Le mot de l'auteur

Comme chaque année au début de l'été, je publie l'intégralité des exercices que j'ai donnés en devoirs dans certaines des classes que j'avais. Voici la cuvée première S 2008-2009 !
Que dire de la première S ? Juste que contrairement à ce qui se rumine ici et surtout là, elle compte de moins en moins d'élèves et que parmi ceux-ci il y en a de moins en moins qui ont un «profil scientifique». La «prédominance du bac S», une chimère de Carlito...
Certains voient là la défaillance de l'enseignement scientifique qu'ils estiment devoir être repensé avec leurs bonnes idées. Il doit certes évoluer avec son temps mais ce qu'ils oublient de préciser, c'est que depuis plus de dix ans, ils ont réduit, piétiné, vandalisé l'enseignement des sciences au collège. Surtout éliminer tout ce qui pouvait représenter la moindre difficulté pour les élèves. Un élève qui devient un client qu'il faut pouponner et caresser dans le sens du poil...qui lui pousse dans la main. Et croyez bien que chez certains, il y a du boulot !
Et puis, il y a la très chère «sélection par les maths» ! Il fallait mettre fin à cette injustice au nom de l'égalité des chances qui est en train de rendre tout le monde égal dans la médiocrité. Il fut un temps où «être nul en math» était un constat, voire presque un regret. Aujourd'hui, c'est presque devenu une fierté. Tel est aujourd'hui le discours dominant que nous infligent nos élites.
Il est un fait que contrairement aux matières littéraires (quoique...), les maths ont toujours été une discipline exigeante, rigoureuse et segmentante. Dans notre matière, les résultats que l'on obtient sont rarement proportionnels aux efforts fournis. Parfois, il faut donner beaucoup pour avoir peu. D'autres fois, on obtient beaucoup parce qu'on avait beaucoup donné.
Mais bon, c'est comme ça ! Et vu ce qui nous arrive, l'enseignement scientifique n'est pas prêt d'aller mieux en France.
Ils sont médiocres et entendent bien que vous le deveniez vous aussi. Qui ça «ils» ?
Tendez l'oreille, seuls eux parlent !

Les exercices de ce volume sont classés par catégories :

La taverne de l'Irlandais
[http://www.tanopah.com]
présente

Le Grand N'importe Quoi de première S

31 exercices explosifs et exclusifs !

Le recueil des exercices donnés en devoirs de mathématiques durant la saison 2008-2009
par Jérôme ONILLON, prof. désagrégé et même pas recyclable de mathématiques

Edition du samedi 4 juillet 2009

Analyse sans dérivation, ni limites

LE RETOUR DES INÉQUATIONS

Le contexte

Un exercice assez classique sur les inéquations produits et quotients et surtout le second degré.

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$3.x^2+7.x+4<3.x-2$	$(3.x-2)^2 \geq (4.x+7)^2$
$\dfrac{2.x+5}{3-x} \leq 1$	$6.x-1 \geq \dfrac{7}{x-2}$

Le corrigé

a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3.x^2+7.x+4<3.x-2$

$$3.x^2+7.x+4<3.x-2 \quad \Leftrightarrow \quad 3.x^2+7.x+4-3.x+2<0 \quad \Leftrightarrow \quad 3.x^2+4.x+6<0$$

Pour connaître le signe de la forme du second degré $\varphi(x)=3.x^2+4.x+6$, calculons son discriminant :

$$\Delta_{\varphi(x)}=4^2-4\times 3\times 6=16-72=-56$$

Comme son discriminant est négatif, alors $\varphi(x)$ est toujours du même signe, celui de son coefficient dominant 3. Donc $\varphi(x)$ est toujours positif et n'est jamais négatif.

<u>Conclusion :</u> cette inéquation n'admet aucune solution. Ce que l'on résume par : $S=\varnothing$.

b) La seconde inéquation se résout en remarquant que l'on a une différence de deux carrés...à condition de tout ramener dans un membre !

$$\begin{aligned}(3.x-2)^2 \geq (4.x+7)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (3.x-2)^2-(4.x+7)^2 \geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad \left[(3.x-2)+(4.x+7)\right]\times\left[(3.x-2)-(4.x+7)\right] \geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad (7.x+5)\times(-x-9) \geq 0\end{aligned}$$

Le tableau de signe de ce produit est dressé ci-contre ➔

x	$-\infty$		-9		$-5/7$		$+\infty$
$7.x+5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-x-9$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Il est positif ou nul sur l'intervalle $\left[-9;-\dfrac{5}{7}\right]$.

C'est l'ensemble des solutions !

c) Pour résoudre cette troisième inéquation, nous allons tout ramener dans un membre et tout additionner de façon à pouvoir nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\begin{aligned}\frac{2.x+5}{3-x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2.x+5}{3-x}-1 \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(2.x+5)-1\times(3-x)}{3-x} \leq 0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2.x+5-3+x}{3-x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3.x+2}{-x+3} \leq 0\end{aligned}$$

Le tableau de signe de ce quotient est dressé ci-contre ➔

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$3.x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur quotient		$-$	0	$+$	||	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$S=\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left]3;+\infty\right[$$

d) Cette quatrième inéquation va être résolue suivant le même principe que la précédente.

$$\begin{aligned}6.x-1 \geq \frac{7}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad 6.x-1-\frac{7}{x-2} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(6.x-1)\times(x-2)-7}{x-2} \geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{6.x^2-12.x-x+2-7}{x-2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6.x^2-13.x-5}{x-2} \geq 0\end{aligned}$$

Le signe du dénominateur $x-2$ ne pose aucun problème.

Pour connaître celui du numérateur $\varphi(x)=6.x^2-13.x-5$, calculons son discriminant :

$$\Delta_{\varphi(x)}=(-13)^2-4\times 6\times(-5)=169+120=289=17^2$$

Son discriminant étant positif, la forme du second degré $\varphi(x)$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-(-13)-17}{2\times 6}=\frac{13-17}{12}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-13)+17}{2\times 6}=\frac{13+17}{12}=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$$

Le tableau de signe de $\varphi(x)$ et celui du quotient est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit :

$$S = \left[-\frac{1}{3};2\right[\cup \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$$

Le retour des inéquations

Le contexte

Un second exercice sur la résolution d'inéquations et le second degré.

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

$$(3.x-2)^2 \geq 5.x-7 \qquad\qquad \frac{3}{2-x} \geq 2.x-9$$

Le corrigé

a) Pour résoudre l'inéquation $(3.x-2)^2 \geq 5.x-7$, le mieux est encore de tout développer, de tout ramener dans un même membre et de sortir la boite à outils «second degré».

$$\underbrace{(3.x-2)^2}_{\text{Développons...}} \geq 5.x-7 \Leftrightarrow \underline{9.x^2-12.x+4}-5.x+7 \geq 0 \Leftrightarrow 9.x^2-17.x+11 \geq 0$$

Calculons le discriminant de la forme du second degré $\varphi(x) = 9.x^2-17.x+11$:

$$\Delta_{\varphi(x)} = (-17)^2 - 4\times 9\times 11 = 289-396 = -107$$

Comme son discriminant est négatif, alors $\varphi(x)$ est toujours du même signe, celui de son coefficient dominant 9. Donc $\varphi(x)$ est toujours positif.

<u>Conclusion :</u> tout réel x est solution de cette inéquation. Ce que l'on résume par : $S = \mathbb{R}$.

b) Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons tout ramener dans le membre de gauche, tout additionner de façon à avoir à nous prononcer sur le signe d'une fraction.

$$\frac{3}{2-x} \geq 2.x-9 \Leftrightarrow \frac{3}{2-x}-2.x+9 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3+(2-x)\times(-2.x+9)}{2-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-4.x+18+2.x^2-9.x}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2.x^2-13.x+21}{2-x} \geq 0$$

Le signe du dénominateur $2-x=-x+2$ ne pose aucun difficulté.

Pour connaître celui du numérateur $\varphi(x) = 2.x^2-13.x+21$, calculons son discriminant :

$$\Delta_{\varphi(x)} = (-13)^2 - 4\times 2\times 21 = 169-168 = 1 = 1^2$$

Son discriminant étant positif, la forme du second degré $\varphi(x)$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-13)-1}{2\times 2} = \frac{13-1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-13)+17}{2\times 2} = \frac{13+1}{4} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Le tableau de signe de $\varphi(x)$ et celui du quotient est celui ci-dessous.

x	$-\infty$		2		3		3,5		$+\infty$
$\varphi(x)$		+	|	+	0	–	0	+	
$-x+2$		+	0	–	|	–	|	–	
Leur quotient		+	‖	–	0	+	0	–	

<u>Conclusion :</u> le quotient est positif ou nul sur l'ensemble $]-\infty;2[\cup[3;3,5]$. C'est l'ensemble des solutions de cette inéquation.

Les copains de Monsieur Cosinus

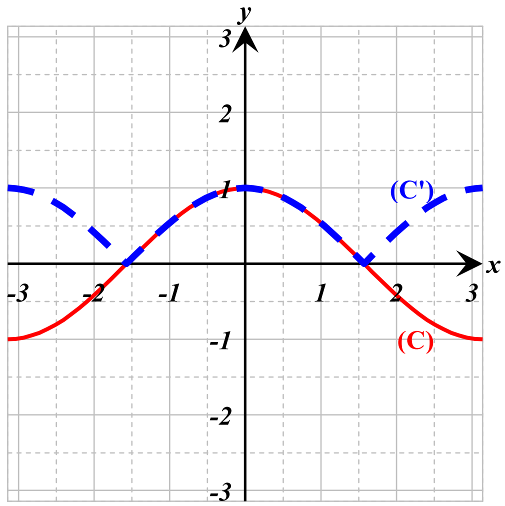
Le contexte

Un exercice sur les courbes qui peuvent se déduire d'autres courbes à partir de translation ou de symétries.

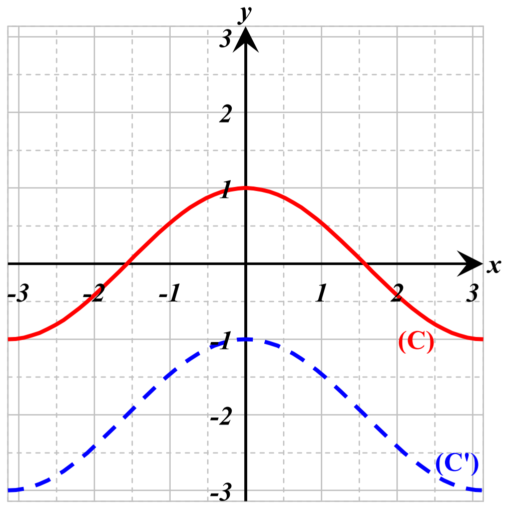
L'énoncé

Sur les six graphiques suivants, sont représentées deux courbes. La courbe (C) en trait continu représente la fonction cosinus qui est définie sur $\mathbb{R}$. La courbe (C') représentée en tirets représente une fonction g aussi définie sur $\mathbb{R}$.

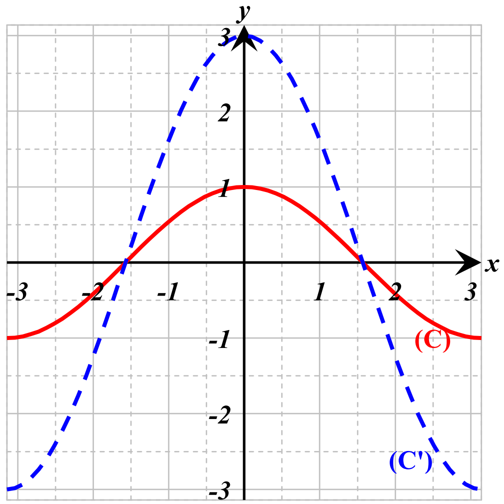
Dans chacun des cas suivants, exprimer $g(x)$ en fonction de cosinus.



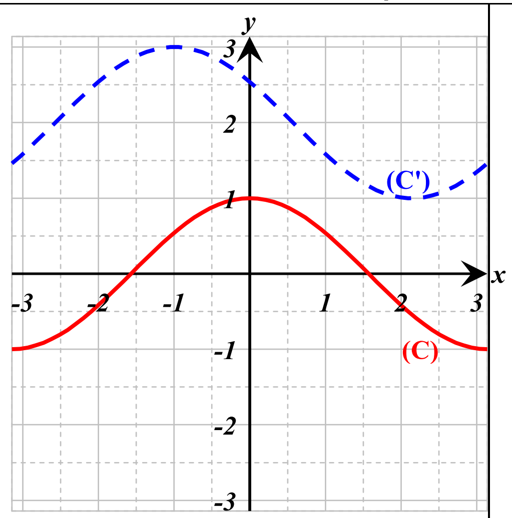
$g(x) =$ ....



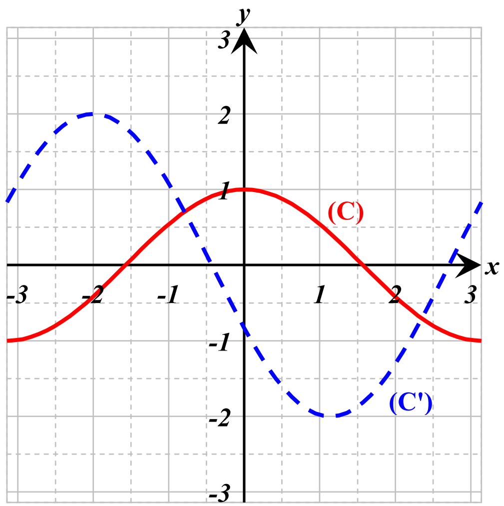
$g(x) =$ ....



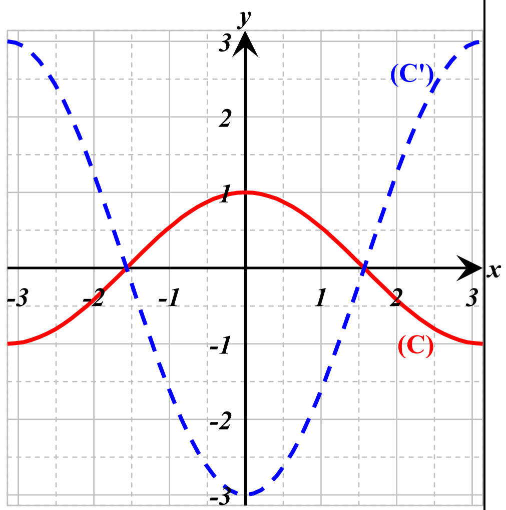
$g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



$g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

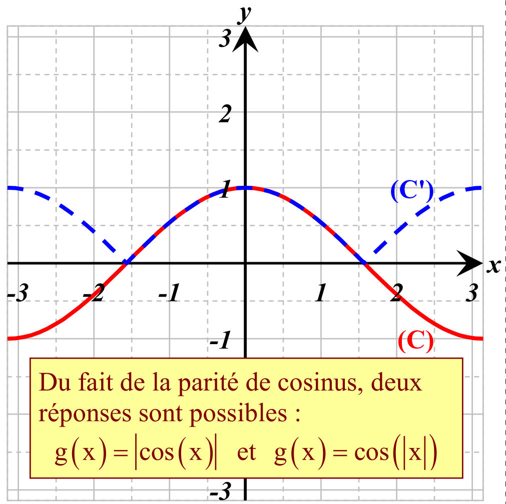


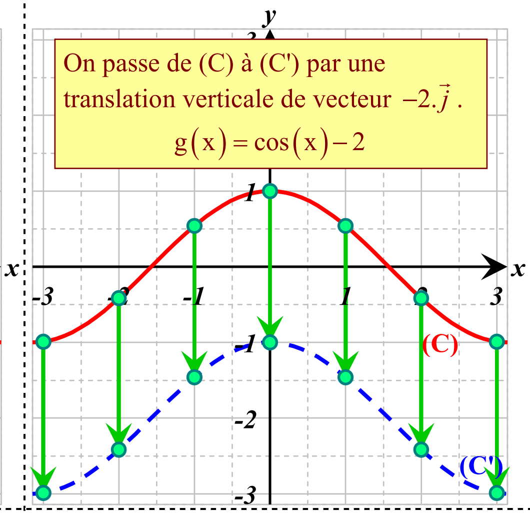
$g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

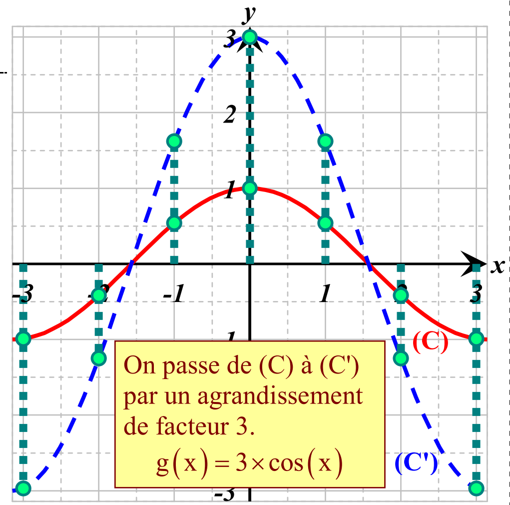


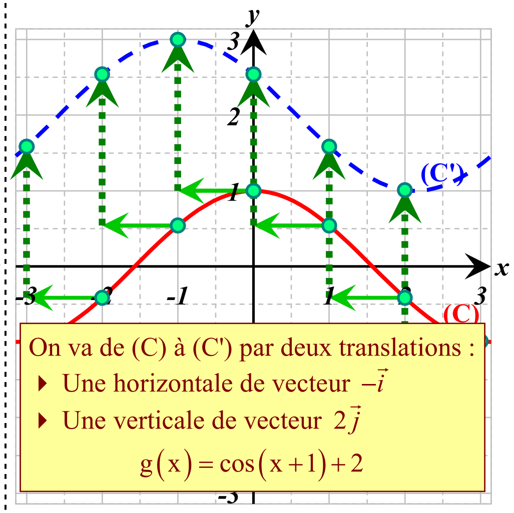
$g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Le corrigé

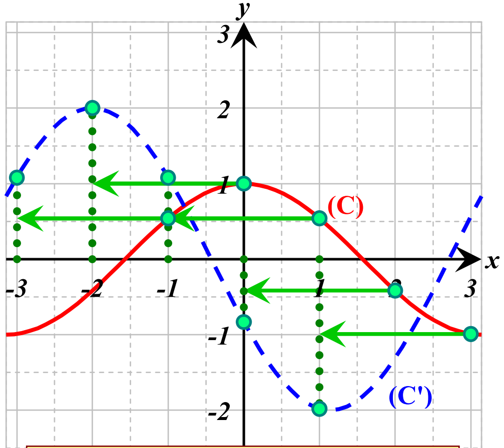








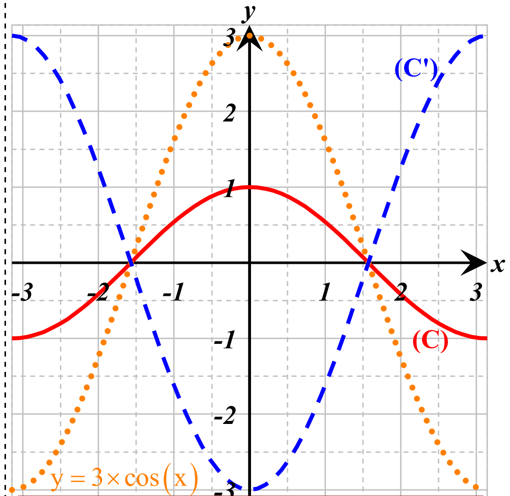
Rappel : les agrandissements (ou homothéties axiales) se font par rapport à l'axe des abscisses.



On passe de (C) à (C') par :

- Une translation horizontale de vecteur $-2.\vec{i}$.
- Un agrandissement de facteur 2.

$$g(x) = 2\times\cos(x+2)$$



(C') est la symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la courbe d'équation $y = 3\times\cos(x)$ évoquée précédemment.

$$g(x) = -3\times\cos(x)$$

Le problème...à tiques !

Le contexte

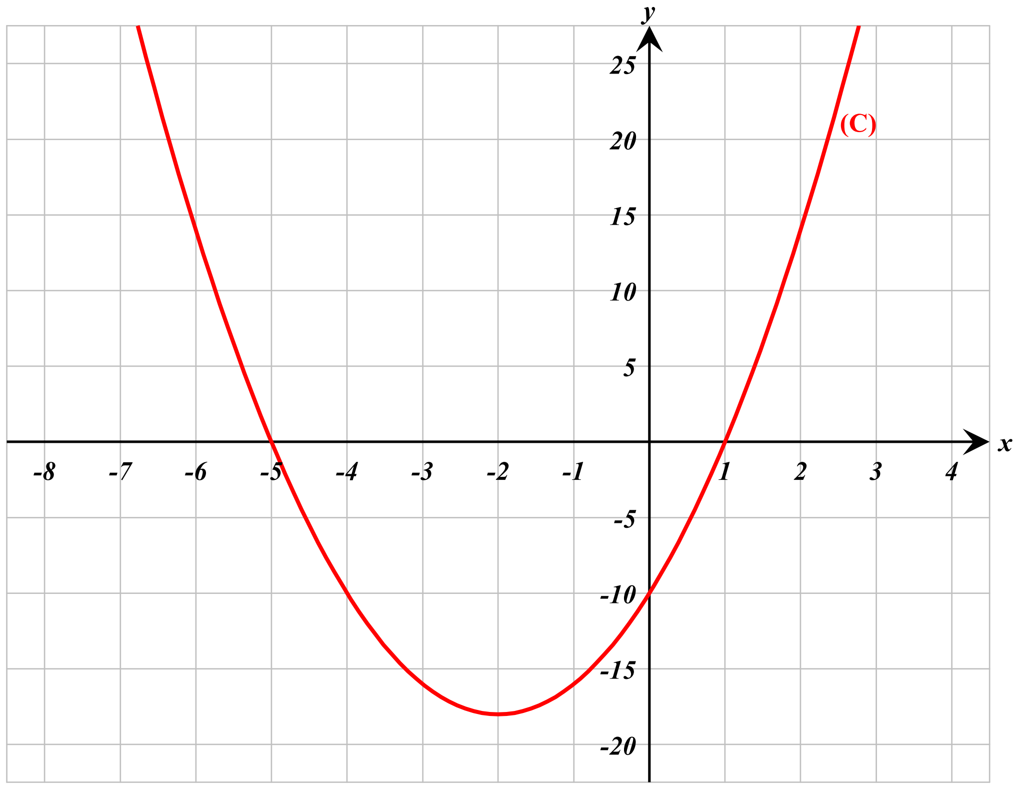
Un problème général d'analyse de début de première S alors que la dérivation n'a pas été encore vue. Au programme : second degré, factorisation d'un polynôme connaissant l'une de ses racines, composition et variations de fonctions en s'appuyant sur celles des fonctions de référence.

Le corrigé

On appelle f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2.x^2 + 8.x - 10$$

La courbe (C) représentant cette fonction f est tracée ci-dessous.



Le graphique ci-dessus est donné à titre indicatif, juste pour corroborer les résultats.

a) Déterminer (par le calcul) la forme factorisée de $f(x)$.

En déduire le signe de $f(x)$.

Résoudre dans ℝ de l'équation $2.x+8.\sqrt{x}=10$

b) Déterminer (par le calcul) trois réels *a*, *b* et *c* tels que pour tout réel x, on ait :

$$f(x)=a\times(x+b)^2+c$$

En s'appuyant sur les variations des fonctions de référence, établir les variations de la fonction f sur ℝ.

c) Déterminer (par le calcul) les antécédents de 14 par la fonction f.

d) La fonction g est définie pour tout réel x par :

$$g(x)=2.x^4+8.x^2-10$$

En utilisant les résultats des questions précédentes et en justifiant :

1. Factoriser le polynôme $g(x)$, puis dresser son tableau de signe.
2. Pourquoi peut-on affirmer que la fonction g est paire ?
3. En s'appuyant sur les variations d'une fonction de référence, établir les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   En déduire le tableau de variation de la fonction g sur ℝ.

e) On appelle h la fonction définie par :

$$h(x)=\sqrt{2.x^2+8.x-10}$$

En utilisant les résultats des questions précédentes et en justifiant :

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h que l'on notera D_h.
2. Etablir les variations de la fonction h sur son ensemble de définition D_h.

f) On appelle $D(x)$ le polynôme défini pour tout réel x par :

$$D(x)=2.x^3-11.x^2+17.x-20$$

Le but des questions suivantes est l'étude du signe du polynôme $D(x)$.

1. Démontrer que 4 est une racine du polynôme $D(x)$.
2. Par la méthode de votre choix, déterminer trois réels *a*, *b* et *c* tels que :
   $$D(x)=(x-4)\times\left(a\times x^2+b\times x+c\right)$$
3. En déduire le tableau de signe du polynôme $D(x)$.

g) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{2.x^4+8.x^2-10}{2.x^3-11.x^2+17.x-20}\leq 0$$

Le corrigé

a) Deux méthodes permettent de factoriser la forme du second degré $f(x)$:

En passant par la forme canonique

$$\begin{aligned}f(x)&=2.x^2+8.x-10=2\times\left[x^2+4.x-5\right]\\&=2\times\left[x^2+2\times x\times 2-5\right]\\&=2\times\left[(x+2)^2-4-5\right]\\&=2\times\left[(x+2)^2-9\right]=2\times\left[(x+2)^2-3^2\right]\\&=2\times\left[(x+2)+3\right]\times\left[(x+2)-3\right]\\&=2\times(x+5)\times(x-1)\end{aligned}$$

En recourant au discriminant

Calculons le discriminant de $f(x)$:

$$\Delta_{f(x)}=8^2-4\times 2\times(-10)$$
$$=64+80=144=12^2$$

Comme son discriminant est positif, alors la forme du second degré $f(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-8-12}{2\times 2}=-5 \quad\text{et}\quad x_2=\frac{-8+12}{2\times 2}=1$$

La forme factorisée de $f(x)$ est alors :

$$f(x)=\underbrace{2}_{a}\times\underbrace{(x+5)}_{x-x_1}\times\underbrace{(x-1)}_{x-x_2}$$

➲ Pour dresser le tableau de signe de la forme du second degré $f(x)$, on peut soit partir de sa forme factorisée, ou bien utiliser un résultat du cours donnant directement le signe d'un trinôme (il faut alors connaître les racines et le signe du coefficient dominant) :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
2		+	|	+	|	+	
$x+5$		–	0	+	|	+	
$x-1$		–	|	–	0	+	
$f(x)$		+	0	–	0	+	
		Signe de a		*Signe contraire de a*		*Signe de a*	

➲ Pour résoudre dans ℝ l'équation $2.x+8.\sqrt{x}=10$, nous décidons de procéder au changement d'inconnue $t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2$. L'équation devient alors :

$$2.x+8.\sqrt{x}-10=0 \Leftrightarrow 2.t^2+8.t-10=0 \Leftrightarrow \underbrace{t=-5 \quad \underline{\text{ou}} \quad t=1}_{\text{Ce sont les deux racines de } f(t).}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=-5 \quad \underline{\text{ou}} \quad \sqrt{x}=1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\text{Pas de solution}}_{\text{Une racine n'est jamais négative.}} \quad \underline{\text{ou}} \quad x=1$$

<u>Conclusion :</u> dans ℝ, l'équation $2.x+8.\sqrt{x}=10$ n'admet qu'une seule solution qui est 1.

b) Lors de la question précédente, nous avons effleuré la forme canonique recherchée ici. En effet, dans la recherche la forme factorisée, nous avions établi que pour tout réel x :

$$f(x)=2.x^2+8.x-10=2\times\left[(x+2)^2-9\right]=2\times(x+2)^2-18$$

➲ Cette écriture de f nous permet de dire qu'elle est la composée des fonctions suivantes :

$$x \xrightarrow{u(t)=t+2} x+2 \xrightarrow{v(t)=t^2} (x+2)^2 \xrightarrow{w(t)=2\times t-18} \overbrace{2\times(x+2)^2-18}^{f(x)}$$

D'après sa courbe représentative (C), f semble être décroissante avant -2 et croissante après. Démontrons cette impression (les gens savants diraient conjecture).

‣ Sur l'intervalle $]-\infty;-2[$, la fontion f est l'enchaînement suivant :

$$\underbrace{\underset{\in]-\infty;-2[}{x} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{u(t)=t+2} \underset{\in]-\infty;0[}{x+2} \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]-\infty;0[]{v(t)=t^2} \underset{\in]0;+\infty[}{(x+2)^2} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{w(t)=2\times t-18} f(x)}_{\text{L'ordre ne change qu'une seule fois}}$$

Par conséquent, la composée $f=w\circ v\circ u$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$.

‣ Sur l'intervalle $]-2;+\infty[$, la fontion f est l'enchaînement suivant :

$$\underbrace{\underset{\in]-2;+\infty[}{x} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{u(t)=t+2} \underset{\in]0;+\infty[}{x+2} \xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{v(t)=t^2} \underset{\in]0;+\infty[}{(x+2)^2} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{w(t)=2\times t-18} f(x)}_{\text{L'ordre ne change jamais}}$$

Ainsi, la composée $f=w\circ v\circ u$ est-elle croissante sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

c) Pour connaître les antécédents de 14 par f, nous devons résoudre dans ℝ l'équation :

$$f(x)=14 \Leftrightarrow 2.x^2+8.x-10=14 \Leftrightarrow 2.x^2+8.x-24=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+4.x-12=0}_{\text{Après division par 2...}}$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation du second degré :

$$\Delta_{x^2+4.x-12}=4^2-4\times1\times(-12)=16+48=64=8^2$$

Comme son discriminant est positif, alors cette équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-4-8}{2\times1}=-\frac{12}{2}=-6 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-4+8}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$$

<u>Conclusion :</u> 14 a deux antécédents par la fonction f. Il s'agit de -6 et 2.

d.1) Le polynôme du quatrième degré $g(x)=2.x^4+8.x^2-10$ est une forme bicarrée qui n'est pas sans rappeler le polynôme du second degré f. En effet, pour tout réel x, on a :

$$g(x)=2.x^4+8.x^2-10=2\times\left(x^2\right)^2+8\times x^2-10=\underbrace{2\times t^2+8\times t-10=f(t)}_{\text{Si l'on pose } t=x^2}$$

Or depuis la question a, nous connaissons la forme factorisée de $f(x)$, euh de $f(t)$!

Pour tout réel x, nous pouvons alors écrire :

$$g(x)=\underbrace{f(t)=2\times(t+5)\times(t-1)}_{\text{N'oublions pas que } t=x^2}=2\times\left(x^2+5\right)\times\left(x^2-1\right)=\underbrace{2\times\overbrace{\left(x^2+5\right)}^{\text{Infactorisable}}\times(x-1)\times(x+1)}_{\text{Ecriture factorisée ultime de } g(x)}$$

Le tableau de signe de $g(x)$ se dresse alors sans problème...devant nous :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
x^2+5		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d.2) La fonction g hérite sa parité de celles des fonctions puissances paires x^4 et x^2. En effet, pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{g(-x)=2\times(-x)^4+8\times(-x)^2-10=2\times x^4+8\times x^2-10=g(x)}_{\text{Par les fonctions } x^4;\ x^2 \text{ ou g, un nombre x et son opposé } -x \text{ ont des images égales}}$$

d.3) Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction g est la composée suivante :

$$\underbrace{\underset{\in[0;+\infty[}{x} \xrightarrow[\text{Croissante sur }[0;+\infty[]{v(t)=t^2} \underset{\in[0;+\infty[}{x^2} \xrightarrow[\substack{\text{Croissante sur }]-2;+\infty[\\ \text{d'après la question b}}]{f(t)=2\times t^2+8\times t-10} \underbrace{2.x^4+8.x^2-10}_{g(x)}}_{\text{L'ordre ne change pas}}$$

Par conséquent, la composée $g = f \circ v$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Par symétrie (par rapport à l'axe des ordonnées car g est paire), nous en déduisons alors que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ qui est le symétrique de $[0;+\infty[$.

e.1) Seuls les nombres positifs et 0 peuvent avoir une racine car eux seuls sont des carrés.

$$\begin{aligned} \text{La racine } h(x)=\sqrt{f(x)} \text{ existe } &\Leftrightarrow \text{ Le nombre } f(x) \text{ est positif ou nul} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{x \in \left]-\infty;-5\right] \cup \left[1;+\infty\right[}_{\substack{\text{D'après le tableau de signe de } f(x)\\ \text{fait à la question a.}}} \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de la fonction h est $]-\infty;-5] \cup [1;+\infty[$.

e.2) La fonction h est la composée de la fonction f suivie de la fonction racine. Ainsi :

▸ Sur l'intervalle $]-\infty;-5]$, la fonction h est l'enchaînement suivant :

$$\underbrace{\underset{\in]-\infty;-5]}{x} \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]-\infty;-2]]{f} \underset{\in[0;+\infty[}{f(x)} \xrightarrow[\text{Croissante sur }[0;+\infty[]{\text{Racine}(t)=\sqrt{t}} h(x)=\sqrt{f(x)}}_{\text{L'ordre ne change qu'une seule fois...}}$$

Par conséquent, la composée $h = \text{Racine} \circ f$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-5]$.

▸ Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la fonction f est l'enchaînement suivant :

$$\underbrace{\underset{\in[1;+\infty[}{x} \xrightarrow[\text{Croissante sur }[-2;+\infty[]{f} \underset{\in[0;+\infty[}{f(x)} \xrightarrow[\text{Croissante sur }[0;+\infty[]{\text{Racine}(t)=\sqrt{t}} h(x)=\sqrt{f(x)}}_{\text{L'ordre ne change pas}}$$

Par conséquent, la composée $h = \text{Racine} \circ f$ est croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

f.1) Calculons l'image de 4 par le polynôme $D(x)$.

$$\begin{aligned} D(4) &= 2\times 4^3 - 11\times 4^2 + 17\times 4 - 20 \\ &= 2\times 64 - 11\times 16 + 17\times 4 - 20 = 128 - 176 + 68 - 20 = 196 - 196 = 0 \end{aligned}$$

Comme 4 annule $D(x)$, alors 4 est une racine de ce polynôme et ce dernier est factorisable par le facteur $x-4$.

f.2) Deux méthodes permettent de factoriser assez simplement $D(x)$.

⏩ On peut chercher à identifier les coefficients a ; b et c.

On veut écrire le polynôme $D(x)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} D(x) &= (x-4)\times\left(a\times x^2 + b\times x + c\right) \\ &= a\times x^3 + b\times x^2 + c\times x - 4\times a\times x^2 - 4\times b\times x - 4\times c \end{aligned}$$

$$2\times x^3 + (-11)\times x^2 + 17\times x + (-20) = a\times x^3 + (b-4\times a)\times x^2 + (c-4\times b)\times x - 4\times c$$

Deux polynômes égaux ayant des coefficients de même degré égaux, on en déduit alors :

$$\underbrace{\begin{cases} \text{Egalité en } x^3 & : \quad 2 = a \\ \text{Egalité en } x^2 & : \quad -11 = b-4\times a = b-8 \quad \text{d'où} \quad b = -11+8 = -3 \\ \text{Egalité en } x & : \quad 17 = c-4\times b = c+12 \quad \text{d'où} \quad c = 5 \\ \text{Egalité en } x^0 & : \quad -20 = -4\times c \quad \text{d'où} \quad c = 5 \end{cases}}_{\text{Trois inconnues } a,\, b \text{ et } c. \text{ Quatre équations dont une pour vérifier !}}$$

<u>Conclusion :</u> La forme factorisée de $D(x)$ est $D(x) = (x-4)\times\left(2.x^2 - 3.x + 5\right)$.

⏩ On peut aussi chercher à extraire le facteur $x-4$ de chacun des termes du polynôme $D(x)$.

$$\begin{aligned} D(x) &= \overbrace{2.x^3}^{\substack{\text{Combien}\\ \text{de fois } x-4\text{ ?}}} - 11.x^2 + 17.x - 20 = \overbrace{2.x^2\times(x-4) + 8.x^2}^{\text{Au total } 2.x^3} - 11.x^2 + 17.x - 20 \\ &= 2.x^2\times(x-4) \overbrace{-3.x^2}^{\substack{\text{Combien de}\\ \text{fois } x-4\text{ ?}}} + 17.x - 20 = 2.x^2\times(x-4) \overbrace{-3.x\times(x-4) - 12.x}^{\text{Au total } -3.x^2} + 17.x - 20 \\ &= 2.x^2\times(x-4) - 3.x\times(x-4) + 5.x - 20 = 2.x^2\times \underbrace{(x-4)}_{\text{Voici le...}} - 3.x\times \underbrace{(x-4)}_{\text{...facteur...}} + 5\times \underbrace{(x-4)}_{\text{...commun.}} \\ &= (x-4)\times\left[2.x^2 - 3.x + 5\right] \end{aligned}$$

f.3) Le signe du facteur affine $x-4$ ne pose aucun problème. Pour connaître celui du facteur du second degré qu'est $\varphi(x) = 2.x^2 - 3.x + 5$, calculons son discriminant :

$$\Delta_{\varphi(x)} = (-3)^2 - 4\times 2\times 5 = 9 - 40 = -31$$

Comme son discriminant est négatif, alors $\varphi(x)$ est toujours du même signe, celui de son coefficient dominant 2. Donc $\varphi(x)$ est toujours positif.

Par conséquent, le tableau de signe du produit $D(x)$ est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$+$	|	$+$	
$D(x)$		$-$	0	$+$	

f) Pour résoudre la présente inéquation, il suffit de dresser le tableau de signe du quotient :

$$\frac{2.x^4+8.x^2-10}{2.x^3-11.x^2+17.x-20}=\frac{g(x)}{D(x)}$$

En reprenant les résultats des questions g.1 et f.3, on obtient le tableau de signe ci-contre➔

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$D(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Quotient		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$]-\infty;-1]\cup[1;4[\,.$$

UNE REVANCHE AU TROISIÈME DEGRÉ

Le contexte

Cet exercice est un peu une évolution du précédent. Au menu : second degré, factorisation d'un polynôme connaissante l'une de ses racines et variations d'une fonction par composition.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=2.x^3+3.x+5$$

a) Dans cette question, nous allons étudier le signe de $f(x)$.

1. Démontrer que -1 est une racine du polynôme $f(x)$.

2. Déterminer trois coefficients réels a ; b et c tels que pour tout réel x, on ait :

$$f(x)=(x+1)\times\left(a.x^2+b.x+c\right)$$

3. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer les antécédents de 5 par la fonction f.

c) Dans cette question, nous allons étudier les variations de la fonction f grâce au dicton :

«La somme des plus petits est toujours inférieure à la somme des plus grands»

1. Soient α et β deux réels quelconques tels que $\alpha<\beta$.
En s'appuyant sur les variations des fonctions de référence et sur le dicton, déterminer laquelle des deux images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ est la plus grande.

2. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d) On appelle h la fonction définie par :

$$h(x)=\sqrt{2.x^3+3.x+5}$$

En utilisant les résultats des questions précédentes et en justifiant :

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h que l'on notera D_h.

2. Etablir les variations de la fonction h sur son ensemble de définition D_h.

Le corrigé

a) Calculons l'image de -1 par la fonction f.

$$f(-1)=2\times(-1)^3+3\times(-1)+5=2\times(-1)-3+5=-2+2=0$$

Comme -1 annule la fonction f, alors celui-ci est une racine de ce polynôme. Donc $f(x)$ est factorisable par le facteur $x-(-1)=x+1$.

Comme d'habitude, deux méthodes permettent de factoriser $f(x)$ par le facteur $x+1$.

⏩ On peut chercher à identifier les coefficients *a* ; *b* et *c*.

On veut écrire le polynôme $f(x)$ sous la forme :

$$f(x)=(x+1)\times\left(a\times x^2+b\times x+c\right)$$
$$=a\times x^3+b\times x^2+c\times x+a\times x^2+b\times x+c$$
$$2\times x^3+0\times x^2+3\times x+5=a\times x^3+(a+b)\times x^2+(b+c)\times x+c$$

Deux polynômes égaux ayant des coefficients de même degré égaux, il vient alors :

$$\begin{cases}\text{Egalité des coefficients en } x^3 & : \ 2=a\\ \text{Egalité des coefficients en } x^2 & : \ 0=a+b=2+b \quad \text{d'où} \quad b=-2\\ \text{Egalité des coefficients en } x & : \ 3=b+c=-2+c \quad \text{d'où} \quad c=3+2=5\\ \text{Egalité des coefficients constants} & : \ 5=c \quad \text{Ce qui confirme...}\end{cases}$$

<u>Conclusion :</u> La forme factorisée recherchée est $f(x)=(x+1)\times\left(2.x^2-2.x+5\right)$.

⏩ On peut aussi chercher à extraire le facteur $x+1$ de chaque terme du polynôme $f(x)$.

$$f(x)=\overbrace{2.x^3}^{\text{Combien de fois x+1 ?}}+3.x+5=\overbrace{2.x^2\times(x+1)-2.x^2}^{\text{Au total } 2.x^3}+3.x+5$$

$$=2.x^2\times(x+1)\overbrace{-2.x^2}^{\text{Combien de fois x+1 ?}}+3.x+520=2.x^2\times(x+1)\overbrace{-2.x\times(x+1)+2.x}^{\text{Au total } -2.x^2}+3.x+5$$

$$=2.x^2\times(x+1)-2.x\times(x+1)+5.x+5=2.x^2\times\underbrace{(x+1)}_{\text{Voici le...}}-2.x\times\underbrace{(x+1)}_{\text{...facteur...}}+5\times\underbrace{(x+1)}_{\text{...commun.}}$$

$$=(x+1)\times\left[2.x^2-2.x+5\right]$$

➲ Le signe du facteur affine $x+1$ ne pose aucun problème. Pour connaître celui du facteur du second degré $\varphi(x)=2.x^2-2.x+5$, calculons son discriminant :

$$\Delta_{\varphi(x)}=(-2)^2-4\times2\times5=4-40=-36$$

Son discriminant étant négatif, $\varphi(x)$ est positif comme son coefficient dominant 2.

Par conséquent, le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b) Pour déterminer les antécédents de 5 par f, nous devons résoudre dans ℝ l'équation :

$$f(x)=5 \Leftrightarrow 2.x^3+3.x+\cancel{5}=\cancel{5} \Leftrightarrow \overbrace{2.x^2\times\boxed{x}+3\times\boxed{x}}^{\text{Il faut factoriser !}}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x}\times\left(2.x^2+3\right)=0}_{\text{Un produit est nul si et...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad 2.x^2+3=0}_{\text{...seulement si l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad \underbrace{x^2=-\frac{3}{2}=-1,5}_{\text{Un carré n'est jamais nul.}}$$

<u>Conclusion :</u> 5 n'a qu'un seul antécédent par la fonction f qui est 0.

c) α et β sont deux réels tels que $\alpha<\beta$.

Une fonction croissante conserve l'ordre. Par conséquent, comme :

➔ La fonction cube est croissante sur ℝ, alors $\underbrace{\alpha^3<\beta^3}_{\text{Cube conserve l'ordre sur } \mathbb{R}} \Rightarrow 2\times\alpha^3<2\times\beta^3$

➔ La fonction affine $u(t)=3\times t+5$ est croissante sur ℝ, alors $\underbrace{\overbrace{3\times\alpha+5}^{u(\alpha)}<\overbrace{3\times\beta+5}^{u(\beta)}}_{\text{u conserve l'ordre sur } \mathbb{R}}$.

Si l'on additionne ses deux inégalités membres à membres, il vient alors :

$$\overbrace{2\times\alpha^3+3\times\alpha+5}^{\text{La somme des plus petits}} < \overbrace{2\times\beta^3+3\times\beta+5}^{\text{La somme des plus grands}} \quad \text{d'où} \quad f(\alpha)<f(\beta)$$

Conclusion : ainsi nous venons d'établir sur $\mathbb{R}$ que :

$$\underbrace{\text{Si} \quad \alpha<\beta \quad \text{alors} \quad f(\alpha)<f(\beta)}_{f \text{ conserve l'ordre sur } \mathbb{R}}.$$

Comme la fonction f conserve l'ordre sur $\mathbb{R}$, alors elle y est croissante.

d) C'est bien connu, seuls les réels positifs et 0 ont une racine car eux seuls sont des carrés.

$$\begin{aligned} \text{La racine } h(x)=\sqrt{f(x)} \text{ existe} &\Leftrightarrow \text{Le nombre } f(x) \text{ est positif ou nul} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{x\in[-1;+\infty[}_{\text{D'après le tableau de signe de } f(x) \text{ établi à la question a.}} \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction h est l'intervalle $[-1;+\infty[$.

➲ Sur l'intervalle $]-\infty;-5]$, la fonction h est la composée suivante :

$$\underbrace{\underset{\in[-1;+\infty[}{x} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{f} \underset{\in[0;+\infty[}{f(x)} \xrightarrow[\text{Croissante sur } [0;+\infty[]{\text{Racine}(t)=\sqrt{t}} h(x)=\sqrt{f(x)}}_{\text{L'ordre ne change jamais...}}$$

Par conséquent, la composée $h=\text{Racine}\circ f$ est croissante sur l'intervalle $[-1;+\infty[$.

Limites et dérivation

Classique rationnel

Le contexte

Un premier exercice sur limites et asymptotes d'une fonction rationnelle sans dérivation.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x de l'ensemble $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2.x^2-5.x-7}{x-2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Pourquoi la fonction f n'est-elle définie que sur l'ensemble $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$?

b) Calculer l'image de 0 par la fonction f.
Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.

c) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
Quelles sont les conséquences graphiques de ces limites sur la courbe (C) ?

d) Déterminer trois réels a ; b et c tels que pour tout réel $x\in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$, on ait :

$$f(x)=a\times x+b+\frac{c}{x-2}$$

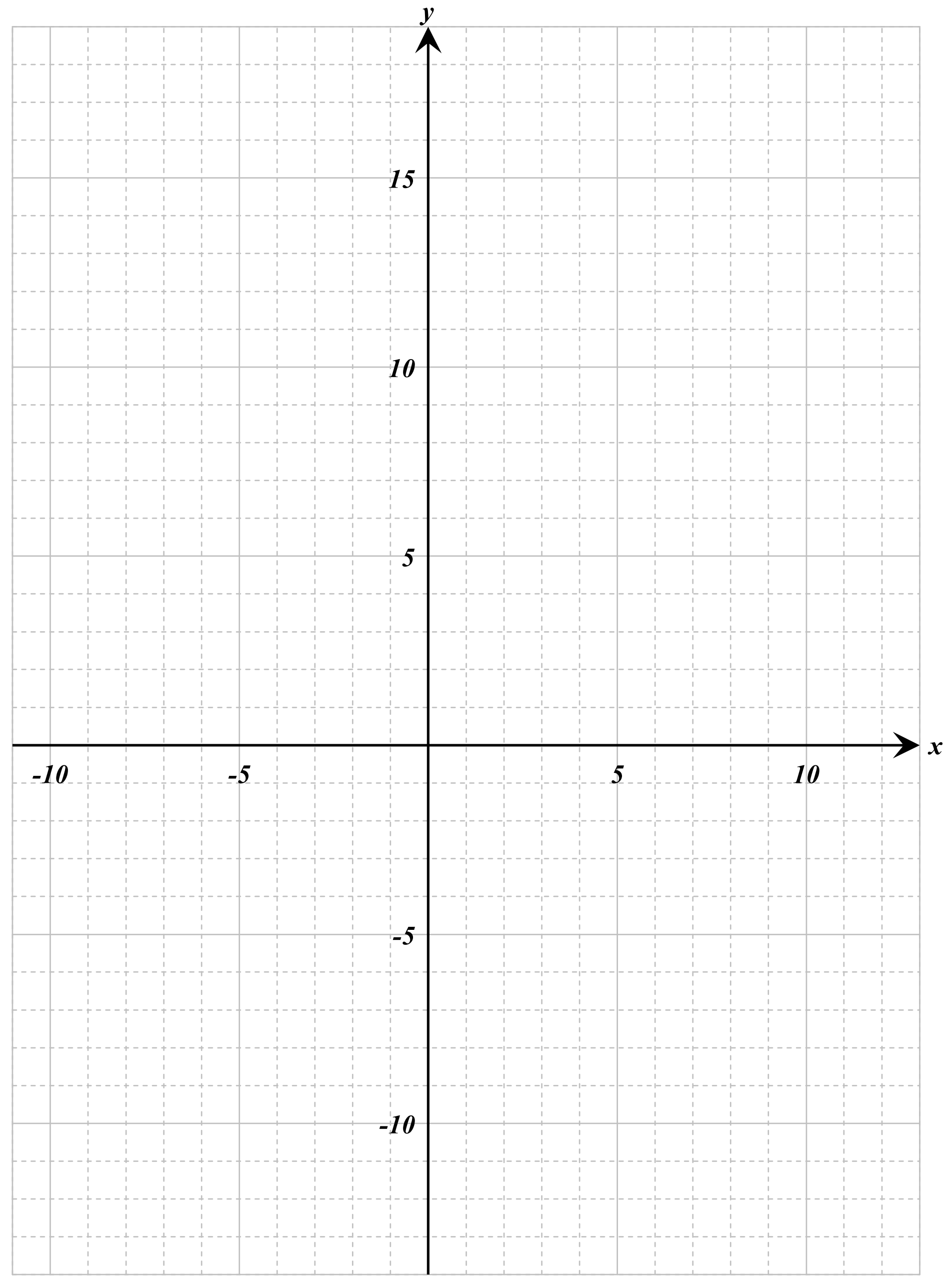
Démontrer que la droite Δ d'équation $y=2.x-1$ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
Etudier la position relative de la courbe (C) et de son asymptote Δ.

e) En utilisant les résultats des questions précédentes, tracer une esquisse de la courbe (C).
On fera apparaître les divers asymptotes ainsi que tous les points particulier rencontrés au cours de l'exercice.

Le point de la chance :

Donner une valeur approchée à 0,001-près de l'image de 500.000.000.001 par la fonction f.

$$f(500.000.000.001)\approx$$



Le corrigé

a) La fonction rationnelle $f(x)$ est le quotient des deux fonctions $N(x)=2.x^2-5.x-7$ et $D(x)=x-2$ qui sont définies sur ℝ. Par conséquent :

Le quotient $f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $x-2$ est non nul $\Leftrightarrow$ $x\neq 2$

C'est pour cela qu'à l'exception de 2, tous les réels ont une image par la fonction f.

b) Calculons l'image de 0 par f : $f(0)=\dfrac{2\times 0^2-5\times 0-7}{0-2}=\dfrac{-7}{-2}=\dfrac{7}{2}=3,5$

➲ Pour obtenir le signe du quotient $f(x)$, il nous faut d'abord connaître celui de son numérateur $N(x)$ qui est une forme du second degré. Calculons son discriminant :

$$\Delta_{N(x)}=(-5)^2-4\times 2\times(-7)=25+56=81=9^2$$

Comme son discriminant est positif, alors $N(x)$ admet deux racines distinctes. Il s'agit :

$$x_1=\frac{-(-5)-9}{2\times 2}=\frac{5-9}{4}=\frac{-4}{4}=-1 \quad\text{et}\quad x_2=\frac{-(-5)+9}{2\times 2}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}=3,5$$

La forme du second degré $N(x)$ est du signe de son coefficient dominant 2 à l'extérieur des racines et du signe contraire entre.

Par conséquent, le tableau de signe du quotient est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		-1		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$N(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

b) L'ensemble de définition de la fonction f comporte quatre bornes :

$-\infty$ ⋮ A gauche de 2 ou 2^- ⋮ A droite de 2 ou 2^+ ⋮ $+\infty$

⏩ La limite de f en $-\infty$

De prime abord, $f(x)=\dfrac{2.x^2-5.x-7}{x-2}$ est en $-\infty$ une forme indéterminée du type $\dfrac{+\infty}{-\infty}$.

Pour lever cette indétermination, factorisons numérateur et dénominateur par leurs termes dominants. Pour tout réel x différent de 0 et 2, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{(2.x^2)\times\left(1-\dfrac{5.x}{2.x^2}-\dfrac{7}{2.x^2}\right)}{x\times\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\frac{2.x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\times\frac{1-\dfrac{5.\cancel{x}}{2.x^{\cancel{2}}}-\dfrac{7}{2.x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}=2.x\times\frac{1-\dfrac{5}{2.x}-\dfrac{7}{2.x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\boxed{2.x}\times\frac{1-\dfrac{5}{2.x}-\dfrac{7}{2.x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}=(-\infty)\times\frac{1-0^--0^+}{1-0^-}=(-\infty)\times 1=-\infty$$

⏩ Les limites de f au voisinage de 2

Quand x tend vers 2, le numérateur $N(x)=2.x^2-5.x-7$ tend vers $\underbrace{2\times 4-5\times 2-7=-9}_{\text{Histoire de continuité...}}$.

D'après le tableau de signe ci-contre, le dénominateur $D(x)=x-2$ tend vers 0. Ainsi :

$$\overbrace{\underbrace{\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2.x^2-5.x-7}{x-2}=\frac{-9}{0^-}=+\infty}_{\text{A gauche de 2, la courbe (C) s'envole le long de la droite } d \text{ d'équation x=2.}}}^{\text{2 par la gauche}}$$

$$\overbrace{\underbrace{\lim_{x\to 2^+}f(x)=\frac{-9}{0^+}=-\infty}_{\text{A droite de 2, la courbe (C) plonge le long de la droite } d \text{ d'équation x=2.}}}^{\text{2 par la droite}}$$

<u>Conséquence :</u> la droite *d* d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

⏩ La limite de f en $+\infty$

Une règle vue en cours énonce qu'aux infinis, la fonction rationnelle $f(x)$ se comporte ...ermes dominants $\dfrac{2.x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=2.x$. Par conséquent :

Nous aurions pu aussi réutiliser la modification d'écriture de f(x) faite en $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2.x=+\infty$$

En $-\infty$, nous avons démontré la règle employée ici.

d) Deux méthodes permettent de décomposer la fonction rationnelle $f(x)$.

⏩ On peut chercher à identifier les coefficients *a* ; *b* et *c*.

On veut écrire la fonction rationnelle $f(x)$ sous la forme :

$$f(x)=a\times x+b+\frac{c}{x-2}=\frac{(a\times x+b)\times(x-2)+c}{x-2}$$

$$=\frac{a\times x^2+b\times x-2.a\times x-2.b+c}{x-2}$$

$$\frac{2\times x^2+(-5)\times x+(-7)}{x-2}=\frac{a\times x^2+(b-2.a)\times x+(-2.b+c)}{x-2}$$

Deux quotients égaux ayant le même dénominateur ont de facto des numérateurs égaux.

En identifiant les coefficients de même degré de ces numérateurs égaux, il vient alors :

$$\begin{cases} \text{Egalité des coefficients en } x^2 & : \quad 2 = a \quad \text{d'où} \quad a = 2 \\ \text{Egalité des coefficients en } x & : \quad -5 = b - 2.a = b - 4 \quad \text{d'où} \quad b = -5 + 4 = -1 \\ \text{Egalité des coefficients constants} & : \quad -7 = -2.b + c = 2 + c \quad \text{d'où} \quad c = -7 - 2 = -9 \end{cases}$$

▶▶ On peut chercher à extraire le dénominateur $x-2$ de chaque terme du numérateur.

Pour tout réel $x \in \left]-\infty;2\right[\cup \left]2;+\infty\right[$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{\overbrace{2.x^2}^{\text{Combien de fois } x-2\,?} - 5.x - 7}{x-2} = \frac{\overbrace{2.x\times(x-2)+4.x}^{\text{Au total } 2.x^2} - 5.x - 7}{x-2} = \frac{2.x\times\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{\overbrace{-x}^{\text{Combien de fois } x-2\,?} - 7}{x-2}$$

$$= 2.x + \frac{\overbrace{(-1)\times(x-2)-2}^{\text{Au total } -x} - 7}{x-2} = 2.x + \frac{(-1)\times\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{-9}{x-2} = 2.x - 1 - \frac{9}{x-2}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel $x \neq 2$, nous avons : $f(x) = \underbrace{\frac{2.x^2-5.x-7}{x-2}}_{\text{Forme initiale}} = \underbrace{2.x - 1 + \frac{-9}{x-2}}_{\text{Forme décomposée}}$.

➲ Intéressons-nous à la différence d'ordonnées entre la courbe (C) et la droite Δ pour une même abscisse x différente de 2. Nous avons :

$$y_{(C)} - y_\Delta = f(x) - (2.x-1) = \cancel{2.x-1} - \frac{9}{x-2} - \cancel{(2.x-1)} = -\frac{9}{x-2}$$

Comme $\underbrace{\lim_{x\to+\infty} y_{(C)} - y_\Delta = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9}{x-2} = \frac{-9}{+\infty} = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} y_{(C)} - y_\Delta = \frac{-9}{-\infty} = 0^+}_{\text{Aux infinis, la différence d'ordonnées } y_{(C)}-y_\Delta \text{ entre la courbe (C) et la droite } \Delta \text{ tend vers 0.}}$

<u>alors</u> la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

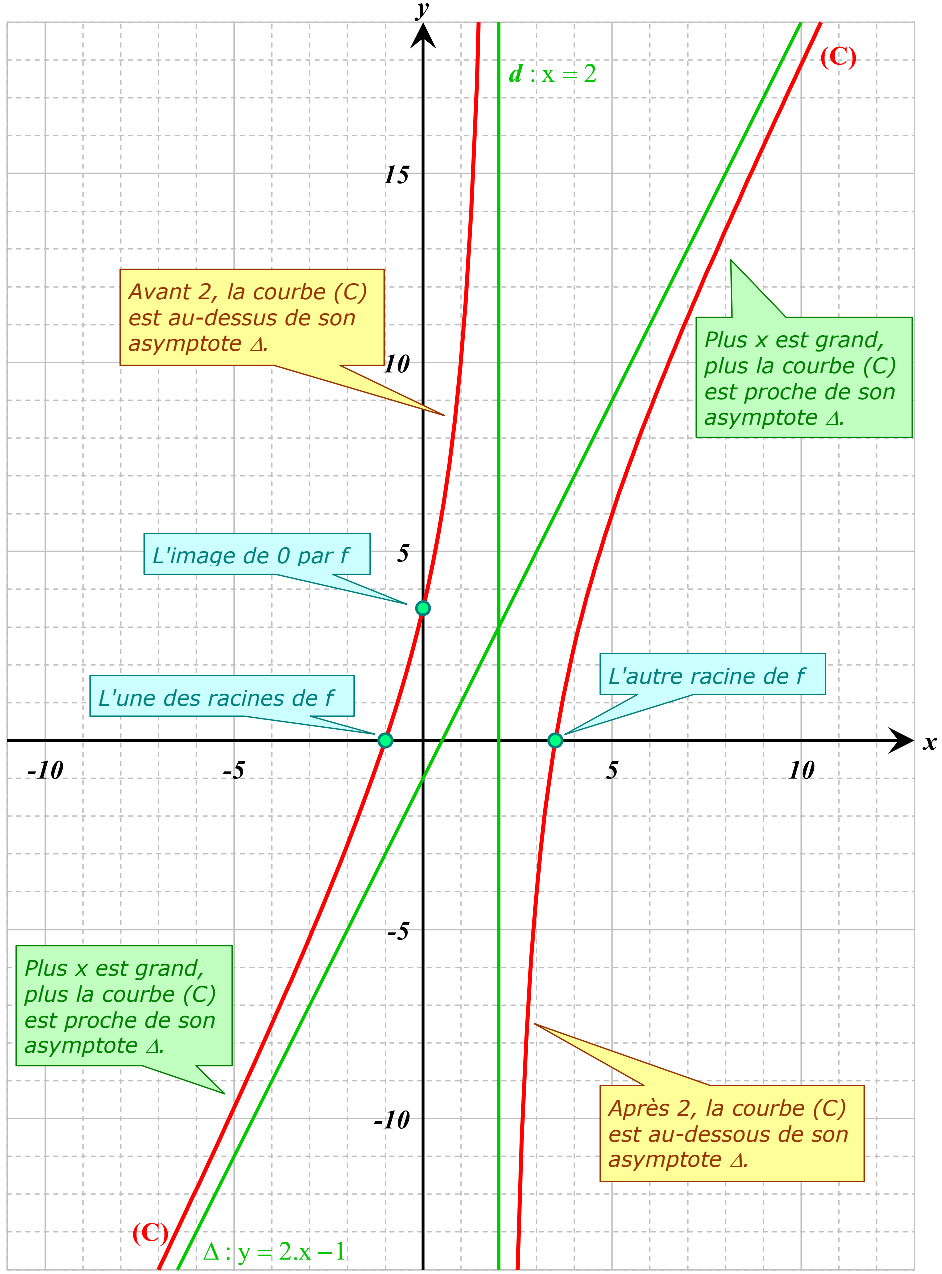
➲ La position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote Δ va nous être donnée par le signe de leur différence d'ordonnées $y_{(C)} - y_\Delta = -\frac{9}{x-2}$.

Le tableau de signe de ce quotient est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		2		$+\infty$
-9		$-$	|	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$y_{(C)} - y_\Delta$		$+$	‖	$-$	

Sur l'intervalle $\left]-\infty;2\right[$, la courbe (C) est au-dessus de son asymptote Δ.
Sur $\left]2;+\infty\right[$, elle est au-dessous.

e) Une esquisse de la courbe (C) s'appuyant sur ses deux asymptotes *d* et Δ est celle ci-contre ➔



f) Calculons l'image $f(500.000.000.001)$ en utilisant l'écriture décomposée de $f(x)$:

Aux voisinages des infinis, $f(x)$ est proche de $2.x-1$ car la courbe (C) est proche de son asymptote Δ.

$$f\underbrace{\left(5\times 10^{11}+1\right)}_{500.000.000.001} = 2\times\underbrace{\left(5\times 10^{11}+1\right)}_{500.000.000.001} -1-\frac{9}{\left(5\times 10^{11}+1\right)-2} = \underbrace{10^{12}+1}_{1.000.000.000.001} - \underbrace{\boxed{\frac{9}{5\times 10^{11}-1}}}_{\text{Inférieur à } 10^{-3}}$$

<u>Conclusion :</u> une valeur approchée de l'image recherchée est 1.000.000.000.001.

C'EST VOTRE DERNIER MAUX

Le contexte

Un questionnaire à choix multiple sur les limites et leurs opérations, ainsi que sur les asymptotes.

L'énoncé

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 2 points et chaque mauvaise en enlève 0,5. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Les deux premières questions concernent la fonction g qui est définie par :

$$g(x) = \frac{x^2+1}{3.x^2+5.x-2}$$

On appelle $\left(C_g\right)$ sa courbe représentative.

a) Parmi les propositions suivantes, laquelle est la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers -2 par la droite ?

$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$

b) Parmi les propositions suivantes, laquelle n'est pas une asymptote à la courbe $\left(C_g\right)$?

La droite d'équation $x=-2$	La droite d'équation $y=-2$	La droite d'équation $x=\frac{1}{3}$	La droite d'équation $y=\frac{1}{3}$

La fonction exponentielle notée e^x est une fonction définie sur ℝ qui est toujours strictement positive. Ses limites aux infinis sont :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Dans les deux questions suivantes, on s'intéresse aux limites aux infinis de la fonction h qui est définie sur ℝ par :

$$h(x) = \frac{x+3}{e^x}$$

c) Parmi les propositions suivantes, laquelle est la limite de la fonction $h(x) = \frac{x+3}{e^x}$ lorsque x tend vers $-\infty$?

$-\infty$	0	$+\infty$	C'est une forme indéterminée

d) Parmi les propositions suivantes, laquelle est la limite de la fonction $h(x) = \frac{x+3}{e^x}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

$-\infty$	0	$+\infty$	C'est une forme indéterminée

Le corrigé

Tout le secret des deux premières questions réside dans le tableau de signe de

$$g(x) = \frac{x^2+1}{\underbrace{3.x^2+5.x-2}_{\text{Discriminant } 49}}$$

dressé ci-contre➔

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
x^2+1		+	|	+	|	+	
$3.x^2+5.x-2$		+	0	−	0	+	
$g(x)$		+	‖	−	‖	+	

Ce tableau met en évidence l'ensemble de définition de g : $\left]-\infty;-2\right[\cup \left]-2;\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

Il permet aussi de trouver quatre des six limites de g.

Où ça ?	Les limites	Les asymptotes à (C_g)
En -2	$\lim_{x\to-2^-} g(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$ <u>et</u> $\lim_{x\to-2^+} g(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$	La droite $x=-2$ est une asymptote verticale.
En $\frac{1}{3}$	$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} g(x) = \frac{10/9}{0^-} = -\infty$ <u>et</u> $\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} g(x) = \frac{10/9}{0^+} = +\infty$	La droite $x=\frac{1}{3}$ est une asymptote verticale.
Aux infinis	$\underbrace{\lim_{x\to-\infty} g(x) = \frac{1}{3} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{3}}_{}$ Aux infinis, la fonction rationnelle $g(x)$ se comporte comme le quotient de ses termes dominants $\frac{x^2}{3.x^2} = \frac{1}{3}$	La droite $y=\frac{1}{3}$ est une asymptote horizontale aux voisinages des infinis.

Ainsi :

a. La limite de $g(x)$ à droite de -2 est égale à $-\infty$.

b. Seule la droite horizontale d'équation $y=-2$ n'est pas une asymptote à la courbe.

Les deux autres questions concernant les limites de la fonction h aux infinis relèvent simplement des opérations sur les limites.

c. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{-\infty}{0^+} = \underbrace{(-\infty)\times\frac{1}{0^+} = (-\infty)\times(+\infty)}_{\text{En cas de doute...}} = -\infty$

d. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} =$ Forme indéterminée

Dans une vie postérieure, vous verrez en fait qu'en $+\infty$, c'est l'exponentielle qui l'emporte et que le quotient $h(x)$ tend alors vers 0.

QUATRE QUESTIONS DIRECTES

Le contexte

Cet exercice est constitué de quatre questions indépendantes sur la dérivation.
Principalement, il s'agit d'applications directes du cours.

L'énoncé

Cet exercice est composé de quatre questions indépendantes les unes des autres.

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2.x^3 - 3.x^2 + 5.x - 4$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$.
3. Conclure en donnant le tableau de variation de la fonction f.

b) La fonction f est définie pour tout réel $x \in [0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \times \sqrt{x}$$

1. Pourquoi la fonction f est-elle seulement dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$?
2. Démontrer que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \frac{5}{2} \times x \times \sqrt{x}$$
3. Conclure en donnant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) La fonction u est qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :

$$u(5) = 3 \qquad \text{et} \qquad u'(5) = 9$$

On appelle f la fonction inverse de u. Autrement dit, on a :

$$f(x) = \frac{1}{u(x)}$$

1. Pourquoi la fonction f est-elle dérivable en 5 ?
2. Déterminer l'image de 5 par la fonction f.
3. Déterminer le nombre dérivé de f en 5.
4. En déduire l'équation réduite de la tangente T_5 à la courbe (C) représentant la fonction f à son point d'abscisse 5.

d) La fonction f est définie par :

$$f(x) = \sqrt{4.x + 8}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction f ? On justifiera brièvement sa réponse.
2. On rappelle que le nombre dérivé de f en a qui est noté $f'(a)$ est donné par :
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
En utilisant cette définition, établir que le nombre dérivé de la fonction f en 2 est égal à $\frac{1}{2}$.
3. En utilisant toujours cette même définition, démontrer que la fonction f n'est pas dérivable en -2.
4. En déduire l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

Le corrigé

a.1) Aux infinis, le polynôme $f(x) = 2.x^3 - 3.x^2 + 5.x - 4$ se comporte comme son terme dominant [terme de plus haut degré] $2.x^3$. Par conséquent :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2.x^3 = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2.x^3 = +\infty$$

Une autre méthode : on peut aussi modifier l'écriture de $f(x)$ que l'on factorise par sa puissance dominante x^3. On évite ainsi les formes indéterminées du type $\infty - \infty$.

$$f(x) = 2.x^3 - 3.x^2 + 5.x - 4 = x^3 \times \left[2 - 3.\frac{x^2}{x^3} + 5.\frac{x}{x^3} - \frac{4}{x^3}\right] = x^3 \times \underbrace{\left[2 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right]}_{\text{Après simplification de chaque quotient.}}$$

On en conclut alors :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty) \times \left[2 - 0^- + 0^+ - 0^-\right] = (-\infty) \times 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \times \left[2 - 0^+ + 0^+ - 0^+\right] = (+\infty) \times 2 = +\infty$$

a.2) Etant une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le polynôme f est donc lui aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = \left(2.x^3 - 3.x^2 + 5.x - 4\right)' = 2 \times \left(x^3\right)' - 3 \times \left(x^2\right)' + 5 \times (x)' + (-4)'$$
$$= 2 \times 3.x^2 - 3 \times 2.x + 5 \times 1 + 0 = 6.x^2 - 6.x + 5$$

a.3) Le signe de la dérivée $f'(x)$ va nous donner les variations de la fonction f.

Pour connaître le signe de la forme du second degré $f'(x)$, calculons son discriminant.

$$\Delta_{f'(x)} = (-6)^2 - 4\times 6\times 5 = 36-120 = -84$$

Comme son discriminant est négatif, alors la dérivée $f'(x)$ est toujours du même signe, positive comme son coefficient dominant 6.

Par conséquent, le tableau de signe de $f'(x)$ et celui de tableau de variation de la fonction f sont ceux ci-contre ➔

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

b) Dans cette question, la fonction f est le produit des fonctions :

$u(x) = x^2$; $u'(x) = 2.x$; Dérivable sur ℝ

et

$v(x) = \sqrt{x}$; $u'(x) = \dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$; Dérivable sur $]0;+\infty[$

Donc, le produit $f(x) = u(x)\times v(x)$ est (seulement) dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons alors écrire :

$$f'(x) = u'(x)\times v(x) + v'(x)\times u(x) = 2.x\times\sqrt{x} + \frac{1}{2.\sqrt{x}}\times x^2$$

$$= 2.x\times\sqrt{x} + \frac{1}{2.\cancel{\sqrt{x}}}\times x\times\sqrt{x}\times\cancel{\sqrt{x}} = 2\times x.\sqrt{x} + \frac{1}{2}\times x.\sqrt{x} = \frac{5}{2}\times x.\sqrt{x}$$

Ses deux facteurs $\frac{5}{2}.x$ et $\sqrt{x}$ étant positifs sur $]0;+\infty[$, il en va de même pour $f'(x)$.

Le tableau de variation de f est celui ci-contre ➔

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	$+\infty$

Quelques précisions :

- f est définie en 0. Calculons son image
$$f(0) = 0^2\times\sqrt{0} = 0\times 0 = 0$$
- f ne peut avoir de limite qu'en $+\infty$.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$$

c) L'image de 5 par f est l'inverse de celle par u. Ainsi : $f(5) = \dfrac{1}{u(5)} = \dfrac{1}{3}$

➲ Comme la fonction u est dérivable en 5 et qu'elle ne s'y annule pas, alors son inverse la fonction f est dérivable en 5. De plus, nous avons alors :

$$f'(5) = -\frac{u'(5)}{[u(5)]^2} = -\frac{9}{3^2} = -\frac{9}{9} = -1$$

➲ Le coefficient directeur de la tangente T_5 est le nombre dérivé de f en 5 soit -1.

Par conséquent, l'équation réduite de T_5 est de la forme : $y = (-1)\times x + p = -x + p$

De plus, la tangente T_5 passe par le point de coordonnées $(5;f(5)) = (5;1/3)$. D'où :

$$\frac{1}{3} = -5 + p \quad\Leftrightarrow\quad p = 5 + \frac{1}{3} = \frac{15}{3} + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation réduite de tangente T_5 est $y = -x + 16/3$.

d.1) f est la racine carrée de la fonction $u(x) = 4.x + 8$ qui est définie et dérivable sur ℝ.

La racine carrée ne concernant que les nombres positifs ou nuls, nous en déduisons :

La racine $f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\underbrace{4.x+8}_{u(x)}$ est positif ou nul $\Leftrightarrow$ $4.x \geq -8$ $\Leftrightarrow$ $x \geq -2$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[-2;+\infty[$.

d.2) Avant toutes choses, simplifions les écritures des images de 2 et $2+h$ par f.

$f(2) = \sqrt{4\times 2+8} = \sqrt{8+8} = 4$ | $f(2+h) = \sqrt{4\times(2+h)+8} = \sqrt{8+4.h+8} = \sqrt{16+4.h}$

Pour connaître le nombre dérivé de la fonction f en 2, déterminons la limite lorsque h tend vers 0 du quotient :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\sqrt{16+4.h}-4}{h} = \frac{(\sqrt{16+4.h}-4)\times(\sqrt{16+4.h}+4)}{h\times(\sqrt{16+4.h}+4)}$$

Pour éliminer l'indétermination, on multiplie par la quantité conjuguée

Forme indéterminée du type 0/0.

$$= \frac{(\sqrt{16+4.h})^2 - 4^2}{h\times(\sqrt{16+4.h}+4)} = \frac{16+4.h-16}{h\times(\sqrt{16+4.h}+4)} = \frac{4.\cancel{h}}{\cancel{h}\times(\sqrt{16+4.h}+4)}$$

Quand h tend vers 0, la somme $16+4.h$ tend vers 16 et sa racine $\sqrt{16+4.h}$ vers $\sqrt{16} = 4$.

Par conséquent :

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4}{\sqrt{16+4.h}+4} = \frac{4}{4+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

d.3) Là encore, nous allons nous intéresser à la limite lorsque h tend vers 0 du quotient :

$$\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\frac{\sqrt{4\times(-2+h)+8}-\sqrt{4\times(-2)+8}}{h}$$

La fonction f n'est définie qu'à droite de -2

$$=\frac{\sqrt{-8+4.h+8}-\sqrt{0}}{h}\frac{\sqrt{4.h}-0}{h}=\frac{\sqrt{4}\times\cancel{\sqrt{h}}}{\sqrt{h}\times\cancel{\sqrt{h}}}=\frac{2}{\sqrt{h}}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{h}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$, alors la fonction f n'est pas dérivable en -2.

d.4) Résumons ce que nous savons de la fonction f :

- C'est une fonction racine n'est définie qu'en -2 et à droite de -2.
- Elle n'est pas dérivable en -2 où la fonction $u(x)=4.x+8$ s'annule.
- f est dérivable en 2 et $u(x)=4.x+8$ ne s'annule pas après -2.

Pour toutes ces raisons, nous concluons que l'ensemble de dérivabilité de f est $]-2;+\infty[$.

Un air de déja vu

Le contexte

Un exercice d'analyse des plus classiques : l'étude complète d'une fonction rationnelle. Au menu : limites, asymptotes, dérivation et tangentes.

L'énoncé

La fonction f est définie par :

$$f(x)=\frac{4.x^2+6.x+5}{2.x+4}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f. On justifiera sa réponse.

b) Calculer les images de $-\frac{7}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ par la fonction f.

c) Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers -2.
Quelle est la conséquence graphique de ces limites sur la courbe (C) ?

d) Déterminer trois réels a ; b et c tels que pour tout réel $x\in D_f$, on ait :

$$f(x)=a\times x+b+\frac{c}{2.x+4}$$

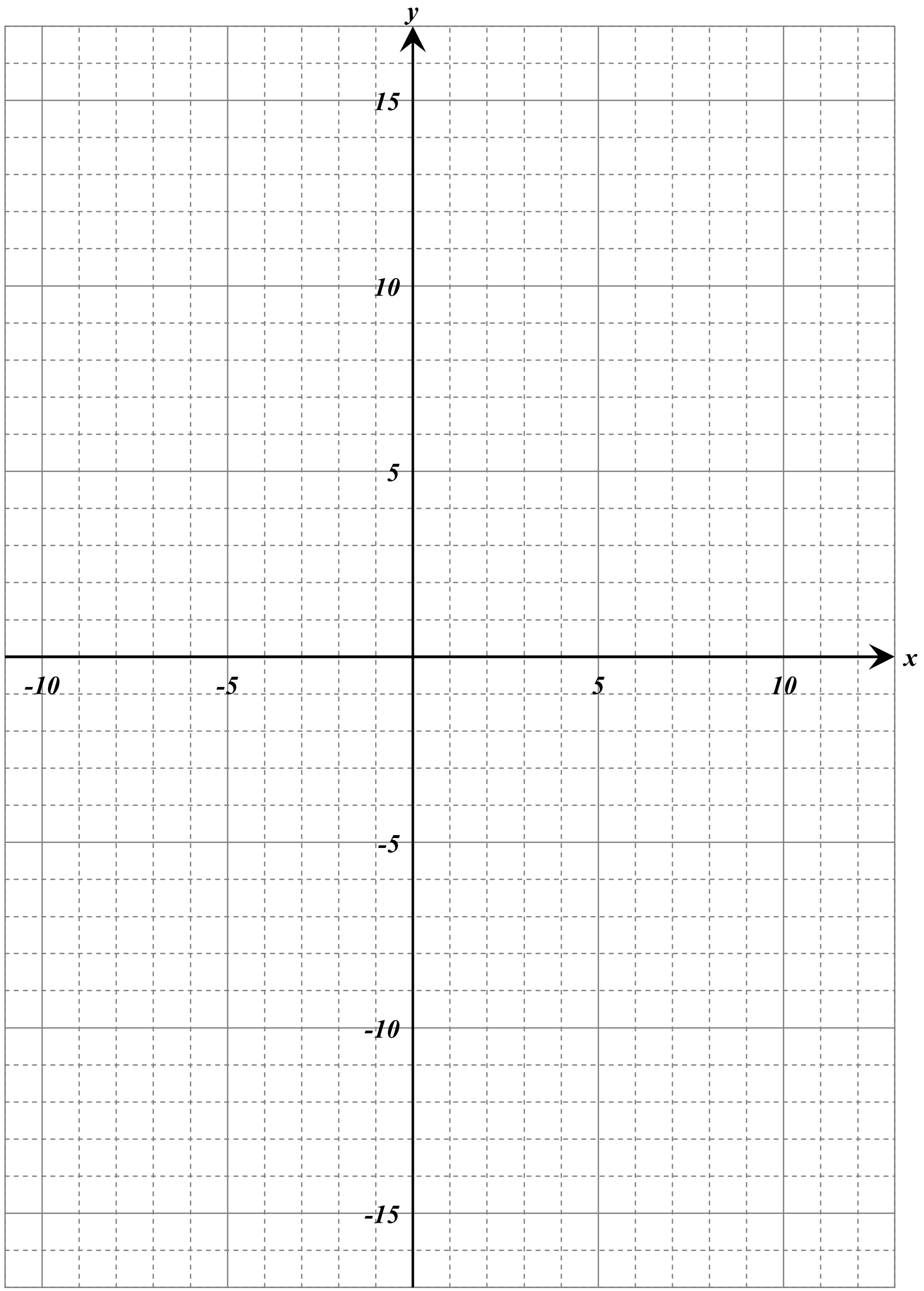
Démontrer que la droite Δ d'équation $y=2.x-1$ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.
En déduire les limites de la fonction f en $-\infty$ et de $+\infty$.
Etudier la position relative de la courbe (C) et de son asymptote Δ.

e) Démontrer que pour tout réel $x\in D_f$, on a :

$$f'(x)=\frac{8.x^2+32.x+14}{(2.x+4)^2}$$

En déduire le tableau de variation de la fonction f.

f) En utilisant les résultats des questions précédentes, tracer une esquisse de la courbe (C). On fera apparaître les divers asymptotes rencontrés au cours de l'exercice ainsi que les tangentes $T_{-7/2}$ et $T_{-1/2}$ à la courbe (C) aux points d'abscisses $-\frac{7}{2}$ et $-\frac{1}{2}$



Le corrigé

a) Les numérateur $u(x)=4.x^2+6.x+5$ et dénominateur $v(x)=2.x+4$ sont deux fonctions définies (et dérivables) sur $\mathbb{R}$.
Une seule chose peut faire que le quotient $f(x)$ n'existe pas : in dénominateur $v(x)$ nul.

$$\text{Le quotient } f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad 2.x+4\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2.x\neq -4 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -\frac{4}{2}=-2$$

<u>Conclusion :</u> tous les réels à l'exception de -2 ont une image par la fonction rationnelle f.

$$\boxed{D_f=\mathbb{R}\backslash\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[}$$

b) Calculons les images de $-\frac{7}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ par la fonction f :

- $$f\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{4\times\left(-\frac{7}{2}\right)^2+6\times\left(-\frac{7}{2}\right)+5}{2\times\left(-\frac{7}{2}\right)+4}=\frac{\cancel{4}\times\frac{49}{\cancel{4}}-21+5}{-7+4}=\frac{33}{-3}=-11$$

- $$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6\times\left(-\frac{1}{2}\right)+5}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4}=\frac{\cancel{4}\times\frac{1}{\cancel{4}}-3+5}{-1+4}=\frac{3}{3}=1$$

c) Vu l'ensemble de définition de la fonction f, x peut approcher de -2 par la gauche ou la par la droite.
Quand x tend vers -2, $u(x)=4.x^2+6.x+5$ tend vers $\underbrace{4\times(-2)^2+6\times(-2)+7=11}_{\text{Histoire de continuité...}}$.

Le dénominateur $v(x)=2.x+4$ tend lui vers 0 mais quel est alors son signe ?
Vite ! Dressons son tableau de signe.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2.x+4$		$-$	0	$+$	

Par conséquent :

$$\overbrace{\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{4.x^2+6.x+5}{2.x+4}=\frac{11}{0^-}=-\infty}^{-2\text{ par la gauche}}$$

A gauche de 2, la courbe (C) plonge le long de la droite *d* d'équation x=−2.

$$\overbrace{\lim_{x\to-2^+} f(x)=\frac{11}{0^+}=+\infty}^{-2\text{ par la droite}}$$

A droite de −2, la courbe (C) s'envole le long de la droite *d* d'équation x=−2.

<u>Conséquence :</u> la droite *d* d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

d) Deux méthodes permettent de décomposer la fonction rationnelle $f(x)$.

On peut chercher à identifier les coefficients a ; b et c.

On veut écrire la fonction rationnelle $f(x)$ sous la forme :

$$f(x)=a\times x+b+\frac{c}{2.x+4}=\frac{(a\times x+b)\times(2.x+4)+c}{2.x+4}$$
$$=\frac{2.a\times x^2+2.b\times x+4.a\times x+4.b+c}{2.x+4}$$
$$\frac{\boxed{4\times x^2+6\times x+5}}{2.x+4}=\frac{\boxed{2.a\times x^2+(2.b+4.a)\times x+(4.b+c)}}{2.x+4}$$

Deux fractions égales ayant le même dénominateur ont de facto des numérateurs égaux.
En identifiant les coefficients de même degré de ces numérateurs égaux, il vient alors :

$$\begin{cases}\text{Egalité des coefficients en } x^2 & : \ 4=2.a \ \Rightarrow \ a=2\\ \text{Egalité des coefficients en } x & : \ 6=2.b+4.a=2.b+8 \ \Rightarrow \ 2.b=-2 \ \Rightarrow \ b=-1\\ \text{Egalité des coefficients constants} & : \ 5=4.b+c=-4+c \ \text{ d'où } \ c=5+4=9\end{cases}$$

On peut chercher à extraire le dénominateur $2.x+4$ de chaque terme du numérateur.

Pour tout réel $x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-2;+\infty\right[$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{\overbrace{4.x^2}^{\text{Combien de fois }2.x+4\text{?}}+6.x+5}{2.x+4}=\frac{\overbrace{2.x\times(2.x+4)-8.x}^{\text{Au total }4.x^2}+6.x+5}{2.x+4}$$
$$=\frac{2.x\times\cancel{(2.x+4)}}{\cancel{2.x+4}}+\frac{\overbrace{-2.x}^{\text{Combien de fois }2.x+4\text{?}}+5}{2.x+4}=2.x+\frac{\overbrace{(-1)\times(2.x+4)+4}^{\text{Au total }-2.x}+5}{2.x+4}=2.x-1+\frac{9}{2.x+4}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel $x\neq-2$, nous avons : $f(x)=\underbrace{\frac{4.x^2+6.x+5}{2.x+4}}_{\text{Forme initiale}}=\underbrace{2.x-1+\frac{9}{2.x+4}}_{\text{Forme décomposée}}$

➲ Intéressons-nous aux limites aux infinis de la différence d'ordonnées entre la courbe (C) et la droite Δ pour une même abscisse x (différente de -2) :

$$y_{(C)}-y_\Delta=f(x)-(2.x-1)=\cancel{2.x-1}+\frac{9}{2.x+4}-\cancel{(2.x-1)}=\frac{9}{2.x+4}$$

Comme $\underbrace{\lim_{x\to+\infty}y_{(C)}-y_\Delta=\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{2.x+4}=\frac{9}{+\infty}=0^+ \ \text{ et } \ \lim_{x\to-\infty}y_{(C)}-y_\Delta=\frac{9}{-\infty}=0^-}_{\text{Aux infinis, la différence d'ordonnées } y_{(C)}-y_\Delta \text{ entre la courbe (C) et la droite } \Delta \text{ tend vers 0.}}$

<u>alors</u> la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

➲ Aux infinis, la courbe (C) «partage les mêmes limites» que son asymptote Δ. Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2.x+4=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2.x+4=+\infty$$

➲ La position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote Δ va nous être donnée par le signe de leur différence d'ordonnées $y_{(C)}-y_\Delta=\frac{9}{2.x+4}$.

Le tableau de signe de ce quotient est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
9		$+$		$+$	
$2.x+4$		$-$	0	$+$	
$y_{(C)}-y_\Delta$		$-$	‖	$+$	

Sur l'intervalle $\left]-\infty;-2\right[$, la courbe (C) est au-dessous de son asymptote Δ.
Sur $\left]-2;+\infty\right[$, elle est au-dessus.

e) La fonction f est le quotient des fonctions :

$$\begin{cases}u(x)=4.x^2+6.x+5\\ u'(x)=4\times2.x+6\times1+0=8.x+6\\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R}\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases}v(x)=2.x+4\\ u'(x)=2\times1+0=2\\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et non nulle sur } \mathbb{R}\setminus\{-2\}\end{cases}$$

Donc la fonction $f=\frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et pour tout réel x de cet ensemble, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{[v(x)]^2}=\frac{(8.x+6)\times(2.x+4)-2\times(4.x^2+6.x+5)}{(2.x+4)^2}$$
$$=\frac{16.x^2+32.x+12.x+24-8.x^2-12.x-10}{(2.x+4)^2}=\frac{8.x^2+32.x+14}{(2.x+4)^2}$$

➲ Le signe de la dérivée $f'(x)$ va nous donner les variations de la fonction f.

Le dénominateur $(2.x+4)^2$ est un carré. Il s'annule qu'en -2 et est positif ailleurs.

Pour connaître le signe du numérateur $N(x)=8.x^2+32.x+14$, calculons son discriminant.

$$\Delta_{N(x)}=32^2-4\times8\times14=1024-448=576=24^2$$

Son discriminant étant positif, la forme du second degré $N(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-32-24}{2\times8}=-\frac{56}{16}=-\frac{7\times8}{2\times8}=-\frac{7}{2} \qquad x_2=\frac{-32+24}{2\times8}=-\frac{8}{16}=-\frac{1}{2}$$

Par conséquent, les tableaux de signe de la dérivée $f'(x)$ et de variation de la fonction f sont les suivants :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$N(x)$		+	0	−	|	−	0	+	
$(2.x+4)^2$		+	|	+	0	+	|	+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	-11	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

f) Avant de construire la courbe (C), on trace d'abord ses deux asymptotes *d* d'équation $x=-2$ et Δ d'équation $y=2.x-1$.

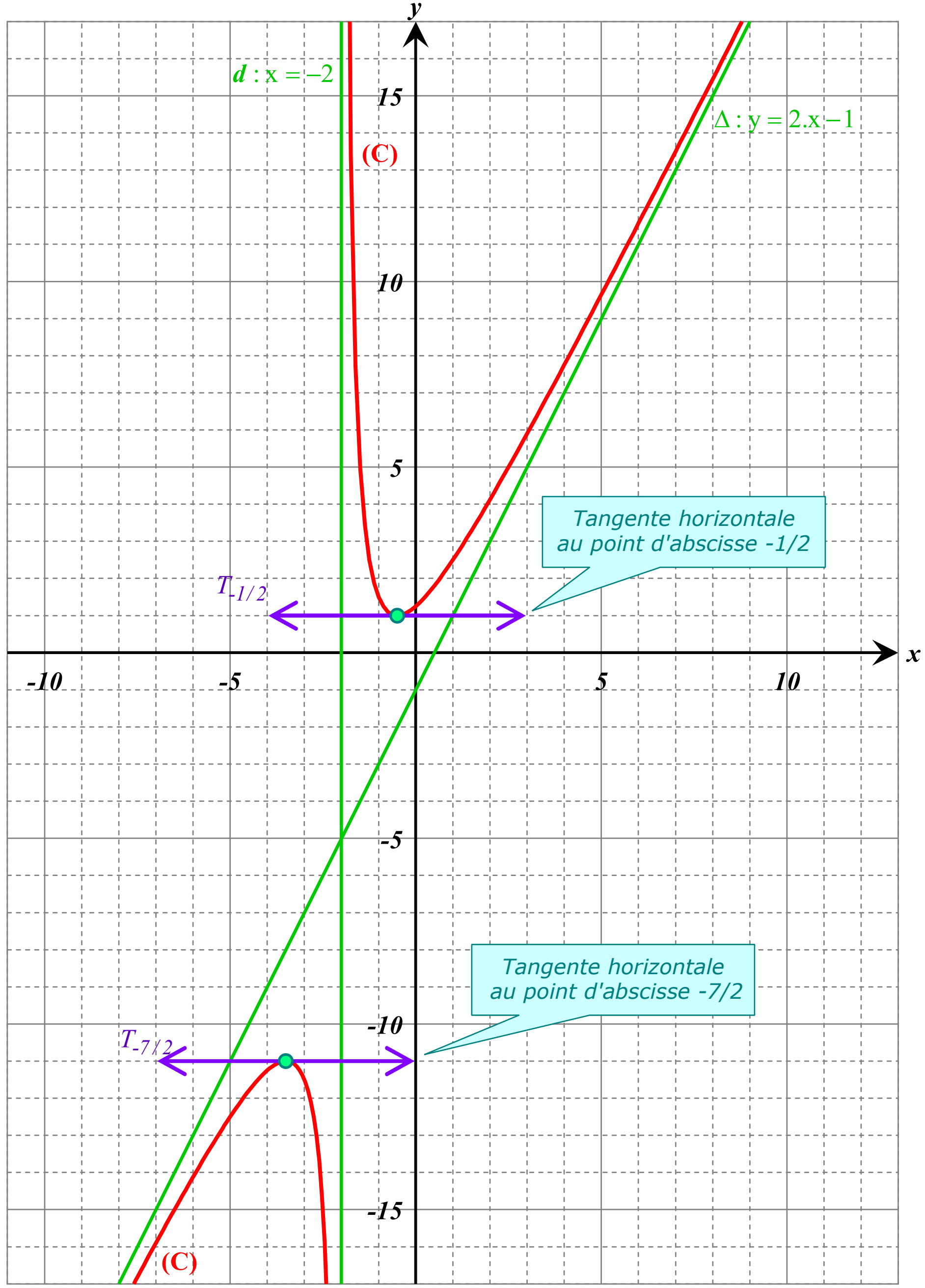
On place aussi les points de coordonnées $\left(-\frac{7}{2};-11\right)$ et $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ qui correspondent aux extrema.

Les coefficients directeurs des tangentes $T_{-7/2}$ et $T_{-1/2}$ sont les nombre dérivés de la fonction f en $-\frac{7}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

Or d'après le tableau ci-dessus, ceux-ci sont nuls : $f'\left(-\frac{7}{2}\right)=0$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

Par conséquent, les tangentes sont horizontales.
Il ne reste plus qu'à tracer la courbe (C) en se rappelant bien qu'elle est au-dessous de Δ avant -2 et au-dessus après.

Finalement, la figure demandée est celle ci-contre ➔



NOS TRÈS CHÈRES ÉTUDES

Le contexte

Une nouvelle étude de fonction rationnelle avec dérivée, limites et asymptotes. Du classique de chez classique !

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-\infty;1[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 6.x + 2}{1 - x}$$

Sa courbe représentative (C) est représentée sur le graphique ci-contre.

a) Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

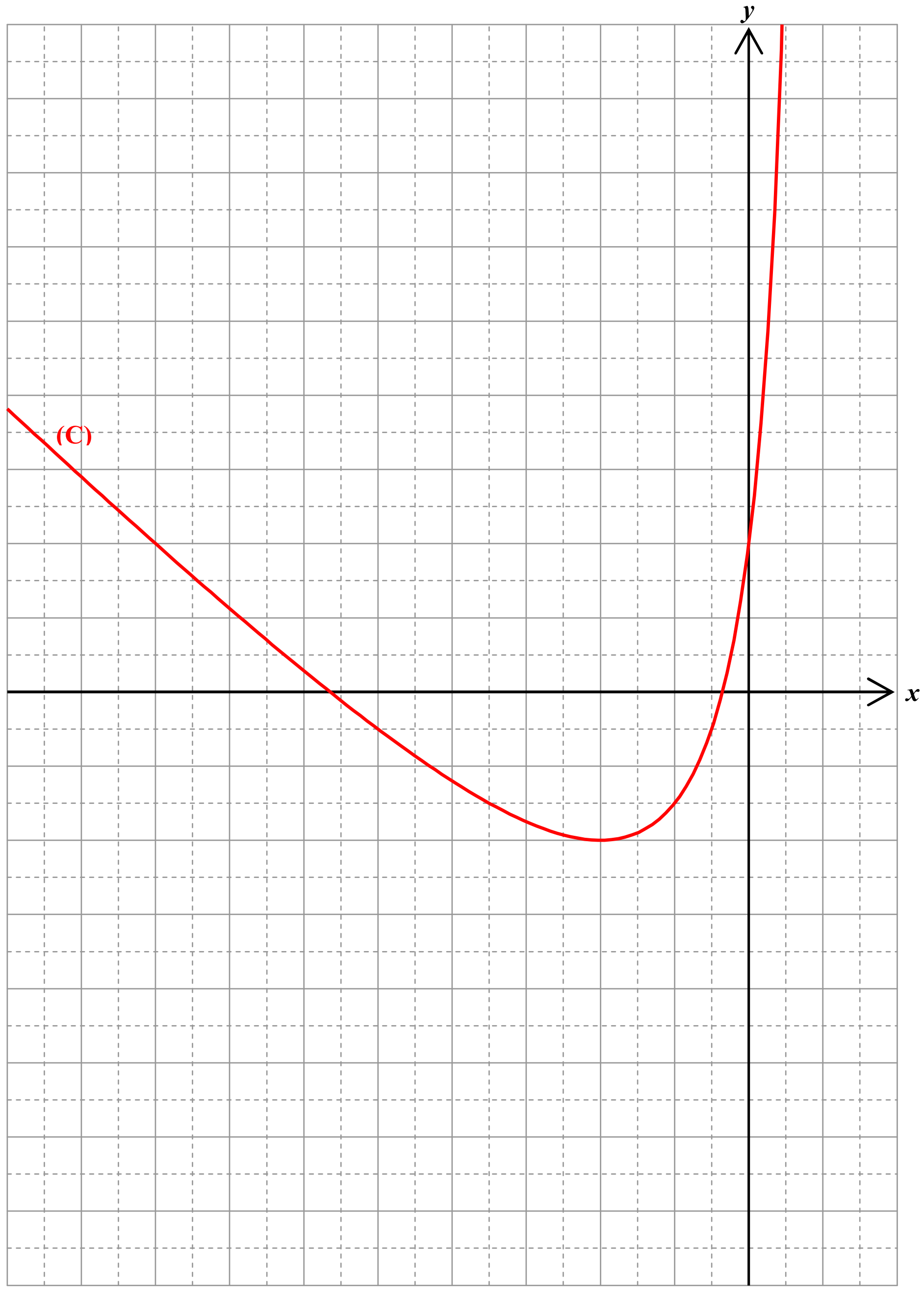
b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
On précisera quelles sont les éventuelles conséquences graphiques de celles-ci.

c) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x - 7$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ.

d) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $]-\infty;1[$?
Démontrer que pour tout réel $x \in]-\infty;1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2.x + 8}{(1-x)^2}$$

Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.



Le corrigé

a) Le dénominateur $v(x)=-x+1$ est clairement positif à gauche de 1. En effet :

$$x\in\left]-\infty;1\right[\quad\Leftrightarrow\quad x<1 \quad\Leftrightarrow\quad 0<1-x \quad\Leftrightarrow\quad 1-x \text{ est positif}$$

Pour connaître le signe du numérateur $u(x)=x^2+6.x+2$ qui est une forme du second degré, calculons son discriminant.

$$\Delta_{u(x)}=6^2-4\times1\times2=36-8=28=\left(\sqrt{28}\right)^2=\left(\sqrt{4}\times\sqrt{7}\right)^2=\left(2\times\sqrt{7}\right)^2$$

Comme son discriminant est positif, alors $u(x)$ admet (sur $\mathbb{R}$) deux racines distinctes :

$$\underbrace{x_1=\frac{-6-2.\sqrt7}{2\times1}=\frac{\cancel{2}\times\left(-3-\sqrt7\right)}{\cancel{2}}=-3-\sqrt7}_{\text{Appartient à l'intervalle }]-\infty;1[.}$$

$$\underbrace{x_2=\frac{-6+2.\sqrt7}{2\times1}=\frac{\cancel{2}\times\left(-3+\sqrt7\right)}{\cancel{2}}=-3+\sqrt7}_{\text{Est aussi dans l'intervalle }]-\infty;1[.}$$

A l'extérieur de ses racines, $u(x)$ est positif comme de son coefficient dominant 1.

A contrario, sur l'intervalle $\left]-3-\sqrt7;-3+\sqrt7\right[$, le numérateur $u(x)$ est négatif.

Le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-\infty;1[$ est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		$-3-\sqrt7$		$-3+\sqrt7$		1
$x^2+6.x+2$		+	0	−	0	+	
$1-x$		+		+		+	
$f(x)$		+	0	−	0	+	

b) L'ensemble de définition de f comportant deux bornes, il y a deux limites à déterminer.

➲ La limite de la fonction rationnelle f en $-\infty$.
En $-\infty$ comme de l'autre côté, la fonction rationnelle f se comporte comme le quotient de ses termes dominants $\frac{x^2}{-x}=-x$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -x=-(-\infty)=\boxed{+\infty}$$

➲ Lorsque x tend 1 par la gauche :

- Son numérateur $u(x)=x^2+6.x+2$ tend vers $u(1)=1+6+2=9$.
- Son dénominateur $v(x)=-x+1$ tend vers 0^+.

Donc le quotient $f(x)$ tend vers $\frac{9}{0^+}=+\infty$.

<u>Conséquence graphique :</u> la droite verticale ***d*** d'équation $x=1$ est une asymptote à la courbe (C).

c) Pour prouver que la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) en $-\infty$, nous devons établir qu'en cet endroit, leur différence d'ordonnées tend vers 0.
Pour tout réel $x\in]-\infty;1[$, nous pouvons écrire :

$$y_{(C)}-y_\Delta=f(x)-(-x-7)=\frac{x^2+6.x+2}{1-x}+\frac{(x+7)\times(1-x)}{1-x}$$
$$=\frac{x^2+6.x+2+x-x^2+7-7.x}{1-x}=\boxed{\frac{9}{1-x}}$$

Ainsi, comme :

$$\lim_{x\to-\infty} y_{(C)}-y_\Delta=\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{1-x}=\frac{9}{+\infty}=\boxed{0}$$

alors la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

➲ La position relative de la courbe (C) par rapport à la droite Δ va nous être donnée par le signe de leur différence d'ordonnées $y_{(C)}-y_\Delta=\frac{9}{1-x}$ sur $]-\infty;1[$.

Sachant que le dénominateur $1-x$ est positif sur cet intervalle, nous en déduisons que la différence d'ordonnées $y_{(C)}-y_\Delta=\frac{9}{1-x}$ est elle aussi positive.

Donc la courbe (C) est toujours au-dessus de son asymptote Δ.

d) Examinons les fonctions dont f est le quotient :f est le quotient des fonctions suivantes :

Son numérateur u

$$\left|\begin{array}{l} u(x)=x^2+6.x+2 \\ u'(x)=2.x+6\times1+0=2.x+6 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Son dénominateur v

$$\left|\begin{array}{l} v(x)=1-x \\ v'(x)=0-1=1 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et non nulle sur } \mathbb{R}\backslash\{1\} \end{array}\right.$$

Par conséquent la fonction $f=\frac{u}{v}$ est parfaitement dérivable sur l'intervalle $]-\infty;1[$ et même au-delà de 1. Mais tout cela est une autre histoire qui ne nous concerne pas !

Quoiqu'il en soit, pour tout réel $x \in \left]-\infty;1\right[$, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - v'(x)\times u(x)}{\left[v(x)\right]^2} = \frac{(2.x+6)\times(1-x) - (-1)\times\left(x^2+6.x+2\right)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2.x - 2.x^2 + 6 \cancel{-6.x} + x^2 + \cancel{6.x} + 2}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{-x^2+2.x+8}{(1-x)^2}}$$

Le dénominateur $(1-x)^2$ qui est un carré est toujours positif sur l'intervalle $\left]-\infty;1\right[$.

Le numérateur $N(x) = -x^2+2.x+8$ est une forme du second degré. Pour connaître son signe, une voie consiste à calculer son discriminant.

$$\Delta_{N(x)} = 2^2 - 4\times(-1)\times 8 = 4+32 = 36 = 6^2$$

Comme son discriminant est positif, $N(x)$ admet deux racines distinctes.

$$\underbrace{x_1 = \frac{-2-6}{2\times(-1)} = \frac{-8}{-2} = 4}_{\text{N'est pas dans l'intervalle }]-\infty;1[.}$$

$$\underbrace{x_2 = \frac{-2+6}{2\times(-1)} = \frac{4}{-2} = -2}_{\text{Appartient à l'intervalle }]-\infty;1[.}$$

A présent, nous avons en main tous les éléments pour dresser le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ qui nous donnera celui de variation de la fonction f ci-contre ➔

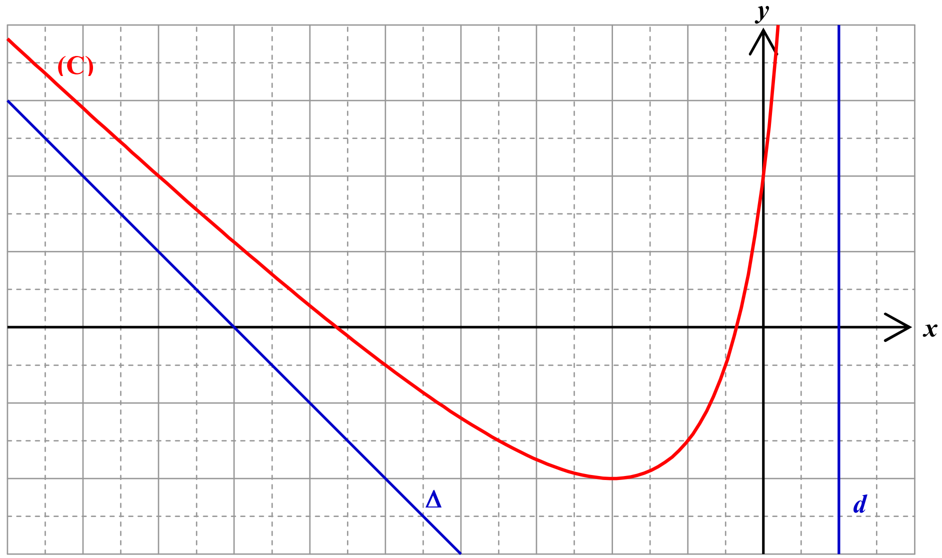
x	$-\infty$		-2		1
$-x^2+2.x+6$		$-$	0	$+$	
$(1-x)^2$		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

L'image de -2 par la fonction f est :

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 + 6\times(-2)+2}{1-(-2)}$$

$$= \frac{4-12+2}{3} = \frac{-6}{3} = \boxed{-2}$$

Même si elle n'était pas demandée, la courbe (C) flanquée de ses deux asymptotes *d* et Δ sont tracées sur le graphique ci-contre ➚



QUATRE QUESTIONS POUR EN FINIR

Le contexte

Cet exercice de fin d'année est constitué de quatre affirmations classiques sèches sur limites, asymptotes et dérivation. Pour chacune d'entre elles, il s'agit de dire si elle est vraie ou fausse et surtout de dire pourquoi il en est ainsi.

L'énoncé

Les quatre affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera chaque réponse donnée.

1. La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x^3 - 12.x + 20$$

Affirmation 1 : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Indication : *on pourra étudier le sens de variation de la fonction f.*

2. La fonction f est définie par :

$$f(x) = \frac{x-7}{3.x^2 + 2.x - 16}$$

Affirmation 2 : la limite de f à droite de 2 est égale à $-\infty$.

3. f est la fonction définie pour tout réel $x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 9}{x+1}$$

Affirmation 3 : la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-1;2\right[$.

4. f est la fonction définie pour tout réel $x \in \left]2;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{2.x^2 - 3.x + 7}{x-2}$$

On appelle (C) la courbe représentative.

Affirmation 4 : la droite ***d*** d'équation $y = 2.x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Le corrigé

1. La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x^3 - 12.x + 20$$

Affirmation 1 : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Comme le polynôme f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Il vient alors pour tout réel x :

$$f'(x) = 3.x^2 - 12 \times 1 + 0 = 3.x^2 - 12 = 3 \times \left(x^2 - 4\right) = 3 \times (x-2) \times (x+2)$$

$f'(x)$ étant entièrement factorisé, il devient facile de connaître le signe de cette dérivée, puis les variations de la fonction f.

Quelques précisions :

D'abord aux infinis, le polynôme $f(x)$ se comporte comme son terme dominant x^3. Ainsi :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

Ensuite, nous devons calculer les images par f des valeurs où les variations de la fonction changent.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
3		+		+		+	
$x-2$		−		−	0	+	
$x+2$		−	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	36	↘	4	↗	$+\infty$

☑ $f(-2) = (-2)^3 - 12 \times (-2) + 20 = -8 + 24 + 20 = 36$

☑ $f(2) = 2^3 - 12 \times 2 + 20 = 8 - 24 + 20 = 4$

<u>Conclusion :</u> vu le tableau de variation de la fonction continue f, il apparaît :

⇒ 0 a un seul antécédent avant -2, c'est-à-dire dans l'intervalle $\left]-\infty;-2\right[$.

⇒ 0 n'a aucun antécédent après -2, c'est-à-dire dans l'intervalle $\left[-2;+\infty\right[$.
En effet, le minimum de f sur ce dernier est égal à 4.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est définie par :

$$f(x)=\frac{x-7}{3.x^2+2.x-16}$$

Affirmation 2 : la limite de f à droite de 2 est égale à $-\infty$.

Lorsque x tend vers 2 par la droite :

- ☑ Le numérateur $x-7$ tend vers $2-7=-5$.
- ☑ Le dénominateur $D(x)=3.x^2+2.x-16$ tend vers $3\times 2^2+2\times 2-16=0$.

Mais est-ce 0 par valeurs positives ou 0 par valeurs négatives ? Au dénominateur, ça change tout !

Pour le savoir, nous devons déterminer le signe de la forme du second degré $D(x)$ à droite de 2.

Pour ce faire, calculons son discriminant :

$$\Delta_{D(x)}=2^2-4\times 3\times(-16)=4+192=196=(14)^2$$

Comme son discriminant est positif, alors $D(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-2-14}{2\times 3}=\frac{-16}{6}=-\frac{8}{3} \qquad x_2=\frac{-2+14}{2\times 3}=\frac{12}{6}=2$$

Comme son coefficient dominant 3 est positif, alors la forme du second degré $D(x)$ est positive (comme 3) à l'extérieur de ses racines et négative entre.

Son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		2		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A droite de 2, le dénominateur $D(x)$ tend vers 0 en étant positif.

Finalement, nous en concluons :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\frac{-5}{0^+}=-\infty$$

3. f est la fonction définie pour tout réel $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+x+9}{x+1}$$

Affirmation 3 : la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-1;2\right[$

Pour connaître les variations de la fonction f, intéressons-nous au signe de sa dérivée.

Comme son numérateur...

$u(x)=x^2+x+9$

$u'(x)=2.x+1+0=2.x+1$

Est dérivable sur $\mathbb{R}$

...et son dénominateur...

$v(x)=x+1$

$v'(x)=1+0=1$

Est dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nul sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Alors le quotient $f=\frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Pour tout réel x de cet ensemble, on a :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{\left[v(x)\right]^2}=\frac{(2.x+1)\times(x+1)-1\times(x^2+x+9)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2.x^2+2.x+x+1-x^2-x-9}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2.x-8}{(x+1)^2}$$

Pour connaître le signe du numérateur $N(x)=x^2+2.x-8$, calculons son discriminant :

$$\Delta_{D(x)}=2^2-4\times 1\times(-8)=4+32=36=(6)^2$$

Son discriminant étant positif, la forme du second degré $N(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-2-6}{2\times 1}=\frac{-8}{2}=-4 \qquad x_2=\frac{-2+6}{2\times 1}=\frac{4}{2}=2$$

Le tableau de variation de la fonction f est alors celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$N(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		↗		↘	‖	↘		↗	

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-1;2\right[$.

Une autre solution consiste à déterminer la limite à droite de -1 de f qui est $+\infty$.

Et quoiqu'on en pense, il est très difficile de croître depuis $+\infty$ ...

4. f est la fonction définie pour tout réel $x \in]2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2.x^2 - 3.x + 7}{x - 2}$$

On appelle (C) la courbe représentative.

Affirmation 4 : la droite ***d*** d'équation $y = 2.x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Déterminons la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la différence d'ordonnées entre la courbe (C) et la droite ***d*** qu'est :

$$y_{(C)} - y_{\boldsymbol{d}} = f(x) - (2.x - 1)$$

$$= \frac{2.x^2 - 3.x + 7}{x - 2} - \frac{(2.x - 1) \times (x - 2)}{x - 2} = \frac{2.x^2 - 3.x + 7}{x - 2} - \frac{2.x^2 - 4.x - x + 2}{x - 2}$$

$$= \frac{(2.x^2 - 3.x + 7) - (2.x^2 - 5.x + 2)}{x - 2} = \frac{\cancel{2.x^2} - 3.x + 7 - \cancel{2.x^2} + 5.x - 2}{x - 2}$$

$$= \frac{2.x + 5}{x - 2}$$

Soyons prudent, procédons par étapes...

Aux infinis, la fonction rationnelle $\frac{2.x + 5}{x - 2}$ se comporte comme le quotient de ses termes dominants $\frac{2.\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$. Nous en déduisons :

La limite de 2 est...2

$$\lim_{x \to +\infty} y_{(C)} - y_{\boldsymbol{d}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2.x + 5}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} 2 = 2$$

Conclusion : comme la différence d'ordonnées entre la courbe (C) et la droite ***d*** ne tend pas vers 0 en $+\infty$, alors la droite ***d*** d'équation $y = 2.x - 1$ n'est pas une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

La véritable asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

Pour faire apparaître (une partie de) l'équation de l'asymptote oblique à la courbe (C), il faut décomposer la fonction rationnelle f.

$$f(x) = \frac{\overbrace{2.x^2}^{\text{Combien de fois } x-2\text{ ?}} - 3.x + 7}{x - 2} = \frac{\overbrace{2.x \times (x - 2) + 4.x}^{2.x^2} - 3.x + 7}{x - 2} = \frac{2.x \times \cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} + \frac{x + 7}{x - 2}$$

$$= 2.x + \frac{\overbrace{1 \times (x - 2) + 2}^{x} + 7}{x - 2} = 2.x + \frac{1 \times \cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} + \frac{9}{x - 2} = \underbrace{2.x + 1}_{\text{Voilà l'équation de l'asymptote...}} + \frac{9}{x - 2}$$

Géométrie analytique

Inspiration zéro zéro degré ou de force

Le contexte

Un exercice assez classique sur les angles et le repérage polaire.

L'énoncé

Sur le graphique ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dans ce repère, on considère les points :

- A dont les coordonnées cartésiennes sont $(-3;-3)$
- B dont on connaît les coordonnées polaires : son module r_B est égal à 2 et un de ses arguments est $\frac{2.\pi}{3}$.

a) Sur la figure ci-contre, placer le point A et construire le point B.

b) Déterminer les coordonnées polaires du point A.

c) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point B.

d) En utilisant la relation de Chasles, démontrer que :

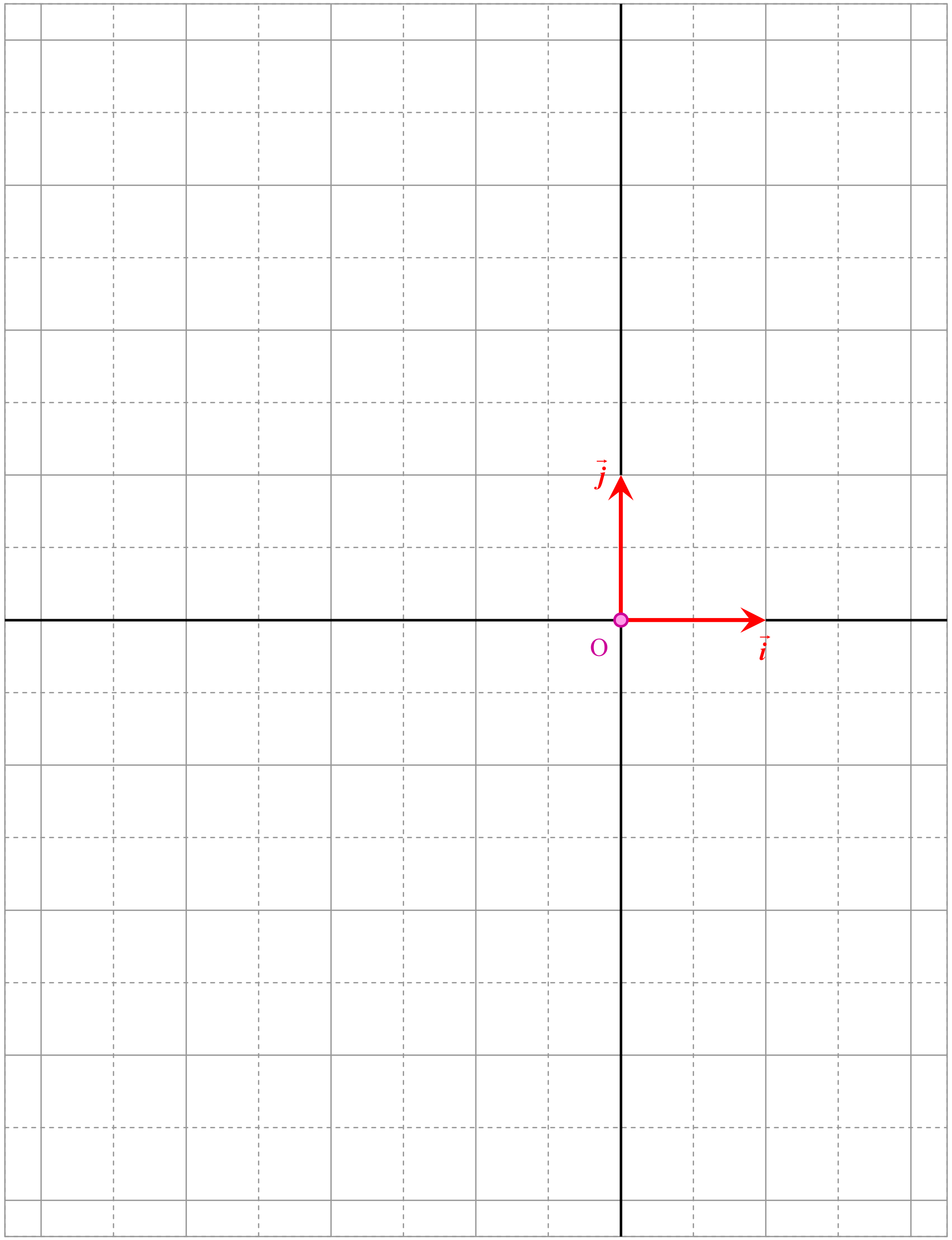
$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\theta_B-\theta_A$$

où θ_A et θ_B désignent respectivement des arguments des points A et B.

En déduire la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

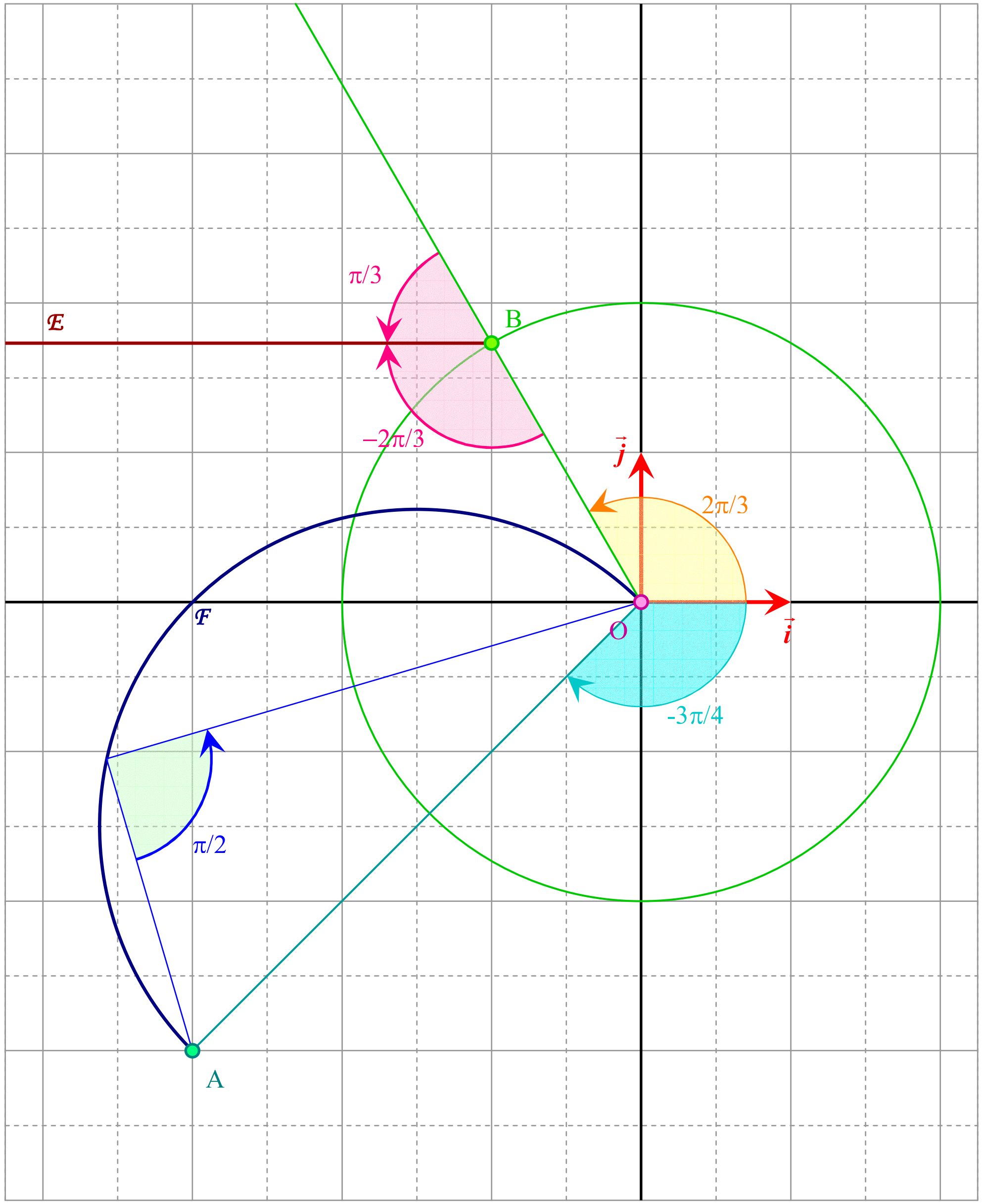
e) Déterminer et tracer sur la figure ci-contre :

1. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant : $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{3}$ *modulo* 2π .
2. L'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan vérifiant : $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{2}$ *modulo* 2π



Le corrigé

a) A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



b) Déterminons les coordonnées polaires de $A(-3;-3)$. Commençons par son module r_A.

$$r_A=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3.\sqrt{2}$$

Quant à ses arguments θ_A, il vérifie les deux égalités :

$$\cos(\theta_A)=\frac{x_A}{r_A}=\frac{-\cancel{3}}{\cancel{3}.\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin(\theta_A)=\frac{y_A}{r_A}=\frac{-\cancel{3}}{\cancel{3}.\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Une valeur possible pour l'argument θ_A est $-\frac{3\pi}{4}$ (modulo 2π bien sûr).

c) Les coordonnées cartésiennes du point $B\left(r_B=2;\theta_B=\frac{2.\pi}{3}\right)$ nous sont données par :

$$\begin{cases} x_B=r_B\times\cos(\theta_B)=2\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}=-1 \\ y_B=r_B\times\sin(\theta_B)=2\times\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\times\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=2\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cancel{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}=\sqrt{3} \end{cases}$$

d) θ_A et θ_B sont deux mesures des angles orientés $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)$. Par conséquent :

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\underbrace{\left(\overrightarrow{OA},\vec{i}\right)+\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)}_{\text{Merci Chasles !}}=-\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)=-\theta_A+\theta_B=\theta_B-\theta_A$$

$$=\frac{2.\pi}{3}-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{8.\pi}{12}+\frac{9.\pi}{12}=\frac{17.\pi}{12}=\frac{24.\pi}{12}-\frac{7.\pi}{12}=-\frac{7.\pi}{12}\ \text{modulo } 2\pi$$

e) La première chose à faire est de rendre la relation définissant $\mathcal{E}$ plus «exploitable».

$$M\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{3}\ \textit{modulo } 2\pi \Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{3}\ \textit{modulo } 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BM}\right)=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}\ \textit{modulo } 2\pi$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est la demi-droite horizontale d'origine B et de vecteur directeur $-\vec{i}$.

➲ Pour ce qui est de l'ensemble $\mathcal{F}$, nous pouvons écrire :

$$M\in\mathcal{F} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{2}\ \textit{modulo } 2\pi \Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{MA},-\overrightarrow{MO}\right)=\frac{\pi}{2}\ \textit{modulo } 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)=\frac{\pi}{2}\ \textit{modulo } 2\pi \Leftrightarrow \text{Le triangle AMO est rectangle direct.}$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est le demi-cercle supérieur de diamètre [AO].

CES CHÈRES ÉQUATIONS QUI VOUS TOURNENT LA TÊTE

Le contexte

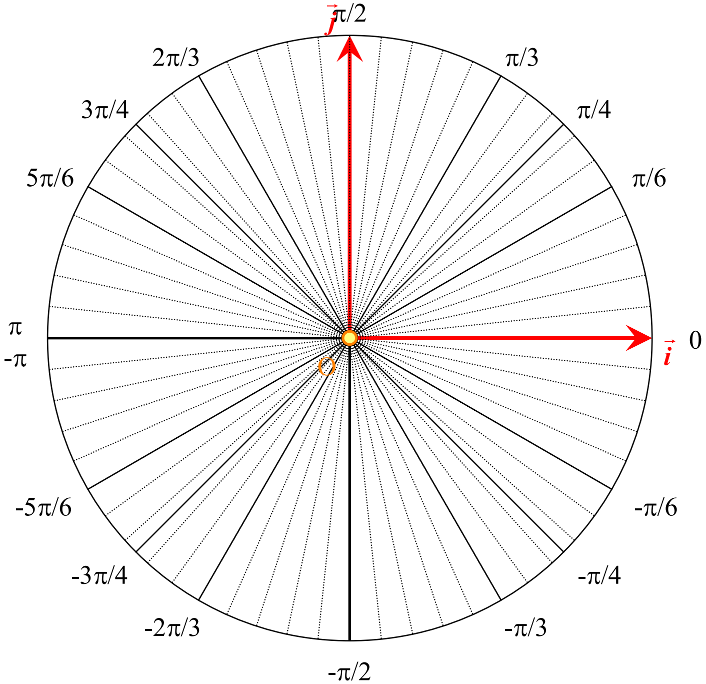
Deux équations trigonométriques assez classique à résoudre faisant appel aux formules et valeurs remarquables des sinus et cosinus et en travaillant sur le cercle «trigo» modulo 2π.

L'énoncé

a) Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$ l'équation :

$$2\times\sin(5.x)-1=0$$

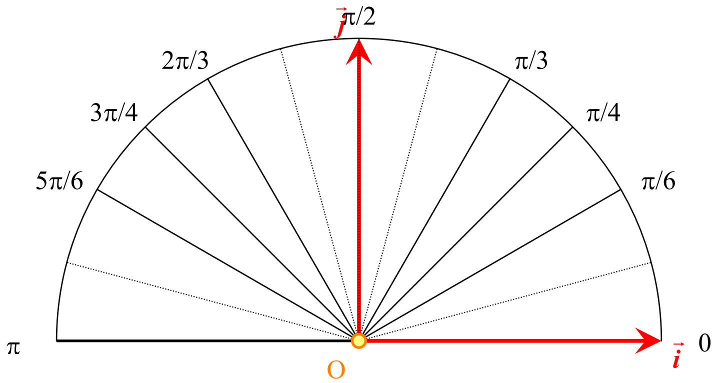
On représentera les solutions trouvées sur le cercle trigonométrique ci-dessous.



b) Résoudre dans l'intervalle $\left[0;\pi\right]$ l'équation :

$$\cos(2.x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

On représentera les solutions trouvées sur le demi-cercle trigonométrique ci-dessous.



Le corrigé

a) Avant de nous restreindre à l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$, résolvons l'équation de manière générale dans ℝ.

$$2\times\sin(5.x)-1=0 \iff 2\times\sin(5.x)=1 \iff \sin(5.x)=\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff \underbrace{5.x=\frac{\pi}{6}+k\times2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad 5.x=\pi-\frac{\pi}{6}+k'\times2=\frac{5\pi}{6}+k'\times2\pi}_{\text{où } k \text{ et } k' \text{ sont deux entiers relatifs}}$$

$$\iff \underbrace{x=\frac{\pi}{30}+k\times\frac{2\pi}{5} \quad \underline{\text{ou}} \quad x=\frac{\pi}{6}+k'\times\frac{2\pi}{5}}_{\text{où } k \text{ et } k' \text{ sont deux entiers relatifs}}$$

Les solutions de la forme $\frac{\pi}{30}+k\times\frac{2\pi}{5}$ se trouvant dans l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$ sont :

$$\underbrace{-\frac{23\pi}{30}=\frac{\pi}{30}-\frac{24\pi}{30}}_{k=-2} \quad \underbrace{-\frac{11\pi}{30}=\frac{\pi}{30}-\frac{12\pi}{30}}_{k=-1} \quad \underbrace{\frac{\pi}{30}}_{k=0} \quad \underbrace{\frac{13\pi}{30}=\frac{\pi}{30}+\frac{12\pi}{30}}_{k=1} \quad \underbrace{\frac{5\pi}{6}=\frac{25\pi}{30}=\frac{\pi}{30}+\frac{24\pi}{30}}_{k=2}$$

Les solutions de la forme $\dfrac{\pi}{6}+k'\times\dfrac{2\pi}{5}$ se trouvant dans l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$ sont :

$$\underbrace{-\frac{19\pi}{30}=\frac{5\pi}{30}-\frac{24\pi}{30}}_{k=-2}$$

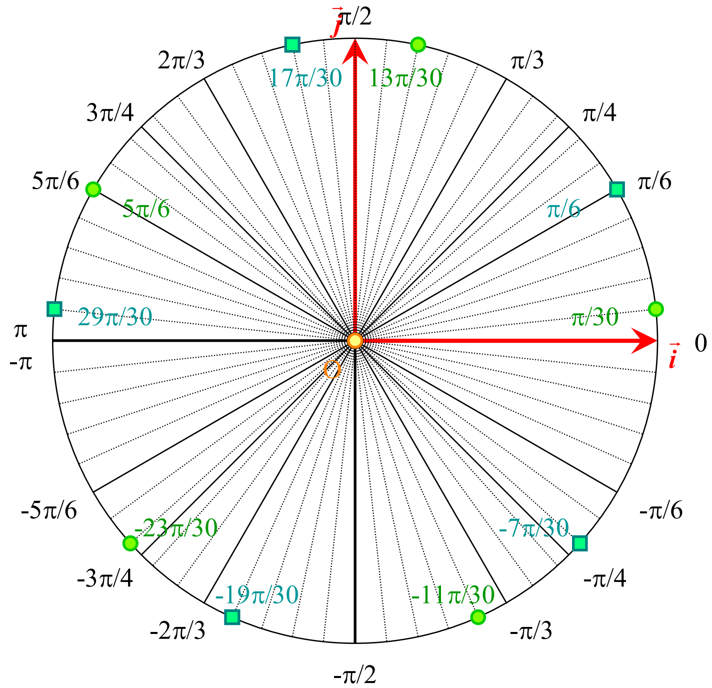
$$\underbrace{-\frac{7\pi}{30}=\frac{5\pi}{30}-\frac{12\pi}{30}}_{k=-1}$$

$$\underbrace{\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{30}}_{k=0}$$

$$\underbrace{\frac{17\pi}{30}=\frac{5\pi}{30}+\frac{12\pi}{30}}_{k=1}$$

$$\underbrace{\frac{29\pi}{30}=\frac{5\pi}{30}+\frac{24\pi}{30}}_{k=2}$$

Les dix solutions de l'équation sont placées sur le cercle ci-contre ➔



b) Pour résoudre cette équation, nous devons la transformer en une égalité de cosinus ou de sinus. Nous choisissons la première option avec la propriété $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\sin(t)$.

$$\cos(2.x)=\overbrace{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}^{\sin(t)} \Leftrightarrow \cos(2.x)=\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)}^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2.x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

Deux réels ayant même cosinus sont égaux ou opposés modulo 2π.

$$\Leftrightarrow \underbrace{2.x=\frac{\pi}{4}-x+k\times 2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad 2.x=-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+k'\times 2\pi}_{\text{où } k \text{ et } k' \text{ sont deux entiers relatifs}}$$

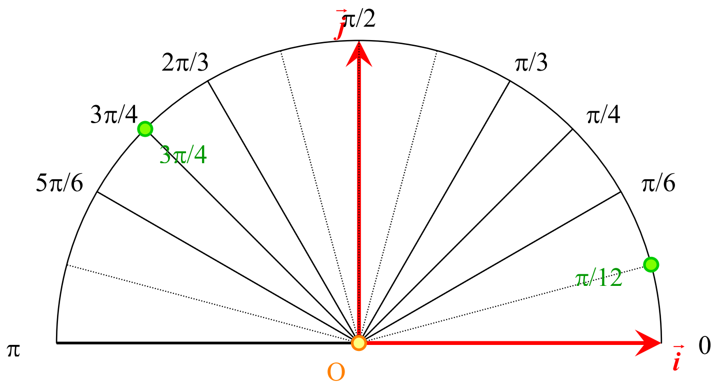
$$\Leftrightarrow \underbrace{3.x=\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad x=-\frac{\pi}{4}+k'\times 2\pi}_{\text{où } k \text{ et } k' \text{ sont deux entiers relatifs}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=\frac{\pi}{12}+k\times\frac{2\pi}{3} \quad \underline{\text{ou}} \quad x=-\frac{\pi}{4}+k'\times 2\pi}_{\text{où } k \text{ et } k' \text{ sont deux entiers relatifs}}$$

Il y a deux solutions de la forme $\dfrac{\pi}{12}+k'\times\dfrac{2\pi}{3}$ se trouvant dans l'intervalle $\left[0;\pi\right]$:

$$\underbrace{\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{12}+0\times\frac{2\pi}{3}}_{k=0} \qquad \underbrace{\frac{3\pi}{4}=\frac{9\pi}{12}=\frac{\pi}{12}+1\times\frac{8\pi}{12}=\frac{\pi}{12}+1\times\frac{2\pi}{3}}_{k=1}$$

Par contre, il n'y a dans l'intervalle $\left[0;\pi\right]$ aucune solution de la forme $-\dfrac{\pi}{4}+k'\times 2\pi$.



Ça tourne et ça vire !

Le contexte

Un exercice sur les formules d'addition et de duplication des sinus et cosinus.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Les points A et B appartiennent au cercle trigonométrique.

On appelle α une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)$ appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Le point B est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Sachant que $\cos(\alpha)=\frac{4}{5}$, déterminer la valeur exacte de $\sin(\alpha)$.

b) Démontrer que :

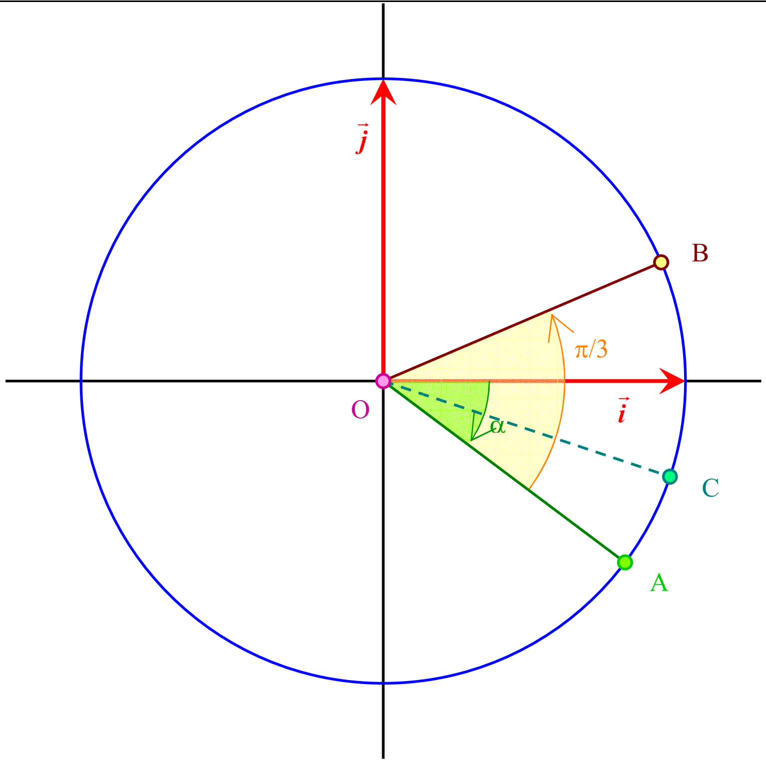
$$\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)=\alpha+\frac{\pi}{3}$$

c) Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$.

En déduire les coordonnées exactes du point B.

On appelle C le point du cercle trigonométrique tel que la demi-droite [OC) soit la bissectrice de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)$.

d) Déterminer les coordonnées exactes du point C.



Le corrigé

a) Le réel α vérifie l'égalité :

$$\left[\cos(\alpha)\right]^2+\left[\sin(\alpha)\right]^2=1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2+\left[\sin(\alpha)\right]^2=1 \Leftrightarrow \frac{16}{25}+\left[\sin(\alpha)\right]^2=1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[\sin(\alpha)\right]^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}=\left(\frac{3}{5}\right)^2}_{\text{Deux réels ayant mêmes carrés...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin(\alpha)=\frac{3}{5}}_{\text{...sont égaux...}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \underbrace{\sin(\alpha)=-\frac{3}{5}}_{\text{...ou opposés.}}$$

Le réel α appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, son sinus est compris entre -1 et 0.

Conclusion : la seule valeur possible pour $\sin(\alpha)$ est $-\dfrac{3}{5}$.

α étant une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)$ et le point A appartenant au cercle trigonométrique, nous en déduisons que les coordonnées de A sont $\underbrace{\left(\dfrac{4}{5};-\dfrac{3}{5}\right)}_{\cos(\alpha)\text{ et }\sin(\alpha)}$.

b) Comme le point B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, alors :

⇒ Le point B appartient au cercle de centre O passant par A c'est-à-dire au cercle trigonométrique. Aucun intérêt ici !

⇒ L'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$ radians. C'est déjà plus intéressant !

Nous pouvons alors écrire :

$$\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)=\underbrace{\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}_{\text{Merci Chasles !}}=\alpha+\frac{\pi}{3}$$

Pour les mêmes raisons que A, les coordonnées de B sont $\left(\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right);\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

c) Appliquons la formule d'addition du cosinus.

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\alpha)\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin(\alpha)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4+3.\sqrt{3}}{10}.$$

Ainsi que nous l'avons déjà dit, l'ordonnée du point B est égale à $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Pour calculer ce dernier, appliquons la formule d'addition du sinus.

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(\alpha)\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos(\alpha)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-3+4.\sqrt{3}}{10}$$

Conclusion : les coordonnées du point B sont $\left(\dfrac{3.\sqrt{3}+4}{10};\dfrac{4.\sqrt{3}-3}{10}\right)$.

d) On appelle δ une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right)$ comprise dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$.

Compte tenu de la position du point C, une telle mesure existe !

Comme la demi-droite [OC) est la bissectrice de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)$, alors

$$\delta=\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{2}\times\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=2.\delta$$

Le point C appartenant au cercle trigonométrique, ses coordonnées sont $\left(\cos(\delta);\sin(\delta)\right)$.

Pour calculer ces dernières, nous allons utiliser les formules de duplication des cosinus et sinus. Nous avons :

$$\left[\cos(\delta)\right]^2=\frac{1+\cos(2.\delta)}{2}=\frac{1+\cos(\alpha)}{2}=\frac{1+0,8}{2}=\frac{1,8}{2}=0,9$$

Le réel δ appartenant à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$, son cosinus est positif. Nous en déduisons : $\cos(\delta)=\sqrt{0,9}$

$$\left[\sin(\delta)\right]^2=\frac{1-\cos(2.\delta)}{2}=\frac{1-\cos(\alpha)}{2}=\frac{1-0,8}{2}=\frac{0,2}{2}=0,1$$

Le réel δ étant compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et 0, son sinus est négatif. Il vient : $\sin(\delta)=-\sqrt{0,1}$

Conclusion : les coordonnées du points C sont $\left(\sqrt{0,9};-\sqrt{0,1}\right)$

On peut soigner l'esthétisme de deux coordonnées en écrivant :

$$\cos(\delta)=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3.\sqrt{10}}{10}$$

$$\sin(\delta)=-\sqrt{\frac{1}{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

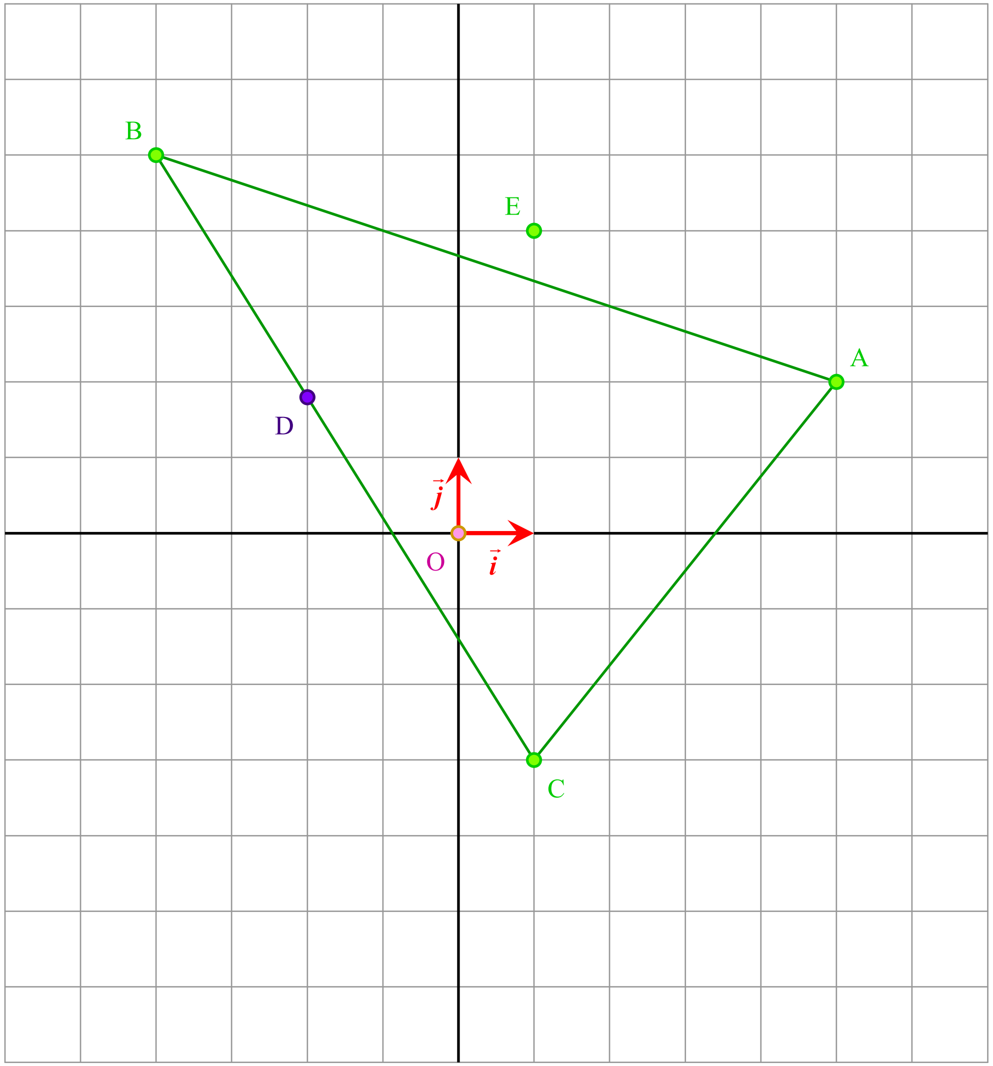
Classique géométrique et analytique

Le contexte

Tout ce qu'il faut savoir sur la géométrie analytique en première S...

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.



Sur la figure ci-contre, les points A, B, C et E ont pour coordonnées :

$A(5;2)$ $B(-4;5)$ $C(1;-3)$ $E(1;4)$

a) Le triangle ABC est-il isocèle en B ? On justifiera sa réponse.

b) On appelle D le point de la droite (BC) dont l'abscisse est égale à -2.
Déterminer l'ordonnée du point D.

c) On appelle $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient l'équation :

$$x^2+y^2+6.x+7.y+17=0$$

1. Déterminer la nature et les attributs de l'ensemble $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de l'ensemble $\mathscr{C}$ et de la droite (OE).

d) On appelle G le barycentre des deux points pondérés $(A;2)$ et $(B;1)$.
Déterminer par le calcul les coordonnées du point G.

e) On appelle Γ l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation :

$$\left(2.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=3$$

1. On appelle $(x;y)$ les coordonnées du point M de la relation précédente.
   Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble Γ.
2. Quelle est la nature de l'ensemble Γ ?
3. Le point E appartient-il à l'ensemble Γ ? On justifiera sa réponse.
4. Tracer l'ensemble Γ sur la figure ci-contre.

Le corrigé

a) Le mieux pour savoir si le triangle ABC est isocèle en B est encore de regarder si les longueurs BA et BC sont égales.

☑ Comme $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 5-(-4)=9 \\ 2-5=-3 \end{pmatrix}$ alors $BA = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{(9)^2+(-3)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$.

☑ Comme $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-(-4)=5 \\ -3-5=-8 \end{pmatrix}$ alors $BC = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(5)^2+(-8)^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89}$.

<u>Conclusion :</u> comme les longueurs BA et BC ne sont pas égales, alors le triangle ABC n'est pas isocèle en B.

b) Nous notons $(-2; y_D)$ les coordonnées du point D. Comme il appartient à la droite (BC), alors nous avons l'équivalence :

$$D \in (BC) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 2 \\ y_D - 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ y_D - 5 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \times (-8) - (y_D - 5) \times 5 = 0 \Leftrightarrow -16 - 5.y_D + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - 5.y_D = 0 \Leftrightarrow -5.y_D = -9 \Leftrightarrow y_D = \frac{-9}{-5} = 1,8$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point D sont $(-2; 1,8)$.

c.1) Vu la forme de son équation cartésienne, l'ensemble $\mathcal{C}$ semble être un cercle. Remontons le fil de son équation...

$$M(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 6.x}_{\text{Débuts...}} + \underbrace{y^2 + 7.y}_{\text{...d'identités...}} + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+3)^2 - 3^2}_{\text{...remar...}} + \underbrace{(y+3,5)^2 - 3,5^2}_{\text{...quables.}} + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 - 9 + (y+3,5)^2 - 12,25 + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+3,5)^2 = 4,25 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+3,5)^2 = \frac{17}{4}$$

On appelle alors Ω le point de coordonnées $(-3; -3,5)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega M}$ sont $\begin{pmatrix} x-(-3) = x+3 \\ y-(-3,5) = y+3,5 \end{pmatrix}$. Il vient alors :

$$\Omega M^2 = \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2 = (x+3)^2 + (y+3,5)^2.$$

Désormais, nous pouvons achever notre périple sur le chemin de l'ensemble $\mathcal{C}$.

$$M(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+3,5)^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{M appartient au cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{17}}{2}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-3; -3,5)$ et de rayon $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

c.2) Tout d'abord, déterminons une équation de la droite (OE).

$$M(x;y) \in (OE) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OE}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OE}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \times 4 - y \times 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4.x - y = 0 \Leftrightarrow y = 4.x$$

Les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite (OE) sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6.x + 7.y + 17 = 0 & \textit{(1)} \leftarrow \text{Appartenance au cercle } \mathcal{C} \\ y = 4.x & \textit{(2)} \leftarrow \text{Apprtenance à la droite } (OE) \end{cases}$$

Afin de trouver x, on remplace y par $4.x$ dans l'équation ***(1)***.

$$x^2 + (4.x)^2 + 6.x + 7 \times (4.x) + 17 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 16.x^2 + 6.x + 28.y + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow 17.x^2 + 34.x + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2.x + 1 = 0}_{\text{Après division par 17...}}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Nous en déduisons pour l'ordonnée :

$$y = 4 \times (-1) = -4$$

<u>Conclusion :</u> le cercle $\mathcal{C}$ et la droite (OE) ont un seul point d'intersection I dont les coordonnées sont $(-1; -4)$.

Le dessous des cartes
En fait, la droite (OE) est la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point I.

d) Deux méthodes permettent de déterminer les coordonnées $(x_G ; y_G)$ de ce point G.

On peut s'appuyer sur la relation vectorielle définissant un barycentre...

Comme G est le barycentre des deux points pondérés $(A;2)$ et $(B;1)$, alors ils vérifient la relation vectorielle :

$$2.\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}=\vec{o} \iff 2\times\begin{pmatrix}x_G-5\\y_G-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_G+4\\y_G-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}2.x_G-10\\2.y_G-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_G+4\\y_G-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}3.x_G-6\\3.y_G-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff 3.x_G-6=0 \quad \underline{\text{et}} \quad 3.y_G-9=0$$

$$3.x_G=6 \qquad 3.y_G=9$$

$$x_G=2 \qquad y_G=3$$

Ou on peut appliquer une formule du cours donnant directement les coordonnées d'un barycentre...

Comme G est le barycentre des deux points pondérés $(A;2)$ et $(B;1)$, alors ses coordonnées vérifient les égalités :

$$x_G=\frac{2.x_A+x_B}{2+1}=\frac{2\times5+(-4)}{3}=\frac{6}{3}=2 \qquad y_G=\frac{2.y_A+y_B}{2+1}=\frac{2\times2+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du barycentre G sont $(2;3)$.

e.1) Avant toute chose, déterminons les coordonnées du vecteur $2.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}$.

$$2.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=2\times\begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y+4\\y-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.x-10\\2.y-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y+4\\y-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.x-6\\3.y-9\end{pmatrix}$$

Nous aurions pu aussi remarquer que comme G est le barycentre de $(A;2)$ et $(B;1)$, alors en application du théorème de réduction vectorielle, il vient :

$$2.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=(2+1).\overrightarrow{GM}=3\times\overrightarrow{GM}=3\times\begin{pmatrix}x-2\\x-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.x-6\\3.y-9\end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$M(x;y)\in\Gamma \iff \left(2.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=3 \iff \begin{pmatrix}3.x-6\\3.y-9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=3$$

$$\iff (3.x-6)\times4+(3.y-9)\times5=3$$

$$\iff 12.x-24+15.y-45-3=0$$

$$\iff 12.x+15.y-72=0 \iff \underbrace{4.x+5.y-24=0}_{\text{Après division par 3}}$$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne de l'ensemble Γ est $4.x+5.y-24=0$.

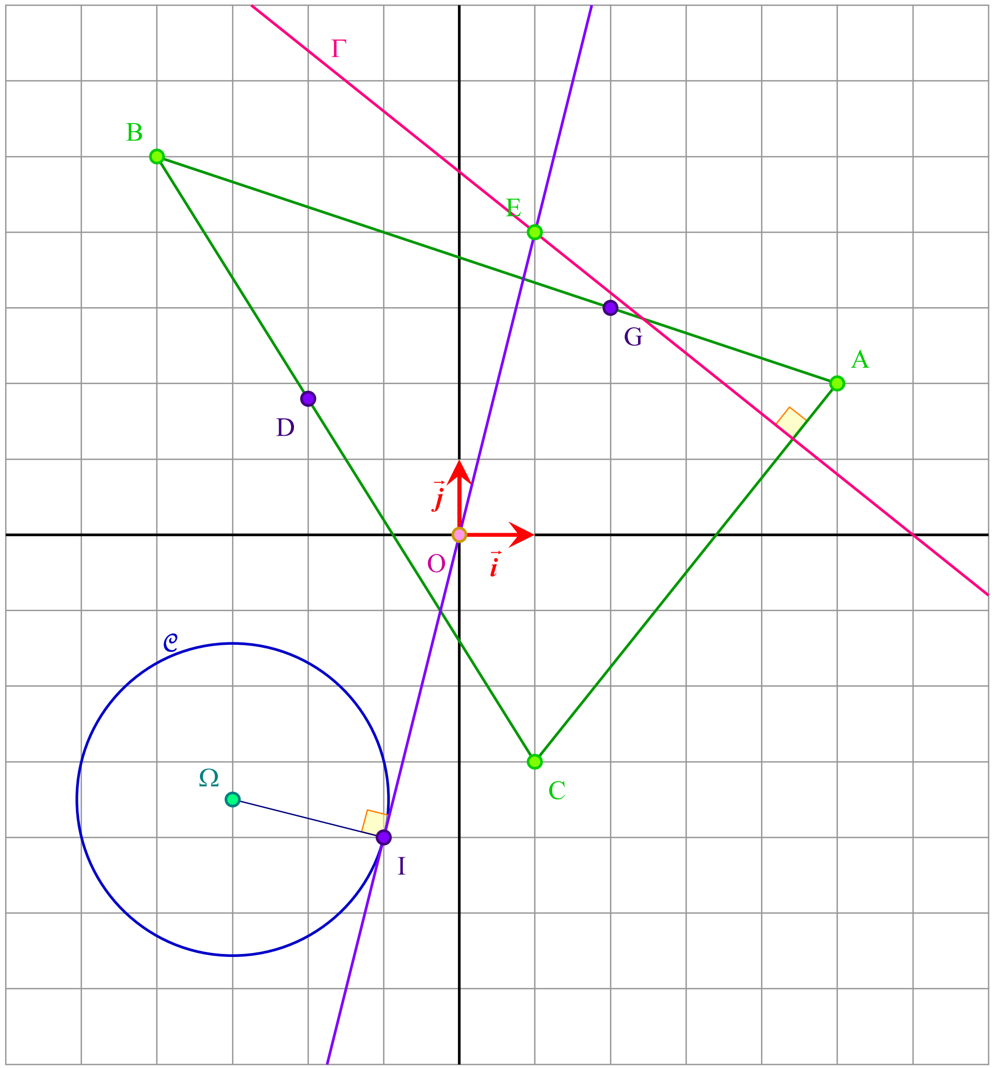
e.2) Vu son équation, Γ est une droite dont l'un des vecteurs normaux est $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

e.3) Regardons si les coordonnées du point E vérifient l'équation de la droite Γ.

$$4.x_E+5.y_E-24=4\times1+5\times4-24=4+20-24=0$$

Comme ses coordonnées en vérifient l'équation, alors le point E appartient à la droite Γ.

e.4) En conclusion, la droite Γ est la perpendiculaire à la droite (AC) passant par E.



Géométrie non analytique

Parallèle barycentrique

Le contexte

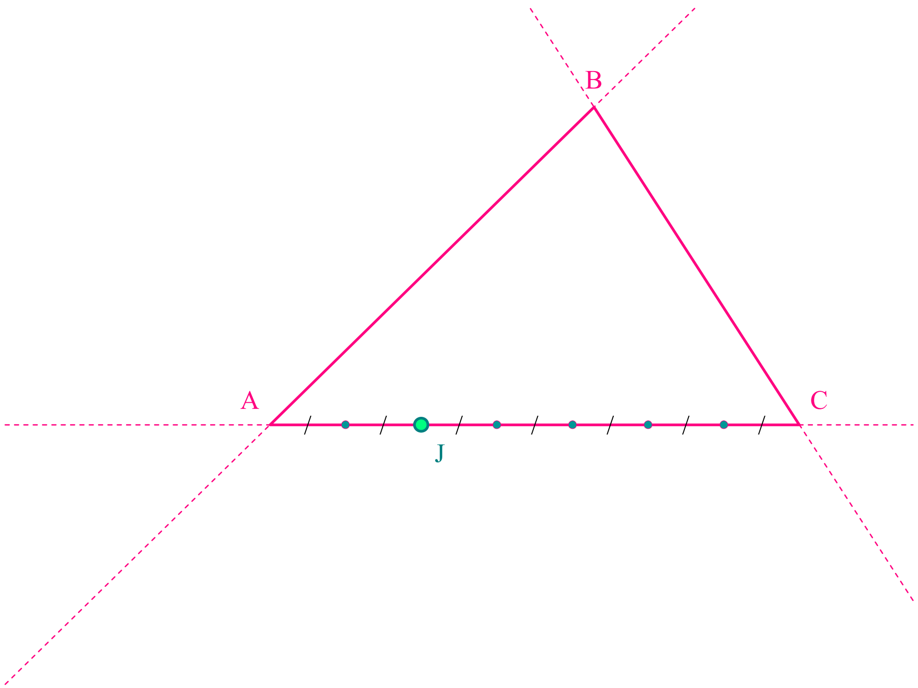
Un exercice assez complet sur les barycentres.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice, ABC est un triangle tel que :

AB = 6cm AC = 7cm BC = 5cm

Le côté [AC] a été partagé en sept parties égales. Le point J appartient à ce segment.



On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(A;5)$; $(B;-2)$ et $(C;2)$.

a) Construire le point I qui est le barycentre des deux points pondérés $(A;5)$ et $(B;-2)$.

b) Démontrer que le point G appartient à la droite (CI).
Démontrer que les droites (BC) et (AG) sont parallèles.
Placer le point G sur la figure.

c) Démontrer que le point J est un barycentre pour les deux points A et C pour des coefficients que l'on précisera.
En déduire le point d'intersection des droites (BJ) et (CI).

d) Recopier, compléter, puis démontrer l'énoncé de cours suivant :

«**Théorème de....**
Pour tout point M du plan :
$$5.\overrightarrow{MA}-2.\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}=\ldots$$»

e) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant l'égalité :
$$\left\|5.\overrightarrow{MA}-2.\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}\right\|=10$$
Le point A appartient-t-il à l'ensemble $\mathcal{E}$? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a) Pour placer le point I, exprimons le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Comme I est le barycentre des points pondérés $(A;5)$ et $(B;-2)$, alors il vérifie la relation vectorielle :

$$5.\overrightarrow{AI}-2.\overrightarrow{BI}=\vec{o} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{AI}\underbrace{-2.\overrightarrow{BA}-2.\overrightarrow{AI}}_{-2.\overrightarrow{BI}}=\vec{o} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AI}=-2.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=-\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$$

<u>Conclusion :</u> I se situe sur la droite (AB), à $\frac{2}{3}\times 6=4$ centimètres de A à l'opposé de B.

b) Le point I est le barycentre des deux points pondérés $(A;5)$ et $(B;-2)$. D'après la règle d'associativité :

Comme G est le barycentre des points $\underbrace{(A;5)\ (B;-2)}_{\downarrow}$ et $(C;2)$

alors G est aussi le barycentre des points $(I;5-2=3)$ et $(C;2)$

Et comme le barycentre de deux points appartient à la droite définie ceux-ci, alors le barycentre G appartient à la droite (CI).

➲ Comme G est le barycentre des trois points pondérés $(A;5)$; $(B;-2)$ et $(C;2)$, alors il vérifie la relation vectorielle :

$$5.\overrightarrow{AG}-2.\overrightarrow{BG}+2.\overrightarrow{CG}=\vec{o} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{AG}\underbrace{+2.\overrightarrow{GB}+2.\overrightarrow{CG}}_{\text{Appliquons Chasles !}}=\vec{o} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{AG}+2.\overrightarrow{CB}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}.\overrightarrow{BC}$$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et les droites (AG) et (BC) sont parallèles.
Conclusion : le point G est le point d'intersection de la droite (CI) et de la parallèle à (BC) passant par le point A. Ce qui permet de le placer...

c) D'après la figure, le point J vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{7}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AJ}=2.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AJ}=\underbrace{2.\overrightarrow{AJ}+2.\overrightarrow{JC}}_{2.\overrightarrow{AC}} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{AJ}+2.\overrightarrow{CJ}=\vec{o}$$

Conclusion : le point J est le barycentre des deux points pondérés $(A;5)$ et $(C;2)$.

➲ Au vu de la figure, il semblerait que la droite (BJ) passe par le point G. Prouvons-le !
Le point J est le barycentre des points $(A;5)$ et $(C;2)$. D'après la règle d'associativité :

Comme G est le barycentre des points $\underbrace{(A;5)\ (C;2)}_{\downarrow}$ et $(B;-2)$

alors G est aussi le barycentre des points $(J;5+2=7)$ et $(B;-2)$

Donc le barycentre G appartient à la droite (JB).
Conclusion : le point G appartenant aux deux droites sécantes (BJ) et (CI), il est de facto leur point d'intersection.

d) Lé théorème en question est celui dit «de réduction des sommes vectorielles».
Pour tout point M du plan, nous pouvons écrire :

$$5.\overrightarrow{MA}-2.\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}=\underbrace{5.\overrightarrow{MG}+5.\overrightarrow{GA}}_{5.\overrightarrow{MA}}\underbrace{-2.\overrightarrow{MG}-2.\overrightarrow{GB}}_{-2.\overrightarrow{MB}}\underbrace{+2.\overrightarrow{MG}+2.\overrightarrow{GC}}_{2.\overrightarrow{MC}}$$

$$=(5-2+2).\overrightarrow{MG}+\underbrace{5.\overrightarrow{GA}-2.\overrightarrow{GB}+2.\overrightarrow{GC}}_{\substack{=\vec{o}\\ \text{car G est le barycentre}\\ \text{de }(A;5);\ (B;-2)\text{ et }(C;2)}}=5.\overrightarrow{MG}$$

Conclusion : le résultat recherché est : $5.\overrightarrow{MA}-2.\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}=5.\overrightarrow{MG}$

e) Utilisons le résultat de la question précédente à propos de l'ensemble $\mathcal{E}$.

$$M\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \left\|5.\overrightarrow{MA}-2.\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}\right\|=10 \Leftrightarrow \left\|5.\overrightarrow{MG}\right\|=10 \Leftrightarrow |5|\times\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=10$$

$$\Leftrightarrow 5\times MG=10 \Leftrightarrow GM=\frac{10}{5}=2$$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre G et de rayon 2.

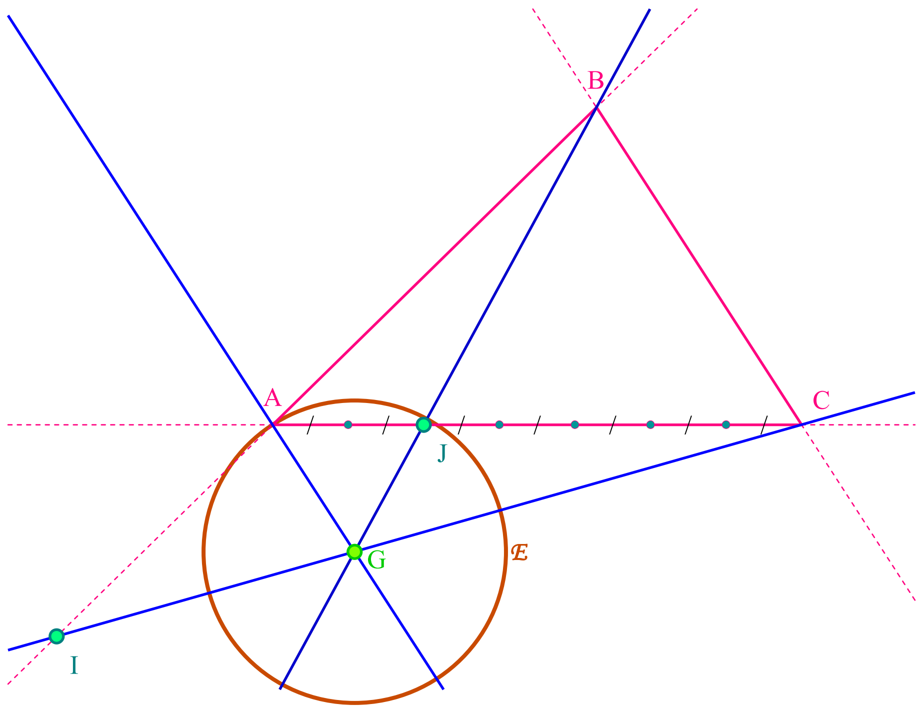
Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre G et de rayon 2.

➲ D'après la figure, le point A semble bien appartenir à ce cercle mais est-ce le cas ?
En fait, la question qui se pose est de savoir combien mesure la longueur $GA = AG$.
Lors de la question b, nous avons établi la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}.\overrightarrow{BC} \quad \text{donc} \quad AG=\left|\frac{2}{5}\right|\times BC=\frac{2}{5}\times 5=2$$

Donc le point A appartient bien au cercle $\mathcal{E}$ de centre G et de rayon 2.

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-dessous :



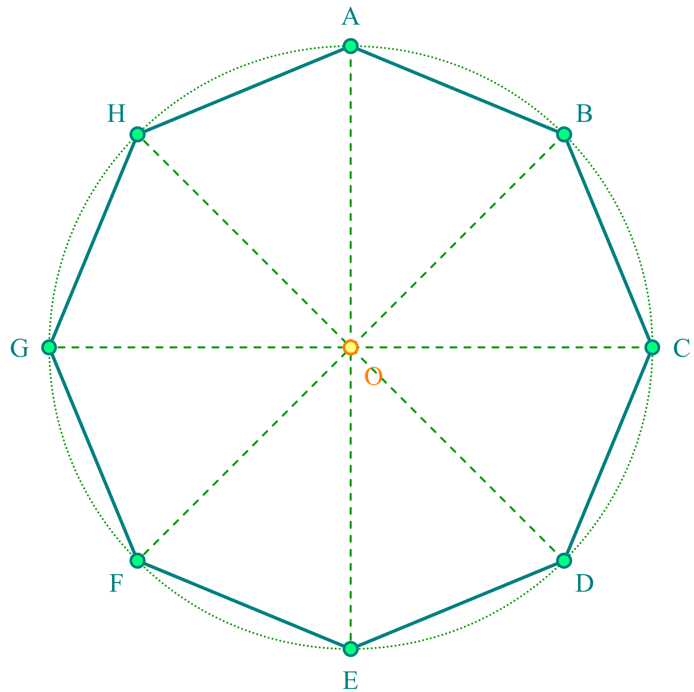
HUIT À TABLE, LE SUPPLICE DE LA ROUE !

Le contexte

Un exercice où il s'agit de déterminer astucieusement la position d'un barycentre de huit points pondérés au moyen du théorème d'associativité.

L'énoncé

Les points A ; B ; C ; D ; E ; F ; G et H sont les huit sommets d'un octogone régulier de centre O.

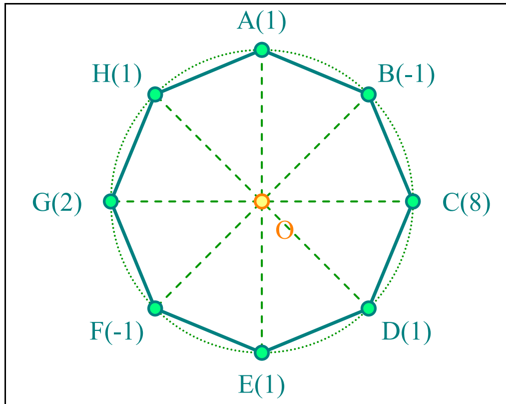


Déterminer (en justifiant) le barycentre X des huit points pondérés :

$$(A;1)\quad (B;-1)\quad (C;8)\quad (D;1)\quad (E;1)\quad (F;-1)\quad (G;2)\quad (H;1)$$

Indication : on pourra reporter sur la figure les coefficients de façon à voir si certaines simplifications ne sont pas possibles...

Le corrigé



Commençons par reporter sur la figure les coefficients des points qui sont autant de charges pour ceux-ci.

Comme le point O est le milieu des segments [AE], [BF] et [DH], alors il est aussi l'isobarycentre des couples :

- $(A;1)$ et $(E;1)$
- $(B;-1)$ et $(F;-1)$
- $(D;1)$ et $(H;1)$

En application de la règle d'associativité,

X étant le barycentre de $\underbrace{(A;1)\quad (E;1)}_{\downarrow}\quad \underbrace{(B;-1)\quad (F;-1)}_{\downarrow}\quad \underbrace{(D;1)\quad (H;1)}_{\downarrow}\quad (C;8)\quad (G;2)$

il est aussi le barycentre de $(O;2)\quad (O;-2)\quad (O;2)\quad (C;8)\quad (G;2)$

Donc X est le barycentre des trois points pondérés $\underbrace{(O;2+(-2)+2=2)}_{\text{On additionne les masses}}$; $(C;8)$ et $(G;2)$.

Par conséquent, il vérifie la relation vectorielle :

$$2.\overrightarrow{OX}+8.\overrightarrow{CX}+2.\overrightarrow{GX}=\vec{o}$$

Les points O ; C et G étant alignés, il est clair que leur barycentre X se trouve sur la droite (CG). Mais où exactement ?

Pour le savoir, cherchons à exprimer $\overrightarrow{OX}$ en fonction de $\overrightarrow{OC}$.

$$2.\overrightarrow{OX}+8.\overrightarrow{CX}+2.\overrightarrow{GX}=\vec{o} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{OX}+\underbrace{8.\overrightarrow{CO}+8.\overrightarrow{OX}}_{8.\overrightarrow{CX}}+\underbrace{2.\overrightarrow{GO}+2.\overrightarrow{OX}}_{2.\overrightarrow{GX}}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 12.\overrightarrow{OX}+8.\overrightarrow{CO}\underbrace{-2.\overrightarrow{CO}}_{2.\overrightarrow{GO}}=\vec{o} \Leftrightarrow 12.\overrightarrow{OX}+6.\overrightarrow{CO}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 12.\overrightarrow{OX}=6.\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OX}=\frac{6}{12}.\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{OC}$$

<u>Conclusion :</u> le barycentre X est le milieu du segment [OC].

Scalaire bien n'est souvent qu'une apparence...

Le contexte

Un exercice où se mêlent barycentres, produit scalaire, théorème de la médiane et d'Al-Kashi. Les grands classiques.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle tel que :

$AB = 8\text{cm}$ $\qquad$ $AC = 6\text{cm}$ $\qquad$ $BC = 5\text{cm}$

Les droites portant les trois côtés du triangle ont été graduées tous les centimètres.
On appelle L le point du segment [AC] situé à quatre centimètres du point A.
G est le barycentre des trois points pondérés $(A;1)$, $(B;3)$ et $(C;2)$.

a) Démontrer que le point G est le milieu du segment [BL].

b) Dans ces questions, nous allons déterminer la valeur exacte du carré de la longueur GB

1. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
2. Montrer que la longueur BL mesure exactement $\sqrt{30}$ centimètres.
3. Donner la valeur exacte de GB^2.

c) Dans ces questions, nous allons déterminer les valeurs exactes de AG^2 et CG^2.

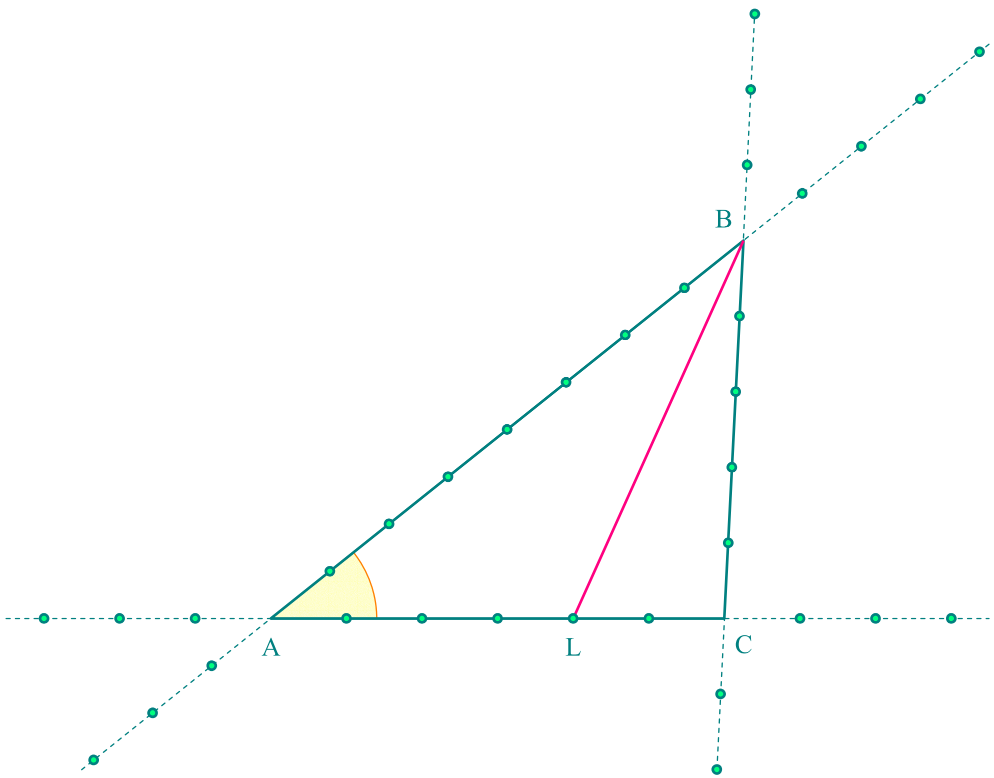
1. <u>Question de cours :</u> si on applique une des égalités du théorème de la médiane au point A et au segment [BL] dont le milieu est G, on obtient :
$$AB^2 + AL^2 = 2\times AG^2 + 15$$
Redémontrer cette égalité en utilisant le produit scalaire.
2. En déduire la valeur exacte de GA^2.
3. Calculer la valeur exacte de GC^2.
<u>Note :</u> on pourra employer toute égalité découlant d'un théorème sans avoir à la redémontrer.

d) On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité :
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB} = -24$$

1. Déterminer (la nature et les attributs de) cet ensemble $\mathcal{E}$.
2. Calculer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{AB}$.
3. Le point L appartient-il à l'ensemble $\mathcal{E}$? On justifiera sa réponse.

e) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan vérifiant l'égalité :
$$\overrightarrow{BM}\cdot\left(\overrightarrow{AM} + 2\times\overrightarrow{CM}\right) = 0$$

f) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan vérifiant l'égalité :
$$MA^2 + 3\times MB^2 + 2\times MC^2 = 111$$
<u>Indication :</u> pour simplifier la relation définissant Γ, on pourra utiliser le barycentre G.



Le corrigé

a) Même s'il n'en est pas question dans son intitulé, c'est du barycentre que va venir la solution.
D'après la figure et l'énoncé, le point L vérifie l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AL}=2.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AL}=2.\overrightarrow{AL}+2.\overrightarrow{LC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AL}+2.\overrightarrow{CL}=\vec{o}$$

Donc le point L est le barycentre de deux points pondérés $(A;1)$ et $(C;2)$.
D'après la règle d'associativité :

Comme G est le barycentre des points $\underbrace{(A;1)\quad(C;2)}$ et $(B;3)$

↓

alors G est aussi le barycentre des points $(L;1+2=3)$ et $(B;3)$

Conclusion : le point G est l'isobarycentre des points L et B. Autrement dit, G est le milieu du segment [LB].

b.1) Le théorème d'Al-Kashi appliqué dans le triangle ABC nous permet d'écrire :

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right) \Leftrightarrow 25=64+36-2\times8\times6\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

$$\Leftrightarrow 25-100=-96\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{-75}{-96}=\frac{\cancel{-3}\times25}{\cancel{-3}\times32}=\frac{25}{32}$$

b.2) En appliquant le théorème d'Al-Kashi au triangle ABL, nous en déduisons :

$$BL^2=AB^2+AL^2-2\times AL\times AL\times\cos\underbrace{\left(\widehat{BAL}\right)}_{\text{Ou }\widehat{BAC}}=64+16-2\times8\times4\times\frac{25}{32}=80-50=30$$

Conclusion : la longueur BL mesure $\sqrt{30}$ centimètres.

b.3) Comme le point G est le milieu du segment [BL], nous en déduisons :

$$BG^2=\left(\frac{BL}{2}\right)^2=\frac{BL^2}{4}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}=7,5$$

c.1) Avant de nous lancer, deux choses importantes doivent être dites :

- D'abord, comme G est le milieu de [BL], alors $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GL}=\vec{o}$.
- Ensuite, les carrés des longueurs AB^2 et AL^2 sont aussi les carrés scalaires $\overrightarrow{AB}^2$ et $\overrightarrow{AL}^2$.

Nous pouvons alors écrire :

$$AB^2+AL^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AL}^2=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GL}\right)^2$$

$$=\underbrace{\overrightarrow{AG}^2+2\times\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}^2}_{\text{Première identité remarquée}}+\underbrace{\overrightarrow{AG}^2+2\times\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{GL}^2}_{\text{Seconde identité remarquée}}$$

$$=2\times AG^2+GB^2+GL^2+2\times\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}+2\times\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GL}$$

$$=2\times AG^2+7,5+7,5+2\times\overrightarrow{AG}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GL}\right)}_{\vec{o}\text{ car G est le milieu de [BL]}}$$

Tout produit scalaire avec le vecteur nul est...nul.

$$=2\times AG^2+15+2\times0=2\times AG^2+15$$

c.2) Connaissant déjà les longueurs AB et AL, la relation précédente va nous donner GA^2

$$AB^2+AL^2=2\times AG^2+15 \Leftrightarrow 64+16=2\times AG^2+15 \Leftrightarrow 2\times AG^2=80-15=65$$

$$\Leftrightarrow GA^2=\frac{65}{2}=32,5 \qquad \underbrace{\text{soit } GA=\sqrt{32,5}}_{\text{Mais ce n'était pas demandé}}$$

c.3) Reprenons ce qui a été fait avec le point A ! Le théorème de médiane appliqué au point C et au segment [BL] de centre G nous permet d'écrire l'égalité :

$$CB^2+CL^2=2\times CG^2+\frac{BL^2}{2} \Leftrightarrow 25+4=2\times CG^2+\frac{30}{2} \Leftrightarrow 2\times CG^2=29-15=14$$

$$\Leftrightarrow GC^2=\frac{14}{2}=7 \qquad \underbrace{\text{soit } GC=\sqrt{7}}_{\text{Même si ce n'était pas demandé...}}$$

d.1) Avant tout développement, nous devons trouver un point de la droite (AB) qui vérifie l'égalité caractérisant l'ensemble $\mathcal{E}$. Ce point nous servira à simplifier la dite relation.
Le point H du segment [AB] situé à 3 centimètres de A semble être dans ce cas. En effet :

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{AB}=\underbrace{-HA\times AB}_{\text{Deux vecteurs colinéaires mais de sens opposés.}}=-3\times8=-24$$

Il vient alors :

$$M\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=-24 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=-24$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{AB}=-24 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}+\cancel{(-24)}=\cancel{-24}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux

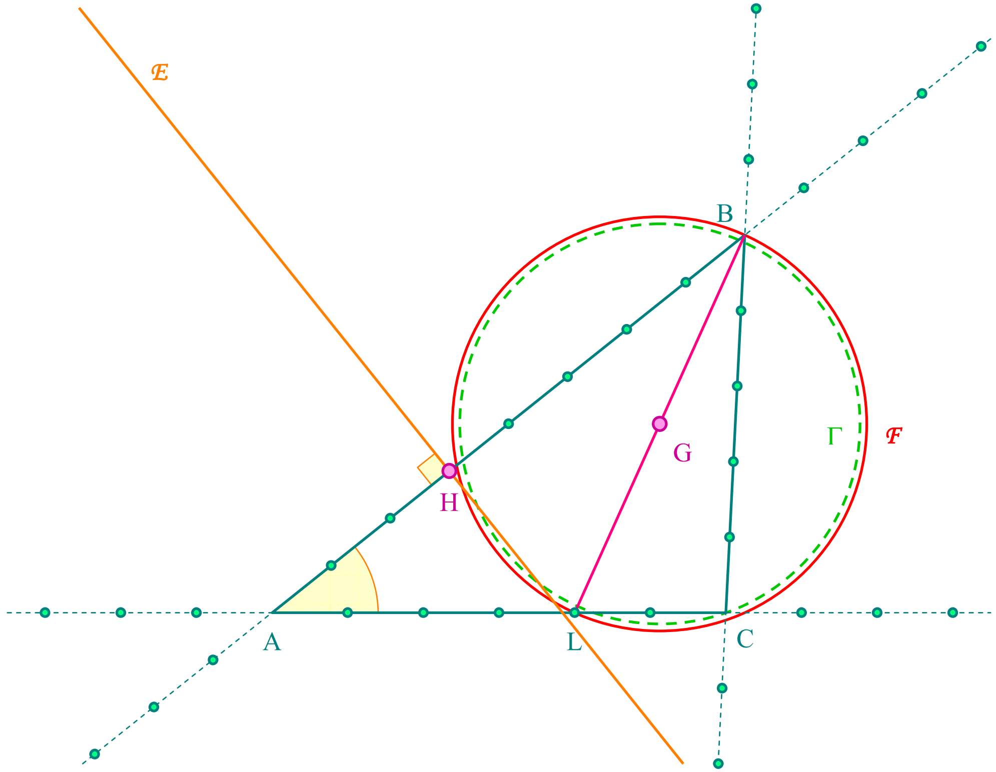
$\Leftrightarrow$ M appartient à la perpendiculaire à (AB) passant par H.

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par H.

d.2) Nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{AB} = AL\times AB\times\cos\left(\underbrace{\widehat{BAL}}_{\text{Ou }\widehat{BAC}}\right) = 4\times 8\times\frac{25}{32} = \cancel{32}\times\frac{25}{\cancel{32}} = 25$$

Conclusion : comme $\overrightarrow{LA}\cdot\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{AB} = -25$, alors le point L ne vérifie pas l'égalité caractérisant l'ensemble $\mathcal{E}$. Donc L ne fait pas partie de ce dernier.



e) Lors de la question a, nous avons établi que le point L était le barycentre des deux points pondérés $(A;1)$ et $(C;2)$ puisqu'il vérifiait l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AL}+2\times\overrightarrow{CL}=\vec{o}$$

En application du théorème de réduction vectorielle, il vient alors que pour tout point M du plan, nous avons :

$$\overrightarrow{AM}+2.\overrightarrow{CM} = \overbrace{\underbrace{\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LM}}_{\overrightarrow{AM}}+\underbrace{2.\overrightarrow{CL}+2.\overrightarrow{LM}}_{2.\overrightarrow{CM}} = \underbrace{\overrightarrow{AL}+2.\overrightarrow{CL}}_{=\vec{o}}+(1+2).\overrightarrow{LM}}^{\text{On peut rédémontrer le résultat du théorème si on veut...}} = 3.\overrightarrow{LM}$$

Avec cette égalité vectorielle, la relation définissant l'ensemble $\mathcal{F}$ devient très simple.

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{F} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\left(\overrightarrow{AM}+2\times\overrightarrow{CM}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\left(3\times\overrightarrow{LM}\right)=0\\
&\Leftrightarrow 3\times\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{LM}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{LM}=0 \quad \text{Après division par 3.}\\
&\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{LM} \text{ sont orthogonaux}\\
&\Leftrightarrow \text{Le triangle BLM est rectangle en M.}\\
&\Leftrightarrow \text{M appartient au cercle de diamètre [BL].}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{F}$ est le cercle de diamètre [BL]...donc de centre G.

f) Comme G est le barycentre des trois pondérés $(A;1)$, $(B;3)$ et $(C;2)$, alors il vérifie l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{GA}+3\times\overrightarrow{GB}+2\times\overrightarrow{GC}=\vec{o}$$

Modifions l'égalité définissant l'ensemble Γ en introduisant le barycentre G. Ce que nous allons faire ressemblera à ce qui a été déjà fait lorsqu'il s'était agi de redémontrer dans un cas particulier une égalité du théorème de la médiane lors de la question 1

$$\begin{aligned}
MA^2+3.MB^2+2\times MC^2 &= 111\\
\overrightarrow{MA}^2+3\times\overrightarrow{MB}^2+2\times\overrightarrow{MC}^2 &= 111\\
\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+3\times\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+2\times\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2 &= 111\\
MG^2+2.\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}+GA^2+3\times\left(MG^2+2.\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}+GB^2\right)&\\
+2\times\left(MG^2+2.\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}+GC^2\right) &= 111\\
(1+2+3).MG^2+GA^2+3\times GB^2+2\times GC^2+\left(2\times\overrightarrow{MG}\right)\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{GA}+3\times\overrightarrow{GB}+2\times\overrightarrow{GC}\right)}_{=\vec{o}} &= 111\\
6.MG^2+32,5+3\times 7,5+2\times 7+\left(2\times\overrightarrow{MG}\right)\cdot\vec{o} &= 111\\
6.MG^2+32,5+22,5+14+0 &= 111\\
6.MG^2+69 &= 111
\end{aligned}$$

Résumons ce que nous venons de trouver !

$$\begin{aligned}
M\in\Gamma &\Leftrightarrow MA^2+3\times MB^2+2\times MC^2=111 \Leftrightarrow 6\times GM^2+69=111\\
&\Leftrightarrow 6\times GM^2=42 \Leftrightarrow GM^2=7 \Leftrightarrow GM=\sqrt{7}\\
&\Leftrightarrow \text{M appartient au cercle de centre de G et de rayon } \sqrt{7}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble Γ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{7}$ donc passant par C.

Barycentres et tétraèdre

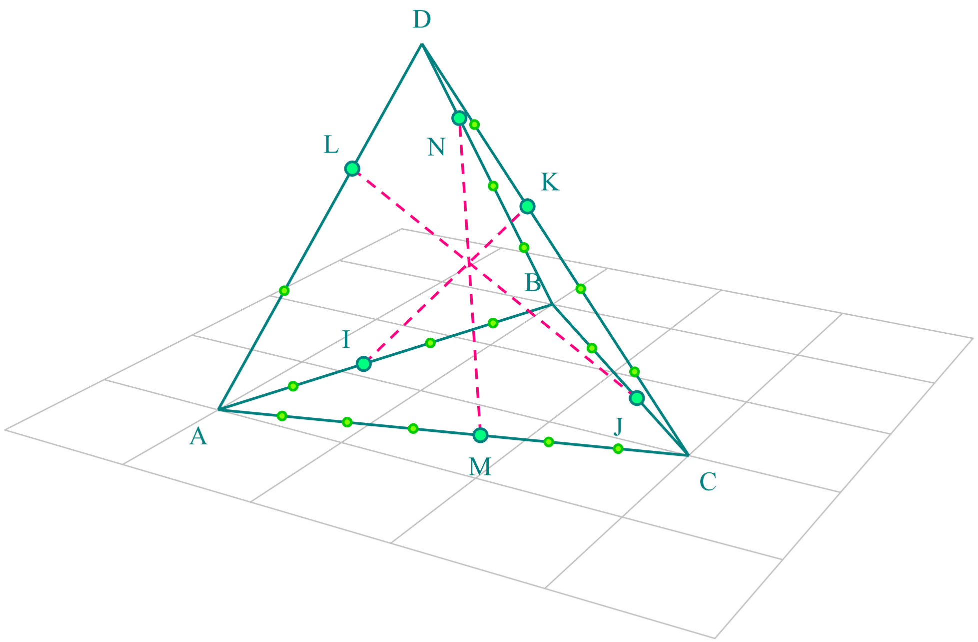
Le contexte

Un exercice où il s'agit de prouver que trois droites d'un tétraède sont concourantes en recourant aux barycentres et à leur théorème d'associativité.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous est représenté en perspective centrale (vision réelle) le tétraèdre ABCD dont les côtés ont été partagés de manière régulière.
Les points I ; J ; K ; L ; M et N appartiennent respectivement aux côtés [AB] ; [BC] ; [CD] ; [AD] ; [AC] et [BD].

La question :
Les droites (IK), (JL) et (MN) sont-elles concourantes ainsi que semble l'indiquer la figure ?
On justifiera sa réponse.



Le corrigé

D'après la figure, les trois droites (IK), (JL) et (MN) semblent concourantes mais cela n'est peut-être qu'une illusion d'optique. Mais dans l'espace, sembler n'est pas être.
Cela dit, si ces trois droites sont concourantes, alors leur point d'intersection est un barycentre pour les quatre sommets du tétraèdre. Reste à savoir pour quels coefficients ?

Première partie : les points I ; J ; K ; L ; M et N sont des barycentres pour des couples de sommets du tétraèdre.

En effet, quand un point appartient à une droite, alors il est un barycentre pour tout couple de points définissant la droite. Ainsi :

- Le point I qui appartient au segment [AB] est un barycentre des points A et B. Mais pour quels coefficients ?
  D'après la figure, le point I vérifie la relation vectorielle :
  $$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{AI} = 2.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{AI} = 2.\overrightarrow{AI} + 2.\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AI} + 2.\overrightarrow{BI} = \vec{o}$$
  <u>Conclusion :</u> le point I est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;2)$
- Le point J fait partie du côté [BC]. Il vérifie la relation vectorielle :
  $$\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{BJ} = 2.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{BJ} = 2.\overrightarrow{BJ} + 2.\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} + 2.\overrightarrow{CJ} = \vec{o}.$$
  <u>Conclusion :</u> le point J est le barycentre des points pondérés $(B;1)$ et $(C;2)$.
- Le point K qui appartient à l'arête [CD] vérifie la relation vectorielle :
  $$\overrightarrow{CK} = \frac{3}{5}.\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{CK} = 3.\overrightarrow{CD} = 3.\overrightarrow{CK} + 3.\overrightarrow{KD} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{CK} + 3.\overrightarrow{DK} = \vec{o}$$
  <u>Conclusion :</u> le point K est le barycentre des points pondérés $(C;2)$ et $(D;3)$.
- Le point L de l'arête [AD] vérifie la relation vectorielle :
  $$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AL} = 2.\overrightarrow{AD} = 2.\overrightarrow{AL} + 2.\overrightarrow{LD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AL} + 2.\overrightarrow{DL} = \vec{o}$$
  <u>Conclusion :</u> le point L est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(D;2)$.
- Le point M de l'arête [AC] vérifie la relation vectorielle :
  $$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{7}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AM} = 4.\overrightarrow{AC} = 4.\overrightarrow{AM} + 4.\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AM} + 4.\overrightarrow{CM} = \vec{o}$$
  <u>Conclusion :</u> le point M est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(C;4)$.
- Le point N de l'arête [BD] vérifie la relation vectorielle :
  $$\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}.\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow 4.\overrightarrow{BN} = 3.\overrightarrow{BD} = 3.\overrightarrow{BN} + 3.\overrightarrow{ND} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} + 3.\overrightarrow{DN} = \vec{o}$$
  <u>Conclusion :</u> le point N est le barycentre des points pondérés $(B;1)$ et $(D;3)$.

Seconde partie : Quel barycentre des sommets A ; B ; C et D pourrait être le point de concours des trois droites ?

Récapitulons dans un tableau les coefficients que nous avons trouvés dans la première partie :

Coefficients de pondération	I	J	K	L	M	N
A	*3*			*1 (ou 3)*	*3*	
B	*2*	*1 (ou 2)*				*1 (ou 2)*
C		*2 (ou 4)*	*2 (ou 4)*		*4*	
D			*3 (ou 6)*	*2 (ou 6)*		*3 (ou 6)*

Utilisant la propriété d'homogénéité du barycentre, on se lance alors dans une entreprise d'harmonisation pour que sur une même ligne, tous les coefficients de pondération relatifs à un même sommet soient égaux.
A l'issue de ce travail, nous décidons d'introduire le point G qui est le barycentre des quatre points pondérés $(A;3)$; $(B;2)$; $(C;4)$ et $(D;6)$.

Dernière partie : le barycentre G appartient-il aux trois droites ?

D'après la règle d'associativité :

- Comme G est le barycentre des points $\underbrace{(A;3)\quad(B;2)}_{\downarrow}$ et $\underbrace{(C;4)\quad(D;6)}_{\downarrow}$
  alors G est aussi le barycentre des points $(I;3+2=5)$ et $(K;4+6=10)$
  Donc le point G appartient à la droite (IK).
- Comme G est le barycentre des points $\underbrace{(B;2)\quad(C;4)}_{\downarrow}$ et $\underbrace{(A;3)\quad(D;6)}_{\downarrow}$
  alors G est aussi le barycentre des points $(J;2+4=6)$ et $(L;3+6=9)$
  Donc le point G appartient à la droite (JL).
- Comme G est le barycentre des points $\underbrace{(A;3)\quad(C;4)}_{\downarrow}$ et $\underbrace{(B;2)\quad(D;6)}_{\downarrow}$
  alors G est aussi le barycentre des points $(M;3+4=7)$ et $(N;2+6=8)$
  Donc le point G appartient à la droite (MN).

Epilogue : la conclusion

Le barycentre G appartenant aux trois droites (IK), (JL) et (MN), celles-ci sont donc concourantes. L'impression était bien fondée.

Géométrie dans l'espace

Au commencement était l'espace...

Le contexte

Cet exercice n'a pas été donné en première S mais en option math de première ES.
Il aborde les premières compétences à acquérir sur la géométrie analytique dans l'espace : savoir prouver que trois points sont alignés, quatre points coplanaires et ainsi que manipuler des coordonées de vecteurs ou de points.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Dans celui-ci, les points A, B, C et D ont pour coordonnées :

$A(0;3;0)$ $\quad$ $B(2;0;5)$ $\quad$ $C(4;3;1)$ $\quad$ $D(1;-1,5;7)$

a) Placer les points A, B, C et D sur la figure ci-contre.

b) A partir de la figure, déterminer l'abscisse du point $E(\ldots;-1;4)$

c) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Comme les points A, B et C ne sont pas alignés, alors ils définissent un plan que nous appelons $\mathcal{P}$.

d) Démontrer que le point D appartient au plan $\mathcal{P}$ c'est-à-dire que les points A, B, C et D sont coplanaires.

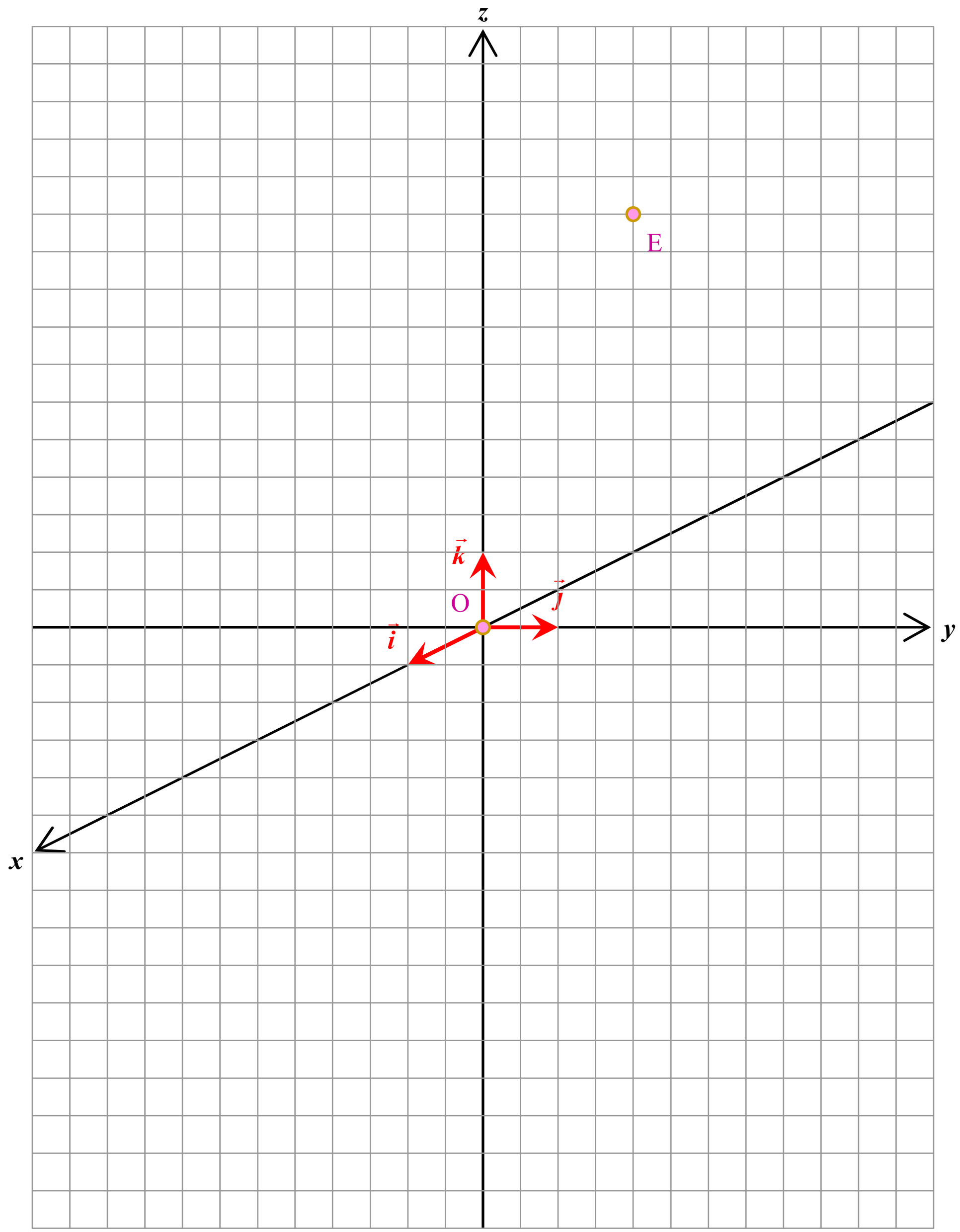
Le point F est défini par la relation vectorielle :

$$2.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC}$$

e) Déterminer les coordonnées du point F.

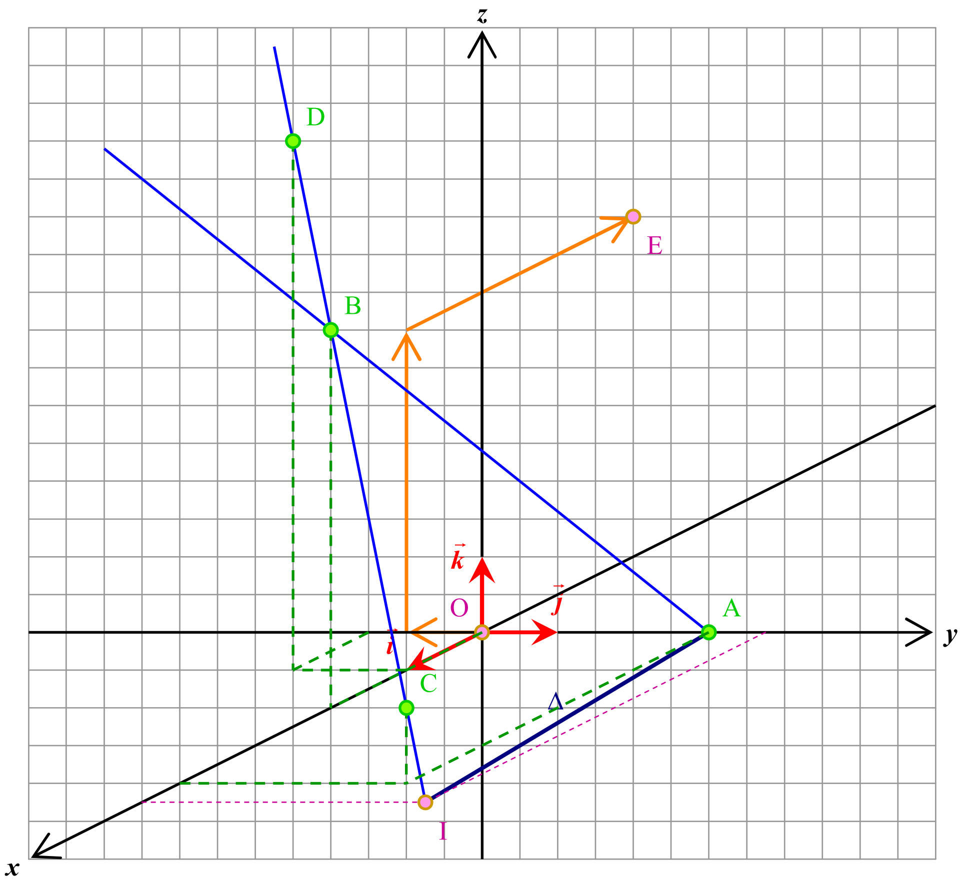
On appelle I le point d'intersection de la droite (BC) avec le plan xOy.

f) Déterminer par le calcul les coordonnées du point I.
En déduire l'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec le plan xOy.



Le corrigé

a) A l'issue du problème, la situation est graphiquement la suivante :



b) Comme le point E vérifie la relation vectorielle $\overrightarrow{OE} = -\vec{j} + 4.\vec{k} - 3.\vec{i}$, alors ses coordonnées dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ sont $\boxed{E(-3;-1;4)}$

c) Comparons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

	$\overrightarrow{AB}$		$\overrightarrow{AC}$
Abscisses	$2-0=2$	$\xrightarrow{\times 2}$	$4-0=4$
Ordonnées	$0-3=-3$	$\xrightarrow{\times 0}$	$3-3=0$
Cotes	$5-0=5$	$\xleftarrow{\times 5}$	$1-0=1$

Comme leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les points A, B et C ne sont alignés et c'est pour cela qu'ils définissent un plan $\mathcal{P}$.

d) Pour que les points A, B, C et D soient coplanaires, il faut et il suffit qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha \times \overrightarrow{AB} + \beta \times \overrightarrow{AC}$.

Cherchons si un tel couple $(\alpha;\beta)$ existe !

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \times \overrightarrow{AB} + \beta \times \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -4,5 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} 1 = 2.\alpha + 4.\beta & \textbf{(1)} \\ -4,5 = -3.\alpha & \textbf{(2)} \\ 7 = 5.\alpha + \beta & \textbf{(3)} \end{cases}$$

A partir de l'équation ***(2)***, on peut trouver une valeur pour le coefficient α :

$$-4,5 = -3 \times \alpha \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{-4,5}{-3} = 1,5$$

Le système de trois équations à deux inconnues *(S)* admettra des solutions si et seulement si lorsque nous allons remplacer α par sa valeur 1,5 dans les équations ***(1)*** et ***(3)***, ces dernières nous donnent les mêmes valeurs pour β.

Avec l'équation (1)...	*Avec l'équation (3)...*
$1 = 2 \times 1,5 + 4.\beta \Leftrightarrow 1 = 3 + 4.\beta$ $\Leftrightarrow \beta = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = \boxed{-0,5}$	$7 = 5 \times 1,5 + \beta \Leftrightarrow 7 = 7,5 + \beta$ $\Leftrightarrow \beta = 7 - 7,5 = \boxed{-0,5}$

Donc le couple $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ est solution du système 3×2 *(S)*.

<u>Conclusion :</u> comme $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \times \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AC}$,

alors les points A, B, C et D sont coplanaires. Le point D appartient aussi au plan $\mathcal{P}$.

L'insoutenable vérité sur le point D

En fait, le point D appartient à la droite (BC). Car il y a de la colinéarité entre ces points.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{CB}}$$

e) On appelle $(x_F;y_F;z_F)$ les coordonnées du point F. Il vérifie la relation vectorielle :

$$2.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\times\begin{pmatrix}x_F\\y_F-3\\z_F\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_F-2\\y_F\\z_F-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2.x_F+(x_F-2)=4\\2\times(y_F-3)+y_F=0\\2.z_F+(z_F-5)=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3.x_F-2=4}_{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \underbrace{3.y_F-6=0}_{\text{Ordonnées égales}} \text{ et } \underbrace{3.z_F-5=1}_{\text{Cotes égales}}$$

$$3.x_F=4+2 \qquad 3.y_F=6 \qquad 3.z_F=1+5$$

$$x_F=\frac{6}{3}=2 \qquad y_F=\frac{6}{3}=2 \qquad z_F=\frac{6}{3}=2$$

Conclusion : les coordonnées du point F sont $(2;2;2)$.

Une autre méthode : le cas particulier du point F

En fait, le point F n'est pas n'importe quoi pour les points A,B et C. En effet, ,nous avons :

$$2.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}}_{\text{Chasles s'applique !}}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}=\vec{o} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BF}=\vec{o}}_{\text{Le milieu des trois points A, B et C c'est-à-dire leur centre de gravité.}}$$

Par conséquent, les trois coordonnées du point F peuvent être obtenues avec les formules :

$$x_F=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{6}{3}=2 \quad y_F=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{6}{3}=2 \quad z_F=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{6}{3}=2$$

f) On appelle $(x_I;y_I;z_I)$ les coordonnées du point I.

Comme le point I appartient au plan xOy, alors sa cote z_I est nulle.

Comme le point I appartient aussi à la droite (BC), alors les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires. Donc il existe un réel λ tel que :

$$\overrightarrow{BI}=\lambda\times\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_I-2\\y_I\\-5\end{pmatrix}=\lambda\times\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x_I-2=2.\lambda & \textit{(1)}\\y_I=3.\lambda & \textit{(2)}\\-5=-4.\lambda & \textit{(3)}\end{cases}$$

L'équation ***(3)*** nous donne la valeur du rapport de colinéarité λ.

$$-5=-4.\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{-5}{-4}=\frac{5}{4}=1,25$$

En remplaçant le paramètre λ par sa valeur 1,25 dans les équations ***(1)*** et ***(2)***, on en déduit alors les valeurs de l'abscisse x_I et de l'ordonnée y_I.

Avec l'équation (1)...	*Avec l'équation (2)...*
$x_I-2=2\times 1,25 \Leftrightarrow x_I=2+2,5=4,5$	$y_I=3\times 1,25=3,75$

Conclusion : les coordonnées du point I sont $\left(\frac{9}{2};\frac{15}{4};0\right)$.

➲ D'abord les deux plans xOy et $\mathcal{P}$ n'étant pas parallèles, ils sont sécants et leur intersection est une droite que nous nommerons Δ. Reste à la déterminer plus précisément.

- **La droite Δ passe par le point A.**
  Le point A appartient clairement au plan $\mathcal{P}$.
  De plus, comme A appartient à l'axe Oy, alors il fait aussi partie du plan xOy.
  Donc le point A appartient à leur intersection Δ.
- **La droite Δ passe par le point I.**
  Le point I appartient au plan xOy dont il est l'intersection avec la droite (BC).
  et justement, comme le point I appartient à la droite (BC) qui est incluse dans le plan $\mathcal{P}$, alors I appartient aussi au plan $\mathcal{P}$.
  Donc le point I appartient à leur intersection Δ.

Conclusion : l'intersection Δ des plans xOy et $\mathcal{P}$ est la droite (AI).

In the box

Le contexte

Comme le précédent, le présent exercice a été donné en option math de première ES.
Il aborde sans le dire le produit scalaire ainsi que la caracérisation par des équations de certains plans et droites.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

A, B, C et D sont quatre points du plan xOy aussi appelé plan $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

E, F, G et H sont les quatre sommets supérieurs du pavé droit ABCDEFGH représenté ci-contre et dont la base est le rectangle ABCD.

a) Déterminer les coordonnées des neuf points apparaissant sur la figure ci-contre.

b) Calculer les longueurs des trois côtés du triangle BGE.
Que peut-on en déduire quant à la nature du triangle BGE ?

c) On appelle L le point de coordonnées $\left(0;0;\frac{7}{2}\right)$.

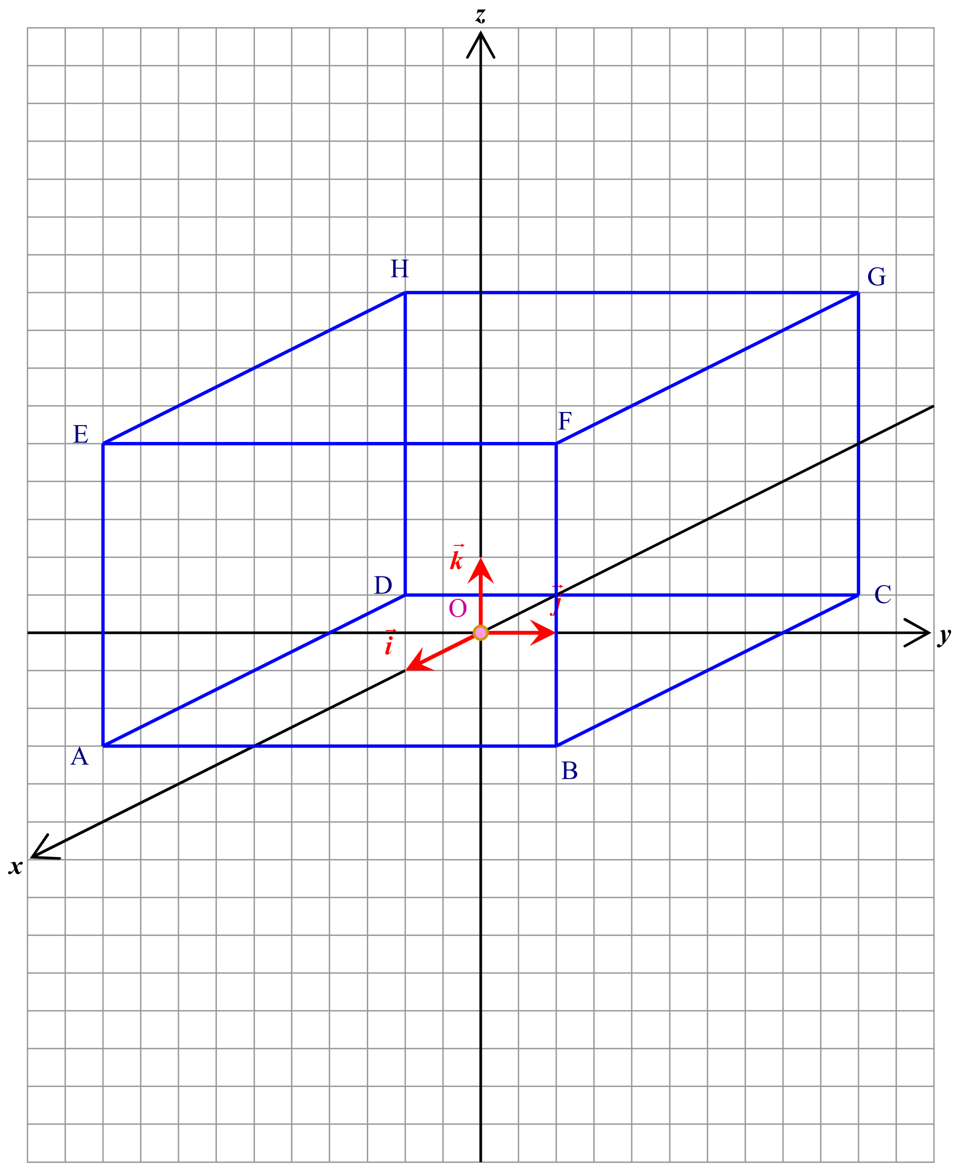
1. Placer le point L sur la figure.
2. Le point L appartient-il à la droite (FH) ? On justifiera sa réponse.
3. Le point L est-il le milieu du segment [FH] ? On justifiera sa réponse.
4. Les droites (AL) et (FH) sont-elles orthogonales ? On justifiera sa réponse.
5. La droite (AL) est-elle orthogonale au plan (FHC) ? On justifiera sa réponse.

d) Indiquer ou tracer sur la figure ci-contre ce que sont les ensembles suivants :

1. L'ensemble $\mathcal{P}$ des points M de coordonnées $(x;y;z)$ vérifiant $\begin{cases} x=-1 \\ z=4 \end{cases}$
2. L'ensemble $\mathcal{Q}$ des points M de coordonnées $(x;y;z)$ vérifiant $y=-2$
3. L'ensemble $\mathcal{R}$ des points M de coordonnées $(x;y;z)$ vérifiant $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$
4. L'ensemble $\mathcal{S}$ des points M de coordonnées $(x;y;z)$ vérifiant $\begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$

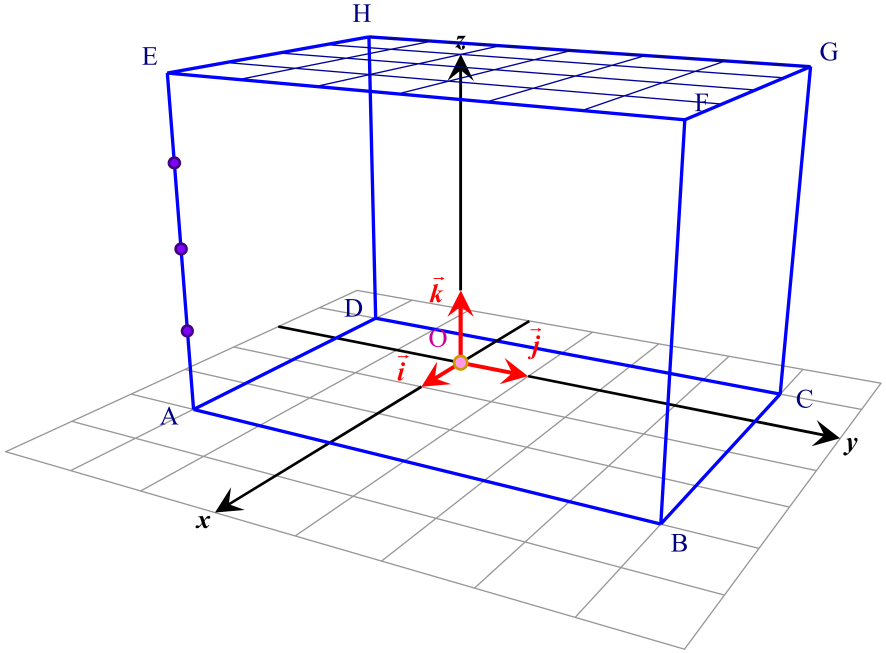
e) A quelles conditions sur ses coordonnées un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient-il au plan (ABE) ?

f) A quelles conditions sur ses coordonnées un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient-il à la droite (BC) ?



Le corrigé

a) Comme les points A, B, C et D appartiennent au plan xOy, alors leur cote est nulle.
De même, ABCDEFGH étant un pavé, les quatre points E, F, G et H de sa face supérieure ont la même cote : 4.



Passons en revue les neuf points incriminés :

- ☑ L'origine O du repère a pour coordonnées $\boxed{(0;0;0)}$.
- ☑ Comme $\overrightarrow{OA} = 3.\vec{i} - 2.\vec{j} + 0.\vec{k}$, alors les coordonnées de A sont $\boxed{(3;-2;0)}$
- ☑ Comme $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + 4.\vec{k}$, alors les coordonnées du point E sont $\boxed{(3;-2;4)}$
- ☑ Comme $\overrightarrow{OB} = 3.\vec{i} + 4.\vec{j} + 0.\vec{k}$, alors les coordonnées de B sont $\boxed{(3;4;0)}$
- ☑ Comme $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + 4.\vec{k}$, alors les coordonnées du point F sont $\boxed{(3;4;4)}$
- ☑ Comme $\overrightarrow{OC} = -\vec{i} + 4.\vec{j} + 0.\vec{k}$, alors les coordonnées de B sont $\boxed{(-1;4;0)}$
- ☑ Comme $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 4.\vec{k}$, alors les coordonnées du point G sont $\boxed{(-1;4;4)}$
- ☑ Comme $\overrightarrow{OD} = -\vec{i} - 2.\vec{j} + 0.\vec{k}$, alors les coordonnées de B sont $\boxed{(-1;-2;0)}$
- ☑ Comme $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + 4.\vec{k}$, alors les coordonnées du point H sont $\boxed{(-1;-2;4)}$

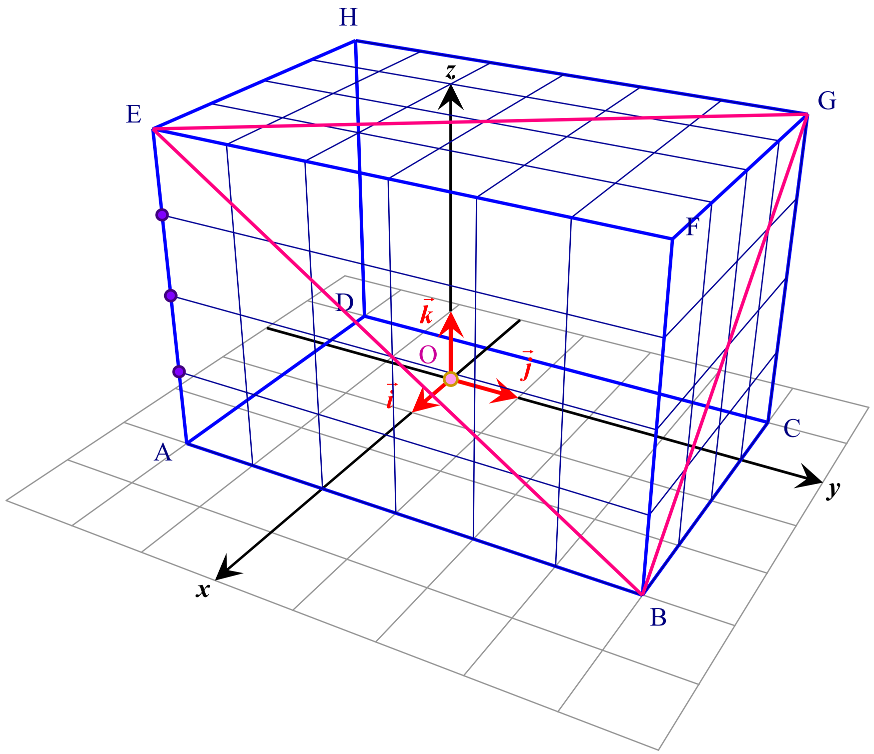
b) Calculons les longueurs des trois côtés du triangle BGE. Connaissant les coordonnées des trois sommets, cela va se faire très simplement :

$$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-1-3=-4\\4-4=0\\4-0=4\end{pmatrix} \Rightarrow BG = \sqrt{(-4)^2+0^2+4^2} = \sqrt{16+0+16} = \sqrt{32} = \boxed{4.\sqrt{2}}$$

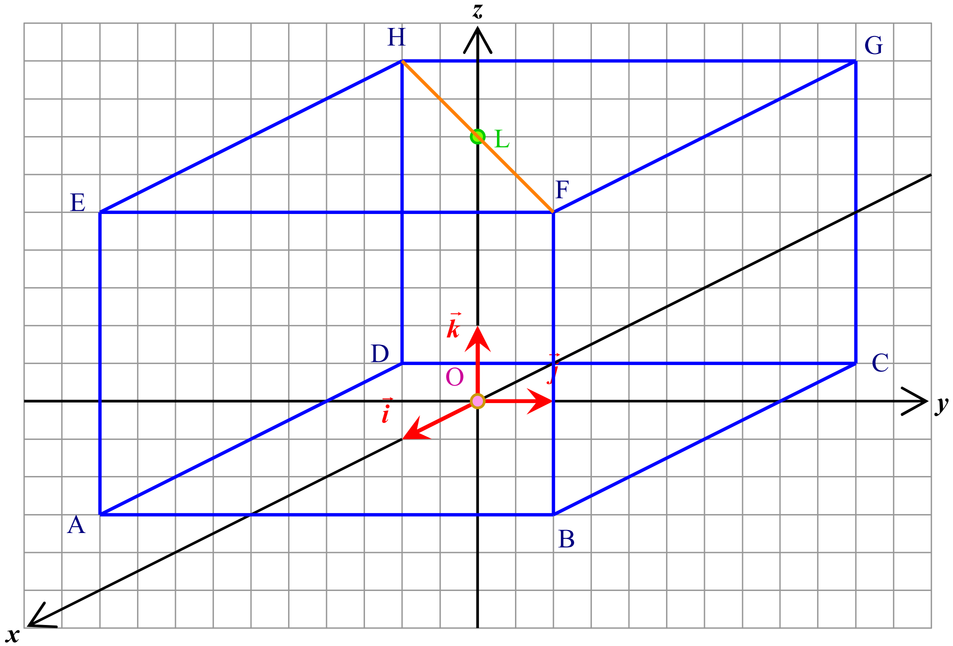
$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}3-3=0\\-2-4=-6\\4-0=4\end{pmatrix} \Rightarrow BE = \sqrt{0^2+(-6)^2+4^2} = \sqrt{0+36+16} = \sqrt{52} = \boxed{2.\sqrt{13}}$$

$$\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}3-(-1)=4\\-2-4=-6\\4-4=0\end{pmatrix} \Rightarrow GE = \sqrt{4^2+(-6)^2+0^2} = \sqrt{16+36+0} = \sqrt{52} = \boxed{2.\sqrt{13}}$$

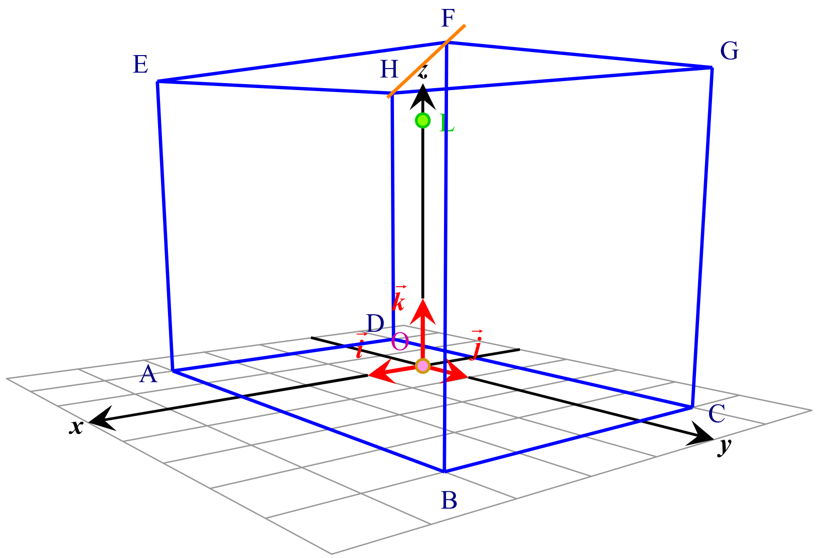
<u>Conclusion :</u> il apparaît clairement que le triangle BGE ne peut être qu'isocèle en E.



c.1) Sur la figure ci-dessous, le point L semble être le milieu du segment [FH], mais ce n'est qu'une illusion de perspective...cavalière.



Car en perspective centrale, les choses apparaissent différemment :



c.2) Il y a deux façons de prouver que le point L n'appartient pas à la droite (FH) :

Première méthode : en recherchant une éventuelle colinéarité

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FL}$ sont-elles proportionnelles ?

	$\overrightarrow{FH}$		$\overrightarrow{FL}$
Abscisse	-4	$\xleftarrow{\times 4/3}$	-3
Ordonnée	-6	$\xleftarrow{\times 1,5}$	-4
Cote	0	$\xleftarrow{\times 0}$	$-0,5$

Conclusion : comme leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, alors les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FL}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points F, H et L ne sont pas alignés.

Seconde méthode : on peut s'intéresser aux cotes des points

Tous les points de la droite (FH) ont la même cote que ces deux points qui est 4.
Comme la cote du point L est égale à 3,5, alors celui-ci ne peut pas appartenir à la droite (FH).

c.3) Le point L n'appartenant pas à la droite (FH), il ne peut être le milieu du segment [FH].

c.4) Pour savoir si les droites (AL) et (FH) sont orthogonales, calculons le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{FH}$:

$$\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{FH}=\begin{pmatrix}-3\\2\\3,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-6\\0\end{pmatrix}=(-3)\times(-4)+2\times(-6)+3,5\times 0=12-12+0=\underline{0}$$

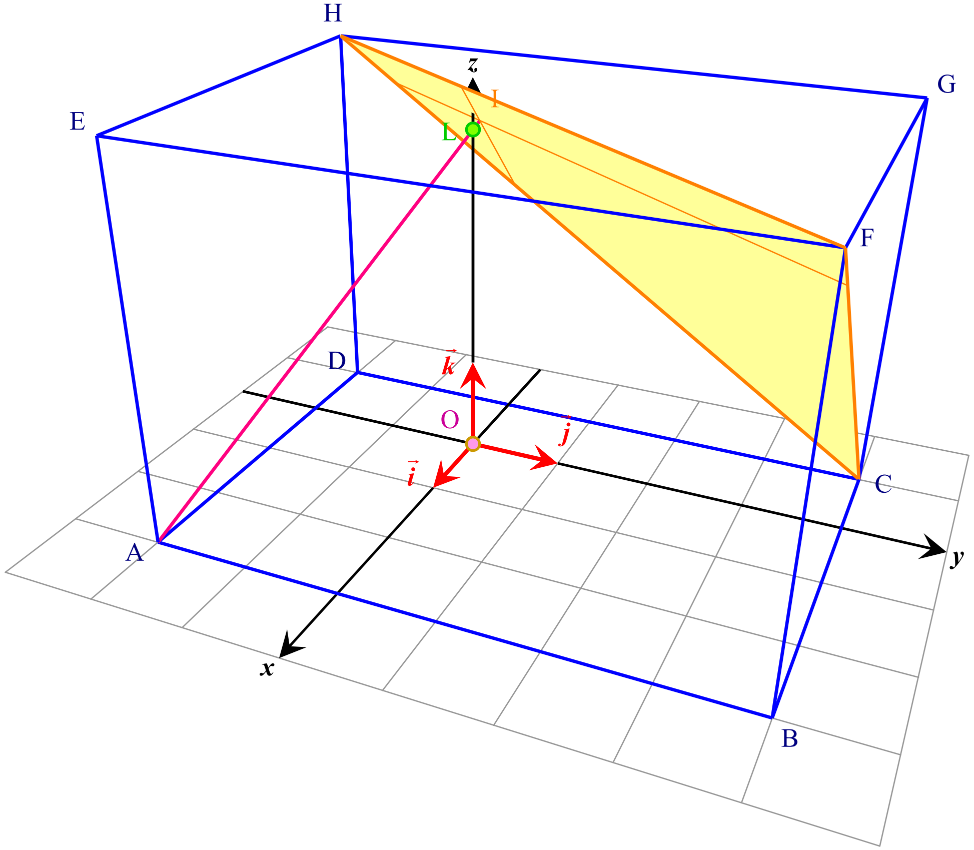
Conclusion : comme leur produit scalaire est nul, alors les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont orthogonaux. Donc les droites (AL) et (FH) sont orthogonales.

c.5) Nous savons déjà que la droite (AL) est orthogonale à la droite (FH) qui est incluse dans le plan (FHC).
Si elle est, de plus, orthogonale à une seconde droite de ce plan qui est non parallèle à (FH), alors la droite (FH) sera orthogonale au plan (FHC). Dans le cas contraire, elle ne sera pas orthogonale au plan (FHC).
La question que nous nous posons : les droites (AL) et (CF) sont-elles orthogonales ?

$$\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}-3\\2\\3,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}=(-3)\times 4+2\times 0+3,5\times 4=-12+0+14=\underline{2\neq 0}$$

Leur produit scalaire étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{CF}$ ne sont pas orthogonaux.
Donc la droite (AL) n'est pas orthogonale à la seconde droite (CF) du plan (FHC).
Conclusion : la droite (AL) n'est pas orthogonale au plan (FHC).

Sur la figure ci-dessous, contrairement à ce que l'on pourrait croire, le point L n'appartient pas au plan (FCH). Mais le point d'intersection I de la droite (AL) et du plan (FCH) est très «proche» de L. Il faut bien regarder...
Et si la droite (AL) est perpendiculaire à la parallèle à (FH) passant par I, elle n'est pas perpendiculaire à la parallèle à (CF) passant par I. C'est pour cela que la droite (AL) n'est pas perpendiculaire au plan (FCH).



d.1) Les point G et H ont tous deux pour abscisse -1 et pour cote 4. Donc, l'ensemble $\mathcal{P}$ des points M de coordonnées $(x;y;z)$ vérifiant le système $\begin{cases} x=-1 \\ z=4 \end{cases}$ est la droite (GH).

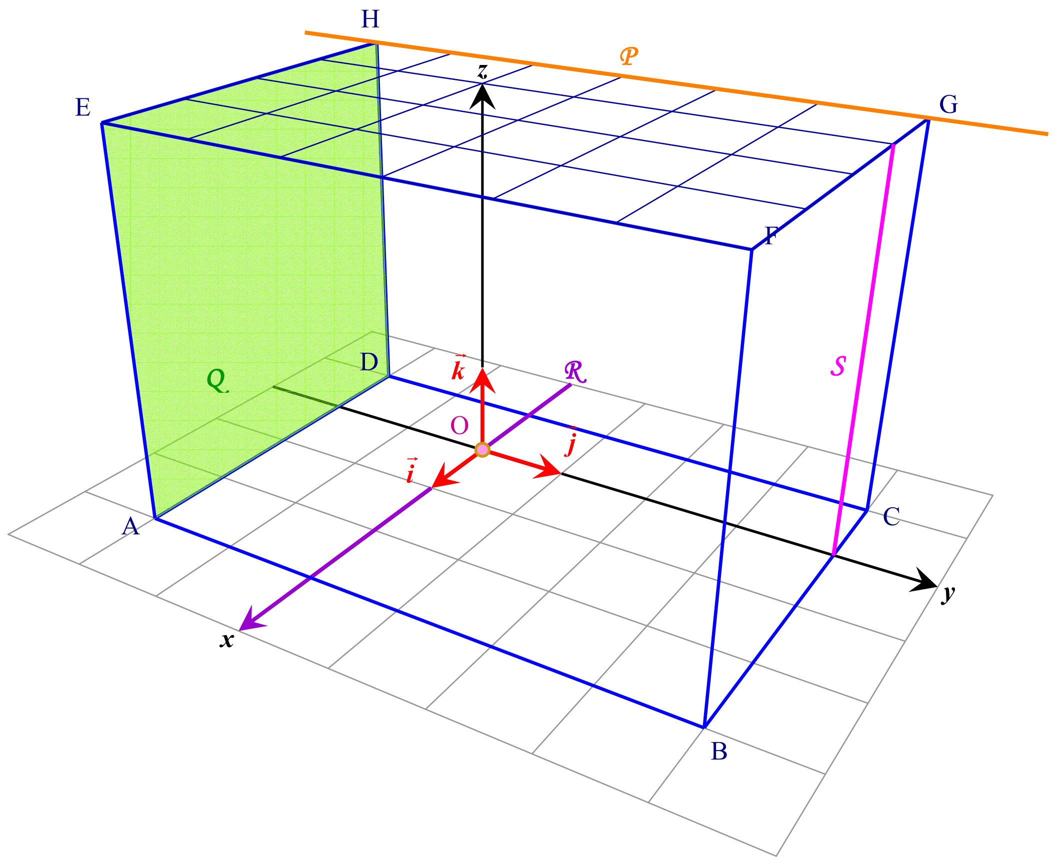
d.2) Les points A, D, E et H ont tous quatre pour ordonnée -2. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{Q}$ des points M de coordonnées $(x;y;z)$ vérifiant l'équation $y=-2$ est le plan (ADHE).

d.3) Les points de l'espace ayant une ordonnée et une cote nulles sont ceux de l'axe des abscisses. Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{R}$ des points M de coordonnées $(x;y;z)$ vérifiant le système $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ sont ceux de l'axe $\mathrm{O}x=(\mathrm{O};\vec{i})$.

d.4) De par le système le caractérisant, l'ensemble $\mathcal{S}$ est l'intersection des plans :

- ☑ Le plan $y\mathrm{O}z$ qui a pour équation $x=0$.
- ☑ Le plan (BCGF) qui a pour équation $y=4$.

Bref, $\mathcal{S}$ est la droite de vecteur directeur $\vec{k}$ et qui passe par $\underbrace{\text{le point } \mathrm{J}(0;4;0)}_{\text{Qui est aussi intersection de la droite (CB) et du plan } y\mathrm{O}z}$.



e) Les trois points non alignés A, B et E partagent tous la même abscisse : 3.
Par conséquent, le plan (ABE) est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x;y;z)$ vérifient l'équation :

$$\boxed{x=3}$$

f) Les points B et C ont en commun la même ordonnée 4 et la même cote 0.
Donc la droite (BC) est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x;y;z)$ vérifient le système :

$$\boxed{\begin{cases} y=4 \\ z=0 \end{cases}}$$

Plans de coupe

Le contexte

Encore un exercice de première ES option math qui aborde le lien entre équations de plans et traces de ceux-ci sur les plans de coordonnées. A la limite du programme...

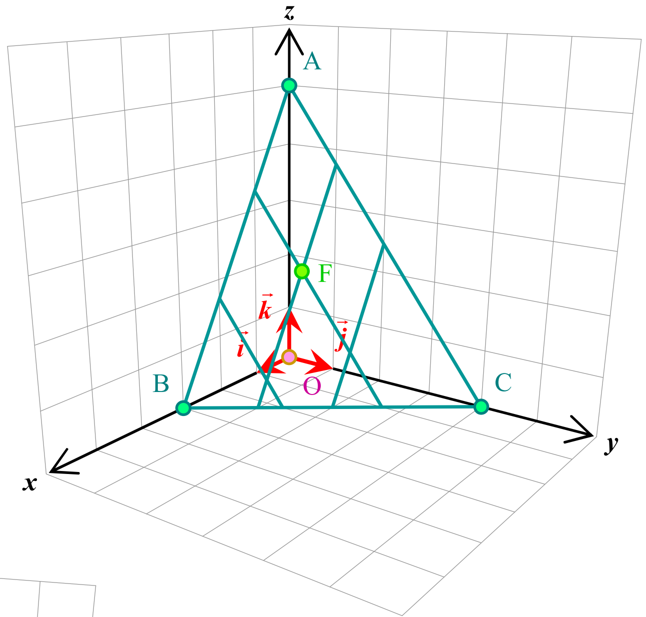
L'énoncé

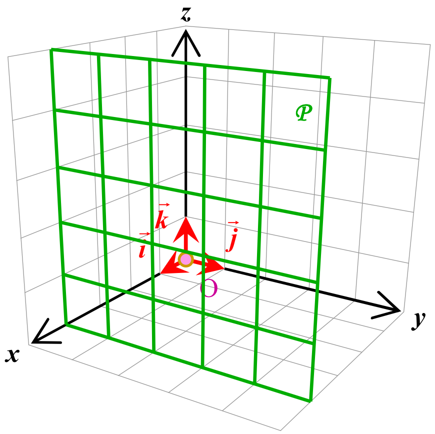
Le présent exercice est constitué de quatre situations indépendantes.
Sur les quatre figures ci-dessous réalisées en perspective centrale (vision réelle), l'espace est muni d'un orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Les trois plans de coordonnées ont été construits.

a) Sur la figure ci-contre ➘
A, B et C sont trois points respectivement des axes Oz, Ox et Oy.

Déterminer une équation du plan (ABC).

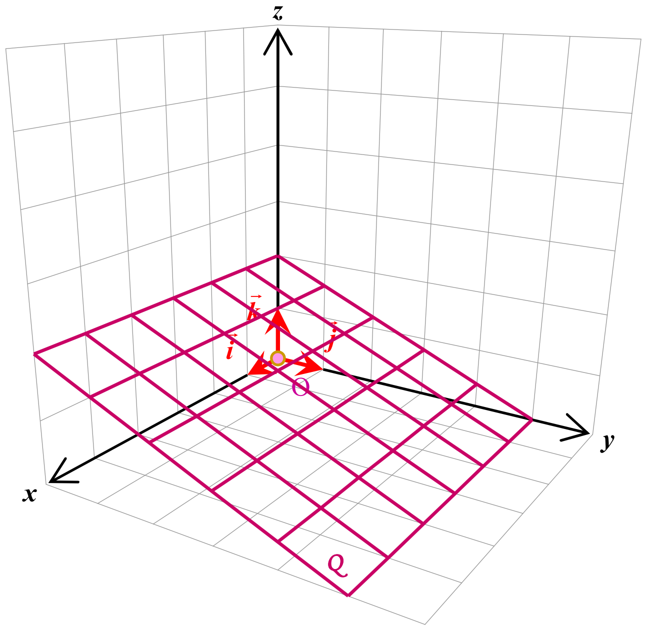
Déterminer la cote du point F sachant qu'il appartient au plan (ABC) et que ses abscisse et ordonnée sont toutes deux égales à 1.

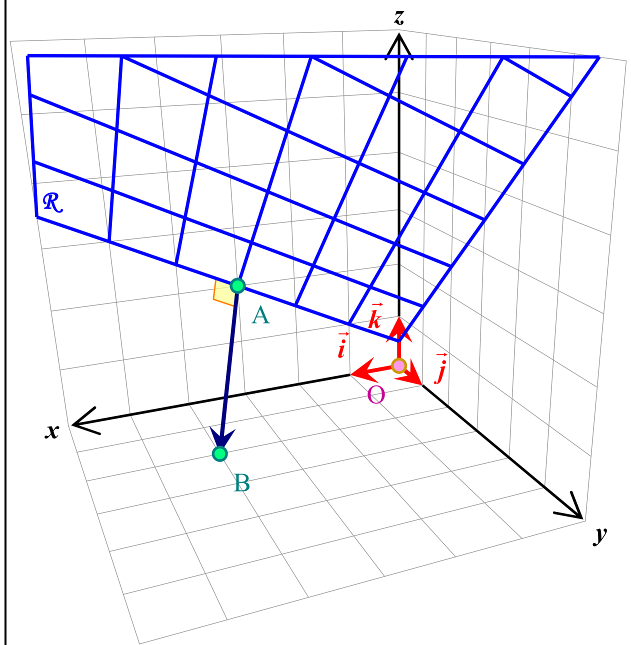




← b) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ représenté sur la figure ci-contre.

c) Déterminer une équation du plan $\mathcal{Q}$ représenté sur la figure ci-contre ➔





← d) Sur la figure ci-contre,
A est un point du plan xOz et B est un point appartenant au plan xOy.

Déterminer les coordonnées des points A et B.
En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On appelle $\mathcal{R}$ le plan passant par le point A et dont l'un des vecteurs normaux est $\overrightarrow{AB}$.

Déterminer une équation du plan $\mathcal{R}$.

Le corrigé

a) Le plan (ABC) a une équation de la forme

$$a.x + b.y + c.z = d$$

où les quatre coefficients a, b, c et d sont liés : quand on en a trois, on en a quatre.
D'après le graphique, les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées :

$$A(0;0;5) \qquad B(3;0;0) \qquad C(0;4;0)$$

Comme ces trois points appartiennent au plan qu'ils définissent (le contraire est assez difficile), alors leurs coordonnées en vérifient l'équation. Nous en déduisons :

$$\begin{cases} A(0;0;5) \in \text{plan}(ABC) \Leftrightarrow a\times 0 + b\times 0 + c\times 5 = d \Leftrightarrow 5.c = d & \textbf{(1)} \\ B(3;0;0) \in \text{plan}(ABC) \Leftrightarrow a\times 3 + b\times 0 + c\times 0 = d \Leftrightarrow 3.a = d & \textbf{(2)} \\ C(0;4;0) \in \text{plan}(ABC) \Leftrightarrow a\times 0 + b\times 4 + c\times 0 = d \Leftrightarrow 4.b = d & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Nous devons trouver quatre réels a, b, c et d vérifiant ces trois équations.
Après une courte réflexion, on remarque que les valeurs...

$$a = 20 \qquad b = 15 \qquad c = 12 \qquad d = 60$$

conviennent car elles vérifient nos trois équations :

$$5\times\underbrace{12}_{c} = \underbrace{60}_{d} \ \textbf{(1)} \qquad 3\times\underbrace{20}_{a} = \underbrace{60}_{d} \ \textbf{(2)} \qquad 4\times\underbrace{15}_{b} = \underbrace{60}_{d} \ \textbf{(3)}$$

<u>Conclusion :</u> une équation du plan (ABC) est $\boxed{20.x + 15.y + 12.z = 60}$

➲ Comme le point F appartient au plan (ABC), alors ses coordonnées $(1;1;y_F)$ en vérifient l'équation que nous venons de déterminer. Ainsi :

$$20\times 1 + 15\times 1 + 12.z_F = 60 \Leftrightarrow 20 + 15 + 12.z_F = 60 \Leftrightarrow 12.z_F = 25 \Leftrightarrow z_F = \boxed{\frac{25}{12}}$$

<u>Conclusion :</u> le point F a pour coordonnées $\left(1;1;\frac{25}{12}\right)$.

b) Tous les points du plan $\mathcal{P}$ ont la même abscisse : 4.
<u>Conclusion :</u> une équation du plan $\mathcal{P}$ est $x = 4$.

c) Comme le plan $\mathcal{Q}$ est parallèle à l'axe Ox, alors toutes ses équations sont de la forme :

$$b.y + c.z = d$$

où les trois coefficients b, c et d sont liés : quand on en a deux, on en a trois.
D'après la figure, le plan $\mathcal{Q}$ contient les points :

$$\begin{cases} D(0;5;0) \in \text{plan } \mathcal{Q} \Leftrightarrow b\times 5 + c\times 0 = d \Leftrightarrow 5.b = d & \textbf{(1)} \\ E(0;0;2) \in \text{plan } \mathcal{Q} \Leftrightarrow b\times 0 + c\times 2 = d \Leftrightarrow 2.c = d & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Nous devons trouver trois réels b, c et d vérifiant ces deux équations.

C'est le cas des trois valeurs $\begin{cases} b = 2 \\ c = 5 \\ d = 10 \end{cases}$ car $\begin{cases} 5\times\underbrace{2}_{b} = \underbrace{10}_{d} & \textbf{(1)} \\ 2\times\underbrace{5}_{c} = \underbrace{10}_{d} & \textbf{(2)} \end{cases}$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $\boxed{2.y + 5.z = 10}$

d) D'après le graphique, les points A et B ont pour coordonnées :

$$A(3;0;2) \qquad B(4;2;0)$$

Par conséquent, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 4-3=1 \\ 2-0=2 \\ 0-2=-2 \end{pmatrix}$.

➲ Connaissant un vecteur normal et un point du plan $\mathcal{R}$, il nous est facile d'en déterminer une équation.

$$M(x;y) \in \text{plan } \mathcal{R} \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-3)\times 1 + y\times 2 + (z-2)\times(-2) = 0}_{\text{Notre test d'orthogonalité est nul}}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 + 2.y - 2.z + 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + 2.y - 2.z + 1 = 0}$$

<u>Conclusion :</u> une équation du plan $\mathcal{R}$ est $\boxed{x + 2.y - 2.z = -1}$

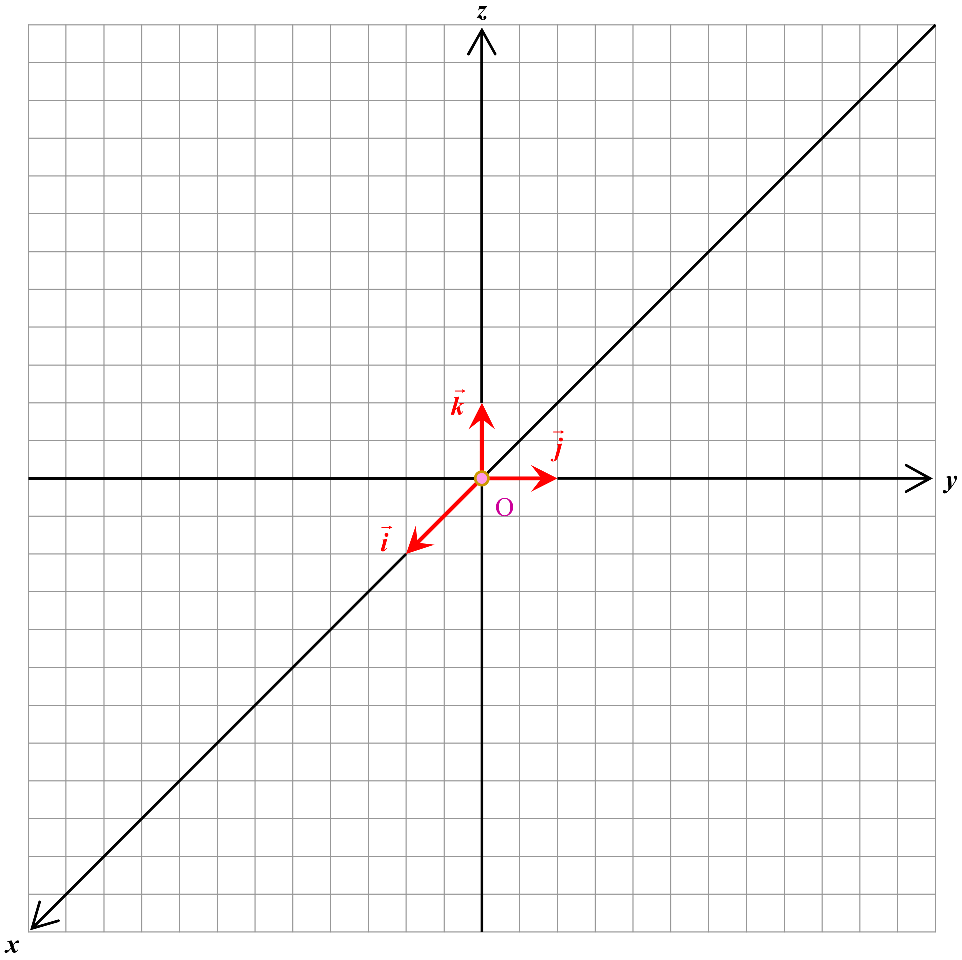
La palme du bon plan.

Le contexte

Toujours un exercice d'option math première ES qui fait encore le lien entre équations de plan et traces sur les trois plans de coordonnées. C'est le match retour du précédent.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous réalisée en perspective cavalière, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.



On appelle :

- ☑ $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3.x-4.y+6.z=12$.
- ☑ $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $x+2.z=2$.
- ☑ A le point dont la cote est égale à -1 et qui appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

a) Sur la figure ci-contre, construire la trace (les intersections) du plan $\mathcal{P}$ sur les trois plans de coordonnées *x*O*y*, *x*O*z* et *y*O*z*.

b) Sur la figure ci-contre, construire la trace (les intersections) du plan $\mathcal{Q}$ sur les trois plans de coordonnées *x*O*y*, *x*O*z* et *y*O*z*.

c) Déterminer les coordonnées du point A.

d) Sur la figure ci-contre, construire la droite Δ qui est l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Le corrigé

a) Vu son équation $3.x-4.y+6.z=12$, le plan $\mathcal{P}$ n'est parallèle à aucun des trois axes de coordonnées O*x*, O*y* ou O*z*. Donc le plan est sécant avec chacune de ces droites. Déterminons les points d'intersection résultant.

☑ Le point d'intersection B du plan $\mathcal{P}$ et de l'axe O*x*

B appartenant à l'axe O*x*, ses coordonnées sont de la forme $\left(x_B;0;0\right)$.

Comme B fait aussi partie du plan $\mathcal{P}$, alors ses coordonnées en vérifient l'équation :

$$3.x_B-4\times0+6\times0=12 \quad\Leftrightarrow\quad 3.x_B=12 \quad\Leftrightarrow\quad x_B=\frac{12}{3}=4$$

<u>Conclusion :</u> le point B a pour coordonnées $(4;0;0)$.

☑ Le point d'intersection C du plan $\mathcal{P}$ et de l'axe O*y*

Comme C fait partie de l'axe O*y*, ses coordonnées sont de la forme $\left(0;y_C;0\right)$.

De plus :

$$C\in\mathcal{P} \quad\Leftrightarrow\quad 3\times0-4\times y_C+6\times0=12 \quad\Leftrightarrow\quad -4.y_C=12 \quad\Leftrightarrow\quad y_C=-3$$

<u>Conclusion :</u> le point C a pour coordonnées $(0;-3;0)$.

☑ Le point d'intersection D du plan $\mathcal{P}$ et de l'axe O*z*

Comme D appartient à l'axe O*z*, ses coordonnées sont de la forme $\left(0;0;z_D\right)$.

Il vient alors :

$$D\in\mathcal{P} \quad\Leftrightarrow\quad 3\times0-4\times0+6\times z_D=12 \quad\Leftrightarrow\quad 6.z_D=12 \quad\Leftrightarrow\quad z_D=2$$

<u>Conclusion :</u> le point D a pour coordonnées $(0;0;2)$.

Conclusion finale : les traces du plan $\mathcal{P}$ sur les trois plans de coordonnées xOy, xOz et yOz sont respectivement les droites (BC), (BD) et (CD).

b) Vu son équation $x-2.z=2$, le plan Q est parallèle à l'axe Oy. Il n'a donc de points d'intersection qu'avec les axes Ox et Oz. Déterminons les !

☑ Le point d'intersection E du plan Q et de l'axe Ox

E appartenant à l'axe Ox, ses coordonnées sont de la forme $(x_E;0;0)$. Ensuite :

$$E\in Q \quad\Leftrightarrow\quad x_E-2\times 0=2 \quad\Leftrightarrow\quad x_E=2$$

Conclusion : les coordonnées du point E sont $(2;0;0)$.

☑ Le point d'intersection F du plan Q et de l'axe Oz

Les coordonnées de F sont de la forme $(0;0;z_F)$ car il appartient à l'axe Oz. Puis :

$$F\in Q \quad\Leftrightarrow\quad 0-2\times z_F=2 \quad\Leftrightarrow\quad -2.z_F=2 \quad\Leftrightarrow\quad z_F=-1$$

Conclusion : les coordonnées du point F sont $(0;0;-1)$.

Conclusion finale : les traces du plan Q sur les trois plans de coordonnées xOy, xOz et yOz sont respectivement la parallèle à Oy passant par E, la droite (EF) et la parallèle à Oy passant par F.

c) Les coordonnées du point A sont de la forme $(x_A;y_A;-1)$.

Comme le point A appartient aux plans $\mathcal{P}$ et Q, alors ses coordonnées en vérifient les deux équations. Ainsi :

$$3.x_A-4.y_A+6\times(-1)=12 \qquad\qquad x_A-2\times(-1)=2$$

$$3.x_A-4.y_A=12+6=18 \quad \textit{(1)} \qquad\qquad x_A+\cancel{2}=\cancel{2} \quad\Rightarrow\quad x_A=0$$

Pour trouver y_A, il nous reste juste à remplacer x_A par sa valeur 0 dans l'équation ***(1)***.

$$3\times 0-4.y_A=18 \quad\Leftrightarrow\quad -4.y_A=18 \quad\Leftrightarrow\quad y_A=\frac{18}{-4}=-\frac{9}{2}=-4,5$$

Conclusion : les coordonnées du point A sont $(0;-4,5;-1)$.

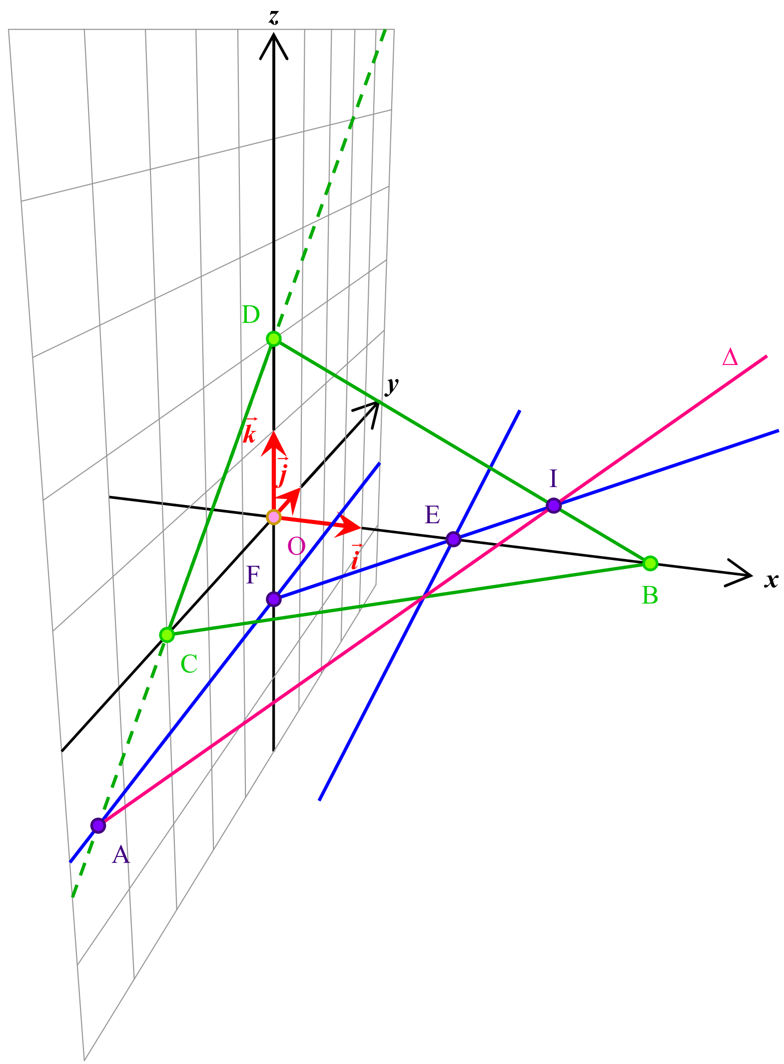
d) Pour tracer la droite Δ intersection des plans $\mathcal{P}$ et Q, il suffit d'en connaître deux points communs. C'est déjà le cas pour le point A. Il nous en faut un second.

Les droites (BD) et (EF) sont sécantes dans le plan xOz en un point que nous baptiserons I.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Comme I est sur la droite } (BD)\text{, alors il appartient au plan } \mathcal{P}\\ \text{Comme I est sur la droite } (EF)\text{, alors il appartient au plan } Q\end{array}\right\}\text{donc I fait partie de } \Delta$$

Conclusion : l'intersection Δ des plans $\mathcal{P}$ et Q est la droite (AI).

Une vue en perspective centrale (vision réelle de près) de la situation :



Probabilités

Cheveux au vent

Le contexte

Un exercice de dénombrement avant tout semblable au tiercé.

L'énoncé

Dans un excès de gentillesse confinant à la maladie mentale prononcée, *M'sieur O* a décidé d'offrir à trois de ses 17 élèves (12 garçons et 5 filles) un tour décapoté dans son coupé décapotable lorsque le coffre n'est pas trop encombré.
La place du conducteur étant occupée par *M'sieur O*, il ne reste plus que trois places à pourvoir dans le véhicule :

- ☑ La place avant-droite dite «place du mort».
- ☑ La place arrière-gauche dite «place du contorsionniste».
- ☑ La place arrière-droite dite «place de la sardine».

De façon à ne pénaliser personne, *M'sieur O* décide de procéder à un tirage au sort pour déterminer les trois heureux gagnants aux trois places si convoitées.
Les probabilités seront données sous la forme de fractions irréductibles.

a) Combien y a-t-il de distributions possibles des trois places parmi les 17 élèves ?

b) Déterminer les probabilités des événements suivants :
A = «Les trois places ont été attribuées à trois filles.»
B = «La place avant-droite est occupée par une fille et la place arrière-droite est occupée par un garçon.»
C = «Il y a au moins une fille dans la voiture.»
D = «Il y a une seule fille dans la voiture et elle occupe la place arrière-droite»
E = «Il y a exactement une fille dans la voiture.»

Le corrigé

a) D'abord, comme tous les élèves ont la même chance d'être «choisis», alors nous sommes en situation d'équiprobabilité.
Ensuite, chaque distribution des trois places parmi les dix-sept partants est le résultat d'un tirage avec ordre et sans remise. Cette course au coupé décapotable est une sorte de tiercé où il y a un premier qui occupera la place du mort, un second qui occupera la place du contorsionniste et un troisième qui occupera la place de la sardine.

La situation des trois places est la suivante :

Place avant-droite du mort	Place arrière-gauche du contorsionniste	Place arrière-droite de la sardine
17 candidats	16 candidats	15 candidats

Un élève occupe déjà la place du mort

Conclusion : il y a au total $17\times16\times15=4080$ distributions des trois places possibles parmi les dix-sept élèves.

b.A) Combien y a-t-il de distributions où les trois places sont attribuées à trois filles ?
Dans un tel cas, la situation est la suivante :

Place avant-droite du mort	Place arrière-gauche du contorsionniste	Place arrière-droite de la sardine
5 filles possibles	4 filles possibles	3 filles possibles

Il y a donc $5\times4\times3=60$ distributions favorables à l'événement A. Par conséquent :

$$p(A)=\frac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas total}}=\frac{60}{4080}=\frac{1}{68}$$

b.B) Combien y a-t-il de distributions où la place avant-droite est occupée par une fille et la place arrière-droite est occupée par un garçon ?
Dans un tel cas, la situation est la suivante :

Place avant-droite du mort	Place arrière-droite de la sardine	Place arrière-gauche du contorsionniste
5 filles possibles	12 garçons possibles	15 candidats restants

Il y a donc $5\times12\times15=900$ distributions favorables à l'événement B. Ainsi :

$$p(B)=\frac{\text{Nombre de cas favorables à B}}{\text{Nombre de cas total}}=\frac{900}{4080}=\frac{15}{68}$$

b.C) L'événement «il y a au moins une fille dans la voiture» est l'événement contraire de «il n'y a aucune fille dans la voiture». Cet événement contraire de C est noté $\overline{C}$.
«Aucune fille dans la voiture» signifie que les places sont occupées par trois garçons.
Combien y a-t-il de distributions où les trois places sont attribuées à trois garçons ?

Place avant-droite du mort	Place arrière-gauche du contorsionniste	Place arrière-droite de la sardine
12 garçons possibles	11 garçons possibles	10 garçons possibles

Il y a donc $12\times11\times10=1320$ distributions favorables à l'événement $\overline{C}$. Il vient alors :

$$p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{1320}{4080}=1-\frac{11}{34}=\frac{23}{34}$$

b.D) L'événement D signifie que la place arrière-droite est occupée par une fille et que les deux autres places sont occupées par deux garçons.
Combien y a-t-il de telles distributions ? Dans un tel cas, la situation est la suivante :

Place arrière-droite de la sardine	Place avant-droite du mort	Place arrière-gauche du contorsionniste
5 filles possibles	12 garçons possibles	11 garçons possibles

Il y a donc $5\times12\times11=660$ distributions favorables à l'événement D. Par conséquent :

$$p(D)=\frac{\text{Nombre de cas favorables à D}}{\text{Nombre de cas total}}=\frac{660}{4080}=\frac{11}{68}$$

b.E) L'événement E signifie qu'il y a exactement une fille et deux garçons dans la voiture. C'est un peu comme dans l'événement D, sauf que l'on ne connaît pas la place de la jeune fille. Elle peut être à la place de la sardine, à celle du mort ou à celle du contorsionniste. Pour chaque place où l'on met la fille, il y a à chaque fois $\underbrace{5}_{\text{Une fille}}\times\underbrace{12\times11}_{\text{Deux garçons}}=660$ distributions possibles. A chaque fois, c'est une sorte d'événement D qui recommence.
Finalement, il y a $\underbrace{3}_{\text{Trois places possibles pour la fille}}\times\underbrace{5}_{\text{Une fille}}\times\underbrace{12\times11}_{\text{Deux garçons}}=1980$ distributions favorables à l'événement E. Nous en concluons :

$$p(E)=\frac{\text{Nombre de cas favorables à E}}{\text{Nombre de cas total}}=\frac{1980}{4080}=\frac{33}{68}$$

LE JEU QUI PORTE SI BIEN SON NOM

Le contexte

Un exercice classique de probabilité avec un arbre et se terminant par une variable aléatoire.

L'énoncé

Pour sauver son bénéfice mis à mal par la crise, *La Blancoise des Jeux* vient d'éditer un nouveau jeu de hasard : le *7 Rokon*.
Une urne contient sept boules indiscernables au toucher:

- ☑ Une boule verte.
- ☑ Quatre boules jaunes.
- ☑ Deux boules rouges.

Avant de jouer, le joueur verse à *La Blancoise des Jeux* une mise de 10€.
Dans un premier temps, le joueur tire une première boule au hasard dans l'urne.

- ⇒ S'il a tiré la boule verte, il a gagné. Le jeu s'arrête.
- ⇒ S'il tire une boule rouge, il a perdu. Le jeu s'arrête.
- ⇒ S'il a tiré une boule jaune, alors il retire une seconde boule dans l'urne parmi les six restantes. Donc sans avoir remis la première boule qu'il a tirée.
  Si cette seconde boule est verte, alors il a gagné.
  Si la seconde boule tirée est jaune, alors la partie est déclarée nulle et le joueur est remboursé de sa mise.
  Si la seconde boule tirée est rouge, alors le joueur a perdu.
  Dans tous les cas, le jeu s'arrête.

Lorsque le joueur gagne, *La Blancoise des Jeux* lui verse 25€.

Les probabilités seront données sous la forme de fractions irréductibles.

a) Construire un arbre pondéré représentant la situation du jeu.

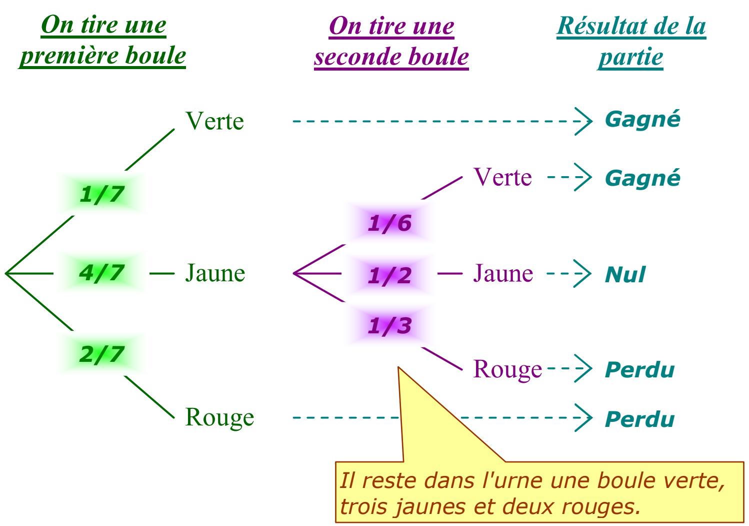
b) Déterminer les probabilités des événements suivants :
G = «Le joueur a gagné.»
N = «La partie est nulle.»
P = «Le joueur a perdu.».

c) On appelle X la variable aléatoire comptabilisant le gain brut du joueur.
1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
3. A qui le jeu est-il favorable ?
4. Déterminer le gain du joueur (lorsqu'il gagne) pour que le jeu soit équitable.

d) Un joueur décide de jouer cinq fois de suite au *7 Rokon*. Les cinq parties sont supposées être indépendantes les unes des autres.
Déterminer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les cinq qu'il livre.

Le corrigé

a) La situation d'une partie du *7 Rokon* est la suivante :



b) L'arbre pondéré ci-dessus permet de déterminer facilement les probabilités demandées.

☑ $\mathrm{p}(\mathrm{G}) = \mathrm{p}(\text{«Verte»}) + \mathrm{p}(\text{«Jaune suivie de Verte»}) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \boxed{\frac{5}{21}}$

☑ $\mathrm{p}(\mathrm{N}) = \mathrm{p}(\text{«Jaune suivie de Jaune»}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \boxed{\frac{2}{7}}$

☑ $\mathrm{p}(\mathrm{P}) = \mathrm{p}(\text{«Rouge»}) + \mathrm{p}(\text{«Jaune suivie de Rouge»}) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{7} + \frac{4}{21} = \boxed{\frac{10}{21}}$

Les trois événements G, N et P étant les seules issues possibles à une partie de *7 Rokon*, on vérifie que la somme de leurs probabilités $\frac{5}{21} + \frac{6}{21} + \frac{10}{21}$ est bien égale 1.

C.1) La variable aléatoire X qui comptabilise le gain brut du joueur peut prendre trois valeurs : 0€ ; 10€ ou 25€.
Chaque valeur est associée à un événement dont nous connaissons déjà la probabilité.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la suivante :

Valeur de X	0€	10€	25€
Evénement associé	P	N	G
Probabilité	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$

c.2) L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \underbrace{0 \times \frac{10}{21} + 10 \times \frac{2}{7} + 25 \times \frac{5}{21}}_{\text{Somme des produits valeur×probabilité}} = 0 + \frac{20}{7} + \frac{125}{21} = \frac{60+125}{21} = \boxed{\frac{185}{21} \approx 8{,}81€}$$

c.3) L'espérance de gain brut du joueur étant inférieure à sa mise de 10€, le jeu est favorable à *La Blancoise des Jeux*. Son espérance de profit est de 1,19€ par partie.

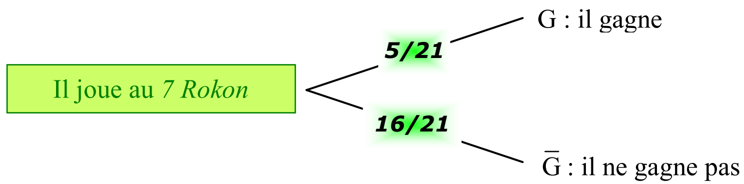
c.4) Appelons x le nouveau gain brut que perçoit le joueur lorsque le jeu est équitable et qu'il gagne une partie.
Dire que le jeu est équitable signifie que l'espérance de gain brut du joueur est égale à la mise de 10€. On pourrait aussi dire que son espérance de gain net est nulle. Ainsi :

$$\text{Le jeu est équitable} \Leftrightarrow \mathrm{E}(\mathrm{X}) = 10 \Leftrightarrow \underbrace{0 \times \frac{10}{21} + 10 \times \frac{2}{7} + x \times \frac{5}{21}}_{\text{Somme des produits valeur×probabilité}} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{21} \times x = 10 - \frac{20}{7} = \frac{50}{7} \Leftrightarrow x = \frac{50}{7} \times \frac{21}{5} = \boxed{30€}$$

Conclusion : pour que le jeu soit équitable, il faut et il suffit que le gain brut du joueur soit égal à 30€.

d) Pour celui qui joue au *7 Rokon* pour gagner, il n'y a deux issues possibles :



Nous pourrions représenter les cinq parties successives de *7 Rokon* par un arbre pondéré formé avec le rameau ci-dessus. Il compterait alors $2^5 = 32$ branches. Chaque branche formerait un mot de cinq lettres composés avec les deux caractères G et $\overline{\mathrm{G}}$.
Mais ce ne sera pas nécessaire car l'événement contraire de «il gagne au moins une partie sur les cinq» est «il ne gagne aucune partie sur les cinq».
Un seul mot correspond à cet événement contraire, il s'agit de $\overline{\mathrm{GGGGG}}$.

Dans notre arbre, ce serait la branche inférieure. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}\left(\text{«Il gagne au moins une partie»}\right) &= 1-\mathrm{p}\left(\text{«Il ne gagne aucune partie»}\right) \\
&= 1-\mathrm{p}\left(\overline{\mathrm{G}}\overline{\mathrm{G}}\overline{\mathrm{G}}\overline{\mathrm{G}}\overline{\mathrm{G}}\right) \\
&= 1-\frac{16}{21}\times\frac{16}{21}\times\frac{16}{21}\times\frac{16}{21}\times\frac{16}{21} \\
&= 1-\frac{1048576}{4084101} = \frac{3035525}{4084101} \approx 0,743
\end{aligned}$$

Suites

Quatre histoires de suites sans suite

Le contexte

Cet exercice est composée de quatre parties indépendantes. Chacune aborde un savoir-faire de base concernant les suites.

L'énoncé

Les quatre sous-parties de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

a) La suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n^2 - 3.n + 4} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. Etablir le sens de variation de la suite (u_n).

b) La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{n^2}{7^n}$$

Etablir le sens de variation de la suite (u_n).

c) La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4.x + 1}{x + 1}$$

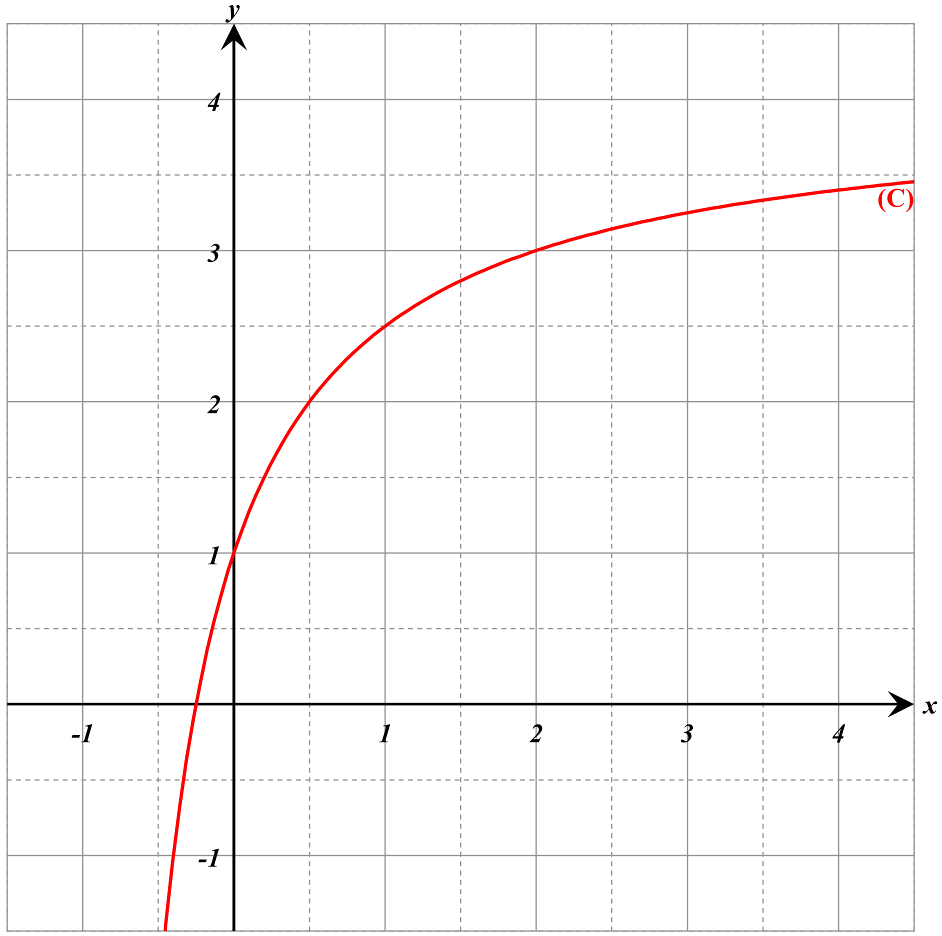
On appelle (C) sa courbe représentative qui est tracée sur le graphique ci-contre :

1. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
   Quelles sont les conséquences graphiques de ces limites ?
2. Etablir les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

La suite (u_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4 \times u_n + 1}{u_n + 1} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

3. Sur le graphique ci-contre et en recourant à la courbe (C), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite. On laissera apparents les traits de construction.
4. Calculer les valeurs effectives des termes u_1 et u_2.
5. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est strictement croissante.



d) «Je suis une fripouille, un misérable, un chenapan !». Tels furent les terribles mots du *Prof* contemplant les 2380 pièces de un euro empilées sur son bureau. Pris d'un immense remord, il se promit que dès le lendemain, il irait rendre cet argent indûment perçu aux dix-sept élèves à qui il l'avait extorqué.
Au premier élève qu'il rencontra, il rendit 195€. Et là, il commença à faire ses comptes. S'il reversait autant à chacun des autres élèves, il verserait au total 3315€ et ses scrupules n'allaient pas jusque là. Alors, il décida qu'à chaque nouvel élève rencontré, il diminuerait son versement de sept euros par rapport à l'élève précédent.

La question : combien le *Prof* rendra-t-il d'argent au total ? Le bien mal acquis lui a-t-il profité ? *On rédigera sa réponse en introduisant une suite.*

Le corrigé

a.1) Calculons le second terme : $u_1 = u_{0+1} = u_0 - \dfrac{1}{0^2 - 3\times 0 + 4} = 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4} = 1,75$

Et puis le troisième : $u_2 = u_{1+1} = u_1 - \dfrac{1}{1^2 - 3\times 1 + 4} = 1,75 - \dfrac{1}{2} = 1,25$

a.2) Sur ses trois premiers termes, la suite (u_n) semble décroissante. Pour l'établir, intéressons-nous au signe de la différence de deux de ses termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \cancel{u_n} - \frac{1}{n^2 - 3.n + 4} - \cancel{u_n} = -\frac{1}{n^2 - 3.n + 4}$$

Calculons le discriminant du dénominateur $d(x) = x^2 - 3.x + 4$ pour connaître son signe.

$$\Delta_{d(x)} = (-3)^2 - 4\times 1\times 4 = 9 - 16 = -7$$

Comme son discriminant est négatif, alors la forme du second degré $d(x) = x^2 - 3.x + 4$ est toujours du même signe : celui de son coefficient dominant 1 donc toujours positive.
Par conséquent, la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est toujours négative.
Conclusion : la suite (u_n) est bien (toujours) décroissante.

b) Tous les termes de la suite $u_n = \dfrac{n^2}{7^n}$ sont positifs. Aussi pour établir son sens de variation, allons-nous nous intéresser au quotient de deux de ses termes consécutifs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{7^{n+1}}}{\frac{n^2}{7^n}} = \frac{(n+1)^2}{7^{n+1}} \times \frac{7^n}{n^2} = \frac{\cancel{7^n}}{7\times \cancel{7^n}} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{7}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

A présent, tout le problème est de savoir comment est le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1.

La fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[

Comme $n \geq 1$ alors $\dfrac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \leq 2$

La fonction carré est croissante sur]0 ; +∞[

$\Rightarrow \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \leq 4 \Rightarrow \boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{7}\times\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \leq \dfrac{4}{7} < 1}$

Conclusion : comme le quotient de deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est toujours strictement inférieur à 1, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

c.1) Quand x tend vers -1 par la droite :
- Le numérateur $4.x+1$ tend vers $4\times(-1)+1 = -3$ ...par continuité.
- Le dénominateur $x+1$ tend vers 0^+.

Donc $f(x) = \dfrac{4.x+1}{x+1}$ tend vers $\dfrac{-3}{0^+} = -\infty$.
Conséquence graphique : la droite verticale d'équation $x = -1$ est une asymptote à (C).

➲ Pour tout réel x de l'intervalle $]-1;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{4.x+1}{x+1} = \frac{\overbrace{4\times(x+1) - 4}^{4.x} + 1}{x+1} = \frac{4\times\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} + \frac{-3}{x+1} = 4 - \frac{3}{x+1}$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4 - \frac{3}{x+1} = 4 - \frac{3}{+\infty} = 4 - 0^+ = 4$$

Conséquence graphique : la droite horizontale d'équation $y = 4$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c.2) Pour connaître les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$, calculons sa dérivée.
Comme les fonctions :

$u(x) = 4.x+1$	et	$v(x) = x+1$
$u'(x) = 4$		$v'(x) = 1$
u est dérivable sur $\mathbb{R}$		v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nulle sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

alors la fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et

Pour chaque réel de cet intervalle, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}$$
$$=\frac{4\times(x+1)-1\times(4.x+1)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{\cancel{4.x}+4\cancel{-4.x}-1}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

Par conséquent, le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et celui de variation de la fonction f est celui ci-contre ➔

x	-1	+∞
3	+	
$(x+1)^2$	+	
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$ ↗	4

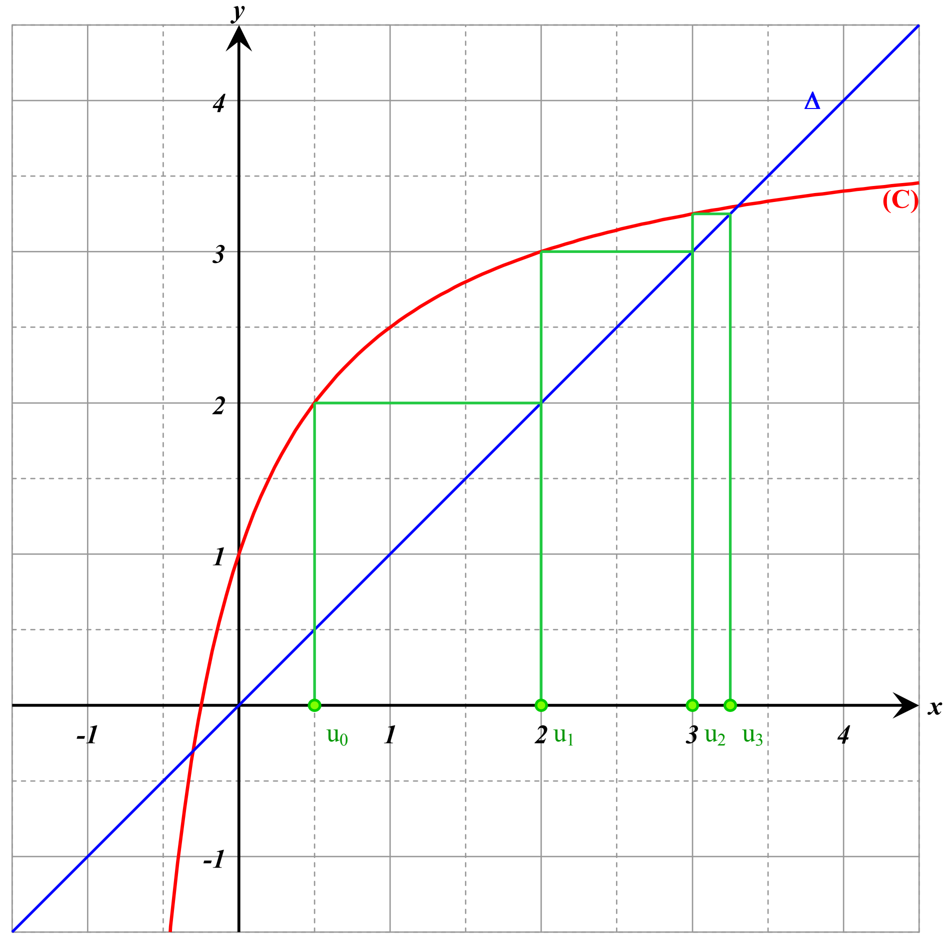
c.3) La construction demandée est représentée ci-contre ➔

Pour construire les termes en question, nous devons préalablement tracer la première bissectrice du plan qui est aussi la droite d'équation $y=x$, c'est-à-dire l'endroit du plan où l'ordonnée d'un point est égale à son abscisse. Nous noterons Δ cette droite.

Le point de la courbe (C) d'abscisse u_0 a pour ordonnée $u_1=f(u_0)$.

Le point de la droite Δ d'ordonnée u_1 a pour abscisse u_1.

En appliquant ces deux propriétés, on construit d'abord u_1 et ensuite les termes u_2 et u_3.



c.4) Calculons les deux termes demandés :

$$u_1=u_{0+1}=\frac{4\times u_0+1}{u_0+1}=\frac{4\times 0,5+1}{0,5+1}=\frac{3}{1,5}=2 \qquad u_2=\frac{4\times u_1+1}{u_1+1}=\frac{4\times 2+1}{2+1}=\frac{9}{3}=3$$

c.5) L'image par la fonction f du terme u_0 est le terme u_1. Et celle de u_1 est le terme u_2.

Or $u_0=0,5<2=u_1$. La fonction f étant croissante sur l'intervalle $]-1;+\infty[$, il vient :

La fonction f qui est croissante conserve l'ordre. L'infériorité se propage à toute la suite (u_n).

$$\underbrace{u_0}_{0,5}<\underbrace{u_1}_{2} \Rightarrow \underbrace{f(u_0)}_{u_1}<\underbrace{f(u_1)}_{u_2} \Rightarrow \underbrace{f(u_1)}_{u_2}<\underbrace{f(u_2)}_{u_3} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}}<\underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}} \Rightarrow \ldots$$

<u>Conclusion :</u> la suite (u_n) est strictement croissante.

d) On appelle a_n la somme que reverse le *Prof* au élève numéro n qu'il rencontre.

1. Au premier élève, il verse $a_1 = 195$ euros.
2. Au second élève, il verse sept euros de moins : $a_2 = a_1 - 7 = 195 - 7 = 188$ euros.
3. Au troisième élève, il verse encore sept euros de moins : $a_3 = a_2 - 7 = 181$ euros.

.....

Et de manière générale, le *Prof* verse à l'élève $n+1$ sept euros de moins qu'à l'élève n.

$$a_{n+1} = a_n - 7$$

La suite (a_n) est arithmétique de raison -7 et pour tout entier naturel n, nous avons :

$$\underbrace{a_n = a_1 + (n-1) \times raison = 195 + (n-1) \times (-7) = \boxed{202 - 7 \times n}}_{\text{Le premier terme de la suite a pour rang 1.}}$$

Au dernier élève, le *Prof* verse $a_{17} = 202 - 17 \times 7 = 83$ euros.

Et au total, le prof rend aux dix-sept élèves :

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{17}}_{\substack{\text{Somme de 17 termes consécutifs} \\ \text{de la suite arithmétique } (a_n).}} = 17 \times \frac{a_1 + a_{17}}{2} = 17 \times \frac{195 + 83}{2} = 2363 \text{ euros}$$

<u>Conclusion :</u> le Prof rendra 2363 euros sur 2380 extorqués. Comme quoi, un bien mal acquis profite quand même toujours un peu...

DAMNÉ BAVARD !

Le contexte

Un exercice composé de trois questions classiques sur les suites d'application directe du cours.

L'énoncé

a) La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n > 1$ par :

$$u_n = \frac{2.n^2 + 5.n - 3}{1 - n}$$

Etablir le sens de variation de la suite (u_n).

b) (v_n) est une suite géométrique de raison positive telle que :

$$\begin{cases} v_2 = 24 \\ 2 \times v_4 - 7 \times v_3 = 4 \times v_2 \end{cases}$$

Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n.

c) La suite arithmétique (t_n) est telle que :

$$\begin{cases} t_4 + t_7 = 51 \\ t_3 + t_5 + t_7 = 66 \end{cases}$$

Exprimer t_n en fonction de l'entier naturel n.

Le corrigé

a) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, nous pouvons écrire :

$$u_n = \frac{2.n^2 + 5.n - 3}{1 - n} = f(n)$$

où f est la fonction définie sur l'intervalle $[2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2.x^2 + 5.x - 3}{1 - x}$$

Si nous établissons les variations de la fonction f, nous connaîtrons celles de la suite (u_n).

Pour ce faire, nous allons rechercher le signe de la dérivée de f. Comme :

$u(x) = 2.x^2 + 5.x - 3$
$u'(x) = 2 \times 2.x + 5 \times 1 + 0 = 4.x + 5$
u est dérivable sur ℝ

et

$v(x) = 1 - x$
$v'(x) = 0 - 1 = -1$
v est dérivable sur ℝ et non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

alors leur quotient $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $[2;+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2} = \frac{(4.x+5)\times(1-x) - (-1)\times(2.x^2+5.x-3)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{4.x - 4.x^2 + 5 - 5.x + 2.x^2 + 5.x - 3}{(1-x)^2} = \boxed{\frac{-2.x^2 + 4.x + 2}{(1-x)^2} = \frac{N(x)}{D(x)}}$$

Le dénominateur $(1-x)^2$ ne pose aucun problème car c'est un carré non nul.

Pour connaître le signe de la forme du second degré $N(x)$, calculons son discriminant :

$$\Delta_{N(x)} = 4^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 16 + 16 = 32$$
$$= \left(\sqrt{32}\right)^2 = \left(\sqrt{16} \times \sqrt{2}\right)^2 = \left(4 \times \sqrt{2}\right)^2$$

Son discriminant étant positif, le numérateur admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-4 - 4.\sqrt{2}}{2 \times (-2)} = \frac{\cancel{(-4)} \times (1+\sqrt{2})}{\cancel{-4}} = \underbrace{1+\sqrt{2}}_{\approx 2,41}$$

$$x_2 = \frac{-4 + 4.\sqrt{2}}{2 \times (-2)} = \frac{\cancel{(-4)} \times (1-\sqrt{2})}{\cancel{-4}} = \underbrace{1-\sqrt{2}}_{\approx -0,41}$$

Le tableau de variation de f est celui-ci ➔

x	2		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
N(x)		+	0	−	
D(x)		+	|	+	
f'(x)		+	0	−	
f	−15	↗	$f(1+\sqrt{2})$	↘	$-\infty$

<u>Conclusion :</u> à l'instar de la fonction f, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3.

Pour note, les deux premiers termes $u_2 = -15$ et $u_3 = -15$ de la suite sont égaux.

Une autre voie plus classique...mais plus ardue

Pour établir le sens de variations de la suite (u_n), on peut aussi s'intéresser au signe de la différence de deux termes consécutifs. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2.(n+1)^2 + 5.(n+1) - 3}{1-(n+1)} - \frac{2.n^2 + 5.n - 3}{1-n}$$

$$= \frac{2.n^2 + 4.n + 2 + 5.n + 5 - 3}{-n} - \frac{2.n^2 + 5.n - 3}{1-n} = \frac{2.n^2 + 9.n + 4}{-n} - \frac{2.n^2 + 5.n - 3}{1-n}$$

$$= \frac{(2.n^2 + 9.n + 4)\times(1-n) - (-n)\times(2.n^2 + 5.n - 3)}{-n \times (1-n)}$$

$$= \frac{2.n^2 + 9.n + 4 \cancel{- 2.n^3} - 9.n^2 - 4.n \cancel{+ 2.n^3} + 5.n^2 - 3.n}{n \times (n-1)} = \frac{-2.n^2 + 2.n + 4}{n \times (n-1)}$$

Le dénominateur est composé de deux facteurs positifs.
Leu numérateur est une forme du second degré. Calculons son discriminant :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 4 + 32 = 36 = 9^2$$

Comme son discriminant est positif, alors le numérateur admet deux racines distinctes ➔

$$x_1 = \frac{-2-6}{2\times(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \qquad x_2 = \frac{-2+6}{2\times(-2)} = \frac{4}{-4} = -1$$

Par conséquent, son tableau de signe est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		−1		2		$+\infty$
$-2.x^2 + 2.x + 4$		−	0	+	0	−	

Pour tout entier naturel $n > 2$, le numérateur $-2.n^2 + 2.n + 4$ est négatif.
Il en va alors de même pour la différence $u_{n+1} - u_n$.

<u>Conclusion :</u> la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3.

b) Pour déterminer la suite géométrique (v_n), il suffit juste de connaître sa raison q.

Comme la suite (v_n) est géométrique, alors pour tout entier naturel n, nous avons :

$$v_n = v_2 \times q^{n-2} = 24 \times q^{n-2}$$

Par conséquent, la seconde égalité du système définissant la suite devient :

$$2 \times v_4 - 7 \times v_3 = 4 \times v_2 \iff 2 \times \cancel{\underbrace{24}_{v_2}} \times q^2 - 7 \times \cancel{\underbrace{24}_{v_2}} \times q = 4 \times \cancel{\underbrace{24}_{v_2}} \iff 2 \times q^2 - 7 \times q - 4 = 0$$

Pour résoudre cette équation du second degré d'inconnue q, calculons son discriminant.

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 49 + 32 = 81 = 9^2$$

Comme son discriminant Δ est positif, alors cette équation admet deux racines distinctes :

$$\underbrace{q=\frac{-(-7)-9}{2\times 2}=\frac{7-9}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}}_{\text{Impossible car la raison } q \text{ est positive.}} \qquad \underbrace{q=\frac{-(-7)+9}{2\times 2}=\frac{7+9}{4}=\frac{16}{4}=4}_{\text{Voilà la bonne raison !}}$$

Finalement, il vient que pour tout entier naturel n :

$$\mathrm{v}_n=\mathrm{v}_2\times 4^{n-2}=24\times 4^n\times 4^{-2}=24\times 4^n\times\frac{1}{4^2}=\frac{24}{16}\times 4^n=\frac{3\times\cancel{8}}{2\times\cancel{8}}\times 4^n=\boxed{\overbrace{1,5}^{\mathrm{v}_0}\times 4^n}$$

c) Pour déterminer entièrement la suite arithmétique (t_n), il suffit juste de connaître sa raison r et l'un de ses termes. Pour ce dernier, nous choisissons t_5. C'est le plus accessible.

Comme la suite est arithmétique (t_n), alors pour tout entier naturel n, nous savons :

$$\mathrm{t}_n=\mathrm{t}_5+r\times(n-5)$$

Sachant cela, le système vérifié par les quatre termes de la suite (t_n) devient :

$$\begin{cases}\mathrm{t}_4+\mathrm{t}_7=51\\ \mathrm{t}_3+\mathrm{t}_5+\mathrm{t}_7=66\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{t}_5-r+\mathrm{t}_5+2\times r=51\\ \mathrm{t}_5\cancel{-2\times r}+\mathrm{t}_5+\mathrm{t}_5+\cancel{2\times r}=66\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\times\mathrm{t}_5+r=51 & \textbf{\textit{(1)}}\\ 3\times\mathrm{t}_5=66 & \textbf{\textit{(2)}}\end{cases}$$

A partir de l'équation ***(2)***, nous obtenons notre terme de référence t_5.

$$3\times\mathrm{t}_5=66 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{t}_5=\frac{66}{3}=22$$

Puis, en remplaçant t_5 par sa valeur dans l'équation ***(1)***, nous allons trouver la raison r.

$$2\times\mathrm{t}_5+r=51 \quad\Leftrightarrow\quad 2\times 22+r=51 \quad\Leftrightarrow\quad 44+r=51 \quad\Leftrightarrow\quad r=51-44=7$$

Finalement, pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$\mathrm{t}_n=\mathrm{t}_5+r\times(n-5)=22+7\times(n-5)=22+7\times n-35=\boxed{\overbrace{-13}^{\mathrm{t}_0}+7\times n}$$

PÉTROLE ! PÉTROLE !

Le contexte

Un exercice des plus classiques sur les suites arithmétiques et géométriques appliquées à un problème concret

L'énoncé

La célèbre compagnie *la Blancoise du Pétrole* mieux connue sous ses initiales *BP* vient de percer deux nouveaux puits pour extraire des insondables profondeurs de la Brenne ce si précieux liquide noir appelé pétrole.
Ces deux nouveaux gisements baptisés *puits A* et *puits B* entrent en production le même jour.
Le premier jour, le *puits A* produit 3500 litres de pétrole et le *puits B* 1490 litres.
Les jours suivants, la production quotidienne du *puits A* baisse chaque jour de 2% par rapport à la production du jour précédent.
Par contre, la production quotidienne du *puits B* augmente chaque jour de 80 litres par rapport à la production du jour précédent.

On appelle :

- a_n le volume de pétrole exprimé en litres produit par le *puits A* durant le n-ième jour de production. On a donc : $\mathrm{a}_1=3500$.
- b_n le volume de pétrole exprimé en litres produit par le *puits B* durant le n-ième jour de production. On a donc : $\mathrm{b}_1=1490$.

a) D'abord, intéressons-nous à la production quotidienne du *puits A* et à la suite (a_n).

1. Calculer a_2 (le volume extrait du *puits A* le second jour).
2. Etablir la nature de la suite (a_n). On précisera ses attributs.
3. Exprimer a_n en fonction de n.
4. Calculer le volume de pétrole produit par le *puits A* le dixième jour.

b) A présent, intéressons-nous à la production quotidienne du *puits B* et à la suite (b_n).

1. Calculer b_2 (le volume extrait du *puits B* le second jour).
2. Etablir la nature de la suite (b_n). On précisera ses attributs.
3. Exprimer b_n en fonction de n.
4. Calculer le volume de pétrole produit par le *puits B* le dixième jour.

c) A partir de quel jour, le *puits A* produit-il quotidiennement moins que le *puits B* ?

d) On suppose que le premier mois de production compte 30 jours.
Durant ce premier mois d'activité, lequel des deux puits aura produit au total le plus de pétrole ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a) Entre le premier et le second jour, la production quotidienne du *puits A* baisse de 2%.

$$a_2 = a_1 - 2\% \text{ de } a_1 = a_1 - 0,02 \times a_1 = (1-0,02) \times a_1 = 0,98 \times a_1 = 3430 \text{ litres}$$

Cette même évolution se répète les jours suivants. Par conséquent, pour tout entier naturel non nul n, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{a_{n+1} = a_n - 2\% \text{ de } a_n = a_n - 0,02 \times a_n = 0,98 \times a_n}_{\substack{\text{Entre les jours } n \text{ et } n+1 \text{, la production quotidienne du } puits\ A \text{ baisse de 2\%,} \\ \text{c'est-à-dire qu'elle est multipliée par } 0,98=1-2\%}}$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison 0,98 et de premier terme $a_1 = 3500$.

Il vient alors que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$a_n = a_1 \times 0,98^{n-1}$$

En particulier, la production du dixième jour du *puits A* est donnée par :

$$a_{10} = a_1 \times 0,98^{10-1} = 3500 \times 0,98^9 \approx 2918 \text{ litres}$$

b) Entre le premier et le second jour, la production quotidienne du *puits B* augmente de 80 litres. Autrement dit :

$$b_2 = b_1 + 80 = 1490 + 80 = 1570 \text{ litres}$$

Le même phénomène se reproduit les jours suivants. Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\underbrace{b_{n+1} = b_n + 80}_{\text{Entre les jours } n \text{ et } n+1 \text{, la production quotidienne du } puits\ B \text{ augmente de 80 litres.}}$$

La suite (b_n) est arithmétique de raison 80 et de premier terme $b_1 = 1490$.

Pour tout entier naturel non nul n, il vient :

$$b_n = b_1 + (n-1) \times 80 = 1490 + 80 \times n - 80 = 1410 + 80 \times n$$

En particulier, la production du dixième jour du *puits B* est donnée par :

$$b_{10} = 1410 + 80 \times 10 = 1410 + 800 = 2210 \text{ litres}$$

c) Cette troisième question se résout à l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice.

n	a_n	b_n
1	3500	1490
2	3430	1570
3	3361	1650
4	3294	1730
5	3228	1810
6	3164	1890
7	3100	1970
8	3038	2050
9	2978	2130
10	2918	2210

n	a_n	b_n
11	2860	2290
12	2803	2370
13	2747	2450
14	2692	2530
15	2638	2610
16	2585	2690
17	2533	2770
18	2483	2850
19	2433	2930
20	2384	3010

n	a_n	b_n
21	2337	3090
22	2290	3170
23	2244	3250
24	2199	3330
25	2155	3410
26	2112	3490
27	2070	3570
28	2028	3650
29	1988	3730
30	1948	3810

La production quotidienne du *puits A* devient inférieure à celle du *puits B* le seizième jour.

d) Durant les trente jours que dure le mois, le *puits A* produit au total :

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{30}}_{\substack{\text{Somme de } \boxed{30} \text{ termes consécutifs} \\ \text{de la suite géométrie } (a_n) \text{ de raison 0,98.}}} = a_1 \times \frac{1-0,98^{\boxed{30}}}{1-0,98} = 3500 \times \frac{1-0,98^{30}}{0,02} = 79540 \text{ litres}$$

Quant au puits B, il produit au total :

$$\underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{30}}_{\substack{\text{Somme de } \boxed{30} \text{ termes consécutifs} \\ \text{de la suite arithmétique } (b_n).}} = \boxed{30} \times \frac{b_1 + b_{30}}{2} = 30 \times \frac{1490 + 3810}{2} = 79500 \text{ litres}$$

Conclusion : sur le premier mois d'exploitation, c'est le *puits A* qui produit au total le plus.

Ces suites qui n'étaient pas prévues

Le contexte

Un exercice rapide sur les limites de suites et surtout les opérations sur les limites...déjà vues avec les fonctions. Une sorte de révision.

L'énoncé

Déterminer les limites des suites suivantes.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-2\times(0,5)^n =$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-3\times n^2}{n+1} =$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n+(-1)^n =$

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3)^n+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n =$

Le corrigé

1°) Première partie : ces suites qui n'étaient pas prévues

La limite à l'infini d'une suite géométrique q^n dépend de la valeur de la raison q.

Valeur de q	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
Limite de (q^n)	**Pas de limite** *Les termes pairs tendent vers $+\infty$ et les impairs vers $-\infty$*	**0**	$+\infty$

La suite $\left((-1)^n\right)$ n'a pas de limite

La suite $\left(1^n\right)$ converge vers 1

Ces choses ayant été rappelées, les limites des quatre suites se déterminent sans peine !

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-2\times(0,5)^n = 1-2\times 0^+ = 1-0^+ = \boxed{1}$

Car la raison $0,5$ est comprise entre -1 et 1.

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-3\times n^2}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3\times n^2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -3\times n = \boxed{-\infty}$.

Dans le présent cas, nous n'avons pas à faire à des suites géométriques mais à la "fonction rationnelle" $f(x)=\dfrac{-3.x^2+1}{x+1}$ qui se comporte aux infinis comme le quotient de ses termes dominants $\dfrac{-3.x^2}{x}=-3.x$.

c. Quand n tend vers $+\infty$, la suite 7^n tend vers $+\infty$.

Quant à la suite géométrique $(-1)^n$, elle alterne entre -1 et 1 . Par conséquent :

$$\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n+(-1)^n = (+\infty)+(\pm 1) = \boxed{+\infty}$$

d. Quand n tend vers $+\infty$, les termes de rang pair de la suite $(-3)^n$ s'envolent vers $+\infty$ alors que ceux de rang impair plongent vers $-\infty$.

La suite $(-3)^n$ n'a pas de limite ou plutôt elle en a deux, c'est-à-dire une de trop.

Quant à la suite $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$, elle tend vers 0 car sa raison est comprise entre -1 et 1.

Par conséquent, $(-3)^n+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

En fait, elle en a deux comme la suite $(-3)^n$, c'est-à-dire une de trop.

DOUX, DUR ET DINGUE

Le contexte

Un second exercice rapide sur les limites de suites et surtout les opérations sur les limites. Très utile pour réviser le sujet.

L'énoncé

Déterminer les limites lorsque l'entier naturel n tend vers $+\infty$ des suites suivantes.

$u_n = 2^n + (-0,1)^n$ $\qquad$ $v_n = 1 - \dfrac{2}{(0,3)^n}$

$w_n = 4^n - 6^n$ $\qquad$ $t_n = (-2)^n + (0,1)^n$

$a_n = \dfrac{2^n - 3}{3^n + 2}$ $\qquad$ $b_n = \dfrac{1-(0,2)^n}{(0,4)^n}$

$c_n = 1 + \dfrac{(-0,2)^n}{(0,4)^n}$ $\qquad$ $d_n = 1 + \dfrac{(0,6)^n}{(-3)^n}$

Le corrigé

1°) Première partie : doux, dur et dingue

Avant toute chose, rappelons que la limite d'une suite géométrique q^n dépend de la valeur de sa raison q.

Valeur de q	$-\infty$ ... -1	-1 ... 1	1 ... $+\infty$
Limite de (q^n)	**Pas de limite** *Les termes pairs tendent vers $+\infty$ et les impairs vers $-\infty$*	**0**	$+\infty$

La suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite $\qquad$ La suite (1^n) converge vers 1

Et aussi qu'il existe quatre sortes de forme indéterminée :

$$\infty - \infty \qquad \infty \times 0 \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

➲ La suite (u_n) est la somme du terme 2^n qui s'envole vers $+\infty$ et du terme $(-0,1)^n$ qui tend vers 0 en étant tantôt négatif (termes de rang impair), tantôt positif (termes de rang pair). Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n + (-0,1)^n = (+\infty) + 0 = \underline{+\infty}$$

➲ Quand n tend vers $+\infty$, la suite géométrique $(0,3)^n$ tend vers 0^+, tous ses termes étant positifs. Il vient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{(0,3)^n} = 1 - \frac{2}{0^+} = 1 - (+\infty) = \underline{-\infty}$$

➲ Quand n tend vers $+\infty$, les deux suites géométriques 4^n et 6^n s'envolent vers $+\infty$. Donc la suite (w_n) est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

Pour lever cette dernière, nous allons factoriser w_n par son terme le plus fort à savoir 6^n. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$w_n = 4^n - 6^n = 6^n \times \left[\frac{4^n}{6^n} - 1\right] = 6^n \times \left[\left(\frac{4}{6}\right)^n - 1\right] = 6^n \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right]$$

Comme $\dfrac{2}{3}$ est compris strictement entre 0 et 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0^+$. Et finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} 6^n \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = (+\infty) \times \left[0^+ - 1\right] = (+\infty) \times (-1) = \underline{-\infty}$$

➲ Lorsque n tend vers $+\infty$, les termes de rang pair de la suite $(-2)^n$ s'envolent vers $+\infty$ alors que ceux de rang impair plongent vers $-\infty$.

Quant à la suite $(0,1)^n$, elle tend vers 0^+.

Par conséquent, la somme $t_n = (-2)^n + (0,1)^n$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Ou plutôt ses termes de rang pair s'envolent vers $(+\infty) + 0^+ = +\infty$, alors que ceux de rang impair plongent vers $(-\infty) + 0^+ = -\infty$.

➲ Lorsque n tend vers $+\infty$, les numérateur $2^n - 3$ et dénominateur $3^n + 2$ s'envolent tous deux vers $+\infty$. Donc, la suite $a_n = \dfrac{2^n - 3}{3^n + 2}$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Pour lever cette indétermination, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts qui ensuite s'expliqueront entre eux.

Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$a_n = \frac{2^n - 3}{3^n + 2} = \frac{2^n \times \left[1 - \frac{3}{2^n}\right]}{3^n \times \left[1 + \frac{2}{3^n}\right]} = \frac{2^n}{3^n} \times \frac{1 - \frac{3}{2^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1 - \frac{3}{2^n}}{1 + \frac{2}{3^n}}$$

Il vient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1 - \frac{3}{2^n}}{1 + \frac{2}{3^n}} = 0^+ \times \frac{1 - \frac{3}{+\infty}}{1 + \frac{2}{+\infty}} = 0^+ \times \frac{1 - 0^+}{1 + 0^+} = 0^+ \times \frac{1}{1} = \underline{0^+}$$

➲ En $+\infty$, les deux suites géométriques $(0,2)^n$ et $(0,4)^n$ tendent vers 0^+ car leurs raisons sont comprises strictement entre 0 et 1. Il vient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(0,2)^n}{(0,4)^n} = \frac{1-0^+}{0^+} = \frac{1}{0^+} = \underline{+\infty}$$

Une autre méthode consiste à fractionner la fraction :

$$b_n = \frac{1-(0,2)^n}{(0,4)^n} = \frac{1}{(0,4)^n} - \frac{(0,2)^n}{(0,4)^n}$$
$$= \frac{1}{(0,4)^n} - \left(\frac{0,2}{0,4}\right)^n = \frac{1}{(0,4)^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{0^+} - 0^+ = (+\infty) - 0^+ = \underline{+\infty}$$

➲ Quand n tend vers $+\infty$, les deux suites géométriques $(-0,2)^n$ et $(0,4)^n$ tendent toutes deux vers 0. Donc leur quotient $\frac{(-0,2)^n}{(0,4)^n}$ est une (petite) forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

Petite car l'indétermination se lève très rapidement !
Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$c_n = 1 + \frac{(-0,2)^n}{(0,4)^n} = 1 + \left(\frac{-0,2}{0,4}\right)^n = 1 + (-0,5)^n$$

Il vient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + (-0,5)^n = 1 + 0 = \underline{1}$$

➲ Cette dernière limite peut être déterminée comme la précédente en simplifiant la fraction :

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{(0,6)^n}{(-3)^n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \left(\frac{0,6}{-3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 1 + (-0,2)^n = 1 + 0 = \underline{1}$$

Ou alors tout simplement :

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{(0,6)^n}{(-3)^n} = 1 + \frac{0^+}{\pm\infty} = \underbrace{1 + 0^+ \times \frac{1}{\pm\infty} = 1 + 0^+ \times 0}_{\text{Cheminement possible}} = 1 + 0 = \underline{1}$$

CA VA COGNER

Le contexte

Un exercice original, peut-être hors programme et inspiré de ce qui se fait en math-info en première L. On décide de calculer les premiers termes de trois suites à l'aide d'un tableur (Microsoft Excel) dans une feuille de calcul. Quelles sont alors les formules à saisir ?

L'énoncé

Sur la capture d'écran ci-dessous, on a calculé les premiers termes de trois suites à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G
1						Nombre :	4
2							
3	Rang n		U(n)		V(n)		W(n)
4	0		0		0		2
5	1		0,5000		0,5000		6
6	2		0,6667		0,6667		10
7	3		0,7500		0,7500		14
8	4		0,8000		0,8000		18
9	5		0,8333		0,8333		22
10	6		0,8571		0,8571		26
11	7		0,8750		0,8750		30
12	8		0,8889		0,8889		34
13	9		0,9000		0,9000		38
14	10		0,9091		0,9091		42

a) On a commencé par remplir la colonne A baptisée **Rang n**.
Pour ce faire, on a saisi la valeur 0 dans la cellule A4.
Quelle formule a-t-on saisi dans la cellule A5 pour calculer les valeurs suivantes de n ?
Cette formule a ensuite été copiée, puis collée de la cellule A6 à la cellule A14.

A5 =

b) Puis on a rempli la colonne C consacrée aux premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

Quelle formule a-t-on saisi dans la cellule C4 pour calculer u_0 ? Cette formule a ensuite été copiée, puis collée de la cellule C5 à la cellule C14 pour calculer les termes suivants.

C4 =

c) Ensuite, on a rempli la colonne E consacrée aux premiers termes de la suite (v_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2 - v_n} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

Pour ce faire, on a commencé par saisir la valeur initiale $v_0 = 0$ dans la cellule E4.
Quelle formule a-t-on saisi dans la cellule E5 pour calculer v_1 ? Cette formule a ensuite été copiée, puis collée de la cellule E6 à la cellule E14 pour calculer les termes suivants.

E5 =

d) Enfin, on a rempli la colonne G consacrée aux premiers termes de la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = n \times r + 2$$

où r est le nombre défini dans la cellule G1.
Quelle formule a-t-on saisi dans la cellule G4 pour calculer w_0 ? Cette formule a ensuite été copiée, puis collée de la cellule G5 à la cellule G14 pour calculer les termes suivants.

G4 =

Le corrigé

Dans une formule de tableur, un positionnement "simple" comme A5 ou C6 est toujours relatif : si un copier-coller de la formule est effectué, celle-ci sera actualisée en fonction du déplacement effectué.
Pour fixer une ligne ou une colonne et rendre la formule insensible au copier-coller, il suffit de la (ou les) faire précéder d'un dollar comme A$5 ou $C6.

a) La valeur de la cellule A5 comme celles qui la suivent se calcule en rajoutant 1 à la cellule précédente A4. La formule à saisir dans la cellule A5 est :

$$A5 = \underline{A4 + 1}$$

Pour note, la formule $A5 = \$A4 + 1$ est aussi correcte car on ne sort pas de la colonne A.
Par contre, il ne peut y avoir de $ devant la ligne du fait du copier-coller sur le reste de la colonne. Le numéro de ligne doit être actualisé. La formule $A5 = A\$4 + 1$ est fausse.

b) Le terme u_n étant défini à partir de l'entier n, la colonne C est définie par rapport à la colonne A. La formule à saisir dans la cellule C5 est :

$$C5 = \underline{A5/(A5+1)} \qquad \underline{\text{ou}} \qquad C5 = \underline{A5/A6}$$

Là encore, on peut mettre un dollar devant la colonne mais pas devant la ligne.

La formule $C5 = \$A5/\$A6$ est juste alors que la formule $C5 = A\$5/A6$ est fausse.

c) Le terme v_{n+1} se calculant en fonction du terme précédent v_n, chaque cellule de la colonne E dépend de celle qui la précède. Par conséquent, la formule à saisir est :

$$E5 = \boxed{1/(1-E4)}$$

d) Le nombre r se trouve dans la cellule fixée G1. Par conséquent, il va falloir user de dollar dans notre formule au moins sur la ligne de la cellule G1. La formule à saisir dans la cellule G4 est :

$$\overbrace{G4 = \boxed{A4\times G\$1+2}}^{\text{Comme on ne change pas de colonne, on peut se contenter de fixer la ligne 1.}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \overbrace{G4 = \boxed{A4\times \$G\$1+2}}^{\text{Ou alors on fixe tout !}}$$

On peut aussi rajouter un dollar devant la colonne A mais pas devant la ligne 4.