce qui suit, nous travaillerons dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ non nécessairement orthonormé. Sauf mention contraire bien sûr !

Les droites entre elles

Une droite peut être caractérisée par un vecteur directeur et l'un de ses points. Nous avons vu que toute droite est modélisable par une représentation paramétrique du type $\begin{cases} x = x_0 + \boldsymbol{a}.t \\ y = y_0 + \boldsymbol{b}.t \\ z = z_0 + \boldsymbol{c}.t \end{cases}$.

Nous savons qu'un vecteur directeur d'une telle droite est $\vec{u}\left(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c}\right)$ et qu'elle passe par le point $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$. Et réciproquement, connaissant ces derniers, nous savons déterminer une représentation paramétrique d'une droite.

Tout cela pour dire que pour comparer les positions de deux droites, il faut s'intéresser à leurs vecteurs directeurs.

Dans ce qui suit, nous appuierons notre propos sur trois droites définies par leurs représentations paramétriques :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = -5 - 3.t \\ y = 3 + 2.t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 4 + 6.t \\ y = 2 - 4.t \\ z = 7 - 2.t \end{cases} \qquad \Delta : \begin{cases} x = -7 + t \\ y = 15 + 2.t \\ z = -t \end{cases}$$

Dans l'espace, deux droites peuvent être :

- ***Parallèles***

  Pour cela, il faut et il suffit que deux de leurs vecteurs directeurs soient colinéaires.

  Voyons un cas précis avec les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
  A partir de leurs représentations paramétriques, on déduit que deux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont respectivement $\vec{u}\left(-3;2;1\right)$ et $\vec{v}\left(6;-4;-2\right)$.

  En comparant les coordonnées de ces deux vecteurs, on remarque que $\vec{v} = 2.\vec{u}$.
  Comme leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
  Une question se pose : ces deux droites sont-elles parallèles distinctes ou confondues ?
  Pour le savoir, il suffit de prendre un point de l'une et de regarder s'il fait partie de l'autre. Une réponse positive signifiera qu'elles sont confondues.
  En utilisant sa représentation paramétrique, nous pouvons dire que la droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A\left(-5;3;2\right)$. Regardons si ce point fait partie de $\mathcal{D}'$. Pour ce faire, nous devons résoudre le système d'inconnue t qu'est $\begin{cases} -5 = 4 + 6.t \\ 3 = 2 - 4.t \\ 2 = 7 - 2.t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -9/6 = -1{,}5 \\ t = 1/-4 = -0{,}25 \\ t = -5/-2 = 2{,}5 \end{cases}$

  Comme on ne trouve pas la même valeur pour le paramètre t aux trois équations, cela signifie que ce système n'a pas de solution et que le point A n'appartient pas à $\mathcal{D}'$.

  Conclusion : les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles distinctes.

- ***Sécantes***

  Deux droites sécantes ont un seul point d'intersection. Deux droites sécantes peuvent être vues comme deux droites coplanaires non parallèles.

Voyons ce qui se passe avec les droites $\mathcal{D}$ et Δ.
D'après sa représentation paramétrique, nous pouvons affirmer à la face du monde qu'un des vecteurs directeurs de Δ est $\vec{w}(1;2;-1)$.

Comme les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas proportionnelles alors ils ne sont pas colinéaires. Donc les droites $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles.
Pour autant, on ne peut pas affirmer que ces deux droites sont sécantes. Pour qu'il en soit ainsi, nous devons leur trouver un point $M(x_M;y_M;z_M)$ en commun.
Nous devons chercher s'il existe deux réels u et v vérifiant le double système :

$$\underbrace{\begin{cases} x_M = -5-3.u \\ y_M = 3+2.u \\ z_M = 2+u \end{cases}}_{M\text{ appartient à }\mathcal{D}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{cases} x_M = -7+v \\ y_M = 15+2.v \\ z_M = -v \end{cases}}_{M\text{ appartient à }\Delta}$$

Si l'on rassemble ces deux systèmes, il vient :

$$\begin{cases} -5-3.u = x_M = -7+v \\ 3+2.u = y_M = 15+2.v \\ 2+u = z_M = -v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3.u - v+2 = 0 \\ 2.u-2.v-12 = 0 \\ u+v+2 = 0 \end{cases}$$

Le but du jeu est d'essayer de trouver un couple (u ; v) vérifiant ce dernier système.
Pour cela, nous allons d'abord nous concentrer sur le système 2×2 formé par les deux premières équations.

Après résolution, le système $\begin{cases} -3.u - v+2 = 0 \\ 2.u-2.v-12 = 0 \end{cases}$ a pour unique solution $(u=2;v=-4)$.

Reste à savoir si ce couple vérifie la dernière équation.
Comme $\underbrace{2}_{u}+\underbrace{-4}_{v}+2=0$ alors c'est le cas !

Par conséquent, nous pouvons conclure que le système 3×2 $\begin{cases} -3.u - v+2 = 0 \\ 2.u-2.v-12 = 0 \\ u+v+2 = 0 \end{cases}$ admet une unique solution qu'est $(u=2;v=-4)$.

Donc les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes. A partir de l'une des deux représentations paramétriques, on calcule que le point d'intersection M a pour coordonnées $(-11;7;4)$.
Il suffit de remplacer u par sa valeur dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Conclusion : les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes et donc coplanaires.

- ***Non coplanaires***

  Lorsque deux droites ne sont ni parallèles, ni sécantes, elles sont alors non coplanaires.

Voyons ce qui se passe avec les droites $\mathcal{D}'$ et Δ.
Comme les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles et que les droites $\mathcal{D}'$ et Δ ne le sont pas alors $\mathcal{D}'$ et Δ ne sont pas parallèles. Mais sont-elles pour autant sécantes ?
Pour le savoir, nous devons essayer leur trouver un point en commun $N(x_N;y_N;z_N)$.

Là encore, nous devons chercher s'il existe deux paramètres u et v vérifiant :

$$\underbrace{\begin{cases} x_N = 4+6.u \\ y_N = 2-4.u \\ z_N = 7-2.u \end{cases}}_{N \text{ appartient à } \mathcal{D}'} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{cases} x_N = -7+v \\ y_N = 15+2.v \\ z_N = -v \end{cases}}_{N \text{ appartient à } \Delta}$$

Si l'on concatène ou rassemble ces deux systèmes, il vient alors que :

$$\begin{cases} 4+6.u = x_N = -7+v \\ 2-4.u = y_N = 15+2.v \\ 7-2.u = z_N = -v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6.u - v + 11 = 0 \\ -4.u - 2.v - 13 = 0 \\ -2.u + v + 7 = 0 \end{cases}$$

Le but du jeu est d'essayer de trouver un couple (u ; v) vérifiant ce dernier système.

Le système 2×2 $\begin{cases} 6.u - v + 11 = 0 \\ -4.u - 2.v - 13 = 0 \end{cases}$ a pour unique solution $\left(u = -\dfrac{35}{16} ; v = \dfrac{17}{8}\right)$.

Voyons si ce couple vérifie la troisième équation : $-2 \times \underbrace{\dfrac{-35}{16}}_{u} + \underbrace{\dfrac{-17}{8}}_{v} + 7 = -\dfrac{43}{4} \neq 0$.

Donc le système à trois équations et deux inconnues $\begin{cases} 6.u - v + 11 = 0 \\ -4.u - 2.v - 13 = 0 \\ -2.u + v + 7 = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution.

En conséquence, les droites ne sont pas sécantes. Vu qu'elles n'étaient pas parallèles, nous pouvons conclure que :

Conclusion : les droites $\mathcal{D}'$ et Δ sont non coplanaires.

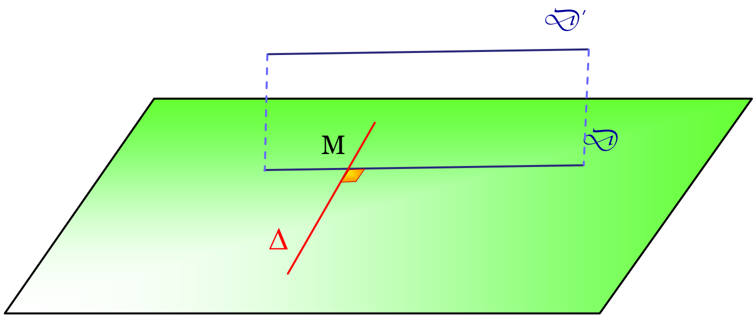
On pourrait croire que les droites $\mathcal{D}'$ et Δ ne sont rien l'une pour l'autre. En fait et pour peu que l'on travaille dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, elles sont orthogonales.

Pour le prouver, nous allons nous intéresser au produit scalaire de deux de leurs vecteurs directeurs.

Nous savons que $\vec{v}(6;-4;-2)$ et $\vec{w}(1;2;-1)$ sont respectivement des vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}'$ et Δ. Nous pouvons écrire :

$$\vec{v}.\vec{w} = 6 \times 1 + (-4) \times 2 + (-2) \times (-1) = 6 - 8 + 2 = 0$$

Donc les vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
Donc les droites $\mathcal{D}'$ et Δ sont orthogonales.
Par contre, elles ne sont pas perpendiculaires vu qu'elles ne sont pas sécantes.
Pour conclure, précisons que les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont perpendiculaires car elles sont sécantes et orthogonales (car $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ sont parallèles)
En définitive et d'un certain point de vue, la situation sur laquelle nous venons de travailler était la suivante :



Les plans entre eux

Dans cette partie, nous allons travailler dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Comme nous l'avons déjà dit, un plan de l'espace est parfaitement défini par l'un de ses points et l'un de ses vecteurs normaux.
De plus, tout plan $\mathcal{P}$ est modélisable par une équation de la forme $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}.z+\boldsymbol{d}=0$.

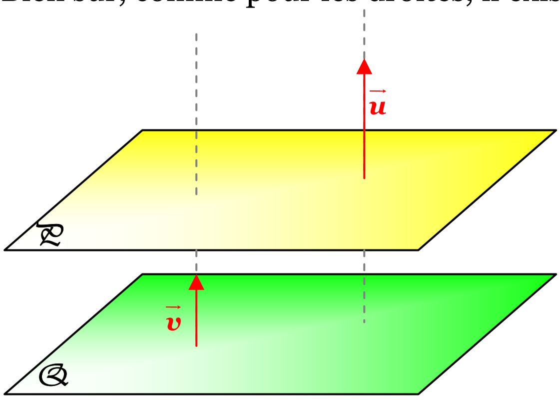
Lorsque le repère est orthonormé alors un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est le vecteur $\vec{u}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c})$.

Ainsi que nous l'avons déjà vu, deux plans de l'espace peuvent être :

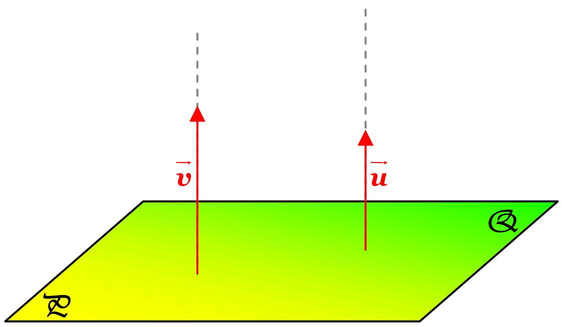
- ***Parallèles***

  Pour que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ soient parallèles, il faut et il suffit que deux de leurs vecteurs normaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

  Bien sûr, comme pour les droites, il existe deux formes de parallélismes :



Parallélisme distinct



Parallélisme confondu

  Voyons sur un exemple comment à partir de leurs équations, on peut voir que deux plans sont parallèles.
  On s'intéresse aux plans $\mathcal{P}$: $4.x-14.y+8.z-7=0$ et $\mathcal{Q}$: $6.x-21.y+12.z-5=0$.

  Comme nous travaillons dans un repère orthonormé alors $\vec{u}(4;-14;8)$ et $\vec{v}(6;-21;12)$ sont deux vecteurs normaux respectivement des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

  Comme ces deux vecteurs ont des coordonnées proportionnelles $\left(\frac{4}{6}=\frac{-14}{-21}=\frac{8}{12}\right)$ alors ils sont colinéaires. Donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles.
  La question qui se pose à présent, est de savoir s'ils sont distincts ou confondus. Pour y répondre, il suffit de prendre un point d'un plan et de voir s'il fait partie de l'autre.

  En tâtonnant un peu, on observe que le point $A\left(0;0;\frac{7}{8}\right)$ appartient au plan $\mathcal{P}$.

  Regardons s'il vérifie l'équation du plan $\mathcal{Q}$.

$$6.x_A-21.y_A+12.z_A-5=6\times 0-21\times 0+12\times\frac{7}{8}=\frac{21}{2}\neq 0$$

  Donc le point A ne fait pas partie de $\mathcal{Q}$. Donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles distincts.

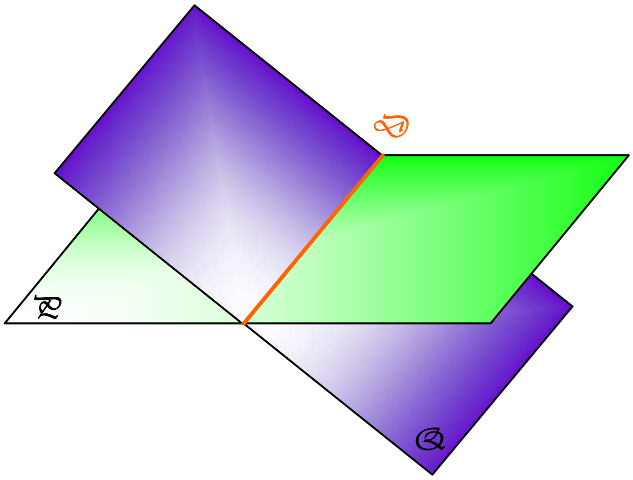
- ***Sécants***

  C'est la seule alternative au parallélisme !

  Pour que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ soient sécants, il faut et il suffit que deux de leurs vecteurs normaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires.

Avant d'aborder le problème des plans orthogonaux, nous allons revenir sur ces équations de droites exotiques que nous avions exhibées lors de la seconde époque.

Ce n'est un secret pour personne : l'intersection de deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est une droite $\mathcal{D}$.



Dans notre repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, ces deux plans ont (au moins) deux équations cartésiennes. Disons que :

- $\mathcal{P}$ a pour équation $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}.z+\boldsymbol{d}=0$
- $\mathcal{Q}$ a pour équation $\boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}.z+\boldsymbol{d'}=0$

Pour qu'un point M fasse faire partie de la droite D, il faut et suffit que ses coordonnées vérifient simultanément les deux équations de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Compte tenu des propriétés de la valeur absolue, nous pouvons affirmer que :

$$M(x;y;z)\in\mathcal{D} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}.z+\boldsymbol{d}=0 \\ \boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}.z+\boldsymbol{d'}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left|\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}.z+\boldsymbol{d}\right|+\left|\boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}.z+\boldsymbol{d'}\right|=0$$

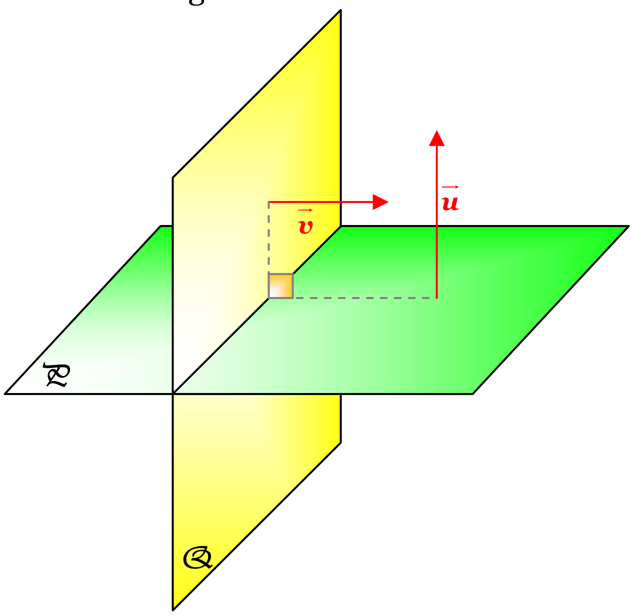
Ainsi, il est clair :

- Une droite $\mathcal{D}$ qui est toujours l'intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, admet-elle au moins une équation de la forme $\left|\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}.z+\boldsymbol{d}\right|+\left|\boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}.z+\boldsymbol{d'}\right|=0$.
- L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\left|\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}.z+\boldsymbol{d}\right|+\left|\boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}.z+\boldsymbol{d'}\right|=0$ est une droite. Sous réserve toutefois que les triplets $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c})$ et $(\boldsymbol{a'};\boldsymbol{b'};\boldsymbol{c'})$ ne soient pas proportionnels auquel cas on est face à deux plans parallèles.

Ce fameux concept d'équation de droite que nous avions commencé à entrevoir n'est donc plus une vaine chimère !
A la fin de la seconde époque, nous avions vu que toute droite admettait une équation (au moins) du type $\left|\boldsymbol{b}.x-\boldsymbol{a}.y+\boldsymbol{d}\right|+\left|\boldsymbol{c}.x-\boldsymbol{a}.z+\boldsymbol{d'}\right|+\left|\boldsymbol{c}.y-\boldsymbol{b}.z+\boldsymbol{d''}\right|=0$.
En fait, il s'agit là de l'équation de trois plans dont l'intersection est la droite en question.
Les plus grandes idées naissent parfois de vagabondages sans importance. Peut-être, le mien sera-t-il un jour accepté par ce monde incrédule qui nous limite ! On peut toujours rêver !

Pour conclure, voyons à quelle condition deux plans sont orthogonaux.

Là encore, fidèle à notre tradition, nous allons innover car la notion de plans orthogonaux ou perpendiculaires n'existe dans aucun programme officiel ! Mais il y a un début à tout !
Au nom du l'Humanité, Nous décrétons que :



Dire que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont orthogonaux signifie que toute droite $\mathcal{D}$ orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.

Ou encore, en utilisant les vecteurs normaux :

Dire que deux plans sont orthogonaux signifie qu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Comme tous les vecteurs normaux d'un même plan sont colinéaires, le fait qu'un couple de vecteurs normaux soient orthogonaux implique que tous les autres le sont.

Ainsi pour prouver que deux plans sont perpendiculaires, suffit-il de s'intéresser à leurs vecteurs normaux. Voyons cela sur un exemple !

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on s'intéresse aux plans $\mathcal{P}:\ 5.x-7.y+3.z+6=0$ et $\mathcal{Q}:\ 4.x+5.y+5.z+6=0$.

La question qui intéresse est l'univers tout entier est : sont-ils perpendiculaires ?

Pour le savoir, nous allons considérer deux de leurs vecteurs normaux.

Vu leurs équations et comme nous travaillons dans un repère orthonormé, un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{u}(5;-7;3)$ et un de $\mathcal{Q}$ est $\vec{v}(4;5;5)$. Calculons leur produit scalaire !

$$\vec{u}.\vec{v}=5\times 4+(-7)\times 5+3\times 5=20-35+15=0$$

Les vecteurs normaux étant orthogonaux, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont donc perpendiculaires.

Entre plan et droite

Dans cette partie, nous travaillerons dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

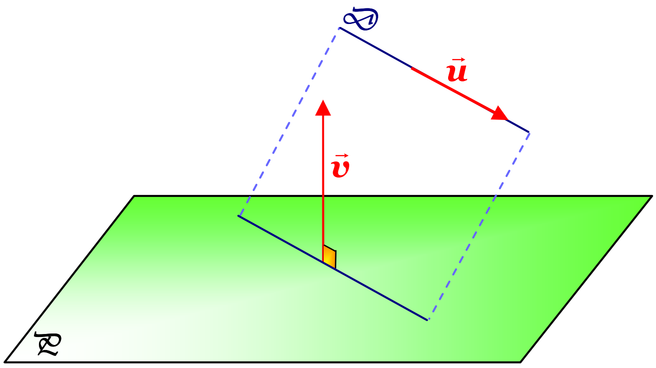
Dans l'espace, une droite et un plan sont soit parallèles, soit sécants.

Nous savons qu'une droite est parfaitement définie par un point et l'un de ses vecteurs directeurs. De même, il suffit d'un vecteur normal et d'un point pour caractériser un plan. Ce sont sur ces deux vecteurs que nous allons nous appuyer !

Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{v}$ peuvent être :

- ***Parallèles***

  La situation est alors la suivante :



Pour que le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ soient parallèles, il faut et il suffit que le vecteur normal $\vec{v}$ et le vecteur directeur $\vec{u}$ soient orthogonaux.

Par exemple, voyons ce qu'il en est avec plan $\mathcal{P}$ d'équation $3.x-4.y+z+3=0$ et la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=-3+7.t \\ y=2+6.t \\ z=-1+3.t \end{cases}$.

Il est clair que $\vec{u}(7;6;3)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

Comme le repère dans lequel nous travaillons est orthonormé alors nous pouvons affirmer qu'un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{v}(3;-4;1)$.

Regardons si ces deux vecteurs sont orthogonaux. Pour cela, on s'intéresse à leur produit scalaire. Car n'oublions pas que nous travaillons dans un repère orthonormé !

$$\vec{u}.\vec{v}=7\times 3+6\times(-4)+3\times 1=21-24+3=0$$

Comme leur produit scalaire est nul alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Donc la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont parallèles. Reste à savoir s'ils sont parallèles distincts ou si la première est inclue dans le second.

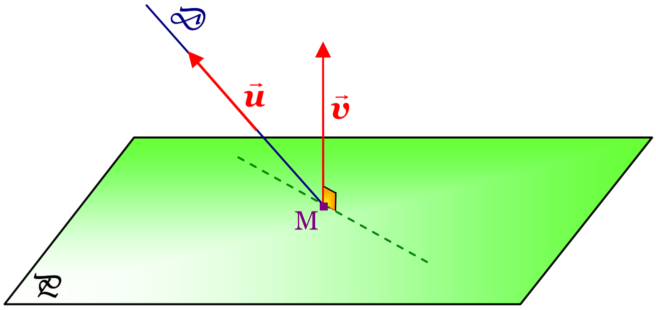
En utilisant sa représentation paramétrique avec $t=0$, on remarque que le point

$A(-3;2;-1)$ fait partie de la droite $\mathscr{D}$. Voyons s'il appartient aussi du plan $\mathscr{P}$.

$$3.x_A - 4.y_A + z_A + 3 = 3\times(-3) - 4\times 2 + (-1) + 3 = -15 \neq 0$$

Ses coordonnées n'en vérifiant pas l'équation, le point A ne fait pas partie du plan $\mathscr{P}$.
Par conséquent, le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ sont parallèles distincts.

- ***Sécants***



C'est la seule alternative au parallélisme.
L'intersection de la droite et du plan est alors un point dont on peut déterminer les coordonnées.

Voyons sur un exemple comment une telle chose est possible. Pour cela, nous allons nous intéresser à notre vieux copain le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3.x - 4.y + z + 3 = 0$ et à la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 8 + 2.t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Travaillant dans un repère orthonormé et depuis le cas précédent, nous savons qu'un vecteur normal du plan $\mathscr{P}$ est $\vec{v}(3;-4;1)$.

A partir de sa représentation paramétrique, on déduit que $\vec{w}(1;2;-1)$ est un vecteur directeur de la droite Δ.
Regardons si ces deux vecteurs sont orthogonaux au moyen de leur produit scalaire.

$$\vec{v}.\vec{w} = 3\times 1 + (-4)\times 2 + 1\times(-1) = 3 - 8 - 1 = -6 \neq 0$$

Donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas orthogonaux, donc le plan $\mathscr{P}$ et la droite Δ sont parallèles et par conséquent, sécants. Leur intersection est un point $M(x_M;y_M;z_M)$ dont nous allons déterminer les coordonnées.

M faisant partie de la droite Δ, il existe un paramètre t_M tel que $\begin{cases} x_M = -4 + t_M \\ y_M = 8 + 2.t_M \\ z_M = 3 - t_M \end{cases}$

De plus, comme le point M appartient au plan $\mathscr{P}$ alors ses coordonnées en vérifient l'équation de ce dernier. Ainsi :

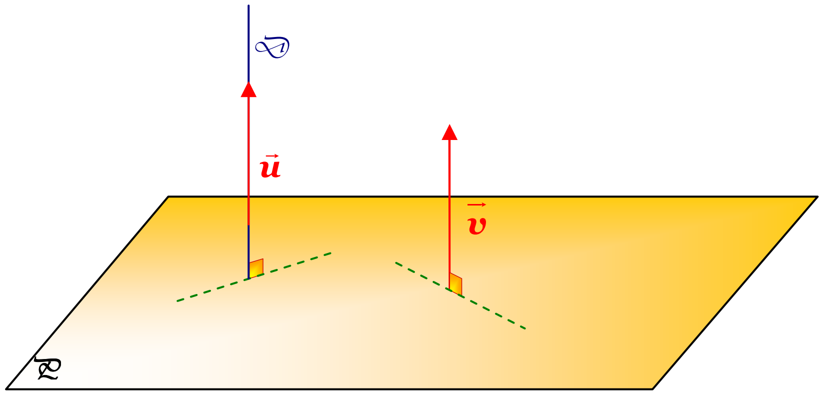
$$3.\underbrace{(-4 + t_M)}_{x_M} - 4.\underbrace{(8 + 2.t_M)}_{y_M} + \underbrace{(3 - t_M)}_{z_M} + 3 = 0$$

$$-6.t_M - 38 = 0$$

$$t_M = -\frac{19}{3}$$

Ayant le paramètre t_M et en utilisant la représentation paramétrique de Δ, on obtient les coordonnées du point M qui sont $\left(-\frac{31}{3};-\frac{14}{3};\frac{28}{3}\right)$.

Lorsqu'ils sont sécants, une droite et un plan peuvent aussi être perpendiculaires.
La situation est alors la suivante :



Pour qu'une droite $\mathcal{D}$ soit perpendiculaire à plan $\mathcal{P}$, il faut et il suffit qu'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la première soit colinéaire à un vecteur normal $\vec{w}$ du second

Rappelons que pour prouver que deux vecteurs sont colinéaires, il suffit de démontrer que leurs coordonnées sont proportionnelles. Ou alors, on peut aussi utiliser notre test...

Comme tous les vecteurs directeurs d'une même droite ont même direction et qu'il en va de même pour les vecteurs normaux d'un même plan alors trouver un couple de vecteurs colinéaires impliquera que tous les autres le sont.

Une des conséquences de tout cela est que si un plan est perpendiculaire à une droite alors tout vecteur normal du premier est aussi un vecteur directeur de la seconde. Et réciproquement !
Ce qui est très pratique pour basculer d'une équation de l'un à une représentation paramétrique de l'autre. Et réciproquement !

Par exemple, intéressons-nous à la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 3.t \\ y = 3 - t \\ z = 6 + 2.t \end{cases}$.

Déterminons une équation du plan $\mathcal{P}$ qui lui est perpendiculaire et qui passe par $A(-2;7;-1)$.
Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(3;-1;2)$. Comme $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires, $\vec{u}$ est aussi un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$.
Comme le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est réputé orthonormé alors une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est de la forme $3.x - y + 2.z + \boldsymbol{d} = 0$. Reste à déterminer le coefficient $\boldsymbol{d}$.
Comme le point $A(-2;7;-1)$ fait partie du plan P alors ses coordonnées en vérifient l'équation.

$$3 \times \underbrace{(-2)}_{x_A} - \underbrace{7}_{y_A} + 2 \times \underbrace{(-1)}_{z_A} + \boldsymbol{d} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{d} = 15$$

Ainsi une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est-elle $3.x - y + 2.z + 15 = 0$.

Dernière époque : à propos des distances et des normes

Nous allons achever notre conquête de la géométrie analytique dans l'espace en abordant les distances et les normes. Ce dernier acte aurait pu être le second. En effet, nous allons établir dans ce paragraphe un résultat qui sert dans l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé et donc dans les équations de plans.

Tout ce qui sera fait dans ce paragraphe, le sera dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Distance entre deux points de l'espace

Nous savons que si un plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ alors la distance entre deux points A et B de ce plan est donnée par :

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

C'est un résultat que nous avions démontré à l'aide du théorème de Pythagore lorsque nous avions parlé de la géométrie analytique dans le plan.

Dans l'espace et pour peu que l'on travaille dans un repère orthonormé, il existe une formule similaire. Etablissons-là !

Nous allons commencer prudemment en nous intéressant d'abord à la distance OM.

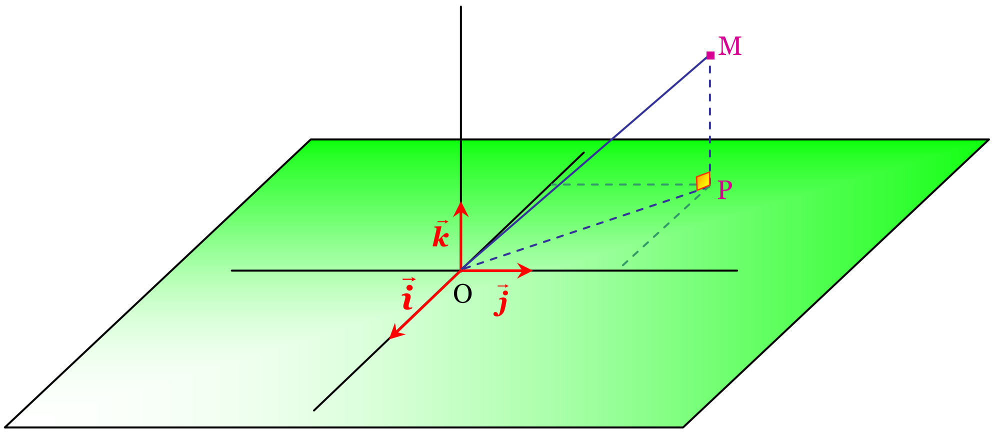
Soit donc M un point de l'espace. Appelons P le projeté orthogonal de M sur le plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Cette projection se fait donc parallèlement à l'axe $\left(O;\vec{k}\right)$

Du fait que le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est orthonormé, nous pouvons aussi affirmer que :

- Le point P a pour coordonnées $\left(x_M;y_M;0\right)$. Il appartient au plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
- Le triangle MPO est rectangle en P.
- La longueur MP est égale à $\left|z_M\right|$. Ceci car $\overrightarrow{MP}=z_M.\vec{k}$ et car $\vec{k}$ est un vecteur unitaire.

Bref, la situation est la suivante :



Cela paraîtra évident à beaucoup mais $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan qu'il définit !

Comme les points O et P appartiennent à ce dernier alors

$$OP=\sqrt{\left(x_P-x_O\right)^2+\left(y_P-y_O\right)^2}=\sqrt{\left(x_M\right)^2+\left(y_M\right)^2}$$

Comme le triangle MPO est rectangle en P alors le théorème de Pythagore lui est applicable :

$$OM^2=OP^2+PM^2=\underbrace{\left(x_M\right)^2+\left(y_M\right)^2}_{OP^2}+\left|z_M\right|^2=x_M{}^2+y_M{}^2+z_M{}^2$$

Ainsi arrivons-nous à ce que :

$$OM = \sqrt{x_M{}^2 + y_M{}^2 + z_M{}^2}$$

De cette trouvaille, nous allons en déduire la distance entre deux points quelconques de l'espace A et B.
Si A et B sont deux points quelconque alors on appelle M le point défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Ce point M a alors pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$. Appliquant la dernière formule trouvée, il vient alors :

$$AB = OM = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Et puis, pour tout vecteur $\vec{u}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c})$, en utilisant le même stratagème d'un point M défini par $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, on trouve l'expression de la norme d'un vecteur :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^2}$$

Ce sont ces formules qui permettent de connaître l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé. Une fois encore, rappelons que ces trois formules ne sont valables que dans un repère orthonormé ! Ailleurs, il faut voir !

Distance entre un point et un plan

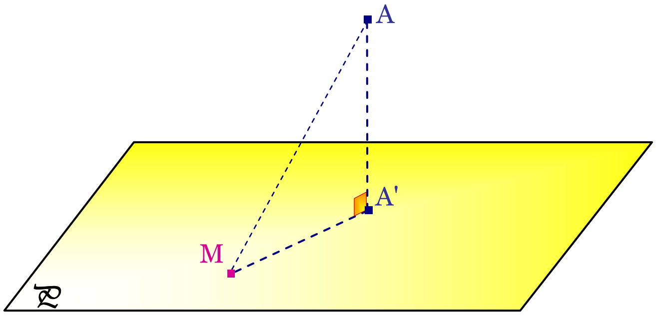
Là encore, nous allons travailler dans un repère orthonormé.
Notre objectif est le suivant : déterminer une formule donnant la distance entre un point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et un plan $\mathcal{P}$ d'équation $\boldsymbol{a}.x + \boldsymbol{b}.y + \boldsymbol{c}.z + \boldsymbol{d} = 0$.

Si l'on voit bien ce qu'est la distance entre deux points, celle entre un point et un plan est un peu plus obscure. Aussi devons-nous définir ce dont nous parlons !

Définition de la distance entre un point et un objet
La distance entre un point A et un objet quelconque est égale à la plus petite distance existant entre A et chacun des points M de cet objet.

$$\text{distance}(A, \text{Objet}) = \inf_{M \in \text{Objet}} AM$$

Dans le cas d'une distance point A/plan $\mathcal{P}$, il existe un point particulier du plan où cette distance minimale est atteinte : c'est le projeté orthogonal du point A.
Appelons A' le projeté orthogonal du point A sur le plan P.
Pour tout point M du plan P, la situation est alors la suivante :



Le triangle AA'M est rectangle en A'. L'hypoténuse [AM] est donc plus grand que le côté [AA'].
Ainsi pouvons-nous affirmer que :

$$\text{distance}(A ; \mathcal{P}) = AA'$$

Si nous parvenons à mettre en formule cette distance AA', notre mission sera réussie.
Entamons notre offensive !

Comme le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}.z+\boldsymbol{d}=0$ et que nous travaillons dans un repère orthonormé alors le vecteur $\vec{u}(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c})$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

Ce vecteur $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Cet état de fait a des conséquences sur leur produit scalaire. En effet :

$$\vec{u}.\overrightarrow{AA'}=\pm\|\vec{u}\|\times AA'$$

Il vient alors que :

$$AA'=\frac{\left|\vec{u}.\overrightarrow{AA'}\right|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\left|\vec{u}.\overrightarrow{AA'}\right|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}}$$

Mais ce produit scalaire peut aussi être envisagé sous l'angle des coordonnées. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\vec{u}.\overrightarrow{AA'}&=\boldsymbol{a}\times(x_{A'}-x_A)+\boldsymbol{b}\times(y_{A'}-y_A)+\boldsymbol{c}\times(x_{A'}-x_A)\\&=\underbrace{\boldsymbol{a}.x_{A'}+\boldsymbol{b}.y_{A'}+\boldsymbol{c}.z_{A'}}_{\substack{=-\boldsymbol{d}\\ \textit{car A' fait partie de } \mathcal{P}}}-\boldsymbol{a}.x_A-\boldsymbol{b}.y_A-\boldsymbol{c}.z_A\\&=-[\boldsymbol{a}.x_A+\boldsymbol{b}.y_A+\boldsymbol{c}.z_A+\boldsymbol{d}]\end{aligned}$$

Injectant cette trouvaille dans notre précédente expression, il vient alors que :

$$AA'=\frac{\left|\vec{u}.\overrightarrow{AA'}\right|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}}=\frac{\left|-[\boldsymbol{a}.x_A+\boldsymbol{b}.y_A+\boldsymbol{c}.z_A+\boldsymbol{d}]\right|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}}=\frac{\left|\boldsymbol{a}.x_A+\boldsymbol{b}.y_A+\boldsymbol{c}.z_A+\boldsymbol{d}\right|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}}$$

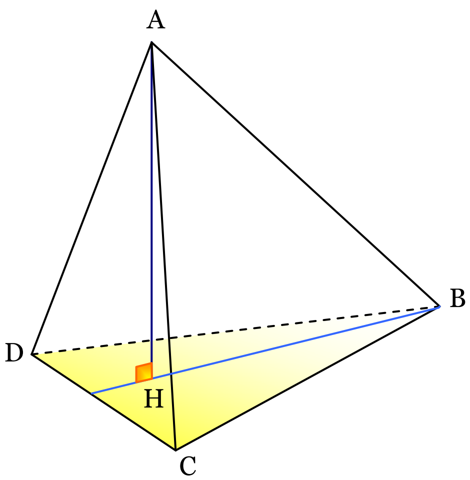
Nous avons trouvé notre formule !

La distance entre un point A et un plan $\mathcal{P}$ d'équation $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}.z+\boldsymbol{d}=0$ est donnée par :

$$\text{distance}(A\,;\,\mathcal{P})=\frac{\left|\boldsymbol{a}.x_A+\boldsymbol{b}.y_A+\boldsymbol{c}.z_A+\boldsymbol{d}\right|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2}}$$

Une fort belle formule qui peut servir par exemple à calculer la hauteur d'un tétraèdre.

Le défi : calcul de la hauteur d'un tétraèdre pas sympa !



Calculons la hauteur AH du tétraèdre ABCD de base BCD sachant que :

$A(-2;3;1)$ $\quad B(3;1;7)$ $\quad C(-1;8;5)$ $\quad D(2;-3;5)$

Précision : *Le tétraèdre ci-contre est fourni à titre d'illustration et comme toujours dans cette époque, nous allons travailler dans un repère orthonormé.*

Ce qu'il nous faut calculer est donc la hauteur AH. C'est aussi la distance existant entre le point A et le plan BCD.
Ayant déjà les coordonnées du point A, il ne nous manque qu'une équation cartésienne de (BCD) pour pouvoir appliquer la formule précédente.
Il existe plusieurs manières de procéder. Nous optons pour une représentation paramétrique du plan (BCD).

Sans surprise, le triplet $(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ est un repère du plan (BCD).

Après calculs, on trouve que $\overrightarrow{BC}(-4;7;-2)$ et $\overrightarrow{BD}(-1;-4;-2)$. Nous pouvons alors commencer la manoeuvre !

$$\begin{aligned}
M(x;y;z) \in (BCD) &\Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{l} \text{ tels que } \overrightarrow{BM} = \boldsymbol{k}.\overrightarrow{BC} + \boldsymbol{l}.\overrightarrow{BD} \\
&\Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{l} \text{ tels que } \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \\ z-7 \end{pmatrix} = \boldsymbol{k}.\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{l}.\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \text{Il existe deux réels } \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{l} \text{ tels que } \begin{cases} x = 3 - 4.\boldsymbol{k} - \boldsymbol{l} \\ y = 1 + 7.\boldsymbol{k} - 4.\boldsymbol{l} \\ z = 7 - 2.\boldsymbol{k} - 2.\boldsymbol{l} \end{cases}
\end{aligned}$$

A présent, nous allons chercher à éliminer les deux paramètres $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{l}$. Pour se faire, nous allons user de substitution !
La première équation s'écrit aussi $\boldsymbol{l} = 3 - 4.\boldsymbol{k} - x$.
Injectant cette découverte dans les deux dernières équations, il vient :

- $y = 1 + 7.\boldsymbol{k} - 4.\underbrace{(3 - 4.\boldsymbol{k} - x)}_{\boldsymbol{l}} \Leftrightarrow y = 1 + 7.\boldsymbol{k} - 12 + 16.\boldsymbol{k} + 4.x \Leftrightarrow y - 4.x + 11 = 23.\boldsymbol{k}$
- $z = 7 - 2.\boldsymbol{k} - 2.\underbrace{(3 - 4.\boldsymbol{k} - x)}_{\boldsymbol{l}} \Leftrightarrow z = 7 - 2.\boldsymbol{k} - 6 + 8.\boldsymbol{k} + 2.x \Leftrightarrow z - 2.x - 1 = 6.\boldsymbol{k}$

Ayant éliminer les ailes, il faut à présent anéantir les cas avec un petit produit en croix !

Produit en croix...

$$\frac{y - 4.x + 11}{23} = \boldsymbol{k} = \frac{z - 2.x - 1}{6}$$
$$6 \times [y - 4.x + 11] = 23 \times [z - 2.x - 1]$$
$$6.y - 24.x + 66 = 23.z - 46.x - 23$$
$$22.x + 6.y - 23.z + 89 = 0$$

Une équation cartésienne du plan (BCD) est donc $22.x + 6.y - 23.z + 89 = 0$.
A partir de là, il ne reste plus qu'à appliquer la formule !

$$\text{Hauteur AH} = \frac{|22 \times (-2) + 6 \times 3 - 23 \times 5 + 89|}{\sqrt{22^2 + 6^2 + (-23)^2}} = \frac{|-52|}{\sqrt{1049}} = \frac{52}{\sqrt{1049}} \simeq 1{,}61$$

Il n'est guère possible d'obtenir de meilleure écriture pour ce résultat. Donc nous conclurons que :

Conclusion : la hauteur AH du tétraèdre ABCD par rapport à la base BCD mesure $\dfrac{52}{\sqrt{1049}}$.

Ce qui rassure, c'est que nous aurions pu trouver pire !

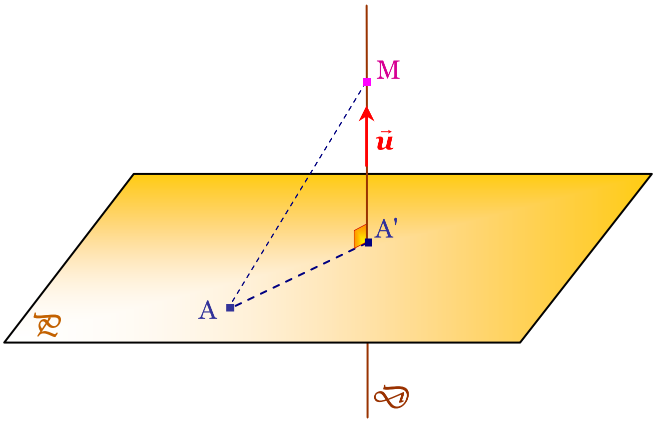
Distance entre un point et une droite

A notre connaissance, il n'existe pas de formule sympa donnant la distance entre un point et une droite dans l'espace. Cependant, il est possible de la déterminer à la main. C'est par ce petit sentier que nous allons vous entraîner...

Notre mission est de déterminer la distance qu'il existe entre le point $A(4;-3;2)$ et la droite ☜ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 2.t \\ z = -1 + 7.t \end{cases}$.

La distance entre un point et une droite est la plus petite des distances existant entre ce premier point et chacun des points de la droite.

Comme pour les plans et toujours à cause du théorème de Pythagore, cette distance est minimale avec le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$.



Appelons A' le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$.
$\mathcal{P}$ est le plan perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A.

Clairement, pour tout point M de la droite $\mathcal{D}$, le triangle AA'M est rectangle en A'.
L'hypoténuse [AM] a une longueur supérieure à celle du côté [AA'].

La distance entre le point A et la droite $\mathcal{D}$ est donc égale à la distance AA'.
Pour obtenir cette première, nous devons donc déterminer les coordonnées du point A'.

La première chose à dire est que comme le point A' fait partie de la droite $\mathcal{D}$ alors ses coordonnées en vérifient la représentation paramétrique.

Donc il existe un paramètre $t_{A'}$ tel que $\begin{cases} x_{A'} = 2 - t_{A'} \\ y_{A'} = 6 + 2.t_{A'} \\ z_{A'} = -1 + 7.t_{A'} \end{cases}$

Ensuite le point A' appartient aussi à $\mathcal{P}$, le plan perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ passant par A.
Nous avons besoin d'une équation cartésienne de ce dernier.
A partir de sa représentation paramétrique, on peut affirmer que $\vec{u}(-1;2;7)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
Comme $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ est aussi un vecteur normal de ce dernier plan.
Bossant dans un repère orthonormé, une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme $-x + 2.y + 7.z + \boldsymbol{d} = 0$.
Pour déterminer le coefficient $\boldsymbol{d}$, il suffit de remarquer que comme le point A fait aussi partie de $\mathcal{P}$ alors ses coordonnées en vérifient l'équation. Par suite :

$$-\underbrace{4}_{x_A} + 2 \times \underbrace{(-3)}_{y_A} + 7 \times \underbrace{2}_{z_A} + \boldsymbol{d} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{d} = -4$$

Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc $-x + 2.y + 7.z - 4 = 0$.

La connaissance du paramètre $t_{A'}$ entraînera celle des coordonnées de A'.
Comme le point A' appartient à $\mathcal{P}$ alors ses coordonnées en vérifient l'équation. Il vient alors :

$$-\underbrace{(2 - t_{A'})}_{x_{A'}} + 2 \times \underbrace{(6 + 2.t_{A'})}_{y_{A'}} + 7 \times \underbrace{(-1 + 7.t_{A'})}_{z_{A'}} - 4 = 0 \Leftrightarrow 54.t_{A'} - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{A'} = \frac{1}{54}$$

Par suite, on trouve que les coordonnées de A' sont $\left(\frac{107}{54}; \frac{163}{27}; -\frac{47}{54}\right)$.

Arrive l'acte final : le calcul effectif de la distance entre le point A et la droite $\mathcal{D}$.

$$\text{distance}(A\,;\,\mathcal{D}) = AA' = \sqrt{\left(\frac{107}{54} - (-2)\right)^2 + \left(\frac{163}{27} - 3\right)^2 + \left(-\frac{47}{54} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1799}{54}} \simeq 5{,}77$$

Prolongeant nos mathématiques ébats, on entrevoit ce que pourrait être une formule donnant la distance entre un point et une droite de l'espace : quelque chose de monstrueux !

Epilogue : par delà les distances, au-delà des normes

Depuis toujours, on vous a parlé de **la** distance existant entre les points A et B, ou de **la** norme d'un vecteur. Comme s'il n'y en avait pas d'autres !
Si on avait été honnête et complet, on aurait dû dire **une** distance existant entre les points A et B, ou **une** norme du vecteur $\vec{u}$. Car "distance" et "norme" sont des notions mathématiques qui se déclinent au pluriel.
Précisons que l'on parle de "norme de vecteur" et de "distance entre deux points".

La vérité des normes

D'un point de vue mathématique, une norme est une application N de l'ensemble des vecteurs de l'espace dans $\mathbb{R}^+$ qui doit présenter trois propriétés :

- N doit être homogène
  Pour tout réel $\boldsymbol{k}$ et pour tout vecteur $\vec{u}$, on doit avoir : $N(\boldsymbol{k}.\vec{u}) = |\boldsymbol{k}|.N(\vec{u})$.
- N doit avoir la propriété de séparation
  Le seul vecteur dont l'image par N est égal à 0 est le vecteur nul ou $N(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- N doit vérifier l'inégalité triangulaire
  Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $N(\vec{u}+\vec{v}) \leq N(\vec{u}) + N(\vec{v})$

Voilà ce qu'est une norme ! Et des normes, il en existe des infinités. Présentons-en quelques spécimens !
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe alors un triplet de réels $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\boldsymbol{c})$ tel que $\vec{u} = \boldsymbol{a}.\vec{i} + \boldsymbol{b}.\vec{j} + \boldsymbol{c}.\vec{k}$.

Ce triplet correspond aux coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A partir de ces coordonnées, il est possible de construire tout un tas de normes.

L'application $N_1(\vec{u}) = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}|$ est une norme. Disons pourquoi !

- C'est une application de l'ensemble des vecteurs de l'espace dans $\mathbb{R}^+$.
  Ceci car on additionne des valeurs absolues. Et une valeur absolue est toujours...
- N_1 est homogène.
  En effet, $N_1(\boldsymbol{k}\times\vec{u}) = |\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{k}|\times\left[|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}|\right] = |\boldsymbol{k}|\times N_1(\vec{u})$
- N_1 présente la propriété de séparation.
  Commençons par l'image du vecteur nul : $N_1(\vec{0}) = |0| + |0| + |0| = 0$
  Ensuite si un vecteur $\vec{u}$ est tel que $N_1(\vec{u}) = |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}| = 0$ alors nécessairement ses trois coordonnées sont nulles. En effet, une valeur absolue est toujours positive. De plus, la seule possibilité qu'une somme de nombres positifs soit nulle, est que tous ses termes soient eux-mêmes nuls.
  Bref, nous avons l'équivalence : $N_1(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- N_1 respecte l'inégalité triangulaire
  L'application N_1 hérite de la même propriété présentée par la valeur absolue.
  $N_1(\vec{u}+\vec{v}) = |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a'}| + |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b'}| + |\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c'}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{a'}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b'}| + |\boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{c'}| = N_1(\vec{u}) + N_1(\vec{v})$

Un autre exemple de norme est l'application $N_\infty(\vec{u}) = \text{Sup}\left(|x_{\vec{u}}|;|y_{\vec{u}}|;|z_{\vec{u}}|\right)$ qui à chaque vecteur $\vec{u}$ fait correspondre la plus grande des valeurs absolues de ses coordonnées.
Là encore, c'est une norme car elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, elle est homogène, présente la propriété de séparation et respecte l'inégalité triangulaire.
La norme classique que nous utilisons est la norme $N_2(\vec{u}) = \sqrt{(x_{\vec{u}})^2 + (y_{\vec{u}})^2 + (z_{\vec{u}})^2}$.

Comparons les trois normes que nous venons de définir avec deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Norme	$\vec{u}(5;-2;3)$	$\vec{v}(-1;-1;7)$	**Comparaison**
N_1	$N_1(\vec{u}) = \|5\| + \|-2\| + \|3\| = 10$	$N_1(\vec{v}) = \|-1\| + \|-1\| + \|7\| = 9$	$N_1(\vec{u}) > N_1(\vec{v})$
N_2	$N_2(\vec{u}) = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{38}$	$N_2(\vec{u}) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{51}$	$N_2(\vec{u}) < N_2(\vec{v})$
N_∞	$N_\infty(\vec{u}) = \text{Sup}(\|5\|;\|-2\|;\|3\|) = 5$	$N_\infty(\vec{v}) = \text{Sup}(\|-1\|;\|-1\|;\|7\|) = 7$	$N_\infty(\vec{u}) > N_\infty(\vec{v})$

Comme nous le constatons, ces trois normes donnent des résultats différents. Même si certains vous diront qu'en dimension 3, tous les normes sont équivalentes, il apparaît clairement qu'elles ne mesurent pas la même chose.
En fait, chacune d'entre elles définit une géométrie bien précise. Depuis le début, nous avons travaillé (sans le savoir) avec la norme N_2 et la géométrie qu'elle définit.
Mais assez de normes et parlons à présent de distance !

A propos des distances

Une distance ne peut que se concevoir qu'entre deux points de l'espace. D'un point de vue mathématique, il s'agit d'une application ***d*** de l'espace dans $\mathbb{R}^+$ qui à chaque couple de points associe un unique réel positif ou nul. Cette application doit respecter les conditions suivantes :

- ***d*** doit être symétrique
  Pour tous points de l'espace A et B, on doit avoir : ***d***(A ; B) = ***d***(B ; A).
- ***d*** doit avoir la propriété de séparation
  Pour tout point A de l'espace, ***d***(A ; A) = 0.
  Si ***d***(A ; B) = 0 alors les points A et B sont confondus.
- ***d*** doit vérifier l'inégalité triangulaire
  Pour tous points de l'espace A, B et C, ***d***(A ; B) ≤ ***d***(A ; C) + ***d***(C ; B)

A partir de tout norme N, il est possible de définir une distance ***d*** en posant $\boldsymbol{d}(A;B) = N\left(\overrightarrow{AB}\right)$

Pour prouver notre accusation, nous devons établir que cette application ***d*** vérifie les trois conditions énoncées dans la définition.

- L'application ***d*** est-elle symétrique ?
  Pour tous points de l'espace A et B, nous avons :
  $$\boldsymbol{d}(A;B) = N\left(\overrightarrow{AB}\right) = N\left((-1)\times\overrightarrow{BA}\right) = \underbrace{|-1|\times N\left(\overrightarrow{BA}\right)}_{\textit{La norme est homogène}} = \boldsymbol{d}(A;B)$$

- L'application ***d*** présente la propriété de séparation ?
  Pour tout point A de l'espace, nous avons : $\boldsymbol{d}(A;A) = N\left(\overrightarrow{AA}\right) = N(\vec{0}) = 0$
  Réciproquement si $\boldsymbol{d}(A;B) = N\left(\overrightarrow{AB}\right) = 0$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur nul car la norme N a la propriété de séparation. Donc les points A et B sont confondus.
  Ainsi la distance ***d*** présente-t-elle la propriété de séparation.

- L'application $\boldsymbol{d}$ vérifie-t-elle l'inégalité triangulaire ?
  Pour tous points de l'espace A, B et C, nous pouvons écrire que :
  $$\boldsymbol{d}(\mathrm{A};\mathrm{B}) = \mathrm{N}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \underbrace{\mathrm{N}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) \leq \mathrm{N}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)+\mathrm{N}\left(\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)}_{N\ respecte\ l'inégalité\ triangulaire} = \boldsymbol{d}(\mathrm{A};\mathrm{C})+\boldsymbol{d}(\mathrm{C};\mathrm{B})$$
  Donc l'application $\boldsymbol{d}$ respecte l'inégalité triangulaire.

Conclusion : Si N est une norme alors l'application $\boldsymbol{d}(\mathrm{A};\mathrm{B}) = \mathrm{N}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$ définit une distance sur l'espace

Réciproquement ayant une distance, il n'est pas toujours possible d'obtenir une norme.
Par exemple, l'application δ définie par :

- δ(A ; B) = AB si l'origine O fait partie de la droite (AB)
- δ(A ; B) = OA + OB si l'origine O n'appartient pas à la droite (AB)

est une distance à partir de laquelle on ne peut pas construire de norme. Démontrons-le !

Au préalable, remarquons que pour tous points A et B de l'espace, nous avons l'encadrement :
$$\mathrm{AB} \leq \delta(\mathrm{A};\mathrm{B}) \leq \mathrm{OA}+\mathrm{OB}$$

A présent, nous pouvons entamer les hostilités. La première chose à démontrer est que l'application δ est une distance. Nous devons établir qu'elle présente trois propriétés !

- δ est-elle symétrique ?
  La réponse est oui. Elle hérite en cela de la symétrie de la distance classique !

- δ présente-t-elle la propriété de séparation ?
  D'abord, nous avons que : δ(A ; A) = AA = 0
  Réciproquement, si A et B sont deux points tels que δ(A ; B) = 0 alors de part l'encadrement précédent, il vient que $\mathrm{AB} = 0$.
  Donc les points A et B sont confondus.
  L'application δ présente donc la propriété de séparation.

- L'application δ respecte-t-elle l'inégalité triangulaire ?
  Soient A, B et C trois points de l'espace. Nous devons envisager plusieurs cas suivant que les points A et B fassent partie ou non de la droite (OC).

	A∈(OC)	**A∉(OC)**
B∈(OC)	$\delta(\mathrm{A};\mathrm{C})+\delta(\mathrm{B};\mathrm{C}) = \underbrace{\mathrm{AC}+\mathrm{BC}}$ $\geq \mathrm{AB} = \delta(\mathrm{A};\mathrm{B})$ car les points A, B, C et O sont alignés.	$\delta(\mathrm{A};\mathrm{C})+\delta(\mathrm{B};\mathrm{C}) = \mathrm{OA}+\underbrace{\mathrm{OC}+\mathrm{BC}}$ $\geq \mathrm{OA}+\mathrm{OB}$ $\geq \delta(\mathrm{A};\mathrm{B})$
B∉(OC)	$\delta(\mathrm{A};\mathrm{C})+\delta(\mathrm{B};\mathrm{C}) = \mathrm{AC}+\mathrm{OB}+\mathrm{OC}$ $= \underbrace{\mathrm{AC}+\mathrm{OC}}+\mathrm{OB}$ $\geq \mathrm{AO}+\mathrm{OB}$ $\geq \delta(\mathrm{A};\mathrm{B})$	$\delta(\mathrm{A};\mathrm{C})+\delta(\mathrm{B};\mathrm{C}) = \mathrm{OA}+\mathrm{OC}+\mathrm{OB}+\mathrm{OC}$ $\geq \mathrm{OA}+\mathrm{OB}$ $\geq \delta(\mathrm{A};\mathrm{B})$

  Dans tous les cas, nous avons bien que : δ(A ; B) ≤ δ(A ; C) + δ(B ; C)

L'application δ respectant les trois propriétés, cela fait d'elle une distance.

Pour autant, à partir de cette distance δ, il n'est pas possible de définir une norme.
En effet, si l'on s'intéresse aux points $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(1;1;0)$ alors il est clair que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux. En effet, leurs coordonnées sont $(1;0;0)$.
Pour autant, les distances δ(O ; A) et δ(B ; C) sont différentes. En effet :

- $\delta(O;A) = OA = 1$ car les points O et A sont alignés !
- $\delta(B;C) = OB + OC = 1 + \sqrt{2}$ car le point O ne fait pas partie de la droite (BC).

Il n'est donc pas possible de définir une norme N à partir de la distance δ.
En posant $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$, nous nous heurtons à l'impossible alternative.
Doit-on choisir $N(\vec{u}) = N(\overrightarrow{OA}) = \delta(O;A) = 1$ ou alors $N(\vec{u}) = N(\overrightarrow{BC}) = \delta(B;C) = 1 + \sqrt{2}$?
Deux choix sont possibles. Il y en a un de trop pour définir une norme !
En fait, le gros problème de la distance δ est qu'elle n'est pas invariante par translation.
Quoiqu'il en soit, nous avons mis en évidence que :

Conclusion : A partir d'une distance, il n'est pas toujours possible de définir une norme N.

Des deux notions que nous venons de traiter, la première que vous ayez rencontrée dans votre scolarité est celle de distance. Puis, à partir de celle-ci, on vous a défini ce qu'était une norme. Cet enchaînement pourrait conduire à croire qu'une norme se définit à partir d'une distance. Mais ainsi que nous venons de le voir : c'est la distance qui procède de la norme et non le contraire ! Quant à la norme, elle procède du produit scalaire !

A propos du produit scalaire

Ainsi que nous l'avions laissé entendre, le produit scalaire est bien plus qu'une petite application qui à deux vecteurs associe un nombre réel.
D'un point de vue algébrique, un produit scalaire (car il y en a plusieurs) est avant tout une application bilinéaire, symétrique, définie et positive. Voyons tout cela en détail !

Un produit scalaire est une application φ qui a deux vecteurs associe un nombre réel. Cette application doit présenter les propriétés suivantes :

- φ doit être symétrique
  Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\vec{v}$, on a : $\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \varphi(\vec{v},\vec{u})$
- φ doit être bilinéaire.
  L'application φ doit laisser passer l'addition vectorielle et la multiplication par un réel.
  Pour tout réel $\boldsymbol{k}$ et pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on doit avoir :
  $$\varphi(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = \varphi(\vec{u},\vec{w}) + \varphi(\vec{v},\vec{w}) \quad \text{et} \quad \varphi(\boldsymbol{k}.\vec{u},\vec{w}) = \boldsymbol{k}.\varphi(\vec{u},\vec{w})$$
  $$\varphi(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = \varphi(\vec{u},\vec{v}) + \varphi(\vec{u},\vec{w}) \quad \text{et} \quad \varphi(\vec{u},\boldsymbol{k}.\vec{v}) = \boldsymbol{k}.\varphi(\vec{u},\vec{v})$$
  Précisons que si φ est symétrique alors la linéarité vis-à-vis de la première variable entraîne celle vis-à-vis de la seconde. Et réciproquement !
- φ doit être définie.
  Le seul vecteur $\vec{u}$ tel que $\varphi(\vec{u},\vec{u}) = 0$ est le vecteur nul.
- φ doit être positive.
  Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, on a : $\varphi(\vec{u},\vec{u}) \geq 0$.

A partir d'un produit scalaire φ, il est possible de définir une norme pour vecteur en posant :
$$N(\vec{u}) = \sqrt{\varphi(\vec{u},\vec{u})}$$

Réciproquement, nous avons alors que pour tout vecteur $\vec{u}$. $\varphi(\vec{u},\vec{u}) = \left[N(\vec{u})\right]^2$.

Justement, prouvons que l'application N est une norme. Pour cela, nous devons établir que établir que N présente trois propriétés.

- N est-elle homogène ?
  Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel $\boldsymbol{k}$, on peut écrire que :
  $$N(\boldsymbol{k}.\vec{u}) = \sqrt{\varphi(\boldsymbol{k}.\vec{u},\boldsymbol{k}.\vec{u})} = \underbrace{\sqrt{\boldsymbol{k}^2 \times \varphi(\vec{u},\vec{u})}}_{\text{car } \varphi \text{ est bilinéaire}} = \sqrt{\boldsymbol{k}^2} \times \sqrt{\varphi(\vec{u},\vec{u})} = |\boldsymbol{k}|.N(\vec{u})$$
  Oui l'application N est homogène !

- N a-t-elle la propriété de séparation ?
  Inutile d'y aller par quatre chemins ! Comme φ est une application définie alors le seul vecteur $\vec{u}$ tel que $N(\vec{u}) = \sqrt{\varphi(\vec{u},\vec{u})} = 0$ ne peut être que le vecteur nul. Donc c'est oui !

- N respecte-t-elle l'inégalité triangulaire ?
  Pour répondre à cette légitime interrogation, nous nous appuierons sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz que respecte toute produit scalaire digne de ce nom !
  Soient donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux sympathiques vecteurs de l'espace. Nous pouvons écrire que :
  $$\begin{aligned}\left[N(\vec{u}+\vec{v})\right]^2 &= \varphi(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}) \\ &= \varphi(\vec{u},\vec{u}+\vec{v}) + \varphi(\vec{v},\vec{u}+\vec{v}) \\ &= \underbrace{\varphi(\vec{u},\vec{u}) + \varphi(\vec{u},\vec{v})} + \underbrace{\varphi(\vec{v},\vec{u}) + \varphi(\vec{v},\vec{v})} = \varphi(\vec{u},\vec{u}) + 2\times\varphi(\vec{u},\vec{v}) + \varphi(\vec{v},\vec{v})\end{aligned}$$
  car φ est linéaire par rapport à la première variable
  Et aussi par rapport à la seconde...

  Précisons que comme φ est symétrique alors $\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \varphi(\vec{v},\vec{u})$. D'où notre conclusion !
  A présent, intéressons-nous au carré du second membre. Nous avons :
  $$\begin{aligned}\left[N(\vec{u})+N(\vec{v})\right]^2 &= \left[N(\vec{u})\right]^2 + 2\times N(\vec{u})\times N(\vec{v}) + \left[N(\vec{v})\right]^2 \\ &= \varphi(\vec{u},\vec{u}) + 2\times\sqrt{\varphi(\vec{u},\vec{u})\times\varphi(\vec{v},\vec{v})} + \varphi(\vec{v},\vec{v})\end{aligned}$$
  D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous savons que : $\left[\varphi(\vec{u},\vec{v})\right]^2 \leq \varphi(\vec{u},\vec{u})\times\varphi(\vec{v},\vec{v})$
  Par passage de cette inégalité à la racine carrée, il vient alors :
  $$\sqrt{\left[\varphi(\vec{u},\vec{v})\right]^2} \leq \sqrt{\varphi(\vec{u},\vec{u})\times\varphi(\vec{v},\vec{v})}$$
  $$|\varphi(\vec{u},\vec{v})| \leq \sqrt{\varphi(\vec{u},\vec{u})\times\varphi(\vec{v},\vec{v})}$$
  $$\underbrace{2\times\varphi(\vec{u},\vec{v}) + \varphi(\vec{u},\vec{u}) + \varphi(\vec{v},\vec{v})}_{N(\vec{u}+\vec{v})} \leq \underbrace{2\times\sqrt{\varphi(\vec{u},\vec{u})\times\varphi(\vec{v},\vec{v})} + \varphi(\vec{u},\vec{u}) + \varphi(\vec{v},\vec{v})}_{N(\vec{u})+N(\vec{v})}$$
  Ainsi l'application N respecte-t-elle bien l'inégalité triangulaire !

Conclusion : Si φ est un produit scalaire alors l'application $N(\vec{u}) = \sqrt{\varphi(\vec{u},\vec{u})}$ est une norme.

Nous savons obtenir la norme N à partir de son produit scalaire φ. Réciproquement, il existe une formule permettant d'obtenir le produit scalaire en fonction de sa norme.
En utilisant la bilinéarité du produit scalaire φ, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, il vient :
$$\underbrace{\varphi(\vec{u}-\vec{v},\vec{u}-\vec{v})}_{N(\vec{u}-\vec{v})^2} = \underbrace{\varphi(\vec{u},\vec{u})}_{N(\vec{u})^2} - 2\times\varphi(\vec{u},\vec{v}) + \underbrace{\varphi(\vec{v},\vec{v})}_{N(\vec{v})^2}$$
En manipulant cette égalité, nous arrivons à une relation bien connue :

Si φ est un produit scalaire et N la norme qui en découle alors :

$$\varphi(\vec{u},\vec{v})=\frac{1}{2}\times\left[N(\vec{u})^2+N(\vec{v})^2-2\times N(\vec{u}-\vec{v})^2\right]$$

Les plus assidus d'entre vous se souviendront que c'est par cette relation que nous avions défini le produit scalaire de deux vecteurs.
A nous lire, on pourrait croire qu'à partir de toute norme, il est possible définir un produit scalaire. Il s'agit là d'une fausse impression !

Par exemple, la norme $N_1(\vec{u})=|x_{\vec{u}}|+|y_{\vec{u}}|+|z_{\vec{u}}|$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, ne permet pas de définir un produit scalaire !
Ceci car l'application φ_1 définie par $\varphi_1(\vec{u},\vec{v})=\frac{1}{2}\times\left[N_1(\vec{u})^2+N_1(\vec{v})^2-2\times N_1(\vec{u}-\vec{v})^2\right]$ n'est pas bilinéaire. Prouvons cet état de fait !
Pour ce faire, nous allons nous intéresser aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Il est clair que :

- Le vecteur $\vec{i}$ a pour coordonnées $(1;0;0)$ et $N_1(\vec{i})=1$.
- Le vecteur $\vec{j}$ a pour coordonnées $(0;1;0)$ et $N_1(\vec{j})=1$.
- Le vecteur $\vec{i}+\vec{j}$ a pour coordonnées $(1;1;0)$ et $N_1(\vec{i}+\vec{j})=2$
- Le vecteur $\vec{j}-\vec{i}$ a pour coordonnées $(-1;1;0)$ et $N_1(\vec{j}-\vec{i})=2$

Ayant dit tout cela, on peut calculer certaines valeurs de l'application φ_1 :
D'une part :

$$\varphi_1(\vec{i}+\vec{j},\vec{i})=\frac{1}{2}\times\left[N_1(\vec{i}+\vec{j})^2+N_1(\vec{i})^2-2\times N_1(\vec{j})^2\right]=\frac{1}{2}\times\left[2^2+1^2-2\times 1^2\right]=1{,}5$$

Et de l'autre :

$$\varphi_1(\vec{i},\vec{i})+\varphi_1(\vec{j},\vec{i})=N_1(\vec{i})^2+\frac{1}{2}\times\left[N_1(\vec{j})^2+N_1(\vec{i})^2-2\times N_1(\vec{j}-\vec{i})^2\right]$$

$$=1^2+\frac{1}{2}\times\left[1^2+1^2-2\times 2^2\right]=1-3=-2$$

De façon très claire, nous avons que :

$$\varphi_1(\vec{i}+\vec{j},\vec{i})\neq\varphi_1(\vec{i},\vec{i})+\varphi_1(\vec{j},\vec{i})$$

Même si elle est symétrique, définie et positive, l'application φ_1 n'est cependant pas bilinéaire.

Conclusion : N'étant pas bilinéaire, l'application φ_1 ne peut pas être un produit scalaire !
Une norme quelconque ne suffit pas à définir un produit scalaire.

Lorsqu'une norme découle d'un produit scalaire, on dit qu'elle est euclidienne.

Après notre conquête...

Depuis le début, la géométrie que vous avez apprise, a toujours été basée sur des réalités graphiques comme les droites parallèles ou les angles droits.
Pour pouvoir démontrer des choses, il a fallu en admettre certaines autres. Car l'édifice géométrique que vous construisiez, devait reposer sur de solides fondations.
De notre point de vue, ces définitions, postulats et autres axiomes semblent être des évidences naturelles. C'est peut-être parce que nous avons toujours vécus avec. Les notions de points, segments, droites et parallélismes sont avant tout des notions graphiques. Ce sont surtout des

concepts de l'esprit. Puis, de déductions en raisonnements, c'est tout un édifice théorique qui s'est constitué.
Dans cette géométrie qui nous est si familière, deux droites parallèles ne se croisent jamais. La distance existant entre deux points est la longueur du segment qui les joint.
A partir de cette notion de distance entre deux points, vous en êtes venus à parler de celle de la norme d'un vecteur. Et à partir de celle-ci, vous avez défini ce qu'était le produit scalaire de deux vecteurs.

A posteriori, on peut penser que dans cette aventure, nous avons eu de la chance ! Car ainsi que nous venons de le voir, toutes les distances ne donnent pas des normes et toutes les normes n'aboutissent pas à des produits scalaires.
Car c'est du produit scalaire que découle la norme. Et de la norme que provient la distance !
Si nous avions travaillé dés le départ avec une autre distance, il est probable que l'aventure aurait toute autre, voire plus brève ! Peut-être n'y aurait-il jamais eu de notion de norme ou de produit scalaire ?
Cette distance naturelle est vraiment bien plus qu'une distance !
Si l'on veut structurer l'espace, c'est un produit scalaire qu'il faut commencer par définir !

Si nous choisissions de travailler dans l'espace avec un nouveau produit scalaire, nous définirions alors une nouvelle géométrie, sans doute bien différente de celle que nous connaissons. Au-delà de l'espace que nous avons conquis et structuré, il en existe d'autres visions et d'autres perceptions.

En annexe : à propos de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Cette inégalité est une propriété que présente tout produit scalaire (ou application bilinéaire symétrique définie et positive). Nous l'avons utilisée dans l'épilogue pour démontrer qu'à partir de tout produit scalaire, on pouvait définir une norme.
Cette inégalité est au mieux abordée deux années après le BAC. Pourtant son énoncé et sa démonstration sont assez simples.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz
Si φ est un produit scalaire alors pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

$$\left[\varphi\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right]^2 \leq \varphi\left(\vec{u},\vec{u}\right)\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)$$

Pour prouver cette remarquable inégalité, nous considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ils peuvent être colinéaires ou pas. Examinons ces deux cas :

1. ***Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.***
   A ce moment-là, il existe un réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\vec{u}=\boldsymbol{k}.\vec{v}$. Et par conséquent :
   D'une part, nous avons : $\left[\varphi\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right]^2=\left[\varphi\left(\boldsymbol{k}.\vec{v},\vec{v}\right)\right]^2=\underbrace{\left[\boldsymbol{k}\times\varphi\left(\boldsymbol{k}.\vec{v},\vec{v}\right)\right]}_{\textit{car } \varphi \textit{ est bilinéaire}}{}^2=\boldsymbol{k}^2\times\left[\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)\right]^2$
   Et : $\varphi\left(\vec{u},\vec{u}\right)\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)=\varphi\left(\boldsymbol{k}.\vec{v},\boldsymbol{k}.\vec{v}\right)\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)=\underbrace{\boldsymbol{k}\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)}_{\textit{car } \varphi \textit{ est bilinéaire}}\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)=\boldsymbol{k}^2\times\left[\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)\right]^2$
   Ainsi avons-nous que $\left[\varphi\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right]^2=\varphi\left(\vec{u},\vec{u}\right)\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. ***Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.***
   Il n'existe alors aucun réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\vec{u}=\boldsymbol{k}.\vec{v}$.
   Autrement dit, la quantité $\varphi\left(\vec{u}+\boldsymbol{k}.\vec{v},\vec{u}+\boldsymbol{k}.\vec{v}\right)$ n'est jamais nulle donc est toujours strictement positive. Ceci car un produit scalaire est une application définie et positive.
   A propos, développons cette quantité. Par commodité, nous l'appellerons P($\boldsymbol{k}$).

$$\begin{aligned}P\left(\boldsymbol{k}\right)&=\varphi\left(\vec{u}+\boldsymbol{k}.\vec{v},\vec{u}+\boldsymbol{k}.\vec{v}\right)\\&=\varphi\left(\vec{u},\vec{u}+\boldsymbol{k}.\vec{v}\right)+\varphi\left(\boldsymbol{k}.\vec{v},\vec{u}+\boldsymbol{k}.\vec{v}\right)\\&=\varphi\left(\vec{u},\vec{u}+\boldsymbol{k}.\vec{v}\right)+\boldsymbol{k}\times\varphi\left(\vec{v},\vec{u}+\boldsymbol{k}.\vec{v}\right)\\&=\underbrace{\varphi\left(\vec{u},\vec{u}\right)+\boldsymbol{k}\times\varphi\left(\vec{u},\vec{v}\right)}+\boldsymbol{k}\times\left[\varphi\left(\vec{v},\vec{u}\right)+\boldsymbol{k}\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)\right]\\&=\boldsymbol{k}^2\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)+\boldsymbol{k}\times2\times\varphi\left(u,\vec{v}\right)+\varphi\left(\vec{u},\vec{u}\right)\end{aligned}$$

car φ est linéaire par rapport à la première variable

Et aussi par rapport à la seconde...

Enfin φ est symétrique

   Bref, P($\boldsymbol{k}$) est un superbe trinôme de variable $\boldsymbol{k}$ qui ne s'annule jamais. Cela veut donc dire que son discriminant Δ est strictement négatif. Justement, calculons ce dernier !

$$\Delta=\left[2\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)\varphi\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right]^2-4\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)\times\varphi\left(\vec{u},\vec{u}\right)<0$$

   En toilettant le premier membre puis en divisant par 4, on arrive finalement à :

$$\left[\varphi\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right]^2<\varphi\left(\vec{u},\vec{u}\right)\times\varphi\left(\vec{v},\vec{v}\right)$$

D'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz !

Table des matières :

A propos du présent document

Le présent document a été réalisé par Jérôme ONILLON (email : jerome.onillon@tanopah.com) entre le lundi 3 février et le samedi 19 avril 2003. Il a été conçu pour être consulté à l'écran ou être imprimé. Le fichier PDF a été généré par Ghostword 2.10 s'appuyant sur Ghostscript.

Ces quelques pages sans prétention sont dédiées à la mémoire des 157 soldats alliés tombés au champ d'honneur (ou pétrolier) dans une guerre plus financière que nécessaire. Mais que vaut une vie au regard d'un dollar de dividende ? Car l'Occident n'a pas que des ennemis extérieurs...