

A propos de ces équations différentielles oubliées...

On aurait presque tendance à croire que l'univers des équations différentielles se limite à celles qui sont linéaires qu'elles soient du [premier](#) ou du [second](#) ordre. Seulement, au-delà de ces imposantes évidences existent d'autres réalités oubliées, d'autres équations que la volatilité de la mémoire a reléguées bien au-delà du regard. Par delà l'absence, les aléas et le temps, demeurent ces équations auxquelles nous allons consacrer ce troisième volet de nos aventures différentielles.

Empruntant les chemins de traverse, nous allons rencontrer et raconter les fabuleux destins de ces équations différentielles qu'elles soient à variables séparables, homogènes, de Bernoulli, Riccati ou Euler.

Suivant notre habitude, nous préférerons la pratique à la théorie, l'action aux grands discours. A chaque fois, nous essaierons de nous montrer plus astucieux que calculateurs.

A présent, prenez-vous par la main et embarquez avec nous pour les fabuleux destins de ces équations différentielles oubliées, bien au-delà du Bac. Par delà l'absence, les aléas et temps...

Au sommaire :

Avant tout : le théorème de Cauchy-Lipschitz. 2

Des équations différentielles à variables séparables 3

Le nombre de solution d'une équation à variables séparables.....3

Les équations différentielles linéaires homogènes du premier degré.....4

Un grand classique d'équation à variables séparables : $y' = \text{Exp}(x + y)$ 4

Le cas singulier des équations homogènes 5

Résolution de l'équation homogène $(x.y' - y)^2 = x^2 - y^2$5

Nos solutions au-delà de leur intervalle.....7

Deux solutions seules au monde ?8

La grandeur oubliée des équations de Bernoulli 9

Le nombre de solution d'une équation de Bernoulli9

Un exemple d'équation de Bernoulli : $y' = y + x.y^2$ 10

Résolution d'une équation de Bernoulli en général11

La merveilleuse destinée des équations de Riccati 13

Le nombre de solution d'une équation de Riccati13

Le principe de la résolution d'une équation de Riccati.....13

Un exemple d'équation de Riccati : $y' = 2x.y + y^2 + x^2 - 1$14

Notre exemple $y' = 2x.y + y^2 + x^2 - 1$ autrement...15

Une dernière carte : une équation d'Euler 16

Notre exemple d'équation d'Euler : $x^2.y'' + x.y' + y = 0$ 16

L'unicité de la solution $\cos[\ln(x)]$17

Et ailleurs ?19

La taverne de l'Irlandais

vous présente

Les fabuleux destins de ces équations différentielles oubliées

Le troisième volet de fabuleuses aventures racontées par Jérôme ONILLON et exclusivement distribué par la taverne de l'Irlandais
Document hypertexte imprimable créé avec Ghostword 2.10



*Edition du samedi 26 juillet 2003
Par delà les silences, les distances et les apparences...*

Avant tout : le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Avant d'entamer la composition de notre bouquet d'équations différentielles, nous allons combler un oubli : nous allons évoquer le fameux théorème de Cauchy-Lipschitz. Sa démonstration est largement hors de notre portée. En fait, c'est seulement son énoncé qui nous intéresse.

Théorème de Cauchy-Lipschitz.

I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et f est une fonction à valeurs réelles définie sur $I \times J$. Enfin, $(x_0; y_0)$ est un couple de réels de $I \times J$.

Si la fonction f est de classe C^1 sur $I \times J$ alors l'équation

différentielle $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale.

Pour étrange qu'il paraisse, Cet énoncé n'en est pas moins fondamental. Pour bien en saisir toute la portée, nous devons expliquer et préciser certaines choses.

- D'abord la fonction f est une fonction de deux variables. Schématiquement, il s'agit de la fonction

$$\begin{aligned} f &: I \times J \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(u, v) \longrightarrow f(u, v) \end{aligned}$$

En elle-même, cette fonction f n'est pas une nouveauté.

- Ensuite, il est dit que cette fonction f doit être de classe C^1 . Les gens ayant été très largement au-delà du Bac comprendront que la fonction f doit être différentiable sur $I \times J$ et que sa différentielle doit être continue.

Retenons que pour qu'une fonction f soit de classe C^1 , il faut et il suffit que ses dérivées partielles vis-à-vis des deux variables soient continues.

C'est par exemple le cas avec la fonction $f(u, v) = u^2 + v^2 \cdot e^u$. Cette fonction f peut être dérivée par rapport à la variable u .

$$\text{Il vient alors : } \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = f'_u(u, v) = 2 \cdot u - v^2 \cdot e^u.$$

La variable se comporte alors comme une constante quelconque. De même, la fonction f peut-être dérivée par rapport à v .

$$\text{Il vient : } \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = f'_v(u, v) = 2 \cdot v \cdot e^u$$

Ses deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$ étant continues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

la fonction f est donc de classe C^1 sur cet ensemble.

- Enfin, expliquons ce qu'est une solution maximale unique. La première chose à dire est qu'une solution φ de l'équation

différentielle $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ est au mieux définie sur l'intervalle

I .

Dire qu'une fonction $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution maximale de l'équation différentielle signifie qu'elle n'est la restriction d'autre solution.

Avoir une "solution maximale unique" signifie que toute solution trouvée est en fait la restriction à une partie de I d'une solution unique qui est dite maximale car elle n'est la restriction d'aucune autre.

La chose à retenir de tout ce qui vient d'être écrit est que si la fonction f a des dérivées partielles continues sur l'ensemble $I \times J$ alors l'équation différentielle admet une unique solution à l'intervalle de définition près.

Note : l'énoncé que nous donnons du théorème de Cauchy-Lipschitz en est une version très restrictive et adaptée à notre aventure. Dans la version originale, on exige simplement que f soit localement lipschitzienne vis-à-vis de la seconde variable. Mais tout cela est une [autre histoire](#), bien au-delà de notre aventure.

Jusqu'à présent, nous n'avions pas eu besoin du théorème de Cauchy-Lipschitz pour établir que les équations différentielles du [premier](#) ou du [second](#) ordre abordées avaient une et une seule solution. Désormais, il en ira autrement...

Des équations différentielles à variables séparables

Les équations différentielles à variables séparables sont des équations différentielles le plus souvent du premier ordre qui peuvent être résolues au seul moyen d'une intégration vis-à-vis de la variable. Bref, ce sont des équations qui se solutionneraient toutes seules !

Définition d'une équation à variables séparables

Une équation à variables séparables est une équation différentielle de la forme :

$$y'(x).a[y(x)] = b(x)$$

où :

- a est une fonction continue sur une partie J de \mathbb{R} .
- b est une fonction continue sur un intervalle I auquel appartient la variable x.

Comme nous le voyons, les variables sont clairement séparées : ce qui est en y est dans le membre de gauche alors que ce qui est en x est à droite. Ainsi que nous le verrons, le plus dur dans ce genre de résolution est de trouver des primitives aux fonctions a et b.

Le nombre de solution d'une équation à variables séparables

Connaître le nombre de solution d'une équation permet déjà d'avoir une idée du travail à entreprendre et de ce qui doit être recherché.

Intéressons-nous de plus près à une équation à variables séparables :

$$y'.a(y) = b(x)$$

Comme a est une fonction continue alors elle admet une primitive A.

La fonction $y'(x).a[y(x)]$ est donc la dérivée de $A[y(x)]$.

De même, la fonction b étant continue sur l'intervalle I alors elle y admet une primitive B.

Intégrant l'équation différentielle par rapport à la variable x, il vient :

$$A[y(x)] = B(x) + \textit{Constante}$$

A ce niveau-là, on comprend que le nombre des ombre de solution dépend en partie de la fonction A. Si elle est bijective alors il y a unicité de la solution maximale. Si ce n'est pas le cas alors il faut voir !

Un outil permettant de se prononcer dans certains cas sur l'unicité de la solution maximale est le théorème de [Cauchy-Lipschitz](#). Pour pouvoir l'appliquer, nous devons au préalable réécrire l'équation différentielle.

$$y'(x).a[y(x)] = b(x) \Leftrightarrow y'(x) = \frac{b(x)}{a[y(x)]} \Leftrightarrow y'(x) = f(x, y)$$

où f est une fonction à deux variables, définie sur $I \times J$ par $f(u, v) = \frac{b(u)}{a(v)}$.

Plusieurs remarques s'imposent :

- D'abord pour pouvoir faire cette modification d'écriture, il faut que la fonction a ne s'annule pas sur la partie J de \mathbb{R} .
- Ensuite, si l'on veut appliquer le théorème de [Cauchy-Lipschitz](#), il faut que cette fonction f soit de classe C^1 sur $I \times J$. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que les deux fonctions a et b soient elles-mêmes de classe C^1 vis-à-vis de leur variable.

Une certitude s'impose donc :

Le nombre de solution d'une équation à variables séparables.

Si :

- a est une fonction de classe C^1 sur un intervalle J et qu'elle ne s'y annule jamais.
- b est une fonction de classe C^1 sur un intervalle I.
- x_0 est un réel de l'intervalle I et y_0 un réel de l'intervalle J.

alors l'équation à variables séparables $\begin{cases} y'(x).a[y(x)] = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet

une unique solution maximale.

En dehors de ces cas, il faudra voir plus avant...

Les équations différentielles linéaires homogènes du premier degré

Ces équations différentielles sont les premières sur lesquelles nous avons travaillé.

Aux [début](#)s de nos fabuleuses aventures dans l'univers des équations différentielles, nous ne disposions d'aucune référence, ni d'aucun théorème. Ceux qui étaient avec nous se souviennent peut-être que pour résoudre une équation du [type](#) $y'(x) + \alpha(x).y(x) = 0$, nous avons mis ce qui était en y d'un côté et ce qui était en x de l'autre.

$$\begin{aligned} y'(x) + \alpha(x).y(x) &= 0 \\ y'(x) &= -\alpha(x).y(x) \\ y'(x). \frac{1}{y(x)} &= -\alpha(x) \end{aligned}$$

Nous avons mis en évidence une superbe équation à variables séparables de la forme $y'.a(y) = b(x)$ où $a(v) = \frac{1}{v}$ et $b(u) = -\alpha(u)$.

Et nous [connaissons](#) la suite...

Un grand classique d'équation à variables séparables : $y' = \text{Exp}(x + y)$

Réolvons l'équation différentielle $\begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Avant toute chose, remarquons que comme la fonction $f(u, v) = e^{u+v}$ est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alors l'équation différentielle admet une unique solution maximale. C'est le théorème de [Cauchy-Lipschitz](#).

Même si elle n'en a pas l'air, il s'agit là d'une équation différentielle à variables séparables. Mais pour le voir, il faut en modifier l'écriture !

$$y'(x) = e^{x+y(x)} \Leftrightarrow y'(x) = e^x . e^{y(x)} \Leftrightarrow y'(x).e^{-y(x)} = e^x$$

A présent, nous sommes en position pour progresser. En effet :

- Une primitive de $y'(x).e^{-y(x)}$ est la fonction $-e^{-y(x)}$.
- Une primitive de e^x est cette même fonction.

Ces fabuleuses aventures ont été écrites par Jérôme ONILLON en septembre et octobre 2002 et sont exclusivement distribuées par la taverne de l'Irlandais

Par suite, intégrant l'équation différentielle vis-à-vis de x , il vient que :

$$-e^{y(x)} = e^x + C$$

où C est une constante que va nous donner la condition initiale.

En effet, comme $y(0) = 2$ alors nous pouvons écrire que :

$$-e^{y(0)} = e^0 + C \Leftrightarrow C = -1 - e^2$$

La constante étant déterminée, nous devons à présent essayer de déterminer l'expression de cette solution que nous savons unique.

$$-e^{y(x)} = e^x - 1 - e^2 \Leftrightarrow e^{y(x)} = 1 + e^2 - e^x \Leftrightarrow y(x) = \ln[1 + e^2 - e^x]$$



Heureusement, l'exponentielle est une bijection...

A notre grand regret, la solution que nous avons trouvée, n'est pas définie sur \mathbb{R} . Néanmoins, nous pouvons conclure que :

Conclusion : l'unique solution maximale de l'équation $\begin{cases} y' = e^{x+y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ est la fonction $\varphi(x) = \ln[1 + e^2 - e^x]$ définie sur $]-\infty; \ln(1 + e^2)[$.

Le cas singulier des équations homogènes

Avant d'aller plus loin, nous devons préciser ce que nous entendons par équation différentielle homogène. Car jusqu'à présent, les seules que nous avons rencontrées, étaient linéaires.

D'entrée, nous devons préciser qu'il s'agit de deux notions étrangères qui n'ont rien à voir l'une avec l'autre. Il y a là deux notions à ne pas confondre.

Ainsi que nous l'avons vu [lorsque](#) nous avons traité des équations linéaires du premier ordre, une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène est une chose de la forme $y' + a(x).y = 0$

La notion d'équation homogène recouvre une autre réalité :

Définition d'une équation homogène

Une équation homogène est une équation différentielle de la forme :

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

où :

- f est une fonction continue sur une partie I de \mathbb{R} .

Pour courtoisie, cette définition n'en appelle pas moins certaines remarques :

- D'abord, comme on divise par x , le réel 0 ne peut pas faire parti de la partie I . Mais un prolongement en $x = 0$ n'est pas à exclure.
- Ensuite, certaines équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre sont aussi des équations homogènes tout court.

Ce sont celles de la forme $y' + \frac{a}{x}.y = 0$ où a est un réel fixé.

- Enfin, toutes les équations homogènes se résolvent en procédant au changement d'inconnue $y(x) = z(x).x \Leftrightarrow z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Résolution de l'équation homogène $(x.y' - y)^2 = x^2 - y^2$

Résolvons l'équation différentielle homogène $\begin{cases} (x.y' - y)^2 = x^2 - y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

Avant de nous lancer dans la résolution proprement dite et de montrer en quoi cette équation est homogène, nous allons dire un mot d'une éventuelle image de 0 par une quelconque solution de l'équation.

Imaginons qu'il existe une solution qui soit définie en $x = 0$. Quelle serait alors l'image de 0 par cette solution ?

L'équation impose d'elle-même une valeur à l'image de 0 .

Remplaçant dans l'équation x par 0 , il vient en effet :

$$(0 \times y'(0) - y(0))^2 = 0^2 - [y(0)]^2 \Leftrightarrow [y(0)]^2 = -[y(0)]^2 \Leftrightarrow y(0) = 0$$

Ainsi si la fonction φ est une solution alors nécessairement $\varphi(0) = 0$.

Heureusement que notre condition initiale ne portait pas sur $x = 0$!

Ayant traité ce dernier cas, nous allons pouvoir nous intéresser à ce qui se passe ailleurs qu'en 0 .

Pour tout réel x non nul, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} (x.y' - y)^2 &= x^2 - y^2 \\ \frac{(x.y' - y)^2}{x^2} &= 1 - \frac{y^2}{x^2} \end{aligned}$$

**On divise par x^2 .
Désormais, on peut...**

$$\left(y' - \frac{y}{x}\right)^2 = 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

C'est le moment que nous choisissons pour procéder au changement

d'inconnue $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Cette égalité s'écrit encore $y(x) = z(x).x$.

La fonction y étant nécessairement dérivable, il en va de même pour z . Utilisant la formule de dérivation d'un produit, on peut d'ailleurs écrire :

$$y'(x) = z'(x).x + z(x)$$

L'équation différentielle initiale devient donc :

$$(z'(x).x + z(x) - z(x))^2 = 1 - [z(x)]^2$$

$$(x.z'(x))^2 = 1 - [z(x)]^2 \Leftrightarrow \underbrace{(x.z')^2 = 1 - z^2}_{\text{Ecrit plus simplement...}}$$

Parmi les choses sûres depuis le départ car imposées par l'équation elle-même, il y a que les seconds membres $x^2 - y^2$ et $1 - z^2$ sont nécessairement positifs ou nuls. Or depuis la troisième, nous savons que lorsque a est positif, les deux solutions de l'équation $X^2 = a$ sont $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} . Appliquant ce souvenir...

$$(x.z')^2 = 1 - z^2$$

$$x.z' = -\sqrt{1 - z^2} \quad \text{ou} \quad x.z' = \sqrt{1 - z^2}$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1 - z^2}} = -\frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{z'}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{x}$$

Précisons aussi que désormais, nous considérons que $z(x)$ est différent de -1 et 1 . Ceci car nous venons de diviser par $\sqrt{1 - z^2}$.

Nous sommes donc arrivés face à deux équations à variables séparables. Pour ces deux équations à [variables séparables](#), il apparaît que :

- La fonction $a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$ est de classe C^1 sur l'intervalle $] -1; 1[$. De plus, elle ne s'y annule jamais.
- La fonction $b(u) = \pm \frac{1}{u}$ est également de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.

Nous pouvons donc affirmer que chacune des deux dernières équations à variables séparables [admet](#) une seule et unique solution maximale. Déterminons-les !

- Une primitive de $\pm \frac{1}{u}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ [est](#) $\pm \ln(u)$.
- Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$ sur l'intervalle $] -1; 1[$ [est](#) $\arcsin(v)$.

Intégrant les deux équations différentielles par rapport à x , il vient alors que :

$$\frac{z'}{\sqrt{1 - z^2}} = -\frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{z'}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{x}$$

$\arcsin(z) = -\ln(x) + C_1$ ou $\arcsin(z) = \ln(x) + C_2$ où C_1 et C_2 sont deux constantes qu'il nous faudra déterminer.

Sauf que arcsinus est définie sur $] -1; 1[$ et est à valeurs dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Une nouvelle condition s'exerce donc sur les deux seconds membres. Désormais ce que nous ferons, sera uniquement valable pour les réels x vérifiant :

$$\underbrace{-\frac{\pi}{2} < -\ln(x) + C_1 < \frac{\pi}{2}}_{\text{Première équation}} \quad \text{et} \quad \underbrace{-\frac{\pi}{2} < \ln(x) + C_2 < \frac{\pi}{2}}_{\text{Seconde équation}}$$

Revenons à nos équations. Poursuivant notre effort, nous en arrivons à :

$$\arcsin(z) = -\ln(x) + C_1 \quad \text{ou} \quad \arcsin(z) = \ln(x) + C_2$$

$$z(x) = \sin[-\ln(x) + C_1] \quad \text{ou} \quad z(x) = \sin[\ln(x) + C_2]$$

Nous pouvons à présent nous prononcer sur l'équation initiale.

Si une fonction y est solution de l'équation $(x.y' - y)^2 = x^2 - y^2$ alors :

$$y(x) = x \times \sin[-\ln(x) + C_1] \quad \text{ou} \quad y(x) = x \times \sin[\ln(x) + C_2]$$

Il nous reste à déterminer les deux constantes C_1 et C_2 .

La condition initiale prescrit que l'image de 1 doit être égale à 0.

$$y(1) = 1 \times \sin[-\ln(1) + C_1] = 0 \quad \text{ou} \quad y(1) = 1 \times \sin[\ln(1) + C_2] = 0$$

$$\sin[C_1] = 0 \quad \text{ou} \quad \sin[C_2] = 0$$

$$C_1 = k_1 \cdot \pi \quad \text{ou} \quad C_2 = k_2 \cdot \pi$$

où k_1 et k_2 sont deux entiers relatifs.

Les deux constantes C_1 et C_2 sont donc deux multiples de π .

Or, ce que nous avons fait n'est pas valable pour n'importe quel réel x . En effet, nous avons vu il y a peu que x devait satisfaire :

$$-\frac{\pi}{2} < -\ln(x) + C_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < \ln(x) + C_2 < \frac{\pi}{2}$$

En particulier, ici :

$$-\frac{\pi}{2} < C_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < C_2 < \frac{\pi}{2}$$

Or le seul multiple de π compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ est 0. Nécessairement :

$$C_1 = 0 \quad \text{et} \quad C_2 = 0$$

En définitive, on aboutit donc bien à deux solutions qui sont les fonctions

$$\varphi_1(x) = -x \times \sin[\ln(x)] \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = x \times \sin[\ln(x)]$$

Avant de conclure, il nous faut connaître les ensembles de définition de nos deux solutions. Car ce qui a été fait l'a été sous certaines conditions.

En particulier, tout réel x doit vérifier :

$$\begin{array}{l} \text{Première solution } \varphi_1 \\ \hline -\frac{\pi}{2} < -\ln(x) < \frac{\pi}{2} \\ e^{\pi/2} > x > e^{-\pi/2} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} \text{Seconde solution } \varphi_2 \\ \hline -\frac{\pi}{2} < \ln(x) < \frac{\pi}{2} \\ e^{-\pi/2} < x < e^{\pi/2} \end{array}$$

Donc les deux solutions φ_1 et φ_2 ont le même ensemble de définition : il s'agit de l'intervalle $]e^{-\pi/2}; e^{\pi/2}[$.

Après cette sublime chevauchée, il nous est possible de dire que :

Deux solutions de l'équation différentielle $\begin{cases} (x \cdot y' - y)^2 = x^2 - y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ sont

les fonctions $\varphi_1(x) = -x \times \sin[\ln(x)]$ et $\varphi_2(x) = x \times \sin[\ln(x)]$ qui

sont toutes deux définies sur l'intervalle $]e^{-\pi/2}; e^{\pi/2}[$.

Mais deux questions insistantes se posent à présent :

- Ces fonctions peuvent-elles être étendues ou prolongées?
- En dépit de tout ce qui a été fait, sont-ce les seules solutions ?

Nos solutions au-delà de leur intervalle...

Les deux solutions trouvées sont définies sur l'intervalle $]e^{-\pi/2}; e^{\pi/2}[$.

Mais est-il possible de les étendre au-delà de cet intervalle ?

Examinons de plus près nos deux solutions.

Chacun comprend que nos deux solutions $\pm x \times \sin[\ln(x)]$ sont définies sur $]0; +\infty[$.

Qui plus est, sur cet intervalle, nos deux solutions sont clairement de classe C^1 (comprenez dérivable et à dérivée continue).

En fait, la résolution nous a seulement permis d'entrevoir un fragment de la vérité. Nos évolutions nous ont contraints à adopter des conditions qui finalement, ont rejailli sur nos deux solutions.

En fait les solutions $\varphi_1(x) = -x \times \sin[\ln(x)]$ et $\varphi_2(x) = x \times \sin[\ln(x)]$ de

l'équation $\begin{cases} (x \cdot y' - y)^2 = x^2 - y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ sont au pire définies sur $]0; +\infty[$.

Essayons de pousser notre avantage. N'avons-nous pas mieux ?

Autrement dit, ces deux fonctions peuvent-elles être prolongées au-delà de l'intervalle $]0; +\infty[$, c'est-à-dire d'abord en $x = 0$?

Examinons ce qui se passe en 0 avec nos deux solutions.

- Nos deux solutions peuvent-elles être prolongées en 0 ?

Pour cela, nous devons déterminer la limite de $x \times \sin[\ln(x)]$ lorsque x tend vers 0. Pour ce faire, nous allons encadrer cette quantité. Pour tout réel strictement positif, nous avons :

$$\frac{-x}{\text{tend vers } 0} < x \times \sin[\ln(x)] < \frac{x}{\text{tend vers } 0}$$

En vertu du théorème des gendarmes, il vient que lorsque x tend vers 0, la quantité $x \times \sin[\ln(x)]$ tend aussi vers 0.

Nos deux solutions φ_1 et φ_2 sont donc prolongeables par continuité en 0. On pose alors :

$$\varphi_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_2(0) = 0$$

Ces deux trouvailles sont assez rassurantes.

En effet, avant d'entamer la résolution, nous avons vu que si une solution y était définie en 0 alors l'image de 0 par cette solution devait être 0.

- Nos deux solutions sont-elles dérivables en 0 ?
On aurait pu croire que le prolongement se limiterait à trouver une image. C'est oublier un peu vite qu'une solution à notre équation différentielle est avant tout une fonction dérivable.
Pour savoir si nos deux solutions sont dérivables en 0, nous allons nous attaquer à la limite du quotient $\frac{\pm x \times \sin[\ln(x)] - 0}{x}$ en 0.
Après simplifications, ce quotient s'écrit aussi $\pm \sin[\ln(x)]$.
Or lorsque x tend vers 0, $\ln(x)$ tend vers $-\infty$.
Le sinus n'ayant pas de limite à l'infiniment négatif, il en va alors de même pour notre quotient.
Nos deux fonctions φ_1 et φ_2 ne sont donc pas dérivables en 0.
Certes, elles y sont prolongeables par continuité mais n'y sont alors pas dérivables.

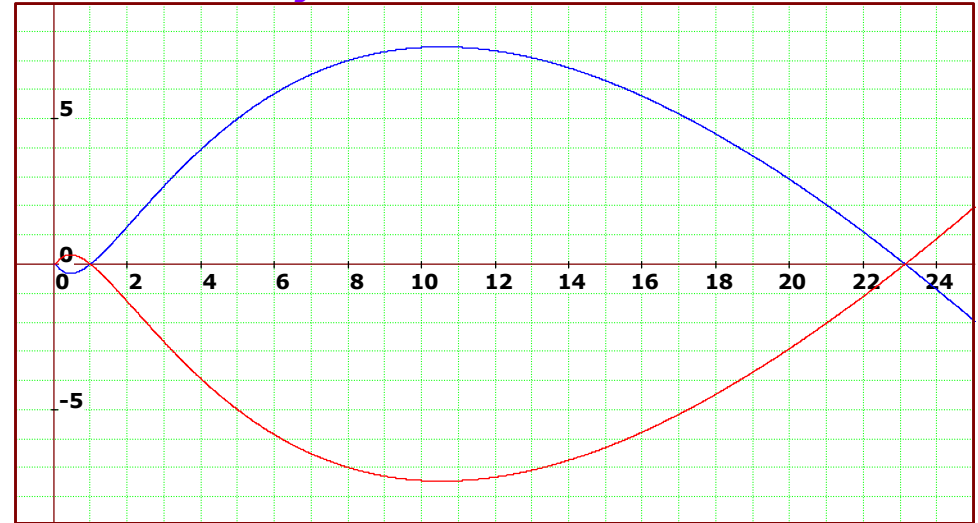
Ainsi, les fonctions φ_1 et φ_2 sont donc seulement des solutions sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Certains esprits perfectionnistes diront qu'il est possible de prolonger les deux solutions φ_1 et φ_2 à l'intervalle $]-\infty; 0[$ en considérant les fonctions

$\pm x \times \sin[\ln|x|]$. Ce sont en effet deux solutions de $(x.y' - y)^2 = x^2 - y^2$.

Sauf que ces fonctions sont définies sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Se pose alors un problème de discontinuité qui peut être préjudiciable à l'unicité de la solution maximale.



Courbes représentant φ_1 et φ_2

Deux solutions seules au monde ?

Le problème des changements d'inconnue est la possible omission d'une partie des solutions.

Si nous étions des êtres consciencieux, nous devrions vérifier que les solutions trouvées φ_1 et φ_2 sont les deux seules possibles. Seulement, nous avons vu que cette équation homogène conduisait à deux équations à variables séparables qui admettaient chacune une unique solution maximale. Nous considérerons donc que l'équation différentielle admet en tout et pour tout deux solutions : celles que nous avons trouvées.

Conclusion : les deux solutions de l'équation $\begin{cases} (x.y' - y)^2 = x^2 - y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

sont les fonctions $\varphi_1(x) = -x \times \sin[\ln(x)]$ et $\varphi_2(x) = x \times \sin[\ln(x)]$

définies sur $]0; +\infty[$.

La grandeur oubliée des équations de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre non linéaire :

Définition d'une équation de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est une équation différentielle de la forme :

$$y' = a(x).y + b(x).y^\alpha$$

où :

- a et b sont deux fonctions de classe C^1 (c'est-à-dire dérivables et à dérivées continues) sur un intervalle I.
- x est la variable.
- α est un réel quelconque différent de 1 alors que y^α désigne la puissance α -ième de la fonction y..

Si nous imposons que α soit différent de 1, c'est simplement qu'alors on se retrouve face à une équation différentielle linéaire du premier ordre. Un cas qui a [déjà](#) été traité.

Comme nous allons le voir avec notre exemple, puis avec notre résolution générale, ce genre d'équation se résout en procédant au changement d'inconnue $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$.

Mais avant de nous intéresser à la résolution effective, nous allons dire un mot du nombre de solution d'une équation de Bernoulli.

A propos de la puissance α .

Un problème que nous n'avons pas abordé est la nature de la puissance. S'agit-il d'une puissance entière, inverse ou réelle ? En effet, suivant la nature de l'exposant α , la fonction solution y devra remplir certaines conditions.

- Si l'exposant α est un entier naturel alors il s'agit d'une puissance entière classique. Aucune condition ne pèse donc sur le signe d'une solution y.
- Si l'exposant α est un entier négatif alors on parle d'une puissance inverse. Donc toute solution y ne devra jamais s'annuler sur son ensemble de définition.
- Enfin, si α est un réel non entier alors on parle de puissance réelle. Celle-ci n'étant définie que pour les nombres strictement positifs, toute solution y devra donc être strictement positive sur son ensemble de définition.

En fait, comme nous allons le voir avec notre exemple, on étudie le problème en considérant plus ou moins explicitement qu'il s'agit de puissance réelle...

Dans la suite, nous ne rechercherons que les solutions strictement positives.

Le nombre de solution d'une équation de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est une équation du premier ordre de la forme

$$y' = a(x).y + b(x).y^\alpha$$

où a et b sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I.

Essayons d'appliquer le théorème de [Cauchy-Lipschitz](#) à cette situation.

La fonction $f(u, v) = a(u).v + b(u).v^\alpha$ est donc une fonction qui est définie sur $I \times]0; +\infty[$.

Elle est d'ailleurs de classe C^1 sur ce dernier ensemble.

En effet, la fonction f est dérivable vis-à-vis des deux variables u et v.

De plus les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = a'(u).v + b'(u).v^\alpha$ et

$\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = a(u) + \alpha.b'(u).v^{\alpha-1}$ sont continues sur $I \times]0; +\infty[$.

Cela suffit à faire de f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $I \times]0; +\infty[$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz est donc applicable à la fonction f. D'où

Le nombre de solution d'une équation de Bernoulli.

Si :

- a et b sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I
- α est un réel différent de 0 et 1
- x_0 est un réel de l'intervalle I et y_0 un réel strictement positif.

alors l'équation de Bernoulli $\begin{cases} y' = a(x).y + b(x).y^\alpha \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une

unique solution maximale.

Si nous trouvons une solution maximale, nous sommes désormais assurés qu'elle sera la seule.

À présent, nous allons résoudre un exemple puis nous nous lancerons dans la résolution générale d'une équation de Bernoulli.

Un exemple d'équation de Bernoulli : $y' = y + x.y^2$

Réolvons l'équation différentielle de Bernoulli $\begin{cases} y' = y + x.y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Les méchants langues diront qu'il s'agit là d'un "petit exemple" et qu'à vaincre sans péril, on triomphe sans gloire. Sauf qu'à trop chercher le danger, on finit par sombrer !

La première chose à dire est que les fonctions $a(x) = 1$ et $b(x) = x$ sont clairement de classe C^1 sur \mathbb{R} . Nous sommes donc clairement face à une équation de Bernoulli.

Comme $y(0)$ est non nul et que la fonction y est dérivable donc continue, alors il existe un certain intervalle I autour de 0 sur lequel la fonction y ne s'annule pas.

Tout ce que nous entreprendrons, se déroulera au pire sur cet intervalle I .

Comme la fonction y ne s'annule pas sur l'intervalle I , il est possible de diviser par $y(x)$ sur ce dernier.

Pour tout réel x de l'intervalle I :

$$y'(x) = y(x) + x.[y(x)]^2$$

$$\frac{y'(x)}{[y(x)]^2} = \frac{1}{y(x)} + x$$

On divise par y^2

On procède alors à un changement d'inconnue, en posant :

$$z(x) = [y(x)]^{1-\alpha} = [y(x)]^{1-2} = \frac{1}{y(x)}$$

Héritant des propriétés de la fonction y , la fonction z est aussi dérivable sur notre intervalle I . De plus :

$$z'(x) = -\frac{y'(x)}{[y(x)]^2}$$

L'équation différentielle précédente devient alors :

$$-z'(x) = z(x) + x$$

$$-z'(x) - z(x) = x$$

D'une "petite" équation de Bernoulli, nous nous sommes ramenés à une équation différentielle linéaire du premier ordre que nous savons résoudre.

Toutes les solutions de l'équation différentielle $-z'(x) - z(x) = x$ sont de la forme $z(x) = C.e^{-x} - x + 1$ où C est une constante.

Par suite, il vient que la fonction $y(x) = \frac{1}{C.e^{-x} - x + 1}$ est une solution de

l'équation différentielle $\begin{cases} y' = y + x.y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

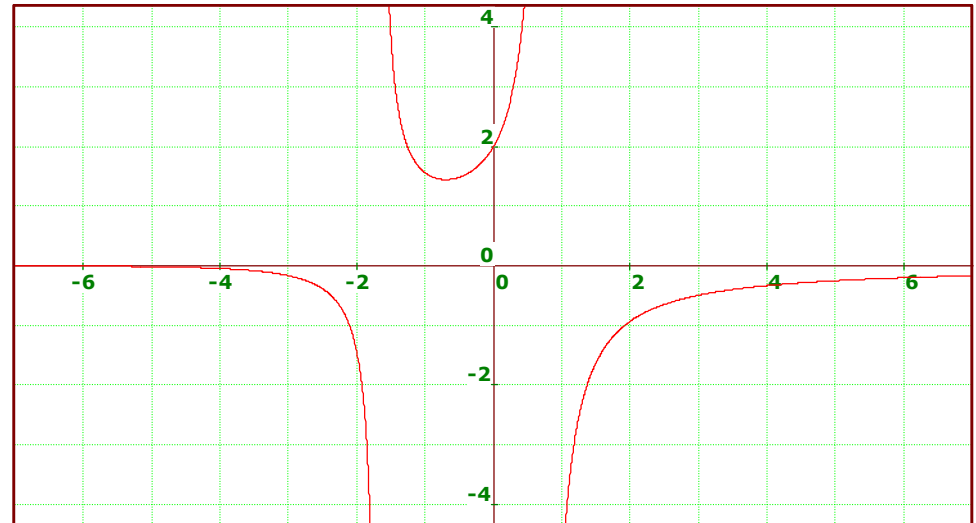
La condition initiale nous permet de déterminer la constante C . Nous pouvons écrire que :

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{C.e^{-0} - 0 + 1} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{C + 1} = 2 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Une solution de cette équation est donc la fonction

$$\phi(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}.e^{-x} - x + 1} = \frac{e^x}{e^x.(1-x) - 0,5}$$

Faisons un peu plus connaissance avec cette solution ϕ en traçant sa courbe.



Ainsi que le montre sa courbe, la fonction φ est définie sur une réunion de trois intervalles $]-\infty; x_1[\cup]x_1; x_2[\cup]x_2; +\infty[$.

Il est seulement possible de déterminer des valeurs approchées de ces points de discontinuité que sont x_1 et x_2 . Pour cela, il suffit de chercher où est-ce que $\varphi(x)$ est définie. Après calculs, on trouve :

$$x_1 \approx -1,678 \quad \text{et} \quad x_2 \approx 0,768$$

Rappelons que nous savons que l'équation différentielle $\begin{cases} y' = y + x.y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

admet une unique solution maximale. Cela veut donc dire que la solution φ que nous avons trouvée, est au pire une restriction de cette solution maximale.

De tout l'ensemble de définition de la fonction φ , l'intervalle qui nous intéresse, est celui contenant 0, c'est-à-dire $]x_1; x_2[$.

En effet, dans notre résolution nous avons travaillé avec l'hypothèse qu'une solution était définie autour de 0 et qu'elle y était non nulle donc strictement positive à cause de la continuité.

Nous connaissons désormais le fameux intervalle I de notre résolution : il s'agit de $]x_1; x_2[$.

Ce que nous avons fait, est uniquement valable sur ce dernier intervalle. Au-delà des deux bornes x_1 et x_2 , nous ne pouvons plus garantir l'unicité de la solution maximale.

Conclusion : l'unique solution maximale de l'équation $\begin{cases} y' = y + x.y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

est la fonction $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x \cdot (1-x) - 0,5}$ qui est définie sur $]x_1; x_2[$.

Résolution d'une équation de Bernoulli en général

Après avoir résolu un petit exemple d'équation de Bernoulli, nous allons nous lancer dans la résolution générale de ce genre d'équation.

Résolvons l'équation différentielle de Bernoulli $\begin{cases} y' = a(x).y + b(x).y^\alpha \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Comme nous l'avons déjà dit, α étant un réel différent de 1, il est donc question de puissance réelle. Donc y est nécessairement une fonction strictement positive et y_0 est lui-même obligatoirement strictement positif.

Nous avons déjà prouvé que ce genre d'équation admettait une unique solution. Nous allons voir comment il est possible de la déterminer.

Au départ, nous avons donc l'équation différentielle :

$$y'(x) = a(x).y(x) + b(x).[y(x)]^\alpha$$

Comme y est une fonction nécessairement strictement positive, il est donc possible de diviser par $[y(x)]^\alpha$. Il vient donc que :

$$\frac{y'(x)}{[y(x)]^\alpha} = a(x) \cdot \frac{y(x)}{[y(x)]^\alpha} + b(x)$$

$$y'(x).[y(x)]^{-\alpha} = a(x).[y(x)]^{-\alpha+1} + b(x)$$

Comme pour l'exemple, on procède alors au changement d'inconnue :

$$z(x) = [y(x)]^{-\alpha+1}$$

A l'instar de la fonction y , la fonction z est aussi dérivable et strictement positive. D'ailleurs, nous pouvons écrire que :

$$z'(x) = (-\alpha + 1).y'(x).[y(x)]^{-\alpha+1-1} = (-\alpha + 1).y'(x).[y(x)]^{-\alpha}$$

L'équation différentielle initiale devient alors :

$$\frac{1}{1-\alpha} . z'(x) = a(x).z(x) + b(x)$$

On arrive donc à une splendide équation différentielle linéaire du premier ordre. Elle admet une unique solution. Toute la difficulté est parfois de la trouver.

Ayant trouvé la solution z , on en déduit la solution y de l'équation différentielle de Bernoulli en posant :

$$y(x) = [z(x)]^{1/(1-\alpha)}$$

Et alors le tout est joué !

Pour conclure ce paragraphe, précisons que suivant les équations de Bernoulli, suivant la valeur de l'exposant α , la résolution et la solution trouvée sont plus ou moins agréables...

La merveilleuse destinée des équations de Riccati

Une équation de Riccati est une équation différentielle non linéaire du premier ordre qui ressemble à une fonction près à une de Bernoulli.

Définition d'une équation de Riccati

Une équation de Riccati est une équation différentielle de la forme :

$$y' = a(x).y + b(x).y^2 + c(x)$$

où :

- a, b et c sont trois fonctions de classe C^1 (c'est-à-dire dérivables et à dérivées continues) sur un intervalle I.
- x est la variable.

Comme nous le disions, une équation de Riccati peut être vue comme une équation de Bernoulli qui ne serait pas [homogène](#) au sens des équations du premier ordre...

Une équation de Riccati se résout en connaissant une solution particulière. On procède alors à un changement d'inconnue.

Le nombre de solution d'une équation de Riccati

Là encore, c'est le théorème de [Cauchy-Lipschitz](#) qui va faire son oeuvre.

Intéressons-nous à l'équation différentielle
$$\begin{cases} y' = a(x).y + b(x).y^2 + c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où a, b et c sont trois fonctions de classe C^1 sur un intervalle I.

La fonction $f(u, v) = a(u).v + b(u).v^2 + c(u)$ est clairement une fonction de classe C^1 sur $I \times \mathbb{R}$.

En effet, elle est dérivable par rapport à chacune des deux variables u et v.

De plus, ses deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = a'(u).v + b'(u).v^2 + c'(u)$

et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = a(u) + 2.b(u).v$ sont continues sur $I \times \mathbb{R}$.

En application du théorème de [Cauchy-Lipschitz](#), nous pouvons donc conclure que :

Le nombre de solution d'une équation de Riccati.

Si :

- a, b et c sont trois fonctions de classe C^1 sur un intervalle I
- x_0 est un réel de l'intervalle I et y_0 est un réel quelconque.

alors l'équation de Riccati
$$\begin{cases} y' = a(x).y + b(x).y^2 + c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
 admet une unique solution maximale.

Le principe de la résolution d'une équation de Riccati

Ainsi que nous l'avons dit, une équation de Riccati ne se résout que si l'on en connaît une solution particulière.

Résolvons l'équation différentielle de Riccati :

$$y' = a(x).y + b(x).y^2 + c(x)$$

Comme nous avons eu un peu de chance, nous connaissons déjà une solution particulière φ de cette équation.

On procède alors au changement d'inconnue :

$$z(x) = y(x) - \varphi(x)$$

Autrement écrit, nous avons que :

$$y(x) = z(x) + \varphi(x) \quad \text{et} \quad y'(x) = z'(x) + \varphi'(x)$$

L'équation différentielle devient alors :

$$z'(x) + \varphi'(x) = a(x).[z(x) + \varphi(x)] + b(x).[z(x) + \varphi(x)]^2 + c(x)$$

Développant ce qui doit l'être, il vient :

$$\begin{aligned} z'(x) + \varphi'(x) &= a(x).z(x) + a(x).\varphi(x) + b(x).[z(x)]^2 \\ &\quad + 2.b(x).z(x).\varphi(x) + b(x).[\varphi(x)]^2 + c(x) \end{aligned}$$

On réordonne alors l'équation de façon à pouvoir procéder à certaines simplifications.

Il s'ensuit :

$$z'(x) = [a(x) + 2.b(x).\varphi(x)].z(x) + b(x).[z(x)]^2 + \underbrace{a(x).\varphi(x) + b(x).[\varphi(x)]^2 + c(x) - \varphi'(x)}_{=0}$$

car φ est une solution particulière de l'équation

$$z'(x) = [a(x) + 2.b(x).\varphi(x)].z(x) + b(x).[z(x)]^2$$

La redoutable équation de Riccati s'est muée en une plus paisible équation de [Bernoulli](#) que nous [savons](#) résoudre si tant est que cela soit possible !

Un exemple d'équation de Riccati : $y' = 2x.y + y^2 + x^2 - 1$.

Réolvons l'équation différentielle de Riccati
$$\begin{cases} y' = 2x.y + y^2 + x^2 - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il s'agit d'une équation de Riccati assez simple. Par ce que nous avons fait précédemment, nous savons d'entrée que cette équation admet une unique solution maximale.

Précisons qu'il existe plusieurs voies permettant de résoudre cette équation. Nous suivrons d'abord celle qui la considère en tant qu'équation de Riccati.

La première chose qu'il nous faut, est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = 2x.y + y^2 + x^2 - 1$.

Après quelques tâtonnements, on comprend que la fonction $\varphi(x) = -x$ est une solution particulière de celle-ci.

On procède donc au changement d'inconnue :

$$z(x) = y(x) - \varphi(x) = y(x) + x$$

Après calculs et suivant ce qui a été [déjà](#) fait, on en arrive à l'équation différentielle.

$$z'(x) = [z(x)]^2$$

Et c'est là que tout commence ! Nous pourrions dire qu'il s'agit d'une équation de [Bernoulli](#).

En fait, c'est un peu mieux que cela. C'est une équation différentielle qui peut se résoudre sans avoir recours au moindre théorème ou recette.

Pour tout réel x où $z(x)$ ne s'annule pas, nous pouvons écrire :

$$\frac{z'(x)}{[z(x)]^2} = 1$$

On intègre alors cette égalité vis-à-vis de la variable x .

Une primitive de la fonction $\frac{z'(x)}{[z(x)]^2}$ est la fonction $-\frac{1}{z(x)}$. Il vient donc

que pour tout réel x où $z(x)$ ne s'annule pas :

$$-\frac{1}{z(x)} = x + C \Leftrightarrow z(x) = \frac{-1}{x + C}$$

où C est une constante qui nous sera donnée par la condition initiale.

Nous connaissons z mais il nous faut y . Nous arrivons finalement à :

$$y(x) = z(x) - \varphi(x) = \frac{-1}{x + C} + x$$

Il nous faut déterminer la constante C à l'aide de la condition initiale.

La condition initiale nous dit que l'image de 0 est égale à 1.

$$y(0) = \frac{-1}{0 + C} + 0 = 1 \Leftrightarrow C = -1$$

Conclusion : L'équation différentielle
$$\begin{cases} y' = 2x.y + y^2 + x^2 - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
 admet

une seule solution maximale $\phi(x) = x + \frac{1}{1-x}$ qui est définie sur $]-\infty; 1[$.

Les esprits perspicaces nous diront que cette fonction ϕ est aussi définie à droite de 1. C'est vrai sauf qu'étendre la solution sur l'intervalle $]1; +\infty[$ ne permettrait plus de garantir l'unicité de la solution.

En fait, les équations différentielles ont horreur des discontinuités et préfèrent les intervalles aux ensembles troués.

La question que l'on peut légitimement se poser est : "tout cet arsenal était-il bien nécessaire pour résoudre cette malheureuse équation ?".

En fait, nous aurions pu faire les choses plus simplement...

Notre exemple $y' = 2x.y + y^2 + x^2 - 1$ autrement...

Ainsi que nous l'avons dit en début de résolution, nous aurions très bien

pu voir en l'équation différentielle $\begin{cases} y' = 2x.y + y^2 + x^2 - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ autre chose

qu'une équation de Riccati. Nous aurions très bien pu observer qu'il y avait dans le second membre une splendide identité remarquable.

Il vient alors que :

$$y' = \underbrace{x^2 + 2x.y + y^2}_{\text{Qu'elle est belle !}} - 1 \Leftrightarrow y' = (x + y)^2 - 1 \Leftrightarrow y' + 1 = (x + y)^2$$

Lorsque x est tel que $y(x) + x$ ne s'annule pas, il est alors possible de diviser par $(y(x) + x)^2$. L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{y'(x) + 1}{(y(x) + x)^2} = 1$$

Or $y'(x) + 1$ est la dérivée de la fonction $y(x) + x$. Donc une primitive de

la fonction $\frac{y'(x) + 1}{(y(x) + x)^2}$ est $-\frac{1}{y(x) + x}$.

En intégrant l'équation par rapport à x , il vient :

$$-\frac{1}{y(x) + x} = x + C$$

où C est une constante qui nous sera donnée par la condition initiale.

Après quelques chambardements, on en arrive à :

$$y(x) = x - \frac{1}{x + C}$$

Comme pour la [précédente](#) résolution, la condition initiale va amener C .

$$y(0) = 0 - \frac{1}{0 + C} = 1 \Leftrightarrow C = -1$$

Et comme précédemment, nous pouvons conclure :

Conclusion : L'équation différentielle $\begin{cases} y' = 2x.y + y^2 + x^2 - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ admet

une seule solution maximale $\phi(x) = x + \frac{1}{1-x}$ qui est définie sur $]-\infty; 1[$.

Cette seconde résolution apparaîtra à beaucoup comme plus naturelle que la précédente. En fait, nous l'avons faite pour montrer que parfois plusieurs chemins permettent d'arriver au résultat final. Le plus simple n'est souvent pas le plus académique...

Nous pourrions aussi reconnaître que l'exemple choisi était peut-être un cas trop simple d'équation de Riccati pour que l'on puisse observer l'intérêt d'une telle résolution...

La dernière carte : une équation d'Euler

Une équation d'Euler est une équation différentielle linéaire particulière dont les coefficients sont des puissances de la variable x . Dans les faits :

Définition d'une équation d'Euler.

Une équation d'Euler est une équation différentielle de la forme :

$$a_n \cdot x^n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_2 \cdot x^2 \cdot y'' + a_1 \cdot x \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

où :

- les coefficients a_0, a_1, \dots, a_n sont des réels fixés.
- x est la variable.
- $y^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de la fonction y .

Une équation d'Euler est donc une équation différentielle linéaire qui peut être de n'importe quel ordre et qui n'est pas à coefficients constants. L'astuce permettant de résoudre ce genre d'équation est le changement de variable $t = \ln(x)$. Comme nous allons le voir avec notre exemple, il faut alors aussi procéder à un changement d'inconnue. Après de petits calculs, on aboutit à une équation différentielle linéaire de même ordre mais à coefficients constants. Une chose que nous savons résoudre !

Notre exemple d'équation d'Euler : $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0$

$$\text{Résolvons l'équation différentielle d'Euler } \begin{cases} x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

L'exemple peut paraître simple. Il constituera néanmoins un bon modèle pour ceux qui tenteront l'aventure avec des équations de la même famille.

Compte tenu des conditions initiales, il est clair que toute solution y est au moins définie sur un voisinage $V = [a ; b]$ de 1 où a et b sont deux réels positifs encadrant 1. C'est d'ailleurs tout ce que l'on peut dire sur ces deux-là.

Sous sa forme présente, il nous est impossible de résoudre l'équation :

$$x^2 \cdot y''(x) + x \cdot y'(x) + y(x) = 0.$$

Nous allons procéder à un changement de variable. Nous posons :

$$t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$$

Lorsque x varie de a à b , la variable t passe de $\ln(a)$ à $\ln(b)$.

L'équation différentielle initiale devient alors :

$$(e^t)^2 \cdot y''(e^t) + e^t \cdot y'(e^t) + y(e^t) = 0$$

Ce qui s'écrit encore :

$$e^{2t} \cdot y''(e^t) + e^t \cdot y'(e^t) + y(e^t) = 0$$

Avant d'aller plus loin, nous devons préciser que $y'(e^t)$ et $y''(e^t)$

représentent respectivement les dérivées première et seconde appliquée à l'exponentielle de t . Il nous faut simplifier la situation avec un changement d'inconnue. Nous décidons donc de poser :

$$z(t) = y(e^t)$$

Les fonctions y et exponentielle étant au moins deux fois dérivables là où il faut, il en va alors de même pour la fonction z . A ce propos, dérivons une première fois la précédente égalité par rapport à la variable t .

$$z'(t) = \underbrace{e^t \cdot y'(e^t)}_{\text{Dérivée d'une composée}} \Leftrightarrow y'(e^t) = e^{-t} \cdot z'(t)$$

De façon à obtenir la dérivée seconde de y , dérivons à nouveau !

$$e^t \cdot y''(e^t) = e^{-t} \cdot z''(t) - e^{-t} \cdot z'(t) \Leftrightarrow y''(e^t) = e^{-2t} \cdot [z''(t) - z'(t)]$$

L'équation différentielle devient donc :

$$e^{2t} \cdot \underbrace{e^{-2t} \cdot [z''(t) - z'(t)]}_{y''(e^t)} + e^t \cdot \underbrace{e^{-t} \cdot z'(t)}_{y'(e^t)} + z(t) = 0$$

Ce qui après simplification devient la superbe et paisible équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$z''(t) + z(t) = 0.$$

Avec ses deux conditions initiales et sachant que l'équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ admet pour solution $\pm i$, nous pouvons affirmer que cette équation admet une unique solution de la forme $C_1 \cdot \cos(t) + C_2 \cdot \sin(t)$.

Par suite, une solution de l'équation différentielle initiale est donc la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = C_1 \cdot \cos[\ln(x)] + C_2 \cdot \sin[\ln(x)]$$

Ce sont les conditions initiales de l'équation différentielle qui vont nous permettre d'obtenir les deux constantes C_1 et C_2 .

Note : nos fidèles et attentifs lecteurs remarqueront que nous sommes passés de l'unique solution pour l'équation différentielle $z''(t) + z(t) = 0$ à une solution pour l'équation $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0$. Cette différence est due au changement de variable effectué. En effet, nous ignorons s'il existe d'autres solutions pouvant être obtenue par d'autres chemins.

Attaquons-nous à présent à la détermination des deux constantes.

- D'abord $\varphi(1) = C_1 \cdot \cos[\ln(1)] + C_2 \cdot \sin[\ln(1)] = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1$.
Ainsi, nous savons déjà que $\varphi(x) = \cos[\ln(x)] + C_2 \cdot \sin[\ln(x)]$.
- Ensuite $\varphi'(1) = -\frac{\sin[\ln(1)]}{1} + C_2 \cdot \frac{\cos[\ln(1)]}{1} = 0$ d'où $C_2 = 0$.

Après toutes ces péripéties, nous pouvons l'annoncer à l'univers :

Une solution de l'équation différentielle $\begin{cases} x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \text{ et } y'(1) = 0 \end{cases}$ est la

fonction $\varphi(x) = \cos[\ln(x)]$ qui est définie sur $]0; +\infty[$.

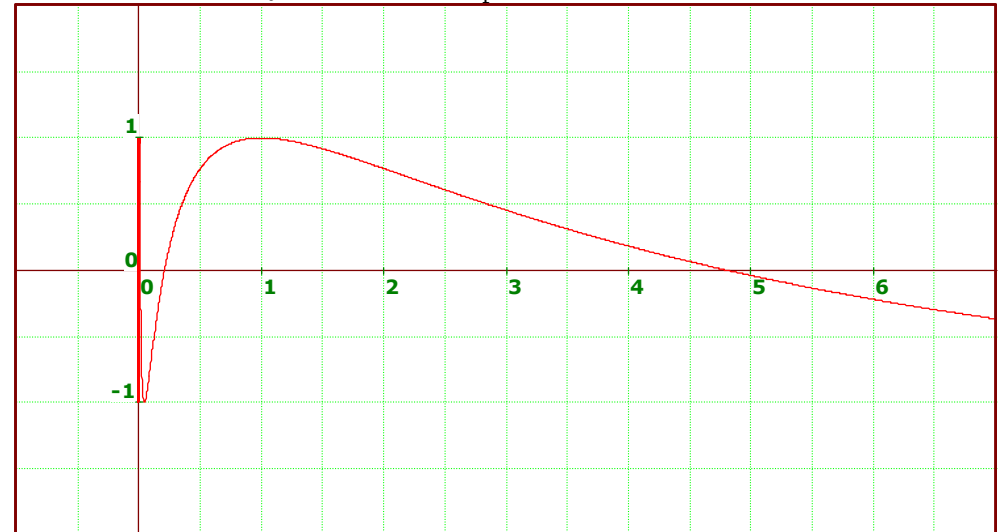
C'est un résultat intéressant que nous venons d'obtenir. Cependant, nous ne pouvons pas fanfaronner que l'équation différentielle à été résolue. Car nous avons trouvé une solution mais pas toutes les solutions.

La prochaine étape de notre aventure eulérienne sera donc de voir s'il existe d'autres solutions. En fait, nous allons chercher à prouver que φ est l'unique solution...

L'unicité de la solution $\cos[\ln(x)]$

Nous avons trouvé une solution φ qui est définie sur $]0; +\infty[$. Nous devons prouver qu'elle est unique. Pour ce faire, il est inutile d'escompter utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, il n'est applicable qu'aux équations différentielles du premier ordre alors que la notre est du second. Nous allons faire autrement et procéder ainsi que nous l'avons toujours fait...

Justement, parlons-en de cette fonction φ et faisons un peu plus connaissance en traçant sa courbe représentative.



Lorsque x se rapproche de 0, $\varphi(x)$ s'affole. L'imprécision relative du graphique ne permet pas de distinguer l'accélération les oscillations au voisinage de 0.

Mais revenons à ce qui est important pour nous : démontrer que φ est

$$\text{l'unique solution de l'équation différentielle } \begin{cases} x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \text{ et } y'(1) = 0 \end{cases}$$

Pour ce faire, nous allons supposer qu'il existe une autre solution que nous appellerons f qui est défini sur un intervalle I .

Les conditions initiales nous permettent de dire que 1 fait nécessairement parti de cet intervalle I .

On appelle alors J l'intersection des intervalles I et $\left]e^{-\pi/2}; e^{\pi/2}\right[$.

Si nous nous intéressons à ce dernier ensemble, c'est parce qu'il contient 1 et que φ y est une fonction strictement positive.

Sur notre graphique, cela correspond à la partie de courbe au-dessus de l'axe des abscisses.

En résumé, J est donc un intervalle ayant les qualités suivantes :

- La solution f y est définie.
- La fonction φ y est strictement positive donc non nulle.
- 1 fait parti de ce dernier intervalle.

A présent, nous allons pouvoir manoeuvrer !

Pour tout réel x de l'intervalle J , on définit la fonction a par :

$$a(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

Comme φ est strictement positive sur J , cette fonction a est parfaitement définie. Nous pouvons même ajouter qu'à l'instar de f et de φ , elle y est deux fois dérivable.

De plus, pour tout réel x de l'intervalle J , nous avons que :

$$f(x) = a(x) \cdot \varphi(x)$$

Donc :

- $f'(x) = a'(x) \cdot \varphi(x) + a(x) \cdot \varphi'(x)$
- $f''(x) = a''(x) \cdot \varphi(x) + 2 \cdot a'(x) \cdot \varphi'(x) + a(x) \cdot \varphi''(x)$

Notre but est de déterminer cette fonction a .

Comme f est une solution de l'équation différentielle $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0$, il vient que :

$$\begin{aligned} x^2 \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) + f(x) &= 0 \\ x^2 \cdot \underbrace{[a''(x) \cdot \varphi(x) + 2 \cdot a'(x) \cdot \varphi'(x) + a(x) \cdot \varphi''(x)]}_{f''(x)} + x \cdot \underbrace{[a'(x) \cdot \varphi(x) + a(x) \cdot \varphi'(x)]}_{f'(x)} \\ &\quad + \underbrace{a(x) \cdot \varphi(x)}_{f(x)} = 0 \end{aligned}$$

Réordonnons cet ordre cafouilleux :

$$\begin{aligned} \underbrace{[x^2 \cdot \varphi''(x) + x \cdot \varphi'(x) + \varphi(x)]}_{=0} \cdot a(x) + x^2 \cdot \varphi(x) \cdot a''(x) \\ \text{car } \varphi \text{ est solution...} \\ + [2 \cdot x^2 \cdot \varphi'(x) + x \cdot \varphi(x)] \cdot a'(x) = 0 \end{aligned}$$

Nous en arrivons donc à ce que cette fonction a soit solution de l'équation différentielle :

$$x^2 \cdot \varphi(x) \cdot a''(x) + [2 \cdot x^2 \cdot \varphi'(x) + x \cdot \varphi(x)] \cdot a'(x) = 0$$

Or nous savons que notre solution φ est non nulle sur l'intervalle J . Par conséquent, il est possible de diviser par $x^2 \cdot \varphi(x)$. Il vient alors :

$$a''(x) + \left[2 \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{1}{x} \right] \cdot a'(x) = 0$$

Or nous savons résoudre ce [genre](#) d'équation différentielle du premier ordre. Elle admet une unique solution qui est de la forme :

$$a'(x) = C \times \text{Exp}[-2 \cdot \ln(\varphi(x)) - \ln(x)]$$

Ceci car φ étant une fonction strictement positive sur l'intervalle J , une primitive de $\frac{\varphi'}{\varphi}$ est donc $\ln(\varphi)$.

Avant d'aller plus loin, déterminons cette constante C .

La fonction a découle de la fonction f . Nous avons choisi cette dernière

comme devant être une solution de l'équation $\begin{cases} x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \text{ et } y'(1) = 0 \end{cases}$.

Par conséquent, nous avons que :

- $f(1) = a(1) \times \underbrace{\varphi(1)}_{=1} = 1$ donc $a(1) = 1$.
- $f'(1) = a'(1) \times \underbrace{\varphi(1)}_{=1} + \underbrace{a(1) \times \varphi'(1)}_{=1 \times 0} = 0$ donc $\underbrace{C \times e^{-2 \cdot \ln(\varphi(1)) - \ln(1)}}_{a'(1)} = 1$

Après calculs, on trouve que :

$$C = 0$$

La dérivée de la fonction a est donc la fonction nulle sur l'intervalle J . Cela signifie donc que a est constante sur ce même intervalle J . Vu que nous avons déjà calculé $a(1)$, nous pouvons le dire :

Pour tout réel x de l'intervalle J , $a(x) = 1$ donc $f(x) = \varphi(x)$.

Ainsi :

Conclusion : L'unique solution de l'équation $\begin{cases} x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \text{ et } y'(1) = 0 \end{cases}$

sur l'intervalle $]e^{-\pi/2}; e^{\pi/2}[$ est la fonction $\varphi(x) = \cos[\ln(x)]$.

Et ailleurs ?

Hors de l'intervalle $]e^{-\pi/2}; e^{\pi/2}[$, nous ne pouvons garantir que φ soit la

solution unique de l'équation différentielle d'Euler $\begin{cases} x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + y = 0 \\ y(1) = 1 \text{ et } y'(1) = 0 \end{cases}$.

En fait, c'est sans doute le cas mais cela reste à prouver. C'est une histoire qui comme bien d'autres, recommencera peut-être un jour....

A propos du présent document...

Ce document a été conçu pour être consulté à l'écran ou être imprimé. Il est exclusivement mis en ligne sur Internet par la [taverne de l'Irlandais](http://www.tanopah.com) (www.tanopah.com).

Son auteur ne renonce à aucun de ses droits. En particulier, toute distribution non restreinte ou sur Internet est strictement interdite. Tout autre utilisation est libre. Le présent document est fourni gratuitement sans aucune garantie. Malgré les efforts de son auteur, il peut comporter des erreurs ou des fautes. Si vous en rencontrez une, merci de me les signaler.

L'auteur peut être joint à l'adresse e-mail : jerome.onillon@tanopah.com

Les fabuleux destins des équations différentielles oubliées ont été écrites entre le vendredi 20 septembre et le samedi 26 octobre 2002. Chacune porte en elle une part de la réponse...