La taverne de l'Irlandais
vous présente

De tous les pays réels, virtuels ou imaginaires où j'ai vagabondé, un en particulier n'avait jamais été l'objet de mon intérêt et de ma curiosité : celui des isométries. Et pourtant cela fait des années que je suis amené à parler de symétries, de rotations ou de translations. Et malgré cela, je n'avais jamais songé à aller au-delà de ces trois notions. Je n'avais jamais pensé qu'il existait un pays pour les isométries.
L'année qui s'achève aura été à bien des égards, celle des épreuves et des changements. Elle aura démontré la nécessité de dominer son destin. Elle m'aura en tout cas convaincu qu'en bien des domaines, il me fallait aller au bout des chemins que j'avais commencés à emprunter.
Que vous soyez en terminale S ou ailleurs, je vous convie à me suivre dans mon voyage au pays des isométries.

Mon voyage au pays des isométries

Une aventure racomptée par Jérome ONILLON,
prof. (dés)agrégé de Maths, expert en communmatique

Au sommaire :

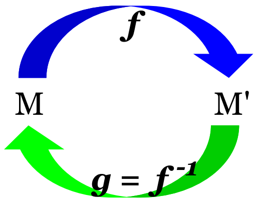
Edition du samedi 26 juillet 2003
Les apparences importent peu,
Ma loyauté est mon honneur.

A propos des isométries

Isométrie : voilà un mot que vous avez sans doute déjà entendu prononcé par l'énergumène qui vous servait de prof de maths, sans pour autant bien cerner de quoi il s'agissait.
Par définition, une isométrie est une transformation du plan qui conserve les longueurs et les distances. C'est pour cela que les symétries centrales et axiales, les rotations et les translations en sont.
La question que beaucoup se poseront sûrement certains, est de savoir ce qu'est une transformation du plan.
Une transformation du plan est une application bijective du plan dans lui-même, c'est-à-dire procédé qui a un point du plan M associe un unique point M'.

Cette notion d'application n'est pas une nouveauté. Nous en connaissons déjà des spécimens en les personnes des fonctions numériques. A un nombre réel x, une fonction $\boldsymbol{f}$ associe un autre réel $y = \boldsymbol{f}(x)$. De plus, certaines de ces fonctions numériques sont bijectives.

Une transformation du plan est une application bijective. Cela signifie par ce genre d'application, tout point M' a un et un seul antécédent M.
A l'instar des fonctions numériques bijectives, toute transformation $\boldsymbol{f}$ admet une transformation réciproque qui est notée $\boldsymbol{f}^{-1}$.
Les isométries dont nous allons parler sont des transformations du plan : elles sont donc bijectives.



De manière assez évidente, la réciproque d'une isométrie est une autre isométrie. Car quand vous conservez les longueurs dans un sens, vous les conservez aussi dans l'autre.

Composer deux applications, c'est les effectuer l'une après l'autre. Par exemple, on peut faire une translation suivie d'une rotation. On définit alors une nouvelle transformation.
Le symbole opératoire de la composition est $\circ$.
Lorsque l'on compose deux isométries, on obtient... une nouvelle isométrie. Du début à la fin, les longueurs sont conservées.

L'application identique ou identité du plan est l'application par laquelle tout point M est sa propre image. Cette une transformation qui ne transforme rien, est notée $\boldsymbol{Id}$! C'est d'ailleurs pour cela que c'est une isométrie !
La composée d'une transformation f et de sa réciproque $\boldsymbol{f}^{-1}$ est l'identité. Bref : $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1} = \boldsymbol{Id}$
La composée d'une transformation $\boldsymbol{f}$ avec l'identité est la $\boldsymbol{f}$. Bref : $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{Id} = \boldsymbol{Id} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$

Récapitulons. L'ensemble des isométries muni de l'opération de composition présente les propriétés suivantes :

- La composée de deux isométries en est une autre.
- Cet ensemble possède en l'identité un élément neutre pour la loi de composition $\circ$.
  Pour toute isométrie $\boldsymbol{f}$, nous avons l'égalité : $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{Id} = \boldsymbol{Id} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$
- Pour cette loi de composition, toute isométrie $\boldsymbol{f}$ admet un isométrie inverse $\boldsymbol{g}$.
  Pour toute isométrie $\boldsymbol{f}$, il existe une isométrie $\boldsymbol{g}$ tel que $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} = \boldsymbol{Id}$

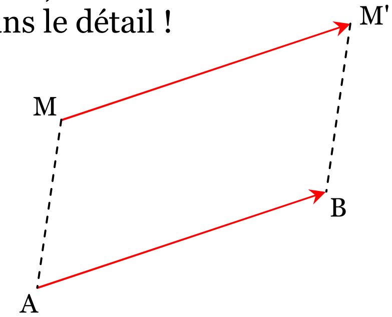
A l'instar de l'ensemble des entiers relatifs pour l'addition, l'ensemble des isométries est un groupe pour l'opération de composition. Pour être plus précis, c'est une sous-groupe de l'ensemble des transformations du plan.

Nous allons commencer notre voyage au pays des isométries par celles que nous connaissons.

La translation

Ce n'est pas la première isométrie que l'on rencontre lors de sa scolarité et pourtant c'est par elle que nous commencerons. La translation est le fait de déplacer un objet en ligne droite sans en changer ni la forme, ni l'orientation.
On associe souvent la notion de translation à celle de vecteur. En fait, cette notion de translation se définit à partir du parallélogramme. Voyons cela dans le détail !

Définition d'une translation
Dire que le point M' est l'image du M par la translation qui amène de A en B signifie que le quadrilatère ABM'M est un parallélogramme.
On parle alors de translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Puis c'est à partir de la translation que certains définissent la notion de vecteur. Car l'idée générale du vecteur est celle d'un déplacement selon une certaine direction, dans un certain sens et d'une certaine distance. D'ailleurs il est équivalent de dire que le point M' est l'image de M par la translation vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux.

De par sa nature, la translation conserve les formes, les angles mais surtout les longueurs et distances : c'est cela qui en fait une isométrie.
La translation de vecteur $\vec{u}$ est souvent notée $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$.

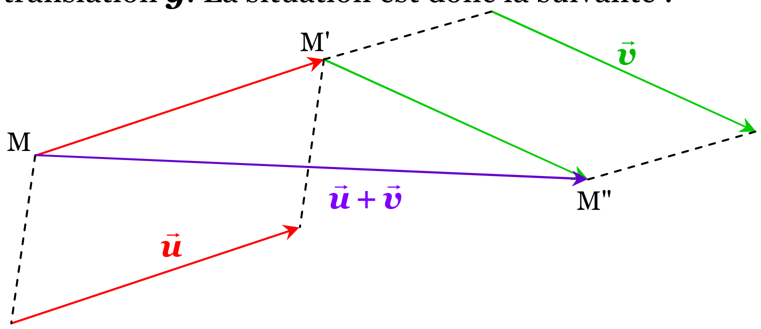
L'identité peut être vue comme la translation de vecteur nul.

Enfin, la réciproque de la translation de vecteur $\vec{u}$ est celle de vecteur $-\vec{u}$. En résumé :

$$\boxed{\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{t}_{-\vec{u}} = \boldsymbol{t}_{-\vec{u}} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} = \boldsymbol{Id}}$$

Composée de deux translations

Composer deux translations, c'est les faire l'une après l'autre ! Par exemple, intéressons-nous aux translations ***f*** et ***g*** de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Si M est un point du plan alors nous appelons M' son image par ***f***. Puis, nous notons M'' l'image de M' par la translation ***g***. La situation est donc la suivante :



La question qui se pose est : qu'est la transformation $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$?

Pour tout point M du plan, il est clair que : $\overrightarrow{M\underbrace{M''}_{\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(M)}} = \vec{u} + \vec{v}$

C'est la relation de Chasles qui s'applique ! $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Conclusion : La composée de deux translations est une autre translation.

Le plan est souvent assimilé au corps des complexes. Une fois un repère orthonormé choisi, chaque point du plan est assimilable à un nombre complexe. Toute transformation du plan devient alors une fonction complexe (de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$) bijective dont il est envisageable de déterminer l'expression.

La translation sous un angle complexe

Ayant muni le plan d'un repère orthonormé, chacun de ses points M est parfaitement défini par un couple de réels : ses coordonnées. On identifie alors le plan à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Cette correspondance peut aussi être faite vis-à-vis du corps des complexes $\mathbb{C}$. Chaque point M du plan est alors repéré par un nombre complexe z qui est son affixe. La partie réelle de cet affixe est l'abscisse du point alors que la partie imaginaire en est l'ordonnée.
Poursuivant sur notre lancée, toute transformation du plan ***f*** peut être vue comme une application de $\mathbb{C}$ dans lui-même. Après les fonctions réelles, voici leurs consoeurs complexes.
Nous supposons donc que le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Si dans ce repère, le point M a pour coordonnées $\left(x_M;y_M\right)$ alors son affixe z est donné par :

$$z = x_M + \boldsymbol{i}.y_M$$

Intéressons-nous à la translation ***f*** de vecteur $\vec{u}\left(x_{\vec{u}};y_{\vec{u}}\right)$ et surtout à son apparence complexe.

Si M' est l'image de M par la translation ***f*** alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et il vient que $\begin{cases} x_{M'} = x_M + x_{\vec{u}} \\ y_{M'} = y_M + y_{\vec{u}} \end{cases}$.

Si z' désigne l'affixe du point M' et ***u*** celui du vecteur $\vec{u}$ alors nous avons :

$$z' = \boldsymbol{f}(z) = z + \boldsymbol{u}$$

Vue sous un angle complexe, une translation ***f*** est une application de la forme ***f***(z) = z + ***u***.
Et réciproquement, Toute application de cette forme est une translation de vecteur $\vec{u}$(partie réelle de ***u*** ; partie imaginaire de ***u***).

Conclusion : Toute application complexe $\boldsymbol{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & z+\boldsymbol{u} \end{array}$ est géométriquement une translation de vecteur $\vec{u}$ dont ***u*** est l'affixe. Et réciproquement !

La rotation

La rotation est abordée en troisième et éventuellement complétée en seconde. L'idée générale est celle du déplacement le long d'un cercle d'un certain nombre de degré dans un certain sens. En quelque sorte, on orbite. La définition que l'on en donne s'inspire de ces idées.

Définition d'une rotation

Dire que le point M' est l'image du M par la rotation de centre A et d'angle α signifie que :

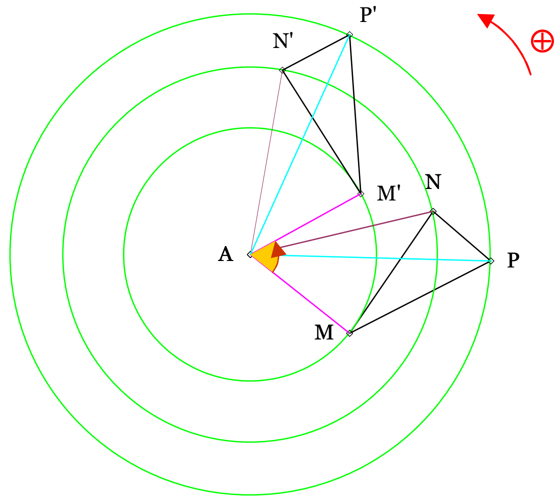
$$\begin{cases} \text{Le point M' appartient au cercle de centre A passant par M.} \\ \text{L'angle orienté } \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right) \text{ mesure } \alpha \text{ radians.} \end{cases}$$

La rotation de centre A et d'angle α est souvent notée $\boldsymbol{r}_{A,\alpha}$.

Sur la figure ci-contre, le triangle MNP a pour image le triangle M'N'P' par la rotation de centre A et d'angle $\frac{11}{30}\pi$.

Cela signifie que l'on doit faire pivoter ou tourner le triangle MNP de 66° dans le sens trigonométrique autour du point A.

Les trois angles orientés $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right)$, $\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AN'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AP'}\right)$ mesurent tous les trois $\frac{11}{30}\pi$ radians.



Nous informons notre lecteur que de plus amples précisions sur les rotations et les angles orientés attendent notre lecteur sur le site la taverne de l'Irlandais.

Concrètement, la rotation ne déforme pas les objets. A l'instar de la translation, elle conserve les formes l'alignement, les angles, le parallélisme et l'orthogonalité. Elle préserve aussi distances et longueurs. C'est donc une isométrie.

L'identité du plan peut être vue comme une rotation dont l'angle est soit 0, soit un multiple de 2π (c'est-à-dire un certain nombre de tours).

Enfin, la réciproque de la rotation d'angle α est une rotation de même centre mais d'angle -α.

$$\boxed{\boldsymbol{r}_{A,\alpha} \circ \boldsymbol{r}_{A,-\alpha} = \boldsymbol{r}_{A,-\alpha} \circ \boldsymbol{r}_{A,\alpha} = \boldsymbol{Id}}$$

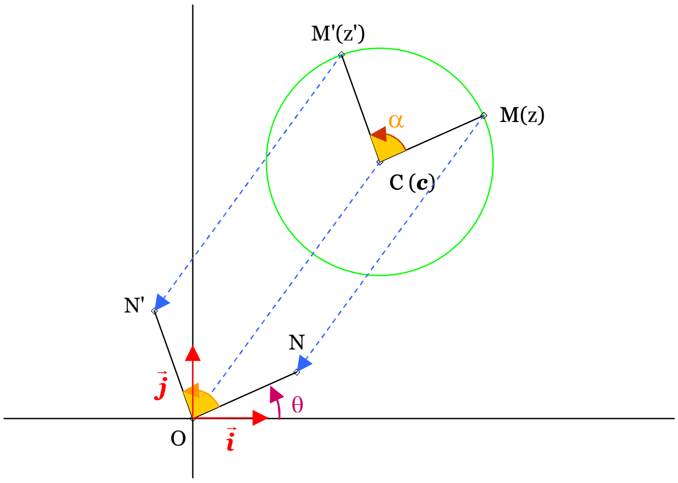
La rotation sous un angle complexe

A l'instar des translations, une rotation $\boldsymbol{f}$ de centre C et d'angle α peut être vue comme une application complexe. Comme pour les translations, nous allons déterminer l'expression de $\boldsymbol{f}$.

La situation est donc la suivante :

Nous supposons le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dans celui-ci, le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la rotation $\boldsymbol{f}$.
On appelle **c** l'affixe du centre C de la rotation.



On appelle N et N' les images respectives des points M et M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{CO}$ qui a pour affixe -$\boldsymbol{c}$.
Les points N et N' ont donc pour affixes respectives $z-\boldsymbol{c}$ et $z'-\boldsymbol{c}$.
Comme la translation conserve les angles orientés alors :

$$\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{ON'}\right)=\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CM'}\right)=\alpha$$

De même, comme les distances CM et CM' sont égales et que la translation est une isométrie, nous pouvons écrire :

ON = OM = OM' = ON'

En termes complexes, cette dernière égalité aussi se traduire par :

$$\underbrace{|z-\boldsymbol{c}|}_{ON}=\underbrace{|z'-\boldsymbol{c}|}_{ON'}$$

Appelons θ l'argument du nombre complexe $z-\boldsymbol{c}$. θ est aussi la mesure de l'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{ON}\right)$.

L'argument du nombre complexe $z'-\boldsymbol{c}$, c'est-à-dire la mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{ON'}\right)$ est donc égale à θ + α.

Utilisant toutes ces importantes découvertes, nous pouvons donc écrire que :

$$z'-\boldsymbol{c}=\underbrace{|z'-\boldsymbol{c}|\times e^{\boldsymbol{i}.(\theta+\alpha)}}_{\textit{Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe}}=\underbrace{|z-\boldsymbol{c}|\times e^{\boldsymbol{i}.\theta}}_{z-\boldsymbol{c}}\times e^{\boldsymbol{i}.\alpha}=e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\times(z-\boldsymbol{c})$$

Par suite, nous en arrivons à la conclusion suivante :

Conclusion : Si $\boldsymbol{f}$ est la rotation de centre C d'affixe $\boldsymbol{c}$ et d'angle α alors pour tout point M d'affixe z :

$$\underbrace{\boldsymbol{f}(z)}_{\textit{ou } z'}=e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\times(z-\boldsymbol{c})+\boldsymbol{c}=e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\times z+\boldsymbol{c}\times\left(1-e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\right)$$

Bref, la rotation $\boldsymbol{f}$ a une expression complexe de la forme $e^{\boldsymbol{i}.\alpha}.z+\boldsymbol{b}$ où α est un nombre réel non multiple de 2.π.
Réciproquement, il est légitime de se demander si une application complexe du type $\boldsymbol{g}(z)=e^{\boldsymbol{i}.\alpha}.z+\boldsymbol{b}$ ne cacherait pas une rotation ?

Une précision : bien sûr, nous supposons que α n'est pas un multiple de 2.π.
En effet, dans le cas contraire, $e^{\boldsymbol{i}.\alpha}=e^{\boldsymbol{i}\times k\times 2\pi}$ est égal à 1 et donc $\boldsymbol{g}$ se limite à $\boldsymbol{g}(z)=z+\boldsymbol{b}$.
Autrement dit, $\boldsymbol{g}$ est alors une superbe translation !

Comme α n'est pas un multiple de 2.π alors $e^{\boldsymbol{i}.\alpha}$ est différent de 1. Il est donc possible de diviser par $1-e^{\boldsymbol{i}.\alpha}$. En posant $\boldsymbol{c}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{1-e^{\boldsymbol{i}.\alpha}}$, $\boldsymbol{g}(z)$ devient :

$$\boldsymbol{g}(z)=e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\times z+\boldsymbol{b}=e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\times z+\boldsymbol{c}\times\left(1-e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\right)$$

Autrement dit, $\boldsymbol{g}$ est la rotation de centre C d'affixe $\boldsymbol{c}$ et d'angle α.

Conclusion : Si $\boldsymbol{f}$ est une application complexe du type $\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{a}.z+\boldsymbol{b}$ où a est un complexe de module 1 alors deux situations sont possibles :

- Si $\boldsymbol{a}=1$ alors $\boldsymbol{f}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $\boldsymbol{b}$.
- Si $\boldsymbol{a}\neq 1$ alors $\boldsymbol{f}$ est une rotation d'angle égal à l'argument de $\boldsymbol{a}$ et de centre C d'affixe $\dfrac{\boldsymbol{b}}{1-\boldsymbol{a}}$.

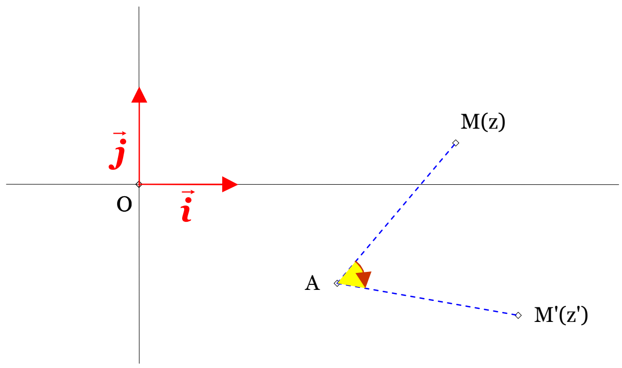
Un exemple de rotation

Avant de nous lancer dans quelques réflexions, nous allons déterminer l'expression complexe d'une rotation.

Nous supposons donc le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Intéressons-nous à la rotation $\boldsymbol{f}$ de centre $A(2;-1)$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

Si M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la rotation $\boldsymbol{f}$ alors nous pouvons écrire :



$$z'-z_A=e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{3}}\times(z-z_A)$$

$$z'=e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{3}}\times z+\left(1-e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{3}}\right)\times z_A$$

$$z'=e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{3}}\times z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\boldsymbol{i}\right)\times(2-\boldsymbol{i})$$

Effectuant ce dernier produit, nous en arrivons finalement à :

$$\underbrace{\boldsymbol{f}(z)}_{z'}=e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{3}}\times z+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right).\boldsymbol{i}$$

Bref, c'est une expression très simple !
Précisons que dans notre chevauchée peu héroïque, nous avons utilisé le fait que :

$$e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\boldsymbol{i}.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\boldsymbol{i}$$

Avec cette même égalité, nous pouvons aller encore un peu plus loin, dépasser nos complexes pour déboucher sur des coordonnées. Il vient alors :

$$\underbrace{x'+\boldsymbol{i}.y'}_{z'\text{ ou }\boldsymbol{f}(z)}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\boldsymbol{i}\right)\times\underbrace{(x+\boldsymbol{i}.y)}_{z}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right).\boldsymbol{i}$$

$$x'+\boldsymbol{i}.y'=\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.y+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\boldsymbol{i}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}.x+\frac{y}{2}+\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$$

Or deux nombres complexes égaux ont des parties réelles et imaginaires égales. Par suite :

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.y+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y'=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.x+\dfrac{y}{2}+\sqrt{3}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Avec cette formule, il est possible de calculer les coordonnées d'un pont M'(x' ; y') qui serait l'image d'un point M(x ; y) par la rotation de centre A(2 ; -1) et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Il reste juste à trouver un inconscient pour mener à la main une telle tâche à terme !

Composée de deux rotations

Qu'obtient-on lorsque l'on fait une rotation, puis une autre rotation ?
Pour savoir ce qu'est la composée de deux rotations, nous allons nous servir de leurs expressions complexes.

Plantons le décor et distribuons les rôles.
f est la rotation de centre C et d'angle α et, ***g*** celle de centre D et d'angle α'.
Pour nos deux rotations ***f*** et ***g***, il existe deux constantes complexes ***b*** et ***b'*** telles que :

$$\boldsymbol{f}(z) = e^{\boldsymbol{i}.\alpha}.z + \boldsymbol{b} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{g}(z) = e^{\boldsymbol{i}.\alpha'}.z + \boldsymbol{b'}$$

Composons ces deux transformations ! La situation est la suivante :

$$\mathrm{M} \xrightarrow{\boldsymbol{f}} \mathrm{M'} = \boldsymbol{f}(\mathrm{M}) \xrightarrow{\boldsymbol{g}} \mathrm{M''} = \boldsymbol{g}(\mathrm{M'}) = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{f}(\mathrm{M})\right)$$

$$\underbrace{z \xrightarrow{\boldsymbol{f}} z' = \boldsymbol{f}(z) \xrightarrow{\boldsymbol{g}} z''}_{\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{g}(z') = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{f}(z)\right)$$

Pour tout nombre complexe z, on peut écrire que :

$$\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}(z) = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{f}(z)\right) = e^{\boldsymbol{i}.\alpha'} \times \boldsymbol{f}(z) + \boldsymbol{b'} = e^{\boldsymbol{i}.\alpha'} \times \left[e^{\boldsymbol{i}.\alpha}.z + \boldsymbol{b}\right] + b' = e^{\boldsymbol{i}.(\alpha'+\alpha)}.z + \underbrace{e^{\boldsymbol{i}.\alpha'}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b'}}_{\boldsymbol{c}}$$

A partir de là, il nous est possible de conclure :

Conclusion : ***f*** et ***g*** sont deux rotations respectivement d'angles α et α'.

- Si la somme $\alpha + \alpha'$ est un multiple de $2.\pi$ alors $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}(z) = z + \boldsymbol{c}$.
  A ce moment-là, ***g***o***f*** est une translation.
- Si la somme $\alpha + \alpha'$ n'est pas un multiple de $2.\pi$ alors $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}(z) = e^{\boldsymbol{i}.(\alpha+\alpha')}.z + \boldsymbol{c}$.
  Dans ce cas, ***g***o***f*** est une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$.

La composée de deux rotations est donc soit une autre rotation, soit une translation.

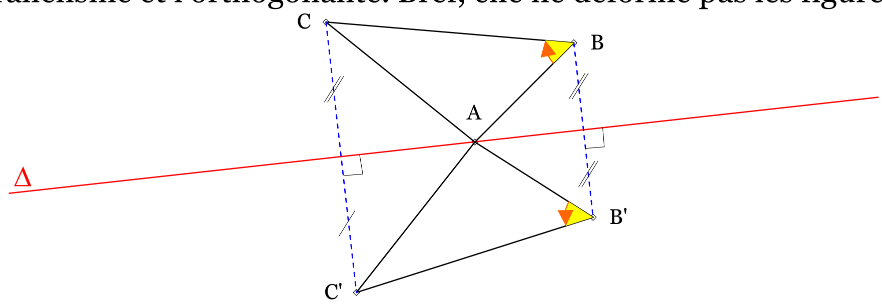
La réflexion

La réflexion est la première des isométries (mal)traitées au collège. Beaucoup l'abordent sous l'angle du pliage. En fait, la réflexion ou symétrie axiale repose sur la notion de médiatrice. En tout cas, c'est par ce biais que nous allons la définir !

Définition d'une réflexion
Dire que le point M' est l'image du M par la réflexion d'axe Δ signifie que :
- Si M appartient à l'axe Δ alors M' est confondu avec M.
- Si M ne fait pas partie de l'axe Δ alors Δ est la médiatrice du segment [MM'].

La réflexion d'axe Δ est souvent notée $\boldsymbol{s}_\Delta$. Un "***s***" comme symétrie axiale.

A l'instar de la translation et de la rotation, la réflexion conserve l'alignement, les longueurs et distances, le parallélisme et l'orthogonalité. Bref, elle ne déforme pas les figures.



Mais à la différence des deux précédentes transformations, la symétrie axiale ne conserve pas les angles orientés. Sur notre figure, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ et son image $\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'C'}\right)$ sont opposés en sens et donc en mesure.
Si la translation et la rotation sont qualifiées de <u>déplacements</u>, la réflexion est un <u>antidéplacement</u>.

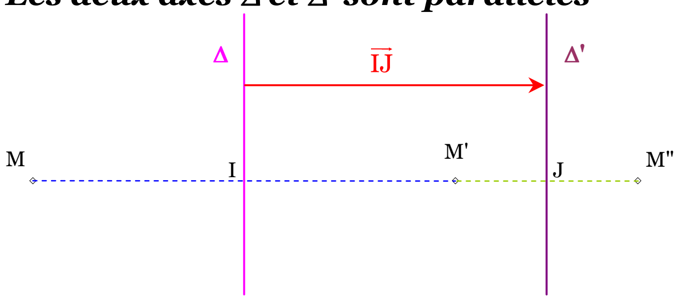
Une réflexion d'axe Δ est sa propre réciproque. On dit que c'est une <u>involution</u> ! Et ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{s}_\Delta = \boldsymbol{Id}}$$

Composée de deux symétries axiales

Deux situations peuvent se présenter suivant que les axes soient parallèles ou non.
Nous considérons donc deux symétries axiales $\boldsymbol{s}_\Delta$ et $\boldsymbol{s}_{\Delta'}$. Intéressons-nous à $\boldsymbol{s}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$.
Ainsi que nous l'annoncions, deux cas peuvent se présenter :

- ***Les deux axes Δ et Δ' sont parallèles***



La situation est la suivante :
Si M est un point du plan alors on appelle M' son symétrique par rapport à Δ.
M" est l'image de M' par $\boldsymbol{s}_{\Delta'}$. Ainsi avons-nous :

$$\boldsymbol{s}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{s}_\Delta (M) = M''$$

Il est clair que les points M, M' et M" sont alignés. Le point I, intersection de l'axe Δ avec la droite (MM'), est aussi le milieu du segment [MM']. Donc $\overrightarrow{MM'} = 2.\overrightarrow{IM'}$.
De même, si on appelle J le point d'intersection de l'axe Δ' avec la droite (MM') alors ce

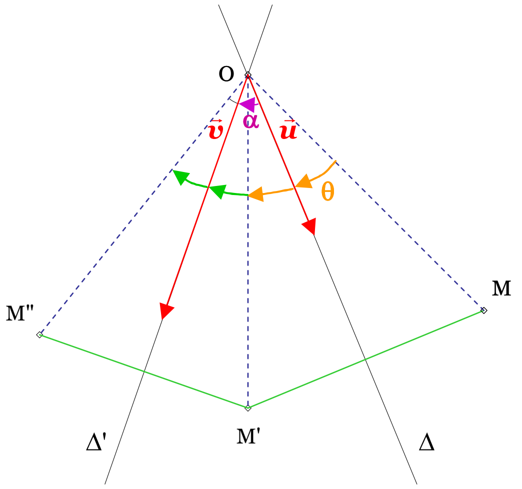
point est également le milieu du segment [M'M"]. Donc $\overrightarrow{M'M"} = 2.\overrightarrow{M'J}$.
Utilisant ces deux égalités, nous pouvons écrire que :

$$\overrightarrow{MM"} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M"} = 2.\overrightarrow{IM'} + 2.\overrightarrow{M'J} = 2.\left(\overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'J}\right) = 2.\overrightarrow{IJ}$$

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ ne dépend pas du point M mais des seuls axes Δ et Δ'.
L'isométrie $\boldsymbol{s}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta}$ est donc la translation de vecteur $2.\overrightarrow{IJ}$

Conclusion : La composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.

- ***Les deux axes sont sécants en un point O***



Plantons le décor de nos ébats !
Les axes Δ et Δ' se coupent en O.
Pour tout point M du plan, on appelle M' son image par $\boldsymbol{s}_{\Delta}$.
M" est l'image de M' par $\boldsymbol{s}_{\Delta'}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs des axes Δ et Δ'.
α est la valeur de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.
θ est celle de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM},\vec{u}\right)$.
Tout est en place pour la manoeuvre !

Comme M' est le symétrique de M par rapport à la droite Δ alors cette dernière est la médiatrice du segment [MM']. Plus particulièrement, le triangle OMM' est isocèle en O. Ceci implique que les côtés OM et OM' sont égaux et aussi que les angles orientés $\left(\overrightarrow{OM},\vec{u}\right)$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right)$ ont des mesures égales. En résumé : $\begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM},\vec{u}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) = \theta \end{cases}$

De la même manière, M" étant le symétrique de M' par rapport à la droite Δ', le triangle OM'M" est isocèle en O. Cela nous conduit à $\begin{cases} OM' = OM" \\ \left(\vec{v},\overrightarrow{OM"}\right) = \left(\overrightarrow{OM'},\vec{v}\right) = \alpha - \theta \end{cases}$

Nous venons de mettre en évidence deux choses :
D'abord, vu que $OM = OM' = OM"$, M" est sur le cercle de centre O passant par M.
Ensuite d'un point de vue angulaire, nous pouvons écrire :

$$\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM"}\right) = \left(\overrightarrow{OM},\vec{u}\right) + \left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) + \left(\overrightarrow{OM'},\vec{v}\right) + \left(\vec{v},\overrightarrow{OM"}\right) = \theta + \theta + \alpha - \theta + \alpha - \theta = 2.\alpha$$

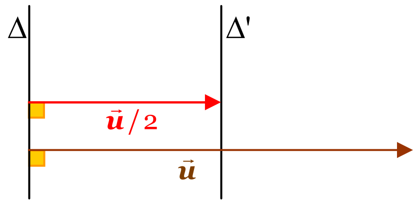
Le réel α ne dépend que de la position des deux axes Δ et Δ'. Il ne dépend pas de M.
Nous pouvons conclure que le point M" est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle 2.α.
L'isométrie $\boldsymbol{s}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta}$ est donc la rotation de centre O et d'angle 2.α.

Conclusion : La composée de deux réflexions d'axes sécants est une rotation.

Le théorème de décomposition

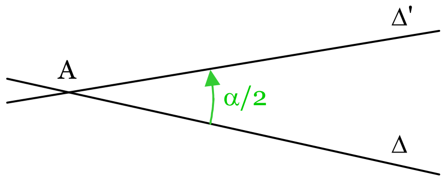
Les résultats auxquels nous sommes parvenus, vont bien au-delà d'une simple composée car ils permettent de dire qu'une translation ou une rotation peuvent être vues comme les composées de deux réflexions. Voyons cela dans le détail !

- ***Avec la translation de vecteur $\vec{u}$***
  On appelle Δ une droite dont un vecteur normal est $\vec{u}$. La droite Δ' est son image par la translation de vecteur $\frac{\vec{u}}{2}$.



  De part ce qui a été fait précédemment, nous pouvons dire que la composée $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ est la translation de vecteur $2.\frac{\vec{u}}{2} = \vec{u}$.

- ***Avec la rotation de centre A et d'angle α***
  Appelons Δ une droite passant par le point A. Δ' est son image par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\alpha}{2}$.



  En utilisant ce qui a été fait, nous pouvons dire que $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ est aussi la rotation $r_{A,\alpha}$.

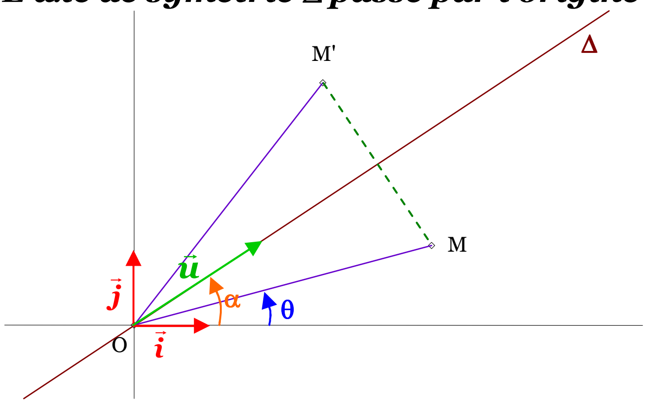
Conclusion : Toute translation et toute rotation est la composée de deux réflexions.

Par la suite, nous réutiliserons ce "théorème de décomposition".

La réflexion sous un angle complexe

Nous allons déterminer la forme complexe d'une réflexion s_{Δ}. Pour y parvenir, nous procéderons en deux étapes.

1. ***L'axe de symétrie Δ passe par l'origine***



La droite Δ passe par l'origine. $\vec{u}$ est l'un de ses vecteurs directeurs.
On appelle α une mesure de l'angle orienté qu'elle fait avec l'axe des abscisses $(O, \vec{i})$.

On note θ l'argument du point M.
Enfin, M' est l'image de M par la réflexion s_{Δ}.

Comme M' est le symétrique de M par rapport à la droite Δ alors cette dernière est la médiatrice du segment [MM'] et le triangle OMM' est isocèle en O.
Ceci implique que $OM = OM'$ et aussi que les angles $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{u}\right)$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right)$ sont égaux.

D'un point de vue angulaire, nous avons :

$$\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta \qquad \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{OM}, \vec{u}\right) = \alpha - \theta$$

Donc $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) + \left(\overrightarrow{OM}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \theta + \alpha - \theta + \alpha - \theta = 2.\alpha - \theta$

Si on appelle z et z' les affixes respectifs des points M et M', nous savons :

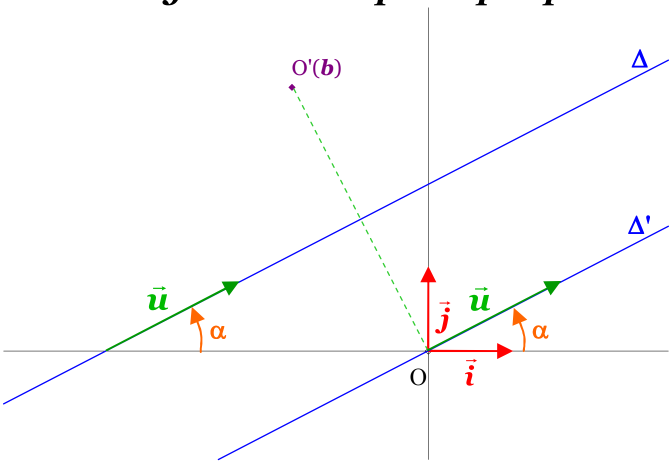
- Ils ont des modules égaux car $OM = OM'$.
- L'argument de z' est égal à $2.\alpha - \theta$.

Par suite, nous pouvons écrire :

$$z' = |z'| \times .e^{\boldsymbol{i}.(2.\alpha-\theta)} = |z| \times e^{\boldsymbol{i}.2.\alpha} \times e^{-\boldsymbol{i}.\theta} = e^{\boldsymbol{i}.2.\alpha} \times \underbrace{|z| \times e^{-\boldsymbol{i}.\theta}}_{\text{Conjugué de } z} = e^{\boldsymbol{i}.2.\alpha}.\overline{z}$$

Conclusion : La réflexion $\boldsymbol{s}_\Delta$ a pour expression complexe $\boldsymbol{s}_\Delta(z) = e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\overline{z}$

2. *L'axe de symétrie Δ ne passe pas par l'origine*



Plantons le décor de nos exploits à venir !
L'axe de symétrie Δ ne passant pas par l'origine, on appelle Δ' sa parallèle passant par O.
Le point O' est le symétrique de l'origine O par rapport à l'axe Δ.
Si $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ alors il l'est aussi pour Δ'.
Enfin, α est une valeur de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{u})$.

A l'instar de toutes ses consoeurs, la réflexion $\boldsymbol{s}_{\Delta'}$ est une involution. Comprenez par là qu'elle est sa propre réciproque. Plus mathématiquement $\boldsymbol{s}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta'} = \boldsymbol{Id}$.
Même si cela n'apporte rien, nous pouvons donc écrire :

$$\boldsymbol{s}_\Delta = \boldsymbol{s}_\Delta \circ \underbrace{\boldsymbol{s}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta'}}_{\text{Identité}}$$

Comme leurs deux axes sont parallèles, la composée des réflexions $\boldsymbol{s}_\Delta$ et $\boldsymbol{s}_{\Delta'}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. L'égalité précédente devient donc :

$$\boldsymbol{s}_\Delta = \underbrace{\boldsymbol{t}_{\overrightarrow{OO'}}}_{\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{s}_{\Delta'}} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta'}$$

$\boldsymbol{s}_{\Delta'}$ est une réflexion dont l'axe passe par l'origine. Son expression complexe est :

$$\boldsymbol{s}_\Delta(z) = e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\overline{z}$$

De plus, la translation $\boldsymbol{t}_{\overrightarrow{OO'}}$ a pour expression complexe :

$$\boldsymbol{t}_{\overrightarrow{OO'}}(z) = z + \boldsymbol{b}$$

où $\boldsymbol{b}$ est l'affixe du point O' qui est le symétrique de l'origine par rapport à l'axe Δ.
Pour tour nombre complexe z, nous pouvons donc écrire :

$$\boldsymbol{s}_\Delta(z) = \boldsymbol{t}_{\overrightarrow{OO'}}(\boldsymbol{s}_{\Delta'}(z)) = \left(e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\overline{z}\right) + \boldsymbol{b} = e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\overline{z} + \boldsymbol{b}$$

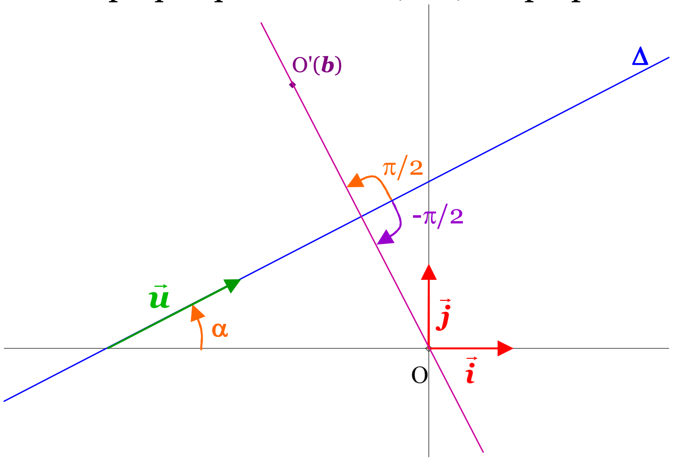
Nous avons trouvé ce que nous cherchions : l'expression complexe d'une réflexion.

Conclusion : La droite Δ a pour de vecteur directeur $\vec{u}$. α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{u})$. Le point O' qui est l'image de l'origine par la réflexion $\boldsymbol{s}_{\Delta'}$, a pour affixe $\boldsymbol{b}$.

Pour tout nombre complexe z, $\boldsymbol{s}_\Delta(z) = e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\overline{z} + \boldsymbol{b}$

Essayons d'améliorer cette expression complexe. En particulier, nous allons chercher à expliciter cette constante $\boldsymbol{b}$.

La constante complexe $\boldsymbol{b}$ est l'affixe du point O' symétrique de l'origine par rapport à l'axe Δ. Cela implique que la droite (OO') est perpendiculaire à l'axe Δ.



Donc un argument du nombre complexe $\boldsymbol{b}$ est $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$. Par suite :

$$\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \times e^{\boldsymbol{i}.\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= |\boldsymbol{b}| \times e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times e^{\pm\frac{\pi}{2}.\boldsymbol{i}} = |\boldsymbol{b}| \times e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times (\pm \boldsymbol{i})$$

Cette constante $\boldsymbol{b}$ est donc de la forme :

$$\boldsymbol{b} = e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i}$$

où $\boldsymbol{k}$ est un nombre réel quelconque.

Cette découverte nous amène à une nouvelle et finale conclusion.

Conclusion : Si l'angle orienté de l'axe Δ avec l'axe des abscisses a pour mesure α alors :

Pour tout nombre complexe z, $\quad s_\Delta(z) = e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + e^{\alpha.\boldsymbol{i}} \times \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i} = e^{\alpha.\boldsymbol{i}}.\left(e^{\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i}\right)$

où $\boldsymbol{k}$ est une constante réelle.

Dans cette dernière expression complexe, les plus perspicaces d'entre nous verront la composée d'une réflexion d'axe celui des abscisses, d'une rotation de centre O et d'angle α, puis d'une translation verticale de vecteur $\boldsymbol{k}.\vec{j}$ et enfin d'une nouvelle rotation de centre O et d'angle α. Cela, car ils auront remarqué l'enchaînement :

$$z \xrightarrow{s_{(O\vec{i})}} \bar{z} \xrightarrow{r_{O,\alpha}} e^{\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} \xrightarrow{t_{\boldsymbol{k}.\vec{j}}} e^{\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i} \xrightarrow{r_{O,\alpha}} e^{\alpha.\boldsymbol{i}}.\left(e^{\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i}\right)$$

Réciproquement, il est aisé de prouver qu'une application complexe $\boldsymbol{f}$ de la forme

$$\boldsymbol{f}(z) = e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + \boldsymbol{b}$$

où $\boldsymbol{b}$ est un nombre complexe ayant pour argument $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$, est géométriquement une réflexion.

Par delà des composées : à la recherche de l'isométrie perdue

Après avoir évoqué les isométries que nous connaissions à la fois sous un angle géométrique et sous un angle complexe, la question qui se pose est de savoir s'il en existe d'autres espèces. La composée de deux isométries en est une autre. En composant entre elles translations, rotations et réflexions, peut-être obtiendrons-nous de nouveaux spécimens d'isométries.

La composée d'une rotation et d'une translation

Nous considérons une translation $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ et la rotation $\boldsymbol{r}_{A,\alpha}$.

Notre but est de savoir quel type d'isométrie sont les composées $\boldsymbol{r}_{A,\alpha} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ et $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{r}_{A,\alpha}$. Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur les expressions complexes de ces deux transformations.
Si on appelle $\boldsymbol{u}$ l'affixe du vecteur $\vec{u}$ alors pour tout complexe z, nous avons :

$$\boldsymbol{t}_{\vec{u}}(z) = z + \boldsymbol{u}$$

Si on note $\boldsymbol{a}$ l'affixe du centre A alors pour tout nombre complexe, nous savons :

$$\boldsymbol{r}_{A,\alpha}(z) = e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times z + \boldsymbol{a} \times \left(1 - e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\right)$$

Bien sûr, nous supposons que l'angle α n'est pas un multiple de 2π. Si tel n'était pas le cas, l'expression précédente serait celle d'une translation vu que $e^{\boldsymbol{i}.\alpha}$ serait égal à 1 !

Sachant tout cela, nous pouvons écrire que :

1. ***La composée d'une rotation et d'une translation***
   Pour tout nombre complexe z :
   $$\boldsymbol{r}_{A,\alpha} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}(z) = \boldsymbol{r}_{A,\alpha}\left(\boldsymbol{t}_{\vec{u}}(z)\right)$$
   $$= e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times (z + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{a} \times \left(1 - e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\right) = e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times z + \underbrace{\boldsymbol{a} \times \left(1 - e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\right) + e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times \boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{b}} = e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times z + \boldsymbol{b}$$
   Donc la composée $\boldsymbol{r}_{A,\alpha} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ est une rotation d'angle α et de centre un certain point C dont l'affixe est $\dfrac{\boldsymbol{b}}{1 - e^{\boldsymbol{i}.\alpha}}$.

2. ***La composée d'une translation et d'une rotation***
   Pour tout nombre complexe z :
   $$\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{r}_{A,\alpha}(z) = \boldsymbol{t}_{\vec{u}}\left(\boldsymbol{r}_{A,\alpha}(z)\right)$$
   $$= \underbrace{e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times a + \boldsymbol{a} \times \left(1 - e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\right)}_{\boldsymbol{r}_{A,\alpha}(z)} + \boldsymbol{u} = e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times z + \underbrace{\boldsymbol{a} \times \left(1 - e^{\boldsymbol{i}.\alpha}\right) + \boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{b}} = e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times z + \boldsymbol{b}$$
   Donc la composée $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{r}_{A,\alpha}$ est une splendide rotation d'angle α et de centre un autre point C dont l'affixe est $\dfrac{\boldsymbol{b}}{1 - e^{\boldsymbol{i}.\alpha}}$.

Conclusion : la composée d'une translation et d'une rotation est une rotation.

Ce premier couple n'ayant pas enfanté une nouvelle espèce d'isométrie, passons à un autre !

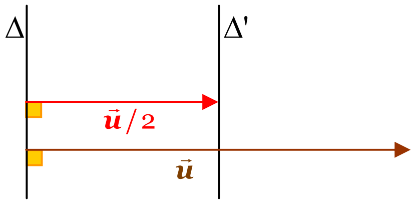
La composée d'une translation et d'une réflexion

Les deux acteurs de notre aventure sont la réflexion $\boldsymbol{s}_{\Delta}$ et la translation $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ où $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Nous allons nous pencher sur les composées $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$ et $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$. En fait, nous parlerons d'abord pour la première composée, puis nous en déduirons des choses pour la seconde.
Nous devons envisager plusieurs cas suivant ce qu'est le vecteur de translation par rapport à l'axe de symétrie.

1. ***Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal de Δ***

Traitons d'abord le cas de la composée $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$.

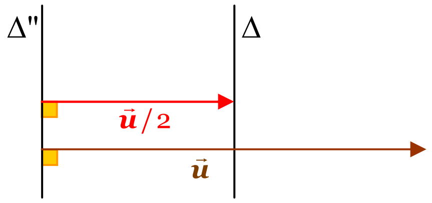


Etre un normal à une droite signifie avoir une directeur perpendiculaire.
Appelons Δ' l'image de la droite Δ par la translation de vecteur $\frac{\vec{u}}{2}$.

La translation $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ peut être vue comme étant la composée $\boldsymbol{s}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$. Par suite :

$$\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta = \boldsymbol{s}_{\Delta'} \circ \underbrace{\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{s}_\Delta}_{=\boldsymbol{Id}} = \boldsymbol{s}_{\Delta'}$$

car la réflexion est une involution.
Quoiqu'il en soit, la composée d'une translation par une symétrie axiale est une autre symétrie axiale. Voyons ce qu'il en est avec l'autre composée $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$.



La situation est à peu près similaire sauf que nous appellerons Δ" l'image de la droite Δ par la translation de vecteur $-\frac{\vec{u}}{2}$.

La translation $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ est aussi la composée de symétries axiales $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{s}_{\Delta''}$. Il vient alors :

$$\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} = \underbrace{\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{s}_\Delta}_{=\boldsymbol{Id}} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta''} = \boldsymbol{s}_{\Delta''}$$

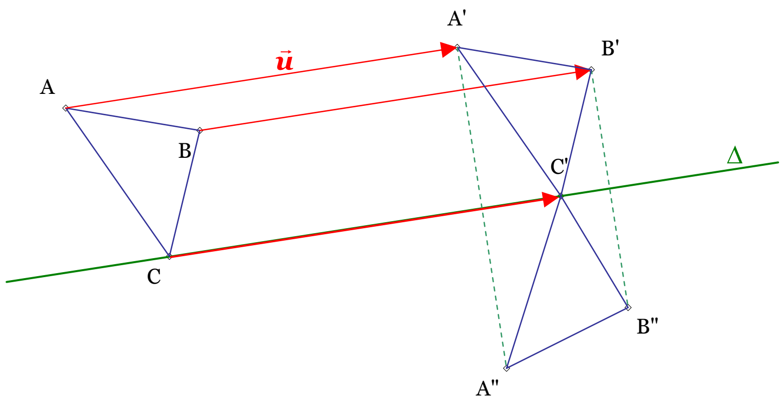
Donc $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ est une réflexion.

> ***Conclusion :*** Lorsque le vecteur de translation est normal à l'axe de symétrie alors la composée d'une translation et d'une réflexion (ou le contraire) est une autre réflexion dont l'axe est parallèle au premier.

Bref, nous n'avons pas découvert de nouveaux montres ! Envisageons un autre cas.

2. ***Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ***

Commençons par la composée $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$. La situation est alors la suivante :



On appelle A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par la translation $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$.
Puis, ces trois points ont pour symétriques A", B" et C' par rapport à l'axe Δ.
Ce qui fait que les points A", B" et C' sont les images respectives de A, B et C par la composée $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$.

Le peu d'expérience que nous avons des isométries, nous conduit à dire que $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ ne ressemble à rien de ce que nous connaissons. Il n'y a qu'à voir les orientations des triangles successifs. Cela dit, méfions-nous de nos préjugés. Car peut-être tout cela cache-t-il une symétrie axiale ou une rotation que nous n'aurions pas vue ?
Pour savoir ce sur quoi nous sommes tombés, nous allons regarder si la composée $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ admet des points fixes, c'est-à-dire des points qui sont leurs propres images.

Supposons que $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ admette (au moins) un point fixe F.

Nous appelons F' son image par la translation $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$. Donc : $\overrightarrow{FF'} = \vec{u}$.

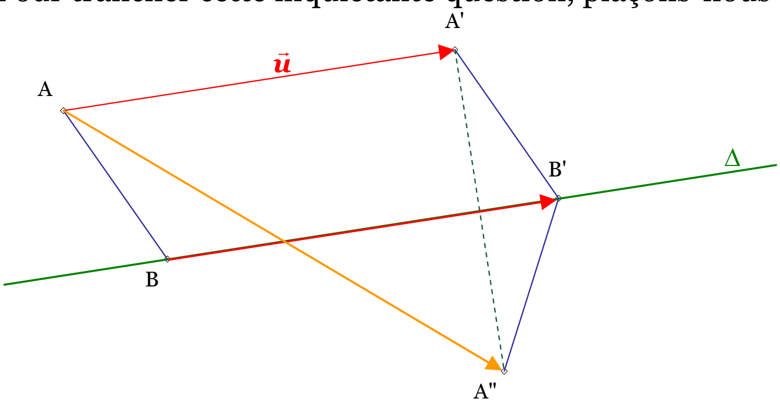
Comme le vecteur $\vec{u}$ est non nul alors les points F et F' sont distincts.

Ensuite, F étant un point fixe de $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ alors le symétrique de F' par rapport Δ à est F.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\boldsymbol{t}_{\vec{u}}"] \arrow[rr, bend right, "\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}"'] & F' \arrow[r, "\boldsymbol{s}_\Delta"] & F \end{tikzcd}$$

Comme F est le symétrique de F' par rapport à l'axe Δ alors cette dernière droite est la médiatrice [FF'].
Une précision : il est clair que F' ne fait pas partie de l'axe Δ car sinon il serait sa propre image. Or F' et F sont distincts. Parler du segment [FF'] a donc un sens.
Reprenons : $\vec{u}$ étant un vecteur directeur de Δ alors les vecteurs non nuls $\overrightarrow{FF'}$ et $\vec{u}$ sont donc orthogonaux !
Or nous avons vu qu'ils étaient aussi égaux !
Et être égaux, non nuls et orthogonaux, c'est très dur ! Tellement que ça n'existe pas dans notre espace qu'est le plan !
Dans tout ce que nous avons fait, il est clair que nous avons supposé vraie une chose qui ne l'était pas. Nous avons supposé à tort que la composée $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ admettait un point fixe. Cette absurdité nous prouve qu'elle ne peut pas en avoir !
Donc $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ n'est donc ni une rotation (un point fixe qui est le centre), ni une symétrie axiale (les points fixes sont ceux de l'axe de symétrie) !

Cela dit des isométries sans point fixe, ça existe ! $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ est peut-être une translation.
Pour trancher cette inquiétante question, plaçons-nous dans la situation suivante :



A et B sont deux points du plan, le second faisant partie de l'axe Δ, le premier non.
On appelle A' et B' leurs images respectives par la translation de vecteur $\vec{u}$.
B' faisant partie de l'axe Δ, il est sa propre image par la réflexion $\boldsymbol{s}_\Delta$.

Le point A' n'appartenant pas à l'axe de symétrie, il est donc distinct de son image A".
En tous cas, les points A et B ont pour images respectives A" et B' par $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$.
Or, nous pouvons écrire que :

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \vec{u} + \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{BB'} + \underbrace{\overrightarrow{A'A''}}_{\textit{Vecteur non nul}} \neq \overrightarrow{BB'}$$

La composée $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ ne peut donc être une translation. Pour cela, il aurait fallu que l'on passât de A en A" et de B en B' selon un même vecteur !

Désormais, nous pouvons l'affirmer :

Conclusion : $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ n'est ni une translation, ni une rotation, ni une réflexion.

$\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ est une isométrie d'un nouveau type que l'on appelle <u>symétrie glissée</u> suggérant par là qu'elle conjugue symétrie axiale et déplacement. Nous reviendrons [ultérieurement]() sur les propriétés de cette nouvelle espèce d'isométrie.
Dans l'immédiat, nous allons nous intéresser à l'autre composée $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$.

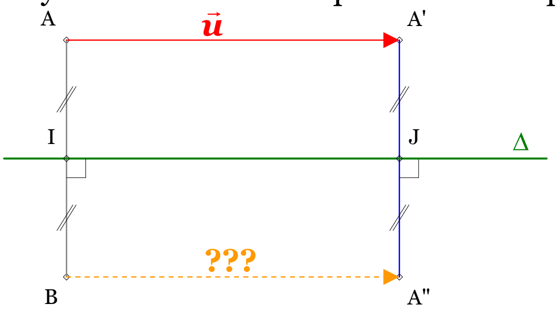
La composition est rarement commutative. Pourtant, ici elle l'est ! Nous devons prouver que pour tout point A, $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta (A) = \boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} (A)$.

Lorsque le point A appartient à l'axe Δ, les choses sont relativement claires.

Appelons A' l'image de A par $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$.

$\vec{u}$ étant un vecteur directeur de Δ, le point A' appartient à l'axe Δ comme A.
Ensuite, nous pouvons écrire deux choses :
D'abord : $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} (A) = \boldsymbol{s}_\Delta (A') = A'$ car A' appartient à l'axe Δ.
Ensuite : $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta (A) = \boldsymbol{t}_{\vec{u}} (A) = A'$ car A appartient aussi à l'axe Δ.
Bref, pour tout point A de l'axe Δ, nous avons l'égalité : $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta (A) = \boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} (A)$

Voyons maintenant ce qu'il en est lorsque le point A n'appartient pas l'axe !



Plantons le décor de nos ébats !
A est un point du plan n'appartenant pas à l'axe Δ.
Nous appellerons A' son image par $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$.
Si A" est le symétrique de A' par rapport à l'axe de Δ alors $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} (A) = A''$
Enfin, nous baptisons B le symétrique de A par rapport à Δ.

Nous devons prouver que A" est l'image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Comme $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ alors les droites (AA') et (IJ) sont parallèles.
De plus, les droites (AI) et (A'J) étant perpendiculaires à l'axe Δ alors elles sont parallèles entre elles.
Ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, le quadrilatère non croisé AA'JI est un parallélogramme. D'où les égalités $\overrightarrow{AA'} = \vec{u} = \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{A'J}$.
Comme I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AA"] alors :

$$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{A'J} = \overrightarrow{JA''}$$

L'égalité $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{JA''}$ nous indique que IJA"B est un parallélogramme. De là, il vient :

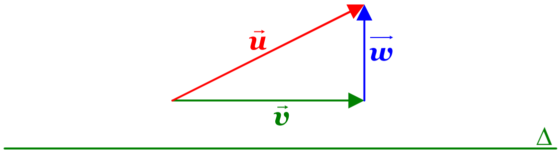
$$\overrightarrow{BA''} = \overrightarrow{IJ} = \vec{u}$$

Donc A" est l'image de B par la translation de vecteur $\vec{u}$. Par conséquent, il est aussi l'image de A par la composée $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$.
Nous avons prouvé que pour tout point A : $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta (A) = A'' = \boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} (A)$

Conclusion : A l'instar de la composée $\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$, $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$ est aussi symétrie glissée.

3. *Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de Δ et n'y est pas normal*

Pour traiter ce cas, nous allons utiliser les deux précédents.



Le vecteur $\vec{u}$ peut être vu comme étant la somme d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de Δ et de l'un de ses vecteurs normaux $\vec{w}$.

Si nous parlions de géométrie analytique, nous pourrions dire que nous décomposons le vecteur $\vec{u}$ dans un repère orthonormé dont Δ est l'axe des abscisses. Quoiqu'il en soit, nous avons la double égalité :

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$

D'un point de vue "translation", elle se traduit par :

$$\boldsymbol{t}_{\vec{u}} = \boldsymbol{t}_{\vec{v}} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{w}} = \boldsymbol{t}_{\vec{w}} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{v}}$$

A partir de là, nous pouvons nous prononcer sur les composées qui nous intéressent :

D'abord : $\boldsymbol{s}_{\Delta} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} = \boldsymbol{s}_{\Delta} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{w}} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{v}} = \underbrace{\boldsymbol{s}_{\Delta} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{w}}}_{\substack{\vec{w} \text{ est normal à } \Delta \\ \text{C'est une réflexion d'axe } \Delta' \\ \text{parallèle à } \Delta}} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{v}} = \underbrace{\boldsymbol{s}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{v}}}_{\substack{\vec{v} \text{ est parallèle à } \Delta' \\ \text{C'est une symétrie glissée}}}$

Ensuite : $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta} = \boldsymbol{t}_{\vec{v}} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{w}} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta} = \boldsymbol{t}_{\vec{v}} \circ \underbrace{\boldsymbol{s}_{\Delta} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{w}}}_{\substack{\vec{w} \text{ est normal à } \Delta \\ \text{C'est une réflexion d'axe } \Delta' \\ \text{parallèle à } \Delta}} = \underbrace{\boldsymbol{t}_{\vec{v}} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta'}}_{\substack{\vec{v} \text{ est parallèle à } \Delta' \\ \text{C'est une symétrie glissée}}}$

> ***Conclusion :*** Les deux composée $\boldsymbol{s}_{\Delta} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ et $\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta}$ sont des symétrie glissées.

La composée d'une translation et d'une réflexion nous a donc amené à découvrir une nouvelle isométrie. Après toutes ces aventures, une belle conclusion s'impose !

> ***Conclusion :*** La composée d'une réflexion et d'une translation est :
> - Une autre réflexion d'axe parallèle lorsque le vecteur de translation est normal à l'axe de symétrie.
> - Une symétrie glissée sinon.

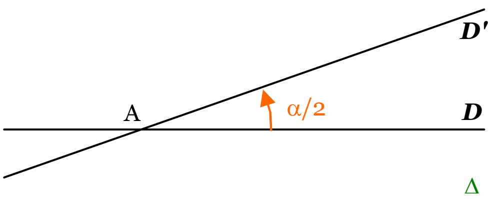
Dans le prochain paragraphe, nous étudierons en détail cette nouvelle isométrie qu'est la symétrie glissée. Dans l'immédiat, nous allons nous intéresser à la composée d'une rotation et d'une réflexion. Qui sait ? Peut-être, aboutirons-nous à un nouveau type d'isométrie ?

La composée d'une rotation et d'une réflexion

Nous allons travailler avec la rotation $\boldsymbol{r}_{A,\alpha}$ et la symétrie axiale $\boldsymbol{s}_{\Delta}$. Nous supposerons que l'angle α de la rotation n'est pas un multiple de 2π pour que la rotation ne soit pas l'identité.

Commençons par traiter le cas de la composée $\boldsymbol{r}_{A,\alpha} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta}$.

Le théorème de décomposition nous permet de dire que la rotation $\boldsymbol{r}_{A,\alpha}$ peut être vue comme étant une composée de deux réflexions $\boldsymbol{s}_{D}$ et $\boldsymbol{s}_{D'}$ dont les deux axes sont sécants en A et dont l'angle orienté $(\boldsymbol{D}\,;\boldsymbol{D'})$ mesure $\frac{\alpha}{2}$

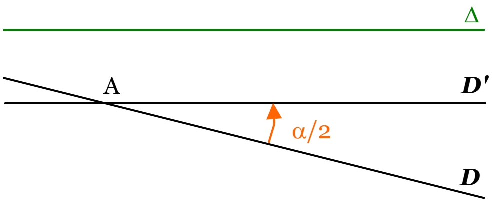


Nous décidons que la droite $\boldsymbol{D}$ est parallèle à l'axe Δ.

Nous pouvons écrire que :

$$r_{A,\alpha} \circ s_\Delta = s_{D'} \circ s_D \circ s_\Delta = s_{D'} \circ \underbrace{s_D \circ s_\Delta}_{\begin{array}{c}\textit{Axes parallèles}\\ \textit{C'est une translation dont le vecteur}\\ \vec{u}\textit{ est normal à ces deux axes}\end{array}} = \underbrace{s_{D'} \circ t_{\vec{u}}}_{\begin{array}{c}\vec{u}\textit{ n'est pas normal à } D'\\ \textit{C'est une symétrie glissée}\end{array}}$$

Intéressons-nous à présent à l'autre composée $s_\Delta \circ r_{A,\alpha}$!



Là encore, la rotation $r_{A,\alpha}$ peut être vue comme étant la composée $s_D \circ s_{D'}$.
Seule différence avec le cas précèdent : nous choisissons la droite D' parallèle à l'axe Δ.

Ayant planté le décor de nos ébats, nous pouvons entamer la manoeuvre :

$$s_\Delta \circ r_{A,\alpha} = s_\Delta \circ s_{D'} \circ s_D = \underbrace{s_\Delta \circ s_{D'}}_{\begin{array}{c}\textit{Axes parallèles}\\ \textit{C'est une translation dont le vecteur}\\ \vec{u}\textit{ est normal à ces deux axes}\end{array}} \circ s_D = \underbrace{t_{\vec{u}} \circ s_D}_{\begin{array}{c}\vec{u}\textit{ n'est pas normal à } D\\ \textit{C'est une symétrie glissée}\end{array}}$$

Ainsi pouvons-nous conclure que :

Conclusion : La composée d'une rotation et d'une réflexion (ou le contraire) est une symétrie glissée.

Une autre isométrie au-delà de la symétrie glissée ?

Ayant découvert une nouvelle isométrie à partir de trois que nous connaissions, il se peut que d'autres espèces émergent de composées impliquant des symétries glissées. Nous nous remettons en route, à la recherche d'une isométrie inconnue.

Même si nous reviendrons dessus en détail, il n'est pas inutile de rappeler ce que nous entendons par symétrie glissée.
De notre point de vue, une symétrie glissée est la composée d'un réflexion s_Δ et d'une translation $t_{\vec{u}}$ dont le vecteur est parallèle à l'axe de symétrie. Nous savons que dans un tel cas, les deux isométries commutent : la composée $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ est aussi $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$.
Ayant rappelé ces résultats, nous pouvons démarrer...

1. ***La composée d'une translation et d'une symétrie glissée***

   Nous allons travailler avec la translation $t_{\vec{v}}$ et la symétrie glissée $g = s_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$.
   Utilisant ce qui a été fait tant pour les translations que juste avant, nous avons :

   D'abord $g \circ t_{\vec{v}} = s_\Delta \circ \underbrace{t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}}_{\textit{Composée de translations}} = \underbrace{s_\Delta \circ t_{\vec{u}+\vec{v}}}_{\textit{Réflexion ou symtrie glissée}}$

   Ensuite $t_{\vec{v}} \circ g = \underbrace{t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}}_{\textit{Composée de translations}} \circ s_\Delta = \underbrace{t_{\vec{v}+\vec{u}} \circ s_\Delta}_{\textit{Réflexion ou symtrie glissée}}$

   Conclusion : la composée d'une translation et d'une symétrie glissée est une réflexion ou une symétrie glissée.

2. ***La composée d'une rotation et d'une symétrie glissée***

   Les protagonistes de notre affaire sont la rotation $r_{A,\alpha}$ et la symétrie glissée

$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} = \boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$ où le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de l'axe de symétrie Δ.
Si vous ce qu'est une composée d'une rotation avec une translation ou avec une réflexion, alors vous allez comprendre ce qui suit :

D'abord $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{r}_{A,\alpha} = \boldsymbol{s}_\Delta \circ \underbrace{\boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{r}_{A,\alpha}}_{\textit{C'est une rotation}} = \underbrace{\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{r}_{B,\alpha}}_{\textit{C'est une symtrie glissée}}$

Ensuite $\boldsymbol{r}_{A,\alpha} \circ \boldsymbol{g} = \underbrace{\boldsymbol{r}_{A,\alpha} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}}}_{\textit{C'est encore une rotation}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta = \underbrace{\boldsymbol{r}_{B,\alpha} \circ \boldsymbol{s}_\Delta}_{\textit{C'est encore une symtrie glissée}}$

Conclusion : la composée d'une rotation et d'une symétrie glissée est une autre symétrie glissée.

3. *La composée d'une réflexion et d'une symétrie glissée*

Les acteurs de notre histoire nous la sympathique réflexion $\boldsymbol{s}_D$ et la sémillante symétrie glissée $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} = \boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$ où le vecteur $\vec{u}$ est encore colinéaire à Δ.
Pour notre affaire, il suffit juste de se rappeler ce que donnent les composée de deux réflexions ainsi que d'une rotation et d'une translation. A l'attaque !

D'abord $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{s}_D = \boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \underbrace{\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{s}_D}_{\substack{\textit{C'est une rotation} \\ \textit{ou une translation}}} = \textit{Rotation ou translation}$

Ensuite $\boldsymbol{s}_D \circ \boldsymbol{g} = \underbrace{\boldsymbol{s}_D \circ \boldsymbol{s}_\Delta}_{\substack{\textit{C'est une rotation} \\ \textit{ou une translation}}} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} = \textit{Rotation ou translation}$

Conclusion : la composée d'une symétrie axiale et d'une symétrie glissée est une rotation ou une translation

4. *La composée de deux symétries glissées*

Nous considérons deux symétries glissées $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} = \boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$ et $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{s}_{\Delta'} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{v}} = \boldsymbol{t}_{\vec{v}} \circ \boldsymbol{s}_{\Delta'}$.
Bien sûr, pour chaque symétrie glissée, le vecteur de translation est réputé directeur de l'axe de symétrie de la réflexion correspondante.
Pour cette affaire, seules deux choses sont à savoir. D'abord, une composée de deux réflexions est soit une rotation, soit une translation. Ensuite, une composée de rotations et translations est soit une rotation, soit une translation.

$$\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \underbrace{\boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{s}_D}_{\textit{Rotation ou translation}} \circ \boldsymbol{t}_{\vec{v}} = \textit{Rotation ou translation}$$

Conclusion : la composée de deux symétries glissées est une rotation ou une translation.

Pour certains, la déception est immense mais nous n'avons pas découvert de nouvelle isométrie. Peut-être n'en existe-t-il pas d'autres que les quatre que nous connaissons ?
Plus tard, nous essayerons de répondre à cette boulversifiante question avec les points fixes.
Dans l'immédiat, nous allons revenir sur cette nouvelle isométrie qu'est la symétrie glissée.

La symétrie glissée

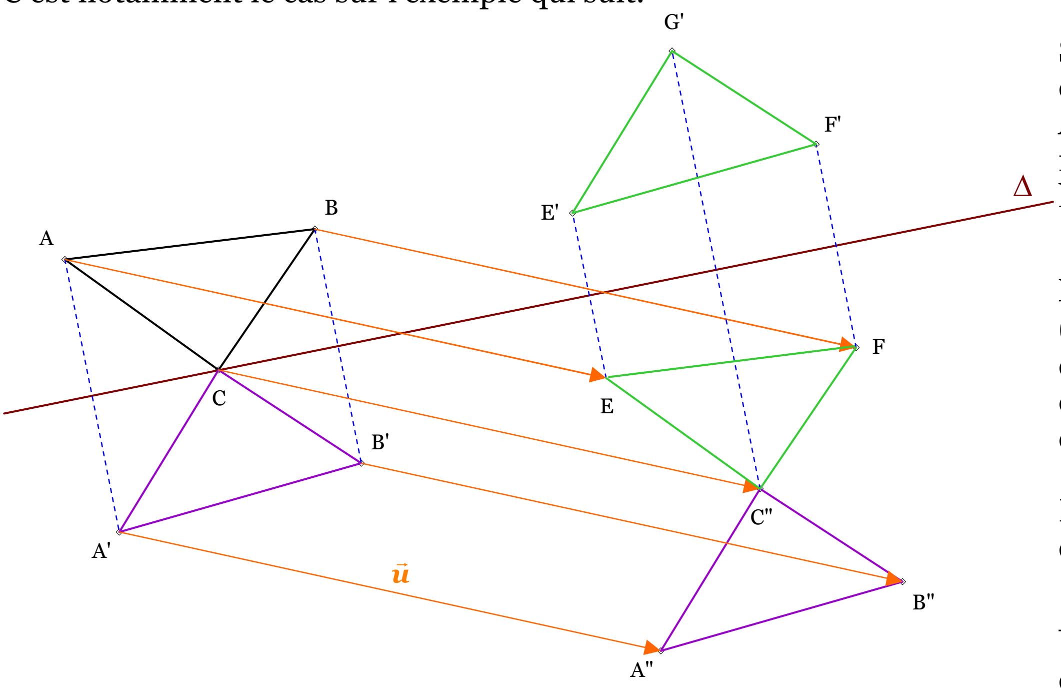
Lorsque nous l'avons rencontrée, nous avons défini la symétrie glissée comme étant la composée d'une réflexion et d'une translation de vecteur colinéaire à l'axe de symétrie.
En fait, nous aurions être beaucoup généraux et généreux en déclarant :

Définition d'une symétrie glissée
On appelle symétrie glissée toute composée d'une réflexion et d'une translation dont le vecteur n'est pas normal à l'axe de symétrie.

Cette définition appelle plusieurs remarques :

- La symétrie glissée est un anti-déplacement car elle change les angles orientés en leur opposé. Elle hérite cette propriété de la réflexion.
- Le vecteur de translation ne peut être normal à l'axe de symétrie car la composée est alors une réflexion.
  Pour cette même raison, le vecteur de translation ne peut être nul.
  Cependant, certains considèrent que les symétries axiales sont des symétries glissées particulières.
- Ensuite, nous parlons d'une composée réflexion/translation mais notre définition vaut aussi pour l'autre sens de composition translation/réflexion.

Nous avons vu que toute symétrie glissée $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ pouvait être ramenée à une autre de la forme $s_D \circ t_{\vec{v}}$ où le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de l'axe de symétrie D.
Cependant, si les deux dernières isométries s_D et $t_{\vec{v}}$ commutent entre elles (c'est-à-dire $s_D \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ s_D$), il ne va pas nécessairement de même pour les deux premières s_Δ et $t_{\vec{u}}$.
La symétrie glissée $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ n'est pas nécessairement la symétrie glissée $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$.
C'est notamment le cas sur l'exemple qui suit.



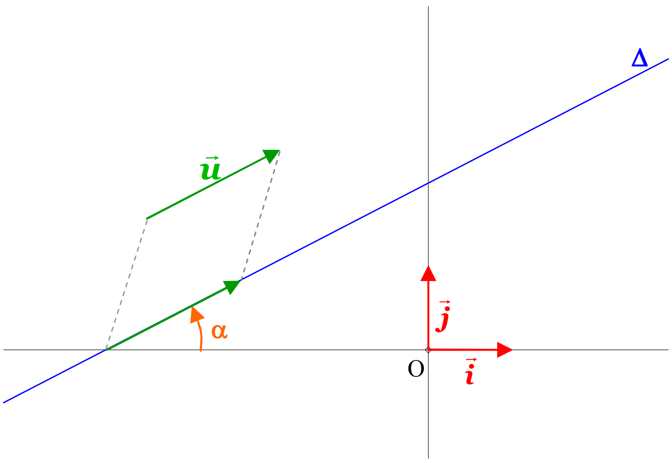
Sur l'exemple ci-contre, le triangle ABC n'a pas la même image par la symétrie glissé $s_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ (vert) que par $t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$ (violet). Ces deux composées sont deux isométries différentes.

Dans le présent cas, la réflexion s_Δ et la translation $t_{\vec{u}}$ ne commutent pas/

La symétrie glissée sous un angle complexe

Toute symétrie glissée $\boldsymbol{g}$ est la composée d'une réflexion $\boldsymbol{s}_\Delta$ et d'une translation $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de l'axe Δ. Dans une telle situation, nous savons que ces deux applications commutent. Indifféremment, nous pouvons écrire :

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{s}_\Delta \circ \boldsymbol{t}_{\vec{u}} = \boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$$



La situation est celle ci-contre.
Une expression complexe de la translation $\boldsymbol{t}_{\vec{u}}$ est :

$$\boldsymbol{t}_{\vec{u}} = z + \boldsymbol{u}$$

où $\boldsymbol{u}$ est l'affixe du vecteur $\vec{u}$.
Comme $\vec{u}$ a même direction que l'axe Δ alors

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} \times e^{\boldsymbol{i}.\alpha}$$

où $\boldsymbol{k}$ est un nombre réel positif ou négatif.
Par contre, $\boldsymbol{k}$ ne peut être nul car $\vec{u} \neq \vec{0}$.
Enfin, une expression complexe de $\boldsymbol{s}_\Delta$ est :

$$\boldsymbol{s}_\Delta(z) = e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times \boldsymbol{k'}.\boldsymbol{i}$$

où $\boldsymbol{k'}$ est un nombre réel quelconque.

Ayant dit tout cela, les choses vont aller très vite. Pour tout nombre complexe z, nous avons :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(z) &= \boldsymbol{t}_{\vec{u}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta(z)\\ &= \boldsymbol{t}_{\vec{u}}\left(\boldsymbol{s}_\Delta(z)\right)\\ &= \boldsymbol{t}_{\vec{u}}\left(e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times \boldsymbol{k'}.\boldsymbol{i}\right) = \underbrace{e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + e^{\boldsymbol{i}.\alpha} \times \boldsymbol{k'}.\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{k} \times e^{\boldsymbol{i}.\alpha} = e^{2.\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + e^{\boldsymbol{i}.\alpha}.\left(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{i}.\boldsymbol{k'}\right)\end{aligned}$$

Nous avons trouvé une expression complexe pour une symétrie glissée.

Conclusion : Toute symétrie glissée $\boldsymbol{g}$ a une expression complexe de la forme

$$\boldsymbol{g}(z) = \boldsymbol{a}.\bar{z} + \boldsymbol{b}$$

où $\boldsymbol{a}$ est un nombre complexe de module 1 et $\boldsymbol{b}$ un autre nombre complexe.

Peut-être cette conclusion est-elle trop générale ? A présent, se pose la question réciproque.

Peut-on dire qu'une application complexe $\boldsymbol{f}(z) = \boldsymbol{a}.\bar{z} + \boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{a}$ est un nombre complexe de module 1, est géométriquement une symétrie glissée ?

Nous avons déjà répondu à une telle question mais avec les fonctions $\boldsymbol{f}(z) = \boldsymbol{a}.z + \boldsymbol{b}$. Nous avions alors conclu que $\boldsymbol{f}$ était géométriquement soit une translation, soit une rotation.
A la lumière des événements que nous venons de vivre, voyons ce qu'il en est ici.

D'abord comme $\boldsymbol{a}$ est un nombre complexe de module 1 et pour peu que l'on appelle α un nombre réel dont le double est un argument du complexe $\boldsymbol{a}$, nous pouvons écrire :

$$\boldsymbol{a} = e^{2\alpha.\boldsymbol{i}}$$

Ensuite le complexe $e^{\boldsymbol{i}.\alpha}$ étant non nul (car de module 1), il est possible de diviser $\boldsymbol{b}$ par sa personne. On appelle $\boldsymbol{c}$ leur quotient. Pour $\boldsymbol{f}$(z), il advient alors :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(z) &= \boldsymbol{a}.\bar{z} + \boldsymbol{b}\\ &= e^{2\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + e^{\boldsymbol{i}.\alpha}.\boldsymbol{c}\\ &= e^{2\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + e^{\boldsymbol{i}.\alpha}.\left(\mathrm{Re}(\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{i}.\mathrm{Im}(\boldsymbol{c})\right) = \underbrace{e^{2\alpha.\boldsymbol{i}}.\bar{z} + e^{\boldsymbol{i}.\alpha}.\boldsymbol{i}.\mathrm{Im}(\boldsymbol{c})}_{\textit{Symétrie axiale}} + \underbrace{e^{\boldsymbol{i}.\alpha}.\mathrm{Re}(\boldsymbol{c})}_{\substack{\textit{Eventuelle translation}\\ \textit{si Re}(\boldsymbol{c})\textit{ est non nul.}}}\end{aligned}$$

Cette modification d'écriture nous permet de conclure.

> ***Conclusion :*** Une application complexe $\boldsymbol{f}$ de la forme $\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{a}.\overline{z}+\boldsymbol{b}$ où a est un nombre complexe de module 1, est géométriquement une symétrie glissée ou une réflexion.

Toute cette théorie est bien belle mais rien ne remplace deux bons exemples.

Intéressons-nous à l'application complexe $\boldsymbol{f}(z)=\underbrace{-\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{a}}.\overline{z}+\underbrace{1+\boldsymbol{i}}_{\boldsymbol{b}}$.

Le coefficient $\boldsymbol{a}$ ayant pour module 1, nous savons que $\boldsymbol{f}$ est soit une réflexion, soit une symétrie glissée. Pour nous prononcer, nous devons modifier l'écriture de $\boldsymbol{f}(z)$ et tenter de faire apparaître le réel α.

$$\boldsymbol{f}(z)=e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{2}}.\overline{z}+1+\boldsymbol{i}=e^{2.\left(\frac{-\pi}{4}\right).\boldsymbol{i}}.\overline{z}+\underbrace{\sqrt{2}\times e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{4}}}_{\substack{\textit{Forme trigonométrique}\\ \textit{de } 1+\boldsymbol{i}}}$$

Dans le présent exemple, il est clair que α est égal à $-\frac{\pi}{4}$. De là, nous poursuivons :

$$\boldsymbol{f}(z)=e^{2.\left(\frac{-\pi}{4}\right).\boldsymbol{i}}.\overline{z}+\sqrt{2}\times\underbrace{e^{-\frac{\pi}{4}.\boldsymbol{i}}\times e^{\frac{\pi}{2}.\boldsymbol{i}}}_{\textit{car } -\pi/4+\pi/2=\pi/4}=e^{2.\left(\frac{-\pi}{4}\right).\boldsymbol{i}}.\overline{z}+e^{-\frac{\pi}{4}.\boldsymbol{i}}.\boldsymbol{i}.\sqrt{2}$$

En nous appuyant sur ce qui vient d'être fait, nous pouvons conclure que géométriquement, l'application complexe $\boldsymbol{f}(z)=-\boldsymbol{i}.\overline{z}+1+\boldsymbol{i}$ est une simple symétrie axiale d'axe Δ.

A partir des renseignements que nous avons, nous pouvons déterminer une équation de Δ.

D'abord une mesure de l'angle orienté entre l'axe des abscisses et la droite Δ étant $\alpha=-\frac{\pi}{4}$, nous en déduisons que le coefficient directeur de Δ est $\boldsymbol{m}_\Delta=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

Donc l'équation réduite de Δ est de la forme $y=-x+\boldsymbol{p}$ où $\boldsymbol{p}$ est une constante à calculer.

Ensuite si on appelle O' l'image de l'origine O alors O' a pour affixe $e^{-\frac{\pi}{4}.\boldsymbol{i}}.\boldsymbol{i}.\sqrt{2}=1+\boldsymbol{i}$.
Les coordonnées de O' sont donc $(1;1)$. Comme Δ est la médiatrice de [OO'] alors le milieu $I(0,5;0,5)$ fait partie de cette droite Δ. De là, on trouve $\boldsymbol{p}$ et l'équation réduite de Δ.

> ***Conclusion :*** L'application $\boldsymbol{f}(z)=-\boldsymbol{i}.\overline{z}+1+\boldsymbol{i}$ est la réflexion d'axe Δ d'équation $y=-x+1$.

Prenons un autre exemple en la personne de l'application complexe $\boldsymbol{g}(z)=\overline{z}+3+\boldsymbol{i}$.
Son coefficient de $\overline{z}$ étant de module 1, $\boldsymbol{g}$ est ou bien une symétrie axiale, ou bien une glissée.
Là encore, pour le savoir, il faut modifier l'expression de $\boldsymbol{g}$ afin de faire apparaître l'angle α.

$$\boldsymbol{g}(z)=e^{0\times\boldsymbol{i}}.\overline{z}+3+\boldsymbol{i}=e^{2\times 0\times\boldsymbol{i}}.\overline{z}+3+\boldsymbol{i}$$

Clairement $\alpha=0$. Quelle application sympa cette fonction $\boldsymbol{g}$! Continuons !

$$\boldsymbol{g}(z)=e^{0\times\boldsymbol{i}}.\overline{z}+3+\boldsymbol{i}=e^{2\times 0\times\boldsymbol{i}}.\overline{z}+e^{0\times\boldsymbol{i}}.3+e^{0\times\boldsymbol{i}}.\boldsymbol{i}=\underbrace{e^{2\times 0\times\boldsymbol{i}}.\overline{z}+e^{0\times\boldsymbol{i}}.\boldsymbol{i}}_{\textit{Symétrie axiale}}+\underbrace{e^{0\times\boldsymbol{i}}.3}_{\textit{Translation}}$$

> ***Conclusion :*** L'application $\boldsymbol{g}(z)=\overline{z}+3+\boldsymbol{i}$ est une symétrie glissée qui peut être vue comme étant la composée de la réflexion d'axe Δ : y = -0,5 et de la translation de vecteur $\vec{u}(3;0)$.

On remarquera que dans le présent cas, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de l'axe Δ.

A la recherche de l'isométrie perdue : par ses points fixes

Nos récentes aventures nous ont permis de découvrir une nouvelle isométrie en plus des trois que nous connaissions déjà : la symétrie glissée. Cependant, peut-être en existe-t-il d'autres ? Ayant déjà exploité l'outil de la composition, nous allons à présent utiliser les points fixes.

Définition d'un point fixe
Dire qu'un point est fixe pour une isométrie signifie qu'il est sa propre image par celle-ci.

Des points fixes, une isométrie peut en avoir autant qu'elle veut ! Cela ne regarde qu'elle ! Pourtant ce nombre induit des choses sur sa nature. Passons les différentes possibilités en revue. Dans ce qui suit, $\boldsymbol{f}$ est une isométrie quelconque.

1. ***L'isométrie f admet au moins trois fixes non alignés***
   Appelons A, B et C trois de ces points fixes. N nous avons donc :
   $$\boldsymbol{f}(A) = A \qquad \boldsymbol{f}(B) = B \qquad \boldsymbol{f}(C) = C.$$
   Nos trois points sont réputés sont non alignés.
   Soit M un point quelconque du plan. Nous appelons M' son image par $\boldsymbol{f}$.
   Procédons par l'absurde : supposons que ces deux points M et M' soient distincts.
   Comme ils sont distincts alors il est légitime de parler du segment [MM'] et surtout de sa médiatrice $\boldsymbol{D}$.
   Comme $\boldsymbol{f}$ est une isométrie et $\boldsymbol{f}(AM) = AM'$ alors les distances AM et AM' sont égales.
   Donc le point A appartient à la médiatrice $\boldsymbol{D}$ du segment [MM'].
   Et ce qui est valable pour A, l'est aussi pour les points B et C.
   Ainsi en supposant que M et M' sont distincts, arrivons-nous à l'absurdité que les trois points non alignés A, B et C appartiennent à une même droite : $\boldsymbol{D}$!
   Notre supposition était donc fausse : les points M et M' ne peuvent pas être distincts. Ils sont confondus.
   Ainsi pour tout point M du plan, avons-nous : $\boldsymbol{f}(M) = M$.
   Une seule isométrie remplie cette condition : c'est l'identité.

   Conclusion : Une isométrie qui a au moins trois fixes non alignés est l'identité.

2. ***L'isométrie f admet au moins deux points fixes distincts***
   L'isométrie $\boldsymbol{f}$ admet au moins deux points fixes distincts A et B.
   D'entrée, écartons le cas où il existerait un troisième point fixe qui serait non aligné avec A et B. Nous retombons alors sur le premier cas.
   Donc s'il existe un troisième point fixe, il fait nécessairement partie de la droite (AB).
   Comme précédemment, nous considérons un point quelconque du plan que nous appelons M. On appelle M' son image par $\boldsymbol{f}$.
   Là deux cas sont à envisager :

   → Si les points M et M' sont confondus alors M est un point fixe de l'isométrie $\boldsymbol{f}$ et donc, fait partie de la droite (AB).
   Par conséquent, nous pouvons dire que M' est le symétrique de M par rapport à (AB).

   → Si les points M et M' sont distincts alors on peut parler de la médiatrice $\boldsymbol{D}$ du segment [MM'].
   Là encore, comme $\boldsymbol{f}$ est une isométrie alors les distances AM et AM' sont égales.
   Il en va de même pour les distances BM et BM'.

Donc les points A et B appartiennent à la médiatrice $\boldsymbol{D}$ du segment [MM'].
Dans ce cas-là aussi, M' est le symétrique de M par rapport à l'axe (AB).

Résumons-nous : A tout point du plan M, l'isométrie $\boldsymbol{f}$ fait correspondre son symétrique par rapport à la droite (AB).

> ***Conclusion :*** Une isométrie qui a au moins deux points fixes distincts et qui n'est pas l'identité, est une réflexion.

3. *L'isométrie f a un seul point fixe*

Nous appelons A l'unique point fixe de l'isométrie $\boldsymbol{f}$.
Soit B un autre point du plan et B' son image par l'isométrie $\boldsymbol{f}$.
Comme A est le seul point fixe de $\boldsymbol{f}$ alors les points B et B' sont nécessairement distincts. On peut donc parler du segment [BB'] et de sa médiatrice $\boldsymbol{D}$.
A et B' étant les images respectives des points A et B par l'isométrie $\boldsymbol{f}$, nous avons que :

$$AB' = \boldsymbol{f}(AB) = AB$$

Donc le point A appartient à la médiatrice $\boldsymbol{D}$ du segment [BB'].

Intéressons-nous à la symétrie axiale $\boldsymbol{s_D}$ et surtout à la composée $\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{f}$.
En tant que composée de deux isométries, $\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{f}$ en est une autre.
De plus : $\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{f}(\mathrm{A}) = \boldsymbol{s_D}\left(\boldsymbol{f}(\mathrm{A})\right) = \boldsymbol{s_D}\left(\mathrm{A}\right) = \mathrm{A}$
De même : $\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{f}(\mathrm{B}) = \boldsymbol{s_D}\left(\boldsymbol{f}(\mathrm{B})\right) = \boldsymbol{s_D}\left(\mathrm{B'}\right) = \mathrm{B}$ car $\boldsymbol{D}$ est la médiatrice de [BB'].
Donc l'isométrie $\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{f}$ a <u>au moins</u> deux points fixes distincts. Il y a déjà A et B.
La conclusion du cas précédent va nous aider. Car deux situations sont possibles.

→ $\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{f}$ peut être l'application identique. (Trois points fixes non alignés)
Autrement écrit : $\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{Id}$
Cela fait de $\boldsymbol{f}$ l'application réciproque de la symétrie axiale $\boldsymbol{s_D}$. Donc : $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{s_D}$.
$\boldsymbol{f}$ est alors une réflexion. Ce qui n'est pas possible car $\boldsymbol{f}$ n'a qu'un seul point fixe !
Donc cette première possibilité n'est pas possible !

→ $\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{f}$ peut être une réflexion.
La symétrie axiale $\boldsymbol{s_D}$ étant sa propre réciproque, nous avons que $\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{s_D} = \boldsymbol{Id}$.
Utilisons cette trouvaille :

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{Id} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{s_D} \circ \underbrace{\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{f}}_{\textit{Réflexion}}$$

L'isométrie $\boldsymbol{f}$ peut donc être vue comme la composée des deux réflexions $\boldsymbol{s_D}$ et $\boldsymbol{s_D} \circ \boldsymbol{f}$.
Par conséquent, $\boldsymbol{f}$ est soit une translation, soit une rotation.
Une translation n'ayant pas de point fixe, $\boldsymbol{f}$ ne peut être qu'une rotation.

> ***Conclusion :*** Une isométrie ayant un seul point fixe est une rotation.

4. *L'isométrie f n'a aucun point fixe*

Soit A un point quelconque du plan. Il est distinct de son image A' par l'isométrie $\boldsymbol{f}$.
Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A'A}}$ est non nul. La translation $\boldsymbol{t}_{\overrightarrow{\mathrm{A'A}}}$ n'est donc pas l'application identique.
Intéressons-nous à la composée $\boldsymbol{t}_{\overrightarrow{\mathrm{A'A}}} \circ \boldsymbol{f}$.

En tant que composée de deux isométries, $\boldsymbol{t}_{\overline{A'A}} \circ \boldsymbol{f}$ est en une autre.

De plus : $\boldsymbol{t}_{\overline{A'A}} \circ \boldsymbol{f}(A) = \boldsymbol{t}_{\overline{A'A}}(\boldsymbol{f}(A)) = \boldsymbol{t}_{\overline{A'A}}(A') = A$

Donc A est un point fixe de l'isométrie $\boldsymbol{t}_{\overline{A'A}} \circ \boldsymbol{f}$. Celle-ci admet au moins un point fixe.

Là plusieurs situations sont possibles suivant le nombre de points fixes :

→ L'isométrie $\boldsymbol{t}_{\overline{A'A}} \circ \boldsymbol{f}$ peut être l'identité. (Trois points fixes non alignés).

Ayant l'égalité $\boldsymbol{t}_{\overline{A'A}} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{Id}$, l'isométrie $\boldsymbol{f}$ est la réciproque de la translation $\boldsymbol{t}_{\overline{A'A}}$.

Donc $\boldsymbol{f}$ est la translation $\boldsymbol{t}_{\overline{AA'}}$.

→ L'isométrie $\boldsymbol{t}_{\overline{A'A}} \circ \boldsymbol{f}$ peut être une réflexion s_Δ. (Au moins deux points fixes)

Composant par les deux membres de l'égalité par $\boldsymbol{t}_{\overline{AA'}}$, il nous arrive :

$$\boldsymbol{t}_{\overline{A'A}} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{s}_\Delta \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\boldsymbol{t}_{\overline{AA'}} \circ \boldsymbol{t}_{\overline{A'A}}}_{\boldsymbol{Id}} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}_{\overline{AA'}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}_{\overline{AA'}} \circ \boldsymbol{s}_\Delta$$

Là, deux options existent : soit $\boldsymbol{f}$ est une réflexion, soit $\boldsymbol{f}$ est une symétrie glissée.
N'ayant aucun point fixe, $\boldsymbol{f}$ ne peut pas être la première mais peut être la seconde
Donc $\boldsymbol{f}$ est une symétrie glissée.

→ L'isométrie $\boldsymbol{t}_{\overline{A'A}} \circ \boldsymbol{f}$ peut être une rotation $\boldsymbol{r}_{C,\alpha}$. (Un seul point fixe).

Là encore, nous allons composer les deux membres de l'égalité par $\boldsymbol{t}_{\overline{AA'}}$. Il vient :

$$\boldsymbol{t}_{\overline{A'A}} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{r}_{C,\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\boldsymbol{t}_{\overline{AA'}} \circ \boldsymbol{t}_{\overline{A'A}}}_{\boldsymbol{Id}} \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}_{\overline{AA'}} \circ \boldsymbol{r}_{C,\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{t}_{\overline{AA'}} \circ \boldsymbol{r}_{C,\alpha}$$

En tant que composée d'une translation et d'une rotation, $\boldsymbol{f}$ est donc une rotation.
Cependant $\boldsymbol{f}$ n'a aucun point fixe. Ce ne peut donc être une rotation. Donc bug !

Conclusion : Une isométrie sans point fixe est soit une translation, soit une symétrie glissée.

Ayant passé en revue tous les cas possibles quant au nombre de points fixes que peut avoir une isométrie, nous savons désormais qu'il n'existe pas d'autres isométries que celles que nous connaissions. Notre voyage touche à sa terme. Le pays des isométries est conquis

Les différentes ethnies du pays d'isométries

Si $\boldsymbol{f}$ est une isométrie alors :

- Si $\boldsymbol{f}$ n'a aucun point fixe alors $\boldsymbol{f}$ est soit une translation, soit une symétrie glissée.
- Si $\boldsymbol{f}$ a un unique point fixe alors $\boldsymbol{f}$ est une rotation.
- Si $\boldsymbol{f}$ a au moins deux points fixes et que tous sont alignés alors $\boldsymbol{f}$ est une réflexion.
- Si $\boldsymbol{f}$ a au moins trois fixes non alignés alors $\boldsymbol{f}$ est l'application identique.

Hormis ces cinq espèces, il n'existe pas d'autre type d'isométrie. Ainsi est ce fameux pays des isométries...