La taverne de l'Irlandais

vous présente

A propos des matrices

Un horizon racompté par Jérôme ONILLON,
désagrégé par les mathématiques

Un mot d'introduction

Il y a peu, les matrices demeuraient une exclusivité de l'après BAC. Mais, par un curieux cheminement, elles sont arrivées au lycée. Non en section scientifique comme l'on aurait pu s'y attendre mais en filière économique et sociale. Certains verront là l'introduction d'un outil puissant au service de la résolution de problèmes spécifiques à ces classes. D'autres mauvais esprits objecteront que tout cela est la conséquence des quelques grenouillages qui agitent les marigots où se discutent les programmes de l'Education Nationale. Mais toujours est-il que les matrices sont là ! Aussi nous devions-nous de les maltraiter !

Fondamentalement, les matrices sont des tableaux à deux dimensions sur lesquels on peut définir toutes les opérations classiques : somme, produit et produit avec un réel. Ce sont ces lois de composition internes qui donnent aux matrices tout leur intérêt.

Avant que le monde ne s'effondre une dernière fois, c'est des matrices, de leurs opérations et de leurs spécificités dont nous allons vous parler. Notre propos aurait pu seulement s'adresser aux chanceux de l'option Math en première ES, mais il sera plus ambitieux. Alors, venez découvrir avec nous ce si étrange pays des matrices aux propriétés insoupçonnées...

Au sommaire :

Edition du mardi 12 octobre 2004

Si proche et pourtant si lointaine

Le temps des matrices

Les matrices sont une nouvelle espèce de nombres. Cependant, elles ne constituent pas pour autant une nouveauté. Car pratiquement, une matrice n'est rien autre qu'un tableau bidimensionnel.

Définition : n et p sont deux entiers naturels non nuls.
Une matrice de dimension $n \times p$ est tableau à deux dimensions de nombres réels (ou autres) comportant n lignes et p colonnes.
Si on appelle $a_{i,j}$ le coefficient (c'est-à-dire le nombre réel) de la matrice A se trouvant à la i-ième ligne et j-ième colonne alors nous avons :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{n \text{ lignes et } p \text{ colonnes}} = \left(a_{i,j}\right)$$

Il existe divers formats de matrices. En voici quelques spécimens !

- Les vecteurs colonnes de dimension n sont des matrices de dimension $n \times 1$. C'est-à-dire qu'elles comportent n lignes et une colonne. Elles sont donc de la forme $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
  Souvent, c'est par une matrice colonne que l'on représente les coordonnées d'un vecteur dans le plan, dans l'espace et même ailleurs.
- Les vecteurs lignes de dimension n sont des matrices de dimension $1 \times n$. Elles comportent donc une ligne et n colonnes. Elles sont de la forme $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.
  Là encore, c'et souvent par une matrice ligne que l'on représente les coordonnées d'un point ou d'un vecteur dans le plan ou l'espace.
- La matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est de dimension 2×3 c'est-à-dire qu'elle comporte deux lignes et trois colonnes.
  Son coefficient $a_{2,1}$ c'est-à-dire celui se trouvant à la deuxième ligne et à la première colonne est 7.
  Son coefficient $a_{3,1}$ n'existe pas ! En effet, elle n'a que deux lignes !
- La matrice $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 8 \\ 2/3 & \sqrt{6} & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ est de dimension 3×3. Elle a autant de lignes que de colonnes. Plus couramment, on la qualifie de matrice carrée d'ordre 3.
  Parmi les matrices carrées d'ordre 3, il en est deux que je voudrais vous présenter.
  La première est la matrice nulle. Tous ses coefficients sont nuls. Il s'agit de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La seconde est la matrice identité d'ordre 3 aussi notée Id_3. Tous ses coefficients sont nuls sauf ceux de sa diagonale qui sont égaux à 1. Bref $\mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ces deux matrices particulières existent pour tous les ordres possibles. Mêmes les plus absurdes !

Maintenant que nous avons une idée de ce que sont les matrices, nous allons pouvoir les opérer. Sortez les bistouris, nous arrivons !

Somme de deux matrices et produit par un réel

Il en va des matrices comme des vecteurs : on peut les additionner entre elles ou les multiplier par un réel. D'ailleurs n'écrit-on pas les coordonnées de ceux-ci sous la forme de vecteurs lignes ou colonnes.

L'addition matricielle

On additionne deux matrices en additionnant leurs coefficients respectifs. Pour que l'opération soit possible, les deux termes matriciels doivent avoir les mêmes dimensions.

Définition : $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices de dimension $n \times p$.

La somme des matrices A et B est la matrice de même dimension notée $A + B$ et définie par :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice A}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice A+B}}$$

Une fort belle et bien lourde définition dont on ne retiendra que le principe général : on additionne leurs coefficients respectifs. A ce propos, mettons-là en application sur quelques exemples.

- Commençons par additionner deux vecteurs lignes !
  $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+(-1) & -1+(-3) & 2+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$
  Tout cela n'est pas sans rappeler les calculs sur les coordonnées de vecteurs !
- A présent, procédons à la somme de deux matrices 3×2 !
  $$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 8 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \\ -1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & -3+1 \\ -5+2 & 8+7 \\ 7+(-1) & 9+(-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 15 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
- $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+6 & 1+8 & 7+??? \\ 2+9 & 3+1 & 4+??? \end{pmatrix} =$ Mais il manque une colonne !
  Tout cela car ces deux matrices n'ont pas les mêmes dimensions ! L'opération s'avère donc impossible !

- Enfin, achevons ce tour d'horizon en additionnant deux matrices 2×3 !

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+0 & -7+0 & 1+0 \\ 3+0 & 3+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Cet exemple illustre le fait que l'addition matricielle admet un "zéro" en la personne de la matrice nulle (celle qui a des 0 partout). On dit qu'elle est l'élément neutre de l'addition. N'importe quelle matrice ajoutée à la matrice nulle reste elle-même !

Les propriétés de la somme

A l'instar de ses aînées réelle ou vectorielle, l'addition matricielle est <u>commutative</u>. Comprenez par là que la somme $A+B$ est égale à la somme $B+A$. Les deux termes peuvent être commutés. En effet, nous avons :

$$A+B = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice A+B}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1}+a_{1,1} & \cdots & b_{1,p}+a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n,1}+a_{n,1} & \cdots & b_{n,p}+a_{n,p} \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{A la ligne i et à la colonne j,} \\ \textit{on commute les deux termes réels } a_{i,j} \textit{ et } b_{i,j} \\ \textit{Car l'addition réelle est commutative !}}} = B+A$$

En fait, l'addition matricielle hérite sa commutativité de sa consoeur réelle.
Cette propriété peut s'avérer fort utile dés lors qu'il s'agit d'enchaîner une série de sommes matricielles. C'est par exemple le cas avec ce qui suit !

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 8 & -15 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}_{\textit{Commutons ces deux matrices}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}_{\textit{Additionnons ces deux matrices}} + \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 8 & -15 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice nulle}} + \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 8 & -15 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 8 & -15 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Dans l'exemple précédent, les première et troisième matrices sont les opposées l'une de l'autre. Comprenez que leurs somme est la matrice nulle qui est l'élément neutre de l'addition matricielle. La notion d'opposé d'une matrice se définit comme celles des nombres ou des vecteurs.

Définition : dire que A est l'opposé de B signifie que $A+B=0$

Pratiquement, l'opposé de la matrice A est une matrice de même dimension et dont les coefficients sont les opposés de ceux de A.

Produit d'une matrice par un réel

Cette opération est l'extension de celle existant pour les vecteurs de l'espace ou du plan.

En effet, si on appelle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ de l'espace dans un quelconque repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ alors le vecteur $\boldsymbol{k}.\vec{u}$ y a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}.x \\ \boldsymbol{k}.y \\ \boldsymbol{k}.z \end{pmatrix}$.

C'est là le produit d'un vecteur colonne par un réel ! On étend cette opération a toutes les autres matrices en multipliant chacun de ses coefficients par le nombre réel $\boldsymbol{k}$.

Définition : $A=\left(a_{i,j}\right)$ est une matrice de dimension $n\times p$ et $\boldsymbol{k}$ est un réel.

Le produit du réel $\boldsymbol{k}$ par la matrice A est la matrice de même dimension notée $\boldsymbol{k}.A$ et définie par :

$$\boldsymbol{k}.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice } A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}.a_{1,1} & \boldsymbol{k}.a_{1,2} & \cdots & \boldsymbol{k}.a_{1,p} \\ \boldsymbol{k}.a_{2,1} & \boldsymbol{k}.a_{2,2} & \cdots & \boldsymbol{k}.a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{k}.a_{n,1} & \boldsymbol{k}.a_{n,2} & \cdots & \boldsymbol{k}.a_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice } \boldsymbol{k}.A}$$

A l'instar de ce qui se passe pour les vecteurs, cette multiplication matricielle/réelle est prioritaire par rapport à l'addition vectorielle. C'est un choix comme la priorité de la multiplication réelle par rapport à l'addition réelle. Ainsi, par exemple :

$$\underbrace{4.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}}_{\textit{Prioritaire...}} - \underbrace{3.\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\textit{Prioritaire...}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 28 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -21 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Il ne reste plus qu'à faire la somme...} \\ \textit{différence = somme avec l'opposé}}} = \begin{pmatrix} -8+3 & 4-(-21) \\ 28+0 & 12-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 25 \\ 28 & 3 \end{pmatrix}$$

Les aficionados de calcul vectoriel ne seront pas trop dépaysés !

Une des conséquences de cette priorité de la multiplication sur l'addition est que cette première devient distributive par rapport à cette seconde. En effet, si $A=\left(a_{i,j}\right)$ et $B=\left(b_{i,j}\right)$ sont deux matrices de dimension $n\times p$ et $\boldsymbol{k}$ est un réel alors :

$$\boldsymbol{k}.[A+B] = \boldsymbol{k}.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice } A+B} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}.a_{1,1}+\boldsymbol{k}.b_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{k}.a_{1,p}+\boldsymbol{k}.b_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{k}.a_{n,1}+\boldsymbol{k}.b_{n,1} & \cdots & \boldsymbol{k}.a_{n,p}+\boldsymbol{k}.b_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{La matrice } A+B \textit{ a été multipliée par } \boldsymbol{k}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}.a_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{k}.a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{k}.a_{n,1} & \cdots & \boldsymbol{k}.a_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice } \boldsymbol{k}.A} + \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}.b_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{k}.b_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{k}.b_{n,1} & \cdots & \boldsymbol{k}.b_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice } \boldsymbol{k}.A} = \boldsymbol{k}.A+\boldsymbol{k}.B$$

Dans le même esprit, nous pourrions dire que la multiplication réel/matrice est distributive par rapport à l'addition des nombres. En effet, si $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{l}$ sont deux réels et $A=\left(a_{i,j}\right)$ une matrice de dimension $n\times p$ alors :

$$(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}).A = \underbrace{\begin{pmatrix} (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}).a_{1,1} & \cdots & (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}).a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}).a_{n,1} & \cdots & (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}).a_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{Matrice } (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}).A...} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}.a_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{k}.a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{k}.a_{n,1} & \cdots & \boldsymbol{k}.a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{l}.a_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{l}.a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{l}.a_{n,1} & \cdots & \boldsymbol{l}.a_{n,p} \end{pmatrix}}_{\textit{...qui est aussi la somme de deux autres matrices}}$$

$$= \boldsymbol{k}.A+\boldsymbol{l}.A$$

Cette dernière propriété s'emploie généralement de la droite vers la gauche, à savoir dans le sens de la réduction des sommes : $2.A+6.A=8.A$. C'est comme avec les x et les vecteurs !

Les esprits chagrins et les vieilles filles me feront remarquer que les deux propriétés précédentes étaient assez évidentes et donc qu'il était inutile de rentrer dans les détails et ainsi de les établir. L'interrogation qui me vient est alors de savoir ce qu'ils diront de l'exercice suivant.

L'impossible résolution d'une équation matricielle linéaire

Pour conclure ce paragraphe, nous allons nous lancer dans la résolution de l'équation suivante d'inconnue matricielle X :

$$3.\left[X-\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 7 & 3 & 5\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}=5.X+\begin{pmatrix}4 & 6 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Ce genre d'équation n'est pas sans rappeler les traditionnelles équations du premier degré à coefficients réels. Nous inspirant de ces dernières, nous allons pour la résoudre mettre les X d'un côté et les "sans X" de l'autre. Petite différence tout de même : nous allons travailler avec des matrices 2×3

$$\underbrace{3.\left[X-\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 7 & 3 & 5\end{pmatrix}\right]}_{\text{On commence par distribuer 3}}+\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}=5.X+\begin{pmatrix}4 & 6 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$3.X-\begin{pmatrix}-3 & 12 & 6\\ 21 & 9 & 15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}=5.X+\begin{pmatrix}4 & 6 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{3.X-5.X}_{\text{Les X d'un côté...}}=\underbrace{\begin{pmatrix}4 & 6 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 12 & 6\\ 21 & 9 & 15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}}_{\text{Les "sans X" de l'autre !}}$$

$$-2.X=\begin{pmatrix}1 & 19 & 9\\ 13 & 11 & 13\end{pmatrix}$$

On divise par -2

$$X=-\frac{1}{2}.\begin{pmatrix}1 & 19 & 9\\ 13 & 11 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}5 & -9{,}5 & -4{,}5\\ -6{,}5 & -5{,}5 & -6{,}5\end{pmatrix}$$

Conclusion : l'unique solution de l'équation est la matrice 2×3 $X=\begin{pmatrix}-0{,}5 & -9{,}5 & -4{,}5\\ -6{,}5 & -5{,}5 & -6{,}5\end{pmatrix}$.

Les préceptes introduits en quatrième restent valables même avec les matrices. Ainsi :

- On ne change pas une égalité si on ajoute ou retranche la même chose aux deux membres.
- On ne change pas une égalité si on multiplie ou divise ses deux membres par le même nombre réel non nul !

Ils sont valables pour les réels, les vecteurs et les matrices ! En fait, ils sont valables partout où une addition et une multiplication par un réel existe !

Le produit matriciel

Si on peut considérer que la somme matricielle et le produit d'une matrice par un réel sont les extensions de leurs confrères vectoriels, il ne peut en aller de même pour le produit de deux matrices. Car le produit de deux vecteurs n'existe pas !
Ou plutôt si, il existe ! Mais son résultat est un nombre réel ! C'est à partir de ce produit que l'on dit scalaire que nous allons définir le produit de deux matrices.
Pour bien comprendre la chose, plaçons dans l'espace que nous supposons muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(1;-2;3)$ et $\vec{v}(7;4;-1)$ est donné par

$$\vec{u}.\vec{v}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}7\\ 4\\ -1\end{pmatrix}}_{\text{Déjà le produit matriciel point...}}=\underbrace{1\times 7+(-2)\times 4+3\times(-1)}_{\text{Somme des produits dans chaque coordonnée}}=-4$$

S'inspirant du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$, nous dirons que le produit de la matrice ligne $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est égal à la matrice de dimension 1×1 qu'est (-4).

Prolongeons cette expérience sur d'autres exemples :

- $$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{1\times 1+(-3)\times 0+5\times 7}_{\text{MatriceLigne avec colonne 1}} & \underbrace{1\times 2+(-3)\times 4+5\times(-3)}_{\text{MatriceLigne avec colonne 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 25 \end{pmatrix}$$

  En quelque sorte, nous avons considéré que la seconde matrice était un double vecteur colonne. Nous avons donc procédé à deux produits scalaires. Le résultat de la multiplication d'une matrice 1×3 et d'une matrice 3×2 est donc une matrice 1×2.

- $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Va donner ses lignes...}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Va donner sa colonne...}} = \begin{pmatrix} \underbrace{1\times 7+2\times 2+3\times 1}_{\text{Ligne 1 avec la colonne}} \\ \underbrace{(-4)\times 7+5\times 2+1\times 1}_{\text{Ligne 2 avec la colonne}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -17 \end{pmatrix}$$

  Grossièrement, nous avons les produits scalaires de chacune des lignes de la première matrice avec cette matrice colonne. Le produit d'une matrice 2×3 et d'une matrice 3×1 est donc une matrice de dimension 2×1.

- $$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{Donne tes lignes !}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Refile tes colonnes !}} = \begin{pmatrix} \underbrace{2\times(-3)}_{\text{Ligne 1 et Colonne 1}} & \underbrace{2\times 1}_{\text{Ligne 1 et Colonne 2}} \\ \underbrace{7\times(-3)}_{\text{Ligne 2 et Colonne 1}} & \underbrace{7\times 1}_{\text{Ligne 2 et Colonne 2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -21 & 7 \end{pmatrix}$$

  Là encore, nous avons procéder au produit scalaire de chaque ligne avec chaque colonne. Et même si cela étonnera certains, le produit d'une matrice 2×1 et d'une matrice 1×2 donne une matrice carrée d'ordre 2.
  Comme quoi, le produit matriciel ne réduit pas nécessairement les dimensions.

Ces trois exemples montrent comment multiplier deux matrices : on fait le produit scalaire de chaque ligne de la première matrice avec chaque colonne de la seconde. Le produit matriciel se définit donc de la manière suivante :

Définition : $A = (a_{i,j})$ est une matrice de dimension $n \times m$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de dimension $m \times p$.
La produit des matrices A et B est la matrice de dimension $n \times p$ notée $A \times B$ et définie par :

$$\text{ligne } i \; \underbrace{\begin{pmatrix} & \cdots & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,m} \\ & \cdots & \end{pmatrix}}_{\text{Matrice A}} \times \underbrace{\overset{\text{colonne } j}{\begin{pmatrix} & b_{1,j} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & b_{1,m} & \end{pmatrix}}}_{\text{Matrice B}} = \underbrace{\overset{\text{colonne } j}{\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{i,1}\times b_{1,j}+....+a_{i,m}\times b_{m,j} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}}}_{\text{Matrice A×B}} \; \text{ligne } i$$

Le coefficient de matrice produit se trouvant à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est donc la somme des produits des m coefficients de la i-ème ligne de la matrice A et de la j-ème ligne de la matrice B. Bref, c'est très simple !
Entre deux siestes sur les bancs de l'école primaire, on a dû vous apprendre à poser vos multiplications lorsque celles-ci concernaient de grands nombres. Une astuce similaire existe pour les produits matriciels. Elle structure les calculs et évite ainsi de s'emmêler les pinceaux.

Par exemple, multiplions les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On écrit ces deux matrices dans un tableau : le premier facteur sur la gauche et le second sur le haut. Puis, on calcule chaque coefficient de la matrice produit en "emboîtant" la ligne correspondante du premier facteur et la colonne correspondante de la seconde matrice facteur.

					Seconde matrice facteur
			0	-2	3
			1	-3	4
Premier facteur			6	-1	0
1	-2	1	$1\times0+(-2)\times1+1\times6$ $=4$	$1\times(-2)+(-2)\times(-3)+1\times(-1)$ $=3$	$1\times3+(-2)\times4+1\times0$ $=-5$
2	0	-4	$2\times0+0\times1+(-4)\times6$ $=-24$	$2\times(-2)+0\times(-3)+(-4)\times(-1)$ $=0$	$2\times3+0\times4+(-4)\times0$ $=6$
					Matrice produit

Cette présentation a le gros avantage de structurer les calculs : elle limite le risque de prendre la mauvaise ligne ou la mauvaise colonne. Reste alors à éviter l'écueil des erreurs de calculs. Ayant posé et effectué la multiplication, nous pouvons conclure que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -24 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Tous les produits ne sont pas possibles !

Tous les produits de matrices ne sont pas possibles. Elles doivent avoir des dimensions compatibles. Plus exactement, le premier facteur doit avoir autant de colonnes que le second a de lignes. Cela afin que les lignes de la première matrice s'emboîtent bien avec les colonnes de la seconde. Il est par exemple impossible de faire le produit suivant $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}}_{\textit{Trois colonnes}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}}_{\textit{Deux lignes}}$

				Seconde matrice facteur	
			5	3	
Première matrice			6	4	
1	2	3	$1\times5+2\times6+3\times???$	$1\times3+2\times4+3\times???$	**Matrice produit**
-1	0	7	$(-1)\times5+0\times6+7\times???$	$(-1)\times3+0\times4+7\times???$	

Il manque une ligne à la seconde matrice. Par contre, le produit dans l'autre sens est possible !

La multiplication matricielle n'est pas commutative !

La multiplication réelle est commutative. En effet, les calculs 2×3 et 3×2 aboutissent au même résultat. Les facteurs 2 et 3 peuvent être commutés.
Pour la multiplication matricielle, les choses sont différentes : elle n'est pas commutative.
C'est-à-dire que prenant deux matrices A et B, il n'est pas sûr que le produit $A\times B$ soit égal au produit $B\times A$.
S'il en est ainsi, c'est déjà parce que ces deux multiplications peuvent aboutir à deux matrices n'ayant pas les mêmes dimensions.

Par exemple, si l'on effectue les deux produits avec les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ alors :

$$A\times B=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times(-1)+2\times 5\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}9\end{pmatrix}}_{\textit{Matrice } 1\times 1}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\times 1 & -1\times 2\\ 5\times 1 & 5\times 2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 5 & 10\end{pmatrix}}_{\textit{Matrice } 2\times 2}$$

Et puis, même lorsque l'on travaille avec des matrices sympas comme des matrices carrées d'ordre 2, la plupart du temps, les choses se passent mal : ça ne commute pas !
Par exemple, voyons ce qu'il en est avec les matrices carrées $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 7 & 1\end{pmatrix}$.

$$A\times B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 6 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & 1\\ -5 & 19\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 7 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -2\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 7\\ 13 & -13\end{pmatrix}$$

Les deux multiplications aboutissent à des résultats différents. Donc A et B ne commutent pas.
Alors bien sûr, il peut arriver que deux matrices commutent. Mais c'est l'exception ! C'est loin d'être une généralité. Nous devons le dire :

La multiplication matricielle n'est pas commutative !

Une précision : même s'il n'y avait qu'un seul couple de matrices A et B pour lequel le produit $A\times B$ serait différent du produit $B\times A$, cela ferait quand même de la multiplication matricielle une opération non commutative.

Par contre, elle est associative

L'associativité est la propriété qui permet de faire les produits de trois facteurs ou plus dans l'ordre où l'on veut. La multiplication réelle étant associative, le produit $2\times 3\times 5$ de plusieurs façons suivant l'association retenue c'est-à-dire la première multiplication choisie.

$$\underbrace{2\times 3}_{\substack{\textit{On peut commencer}\\ \textit{par ce produit}}}\times 5=6\times 5=30 \qquad 2\times\underbrace{3\times 5}_{\substack{\textit{On peut commencer}\\ \textit{par ce produit}}}=2\times 15=30$$

Dans l'exemple précédent, à aucun moment la commutativité de la multiplication réelle n'est intervenue. Sinon il y aurait une troisième voie en commençant par la multiplication de 2 et 5.
La multiplication n'est pas commutative. Cependant elle est associative. Démontrons cela pour les matrices carrées.

Nous considérons trois matrices carrées d'ordre n notées $A=\left(a_{i,j}\right)$, $B=\left(b_{i,j}\right)$ et $C=\left(c_{i,j}\right)$.

Pour prouver que le produit matriciel est associatif, Nous devons prouver que les calculs $\underbrace{(A\times B)}_{Preum's}\times C$ et $A\times\underbrace{(B\times C)}_{Preum's}$ conduisent au même résultat. Quelque soit la multiplication par laquelle on commence, on arrive à la même matrice.

Pour y parvenir, nous allons nous concentrer sur le coefficient d'indices i,j de la matrice $A\times B\times C$.

La démonstration qui suit, est assez difficile à suivre et exige de l'attention et quelques précisions. Le symbole Σ (prononcer "sigma") dont nous allons faire usage, est là pour indiquer une somme. Ainsi par exemple

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\substack{\textit{Somme des } a_k \\ \textit{avec k allant de 1 à n}}} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots + a_n$$

Le coefficient de la matrice $(A\times B)\times C$ se trouvant à la ligne i et à la colonne j est donné par :

$$\underbrace{\left[(A\times B)\times C\right]_{i,j}}_{\substack{\textit{Coefficient d'indice i,j} \\ \textit{de la matrice } (A\times B)\times C}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{[A\times B]_{i,k}}_{\substack{\textit{Coefficient d'indice i,k} \\ \textit{de la matrice } A\times B}} .c_{k,j}}_{\substack{\textit{La ligne i de } A\times B \\ \textit{avec la colonne j de C}}} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}.b_{l,k}\right)}_{\substack{\textit{La ligne de i de A} \\ \textit{avec} \\ \textit{la colonne j de B}}} .c_{k,j} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}.b_{l,k}.c_{k,j}}_{\substack{\textit{Globalement, une somme} \\ \textit{de somme}}}$$

Le coefficient de la matrice $A\times(B\times C)$ se trouvant à la ligne i et à la colonne j est donné par :

$$\underbrace{\left[A\times(B\times C)\right]_{i,j}}_{\substack{\textit{Coefficient d'indice i,j} \\ \textit{de la matrice } A\times(B\times C)}} = \underbrace{\sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \underbrace{[B\times C]_{l,j}}_{\substack{\textit{Coefficient d'indice l,j} \\ \textit{de la matrice } B\times C}}}_{\substack{\textit{La ligne i de A} \\ \textit{avec la colonne j de } B\times C}} = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l}.\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} b_{l,k}.c_{k,j}\right)}_{\substack{\textit{La ligne de l de B} \\ \textit{avec} \\ \textit{la colonne j de C}}} = \underbrace{\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,l}.b_{l,k}.c_{k,j}}_{\substack{\textit{Globalement, une somme} \\ \textit{de somme}}}$$

Les deux signes sommes (l'un en variable k et l'autre en l) ne dépendant pas l'un de l'autre, ils sont donc permutables. Par suite, pour tous entiers i et j compris entre 1 et n, avons-nous :

$$\left[(A\times B)\times C\right]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}.b_{l,k}.c_{k,j} = \left[A\times(B\times X)\right]_{i,j}$$

Leurs coefficients respectifs étant égaux, il en va donc de même pour les matrices carrée d'ordre n que sont $(A\times B)\times C$ et $A\times(B\times C)$.

La propriété que nous venons d'établir pour les matrices carrées, s'étend à toutes les autres matrices pour peu qu'elles aient des dimensions compatibles. Ainsi avons-nous :

Définition : la multiplication matricielle est associative. Pour toutes matrices A, B et C aux dimensions compatibles :

$$\underbrace{A\times B\times C = (A\times B)\times C = A\times(B\times C)}_{\textit{On commence par la multiplication que l'on veut !}}$$

Cette propriété de la multiplication matricielle permet de simplifier certains calculs. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Commençons par} \\ \textit{cette multiplication}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Ce dernier produit se fait} \\ \textit{assez facilement !}}} = \begin{pmatrix} 52+0 & 0-13 \\ 104+0 & 0+13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & -13 \\ 104 & 13 \end{pmatrix}$$

Classiquement, nous aurions pu commencer nos calculs en multipliant les deux premières matrices. Mais il est probable que les calculs auraient été un petit peu plus compliqués...

Priorité opératoire et distributivité

A l'instar de leurs consoeurs réelles, la multiplication matricielle est prioritaire par rapport à l'addition. S'il en est ainsi, c'est parce que l'on a décrété. Les priorités opératoires restent donc les mêmes que pour les nombres réels.
Par exemple, effectuons le calcul suivant :

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 0 & 7\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}}_{\textit{Multiplication prioritaire}} = \underbrace{\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 0 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12 & 15\\ 8 & 10\end{pmatrix}}_{\textit{Il ne reste plus qu'à additionner}} = \begin{pmatrix}9 & 16\\ 8 & 17\end{pmatrix}$$

Même en additionnant ou multipliant des matrices de dimensions différentes, un calcul peut avoir un sens. Cela dit, au cours de celui-ci, il faut toujours s'assurer que l'opération que l'on va faire est possible. Cela évite de faire des bêtises !

La conséquence de cette priorité de la multiplication sur l'addition est que cette première devient distributive par rapport à cette seconde. Mais attention car la multiplication n'est pas commutative. Cela signifie donc que le sens dans lequel se fait la distribution a son importance. Elle peut se faire par :

Distribution à gauche

$$\underbrace{A\times(B+C)}_{\textit{On distribue de la gauche}} = \underbrace{A\times B + A\times C}_{\textit{On multiplie à gauche par A}}$$

Distribution à droite

$$\underbrace{(B+C)\times A}_{\textit{On distribue de la droite}} = \underbrace{B\times A + C\times A}_{\textit{On multiplie à droite par A}}$$

Une telle propriété se démontre assez facilement : tout repose sur le fait que la colonne j (ou ligne i) de la matrice $B+C$ est la somme des lignes colonnes j (ou des lignes i) des matrices B et C.

Un produit nul de facteur non nuls

Depuis toujours, on vous a demandé de considérer comme un acquis qu'un produit était nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs l'était. Cette réalité permet en outre de résoudre des équations du second degré, voire mieux.
Mais il s'agit là d'une vérité réelle voire complexe. Car la réalité matricielle est tout autre : un produit peut être nul sans pour autant que l'un de ses facteurs le soit. C'est par exemple le cas des produits suivants :

- $\begin{pmatrix}6 & -3 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\ 6\\ -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\times 4+(-3)\times 6+2\times(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix} \Leftarrow$ Matrice nulle 1×1 !
- $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}10 & 8\\ 5 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times 10+(-2)\times 5 & 1\times 8+(-2)\times 4\\ (-3)\times 10+6\times 5 & (-3)\times 8+6\times 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Leftarrow$ Matrice nulle 2×2
- $\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^2}_{\substack{\textit{Le carré est un}\\ \textit{produit par soi-même}}} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times 1+1\times(-1) & 1\times(-1)+(-1)\times(-1)\\ 1\times 1+1\times(-1) & 1\times(-1)+(-1)\times(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

On dit que les matrices précédentes sont des éléments irréguliers : un produit dont elles sont facteurs peut donner une matrice nulle. A leur sujet, on parle également de diviseurs de 0. C'est à cause d'elle que le monde des matrices n'est pas intègre.

Le monde merveilleux des matrices carrées d'ordre n

Une matrice carrée d'ordre n est un matrice de dimension $n \times n$, c'est-à-dire qu'elle a autant de lignes que de colonnes. C'est d'ailleurs pour cela qu'elle est carrée.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n se note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le symbole $\mathbb{R}$ est là pour indiquer que ces matrices sont à coefficients réels.
L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un monde merveilleux pour les raisons que voici :

- D'abord la somme de deux matrices carrées d'ordre n est une autre matrice carrée d'ordre n.
  A cela, rien d'extraordinaire car il en va ainsi de toutes les sommes de matrices : les dimensions sont conservées.
  La matrice nulle $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\textit{n lignes et n colonnes}}$ est l'élément neutre de cette addition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  Cette matrice nulle est à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ce qu'est 0 à l'ensemble des réels. La somme de toute matrice carrée A et de cette matrice nulle donne la matrice A.
  Enfin, toute matrice carrée A d'ordre n admet dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un opposé, c'est-à-dire une matrice B telle que $A + B = \text{Matrice nulle}$.
  Les coefficients de cette matrice B sont les opposés de ceux de A.
  Tout cela fait de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de l'addition matricielle un groupe.
  Avec le produit par un réel, l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ devient un espace vectoriel.

- Et puis, il y a le produit de deux matrices carrées d'ordre n dont le résultat est une autre matrice carrée d'ordre n. Et là, c'est une spécificité des matrices carrées !
  La matrice identité $\mathrm{Id}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Des 1 sur la diagonale,} \\ \textit{des 0 partout ailleurs}}}$ est l'élément neutre de cette multiplication matricielle : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \times \mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_n \times A = A$.
  Rappelez- vous de ce qui se passe dans $\mathbb{R}$: il y a la multiplication, son élément neutre 1, puis vient la question inverse.
  Dire qu'un nombre b est l'inverse d'un nombre a signifie que $a \times b = 1$.
  Depuis la quatrième, nous savons que tout nombre réel a un inverse. Pour les matrices, les choses sont différentes. Toute matrice carrée A n'a pas nécessairement d'inverse. Il n'existe pas forcément de matrice B telle que $A \times B = \mathrm{Id}_n$.
  Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la multiplication matricielle n'est pas un groupe. Par contre, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec ses addition et multiplication matricielles est un anneau qui n'est pas intègre.

La question de l'inverse (à gauche ou à droite)

Le produit réel a ceci d'avantageux sur son petit frère matriciel qu'il est commutatif. La définition de l'inverse d'un nombre réel s'en trouve donc simplifiée.

Dire qu'un nombre b est l'inverse d'un nombre a signifie que $a \times b = 1$.

Pour les matrices, les choses sont différentes car les produits $A \times B$ et $B \times A$ ne sont pas toujours égaux. Si l'on veut définir cette notion d'inverse pour les matrices, où doit-on multiplier : à gauche ou à droite ? Pour solutionner le problème, il est possible de définir deux types d'inverse : l'un à gauche, l'autre à droite.

Définition : A, B et C sont trois matrices carrées d'ordre n.
La matrice B est <u>l'inverse à gauche</u> de la matrice A $\Leftrightarrow \underbrace{B \times A}_{\textit{Produit à gauche}} = Id_n$

La matrice C est <u>l'inverse à droite</u> de la matrice A $\Leftrightarrow \underbrace{A \times C}_{\textit{Produit à droite}} = Id_n$

Et là, les choses se compliquent car une matrice A pourrait très bien avoir un inverse à gauche B sans pour autant avoir un inverse à droite C. L'existence de l'un n'implique pas nécessairement l'existence de l'autre.
Par contre, si on sait qu'une matrice A admet un inverse à gauche B et un inverse à droite C alors ces deux inverses sont égaux. Pour le prouver, on utilise l'associativité du produit matriciel sur le produit $B \times A \times C$.

$$\underbrace{B \times A}_{\substack{\textit{On commence par ce produit} \\ \textit{B est l'inverse à gauche de A}}} \times C = Id_n \times C = C \qquad\qquad B \times \underbrace{A \times C}_{\substack{\textit{On commence par ce produit} \\ \textit{C est l'inverse à droite de A}}} = B \times Id_n = B$$

$$\text{d'où} \quad C = B \times A \times C = B$$

Mais encore faut-il que les existences d'un inverse à gauche B et d'un autre à droite C aient été établies !
On pourrait croire que cette situation des inverses de matrices est inextricable, balancée qu'elle est entre la gauche et la droite. La réalité est en fait moins indécise car, en recourant à l'algèbre linéaire, on montre que si que si une matrice est inversible à gauche (ou à droite) alors elle est de l'autre côté et donc quelle l'est tout court. L'inverse d'une matrice lorsqu'il existe, est une chose unique qui ne dépend pas du sens dans lequel le produit est fait. Ainsi pouvons-nous le définir en disant :

Définition : A et B sont deux matrices carrées d'ordre n.
Dire que la matrice B est l'inverse de la matrice A <u>signifie que</u> $\underbrace{A \times B = B \times A}_{\substack{\textit{Un seul produit} \\ \textit{suffit à définir...}}} = Id_n$

Autrement dit, le produit des deux est égal à l'élément neutre de la multiplication matricielle.

La question qui se pose à présent est de savoir à quelle condition une matrice est inversible et alors de déterminer son inverse. C'est l'objet de ce qui arrive...

L'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Ayant une matrice carrée A d'ordre n, existe-t-il une matrice B de même dimension telle que le produit de deux donne la matrice identité Id_n ? Et si oui, comment la trouver ?

Loin de nous lancer dans de grandes chevauchées aux résultats incertains, regardons ce qui se passe pour les matrices carrées d'ordre 2. Cela nous donnera peut-être une idée de ce qui est pour les autres.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 dont les coefficients a; b; c et d sont des nombres réels fixés.

Existe-t-il une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ qui serait son inverse, c'est-à-dire telle que $A \times B = Id_n$?

Bien sûr, x, y, z et t sont quatre réels qu'il faut déterminer. De leurs existences dépend celle de l'inverse de A.

$$\text{B est l'inverse de A} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\text{Matrice A}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}}_{\text{Matrice B}} = \mathrm{Id}_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a.x+b.z & a.y+b.t \\ c.x+d.z & c.y+d.t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients respectifs le sont. Cela nous conduit à un système linéaire 4×4 qui est en fait un double système 2×2 :

$$\underbrace{(S)\begin{cases} a.x+b.z=1 \\ c.x+d.z=0 \end{cases}}_{\substack{\text{Egalité des premières colonnes} \\ \text{Les inconnues sont x et z}}} \qquad \underbrace{(S')\begin{cases} a.y+b.t=0 \\ c.y+d.t=1 \end{cases}}_{\substack{\text{Egalité des secondes colonnes} \\ \text{Les inconnues sont y et t}}}$$

Ces deux systèmes ont les mêmes coefficients du point de vue de leurs inconnues. Et ces deux systèmes admettront deux solutions uniques si leur déterminant $a.d-b.c$ (au singulier car c'est le même) est non nul.

Cela nous permet de dire à quelle condition une matrice carrée d'ordre 2 admet un inverse.

> Une matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible $\Leftrightarrow$ Son déterminant $a.d$ - $b.c$ est non nul

L'objectif suivant est l'obtention de la matrice inverse B. Nous supposons donc que le déterminant de la matrice A est non nul.

Résolvons le premier système $(S)\begin{cases} a.x+b.z=1 & \textbf{(1)} \\ c.x+d.z=0 & \textbf{(2)} \end{cases}$ par combinaisons linéaires.

Pour déterminer x, nous éliminons z

$$\begin{array}{lcr} \textbf{(1)} & \xrightarrow{\times d} & a.d.x+b.d.z=d \\ \ominus\ \textbf{(2)} & \xrightarrow{\times b} & c.b.x+b.d.z=0 \\ \hline & & (a.d-b.c).x=d \end{array}$$

$$x=\frac{d}{a.d-b.c}=\frac{d}{\det(A)}$$

Pour déterminer z, nous éliminons x.

$$\begin{array}{lcr} \textbf{(1)} & \xrightarrow{\times c} & a.c.x+b.c.z=c \\ \ominus\ \textbf{(2)} & \xrightarrow{\times a} & a.c.x+a.d.z=0 \\ \hline & & (b.c-a.d).z=-c \end{array}$$

$$z=\frac{-c}{a.d-b.c}=\frac{-c}{\det(A)}$$

Pour obtenir la seconde colonne de B, on résout le second système $(S')\begin{cases} a.y+b.t=0 & \textbf{(1)} \\ c.y+d.t=1 & \textbf{(2)} \end{cases}$.

Pour déterminer y, nous éliminons t

$$\begin{array}{lcr} \textbf{(1)} & \xrightarrow{\times d} & a.d.y+b.d.t=0 \\ \ominus\ \textbf{(2)} & \xrightarrow{\times b} & c.b.y+b.d.t=b \\ \hline & & (a.d-b.c).y=-b \end{array}$$

$$y=\frac{-b}{a.d-b.c}=\frac{-b}{\det(A)}$$

Pour déterminer t, nous éliminons y.

$$\begin{array}{lcr} \textbf{(1)} & \xrightarrow{\times c} & a.c.y+b.c.t=0 \\ \ominus\ \textbf{(2)} & \xrightarrow{\times a} & a.c.y+a.d.t=a \\ \hline & & (b.c-a.d).t=-a \end{array}$$

$$t=\frac{a}{a.d-b.c}=\frac{a}{\det(A)}$$

Conclusion : la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 est inversible si et seulement si son déterminant $\det(A) = a.d - b.c$ est non nul.

Dans un tel cas, son inverse est la matrice carrée $\begin{pmatrix} \dfrac{d}{\det(A)} & \dfrac{-b}{\det(A)} \\ \dfrac{-c}{\det(A)} & \dfrac{a}{\det(A)} \end{pmatrix}$.

Mettons ces formules en application sur la matrice carrée d'ordre 2 qu'est $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Commençons par calculer son déterminant : $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 2 \times 7 = 1$.

Comme il est non nul la matrice A est inversible et son inverse est la matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour vérifier le résultat, calculons le produit de la matrice A et de son inverse supposé :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times5+7\times(-2) & 3\times(-7)+7\times3 \\ 2\times5+5\times(-2) & 2\times(-7)+5\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2$$

Donc la matrice B est bien l'inverse de la matrice A et réciproquement.

L'inverse pour les ordres supérieurs

A l'instar de ce que nous venons de voir avec des matrices carrées d'ordre, seules les matrices carrées dont le déterminant est non nul, sont inversibles. La formule du déterminant d'une matrice carrée d'ordre quelconque faisant appel à des notions assez complexes comme celles des permutations et de leurs signatures, nous ne nous aventurerons pas sur ce terrain.
Pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2, nous avons été amené à résoudre un faux système 4×4 qui était en fait un double système 2×2. Si nous cherchions l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3, nous nous lancerions dans la résolution d'un triple système 3×3.
Pour l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 4, ce serait un quadruple système 4×4.
Bref, que des choses sympathiquement de plus en plus compliquées. Alors bien sûr, il existe des formules permettant de calculer l'inverse d'une matrice. Elles s'appuient sur les comatrices et sont utilisées par vos calculatrices. Mais elles se situent bien au-delà de notre modeste horizon.

L'inverse dans la résolution d'un système

La question que certains n'auront déjà pas manqué de se poser est de savoir à quoi l'inverse d'une matrice peut-il bien servir ?
Une des utilisations possibles de l'inverse est la résolution d'un système linéaire. Prenons l'exemple du système 3×3 qu'est $(S)\begin{cases} x + 4.y + z = 49 \\ x + 3.y + 3.z = 60 \\ x + 4.y + 2.z = 58 \end{cases}$.

Sous forme matricielle, ce système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x + 4.y + z = 49 \\ x + 3.y + 3.z = 60 \\ x + 4.y + 2.z = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x + 4.y + z \\ x + 3.y + 3.z \\ x + 4.y + 2.z \end{pmatrix}}_{\text{Cette matrice peut être vue comme étant le produit d'une matrice } 3\times3 \text{ et d'une } 3\times1} = \begin{pmatrix} 49 \\ 60 \\ 58 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Appelons cette matrice } A} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 60 \\ 58 \end{pmatrix}$$

Or la matrice $A=\begin{pmatrix}1&4&1\\1&3&3\\1&4&2\end{pmatrix}$ est inversible et son inverse est la matrice $A'=\begin{pmatrix}6&4&-9\\-1&-1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

Pourquoi en est-il ainsi ? Pour le prouver, procédons au produit de ces deux matrices :

$$A\times A'=\begin{pmatrix}1&4&1\\1&3&3\\1&4&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6&4&-9\\-1&-1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-4-1&4-4+0&-9+8+1\\6-3-3&4-3+0&-9+6+3\\6-4-2&4-4+0&-9+8+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=Id_3$$

Leur produit étant égal à l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice A' est bien l'inverse de la matrice A !

Revenons à votre dernière égalité. Elle s'écrivait :

$$A.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}49\\60\\59\end{pmatrix}\Leftrightarrow\underbrace{A'\times A}_{\substack{=Id_3\\ \text{car } A' \text{ est}\\ \text{l'inverse de } A}}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A'\times\begin{pmatrix}49\\60\\59\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}6&4&-9\\-1&-1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}}_{\text{Matrice } A'}\times\begin{pmatrix}49\\60\\59\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\7\\9\end{pmatrix}$$

On multiplie <u>à gauche</u> les deux membres de l'égalité par A'

Conclusion : l'unique solution du système (S) est $(12;7;9)$.

C'est en s'appuyant sur des raisonnements de ce type que calculatrices et logiciels peuvent résoudre les systèmes linéaires. Sachant inverser une matrice, ils en déduisent la solution dudit système.