A propos de ce qui suit...

Une équation différentielle est une égalité liant une fonction et une, voire plusieurs de ses dérivées. Dans une précédente aventure, nous avons déjà été amené à nous intéresser au cas des équations différentielles linéaires du premier ordre. Pour cette seconde aventure, nous allons aborder les équations différentielles d'ordre supérieur.

Nous commencerons notre épopée avec celles du second ordre. Dans un louable souci de ne pas aller trop vite, nous débuterons par les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants, c'est-à-dire celles de la forme $y''+a.y'+b.y=0$.

D'un peu de théorie, nous enchaînerons sur de la pratique en résolvant quelques équations du second ordre plus complexes.

Enfin, nous achèverons notre aventure en évoquant ce qui passe pour les équations différentielles d'ordre supérieur.

Voilà quelle sera notre quête!

Avant d'entamer les hostilités, précisons que nous allons naviguer dans des contrées situées bien au-delà du BAC. A présent, il ne nous reste plus qu'à nous embarquer pour l'aventure, celles des équations différentielles linéaires, au-delà du premier ordre...

Au sommaire :

A propos de ce qui suit... 1
A propos des équations différentielles y'' + a.y' + b.y = 0. 2
Vers une solution particulière... 2
Les solutions de l'équation caractéristique X² + a.X + b = 0. 2
Et les autres solutions ? 2
La tronche de certaines solutions. 4
Ce qu'il faut retenir de tout ce qui a été fait ! 5
Du théorème à la pratique. 5
Des équations moins homogènes : y'' + a.y' + b.y = c(x). 7
Le début de chaque résolution. 7
Une première résolution : y'' - y' - 6.y = 7. 7
Une équation plus compliquée : résolution de 4.y'' - 12.y' + 9.y = x. 8
Résolution d'une grande classique : y'' + y = cos(x). 9
En guise de conclusion... 11
Des équations différentielles au-delà du second ordre. 12
Quelques briques pour établir la théorie. 12
Du théorème à la pratique. 13
Epilogue : à propos des équations linéaires non homogènes. 14

La taverne de l'Irlandais

vous présente

Le fabuleux destin des équations différentielles linéaires :

Au-delà du premier ordre...

racompté par Jérôme ONILLON

A propos des équations différentielles y'' + a.y' + b.y = 0.

Devant commencer par quelque chose, autant s'attaquer à quelque chose facile. Tout du moins, à ce qui semble l'être le plus.
Nous allons essayer de déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre qu'est :

$$y''+a.y'+b.y=0$$

où a et b sont deux réels fixés. De plus, nous supposerons qu'ils ne peuvent être nuls simultanément et que b est nécessairement non nul.

Ce qui a été fait avec les équations de même type du premier ordre, n'est pas reproductible ici.
Ceux qui étaient avec nous dans notre première aventure se souviennent certainement que toutes les solutions d'une équation différentielle du premier ordre du type $y'+a.y=0$ sont à base d'exponentielle. Plus exactement, elles sont toutes de la forme : $constante \times e^{-a.x}$.
De fait, une question s'impose : l'équation différentielle $y''+a.y'+b.y=0$ a-t-elle des solutions de cette forme là, c'est-à-dire de la forme $e^{k.x}$?
Et si oui, à quoi est égal ce coefficient k ?

Vers une solution particulière...

Supposons que la fonction $\psi(x)=e^{k.x}$ soit une solution de l'équation différentielle $y''+a.y'+b.y=0$. Pour tout réel x, nous avons donc que :

$$\psi''(x)+a.\psi'(x)+b.\psi(x)=0$$

$$k^2.e^{k.x}+a.k.e^{k.x}+b.e^{k.x}=0$$

$$e^{k.x}.\left[k^2+a.k+b\right]=0$$

Une exponentielle est toujours non nulle

$$k^2+a.k+b=0$$

Ainsi donc, pour que $\psi(x)=e^{k.x}$ soit solution de l'équation différentielle $y''+a.y'+b.y=0$, il faut et il suffit que k soit solution de l'équation du second degré $X^2+a.X+b=0$.
Voilà qui est intéressant !

Les solutions de l'équation caractéristique X² + a.X + b = 0.

Justement, venons-en à l'équation du second degré $X^2+a.X+b=0$.
On dit qu'elle est <u>l'équation caractéristique</u> associée à l'équation différentielle $y''+a.y'+b.y=0$.

Son discriminant est $\Delta=a^2-4.b$.
Suivant le signe de ce dernier, l'équation admet une ou deux solutions.

- Si Δ est positif alors l'équation admet deux solutions réelles $k'=\dfrac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $k''=\dfrac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$.
- Si Δ est égal à 0 alors l'équation admet une seule solution réelle $k'=-\dfrac{a}{2}$.
- Si Δ est négatif alors l'équation admet deux solutions complexes et conjuguées $k'=\alpha+i.\beta$ et $k''=\alpha-i.\beta$ où $\alpha=-\dfrac{a}{2}$ et $\beta=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}=\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

Dans les premier et troisième cas, nous avons que : $k'+k''=-a$.
Par la suite, nous serons amenés à réutiliser cette égalité.

Et les autres solutions ?

Pour l'instant, la seule chose que nous sachions est :

Si k est une solution de l'équation $X^2+a.X+b=0$ alors $\psi(x)=e^{k.x}$ est une solution de l'équation différentielle $y''+a.y'+b.y=0$

Et les autres solutions ? Eh bien, nous allons chercher à les exprimer en fonction $e^{k.x}$.

Soit donc f une solution de l'équation différentielle $y''+a.y'+b.y=0$.
Nous noterons D_f son ensemble de définition.

Une exponentielle étant toujours non nulle (même lorsqu'elle est complexe), il est donc toujours possible de diviser f(x) par $e^{k.x}$.

Pour tout réel x de l'ensemble D_f, on définit donc la fonction g par :

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^{k.x}} \Leftrightarrow f(x)=e^{k.x}.g(x)$$

Voilà qui rappellera bien des choses à ceux qui étaient avec nous dans notre première aventure différentielle !
Là encore, notre but va être de déterminer la fonction g.

Héritant des propriétés de l'exponentielle et de f, cette fonction g est donc deux fois dérivable. D'ailleurs, on montre que :

- $f'(x)=k.e^{k.x}.g(x)+e^{k.x}.g'(x)$
- $f''(x)=k^2.e^{k.x}.g(x)+2.k.e^{k.x}.g'(x)+e^{k.x}.g''(x)$

Comme f est une solution de l'équation différentielle $y''+a.y'+b.y=0$ alors nous pouvons écrire que :

$$f''(x)+a.f'(x)+b.f(x)=0$$

$$k^2.e^{k.x}.g(x)+2.k.e^{k.x}.g'(x)+e^{k.x}.g''(x)+a.\left[k.e^{k.x}.g(x)+e^{k.x}.g'(x)\right]+b.e^{k.x}.g(x)=0$$

$$e^{k.x}.\left[(2.k+a).g'(x)+g''(x)\right]+e^{k.x}.g(x).\underbrace{\left[k^2+a.k+b\right]}_{\text{=0 car } k \text{ solution d'une certaine équation...}}=0$$

Là encore, une exponentielle n'est jamais nulle

$$e^{k.x}.\left[(2.k+a).g'(x)+g''(x)\right]=0$$

$$(2.k+a).g'(x)+g''(x)=0$$

Là deux cas se présentent suivant la nullité de $2.k+a$:

- Si $2.k+a$ est égal à 0 alors nous avons que $k=-\frac{a}{2}$.

  Cela veut dire que l'équation caractéristique $X^2+a.X+b=0$ a un discriminant nul et une seule solution. En tout cas, $g''(x)=0$
  Après une double intégration, il vient : $g(x)=C_1.x+C_2$.
  Donc $\forall x\in D_f,\quad f(x)=e^{k.x}.g(x)=e^{k.x}.\left[C_1.x+C_2\right]$

- Si $2.k+a$ est différent de 0 alors l'équation caractéristique $X^2+a.X+b=0$ a deux solutions distinctes. Nous en connaissons une en la personne de k. Nous appellerons l'autre k'.

  De plus, nous nous retrouvons donc face à une équation différentielle du premier degré que nous savons résoudre.
  En effet, toutes les solutions de l'équation différentielle $(2.k+a).g'(x)+g''(x)=0$ sont de la forme :

  $$g'(x)=Constante.e^{-(2.k+a).x}.$$

  Pour ce qui concerne la fonction g, il vient donc que :

  $$g(x)=C_1.e^{-(2.k+a).x}+C_2$$

  où C_1 et C_2 sont des nombres complexes fixés (voir remarques).
  Revenons à la fonction f. Nous pouvons donc écrire que pour tout réel x de l'ensemble D_f, nous avons :

  $$f(x)=e^{k.x}.g(x)$$
  $$=e^{k.x}.\left[C_1.e^{-(2.k+a).x}+C_2\right]=C_1.e^{-(k+a).x}+C_2.e^{k.x}$$

  Vu que $k+k'=-a$, il vient : $\forall x\in D_f,\ f(x)=C_1.e^{k'.x}+C_2.e^{k.x}$

A propos de la complexité des racines, des constantes et du reste...
Nous sommes dans le cas où l'équation caractéristique a deux solutions distinctes k et k'. Ces deux solutions peuvent être réelles (discriminant positif) ou complexes (Δ négatif).
Ayant défini l'exponentielle d'un imaginaire pur, étendre l'exponentielle au corps des complexes ne pose aucun problème. En effet, l'exponentielle du nombre complexe $a+i.b$ est : $e^{a+i.b}=e^a.e^{i.b}=e^a.\left[\cos(b)+i.\sin(b)\right]$

De même, nous avons dit que les constantes C_1 et C_2 étaient des nombres complexes. Pourquoi n'avons-nous pas dit qu'elles étaient réelles ?
En fait, ces deux constantes sont réelles lorsque les deux racines k et k' le sont aussi. C'est-à-dire lorsque le discriminant est positif.
Par contre, lorsque le discriminant est négatif, c'est-à-dire lorsque les deux solutions k et k' sont complexes alors les deux constantes sont aussi complexes.

Cela tient au fait qu'une primitive de $e^{-(2.k+a).x}$ est $\frac{-1}{2.k+a}e^{-(2.k+a).x}$.

Or nous avons fait absorber le nombre $\frac{-1}{2.k+a}$ par la constante C_1.

Lorsque k est un réel (discriminant positif), il en va de même pour la fraction.
Par contre, lorsque k est un complexe non réel alors la fraction $\frac{-1}{2.k.+a}$ est aussi un nombre complexe. Il en va alors de même pour les constantes.
Ce qu'il ne faut pas perdre de vue, c'est que nous recherchons des fonctions y qui sont définies sur un intervalle réel. Mais ces fonctions (comprenez y(x)) peuvent prendre des valeurs réelles ou complexes.
Précisons que beaucoup de fonctions rencontrées sur ℝ peuvent être étendues au corps de complexe ℂ. De dérivables, elles deviennent alors holomorphes...

Récapitulons ce que nous venons de découvrir :

Un premier théorème : On considère l'équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre $y''+a.y'+b.y=0$.
$X^2+a.X+b=0$ est appelée équation caractéristique de cette première.
On note Δ son discriminant.

- Si $\Delta=0$ alors l'équation caractéristique admet une seule solution k.
  Toutes les solutions de l'équation différentielle sont alors de la forme $e^{k.x}.\left[C_1..x+C_2\right]$ où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.
- Si $\Delta\neq 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes k et k'.
  Toutes les solutions de l'équation différentielle sont alors de la forme $C_1.e^{k.x}+C_2.e^{k'.x}$ où C_1 et C_2 sont deux constantes complexes.

Remarque : toutes les solutions sont définies sur ℝ tout entier.

Pour important qu'il soit, ce théorème n'en demeure pas moins insatisfaisant notamment dans son second point. En effet, ce qui nous intéresse, ce sont les solutions de l'équation différentielle à valeurs réelles. Alors s'il était possible de s'abstenir de travailler avec les constantes complexes C_1 et C_2, nul ne s'en plaindrait ! Allons donc plus avant !
Lorsque le discriminant est positif, il est évident que les constantes C_1 et C_2 sont des nombres réels à l'instar des deux racines k et k'. En effet, tout se passe dans ℝ.
C'est lorsque le discriminant est négatif et que les deux racine k et k' sont complexes que les choses se gâtent !
Ce qui est sûr alors, c'est que les deux constantes C_1 et C_2 sont des nombres complexes. Essayons de voir si elles ne sont pas mieux que cela.

La tronche de certaines solutions.

Dans cette partie, l'équation caractéristique $X^2+a.X+b=0$ est donc réputée avoir un discriminant négatif. Cela implique donc qu'elle a deux racines complexes et conjuguées $k=\alpha+i.\beta$ et $k'=\alpha-i.\beta$.
Nous allons nous attacher à rendre plus simple l'expression des solutions.
Justement, si f est solution de l'équation différentielle $y''+a.y'+b.y=0$ alors cela signifie qu'elle est de la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1.e^{k.x}+C_2.e^{k'.x} \\ &= C_1.e^{(\alpha+i.\beta).x}+C_2.e^{(\alpha-i.\beta).x} = e^{\alpha.x}.\left[C_1.e^{i.\beta}+C_2.e^{-i.\beta.x}\right] \end{aligned}$$

Les solutions qui nous intéressent, sont celles à valeurs réelles.
D'un point de vue complexe, il nous importe donc que la partie imaginaire de f(x) soit nulle. Venons-en à cette dernière :
Pour tout réel x, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left(f(x)\right) &= e^{\alpha.x}.\left[\mathrm{Im}\left(C_1.e^{i.\beta}\right)+\mathrm{Im}\left(C_2.e^{-i.\beta.x}\right)\right] \\ &= e^{\alpha.x}.\left[\mathrm{Re}\left(C_1\right).\sin(\beta)+\mathrm{Im}\left(C_1\right).\cos(\beta)\right. \\ &\qquad \left.+\mathrm{Im}\left(C_2\right).\cos(\beta)-\mathrm{Re}\left(C_2\right).\sin(\beta)\right] \end{aligned}$$

Nous l'avons annoncé : nous voulons que cette partie imaginaire soit toujours nulle. En particulier, nous voulons donc que :

- $\mathrm{Im}\left(f(0)\right)=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(C_1\right)+\mathrm{Im}\left(C_2\right)=0$
  Les constantes C_1 et C_2 ont des parties imaginaires opposées.
- $\mathrm{Im}\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(C_1\right)-\mathrm{Re}\left(C_2\right)=0$.
  Les constantes C_1 et C_2 ont des parties réelles égales.

Les constantes complexes C_1 et C_2 sont donc conjuguées, comme les racines k et k'. Cela va nous permettre de simplifier l'expression de f(x) et surtout d'éliminer cette affreuse exponentielle complexe !

Appelons A et B les parties réelles et imaginaires du complexe C_1.
Nous avons donc que : $C_1 = A + i.B$ et $C_2 = A - i.B$.
De plus, pour tout réel x, nous pouvons écrire que :

$$f(x) = e^{\alpha.x}.\left[A.\cos(\beta.x) - B.\sin(\beta.x) + A.\cos(\beta.x) - B.\sin(\beta.x)\right]$$

$$= e^{\alpha.x}.\left[\textit{constante}.\cos(\beta.x) + \textit{autre constante}.\sin(\beta.x)\right]$$

Voilà qui une bien sympathique expression !

Après tant d'épreuves et de tracas, nous pouvons à présent conclure cette quête par un théorème plus que complet !

Ce qu'il faut retenir de tout ce qui a été fait !

Le théorème fondamental.
On considère l'équation différentielle linéaire $y'' + a.y' + b.y = 0$.

Δ est le discriminant de l'équation caractéristique $X^2 + a.X + b = 0$.

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une seule solution réelle k.
  Toutes les solutions de l'équation différentielle sont alors de la forme $e^{k.x}.\left[C_1.x + C_2\right]$.
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles et distinctes k et k'.
  Toutes les solutions de l'équation différentielle sont alors de la forme $C_1.e^{k.x} + C_2.e^{k'.x}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes et conjuguées $\alpha + i.\beta$ et $\alpha - i.\beta$.
  Toutes les solutions de l'équation différentielle sont alors de la forme $e^{\alpha.x}.\left[C_1.\cos(\beta.x) + C_2.\sin(\beta.x)\right]$.

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

Ce sont les conditions initiales de l'équation différentielle qui donnent leurs valeurs aux constantes C_1 et C_2.

Note : si l'inconnue de l'équation caractéristique est **X**, c'est pour éviter toute confusion avec la variable **x**.

Du théorème à la pratique.

Rien ne remplaçant l'action, nous allons nous livrer à la résolution de trois équations différentielles linéaires du second ordre qui nous permettrons d'utiliser notre théorème.

- Résolvons l'équation différentielle $\begin{cases} y'' - y' - 6.y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

  La première chose à faire est de calculer le discriminant de l'équation caractéristique $X^2 - X - 6 = 0$. Ce dernier est égal à 25.
  Cette dernière admet donc deux solutions réelles et distinctes que sont $k = -2$ et $k' = 3$.
  Toutes les solutions f de l'équation différentielle sont donc de la forme $f(x) = C_1.e^{-2.x} + C_2.e^{3.x}$.
  A présent, ce sont les conditions initiales qui vont entrer en scène.
  Préalablement, remarquons que $f'(x) = -2.C_1.e^{-2.x} + 3.C_2.e^{3.x}$
  Si f est solution de l'équation différentielle alors nous avons :

  $$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1.e^{-2\times 0} + C_2.e^{3\times 0} = 2 \\ -2.C_1.e^{-2\times 0} + 3.C_2.e^{3\times 0} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -2.C_1 + 3.C_2 = 1 \end{cases}$$

  Résolvant ce système, il vient que $C_1 = 1$ et $C_1 = 2$.
  Conclusion : la seule solution de l'équation différentielle proposée est la fonction $f(x) = e^{-2.x} + e^{3.x}$.

En procédant de même, on peut résoudre n'importe quelle équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants du second ordre. A chaque fois, c'est la même histoire : application du théorème, puis résolution d'un système découlant des conditions initiales et qui donnent les deux constantes C_1 et C_2.

Ainsi, pouvons-nous dire que :

- L'équation différentielle $\begin{cases} 4.y''-12.y'+9.y=0 \\ y(0)=2 \\ y(1)=1 \end{cases}$ admet une seule solution en la personne de $f(x)=e^{\frac{3}{2}.x}.\left[\left(e^{-3/2}-2\right).x+2\right]$.

  Ceci car l'équation caractéristique $4.X^2-12.X+9=0$ a un discriminant nul et admet par conséquent une seule solution : $\frac{3}{2}$.

- L'unique solution de l'équation différentielle $\begin{cases} y''-4.y'+5.y=0 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=1 \end{cases}$ est la fonction $f(x)=e^{2.x}.\left[2.\cos(3.x)-3.\sin(x)\right]$.

  Ceci car l'équation caractéristique $X^2-4.X+5=0$ a un discriminant négatif et donc, admet deux solutions complexes et conjuguées que sont $\underbrace{2}_{\alpha}\pm \boldsymbol{i}\times\underbrace{1}_{\beta}$.

Ce sont là, les trois types d'équation différentielle linéaire homogène (sans second membre) à coefficients constants du second ordre que l'on peut être amené à traiter.
La suite de notre aventure nous fera rencontrer des spécimen beaucoup moins sympas !

Note : *une chose que vous avez peut-être remarqué est la simplicité des conditions initiales. Point d'égalité exotique. Tout cela afin de favoriser notre progression. Cela étant dit, il est certain que si nous avions eu y(2) = 3 et y'(7) = 2 alors les constantes n'auraient pas eu des têtes très sympathiques. En tout cas, les calculs n'auraient pas été aussi faciles.*

Des équations moins homogènes : y'' + a.y' + b.y = c(x).

Dans le paragraphe précédent, les équations différentielles linéaires que nous avons été amenées à considérer, avaient des coefficients constants et étaient homogènes, c'est-à-dire que leur second membre était 0.
Nous allons à présent nous intéresser à des équations moins homogènes où le second membre est une fonction continue.
A défaut de nous lancer comme précédemment dans une vaste étude théorique, nous nous contenterons ici de résoudre trois équations particulières.

Le début de chaque résolution.

Les trois résolutions débutant de la même façon, nous allons faire un brin de cas général à partir duquel nous enchaînerons sur nos trois cas particuliers.
Pour remplir nos trois missions, nous allons réutiliser une méthode qui a déjà fait ses preuves : la méthode de variation des constantes.
Détaillons ce qu'est le début de chacune des trois résolutions.
Au départ, il y a une équation différentielle du type $y''+a.y'+b.y=c(x)$ où c est une fonction continue.

Soit f une solution particulière de l'équation différentielle homogène associée $y''+a.y'+b.y=0$. De façon à pouvoir diviser par f(x), nous supposerons que cette solution f qui ne s'annule jamais.
Comme cela a déjà été fait, il est alors possible d'écrire toute solution g de l'équation $y''+a.y'+b.y=c(x)$ sous la forme :

$$\text{Pour tout réel } x\in D_g,\quad g(x)=h(x).f(x)$$

L'objectif est alors de chercher à déterminer h pour connaître g.
Pour ce faire, nous pouvons écrire que pour tout réel x de D_g :

- $g'(x)=h'(x).f(x)+h(x).f'(x)$
- $g''(x)=h''(x).f(x)+2.h'(x).f'(x)+h(x).f''(x)$

Comme g est une solution de l'équation différentielle initiale alors pour tout réel x de D_g :

$$g''(x)+a.g'(x)+b.g(x)=c(x)$$

Autrement écrit :

$$h''(x).f(x)+2.h'(x).f'(x)+h(x).f''(x)$$
$$+a.\left[h'(x).f(x)+h(x).f'(x)\right]+b.h(x).f(x)=c(x)$$

$$h''(x).f(x)+2.h'(x).f'(x)$$
$$+a.h'(x).f(x)+h(x).\underbrace{\left[f''(x)+a.f'(x)+b.f(x)\right]}_{\substack{=0 \text{ car } f \text{ solution}\\ \text{de l'équation homogène}}}=c(x)$$

$$h''(x).f(x)+h'(x).\left[2.f'(x)+a.f(x)\right]=c(x)$$

C'est à partir de cette dernière forme de l'équation différentielle que nous entamerons chacune des trois résolutions à venir.

Une première résolution : y'' - y' - 6.y = 7.

Résolvons l'équation différentielle linéaire $\begin{cases} y''-y'-6.y=7\\ y(0)=1\\ y'(0)=1\end{cases}$.

Respectant la stratégie énoncée dans notre petite introduction, nous devons d'abord nous intéresser à l'équation homogène $y''-y'-6.y=0$.
Ceux qui étaient avec nous à la fin du précédent paragraphe, reconnaîtront là un cas déjà traité.
D'emblée, nous pouvons dire que toutes les solutions de cette équation homogène sont de la forme $C_1.e^{-2.x}+C_2.e^{3.x}$.
Notre manoeuvre exige de retenir une fonction f qui soit solution de l'équation homogène et qui ne s'annule jamais.
Nous décidons de porter notre dévolu sur la fonction $f(x)=e^{3.x}$.

f ne s'annulant jamais, il est donc possible d'écrire toute solution g de l'équation sous la forme $g(x)=h(x).e^{3.x}$.
Et finalement, reprenant le cheminement de notre introduction, on aboutit à l'égalité.

$$h''(x).e^{3.x}+h'(x).\left[6.e^{3.x}-e^{3.x}\right]=7$$

C'est ici que démarre réellement cette résolution.

Pour tout réel x de l'ensemble D_g, on peut écrire que :

Une exponentielle réelle est toujours positive...

$$e^{3.x}.\left[h''(x)+5.h'(x)\right]=7$$

$$h''(x)+5.h'(x)=\frac{7}{e^{3.x}}=7.e^{-3.x}$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre.
Pour résoudre cette équation, il nous faut au préalable préciser deux choses :

- Une primitive de $a(x)=5$ est $A(x)=5.x$.
  Note : *nous reprenons les notations du théorème vu dans cette page.*
- Une primitive de $\dfrac{b(x)}{e^{-A(x)}}=\dfrac{7.e^{-3.x}}{e^{-5.x}}=7.e^{2.x}$ est $\dfrac{7}{2}.e^{2.x}$

Pour tout réel x de D_g, nous avons donc que :

$$h'(x)=e^{-5.x}.\left[\frac{7}{2}.e^{2.x}+\mathit{constante}\right]=\frac{7}{2}.e^{-3.x}+\mathit{constante}.e^{-5.x}$$

D'où en intégrant :

$$h(x)=-\frac{7}{6}.e^{-3.x}+\frac{\mathit{constante}}{-5}.e^{-5.x}+\mathit{autre\ constante}$$

$$=-\frac{7}{6}.e^{-3.x}+C_1.e^{-5.x}+C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes complexes (voire réelles) que les conditions initiales nous permettront de déterminer ! Mais n'allons pas trop vite ! Ce qui importe d'abord, est d'obtenir l'expression de g(x).
Il vient donc que :

$$g(x)=h(x).e^{3.x}=-\frac{7}{6}+C_1.e^{-2.x}+C_2.e^{3.x}$$

Passons aux constantes C_1 et C_2. Les deux conditions initiales nous permettent d'écrire que :

- $g(0)=1 \Leftrightarrow -\dfrac{7}{6}+C_1+C_2=1 \Leftrightarrow C_1+C_2=\dfrac{13}{6}$
- $g'(0)=1 \Leftrightarrow -2.C_1+3.C_2=1$

La résolution de ce système nous amène à $C_1=\dfrac{11}{10}$ et $C_2=\dfrac{16}{15}$.

Ce qui achève la résolution. Il ne reste plus alors qu'à conclure.

> ***Conclusion :*** L'équation différentielle admet une unique solution g qui est définie sur $\mathbb{R}$ par :
>
> $$g(x)=\frac{16}{15}.e^{3.x}+\frac{11}{10}.e^{-2.x}-\frac{7}{6}$$

Une équation plus compliquée : résolution de 4.y'' - 12.y' + 9.y = x.

Résolvons l'équation différentielle linéaire $\begin{cases}4.y''-12.y'+9.y=x\\ y(0)=1\\ y'(0)=1\end{cases}$.

Là encore, tout va reposer sur notre petit travail préparatoire et le choix d'une bonne solution f de l'équation homogène $4.y''-12.y'+9.y=0$.
Ayant déjà traité cette dernière, chacune de ses solutions est de la forme $C_1.e^{1,5.x}+C_2.x.e^{1,5.x}$.

S'il y a une fonction f à ne pas choisir, c'est bien $x.e^{1,5.x}$. En effet, celle-ci a la désagréable particularité de s'annuler en $x=0$. Ici comme pour nos deux autres exemples, le mieux est encore d'opter pour une solution à base d'exponentielle pure. On pose donc : $f(x)=e^{1,5.x}$.
La fonction f ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$, toute solution g de l'équation différentielle $4.y''-12.y'+9.y=x$ s'écrit donc sous la forme :

Pour tout réel x de l'ensemble D_g, $g(x)=h(x).f(x)$

Mais pour utiliser ce qui a été fait, il faut au préalable réécrire l'équation.

$$4.y''-12.y'+9.y=x \Leftrightarrow y''-3.y'+\frac{9}{4}.y=\frac{1}{4}.x$$

A présent, nous avons bien à faire à une équation de la forme $y''+a.y'+b.y=c(x)$. Les hostilités vont pouvoir reprendre là où elles s'étaient arrêtées dans notre petite introduction.

Pour tout réel x de D_g :

$$h''(x).e^{1,5.x} + h'(x).\left[3.e^{1,5.x} - 3.e^{1,5.x}\right] = \frac{1}{4}.x$$

C'est comme précédemment !

$$h''(x) = \frac{1}{4}.x.e^{-1,5.x}$$

Les bonnes âmes railleront mais la situation s'est quand même notablement simplifiée. Ici, point d'équation à résoudre. Nous aurons simplement une double intégration à faire.

Par une intégration par parties, on démontre qu'une primitive de $x.e^{a.x}$ est $e^{a.x}.\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)$. (Les "économes" dériveront la primitive supposée...)

Pour tout réel x, nous avons donc :

$$h'(x) = \frac{1}{4}.\left[e^{-1,5.x}.\left(-\frac{2}{3}.x - \frac{4}{9}\right)\right] + constante$$

$$= -\frac{1}{6}.x.e^{-1,5.x} - \frac{1}{9}.e^{-1,5.x} + constante$$

Et en intégrant encore un tour, il vient que :

$$h(x) = -\frac{1}{6}.e^{-1,5.x}.\left(-\frac{2}{3}.x - \frac{4}{9}\right) - \frac{1}{9}.\frac{-2}{3}.e^{-1,5.x} + C_1.x + C_2$$

$$= \frac{1}{9}.x.e^{-1,5.x} + \frac{4}{27}.e^{-1,5.x} + C_1.x + C_2$$

Pour ce qui concerne la solution g, nous pouvons donc écrire :

$$g(x) = h(x).e^{1,5.x} = \frac{1}{9}.x + \frac{4}{27} + C_1.x.e^{1,5.x} + C_2.e^{1,5.x}$$

A présent, il nous reste à trouver les deux constantes C_1 et C_2. Comme toujours ce sont les conditions initiales qui vont nous permettre de régler le problème.
Avant ceci, nous devons calculer la dérivée de g.

$$g'(x) = \frac{1}{9} + C_1.\left[1,5.x.e^{1,5.x} + e^{1,5.x}\right] + 1,5.C_2.e^{1,5.x}$$

Exploitons les conditions initiales :

- $g(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{27} + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = \frac{23}{27}$
- $g'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + C_1 + 1,5.\frac{23}{27} = 1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{-7}{18}$

Conclusion : l'équation différentielle admet une unique solution g qui est définie sur par :

$$g(x) = \frac{1}{9}.x + \frac{4}{27} - \frac{7}{18}.x.e^{1,5.x} + \frac{23}{27}.e^{1,5.x}$$

Résolution d'une grande classique : y'' + y = cos(x).

Résolvons l'équation différentielle linéaire $\begin{cases} y''+y = \cos(x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

Afin de réutiliser ce qui a été fait dans l'entête, il nous faut trouver une solution f de l'équation homogène $y''+y = 0$ qui ne s'annule jamais..

Les deux solutions de l'équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ sont $-i$ et i.
En application d'un précédent théorème, nous pourrions dire que toute les solutions f de la forme $f(x) = C_1.\cos(x) + C_2.\sin(x)$.
Et en particulier, parmi ces solutions, il y a les fonctions sinus et cosinus.
L'inconvénient de ces deux dernières est qu'elles s'annulent sur $\mathbb{R}$. Il nous faut donc trouver d'autres qui n'ont pas ce défaut.
Le salut va venir du premier théorème que nous ayons vu !

i étant une solution de l'équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$, la fonction $e^{i.x}$ est une solution de l'équation homogène $y''+y = 0$. De plus, elle a le bon goût de ne jamais s'annuler sur $\mathbb{R}$.
Des esprits chagrins railleront qu'elle est à valeurs complexes.
Oui et après ? Au lieu de travailler dans $\mathbb{R}$, nous déborderons sur $\mathbb{C}$.
Nous décrétons donc que la fonction f est définie pour tout réel x, par :

$$f(x) = e^{i.x}$$

Suivant ce qui a été dit dans l'entête, toute solution g de l'équation $y''+y=\cos(x)$ peut donc s'écrire sous la forme $g(x)=h(x).\underbrace{e^{i.x}}_{f(x)}$.

Pour tout réel x de l'ensemble D_g, nous pouvons donc écrire :

$$h''(x).e^{i.x}+h'(x).\left[2i.e^{i.x}+\underbrace{0}_{a}\times e^{i.x}\right]=\cos(x)$$

Une exponentielle n'est jamais nulle...

$$e^{i.x}.\left[h''(x).+2i.h'(x)\right]=\cos(x)$$

$$h''(x).+2i.h'(x)=\frac{\cos(x)}{e^{i.x}}$$

Merci aux formules de Euler...

$$h''(x).+2i.h'(x)=\frac{1}{2}.\left(1+e^{-2i.x}\right)$$

Nous nous retrouvons face à une équation différentielle du premier ordre que nous savons résoudre ! Mais avant, deux choses doivent être dites.

- Une primitive de $a(x)=2i$ est $A(x)=2i.x$.
- Il faut déterminer une primitive de $\dfrac{b(x)}{e^{-A(x)}}=\dfrac{\frac{1}{2}.\left(1+e^{-2i.x}\right)}{e^{-2i.x}}$.

  Or pour tout réel x, $\dfrac{\frac{1}{2}.\left(1+e^{-2i.x}\right)}{e^{-2i.x}}=\dfrac{1}{2}.\left[e^{2i.x}+1\right]$

  Une primitive de $\dfrac{b(x)}{e^{-A(x)}}$ est donc $\dfrac{1}{2}.\left[\dfrac{1}{2.i}.e^{2i.x}+x\right]$.

Nous pouvons donc écrire que pour tout réel x :

$$h'(x)=e^{-2i.x}.\left[-\frac{i}{4}.e^{2i.x}+\frac{1}{2}.x+\textit{constante}\right]$$

$$=-\frac{i}{4}+\frac{1}{2}.x.e^{-2i.x}+\textit{constante}.e^{-2i.x}$$

Au moyen d'une intégration par parties, on montre qu'une primitive de $x.e^{a.x}$ est $e^{a.x}.\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{a^2}\right)$.

On peut donc écrire que pour tout réel x :

$$h(x)=-\frac{i}{4}.x+\frac{1}{2}.e^{-2i.x}.\left[\frac{x}{-2i}+\frac{1}{4}\right]+\frac{\textit{constante}}{-2i}.e^{-2i.x}+\textit{constante2}$$

$$=-\frac{i}{4}.x+\frac{i}{4}.x.e^{-2i.x}+C_1.e^{-2.i.x}+C_2$$

$$=\frac{i}{4}.x.\left[e^{-2i.x}-1\right]+C_1.e^{-2.i.x}+C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes complexes.

Quant à g(x), nous pouvons écrire que pour tout réel x :

$$g(x)=h(x).e^{i.x}$$

$$=\left[\frac{i}{4}.x.\left[e^{-2i.x}-1\right]+C_1.e^{-2.i.x}+C_2\right].e^{i.x}$$

$$=\frac{i}{4}.x.\left[e^{-i.x}-e^{i.x}\right]+C_1.e^{-i.x}+C_2.e^{i.x}$$

Re-Merci aux formules de Mister Euler...

$$=\frac{1}{2}.x.\frac{e^{i.x}-e^{-i.x}}{2.i}+C_1.e^{-i.x}+C_2.e^{i.x}$$

$$=\frac{1}{2}.x.\sin(x)+C_1.e^{-i.x}+C_2.e^{i.x}$$

Il nous faut à présent déterminer les constantes C_1 et C_2. Ce sont les conditions initiales qui vont nous y aider !

Nous savons que :

- Pour la première condition initiale :
  $g(0)=1 \Leftrightarrow C_1+C_2=1$
- Pour la seconde condition initiale :
  Comme $g'(x)=\dfrac{1}{2}.\left[x.\cos(x)+\sin(x)\right]-i.C_1.e^{-i.x}+i.C_2.e^{i.x}$ alors
  $g'(0)=1 \Leftrightarrow -i.C_1+i.C_2=1$

Le système $\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -i.C_1+i.C_2=1 \end{cases}$ ayant un déterminant non nul, admet une seule solution. Après calculs, on trouve :

$$C_1=1=0,5+0,5.i \text{ et } C_2=1=0,5-0,5.i$$

Pour ce brave g(x), il en résulte alors que :

$$g(x) = \frac{1}{2}.x.\sin(x) + \underbrace{(0,5+0,5.i)}_{C_1}.e^{-i.x} + \underbrace{(0,5-0,5.i)}_{C_2}.e^{i.x}$$

$$= \frac{1}{2}.x.\sin(x) + \frac{e^{i.x}+e^{-i.x}}{2} + \frac{e^{i.x}-e^{-i.x}}{2i}$$

Merci à Euler...

$$= \frac{1}{2}.x.\sin(x) + \cos(x) + \sin(x)$$

Ce qui achève la résolution de l'équation différentielle.

Conclusion : l'unique solution de l'équation $\begin{cases} y''+y=\cos(x) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$ est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \sin(x).\left[\frac{x}{2}+1\right] + \cos(x)$$

En guise de conclusion...

Pour conclure ce paragraphe de bonnes résolutions, nous dirons que si c est une fonction continue alors l'équation différentielle linéaire du second ordre $y''+a.y'+b.y = c(x)$ *(pour peu qu'elle soit compléter par deux conditions initiales)*, admet exactement une seule solution.

Le plus dur est encore de trouver cette unique solution !

Des équations différentielles au-delà du second ordre.

Pour achever cette si fantastique aventure dans le monde boulversifiant des équations différentielles linéaires, nous allons dire un mot sur ce qui se passe pour les équations différentielles faisant intervenir des dérivées troisième, quatrième voire pire.

Quelques briques pour établir la théorie.

Notre objectif est de résoudre des équations différentielles de la forme :

$$y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + a_{n-2}.y^{(n-2)} + ... + a_1.y' + a_0.y = 0$$

où :

- a_0, a_1 .... a_{n-2} et a_{n-1} sont des nombres réels fixés. Ce sont les coefficients de l'équation différentielle.
- La notation $y^{(n)}$ désigne la dérivée nième de la fonction y.
  Les dérivées y' et y'' peuvent aussi être notées $y^{(1)}$ et $y^{(2)}$.

Ce qui a été fait avec le second ordre, se généralise au-delà.
Pour résoudre l'équation différentielle $y''+a.y'+b.y=0$, on doit au préalable s'intéresser son équation caractéristique $X^2+a.X+b=0$. Le polynôme $X^2+a.X+b$ doit donc être entièrement factorisé.
De la même façon pour résoudre l'équation différentielle linéaire $y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + ... + a_1.y' + a_0.y = 0$, il faut au préalable factoriser son polynôme caractéristique $X^n + a_{n-1}.X^{n-1} + ... + a_1.X + a_0$.
Il faut totalement le casser, le scinder !

Les polynômes ont déjà fait l'objet d'une étude particulière. Rappelons quelques résultats utiles vus dans Polynômitude et Complexitudes.

- ***Si l'on se restreint à travailler dans le berceau réel $\mathbb{R}$.***
  Tous les polynômes à coefficients réels peuvent être "cassés" en des produits dont les facteurs sont soient des monômes de la forme $X-\alpha$, soient des trinômes du type $a.X^2+b.X+c$ qui ont un discriminant négatif.
  Pour plus de renseignements, se reporter à Polynômitude.
- ***Si l'on étend sa zone de manoeuvre à l'océan complexe $\mathbb{C}$.***
  Dans $\mathbb{C}$, tous les polynômes qu'ils aient des coefficients réels ou complexes, peuvent s'écrire sous la forme de produits dont les facteurs sont des monômes de la forme $X-\alpha$.
  Dans $\mathbb{C}$, tous les polynômes sont scindés.

Revenons à notre équation $y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + ... + a_1.y' + a_0.y = 0$.
Dans le corps des complexes $\mathbb{C}$, son polynôme caractéristique
$P(X) = X^n + a_{n-1}.X^{n-1} + ... + a_1.X + a_0$ est entièrement factorisable.
C'est-à-dire que l'on peut écrire que :
$P(X) = X^n + a_{n-1}.X^{n-1} + ... + a_1.X + a_0 = (X-\alpha_1).(X-\alpha_2)...(X-\alpha_n)$
où les nombres complexes (parfois réels) α_1, α_2,...., α_n sont les racines du polynôme P.
Pour éclairer notre propos, donnons quelques exemples :

- $X^3-3.X^2-4.X+12=(X+2).(X-2).(X-3)$.
  Les trois racines du polynôme sont -2, 2 et 3. Elles sont réelles.
  Comme elles n'apparaissent qu'une seule fois dans la forme factorisée, on dit qu'elles sont <u>simples</u> ou que leur <u>ordre de multiplicité</u> est égal à 1.
  Ce que l'on résume par : $\underbrace{m(2)}_{\text{Ordre de multiplicité de la racine 2.}} = 1$.
- $X^4-19.X^3+105.X^2-49.X-686=(X+2).(X-7)^3$.
  Là encore, toutes les racines du polynôme sont réelles. Elles sont au nombre de deux : -2 et 7.
  -2 est une racine simple alors que 7 est une racine triple. On résume ces deux faits en écrivant : $m(-2)=1$ et $m(7)=3$.
- $X^4-10.X^3+38.X^2-66.X+45=(X-3)^2.(X-2+i).(X-2-i)$
  Ce polynôme à coefficients réels a trois racines : une racine réelle double en la personne de 3 et deux racines complexes simples qui sont $2-i$ et $2+i$.
  On remarquera que les deux racines complexes sont conjuguées.

Ces trois exemples nous aident à nous faire une idée du problème. Précisons encore que les racines complexes ont aussi la faculté d'être doubles, triples voire pire !

A l'instar de ce que nous venons de faire, il est très rare que l'on répète plusieurs fois un même facteur dans l'écriture d'un produit. En lieu et place de $(X-7).(X-7).(X-7)$, on préférera toujours écrire $(X-7)^3$.
La puissance a été instituée pour noter ce genre d'auto-produit !
Appliquons ce précepte à la forme factorisée du polynôme caractéristique P. Désormais, nous écrirons que :

$$X^n + a_{n-1}.X^{n-1} + ... + a_1.X + a_0 = (X-\beta_1)^{m_1}.(X-\beta_2)^{m_2}....(X-\beta_p)^{m_p}$$

où :

- Les nombres complexes (parfois réels) $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p$ sont les racines du polynôme caractéristique P.
  On suppose qu'elles sont toutes deux à deux distinctes. En tout, P a donc p racines.
- L'entier naturel m_k est l'ordre de multiplicité de la racine β_k.
  Précisons que la somme de tous les ordres de multiplicité m_k est bien entendu égal au degré du polynôme P, c'est-à-dire à l'entier n.

Ayant dit toutes ces choses, nous pouvons énoncer le théorème qui nous permettra de résoudre n'importe quelle équation différentielle homogène à coefficients constants.

Du théorème à la pratique.

Théorème.
On appelle P le polynôme de l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + ... + a_1.y' + a_0.y = 0.$$

En reprenant les notations ci-contre, deux écritures de P sont :

$$P(X) = X^n + a_{n-1}.X^{n-1} + ... + a_1.X + a_0 \quad \leftarrow \textit{forme développée}$$

$$= (X-\beta_1)^{m_1}.(X-\beta_2)^{m_2}....(X-\beta_p)^{m_p} \quad \leftarrow \textit{forme factorisée}$$

Le polynôme P a donc p racines complexes (peut-être réelles) β_k dont l'ordre de multiplicité est l'entier m_k.

Toutes les solutions f de l'équation différentielle linéaire d'ordre n $y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + ... + a_1.y' + a_0.y = 0$ sont de la forme :

$$f(x) = Q_1(x).e^{\beta_1.x} + ... + Q_p(x).e^{\beta_p.x}$$

où chaque $Q_k(x)$ est un polynôme à coefficients complexes (peut-être réels) dont le degré est strictement inférieur à l'ordre de multiplicité m_k de la racine β_k.

Il s'agit là d'un théorème d'un fort beau gabarit. Pour mieux en comprendre l'intérêt et l'usage, nous devons cependant en donner quelques exemples d'application.

- Depuis la dernière page, nous savons que :
  $$X^3 - 3.X^2 - 4.X + 12 = (X+2).(X-2).(X-3)$$
  Donc les solutions f de l'équation différentielle du troisième ordre $y''' - 3.y'' - 4.y' + 12 = 0$ sont toutes de la forme
  $$f(x) = C_1.e^{-2.x} + C_2.e^{2.x} + C_3.e^{3.x}$$
  où C_1, C_2 et C_3 sont trois constantes réelles dont les valeurs sont données par trois conditions initiales.

Note : une constante peut être vue comme un polynôme de degré 0, c'est-à-dire de degré strictement inférieur à 1.

- Nous avons également vu que :

  $$X^4 - 19.X^3 + 105.X^2 - 49.X - 686 = (X+2).(X-7)^3$$

  Donc les solutions f de l'équation différentielle du quatrième ordre $y^{(4)} - 19.y''' + 105.y'' - 49.y' - 686.y = 0$ sont de la forme :

  $$f(x) = C_1.e^{-2.x} + \underbrace{\left(C_2.x^2 + C_3.x + C_4\right)}_{\text{Polynôme de degré strictement inférieur à } m(7)=3.}.e^{7.x}$$

  où C_1, C_2, C_3 et C_4 sont quatre constantes réelles qui seront déterminées par les conditions initiales.

- Enfin, il est notablement connu que :

  $$X^4 - 10.X^3 + 38.X^2 - 66.X + 45 = (X-3)^2.(X-2+i).(X-2-i)$$

  Les solutions f de l'équation différentielle du quatrième ordre $y^{(4)} - 10.y''' + 38.y'' - 66.y' + 45.y = 0$ sont toutes de la forme :

  $$f(x) = C_1.e^{(2-i).x} + C_2.e^{(2+i).x} + \underbrace{\left(C_3.x + C_4\right)}_{\text{Polynôme de degré strictement inférieur à } m(3)=2.}.e^{3.x}$$

  où C_1 et C_2 sont deux constantes complexes et conjuguées alors que leurs consoeurs C_3 et C_4 sont elles nécessairement réelles.

  En procédant de façon similaire à ce qui a été fait avec les équations du second ordre à discriminant négatif, on montre que f peut aussi s'écrire :

  $$f(x) = e^{2.x}.\left[C_1.\cos(x) + C_2.\sin(x)\right] + \left(C_3.x + C_4\right).e^{3.x}$$

  Sous cette forme, les quatre constantes sont toutes réelles.

  En somme, c'est l'introduction de racines complexes qui complexifie les constantes...

Epilogue : à propos des équations linéaires non homogènes.

Dans ce paragraphe, nous allons indiquer comment il est possible de résoudre des équations différentielles linéaires du type

$$y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + a_{n-2}.y^{(n-2)} + \ldots. + a_1.y' + a_0.y = b(x)$$

où :

- a_0, a_1 .... a_{n-2} et a_{n-1} sont des nombres réels fixés.
- b est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Là comme pour les premier et second ordre, tout repose sur la résolution de l'équation homogène $y^{(n)} + a_{n-1}.y^{(n-1)} + \ldots. + a_1.y' + a_0.y = 0$.

Comme pour les équations du second ordre, on choisit une solution f de cette équation homogène, qui ne s'annule jamais.

Comme $f(x)$ ne s'annule jamais, il est donc toujours possible de diviser par cette quantité.

En particulier toute solution g de l'équation différentielle initiale peut donc s'écrire sous la forme :

$$g(x) = h(x).\underbrace{f(x)}_{\textit{Jamais nul !}}$$

Le reste de la manoeuvre consiste alors à déterminer la fonction h pour obtenir g. Mais tout cela est une autre histoire...