La raison de tout cela

La saison 2003/2004 a été la première depuis que j'enseigne, durant laquelle j'eus en charge une classe de première scientifique. De ces neufs mois passés, j'ai voulu conserver une trace de ce qui avait été fait. C'est l'objet de ce journal de marche.
Journal de marche car il m'a toujours semblé que les mathématiques étaient une matière en mouvement, une aventure cérébrale, une offensive théorique où la prise de lieux ouvre la voie vers d'autres.
Depuis la fin des années quatre-vingt-dix, les programmes de mathématiques de la sixième à la seconde ont été l'objet d'une édulcoration et d'une aseptisation au nom de la réussite pour tous. C'est surtout un échec global...
Sous le prétexte de nécessaires évolutions et adaptations aux temps présents, on a supprimé des programmes tout ce qui était trop mathématique, on a limité la pratique du calcul numérique ou littéral, on a laminé le calcul vectoriel. Désormais, le mot d'ordre semble être : "beaucoup de peu de choses mais trop loin".
La conséquence de cette vision égalitaire des maths a été que des points qui étaient abordés en seconde, ne le sont plus qu'en première scientifique alors que leur maîtrise nécessiterait deux années. Le programme de cette dernière classe est devenu obèse alors même que son horaire a été amputé d'une heure par semaine c'est-à-dire de 16 %.
Heureusement j'ai toujours eu des problèmes de vision que je n'ai jamais voulu corriger. Notamment lors de la lecture des programmes officiels. Et puis il y a ce que vous dites et ce que votre interlocuteur comprend ou entend comprendre...
Le présent journal de marche regroupe les huit devoirs surveillés de deux heures et leurs corrigés que j'ai donnés. Aux élèves de première scientifique, le présent document apportera des exercices et des problèmes pour s'entraîner et aller plus loin. Aux autres, il montrera ce que une certaine vision des mathématiques, celle d'une matière ambitieuse et resserrée autour d'axes principaux.
La majorité des exercices et problèmes est issue de mon très volcanique cerveau. Ils n'ont rien d'officiel et n'engagent que moi.

Au sommaire :

La taverne de l'Irlandais
vous présente dans sa collection
Inquiétantes Confessions

Journal de marche d'une première scientifique saison 2003-2004

Une confession vraiment inquiétante de Jérôme ONILLON,
professeur de plus en plus désagrégé de mathématiques
Pour toute remarque, suggestion : tanopah.jo@free.fr

Edition du vendredi 3 juin 2005
Le meilleur est un espoir, le pire une certitude

Devoir Surveillé No.1

Le contexte

Ce premier devoir abordait le second degré, la résolution d'équations et d'inéquations au moyen d'un tableau de signe, la factorisation des polynômes ainsi que la composition. Il prolongeait en première des notions qui avaient pu être entamées en seconde. Je tiens à préciser que j'avais fait un gros travail sur les polynômes. En particulier, avait été introduite la division euclidienne pour ceux-ci en s'appuyant sur celle qu'ils connaissaient pour les entiers. Une technique souple et efficace oubliée par les programmes officiels. Déjà, j'allais bien au-delà de ces derniers.

L'énoncé

Première partie : résolutions d'équations et d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$4.x^2-7.x-3=2.x-5 \qquad (2.x-5)^2>(2.x-5).(x+3)$$

$$5-\frac{x+4}{3}\leq\frac{4.(2x.-1)}{5}+\frac{5.x+1}{6} \qquad \frac{3.x-2}{x+2}+2=x+5$$

$$\frac{2.x+5}{x+2}\leq\frac{3.x-1}{x-3}$$

Seconde partie : l'étude d'une certaine fonction f

La fonction f est définie par :

$$f(x)=\frac{2.x^2+7.x-15}{x-1}$$

a) Déterminer les réels x qui ont une image par la fonction f.
En déduire, l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Calculer les images de 3 et -3 par la fonction f.
Peut-on dire que la fonction f est paire ou impaire ? On justifiera sa réponse.

c) Dresser le tableau de signe de f(x).
En déduire les antécédents de 0 par la fonction f.
d) Démontrer que pour tout réel x de son ensemble de définition :

$$f(x)=2.x+9+\frac{-6}{x-1}$$

e) Dans cette question, x et y sont deux réels de l'intervalle $]1;+\infty[$ tels que $x<y$.
Pour les deux questions à venir, on pourra s'appuyer sur des enchaînements d'inégalités dont chaque étape sera minutieusement justifiée.

- Comparer les réels $2.x+9$ et $2.y+9$.
- Comparer les réels $\frac{-6}{x-1}$ et $\frac{-6}{y-1}$.

En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

f) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty;1[$.
Conclure en dressant le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

La fonction g est définie pour tout réel x par :

$$g(x)=4-5.x$$

g) Déterminer l'image de 1 par la composée $f\circ g$.
Déterminer le ou les antécédents de 7 par la fonction f.
En déduire le ou les antécédents de 7 par la fonction $f\circ g$.

Dernière partie : racine, équation bicarrée et conséquences

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=3.x^3+18.x^2+43.x+38$$

a) Calculer $f(1)$ et $f(-2)$.
En déduire une factorisation de $f(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation bicarrée $x^4-11.x^2-80=0$

c) En utilisant ce qui précède, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{3.x^3+18.x^2+43.x+38}{x^4-11.x^2-80}\leq 0$

Le corrigé

Première partie : résolutions d'équations et d'inéquations

➲ La première équation est une simple équation du second degré qui se résout en recourant au discriminant.

$$4.x^2-7.x-3=2.x-5 \Leftrightarrow 4.x^2-7.x-3-2.x+5=0 \Leftrightarrow 4.x^2-9.x+2=0$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation :

$$\Delta_{4.x^2-9.x+2}=(-9)^2-4\times4\times2=81-32=49=7^2$$

Son discriminant étant positif, l'équation admet donc deux solutions distinctes qui sont :

$$x=\frac{-(-9)+7}{2\times4}=\frac{16}{8}=2 \quad \text{ou} \quad x=\frac{-(-9)-7}{2\times4}=\frac{1}{4}$$

Conclusion : l'équation $4.x^2-7.x-3=2.x-5$ admet donc deux solutions $\frac{1}{4}$ et 2.

➲ Il y a deux manières de résoudre la seconde équation. La première consiste à tout développer, à tout ramener dans un seul membre et ensuite d'étudier le signe d'une forme du second degré au moyen du discriminant. La seconde consiste à remarquer qu'il y a une factorisation possible. Celle-ci conduit à un produit de deux facteurs affines dont on connaît les signes. C'est comme en seconde ! Nous optons pour cette seconde voie.

$$(2.x-5)^2>(2.x-5).(x+3) \Leftrightarrow \underbrace{(2.x-5)}_{\textit{Facteur commun}}\times(2.x-5)-\underbrace{(2.x-5)}_{\textit{Facteur commun}}.(x+3)>0$$

$$\Leftrightarrow (2.x-5).\left[(2.x-5)-(x+3)\right]>0$$

$$\Leftrightarrow (2.x-5).(x-8)>0$$

Dressons le tableau de signe du produit de facteurs affines qu'est $(2.x-5).(x-8)$.

x	$-\infty$		2,5		8		$+\infty$
$2.x-5$		-	0	+		+	
$x-8$		-		-	0	+	
$(2.x-5).(x-8)$		+	0	-	0	+	

D'après son tableau de signe, le produit $(2.x-5).(x-8)$ est positif avant 2,5 et après 8.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty;2,5[\cup]8;+\infty[$.

➲ Cette troisième inéquation est une de celles que l'on peut traiter dés la quatrième à condition d'éliminer ce qui embête dans une première frappe.
Le problème ici vient des divers dénominateurs. Car il est toujours plus difficile d'additionner des fractions que des entiers. De manière à supprimer les fractions, nous allons multiplier les deux membres par 30. Passons à l'action !

$$5-\frac{x+4}{3}\leq\frac{4.(2x.-1)}{5}+\frac{5.x+1}{6}$$

$$30\times\left[5-\frac{1}{3}\times(x+4)\right]\leq\left[\frac{1}{5}\times4.(2x.-1)+\frac{1}{6}\times(5.x+1)\right]\times30$$

$$30\times5-30\times\frac{1}{3}\times(x+4)\leq30\times\frac{1}{5}\times4.(2x.-1)+30\times\frac{1}{6}\times(5.x+1)$$

$$150-10\times(x+4)\leq6\times4.(2x.-1)+5\times(5.x+1)$$

$$150-10.x-40\leq48.x-24+25.x+5$$

$$-83.x\leq-129$$

Multiplier une inégalité par un négatif en change l'ordre

$$x\geq\frac{-129}{-83}=\frac{129}{83}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $\left[\frac{129}{83};+\infty\right[$.

➲ Recourir au tableau de signe pour résoudre l'équation $\frac{3.x-2}{x+2}+2=x+5$ est une option efficace mais tout de même assez lourde. Nous allons essayer d'être plus subtils. Pour commencer, modifions l'écriture de notre équation de façon à avoir une fraction nulle.

$$\frac{3.x-2}{x+2}+2=x+5 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3.x-2}{x+2}-x-3}_{\textit{Tout dans un seul membre}}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{3.x-2}{x+2}-\frac{x.(x+2)}{x+2}-\frac{3.(x+2)}{(x+2)}}_{\textit{Tout au même dénominateur}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3.x-2)-x.(x+2)-3.(x+2)}{x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3.x-2-x^2-2.x-3.x-6}{x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-2.x-8}{x+2}=0$$

Or une fraction est nulle si et seulement si son numérateur l'est et si son dénominateur ne l'est pas. Car alors elle n'existe pas ! Ainsi :

$$\frac{-x^2-2.x-8}{x+2}=0 \Leftrightarrow \underbrace{-x^2-2.x-8=0}_{\textit{numérateur nul}} \ \textit{\textbf{et}}\ \underbrace{x+2\neq0}_{\textit{dénominateur non nul}}$$

Pour résoudre l'équation du second degré $-x^2-2.x-8=0$, calculons son discriminant

$$\Delta_{-x^2-2.x-8}=(-2)^2-4\times(-1)\times(-8)=4-32=-28$$

Son discriminant étant négatif, l'équation $-x^2-2.x-8=0$ n'a pas de solution.

Conclusion : l'équation $\dfrac{3.x-2}{x+2}+2=x+5$ n'a pas de solution non plus !

➲ Cette dernière inéquation se résout comme la troisième : il faut tout ramener dans un seul membre et essayer au maximum de factoriser la fraction résultante de façon à pouvoir se prononcer sur son signe. Tout un programme !

$$\frac{2.x+5}{x+2}\leq\frac{3.x-1}{x-3}\Leftrightarrow\frac{(2.x+5).(x-3)}{(x+2).(x-3)}-\frac{(3.x-1).(x+2)}{(x-3).(x+2)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left[2.x^2-x-15\right]-\left[3.x^2+5.x-2\right]}{(x-3).(x+2)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{-x^2-6.x-13}{(x-3).(x+2)}\leq 0$$

Nous connaissons les signes des facteurs affines $x-3$ et $x+2$. Seul nous manque celui du numérateur du second degré qu'est $-x^2-6.x-13$. Pour le connaître, calculons son discriminant.

$$\Delta_{-x^2-6.x-13}=(-6)^2-4\times(-1)\times(-13)=36-52=-16$$

Son discriminant étant négatif, la forme du second degré $-x^2-6.x-13$ n'a pas de racine et est toujours du signe de son coefficient dominant -1, c'est-à-dire toujours négative.
Connaissant les signes de chacun de ses facteurs, nous pouvons passer à celui de la fraction.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-x^2-6.x-13$		-	|	-	|	-	
$x+2$		-	0	+	|	+	
$x-3$		-	|	-	0	+	
$\dfrac{-x^2-6.x-13}{(x-3).(x+2)}$		-	‖	+	‖	-	

La fraction est négative ou nulle avant -2 et après 3. Par suite : $S=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]3;+\infty\right[$.

Seconde partie : l'étude d'une certaine fonction f

a) La fonction $f(x)=\dfrac{2.x^2+7.x-15}{x-1}$ étant un quotient de deux polynômes, seul un dénominateur nul peut faire qu'elle n'existe pas. Ainsi :

La fraction f(x) existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $x-1$ est non nul $\Leftrightarrow$ $x\neq 1$

Donc tous les réels à l'exception de la valeur interdite 1 ont une image par f.
Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}\setminus\{1\}=\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$..

b) Il s'agit là de simples calculs d'images.

$$f(3)=\frac{2\times(3)^2+7\times 3-15}{3-1}=\frac{24}{2}=12\qquad f(-3)=\frac{2\times(-3)^2+7\times(-3)-15}{(-3)-1}=\frac{-18}{-4}=4,5$$

Une fonction est dite paire si par celle-ci, chaque réel x et son opposé $-x$ ont des images égales. Dans le cas présent, les images par la fonction f de 3 et de son opposé -3 ne sont pas égales. Donc la fonction f n'est pas paire.
Une fonction est dite impaire si par celle-ci chaque réel x et son opposé $-x$ ont des images opposées. Comme les images par la fonction f de 3 et de son opposé -3 ne sont pas opposées alors la fonction f n'est pas impaire.

c) La fonction f est le quotient d'une forme du second degré et d'une forme affine. Si le signe de cette dernière ne pose pas de problème, pour déterminer celui du trinôme $2.x^2+7.x-15$, nous devons calculer son discriminant.

$$\Delta_{2.x^2+7.x-15}=7^2-4\times 2\times(-15)=49+120=169=13^2$$

Son discriminant étant strictement positif, le trinôme $2.x^2+7.x-15$ a deux racines distinctes qui sont :

$$x_1=\frac{-7-13}{2\times 2}=-5\qquad\text{et}\qquad x_2=\frac{-7+13}{2\times 2}=1,5$$

A l'extérieur de ses deux racines, le trinôme est du signe de son coefficient dominant 2, il est donc positif. Entre ses deux racines, il est négatif.
Nous pouvons à présent dresser le tableau de signe de f(x).

x	$-\infty$		-5		1		$1,5$		$+\infty$
$2.x^2+7.x-15$		+	0	-	|	-	0	+	
$x-1$		-	|	-	0	+	|	+	
f(x)		-	0	+	‖	-	0	+	

➲ Les antécédents de 0 par la fonction f sont les réels x dont l'image par celle-ci est 0. Ce sont les solutions de l'équation $f(x)=0$ ou les réels x pour lesquels f s'annule.

Le tableau de signe de f(x) permet de répondre que f s'annule en -5 et $1{,}5$.

Conclusion : 0 a deux antécédents par f que sont -5 et $1{,}5$

> ***Note :*** *certains terminent souvent ce genre de question en indiquant : " les deux solutions de l'équation sont -5 et 1,5". Ainsi, ils omettent de répondre à la question posée. Celle-ci est très claire : quels sont les antécédents de 0 par f ?*
> *Répondre à la question, c'est indiquer que 0 en a deux et qu'il s'agit de -5 et 1,5. La résolution de l'équation f(x) = 0 n'est que le moyen d'arriver à cette conclusion.*

d) Ce genre de question a pu être traitée en seconde. Pour y répondre, on peut recourir à la division euclidienne. On peut aussi partir du second membre et tout mettre au même dénominateur. Pour tout $x \neq 1$, nous avons :

$$2.x+9+\frac{-6}{x-1}=\frac{(2.x+9).(x-1)-6}{x-1}=\frac{2.x^2-2.x+9.x-9-6}{x-1}=\frac{2.x^2+7.x-15}{x-1}=f(x)$$

> ***Note :*** *cette nouvelle écriture de la fonction rationnelle f(x) est appelée forme décomposée.*

e) Déterminons la variation de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Sous sa forme décomposée, la fonction f est la somme d'une fonction affine et d'une inverse.

- La fonction $g(x)=2.x+9$ est affine et croissante sur $\mathbb{R}$ car son coefficient directeur est positif. Donc sur $\mathbb{R}$, si $x<y$ alors $\underbrace{\overbrace{2.x+9}^{g(x)}<\overbrace{2.y+9}^{g(y)}}_{\textit{La fonction g conserve l'ordre}}$

- Intéressons-nous au sens de variation de la fonction $h(x)=\frac{-6}{x-1}$ sur $]1;+\infty[$.

  Si $1<x<y$ alors $0<x-1<y-1$

  alors $\underbrace{\frac{1}{x-1}>\frac{1}{y-1}}_{\textit{Car la fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[}$

  alors $\underbrace{\frac{-6}{x-1}<\frac{-6}{y-1}}_{\textit{On multiplie une inégalité par un nombre négatif}}$

  Conservant l'ordre sur l'intervalle $]1;+\infty[$, la fonction h y est donc croissante.

Ainsi sur $]1;+\infty[$, si $x<y$ alors $\begin{cases} g(x)<g(y) \\ h(x)<h(y) \end{cases}$ donc $\underbrace{g(x)+h(x)}_{f(x)}<\underbrace{g(y)+h(y)}_{f(y)}$

Conclusion : conservant l'ordre sur l'intervalle $]1;+\infty[$, la fonction f y est donc croissante.

> ***Note :*** *il m'a toujours semblé qu'au collège comme au lycée une bonne définition mathématique ne devait pas reposer sur un bel énoncé mais sur des idées simples et concrètes. C'est pour cela que depuis la seconde, je leur assène que fondamentalement une fonction croissante est une fonction qui conserve l'ordre alors qu'une décroissante le change. D'où l'importance du travail sur le signe et les inégalités dans ma conception du monde.*

f) Cette question est la répétition de la précédente.

En effet, la fonction $g(x)=2.x+9$ est toujours croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty;1[$.

De plus, sur ce dernier intervalle :

Si $x<y<1$ alors $x-1<y-1<0$

alors $\underbrace{\frac{1}{x-1}>\frac{1}{y-1}}_{\textit{Car la fonction inverse est décroissante sur }]-\infty;0[}$ donc $\underbrace{\frac{-6}{x-1}}_{h(x)}<\underbrace{\frac{-6}{y-1}}_{h(y)}$

Conservant l'ordre, h est donc toujours croissante sur $]-\infty;1[$.

Conclusion : comme les fonctions g et h sont croissantes sur $]-\infty;1[$, alors leur somme f l'est aussi.

➲ Le tableau de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↗	‖	↗	

g) Globalement, il y a deux façons de résoudre cette question. La première consiste à déterminer l'expression effective de $f\circ g$.

$$f\circ g(x)=f[4-5.x]=\frac{2.(4-5.x)^2+7.(4-5.x)-15}{(4-5.x)-1}=\frac{50.x^2-115.x+45}{-5.x+3}$$

Tout après est affaire de calculs ! Cela n'est pas plus difficile que ce qui a déjà été fait ! Une autre méthode consiste à monter ou démonter la composition. L'avantage de cette voie est qu'elle évite les calculs assez compliqués de la première voie. Voyons cela en détails !

➲ L'image d'un réel x par la composée $f\circ g$ est donnée par $f\circ g(x)=f[g(x)]$.

Ainsi pour l'image de 1, avons-nous : $f\circ g(1)=f[g(1)]=f[-1]=10$.

➲ Pour déterminer les antécédents de f par 7, nous devons résoudre dans $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ l'équation $f(x)=7$.

$$\frac{2.x^2+7.x-15}{x-1}=7 \Leftrightarrow \frac{2.x^2+7.x-15}{x-1}-\frac{7.(x-1)}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{2.x^2-8}{x-1}=0$$

Résolvant l'équation dans $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, cette équation n'a pas de valeur interdite. Dans de telles conditions, une fraction est nulle si et seulement si son numérateur l'est.

$$\underbrace{\frac{2.x^2-8}{x-1}=0}_{\textit{Fraction nulle}} \Leftrightarrow \underbrace{2.x^2-8=0}_{\textit{Numérateur nul}} \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \;\; \textbf{\textit{ou}} \;\; x=2$$

Conclusion : 7 a deux antécédents par la fonction f qui sont -2 et 2.

➲ Pour déterminer les antécédents de 7 par la fonction $f\circ g$, nous devons résoudre l'équation $f\circ g(x)=7$. Pour cela, nous allons utiliser le résultat précédent.

$$f\left[g(x)\right]=7 \Leftrightarrow \underbrace{g(x)=-2 \;\; \textbf{\textit{ou}} \;\; g(x)=2}_{\textit{Les deux solutions de l'équation f(x)=7}} \Leftrightarrow 4-5.x=-2 \;\; \textbf{\textit{ou}} \;\; 4-5.x=2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6}{5} \;\; \textbf{\textit{ou}} \;\; x=\frac{2}{5}$$

Conclusion : 7 a aussi deux antécédents par $f\circ g$ que sont 0,4 et 1,2.

Note : *dans la présente question, nous avons fait abstraction de l'ensemble de définition de la fonction $f\circ g$. Contrairement à ce que notre silence pourrait laisser supposer, ce n'est pas $\mathbb{R}$. Car pour que fog(x) existe, il faut et il suffit que g(x) ne soit pas une valeur interdite pour f, c'est-à-dire que g(x) doit être différent de 1.*
On établit ainsi que l'ensemble de définition de $f\circ g$ est $\mathbb{R}\setminus\{0{,}6\}$.

Dernière partie : racine, équation bicarrée et conséquences

a) Calculons les deux images demandées.

- $f(1)=3\times(1)^3+18\times(1)^2+43\times 1+38=102$
- $f(-2)=3\times(-2)^3+18\times(-2)^2+43\times(-2)+38=-24+72-86+38=0$

➲ -2 annulant le polynôme f(x), il est l'une de ses racines. Donc f(x) est factorisable par $x-(-2)=x+2$. Plus précisément, f(x) peut s'écrire comme étant le produit de $x+2$ et d'un polynôme du second degré. Tout le problème est de trouver ce dernier. Pour le déterminer, nous allons poser la division euclidienne de f(x) par $x+2$. Si tout se passe bien, celle-ci doit tomber juste, le reste final devra être égal à 0.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 3.x^3+18.x^2+43.x+38 & x+2 \\
\ominus & 3.x^3+6.x^2 & 3.x^2+12.x+19 \\
\hline
 & 12.x^2+43.x+38 & \\
\ominus & 12.x^2+24.x & \\
\hline
 & 19.x+38 & \\
\ominus & 19.x+38 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Ainsi avons-nous que :

$$\underbrace{f(x)=3.x^3+18.x^2+43.x+38}_{\textbf{\textit{dividende}}}=\underbrace{(x+2)}_{\textbf{\textit{diviseur}}}.\underbrace{\left(3.x^2+12.x+19\right)}_{\textbf{\textit{quotient}}}+\underbrace{0}_{\textbf{\textit{reste}}}$$

Peut-on aller plus loin dans la factorisation de f(x) ? Si tel est le cas, cela veut dire que la forme du second degré $3.x^2+12.x+19$ est "cassable" ou factorisable. Pour le savoir, calculons son discriminant.

$$\Delta_{3.x^2+12.x+19}=12^2-4\times 3\times 19=144-228=-84$$

Son discriminant étant négatif, la forme du second degré $3.x^2+12.x+19$ ne peut être cassée. Elle est irréductible.

Conclusion : une forme factorisée ultime de f(x) est $(x+2).\left(3.x^2+12.x+19\right)$.

b) L'équation $x^4-11.x^2-80=0$ est ce que l'on appelle une équation bicarrée. Pour la résoudre, nous devons au préalable factoriser la forme du second degré associée qu'est $X^2-11.X-80$. Commençons par calculer le discriminant de cette dernière.

$$\Delta_{X^2-11.X-80}=(-11)^2-4\times 1\times(-80)=441=21^2$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $X^2-11.X-80$ admet deux racines :

$$X_1=\frac{-(-11)-21}{2}=-5 \quad \textbf{\textit{et}} \quad X_2=\frac{-(-11)+21}{2}=16$$

On en déduit la factorisation du trinôme : $X^2-11.X-80=(X+5).(X-16)$

Revenons à l'équation initiale et entamons sa résolution effective.

$$x^4-11.x^2-80=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(x^2\right)}_{X}{}^2-11.\underbrace{x^2}_{X}-80=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+5\right).\left(x^2-16\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+5\right).(x-4).(x+4)=0$$

Or un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est. Par suite :

$$x^4-11.x^2-80=0 \Leftrightarrow x^2+5=0 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad x-4=0 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad x+4=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2=-5}_{\substack{\text{Un carré n'est jamais négatif} \\ \text{Pas de solution !}}} \quad \textbf{\textit{ou}} \quad x=4 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad x=-4$$

Conclusion : l'équation $x^4-11.x^2-80=0$ a deux solutions que sont -4 et 4.

c) Pour résoudre l'inéquation $\dfrac{3.x^3+18.x^2+43.x+38}{x^4-11.x^2-80}\leq 0$, nous devons casser ou factoriser au maximum ses numérateur et dénominateur. Par chance, cette tâche a déjà été faite à l'occasion des deux précédentes questions. Utilisant les résultats de celles-ci, l'inéquation devient :

$$\frac{(x+2).\left(3.x^2+12.x+19\right)}{\left(x^2+5\right).(x-4).(x+4)}\leq 0$$

Les facteurs affines que sont $x+2$, $x-4$ et $x+4$ ne posent aucun problème du point de vue de leur signe.
Depuis la question 3.a, nous savons que le discriminant de la forme du second degré $3.x^2+12.x+19$ est négatif. Celle-ci est donc toujours du signe de son coefficient dominant 3, elle est toujours positive.

Enfin, il est clair que x^2+5 est toujours positif. C'est la somme d'un carré et d'une quantité strictement positive. Les bénéfices s'accumulent !
Nous avons tous les éléments pour dresser le tableau de signe de notre fraction :

x	$-\infty$		-4		-2		4		$+\infty$
$x+2$		-	|	-	0	+	|	+	
$3.x^2+12.x+19$		+	|	+	|	+	|	+	
x^2+5		+	|	+	|	+	|	+	
$x-4$		-	|	-	|	-	0	+	
$x+4$		-	0	+	|	+	|	+	
La fraction		-	||	+	0	-	||	+	

$$S=\left]-\infty;-4\right[\cup\left[-2;4\right[$$

Devoir Surveillé No.2

Le contexte

La seule nouveauté de ce second devoir par rapport au premier était l'introduction du barycentre et du calcul vectoriel. C'est à cette occasion que je pus constater que ce dernier domaine n'était pas maîtrisé par les élèves. C'est là une conséquence néfaste de ce fabuleux programme de seconde où le calcul vectoriel est à peine effleuré...
La première partie reprenait des "points durs" vus avec le premier devoir et dans un devoir à la maison. Là encore, la division euclidienne d'un polynôme par un autre fut décisive pour ceux qui la connaissaient. Toutefois, force m'est de reconnaître que j'avais trop chargé la barque ! C'est promis, je ne redonnerais plus jamais des exos de ce type.

L'énoncé

Première partie : cette fonction rationnelle et sa copine

Les fonctions f et h sont définies par :

$$f(x)=\frac{2.x^3+4.x^2-46.x-120}{x+5} \qquad h(x)=x^2+2.x-3$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
Calculer les images par h de -3 et $\sqrt{2}-1$.
Déterminer les antécédents de -5 par la fonction h.
Dresser le tableau de variation de la fonction h.

b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

c) Calculer les images de 5 et -2 par la fonction f.
Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\geq -24$.

Une petite indication pour se simplifier la vie : $\sqrt{192}=8.\sqrt{3}$

e) Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que pour tout $x\in D_f$, on ait :

$$f(x)=a.x^2+b.x+c+\frac{d}{x+5}$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\leq -21-\frac{40}{x+5}$.

f) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction $f\circ h$.

Seconde partie : ces centres qui barrissent

ABCD est un parallélogramme de centre O défini par :

AB = 5cm AC = 6cm BD = 7cm

On appelle I le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(C;-1)$.

J est le barycentre des points pondérés $(B;5)$ et $(D;2)$.

a) Faire une figure correspondant à la situation décrite ci-dessus. On positionnera le parallélogramme au milieu de la feuille.

b) Déterminer trois réels α, β et γ tels que le point D soit le barycentre des trois pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$.

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left\|3.\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|$.

c) Déterminer et représenter cet ensemble $\mathcal{E}$.

$\mathcal{F}$ est l'ensemble des points N du plan vérifiant $\left\|\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|$.

d) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{F}$.

On appelle K le barycentre des quatre points pondérés $(A;-6)$, $(B;5)$, $(C;2)$ et $(D;2)$.

e) Démontrer que les points I, J et K sont alignés.
En déduire la position du point K sur la figure.

Le corrigé

Première partie : cette fonction rationnelle et sa copine

a) Cette première question est une application directe du cours concernant le second degré.

h étant un polynôme et plus particulièrement une forme du second degré, tout réel x a une image par celle-ci. Son ensemble de définition est donc $\mathbb{R}$.

➲ $h(-3)=(-3)^2+2.(-3)-3=9-6-3=0$ donc 3 est une racine de h.

$$h\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+2.\left(\sqrt{2}-1\right)-3=\underbrace{2-2.\sqrt{2}+1}_{\text{Identité remarquable...}}+2.\sqrt{2}-2-3=-2.$$

➲ Pour déterminer les antécédents de -5 par la fonction h, nous devons résoudre l'équation $h(x)=-5$:

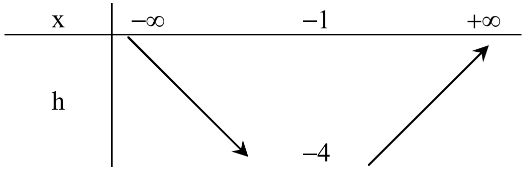
$$h(x)=-5 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+2.x-3=-5 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+2.x+2=0$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation du second degré.

$$\Delta_{x^2+2.x+2}=2^2-4\times1\times2=-4$$

Son discriminant étant négatif, l'équation du second degré n'a pas de solution.
Conclusion : -5 n'a pas d'antécédent par la fonction h.

➲ Le type de tableau de variation d'une fonction du second degré est donné par le signe de son coefficient dominant. Celui de h étant le nombre positif 1, le tableau de variation de cette fonction est :



b) La seule chose qui puisse empêcher une fraction d'exister est un dénominateur nul. Car il est impossible de diviser par 0.

La fraction f(x) existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $x+5$ est non nul $\Leftrightarrow$ $x\neq-5$

Conclusion : l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{-5\}=]-\infty;-5[\cup]-5;+\infty[$.

c) Hormis les calculs, cette recherche d'images ne pose aucun problème.

- $f(5)=\dfrac{2\times(5)^3+4\times(5)^2-46\times(5)-120}{5+5}=\dfrac{250+100-230-120}{10}=\dfrac{0}{10}=0.$
- $f(-2)=\dfrac{2\times(-2)^3+4\times(-2)^2-46\times(-2)-120}{(-2)+5}=\dfrac{-16+16+92-120}{3}=-\dfrac{28}{3}$

➲ Pour déterminer les antécédents de 0 par la fonction f, nous allons résoudre dans l'ensemble de définition de f l'équation $f(x)=0$:

$$f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\frac{2.x^3+4.x^2-46.x-120}{x+5}=0}_{\text{Une fraction est nulle si et seulement si...}} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{2.x^3+4.x^2-46.x-120=0}_{\text{son numérateur l'est !}}$$

Une précision avant d'aller plus loin : la résolution se faisant dans $D_f=]-\infty;-5[\cup]-5;+\infty[$, l'équation précédente n'a aucune valeur interdite.

Revenons à la dernière équation $2.x^3+4.x^2-46.x-120=0$ qui est du troisième degré. Si nous voulons la résoudre, nous devons factoriser son premier membre.
Or, depuis le calcul de l'image de 5 par f, nous savons que 5 annule son numérateur.
Donc 5 est une racine de $2.x^3+4.x^2-46.x-120$ et ce dernier est divisible ou factorisable par $x-5$.

Plus exactement, on peut écrire $2.x^3+4.x^2-46.x-120$ comme étant le produit de $x-5$ et d'un polynôme du second degré. Tout le problème est de déterminer ce dernier.

Pour l'obtenir, nous allons poser la division euclidienne de $2.x^3+4.x^2-46.x-120$ par $x-5$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2.x^3+4.x^2-46.x-120 & x-5 \\ \cline{3-3}
\ominus & 2.x^3-10.x^2 & 2.x^2+14.x+24 \\ \cline{2-2}
 & 14.x^2-46.x-120 & \\
\ominus & 14.x^2-70.x & \\ \cline{2-2}
 & 24.x-120 & \\
\ominus & 24.x-120 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Ainsi avons-nous que :

$$\underbrace{2.x^3+4.x^2-46.x-120}_{\text{dividende}}=\underbrace{(x-5)}_{\text{diviseur}}.\underbrace{\left(2.x^2+14.x+24\right)}_{\text{quotient}}+\underbrace{0}_{\text{reste}}$$

Poursuivons notre action en essayant de "casser" cette forme du second degré qu'est $2.x^2+14.x+24$. Pour cela, calculons son discriminant :

$$\Delta_{2.x^2+14.x+24}=14^2-4\times2\times24=4=2^2$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $2.x^2+14.x+24$ a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-14-2}{2\times2}=-4 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-14+2}{2\times2}=-3$$

On en déduit la forme factorisée du trinôme :

$$2.x^2+14.x+24=2.(x+3).(x+4)$$

Et par suite celle de notre forme du troisième degré :

$$2.x^3+4.x^2-46.x-120=2.(x-5).(x+3).(x+4).$$

Quant à l'équation $2.x^3+4.x^2-46.x-120=0$, elle devient :

$$2.(x-5).(x+3).(x+4)=0 \iff x-5=0 \ \textbf{ou}\ x+3=0 \ \textbf{ou}\ x+4=0$$
$$x=5 \qquad x=-3 \qquad x=-4$$

Conclusion : 0 a trois antécédents par la fonction f qui sont : -4 ; -3 et 5.

d) Afin de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\geq -24$, nous allons tout ramener dans un seul membre, mettre tout au même dénominateur puis factoriser la fraction résultante de manière à pouvoir nous prononcer sur son signe.

$$f(x)\geq -24 \iff \frac{2.x^3+4.x^2-46.x-120}{x+5}+\frac{24.(x+5)}{x+5}\geq 0$$
$$\iff \frac{2.x^3+4.x^2-22.x}{x+5}\geq 0$$
$$\iff \frac{x.\left[2.x^2+4.x-22\right]}{x+5}\geq 0$$

Nous connaissons les signes des facteurs affines x et $x+5$.

Pour déterminer celui de la forme du second degré $2.x^2+4.x-22$, calculons son discriminant.

$$\Delta_{2.x^2+4.x-22}=4^2-4\times 2\times(-22)=16+172=192=\left(\sqrt{192}\right)^2$$

Son discriminant étant positif, notre forme du second degré a deux racines :

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{192}}{2\times 2}=\frac{-4+8.\sqrt{3}}{4}=-1+2.\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-4-\sqrt{192}}{2\times 2}=-1-2.\sqrt{3}$$

Son coefficient dominant 2 étant positif, le trinôme $2.x^2+4.x-22$ est positif à l'extérieur de ses deux racines $-1-2.\sqrt{3}$ et $-1+2.\sqrt{3}$, et négatif entre.

Par suite, le tableau de signe de la fraction est $\dfrac{2.x^3+4.x^2-22.x}{x+5}$:

x	$-\infty$		-5		$-1-2.\sqrt{3}$		0		$-1+2.\sqrt{3}$		$+\infty$
x		-	|	-	|	-	0	+	|	+	
$2.x^2+4x-22$		+	|	+	0	-	|	-	0	+	
$x+5$		-	0	+	|	+	|	+	|	+	
La fraction		+	||	-	0	+	0	-	0	+	

La fraction est positive ou nulle avant -5 , entre $-1-2.\sqrt{3}$ et 0, et après $-1+2.\sqrt{3}$.
Par suite, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\geq -24$ est :

$$S=\left]-\infty;-5\right[\cup\left[-1-2.\sqrt{3};0\right]\cup\left[-1+2.\sqrt{3};+\infty\right[$$

e) Pour décomposer la fraction rationnelle f(x), la méthode la plus efficace consiste à diviser son numérateur $2.x^3+4.x^2-46.x-120$ par son dénominateur $x+5$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2.x^3+4.x^2-46.x-120 & x+5 \\
\ominus & 2.x^3+10.x^2 & \hline 2.x^2-6.x-16 \\
\hline
 & -6.x^2-46.x-120 & \\
\ominus & -6.x^2-30.x & \\
\hline
 & -16.x-120 & \\
\ominus & -16.x-80 & \\
\hline
 & -40 &
\end{array}$$

Ainsi pour tout réel $x\neq -5$, nous avons :

$$\underbrace{2.x^3+4.x^2-46.x-120}_{\textit{dividende}}=\underbrace{(x+5)}_{\textit{diviseur}}.\underbrace{\left(2.x^2-6.x-16\right)}_{\textit{quotient}}+\underbrace{(-40)}_{\textit{reste}}$$

Divisant l'égalité par $x+5$, il vient :

$$f(x)=\frac{(x+5).\left(2.x^2-6.x-16\right)}{x+5}-\frac{40}{x+5}=2.x^2-6.x-16-\frac{40}{x+5}$$

D'où les quatre réels a, b, c et d et la forme décomposée de f(x).

➲ Pour résoudre l'inéquation $f(x)\leq -21-\dfrac{40}{x+5}$, nous allons remplacer f(x) par son écriture décomposée. L'inéquation devient alors :

$$f(x)\leq -21-\frac{40}{x+5} \iff 2.x^2-6.x-16-\frac{40}{x+5}\leq -21-\frac{40}{x+5} \iff 2.x^2-6.x+5\leq 0$$

Pour connaître le signe de la forme du second degré $2.x^2-6.x+5$, calculons son discriminant.

$$\Delta_{2.x^2-6.x+5}=(-6)^2-4\times 2\times 5=36-40=-4$$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $2.x^2-6.x+5$ est toujours du signe de son coefficient dominant 2, il est toujours positif. Donc $2.x^2-6.x+5$ n'est jamais négatif ou nul. Donc l'inéquation n'a pas de solution ! Ainsi : $S=\varnothing$

f) Pour déterminer les antécédents de 0 par la fonction $f \circ h$, nous devons résoudre l'équation $f \circ h(x) = 0$.

$$f \circ h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f\left[h(x)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{h(x) = -4 \quad \textbf{ou} \quad h(x) = -3 \quad \textbf{ou} \quad h(x) = 5}_{\text{Depuis la question c, nous savons que 0 a trois antécédents par } f \text{ que sont -4 ; -3 et 5.}}$$

Nous devons résoudre séparément chacune de ses trois sous-équations.

- $h(x) = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2.x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x+1)^2 = 0}_{\text{Le seul carré nul est celui de 0}} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$.

  Cette première sous-équation a une seule solution qui est -1.
- $h(x) = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2.x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x.(x+2) = 0}_{\text{Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \textbf{ou} \quad x = -2$

  Cette seconde sous-équation a deux solutions que sont -2 et 0.
- $h(x) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2.x - 8 = 0$.

  Calculons le discriminant de cette équation du second degré.

  $$\Delta_{x^2+2.x-8} = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4 + 32 = 36 = 6^2$$

  Cette sous-équation du second degré a deux solutions qui sont :

  $$x = \frac{-2-6}{2} = -4 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{-2+6}{2} = 2$$

  Cette troisième sous-équation a donc deux solutions que sont -4 et 2.

Résumons tout ce que nous venons de trouver !

$$f \circ h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x = -1}_{h(x)=-4} \quad \textbf{ou} \quad \underbrace{x = -2 \quad \textbf{ou} \quad x = 0}_{h(x)=-3} \quad \textbf{ou} \quad \underbrace{x = -4 \quad \textbf{ou} \quad x = 2}_{h(x)=5}$$

Conclusion : 0 a cinq antécédents par la fonction $f \circ h$ que sont -4 ; -2 ; -1 ; 0 et 2.

Seconde partie : ces centres qui barrissent

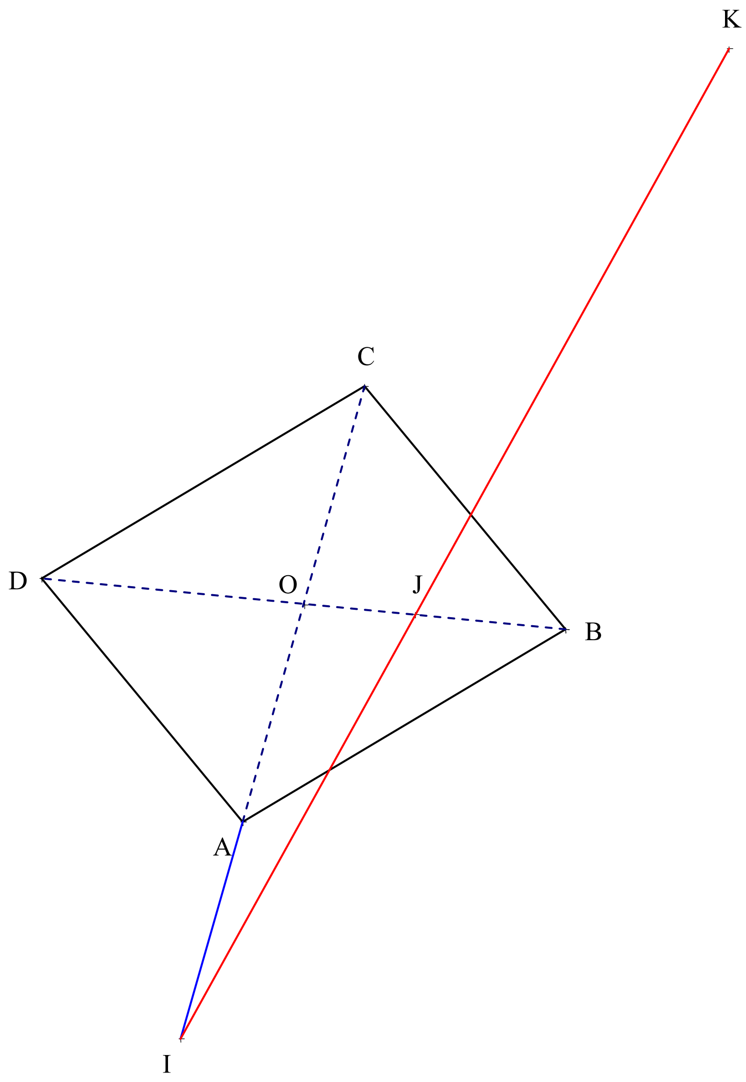
a) Le parallélogramme ABCD de centre O se construit au compas à partir de ses diagonales [AC] et [BD], en s'appuyant par exemple sur le triangle ABO.

Comme I le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(C;-1)$ alors $3.\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC} = \vec{o}$. Donc

$$3.\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad 3.\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AC} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad 2.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}$$

De même, le point J étant le barycentre des points pondérés $(B;5)$ et $(D;2)$ alors

$$5.\overrightarrow{JB} + 2.\overrightarrow{JD} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad 5.\overrightarrow{JB} + 2.\overrightarrow{JB} + 2.\overrightarrow{BD} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad 7.\overrightarrow{JB} = -2.\overrightarrow{BD} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{7}.\overrightarrow{BD}$$



b) Dire que D est le barycentre des points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ signifie que $\alpha.\overrightarrow{DA} + \beta.\overrightarrow{DB} + \gamma.\overrightarrow{DC} = \vec{o}$. Voilà le type de relation vectorielle que nous devons rechercher pour obtenir les coefficients de pondération α, β et γ.

La seule chose que nous sachions sur les quatre points A, B, C et D est que dans cet ordre, ils forment un parallélogramme. Ainsi avons-nous que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Exploitons cette relation vectorielle.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}}_{\overrightarrow{AB}\text{ décomposé}} - \overrightarrow{DC} = \vec{o} \Leftrightarrow -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{o}$$

Conclusion : D est le barycentre des points pondérés $(A;-1)$, $(B;1)$ et $(C;-1)$.

Multipliée par -1, la dernière égalité vectorielle devient $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{o}$.
Autrement dit et c'est peut-être plus intéressant pour la suite car il n'y a qu'un seul coefficient négatif, D est aussi le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;1)$.

c) Pour nous prononcer sur la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$, nous allons introduire les barycentres I et O dans l'égalité caractérisant l'ensemble.

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \underbrace{\left\|3.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right\|}_{\substack{=(3-1).\overrightarrow{MI} \\ \text{car I barycentre de (A;3) et (C;-1)}}} = \underbrace{\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right\|}_{\substack{=(1+1).\overrightarrow{MO} \\ \text{car O est l'isobarycentre de B et D}}}$$

$$\Leftrightarrow \left\|2.\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|2.\overrightarrow{MO}\right\|$$

$$\Leftrightarrow |2| \times \left\|\overrightarrow{MI}\right\| = |2| \times \left\|\overrightarrow{MO}\right\|$$

$$\Leftrightarrow MI = MO$$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M équidistant de I et O.
Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment [IO]

d) Pour nous prononcer sur la nature de l'ensemble $\mathcal{F}$, nous allons introduire le barycentre D des points $(A;1)$, $(B;-1)$ et $(C;1)$ afin de simplifier l'égalité caractérisant l'ensemble.
Ce que nous devons pas perdre de vue est que les points A, B, C et D sont des points fixes.

$$N \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \underbrace{\left\|\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right\|}_{\substack{=(1-1+1).\overrightarrow{ND} \\ \text{car I barycentre de (A;1), (B;-1) et (C;1)}}} = \underbrace{\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\|}_{\substack{=\overrightarrow{AC} \\ \text{car ABCD est un parallélogramme}}}$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{ND}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|$$

$$\Leftrightarrow DN = AC = 6$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ est l'ensemble des points N se trouvant à une distance 6 du point D.
Conclusion : l'ensemble $\mathcal{F}$ est le cercle de centre D et de rayon 6.

e) Pour prouver que les points I, J et K sont alignés, nous allons établir une relation de colinéarité entre deux vecteurs composés à partir de ces trois points.
La seule chose que nous sachions sur le point K est qu'il est le barycentre des quatre points pondérés $(A;-6)$, $(B;5)$, $(C;2)$ et $(D;2)$. Aussi avons-nous :

$$-6.\overrightarrow{KA} + 5.\overrightarrow{KB} + 2.\overrightarrow{KC} + 2.\overrightarrow{KD} = \vec{o}$$

$$-6.\overrightarrow{KA} + 2.\overrightarrow{KC} + \underbrace{5.\overrightarrow{KB} + 2.\overrightarrow{KD}}_{\substack{=(5+2).\overrightarrow{KJ} \\ \text{car J est le barycentre de (B;5) et (D;2)}}} = \vec{o}$$

$$-2.\underbrace{\left[3.\overrightarrow{KA} - .\overrightarrow{KC}\right]}_{\substack{=(3-1).\overrightarrow{KI} \\ \text{car I est le barycentre de (A;3) et (C;-1)}}} + 7.\overrightarrow{KJ} = \vec{o}$$

$$-2 \times 2.\overrightarrow{KI} + 7.\overrightarrow{KJ} = \vec{o}$$

$$-4.\overrightarrow{KI} + 7.\overrightarrow{KJ} = \vec{o}$$

D'après la dernière relation, il est clair que les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires et donc que les points I, J et K sont alignés. Il nous reste à placer le point K. La dernière relation vectorielle ne le permettant pas, nous devons la triturer.

$$-4.\overrightarrow{KI} + 7.\overrightarrow{KJ} = \vec{o} \Leftrightarrow -4.\overrightarrow{KI} + \underbrace{7.\overrightarrow{KI} + 7.\overrightarrow{IJ}}_{\substack{\text{On décompose} \\ 7.\overrightarrow{KJ}}} = \vec{o} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{KI} = -7.\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{7}{3}.\overrightarrow{IJ}$$

Conclusion : K est le point situé sur la droite (IJ). Il est défini par $\overrightarrow{IK} = \frac{7}{3}.\overrightarrow{IJ}$.

Devoir Surveillé No.3

Le contexte

Ce troisième devoir concluait un très gros chapitre consacré aux limites de fonctions qui avait notablement dépassé les objectifs du programme. En particulier avaient été vues les limites aux infinis d'un polynôme (celle du terme dominant) ou d'une fonction rationnelle (celle du quotient des termes dominants). Un gros effort s'était aussi porté sur leurs asymptotes. L'avantage de ces fonctions rationnelles est qu'elles permettent de mettre en oeuvre tous les outils d'analyse vus en première.
Enfin, nous avions vu comment lever certaines formes indéterminées en recherchant une factorisation par le terme le plus fort : les prémisses des croissances comparées.
Les efforts consentis pour les limites de fonctions devaient par la suite porter leurs fruits pour celles de suites.

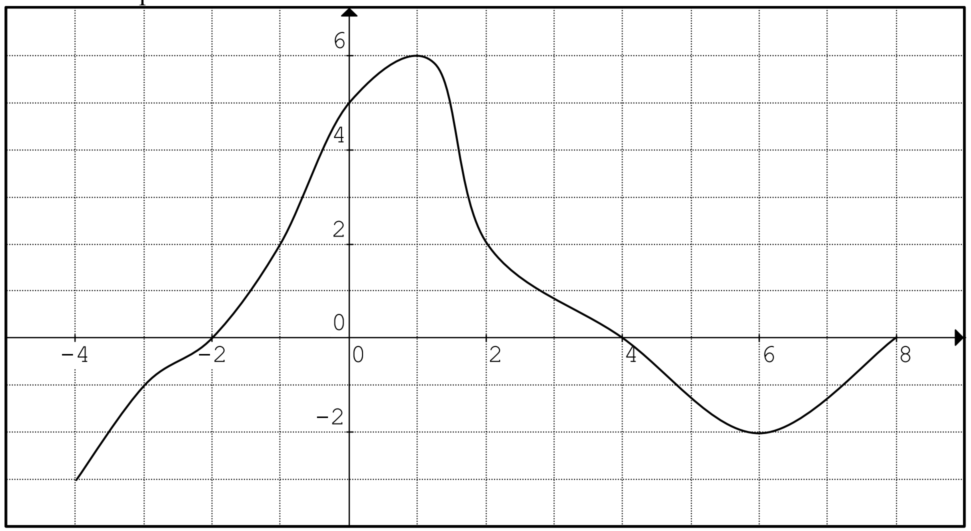
L'énoncé

Première partie : graphiquement et autrement

La fonction affine f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = -4.x - 1$$

La courbe représentant la fonction h est tracée ci-dessous :



A partir de ce graphique, répondre aux questions suivantes. Le cas échéant, les réponses seront arrondies au dixième près.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
Déterminer les images par h de 0 ; 2 et 10.
Déterminer le ou les antécédents par la fonction h de 2 et de 7.
Résoudre l'inéquation $h(x) < 0$

b) Déterminer les images par la fonction $f \circ h$ de -3 et 2.
Déterminer le ou les antécédents par la fonction $f \circ h$ de 7 et 19.
Dresser le tableau de variation de la fonction $f \circ h$.

c) Déterminer la limite (à gauche) du quotient $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ lorsque x tend vers 8^- .

Seconde partie : la fonction rationnelle n'avait plus de limite

La fonction rationnelle f est définie par :

$$f(x) = \frac{2.x^3 - 3.x^2 - 4}{x^2 - 2.x + 1}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Calculer les images par la fonction f de -4 et 2.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < 0$.
Indication : *pour factoriser(casser ou scinder) le numérateur de la fonction rationnelle f(x), on pourra utiliser le fait que 2 est l'une de ses racines...*

c) Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 1 (par la gauche comme par la droite).
Que peut-on en déduire quant à la courbe (C) représentant la fonction f ?

d) Déterminer les limites de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

e) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \in D_f$ on ait :

$$f(x) = a.x + b + \frac{c}{x^2 - 2.x + 1}$$

Démontrer que la courbe (C) représentant la fonction f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique $\mathcal{D}$ dont on donnera l'équation réduite.

Etudier la position relative de la courbe (C) et de son asymptote $\mathcal{D}$.

La fonction j est définie pour tout réel x de l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$j(x)=\frac{[3+\sin(x)].x^3-3.x^2-4}{x^2-2.x+1}$$

f) Déterminer la limite de j(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
Indication : *on pourra essayer de comparer j(x) à sa semblable f(x) sur* $]1;+\infty[$.

Dernière partie : au-delà des limites du raisonnable

a) Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+x+5}{4.x^2+3.x+7}}$.

b) Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction $h(x)=\sqrt{4.x^2+1}-3.x$.

Le corrigé

Première partie : graphiquement et autrement

a) D'après sa courbe, la fonction h est définie sur l'intervalle $[-4;8]$.

➲ Par lecture graphique, on trouve que l'image de 0 par h est 5, celle de 2 est lui-même alors que 10 n'a pas d'image vu qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de h.

➲ Deux points de la courbe qui ont pour ordonnée 2. Donc 2 a deux antécédents par h que sont -1 et 2.

Par contre, aucun point de la courbe n'a pour ordonnée 7. Ce dernier n'a donc aucun antécédent par h.

➲ Pour résoudre graphiquement l'inéquation $h(x)<0$, il nous faut considérer les points de la courbe d'ordonnée strictement négative c'est-à-dire ceux se trouvant au-dessous de l'axe des abscisses. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $[-4;-2[\cup]4;8[$.

Précisons que la fonction h est strictement négative en -4 mais qu'elle est nulle aux autres bornes de intervalles que sont 2 ; 4 et 8.

b) La fonction $f\circ h$ est la fonction h suivie de la fonction f. Calculons les images :

- $f\circ h(-3)=f[h(-3)]=f\underbrace{[-1]}_{\text{Par lecture grafphique}}=-4\times(-1)-1=3$
- $f\circ h(2)=f[h(2)]=f\underbrace{[2]}_{\text{Par lecture grafphique}}=-4\times 2-1=-9$

➲ Pour déterminer les antécédents de 7 par $f\circ h$, nous devons résoudre l'équation $f\circ h(x)=7$.

$$f[h(x)]=7 \quad\Leftrightarrow\quad -4.h(x)-1=7 \quad\Leftrightarrow\quad -4.h(x)=8 \quad\Leftrightarrow\quad h(x)=-2$$

Par lecture graphique, on trouve que l'équation $h(x)=-2$ a deux solutions que sont $-3,5$ (approximativement) et 6. Ce sont les antécédents de 7 par $f\circ h$.

➲ Pour obtenir les antécédents de 19 par $f\circ h$, résolvons l'équation $f\circ h(x)=19$.

$$f[h(x)]=19 \quad\Leftrightarrow\quad -4.h(x)-1=19 \quad\Leftrightarrow\quad -4.h(x)=20 \quad\Leftrightarrow\quad h(x)=-5$$

Par lecture graphique, on détermine que l'équation $h(x)=-5$ n'a aucune solution. Par suite, 19 n'a donc aucun antécédent par la composée $f\circ h$.

➲ La fonction affine $f(x)=-4.x-1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Pour déterminer les variations de $f\circ h$, nous devons envisager plusieurs cas suivant ce que fait h.

- Sur $[-4;1]$, la fonction h est croissante. Sur cet intervalle, $f\circ h$ qui est la composée de la fonction croissante h et de la décroissante f, est donc décroissante.
- Sur $[1;6]$, h est décroissante. Sur cet intervalle, $f\circ h$ qui est la composée de deux fonctions décroissantes, est donc croissante.
- Sur $[6;8]$, h est à nouveau croissante. A l'instar de ce que se passe sur $[-4;1]$, $f\circ h$ est donc décroissante.

En conclusion, le tableau de la fonction $f\circ h$ est le suivant :

x	-4		1		6		8
$f\circ h$	11	↘		↗	7	↘	
			-25				-1

c) Lorsque x tend vers 8 par la gauche :

- Le numérateur f(x) tend vers $f(8) = -4\times 8 - 1 = -33$.
- Le dénominateur h(x) tend vers 0 mais en étant négatif. Il s'en va donc vers 0^- En effet, par lecture graphique, on observe qu'en allant vers 8, la courbe de h se rapproche de 0 mais en demeurant au-dessous de l'axe des abscisses.

Donc le quotient $\dfrac{f(x)}{h(x)}$ tend vers $\dfrac{-33}{0^-} = +\infty$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 8^-} \dfrac{f(x)}{h(x)} = +\infty$

Seconde partie : la fonction rationnelle n'avait plus de limite

a) Pour qu'une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) existe, il faut et il suffit que son dénominateur soit non nul. Ainsi :

$$\begin{array}{lcl} \text{La fraction } f(x) \text{ n'existe pas} & \Leftrightarrow & \text{Son dénominateur } x^2 - 2.x + 1 \text{ est nul} \\ & \Leftrightarrow & (x-1)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \underbrace{x - 1 = 0}_{\substack{\textit{Le seul carré nul}\\ \textit{est celui de 0}}} \Leftrightarrow x = 1 \end{array}$$

A l'exception de 1, tous les réels x ont une image par f.

Conclusion : l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

b) Calculons les images demandées :

- $f(-4) = \dfrac{2.(-4)^3 - 3.(-4)^2 - 4}{(-4)^2 - 2.(-4) + 1} = \dfrac{-128 - 48 - 4}{16 + 8 + 1} = -\dfrac{180}{25} = -\dfrac{36}{5}$
- $f(2) = \dfrac{2.(2)^3 - 3.(2)^2 - 4}{(2)^2 - 2.(2) + 1} = \dfrac{16 - 12 - 4}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$.

  Un enseignement de ce calcul est que 2 annule le numérateur de f(x). Ainsi 2 est-il une racine de $2.x^3 - 3.x^2 - 4$. Cette constatation va nous être utile tout de suite !

➲ Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$, c'est savoir quand la fraction $f(x) = \dfrac{2.x^3 - 3.x^2 - 4}{x^2 - 2.x + 1}$ est strictement négative. Si nous voulons connaître le signe de ce quotient, il va nous falloir casser ou factoriser son numérateur qui est une forme du troisième degré.

Précisons tout de suite que le dénominateur $x^2 - 2.x + 1 = (x-1)^2$ ne pose aucun problème du point de vue de son signe : quand il n'est pas nul, il est positif.

Factorisons le numérateur $2.x^3 - 3.x^2 - 4$.

Le calcul de l'image de 2 par f nous a apprit qu'il était une racine de $2.x^3 - 3.x^2 - 4$.

Cela signifie que le polynôme $2.x^3 - 3.x^2 - 4$ est divisible ou factorisable par $x - 2$.
Posons la division euclidienne de ces deux quantités.

$$\begin{array}{rl|l} & 2.x^3 - 3.x^2 - 4 & x - 2 \\ \ominus & 2.x^3 - 4.x^2 & \hline 2.x^2 + x + 2 \\ \hline & x^2 - 4 & \\ \ominus & x^2 - 2.x & \\ \hline & 2.x - 4 & \\ \ominus & 2.x - 4 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Ainsi avons-nous que :

$$\underbrace{2.x^3 - 3.x^2 - 4}_{\textit{dividende}} = \underbrace{(x-2)}_{\textit{diviseur}}.\underbrace{\left(2.x^2 + x + 2\right)}_{\textit{quotient}} + \underbrace{0}_{\textit{reste}} = (x-2).\left(2.x^2 + x + 2\right)$$

Le signe du facteur affine $x - 2$ ne pose pas de problème. Pour connaître celui de la forme du second degré qu'est $2.x^2 + x + 2$, nous devons calculer son discriminant.

$$\Delta_{2.x^2+x+2} = (1)^2 - 4\times 2\times 2 = 1 - 16 = -15$$

Comme son discriminant est toujours négatif, le trinôme $2.x^2 + x + 2$ est toujours du signe de son coefficient dominant 2, il est toujours positif.

Connaissant les signes de tous les facteurs de $f(x) = \dfrac{(x-2).\left(2.x^2 + x + 2\right)}{(x-1)^2}$, nous pouvons dresser le tableau de signe de cette fraction.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x - 2$		-		-	0	+	
$2.x^2 + x + 2$		+		+		+	
$(x-1)^2$		+	0	+		+	
f(x)		-	‖	-	0	+	

Une petite remarque : mise à part la valeur interdite, c'est $x - 2$ qui donne son signe à f(x).

Le quotient f(x) est strictement négatif avant 2 à l'exception de 1 où il n'est pas défini.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $]-\infty;1[\cup]1;2[$

c) Lorsque x tend vers 1 (par la gauche comme par la droite) :

- le numérateur $2.x^3-3.x^2-4$ tend vers $2.(1)^3-3.(1)^2-4=-5$
- le dénominateur $(x-1)^2$ tend vers 0 mais en étant positif (voir tableau de signe de f(x)). Il se rapproche de 0^+.

Donc f(x) tend vers $\dfrac{-5}{0^+}=-\infty$.

Comme la limite en 1 de f(x) est égale à $-\infty$ alors la droite verticale d'équation $x=1$ est une asymptote à la courbe (C) représentant f.

d) Déterminons la limite de f en $+\infty$.
Aux infinis, la fonction rationnelle $f(x)$ se comporte comme le quotient de ses termes dominants $\dfrac{2.x^3}{x^2}=2.x$. Ainsi avons-nous :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2.x=+\infty$$

***Note :** il existe des chapelles où le "quotient des termes dominants" est banni. Il faut alors revenir aux sources de cette règle pour éliminer l'indétermination. Voyons comment il faut alors faire avec la seconde limite.*

➲ Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction f.

De prime abord, la fonction f est en $-\infty$ une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour la lever, nous allons factoriser ses numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts.
Pour tout $x<0$ (pour éliminer toute interférence et que nous travaillons en $-\infty$) :

$$f(x)=\frac{2.x^3-3.x^2-4}{x^2-2.x+1}=\frac{2.x^3.\left[1-\frac{3}{2.x}-\frac{2}{x^3}\right]}{x^2.\left[1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right]}=\frac{2.x^3}{x^2}.\frac{1-\frac{3}{2.x}-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=2.x.\frac{1-\frac{3}{2.x}-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Or lorsque x tend vers $-\infty$, $\dfrac{3}{2.x}$; $\dfrac{2}{x^3}$; $\dfrac{2}{x}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ tendent vers 0. alors que $2.x$ s'en va vers $-\infty$.

Donc la fraction $\dfrac{1-\frac{3}{2.x}-\frac{2}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$ tend vers $\dfrac{1-0-0}{1-0+0}=1$.

Donc f(x) s'en va vers $(-\infty)\times1=-\infty$

Conclusion : la limite de f en $-\infty$ est $-\infty$.

e) Chercher les trois réels demandés, c'est décomposer la fonction rationnelle f(x). Pour y parvenir, nous pourrions diviser euclidiennement son numérateur par son dénominateur ainsi que cela a été fait dans le précédent devoir. Nous optons pour une autre méthode : faire apparaître le dénominateur dans le numérateur.
Pour tout réel $x\in D_f$, nous avons :

$$f(x)=\frac{2.x^3-3.x^2-4}{x^2-2.x+1}=\frac{\overbrace{2x.\left(x^2-2x+1\right)+4.x^2-2.x}^{\substack{\text{On fait apparaître le dénominateur}\\ \text{Pour que l'effet soit nul, on compense}\\ \text{en enlevant ce que a été ajouté...}\\ =2.x^3}}-3.x^2-4}{x^2-2.x+1}$$

$$=\underbrace{\frac{2.x.\left(x^2-2x+1\right)}{x^2-2x+1}}_{\text{Une simplification est possible...}}+\frac{\overbrace{\left(x^2-2x+1\right)-1}^{\substack{\text{On recommence...}\\ =x^2-2.x}}-4}{x^2-2x+1}$$

$$=2.x+\underbrace{\frac{1\times\left(x^2-2x+1\right)}{x^2-2x+1}}_{\text{Là encore, une simplification est possible...}}-\frac{5}{x^2-2x+1}=2.x+1-\frac{5}{x^2-2x+1}$$

Conclusion : l'écriture décomposée de f(x) est $2.x+1-\dfrac{5}{x^2-2x+1}$

➲ Une asymptote aux infinis est une droite dont la courbe d'une fonction se rapproche infiniment à telle point qu'elles finissent par se confoncer.

La forme décomposée de f indique ce que pourrait être l'équation de celle-ci. En effet, écrite ainsi, f est la somme de la fonction affine $2.x+1$ et de la fonction $\dfrac{-5}{x^2-2x+1}$ dont la limite aux infinis est égal à 0.
Ainsi nous semble-t-il que la droite $\mathfrak{D}$ d'équation $y=2.x+1$ soit une asymptote à la courbe (C) au voisinage des infinis. Prouvons-le !
Pour cela, intéressons-nous à la différence d'ordonnées existant entre (C) et $\mathfrak{D}$.

$$(C)-\mathfrak{D}=f(x)-y_{\mathfrak{D}}=\underbrace{2.x+1-\frac{5}{x^2-2.x+1}}_{f(x)}-\underbrace{(2.x+1)}_{y}=-\frac{5}{x^2-2.x+1}=\frac{-5}{(x-1)^2}$$

Or lorsque x tend vers $\pm\infty$, $(x-1)^2=x^2-2.x+1$ tend vers $+\infty$.

Donc $(C)-\mathfrak{D}$ tend vers $\dfrac{-5}{+\infty}=0$. En allant vers les infinis, la différence d'ordonnées entre la courbe (C) et la droite $\mathfrak{D}$ devient nulle.
Conclusion : la droite d'équation $y=2.x+1$ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis.

➲ Pour étudier la positive relative (au-dessus ou en dessous) de la courbe (C) et de son asymptote $\mathfrak{D}$, étudions le signe de leur différence d'ordonnées $(C)-\mathfrak{D}=\dfrac{-5}{(x-1)^2}$.

Dressons le tableau de signe de cette fraction.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
-5		-	|	-	
$(x-1)^2$		+	0	+	
$(C)-\mathfrak{D}$		-	‖	-	

Conclusion : leur différence d'ordonnées étant toujours négative, la courbe (C) est toujours au-dessous de son asymptote $\mathfrak{D}$.

f) Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, la fonction $j(x)=\dfrac{[3+\sin(x)].x^3-3.x^2-4}{x^2-2.x+1}$ a comme qui dirait, un air de famille avec la fonction f. C'est en la comparant à cette dernière, que nous allons déterminer sa limite.

Pour tout $x>1$, nous pouvons écrire :

On multiplie par le positif x^3

$$\begin{array}{ccccc}
-1 & \le & \sin(x) & \le & 1\\
2 & \le & 3+\sin(x) & \le & 4\\
2.x^3 & \le & [3+\sin(x)].x^3 & \le & 4.x^3\\
2.x^3-3.x^2-4 & \le & [3+\sin(x)].x^3-3.x^2-4 & \le & 4.x^3-3.x^2-4\\
\dfrac{2.x^3-3.x^2-4}{x^2-2.x+1} & \le & \dfrac{[3+\sin(x)].x^3-3.x^2-4}{x^2-2.x+1} & \le & \dfrac{4.x^3-3.x^2-4}{x^2-2.x+1}\\
f(x) & \le & j(x) & \le & \dfrac{4.x^3-3.x^2-4}{x^2-2.x+1}
\end{array}$$

On ajoute $-3.x^2-4$ On divise par le positif $(x-1)^2$

Minorée à l'infini par la fonction f qui a pour limite $+\infty$, la fonction j ne peut s'en aller que vers $+\infty$.
Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x)=+\infty$.

Dernière partie : au-delà des limites du raisonnable

a) D'abord et sous cette forme, lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour nous prononcer sur sa limite en $+\infty$, nous allons modifier son écriture en factorisant sous la racine ses numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts.
Pour tout $x>0$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x+5}{4.x^2+3.x+7}}=\sqrt{\frac{x^2.\left[1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right]}{4.x^2\left[1+\dfrac{3}{4.x}+\dfrac{7}{4.x^2}\right]}}=\sqrt{\frac{1}{4}}\times\sqrt{\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{3}{4.x}+\dfrac{7}{4.x^2}}}$$

Or lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{3}{4.x}$ et $\dfrac{7}{4.x^2}$ tendent vers 0.

Donc le quotient $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{3}{4.x}+\dfrac{7}{4.x^2}}$ tend vers $\dfrac{1}{1}=1$.

Donc f(x) s'en va vers $\sqrt{\dfrac{1}{4}}\times\sqrt{1}=\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

Note : *nous aurions pu envisager les choses plus simplement. En effet, f(x) est la racine carrée d'une fonction rationnelle. La limite de cette dernière (par le quotient des termes dominants) donne celle de cette première.*

b) De prime abord, lorsque x tend vers $+\infty$, h(x) est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$. Pour lever l'indétermination, nous allons essayer d'affaiblir cette opposition d'infinis en factorisant les deux termes par quelque chose de suffisamment costaud.
Pour tout réel x strictement positif, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}h(x)&=\sqrt{4.x^2+1}-3.x\\&=\sqrt{x^2.\left[4+\frac{1}{x^2}\right]}-3.x\\&=\sqrt{x^2}\times\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-3.x=x.\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-3.x=x.\left[\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-3\right]\end{aligned}$$

Voyons à présent ce qu'il en est de cette nouvelle forme de h(x).

Lorsque x tend vers $+\infty$, $4+\dfrac{1}{x^2}$ tend vers 4. Donc $\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-3$ tend vers $\sqrt{4}-3=-1$

Donc h(x) tend vers $(+\infty)\times(-1)=-\infty$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$

Devoir Surveillé No.4

Le contexte

Ce quatrième devoir portait sur les angles orientés, le repérage polaire, les formules trigonométriques usuelles, les limites et tout ce qui avait été déjà vu à propos des fonctions rationnelles.
A mon sens, la trigonométrie telle qu'elle est pratiquée en première S relève plus du bricolage que de la rigueur. Une bonne connaissance du cours et des compétences demandées suffit pour faire n'importe quel exercice, les questions étant souvent les mêmes ! Comme avec les fonctions rationnelles d'ailleurs !
La seule innovation concernant la fonction rationnelle considérée était qu'elle tendait vers 0 aux infinis. Ce qui perturbât énormément !

L'énoncé

Première partie : résolutions de quelques équations

a) Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ l'équation $\cos(t)=-\frac{1}{2}$.

b) Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi[$ l'équation $4.\sin^2(t)-1=0$

Seconde partie : grands froids sur le repérage polaire

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Dans ce repère cartésien, on considère les points :

$$A(-5;0) \qquad B\left(-\sqrt{12};-2\right) \qquad E(3;-4)$$

Concernant les coordonnées polaires d'un point, on veillera à ne donner que l'argument principal, c'est-à-dire la mesure se trouvant dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

a) Faire une figure correspondant à la situation décrite ci-dessus.

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point C dont les coordonnées polaires dans le repère $\left(O;\vec{i}\right)$ sont $\left(\sqrt{18};\frac{3\pi}{4}\right)$.

c) Déterminer les coordonnées polaires du point A dans le repère polaire $\left(O;\vec{i}\right)$.

Déterminer les coordonnées polaires du point B dans le repère polaire $\left(O;\vec{i}\right)$.

On appelle θ_E l'argument du point E dans le repère polaire $\left(O;\vec{i}\right)$. Dans la suite, il n'est ni question, ni demander de calculer la valeur exacte de θ_E.

d) Déterminer le module du point E dans le repère polaire $\left(O;\vec{i}\right)$

En déduire $\cos(\theta_E)$ et $\sin(\theta_E)$.

e) Exprimer $\cos\left(a+\frac{\pi}{3}\right)$ en fonction de cos(a) et sin(a).

Exprimer $\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)$ en fonction de cos(a) et sin(a).

On appelle E' l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

f) Construire ce point E'.
Quels sont les module et argument du point E' dans le repère polaire $\left(O;\vec{i}\right)$?

En déduire les coordonnées cartésiennes du point E' dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

g) Déterminer (par un raisonnement) la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AE'},\overrightarrow{AE}\right)$.

Troisième partie : la fonction rationnelle la plus nulle à l'infini

La fonction rationnelle h est définie par :

$$h(x)=\frac{2.x-7}{x^2-x-2}$$

On appelle (C) la courbe représentant cette fonction h.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

b) Calculer les images par la fonction h de 1 et -2.
Déterminer le ou les antécédents par la fonction h de 1.

c) Déterminer la ou les limites de la fonction h lorsque x tend vers -1.
Que peut-on en déduire graphiquement quant à la courbe (C) ?

d) Déterminer les limites de h(x) lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.
Justifier que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote $\mathcal{D}$ dont on précisera l'équation et l'appellation.
Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote $\mathcal{D}$.

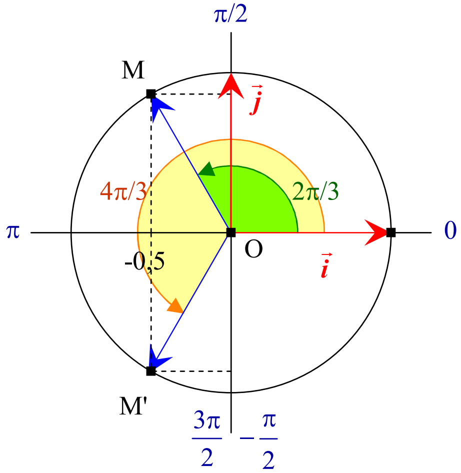
Dernière partie : l'impossible limite de la fonction j

Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de la fonction $j(x) = 1 + \dfrac{\sin(x)}{\sin(2.x)}$.

Le corrigé

Première partie : graphiquement et autrement

a) Pour résoudre dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ l'équation $\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$, nous devons nous intéresser aux points du cercle trigonométrique qui ont pour abscisse $-\dfrac{1}{2}$. Il en existe deux que nous appelleront M et M'. Graphiquement, la situation est la suivante :



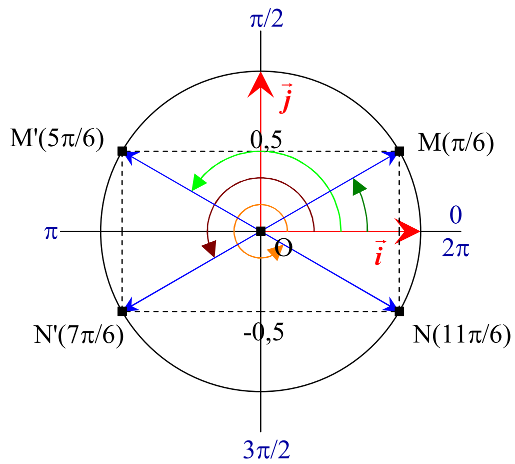
L'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ de longueur 2π couvre la totalité du cercle trigonométrique.

Dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, les points M et M' sont respectivement et seulement associés aux angles $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4.\pi}{3}$. Ce sont les deux solutions de notre équation.

b) Résolvons dans l'intervalle $[0;2\pi[$ l'équation $4.\sin^2(t) - 1 = 0$.

$$4.[\sin(t)]^2 = 1 \Leftrightarrow [\sin(t)]^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin(t) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \textbf{\textit{ou}} \quad \sin(t) = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi devons-nous nous intéresser aux points du cercle trigonométrique d'ordonnées $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$. Il en existe deux pour la première que nous appellerons M et M'. Il y en a également deux qui ont pour ordonnée $-0,5$. Nous les baptisons N et N'.
Chacun de ses points est associé à un seul réel de l'intervalle $[0;2\pi[$. Ce dernier couvre l('intégralité du cercle trigonométrique. Graphiquement, la situation est la suivante :

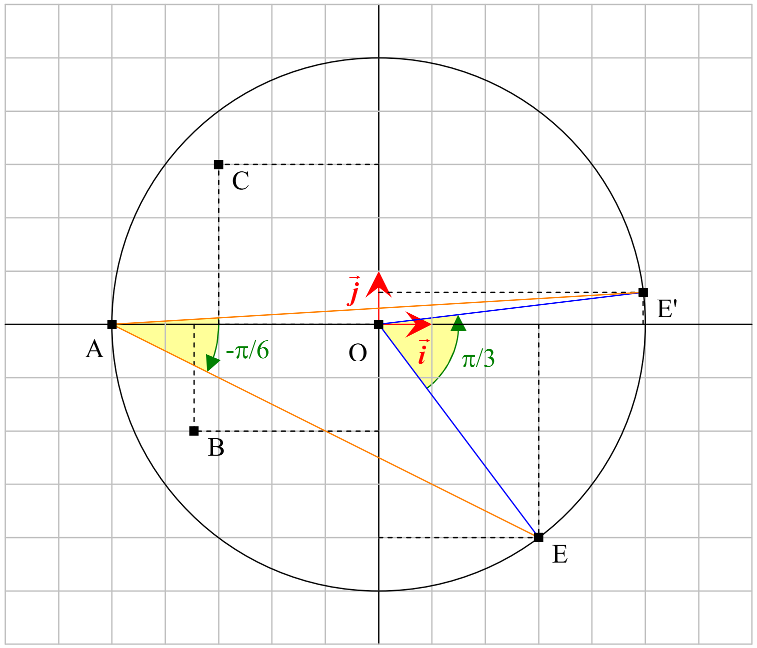


Conclusion : l'équation $4.\sin^2(t) - 1 = 0$ a quatre solutions dans l'intervalle $[0;2\pi[$. Il s'agit de $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{5.\pi}{6}$; $\dfrac{7.\pi}{6}$ et $\dfrac{11.\pi}{6}$.

Seconde partie : grands froids sur le repérage polaire

Note : *avant toutes choses, précisons ce que recouvrent les termes module et argument d'un point. Ces désignations non officielles ont été empruntées aux nombres complexes. Mon intention était de donner des noms aux coordonnées polaires d'un point M dans un repère* $\left(O;\vec{i}\right)$*. A l'instar de ce qui se fait dans le plan complexe, le module d'un point M (souvent noté* ρ_M*) est la distance OM qui le sépare de l'origine O. Un argument du point M (souvent noté* θ_M*) est une mesure de l'angle orienté* $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$*. Le plus souvent, on se rabat sur sa mesure principale, c'est-à-dire la seule qui fasse partie de l'intervalle]-π ; π[.*

a) Graphiquement, la situation est la suivante :



b) Le repère polaire $\left(O;\vec{i}\right)$ est associé au repère cartésien $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Dans ce premier, le point C est défini par son module $OC=\sqrt{18}$ et par son argument $\frac{3\pi}{4}$ qui est aussi une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right)$. Ainsi avons-nous :

$$\overrightarrow{OC}=OC\times\left[\cos\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right).\vec{i}+\sin\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right).\vec{j}\right]$$

$$=\sqrt{18}\times\underbrace{\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right).\vec{i}+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right).\vec{j}\right]}_{\substack{3\pi/4\text{ est un angle associé à }\pi/4\\ \text{Nous allons obtenir les cosinus et sinus de}\\ \text{ce premier à partir de ceux de ce dernier}}}$$

$$=3.\sqrt{2}\times\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right).\vec{i}+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right).\vec{j}\right]$$

$$=3.\sqrt{2}\times\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\vec{i}+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\vec{j}\right]$$

$$=3.\sqrt{2}\times\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}.\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}.\vec{j}\right]=-3.\vec{i}+3.\vec{j}$$

Conclusion : le point C a pour coordonnées $(-3;3)$ dans le repère cartésien $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

c) D'entrée, nous pouvons dire qu'un argument du point A dans le repère $\left(O;\vec{i}\right)$ est π.

Il nous reste à calculer son module $\rho_A=OA=\sqrt{(-5)^2+0}=5$.

Les coordonnées polaires du point A dans le repère polaire $\left(O;\vec{i}\right)$ sont donc $(5;\pi)$.

➲ Déterminons les coordonnées polaire $(\rho_B;\theta_B)$ du point B dans le repère $\left(O;\vec{i}\right)$.

Commençons par calculer son module ρ_B :

$$\rho_B=OB=\sqrt{{x_B}^2+{y_B}^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{12}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$$

Ce résultat nous conduit à dire :

$$\cos(\theta_B)=\frac{x_B}{\rho_B}=\frac{-\sqrt{12}}{4}=-\frac{2.\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc la mesure principale de $\theta_B=\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)$ est soit $-\frac{5.\pi}{6}$, soit $\frac{5\pi}{6}$.

De plus, nous avons :

$$\sin(\theta_B)=\frac{y_B}{\rho_B}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Donc la mesure principale de $\theta_B=\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)$ est soit $-\frac{5.\pi}{6}$, soit $-\frac{\pi}{6}$.

La seule solution possible est $-\frac{5.\pi}{6}$. C'est l'argument du point B.

Conclusion : les coordonnées polaires du point B dans le repère $(O;\vec{i})$ sont $\left(4;-\frac{5\pi}{6}\right)$.

Note : *il n'est guère évident de présenter rigoureusement la recherche de coordonnées polaires. A l'instar de ce qui se passe avec les résolutions d'équations trigonométriques, on a parfois le sentiment de bricoler et de se prononcer au pif...*

d) Connaissant les coordonnées cartésiennes de E, son module ρ_E se calcule tout seul.

$$\rho_E = OE = \sqrt{x_E^2 + y_E^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Par suite, il vient :

$$\cos(\theta_E) = \frac{x_E}{\rho_E} = \frac{3}{5} = 0,6 \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta_E) = \frac{y_E}{\rho_E} = \frac{-4}{5} = -0,8$$

e) Pour répondre à cette question, nous allons utiliser les formules des cosinus et sinus d'une somme.

- $\cos\left(a+\frac{\pi}{3}\right) = \cos(a).\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{1/2} - \sin(a).\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\sqrt{3}/2} = \frac{\cos(a)-\sqrt{3}.\sin(a)}{2}$
- $\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right) = \cos(a).\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\sqrt{3}/2} + \sin(a).\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{1/2} = \frac{\sqrt{3}.\cos(a)+\sin(a)}{2}$

f) Appelons $\rho_{E'}$ le module du point E' et $\theta_{E'}$ son argument.

Le point E' étant l'image de E par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ alors :

- E' fait partie du cercle de centre O passant par E. Donc $OE' = OE$.
  Autrement dit, les points E' et E ont le même module. Ainsi : $\rho_{E'} = \rho_E = 5$.
- L'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OE'}\right)$ mesure $\frac{\pi}{3}$ radians. De cela, on en déduit :

$$\theta_{E'} = \left(\vec{i},\overrightarrow{OE'}\right) = \underbrace{\left(\vec{i},\overrightarrow{OE}\right)+\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OE'}\right)}_{\substack{\textit{Relation de Chasles}\\ \textit{version angles orientés}}} = \theta_E + \frac{\pi}{3}.$$

➲ Déterminons les coordonnées cartésiennes $(x_{E'};y_{E'})$ du point E'.

Connaissant les module et argument de E', nous pouvons écrire :

- $x_{E'} = \rho_{E'} \times \cos(\theta_{E'})$

$$= 5\times\cos\left(\theta_E+\frac{\pi}{3}\right) = 5\times\underbrace{\frac{\cos(\theta_E)-\sqrt{3}.\sin(\theta_E)}{2}}_{\textit{D'après la question e...}} = 5\times\frac{\overbrace{\frac{3}{5}-\sqrt{3}.\frac{4}{5}}^{\textit{D'après d}}}{2} = \frac{3}{2}-2.\sqrt{3}$$

- $y_{E'} = \rho_{E'} \times \sin(\theta_{E'})$

$$= 5\times\sin\left(\theta_E+\frac{\pi}{3}\right) = 5\times\underbrace{\frac{\sqrt{3}.\cos(\theta_E)+.\sin(\theta_E)}{2}}_{\textit{D'après la question e...}} = 5\times\frac{\overbrace{\sqrt{3}.\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}^{\textit{D'après d}}}{2} = \frac{3.\sqrt{3}}{2}+2$$

Conclusion : les coordonnées cartésiennes du point E' sont $\left(\frac{3}{2}-2.\sqrt{3};\frac{3.\sqrt{3}}{2}+2\right)$.

g) De par leurs modules tous égaux à 5, il est clair que les points A, E et E' appartiennent tous les trois au cercle de centre O et de rayon 5.

Dans ce cercle, l'angle inscrit $\left(\overrightarrow{AE'},\overrightarrow{AE}\right)$ interceptant le même arc $\overset{\frown}{E'E}$ que l'angle au centre $\left(\overrightarrow{AE'},\overrightarrow{AE}\right)$ mesure la moitié de ce dernier. C'est le théorème de l'angle au centre/angle inscrit (je n'ai jamais su comment il s'appelait) qui s'applique. Ainsi avons-vous :

$$\left(\overrightarrow{AE'},\overrightarrow{AE}\right) = \frac{1}{2}.\left(\overrightarrow{OE'},\overrightarrow{OE}\right) = -\frac{1}{2}.\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OE'}\right) = -\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

Conclusion : l'angle $\left(\overrightarrow{AE'},\overrightarrow{AE}\right)$ mesure $-\frac{\pi}{6}$ radians.

Troisième partie : la fonction rationnelle la plus nulle à l'infini

a) h(x) étant une fonction rationnelle, pour qu'elle existe, il faut et il suffit que son dénominateur soit non nul ! Ou alors, on peut voir les choses dans l'autre sens !

La fraction h(x) n'existe pas $\Leftrightarrow$ Son dénominateur x^2-x-2 est nul

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2-x-2=0}_{\substack{\text{Equation du second degré de discriminant } \Delta=9\\ \text{donc elle a deux solutions}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1-3}{2}=-1 \quad \textit{ou} \quad x=\frac{1+3}{2}=2$$

Conclusion : la fonction rationnelle h a deux valeurs interdites que sont -1 et 2. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$.

b) Ces calculs d'images ne posent guère de problème !

- $h(-2)=\dfrac{2.(-2)-7}{(-2)^2-(-2)-2}=\dfrac{-11}{4}=-3,75$
- $h(1)=\dfrac{2\times1-7}{(1)^2-(1)-2}=\dfrac{-5}{-2}=2,5$

➲ Pour déterminer les antécédents de 1 par la fonction h, nous devons résoudre dans l'ensemble de définition D_h l'équation $h(x)=1$.

$$\frac{2.x-7}{x^2-x-2}-1=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2.x-7}{x^2-x-2}-\frac{1\times\left(x^2-x-2\right)}{x^2-x-2}}_{\text{Tout au même dénominateur !}}=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+3.x-5}{x^2-x-2}=0$$

Dans l'ensemble dans lequel nous résolvons, il n'y a aucune valeur interdite. Ainsi pouvons-nous fièrement annoncer :

la fraction h(x) est nulle si et seulement si son $-x^2+3x-5$ numérateur l'est.

Nous voici donc à devoir résoudre l'équation du second degré $-x^2+3x-5=0$. Commençons par calculer son discriminant.

$$\Delta_{-x^2+3x-5}=3^2-4\times(-1)\times(-5)=9-20=-11$$

Son discriminant étant strictement négatif, l'équation du second degré $-x^2+3x-5=0$ n'a aucune solution.

Conclusion : 1 n'a aucun antécédent par la fonction h.

c) La fonction h n'étant pas définie en -1, il est intéressant de savoir ce qu'elle y devient.

x peut se rapprocher de -1 de deux côtés : par la gauche ou par la droite. Nous devons donc envisager deux limites en ce point.

Lorsque x tend vers -1 par la gauche :

- le numérateur $2.x-7$ tend vers $2.(-1)-7=-9$.
- le dénominateur x^2-x-2 tend vers 0 mais en étant positif. C'est son tableau de signe qui le dit !

donc $h(x)$ tend vers $\dfrac{-9}{0^+}=-\infty$

Lorsque x tend vers -1 par la droite :

- le numérateur $2.x-7$ tend vers $2.(-1)-7=-9$.
- le dénominateur x^2-x-2 tend vers 0 mais en étant négatif. Merci à son tableau de signe !

donc $h(x)$ tend vers $\dfrac{-9}{0^-}=+\infty$

Nous avons évoquer le tableau de signe de la forme du second degré qu'est x^2-x-2. Depuis la question a, nous savons que celle-ci a un discriminant positif et égal à 9, et aussi qu'elle a deux racines -1 et 2.

Comme son coefficient dominant (celui du terme en x^2) est positif alors x^2-x-2 est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre. Son tableau de signe est :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	-	0	+	

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-1^-} h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} h(x)=+\infty$.

Les limites en -1 de la fonction h étant infinies, la droite verticale d'équation $x=-1$ est une asymptote à la courbe (C) représentant la fonction h.

d) Les limites aux infinis d'une fonction rationnelle peuvent se déterminer de deux manières. Soit l'on est autorisé à utiliser la règle du quotient des termes dominants. Ou bien, on doit faire sans !

➲ Déterminons (sans la règle) la limite de h(x) en $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, h(x) est une forme très indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty-\infty}$. Pour lever celles-ci, nous allons factoriser ses numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts qui alors s'affronteront dans un titanesque combat !

Pour tout réel $x>2$ (car ainsi pas de problème) :

$$h(x)=\frac{2.x-7}{x^2-x-2}=\frac{2.x.\left[1-\frac{7}{2.x}\right]}{x^2.\left[1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right]}=\frac{2.x}{x^2}\times\frac{1-\frac{7}{2.x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2}{x}\times\frac{1-\frac{7}{2.x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

Or lorsque tend vers $+\infty$, $\frac{2}{x}$, $\frac{7}{2.x}$, $\frac{1}{x}$ et $\frac{2}{x^2}$ tendent vers 0.

Donc j(x) s'en va vers $0\times\frac{1-0}{1-0-0}=0\times 1=0$.

➲ Déterminons (avec la règle) la limite de h(x) en $+\infty$.
En $-\infty$, la fonction rationnelle h(x) se comporte comme le quotient de ses termes dominants $\frac{2.x}{x^2}=\frac{2}{x}$. Ainsi avons-nous :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

Conclusion : aux infinis la fonction rationnelle h(x) tend vers 0. Cela signifie qu'allant vers ceux-ci, sa courbe (C) se rapproche de plus en plus de la droite horizontale d'équation $y=0$. Donc l'axe des abscisses est une asymptote à sa courbe (C) aux voisinages de deux infinis. C'est notre asymptote $\mathcal{D}$.

Note : *les plus perspicaces d'entre vous auront remarqué qu'en $+\infty$, c'était aussi le quotient des termes dominants 2/x qui avait imposé sa limite à la fraction h(x). D'où la règle...*

➲ Pour déterminer la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote $\mathcal{D}$ qui rappelons-le n'est rien d'autre que l'axe des abscisses, nous devons nous intéresser au signe de la différence d'ordonnées $(C)-\mathcal{D}=h(x)-0=h(x)=\frac{2.x-7}{x^2-x-2}$.

Le tableau de signe de h(x) est facile à dresser car nous connaissons les signes de ses numérateur et dénominateur (voir question c).

x	$-\infty$		-1		2		$3,5$		$+\infty$
$2.x-7$		-	|	-	|	-	0	+	
x^2-x-2		+	0	-	0	+	|	+	
$(C)-\mathcal{D}=h(x)$		-	‖	+	‖	-	0	+	

Conclusion : la courbe (C) est au-dessous de son asymptote $\mathcal{D}$ sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]2;3,5[$. Elle est au-dessus sur $]-1;2[$ et $]3,5+\infty[$. Enfin la courbe et l'axe des abscisses n'ont qu'un seul point d'intersection. Son abscisse est 3,5.

Dernière partie : l'impossible limite de la fonction j

Lorsque x tend vers 0, $\sin(x)$ et $\sin(2.x)$ tendent tous deux vers 0. $j(x)$ est alors une splendide forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Pour lever cette dernière, nous devons modifier son écriture. Par chance, il y a la formule $\sin(2.x)=2.\sin(x).\cos(x)$.
Car alors :

$$j(x)=1+\frac{\sin(x)}{\sin(2.x)}=1+\frac{\sin(x)}{2.\sin(x).\cos(x)}=1+\frac{1}{2.\cos(x)}$$

Or lorsque x tend vers 0, $\cos(x)$ tend vers 1. Donc j(x) tend vers $1+\frac{1}{2\times 1}=\frac{3}{2}$.

Note : *parmi les non-dits de cet exercice, il y a l'ensemble de définition de j. Pour que j(x) existe, il faut et il suffit que le dénominateur sin(2.x) soit non nul, c'est-à-dire que x ne soit pas un multiple (positif, négatif ou nul) de $\pi/2$.*
Car la fonction j n'est-elle pas définie en 0, mais à son voisinage. Cela même si la dernière écriture de j(x) pourrait laisser penser le contraire !

Devoir Surveillé No.5

Le contexte

Ce devoir intervint à l'issue du chapitre sur la dérivation. Les limites et autres asymptotes ayant abondamment été traitées, il devait conclure la partie analyse fonctionnelle de cette année de première scientifique. Il fut constitué de deux problèmes d'études de fonctions classiques pour la première : il y eut d'abord l'étude d'une fonction polynomiale, puis celle d'une fonction rationnelle. La réelle nouveauté par rapport aux devoirs précédents fut ici la dérivation et ses emplois.
Faisant appel essentiellement à des connaissances et des automatismes, le Devoir Surveillé No.5 fut assez bien réussi.

L'énoncé

Première partie : l'étude d'une fonction polynomiale

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x^4 - 5.x^3 + 5.x^2 - 3.x + 16$$

a) Déterminer les limites de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

b) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur $]-\infty; +\infty[$?

Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f.

Démontrer que 3 est une racine du polynôme $f'(x)$.

En déduire une factorisation de $f'(x)$.

Etudier (déterminer par le calcul) les variations de la fonction f sur $]-\infty; +\infty[$.

Note : *on demande de dresser le tableau de variation de la fonction f en justifiant...*

c) ***k*** étant un réel fixé, combien l'équation $f(x) = \boldsymbol{k}$ admet-elle de solutions ?

Note : *on ne demande pas de résoudre une telle équation. On pourra passer plusieurs cas en revue et discuter suivant les valeurs de* ***k****. On justifiera toute réponse. Une réponse reposant sur la calculatrice et les courbes qu'elle trace, sera considérée comme nulle.*

Seconde partie : l'étude d'une fonction rationnelle

La fonction rationnelle h est définie par :

$$h(x) = \frac{x^2 - 5.x + 22}{3 - x}$$

On appelle (C) la courbe représentant cette fonction h.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

b) Calculer les images par la fonction h de 7 et -1.
Déterminer le ou les antécédents par la fonction h de 11.

c) Déterminer les limites de la fonction h lorsque x tend vers 3.
Que peut-on en déduire graphiquement quant à la courbe (C) ?

d) Déterminer les limites de h(x) lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

e) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \in D_h$:

$$h(x) = a.x + b + \frac{c}{3 - x}$$

Démontrer que la courbe (C) représentant la fonction h admet au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ une asymptote oblique Δ dont on déterminera l'équation réduite.
Etudier la position relative de la courbe (C) et de son asymptote Δ.

f) Pourquoi la fonction h est-elle dérivable sur son ensemble de définition D_h ?

En dérivant la fonction h, démontrer que pour tout réel $x \in D_h$:

$$h'(x) = \frac{(7 - x).(x + 1)}{(3 - x)^2}$$

Etudier les variations de la fonction h sur son ensemble de définition.

g) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

h) Dans un repère orthogonal, tracer (une esquisse de) la courbe (C), ses deux asymptotes et la tangente T_1.

Le corrigé

Première partie : l'étude d'une fonction polynomiale

a) Aux infinis, la fonction polynomiale $f(x) = x^4 - 5.x^3 + 5.x^2 - 3.x + 16$ se comporte comme son terme dominant x^4. Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

b) Comme les fonctions x^4 ; $-5.x^3$; $5.x^2$; $-3.x$ et 16 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors leur somme f(x) l'est aussi. Pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = \left(x^4\right)' - 5.\left(x^3\right)' + 5.\left(x^2\right)' - 3.(x)' + (16)'$$
$$= 4.x^3 - 5 \times 3.x^2 + 5 \times 2.x - 3 \times 1 + 0 = 4.x^3 - 15.x^2 + 10.x - 3$$

Une racine d'un polynôme est une valeur qui l'annule. Nous calculons :

$$f'(3) = 4 \times (3)^3 - 15 \times (3)^2 + 10 \times 3 - 3 = 108 - 135 + 30 - 3 = 0$$

Donc 3 est un racine du polynôme $f'(x)$. Ce dernier est donc factorisable par $x - 3$. Pour procéder à cette factorisation, on pose la division euclidienne de $f'(x)$ par son facteur $x - 3$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4.x^3 - 15.x^2 + 10.x - 3 & x - 3 \\
\ominus & 4.x^3 - 12.x^2 & \overline{4.x^2 - 3.x + 1} \\
\hline
 & -3.x^2 + 10.x - 3 & \\
\ominus & -3.x^2 + 9.x & \\
\hline
 & x - 3 & \\
\ominus & x - 3 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $f'(x) = \underbrace{4.x^3 - 15.x^2 + 10.x - 3}_{dividende} = \underbrace{(x-3)}_{diviseur}.\underbrace{\left(4.x^2 - 3.x + 1\right)}_{quotient}$

Pour établir les variations de la fonction f, nous allons déterminer le signe de sa dérivée. Nous avons écrit $f'(x)$ sous la forme d'un produit. Nous connaissons le signe du premier facteur affine $x - 3$.

Le second facteur $4.x^2 - 3.x + 1$ est une forme du second degré. Pour connaître son signe, calculons son discriminant : $\Delta_{4.x^2-3.x+1} = (-3)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 9 - 16 = -7$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $4.x^2 - 3.x + 1$ est toujours du même signe, celui de son coefficient dominant 4. Il est donc toujours positif.
A présent, nous pouvons dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x - 3$		-	0	+	
$4.x^2 - 3.x + 1$		+	|	+	
$f'(x)$		+	0	+	
f	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \boldsymbol{k}$ où l'inconnue est x et ***k*** est un réel fixé, revient à s'intéresser au nombre d'antécédents de ***k*** par la fonction f.
Le tableau de variation de f dressé à la question précédente nous permet de répondre :

- Si $\boldsymbol{k} < -2$ alors l'équation $f(x) = \boldsymbol{k}$ n'a aucune solution.
- Si $\boldsymbol{k} = 2$ alors l'équation $f(x) = \boldsymbol{2}$ a une unique solution qui est 3.
- Si $\boldsymbol{k} > -2$ alors l'équation a deux solutions : l'une avant 3 et l'autre après.

Seconde partie : l'étude d'une fonction rationnelle

a) La fraction h(x) existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $3 - x$ est non nul $\Leftrightarrow$ $x \neq 3$

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction h est $\mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$.

b) Calculons les images de 7 et -1 par la fonction h.

$$h(7) = \frac{7^2 - 5 \times 7 + 22}{2 - 7} = \frac{36}{-4} = -9 \qquad h(-1) = \frac{(-1)^2 - 5 \times (-1) + 22}{3 - (-1)} = \frac{28}{4} = 7$$

Pour déterminer les antécédents de 11 par la fonction h, résolvons l'équation $h(x) = 11$.

$$\frac{x^2 - 5.x + 22}{3 - x} - 11 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5.x + 22}{3 - x} - \frac{11.(3 - x)}{3 - x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 6.x - 11}{3 - x} = 0$$

Or une fraction est nulle si et seulement si son numérateur l'est. L'équation devient :

$$x^2 + 6.x - 11 = 0$$

Son discriminant $\Delta = 6^2 - 4\times1\times(-11) = 80$ étant positif, cette équation du second degré admet deux solutions que sont : $\dfrac{-6-\sqrt{80}}{2} = -3-2.\sqrt{5}$ et $\dfrac{-6+\sqrt{80}}{2} = -3+2.\sqrt{5}$.

Toutes deux sont dans l'ensemble de définition de la fonction h (valeurs non interdites).
Conclusion : 11 a deux antécédents par la fonction h que sont $-3-2.\sqrt{5}$ et $-3+2.\sqrt{5}$.

c) Nous devons envisager deux limites en 3 : l'une à sa gauche et l'autre à sa droite.

Lorsque x tend vers 3 par la gauche :

- le numérateur $x^2 - 5.x + 22$ tend vers $(3)^2 - 5\times3 + 22 = 16$.
- le dénominateur $3-x$ tend vers $3-3=0$ mais en étant positif. En effet $x<3 \Leftrightarrow 0<3-x$

donc $h(x)$ tend vers $\dfrac{16}{0^+} = +\infty$

Lorsque x tend vers 3 par la droite :

- le numérateur $x^2 - 5.x + 22$ tend aussi vers $(3)^2 - 5\times3 + 22 = 16$.
- le dénominateur $3-x$ tend vers $3-3=0$ mais en étant négatif. En effet $x>3 \Leftrightarrow 0>3-x$

donc $h(x)$ tend vers $\dfrac{16}{0^-} = -\infty$

Les limites en 3 de la fonction h étant infinies, la droite verticale d'équation $x=3$ est une asymptote à la courbe (C) représentant la fonction h.

d) Aux infinis, la fonction rationnelle $h(x)$ se comporte comme le quotient de ses termes dominants $\dfrac{x^2}{-x} = -x$. Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty.$$

e) Notre objectif est d'écrire h(x) sous la forme d'une somme d'une fonction affine et d'une quantité qui tend vers 0 aux infinis. Pour ce faire, nous allons décomposer la fonction rationnelle h(x) en divisant son numérateur par son dénominateur.

$$\begin{array}{rr|l} & x^2-5.x+22 & -x+3 \\ \ominus & x^2-3.x & \overline{-x+2} \\ \hline & -2.x+22 & \\ \ominus & -2.x+6 & \\ \hline & 16 & \end{array}$$

Ainsi pour tout réel $x \in D_h$:

$$h(x) = \frac{\overbrace{x^2-5.x+22}^{dividende}}{3-x} = \frac{\overbrace{(3-x)}^{diviseur}.\overbrace{(-x+2)}^{quotient} + \overbrace{16}^{reste}}{3-x} = -x+2+\frac{16}{3-x}$$

Or lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, $3-x$ s'en va respectivement vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Donc la quantité $\dfrac{16}{3-x}$ tend vers 0 aux infinis.

Conclusion : la courbe (C) représentant la fonction h admet aux voisinages des infinis une asymptote oblique Δ dont l'équation réduite est $y=-x+2$.

➲ Pour étudier la position relative de la courbe (C) et de son asymptote Δ, on s'intéresse au signe de la différence d'ordonnées $h(x)-(-x+2) = \dfrac{16}{3-x}$.

Dressons le tableau de signe de cette dernière quantité.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
16		+		+	
$3-x$		+	0	-	
$(C)-\Delta$		+	‖	-	

Conclusion : le tableau permet d'affirmer :

- Lorsque $x<3$, la différence d'ordonnées est positive : (C) est au-dessus de Δ.
- Lorsque $x>3$, la différence est négative : (C) est au-dessous de Δ.

f) Les fonctions $x^2-5.x+22$ et $3-x$ sont dérivables sur $D_h = \mathbb{R}\setminus\{3\}$. De plus, comme le dénominateur $3-x$ ne s'y annule pas alors leur quotient h(x) y est aussi dérivable.

Calculons la dérivée de cette fonction h. Pour tout $x \in D_h$, nous avons :

$$h'(x) = \left(\frac{x^2-5.x+22}{3-x}\right)' = \frac{\left(x^2-5.x+22\right)'.(3-x)-\left(x^2-5.x+22\right).(3-x)'}{(3-x)^2}$$

$$= \frac{(2.x-5).(3-x)-\left(x^2-5.x+22\right).(-1)}{(3-x)^2} = \frac{6.x-2.x^2-15+5.x+x^2-5.x+22}{(3-x)^2}$$

$$= \frac{-x^2+6.x+7}{(3-x)^2}$$

Pour factoriser le numérateur qui est une forme du second degré, calculons son discriminant : $\Delta_{-x^2+6.x+7} = (6)^2 - 4\times(-1)\times 7 = 36 + 28 = 64$.

$-x^2 + 6.x + 7$ a donc deux racines que sont $\dfrac{-6-8}{-2} = 7$ et $\dfrac{-6+8}{-2} = -1$. Il vient alors :

$$-x^2 + 6.x + 7 = \underbrace{(-1)}_{\textit{coefficient dominant}}.(x-7).(x+1) = (7-x).(x+1)$$

La dérivée de la fonction h devient :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 6.x + 7}{(3-x)^2} = \frac{(7-x).(x+1)}{(3-x)^2}$$

Connaissant les signes de tous les facteurs affines apparaissant dans cette dernière écriture de $h'(x)$, nous allons pouvoir déterminer son signe et ainsi accéder aux variations de la fonction rationnelle h.

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
$7-x$		+	|	+	|	+	0	-	
$x+1$		-	0	+	|	+	|	+	
$3-x$		+	|	+	0	-	|	-	
$3-x$		+	|	+	0	-	|	-	
$h'(x)$		-	0	+	||	+	0	-	
h	$+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$

g) La fonction h étant dérivable en 1, la tangente T_1 à la courbe (C) au point $A\left(1;\underbrace{9}_{h(1)}\right)$ existe et, est une droite horizontale ou oblique dont l'équation réduite est de la forme $y = m.x + p$.

Son coefficient directeur m est le nombre dérivé de la fonction h en 1, c'est-à-dire $h'(1)$.

Calculons-le en utilisant par exemple la forme factorisée de $h'(x)$.

$$h'(1) = \frac{(7-1).(1+1)}{(3-1)^2} = \frac{12}{4} = 3$$

L'équation réduite de la tangente T_1 est donc de la forme $y = 3.x + p$.

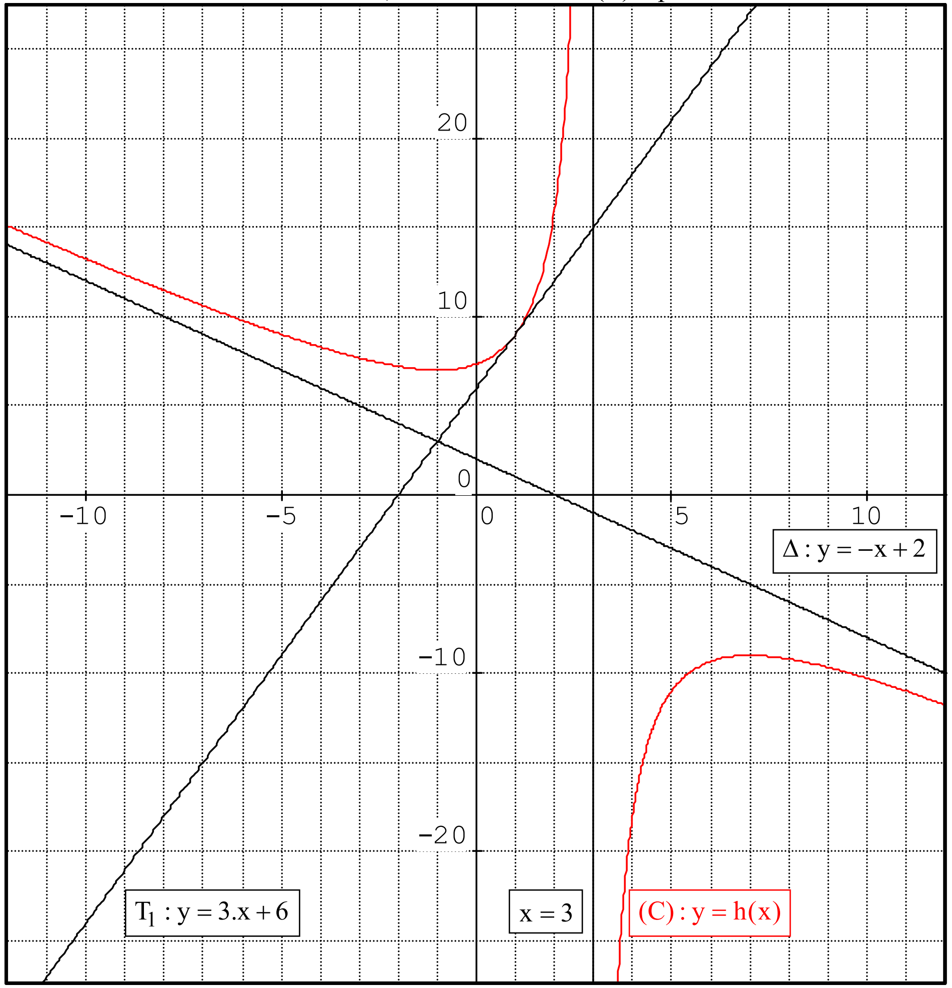
Il nous reste à déterminer l'ordonnée à l'origine p.

Cette droite T_1 passe par le point $A(1;9)$. Les coordonnées de ce dernier vérifient donc l'équation de cette première. Par conséquent, nous avons l'égalité :

$$y_A = 3.x_A + p \iff 9 = 3\times 1 + p \iff p = 9 - 3 = 6$$

Conclusion : l'équation réduite de la tangente T_1 est $y = 3.x + 6$.

h) A l'aide de ses deux asymptotes, de la tangente T_1 et de quelques points obtenus avec la table de valeurs de la calculatrice, on trace la courbe (C) représentant la fonction h.



Ce qui conclut notre étude de la fonction !

Devoir Surveillé No.6

Le contexte

Ce sixième devoir concluait un gros chapitre consacré à la géométrie analytique plane et au produit scalaire. Sa première partie était basée sur un petit problème que j'avais donné en seconde. Il fut d'ailleurs mieux réussi dans cette classe qu'au niveau supérieur !
Le second exercice me confirma que les élèves n'aimaient ni le calcul vectoriel (en ont-ils fait un jour ?), ni les barycentres
La dernière partie était consacrée à l'étude d'une fonction qui pour une fois n'était pas rationnelle.
Sans ce dernier exercice, il est probable que mon devoir aurait été un désastre.
Désormais j'en suis sûr : les élèves n'aiment pas la géométrie. Mais ont-ils eu un jour l'occasion de l'apprécier ? Pourtant il faut voir ce qu'ils dégustent !

L'énoncé

Première partie : il était une fois la géométrie analytique !

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Dans ce repère, on considère les points :

$$A\left(-1;-2\right) \qquad B\left(7;1\right) \qquad C\left(4;5\right) \qquad E\left(-2;2\right)$$

La droite $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $9.x-24.y+66=0$.

a) Faire une figure correspondant à la situation décrite ci-dessus. La droite $\mathcal{D}$ sera tracée à l'issue de la question 1.b.

b) Le point E fait-il partie de la droite $\mathcal{D}$? On justifiera sa réponse.
Démontrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont parallèles.
Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur la figure.

On appelle I le milieu du segment [AB]. F est le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la médiane (CI).

c) Déterminer (par le calcul) les coordonnées du point I.
Déterminer une équation de la droite (CI) qui est la médiane du triangle (ABC) issue du sommet C.
Déterminer par le calcul les coordonnées du point F.

On appelle Δ la hauteur du triangle ABC issue du sommet B.

d) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ.
Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ qui a pour diamètre [BC].
Déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la hauteur Δ.

On appelle Γ (se dit "gamma") l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=2$.

e) Déterminer une équation (cartésienne) de l'ensemble Γ.
Note : *on pourra se demander à quelle(s) condition(s) un point M(x;y) appartient-il à cet ensemble...*
En déduire la nature et les attributs de cet ensemble Γ, puis le tracer sur la figure.

Seconde partie : la revanche du barycentre

A et B sont deux points du plan distants de 6 centimètres.
On appelle G le barycentre des points pondérés $\left(A;1\right)$ et $\left(B;2\right)$.

a) Exprimer les longueurs GA et GB en fonction de la longueur AB.
Simplifier la somme vectorielle $\overrightarrow{MA}+2.\overrightarrow{MB}$.

b) Démontrer que pour tout point M du plan :

$$MA^2+2.MB^2=3.MG^2+\frac{2}{3}.AB^2$$

c) Déterminer :

- l'ensemble $\mathfrak{E}$ des points M du plan vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}+2.\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MA}=0$
- l'ensemble $\mathfrak{F}$ des points M du plan vérifiant $MA^2+2.MB^2=AB^2$

Dernière partie : la monotone destinée de la fonction h

La fonction h est définie sur l'ensemble $\left[-3;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$ par :

$$h(x)=\frac{\sqrt{3.x+9}}{2-x}$$

On appelle (C) la courbe représentant cette fonction h.

a) Calculer l'image de -3 par la fonction h.

b) Déterminer les limites de la fonction h lorsque x tend vers 2.
Que peut-on en déduire quant à la courbe (C) ?

c) Déterminer la limite de h(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
Quelle conséquence cela a-t-il sur la courbe (C) ?

d) Sur quel ensemble la fonction h est-elle dérivable ? On justifiera sa réponse.
En dérivant la fonction h, démontrer que :

$$h'(x)=\frac{3.x+24}{2.\sqrt{3.x+9}.(2-x)^2}$$

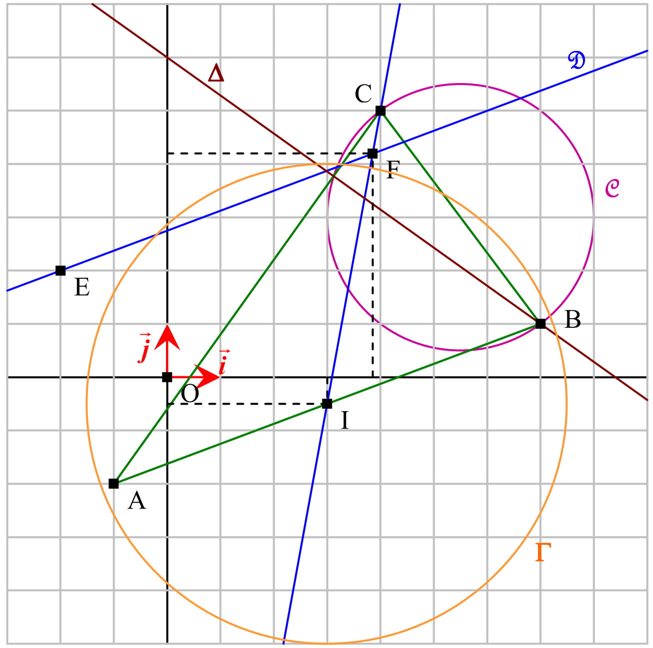
Dresser le tableau de variation de la fonction h.
Combien 0 a-t-il d'antécédents par la fonction h ? On justifiera sa réponse.

e) Dans un repère orthonormé, tracer (une esquisse de) la courbe (C) ainsi que ses éventuelles asymptotes.

Le corrigé

Première partie : il était une fois la géométrie analytique !

a) Graphiquement la situation est celle représentée ci-contre :



b) Regardons si les coordonnées du point E vérifient l'équation de la droite $\mathfrak{D}$.

$$9.x_E-24.y_E+66=9\times(-2)-24\times 2+66=-18-48+66=0$$

Les coordonnées du point E vérifiant l'équation de la droite $\mathfrak{D}$, ce premier appartient donc à cette seconde.

➲ Pour savoir si les deux droites (AB) et $\mathfrak{D}$ sont parallèles, nous allons regarder si deux de leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}(8;3)$.

Un vecteur directeur de $\mathfrak{D}$ d'équation cartésienne $\underbrace{9}_{a}.x+\underbrace{(-24)}_{b}.y+\underbrace{66}_{c}=0$ est $\vec{u}\left(\underbrace{24}_{-b};\underbrace{9}_{a}\right)$.

Ces deux vecteurs ont leurs coordonnées proportionnelles. En effet : $\vec{u}=3.\overrightarrow{AB}$.
Leurs vecteurs directeurs étant colinéaires, les droites (AB) et $\mathfrak{D}$ sont donc parallèles.
Conclusion : la droite $\mathfrak{D}$ est la parallèle à la droite (AB) passant par E. D'où son tracé !

c) Comme I est le milieu de [AB] alors $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{6}{2}=3;\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1}{2}=-0,5\right)$.

➲ La droite (CI) est définie par son vecteur directeur $\overrightarrow{CI}(-1;-5,5)$ et son point $C(4;5)$.
La question est de savoir à quelle(s) condition(s) sur ses coordonnées, un point $M(x;y)$ appartient-il à cette droite ?

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in(CI) &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-4\\y-5\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-1\\-5,5\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CI}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-4 & -1\\ y-5 & -5,5\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow (x-4).(-5,5)-(y-5).(-1)=0\\
&\Leftrightarrow -5,5.x+y+17=0
\end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne de la médiane (CI) est $11.x-2.y-34=0$.

➲ Si le point $F(x_F; y_F)$ est le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et (CI) alors ses coordonnées vérifient leurs deux équations. Elles sont donc les solutions du système :

$$\begin{cases} 9.x - 24.y + 66 = 0 & \textbf{(1)} \\ 11.x - 2.y - 34 = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Résolvons ce système 2×2 par combinaisons linéaires.

Pour déterminer x, nous éliminons y

$$\begin{array}{lr} \textbf{(1)} \longrightarrow & 9.x - 24.y + 66 = 0 \\ \textbf{(2)} \xrightarrow{\times 12} \ominus & 132.x - 24y - 408 = 0 \\ \hline & -123.x + 474 = 0 \\ & x = \dfrac{-474}{-123} = \dfrac{158}{41} \end{array}$$

Pour déterminer y, nous éliminons x.

$$\begin{array}{lr} \textbf{(1)} \xrightarrow{\times 11} & 99.x - 264.y + 726 = 0 \\ \textbf{(2)} \xrightarrow{\times 9} \ominus & 99.x - 18y - 306 = 0 \\ \hline & -246.y + 1032 = 0 \\ & y = \dfrac{-1032}{-246} = \dfrac{172}{41} \end{array}$$

Conclusion : le point F a pour coordonnées $\left(\dfrac{158}{41}; \dfrac{172}{41}\right)$

d) La hauteur Δ est la perpendiculaire à la droite (AC) passant par le point B. Elle est parfaitement définie par son vecteur normal $\overrightarrow{AC}(5;7)$ et le point $B(7;1)$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \Delta \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-7 \\ y-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x-7 \\ y-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-7).5 + (y-1).7 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 5.x + 7.y - 42 = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : une équation de la hauteur est $5.x + 7.y - 42 = 0$.

➲ Le cercle $\mathcal{C}$ est défini par son diamètre [BC]. Dire qu'un point M appartient à $\mathcal{C}$ équivaut à dire que le triangle BCM est rectangle en M. Ainsi :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-7 \\ y-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-5 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x-7 \\ y-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-4 \\ y-5 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-7).(x-4) + (y-1).(y-5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 11.x - 6.y + 33 = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 - 11.x - 6.y + 33 = 0$.

Note : *pour vérifier la véracité du résultat trouvé, on peut regarder si les coordonnées des points B et C vérifient l'équation obtenue. Une démarche similaire peut être entreprise avec les équations de droite.*

e) Pour répondre à cette équation, nous allons basculer d'entrée de la relation vectorielle définissant l'ensemble sur une équation liant les coordonnées. C'est à partir de l'équation obtenue que nous déterminerons la nature et les attributs de Γ.
Déterminons une équation cartésienne de l'ensemble Γ.
A quelle(s) condition(s) un point $M(x;y)$ appartient-il à l'ensemble Γ ?

$$\begin{aligned} M(x;y) \in \Gamma \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1-x \\ -2-y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7-x \\ 1-y \end{pmatrix} = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad (-1-x).(7-x) + (-2-y).(1-y) = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 + y^2 - 6.x + y - 9 = 2}_{\textit{Ce peut être l'équation d'un cercle...}} \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-3)^2 - 9}_{x^2-6.x} + \underbrace{(y+0,5)^2 - 0,25}_{y^2+y} - 9 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 + (y+0,5)^2 = 20,25 \\ &\Leftrightarrow \quad IM^2 = 20,25 \quad \Leftrightarrow \quad IM = 4,5 \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble Γ est le cercle de centre I et de rayon 4,5. Une de ses équations cartésiennes est $x^2 + y^2 - 6.x + y - 11 = 0$

Seconde partie : la revanche du barycentre

Note : *à l'instar de ce qui a été fait dans la première partie, le présent exercice peut se résoudre en introduisant un repère orthonormé dont A (ou B) est l'origine. Cela évite alors bien des calculs...*

a) Comme G est le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;2)$, alors $\overrightarrow{GA} + 2.\overrightarrow{GB} = \vec{o}$.
Cette relation devient :

$$\overrightarrow{GA} + \underbrace{2.\overrightarrow{GA} + 2.\overrightarrow{AB}}_{2.\overrightarrow{GB}} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad 3.\overrightarrow{GA} = -2.\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$$

Cette relation vectorielle indique que G est situé aux deux tiers du segment [AB] à partir de A. On en déduit les relations de distance : $GA = \dfrac{2}{3}.AB$ et $GB = \dfrac{1}{3}.AB$.

De plus :

$$\overrightarrow{MA}+2.\overrightarrow{MB}=\underbrace{\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}}_{\overrightarrow{MA}}+\underbrace{2.\overrightarrow{MG}+2.\overrightarrow{GB}}_{2.\overrightarrow{MB}}=3.\overrightarrow{MG}+\underbrace{\overrightarrow{GA}+2.\overrightarrow{GB}}_{=\vec{o}}=3.\overrightarrow{MG}.$$

b) Pour tout point M du plan, nous avons :

$$MA^2+2.MB^2=\overrightarrow{MA}^2+2.\overrightarrow{MB}^2$$
$$=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+2.\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2$$
$$=\underbrace{\overrightarrow{MG}^2+2.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}^2}+\underbrace{2.\overrightarrow{MG}^2+4.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}^2}$$
$$=3.MG^2+GA^2+2.GB^2+2.\overrightarrow{MG}.\underbrace{\left[\overrightarrow{GA}+2.\overrightarrow{GB}\right]}_{=\vec{o}}$$
$$=3.MG^2+\left(\frac{2}{3}.AB\right)^2+2.\left(\frac{1}{3}.AB\right)^2+2.\overrightarrow{MG}.\vec{o}$$
$$=3.MG^2+\frac{4}{9}.AB^2+\frac{2}{9}.AB^2+0=3.MG^2+\frac{2}{3}.AB^2$$

Note : *la démonstration précédente suit un cheminement similaire à celle du théorème d'Al Kashi : les carrés de distances vont devenir des carrés scalaires, nous décomposerons les vecteurs en introduisant un point adéquat (ici le barycentre G), puis nous développerons les identités remarquables scalaires...*

c) Les relations établies aux deux précédentes questions permettent de simplifier les caractérisations de deux ensembles proposés. Explicitons ce qu'est l'ensemble $\mathfrak{E}$.

$$M\in\mathfrak{E}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}+2.\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{MA}=0\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MA}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MA}=0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\text{ et }\overrightarrow{MA}\text{ orthogonaux}\Leftrightarrow\text{AGM rectangle en M}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathfrak{E}$ est le cercle de diamètre [AG].

➲ Pour ce qui concerne l'ensemble $\mathfrak{F}$, nous pouvons écrire :

$$M\in\mathfrak{F}\Leftrightarrow MA^2+2.MB^2=AB^2\Leftrightarrow 3.MG^2+\frac{2}{3}.AB^2=AB^2$$
$$\Leftrightarrow 3.MG^2=\frac{1}{3}.AB^2\Leftrightarrow MG^2=\frac{1}{9}.AB^2=\frac{1}{9}\times36=4\Leftrightarrow MG=2$$

Conclusion : l'ensemble $\mathfrak{F}$ est le cercle de centre G et de rayon 2.

Dernière partie : la monotone destinée de la fonction h

Note : *la fonction h est définie sur l'ensemble $[-3;2[\cup]2;+\infty[$ car d'une part, la racine doit être définie et de l'autre, le dénominateur ne peut être nul.*

a) Calculons l'image demandée : $h(-3)=\dfrac{\sqrt{3\times(-3)+9}}{2-(-3)}=\dfrac{\sqrt{0}}{5}=0$.

b) Deux limites doivent être considérées en 2 : l'une à sa gauche et l'autre à sa droite.

Lorsque x tend vers 2 par la gauche :

- le numérateur $\sqrt{3.x+9}$ tend vers $\sqrt{3\times2+9}=\sqrt{15}$.
- le dénominateur $2-x$ tend vers 0^+.

donc $h(x)$ tend vers $\dfrac{\sqrt{15}}{0^+}=+\infty$

Lorsque x tend vers 2 par la droite :

- le numérateur $\sqrt{3.x+9}$ tend aussi vers $\sqrt{3\times2+9}=\sqrt{15}$.
- le dénominateur $2-x$ tend vers 0^-.

donc $h(x)$ tend vers $\dfrac{\sqrt{15}}{0^-}=-\infty$

Donc la droite verticale d'équation $x=2$ est une asymptote à la courbe (C).

c) Sous l'écriture qui nous est proposée, la fonction h(x) est une forme indéterminée. Pour lever cette dernière, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur de h(x) par leurs termes les plus forts. C'est le vieux truc des termes dominants !

Pour tout $x>2$ *(car ainsi les racine et inverse de x existent, et le dénominateur de h n'est jamais nul)*, nous avons :

$$h(x)=\frac{\sqrt{3.x+9}}{2-x}=\frac{\sqrt{x}.\sqrt{3+\frac{9}{x}}}{x.\left(\frac{2}{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}}{x}.\frac{\sqrt{3+\frac{9}{x}}}{\frac{2}{x}-1}=\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{\sqrt{3+\frac{9}{x}}}{\frac{2}{x}-1}$$

Or lorsque x tend vers $+\infty$:

- $3+\dfrac{9}{x}$ tend vers 3 donc $\sqrt{3+\dfrac{9}{x}}$ tend vers $\sqrt{3}$.
- $\dfrac{2}{x}-1$ tend vers -1

donc $\dfrac{\sqrt{3+\frac{9}{x}}}{\frac{2}{x}-1}$ tend vers $\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$. Par conséquent, h(x) tend vers $0\times\left(-\sqrt{3}\right)=0$

Conclusion : la limite à l'infini de la fonction h est nulle. L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

d) La fonction racine $\sqrt{3.x+9}$ est dérivable là où elle est définie et ne s'annule pas, c'est-à-dire sur l'intervalle $\left]-3;+\infty\right[$. Sa dérivée est : $\left(\sqrt{3.x+9}\right)' = \dfrac{3}{2.\sqrt{3.x+9}}$.

Sur l'ensemble $\left]-3;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$, la fonction h est le quotient de deux fonctions dérivables. Comme son dénominateur ne s'y annule jamais, h est donc dérivable sur cet ensemble. Mais elle ne l'est pas en -3 !

Pour tout $x\in\left]-3;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$, nous avons :

$$h'(x) = \frac{\left(\sqrt{3.x+9}\right)'.(2-x)-(2-x)'.\sqrt{3.x+9}}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{3}{2.\sqrt{3.x+9}}.(2-x)-(-1).\sqrt{3.x+9}}{(2-x)^2} = \frac{\dfrac{3.(2-x)+\left(\sqrt{3.x+9}\right)^2\times 2}{2.\sqrt{3.x+9}}}{(2-x)^2}$$

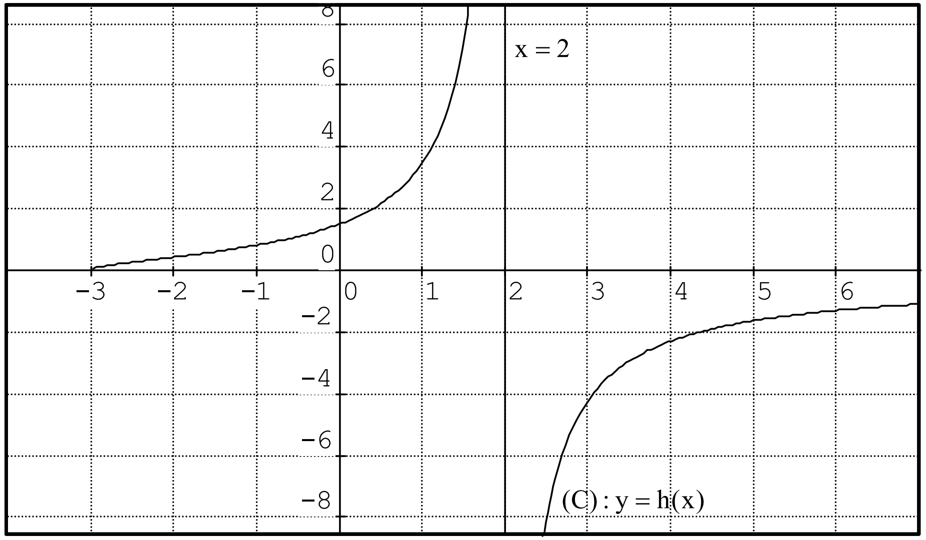
$$= \frac{6-3.x+(3.x+9)\times 2}{2.\sqrt{3.x+9}.(2-x)^2} = \frac{3.x+24}{2.\sqrt{3.x+9}.(2-x)^2}$$

Connaissant les signes de tous les facteurs, nous dressons le tableau de variation de h.

x	-3		2		$+\infty$
$3.x+24$		$+$	|	$+$	
2		$+$	|	$+$	
$\sqrt{3.x+9}$		$+$	|	$+$	
$(2-x)^2$		$+$	0	$+$	
$h'(x)$	||	$+$	||	$+$	
h	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0

Le tableau de variation de h permet de conclure que 0 n'a qu'un seul antécédent : -3 .

e) Les deux asymptotes trouvées et quelques points permettent de tracer la courbe (C).



Devoir Surveillé No.7

Le contexte

Ce septième devoir fut exclusivement consacré aux suites sur lesquelles un gros chapitre avait été fait. La première partie traite de leurs limites. On retrouvait à cette occasion des notions et des compétences qui avaient été mises en oeuvre avec les fonctions.
J'ai toujours fait en sorte que "suite" rime avec "bon sens" et "situation concrète". Les suites sont intéressantes dans la mesure où en première, elles permettent résoudre certains problèmes où les fonctions sont inopérantes. Les seconde et dernière parties sont deux illustrations de ce concept.
La seconde partie est l'adaptation d'un exercice qui fut donné au BAC ES/Spécialité Math.
La dernière partie est un classique des suites arithmétiques et géométriques qui permet d'utiliser toutes les connaissances et compétences vues en cours.
Pour être complet, je me dois de préciser que ce septième devoir fut un désastre. Je vois là conséquence de programmes qui depuis le collège privilégient les recettes toutes faites au bon sens et à la compréhension globale.

L'énoncé

Première partie : des suites et leurs limites

Une grande attention sera portée à la rédaction et aux justifications

a) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2.n+1}$

b) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2 + (-1)^n.n$

c) Déterminer la limite de la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{2^n - 1}{3^n + 1}$.

d) Déterminer la limite de la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$S_n = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{n+1 termes}}$$

Seconde partie : que reste-t-il de mon gazon ?

Anastase, jardinier amatheur, avait à l'origine une splendide pelouse de 2000 mètres carrés de gazon autour de sa maison. Il habite à la campagne et tous les ans 20% du gazon est détruit durant l'été et remplacé par du chiendent (c'est-à-dire quelques brins d'herbe sur une terre asséchée qui ne saurait prétendre au titre de gazon).
Pour compenser les pertes, chaque année à l'automne, il arrache 50 mètres carrés de chiendent et le remplace par du gazon.
On appelle u_n la surface de gazon restant à la fin de la nième année.
u_0 désigne la surface initiale de gazon. Nous avons donc $u_0 = 2000$
Dans tout l'exercice, les surfaces sont exprimées en mètres carrés.

a) Calculer u_1 et u_2.
Pourquoi peut-on écrire que pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}8 \times u_n + 50$?

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.

b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0{,}8$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Démontrer que pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = -350 \times 0{,}8^n$$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
Que peut-on en conclure quant à la pelouse de notre ami Anastase ? Est-ce grave ?

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).
Que peut-on en conclure quant à la pelouse de ce brave Anastase ? Disparaîtra-t-elle ?

Dernière partie : le lièvre et la tortue, la revanche ?

Monsieur Lièvre et Madame Tortue ont tous deux décidé de participer au semi-marathon de Trifouilly-Les-Trois-Coucoux. Cette course à patte mesure 21 kilomètres.

- Comme à son habitude, Monsieur Lièvre part très vite. Il parcourt le premier kilomètre en deux minutes et trente secondes.
  On appelle L_n le temps exprimé en secondes mis par Monsieur Lièvre pour parcourir le nième kilomètre. Nous avons donc $L_1 = 150$.
  La fatigue faisant son oeuvre, le temps de parcours kilométrique L_n de Monsieur Lièvre augmente de 5 secondes à chaque kilomètre.

- Quant à Madame Tortue, elle décide de partir à son rythme. Elle parcourt son premier kilomètre en quatre minutes et trente secondes.
  On appelle T_n le temps exprimé en secondes mis par Madame Tortue pour parcourir le nième kilomètre. Nous avons donc $T_1 = 270$
  Se sentant de mieux en mieux, le temps de parcours kilométrique T_n de Madame Tortue diminue de 3% d'un kilomètre sur l'autre.

a) Calculer le temps L_2 que met Monsieur Lièvre pour parcourir le deuxième kilomètre.
Exprimer L_n en fonction de n. On justifiera sa réponse. On pourra vérifier avec L_2.
En déduire le temps L_{21} mis par Monsieur Lièvre pour parcourir le dernier kilomètre.

b) Calculer le temps T_2 que met Madame Tortue pour parcourir le deuxième kilomètre.
Exprimer T_n en fonction de n. On justifiera sa réponse.
En déduire le temps T_{21} mis par Madame Tortue pour parcourir le dernier kilomètre.

c) Qui de Madame Tortue ou de Monsieur Lièvre arrivera le premier ? Ce dernier tient-il enfin sa revanche ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

Première partie : des suites et leurs limites

a) De prime abord (u_n) est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. De plus, la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2.x+1}$ n'est pas une fonction rationnelle. Pour déterminer la limite de cette suite, nous allons factoriser ses numérateur et dénominateurs par les termes qui nous semblent les plus forts. Et alors, ils s'expliqueront !

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2.n+1} = \frac{\sqrt{n.\left[1+\frac{1}{n}\right]}}{2n.\left[1+\frac{1}{2n}\right]} = \frac{\sqrt{n}}{2.n} \times \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2.\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{2n}}$$

Or lorsque n tend vers $+\infty$, $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$, $1+\frac{1}{2.n}$ et donc leur quotient tendent vers 1.

Comme $\frac{1}{2.\sqrt{n}}$ tend vers 0 alors (u_n) tend vers $0 \times \frac{1}{1} = 0$.

b) Suivant la parité de l'entier n, $(-1)^n$ est égal à -1 ou 1. Pour déterminer la limite de la suite (v_n), nous allons chercher à encadrer celle-ci.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \le (-1)^n \le 1 \iff \underbrace{-n \le (-1)^n.n \le n}_{\text{On multiplie par n qui est positif}} \iff \underbrace{n^2 - n \le v_n \le n^2 + n}_{\text{On ajoute } n^2}.$$

Or lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $n^2 - n = \underbrace{n}_{+\infty}.\underbrace{(n-1)}_{+\infty}$ tend vers $+\infty$. Ainsi (v_n) est-elle minorée par une suite qui a pour limite $+\infty$. Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

c) La suite (w_n) est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$ et la fonction $f(x) = \frac{2^x - 1}{3^x - 1}$ n'est pas une fonction rationnelle. A l'instar du 1.a, nous allons factoriser le quotient w_n par ses termes les plus forts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \frac{2^n - 1}{3^n + 1} = \frac{2^n}{3^n} \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3^n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3^n}}$$

Or lorsque n tend vers $+\infty$, 2^n et 3^n tendent vers $+\infty$. Donc $1-\frac{1}{2^n}$, $1+\frac{1}{3^n}$ et donc leur quotient tendent vers 1.

Quant à la suite géométrique $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, elle converge vers 0.

Par conséquent : $\lim(w_n) = 0 \times \frac{1}{1} = 0$

d) (S_n) n'est pas une suite géométrique mais la somme des $n+1$ premiers termes d'une de celles-ci. L'expression de S_n peut donc être modifiée et explicitée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....+\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{Somme des n+1 premiers termes de la suite géométrique de raison 1/2 et de premier terme } u_0=1} = \underbrace{1}_{u_0} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\times\left[1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0. Donc S_n converge vers $2\times\left[1-\frac{1}{2}\times 0\right]=2$.

Seconde partie : que reste-t-il de mon gazon ?

a) Les calculs de u_1 puis de u_2 donnent une idée de ce qui se passe entre u_n et u_{n+1}

$$u_1 = u_0 - \underbrace{20\%\text{ de } u_0}_{\text{Ce qui est détruit l'été}} + \underbrace{50}_{\text{Ce qu'il replante}} = u_0 - 0,2\times u_0 + 50 = 0,8.u_0 + 50 = 1650$$

$$u_2 = u_1 - \underbrace{20\%\text{ de } u_1}_{\text{Ce qui est détruit l'été}} + \underbrace{50}_{\text{Ce qu'il replante}} = u_1 - 0,2\times u_1 + 50 = 0,8.u_1 + 50 = 1370$$

Le phénomène observée les deux premières années se reproduit les années suivantes. De manière générale, de la année n sur la suivante $n+1$, la surface de gazon u_n diminue de 20% puis augmente de 50 m². Donc :

$$u_{n+1} = u_n - \underbrace{20\%\text{ de } u_n}_{\text{Ce qui est détruit l'été}} + \underbrace{50}_{\text{Ce qu'il replante}} = u_n - 0,2\times u_n + 50 = 0,8.u_n + 50$$

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 250$. Donc $u_n = v_n + 250$.

Pour prouver que (v_n) est géométrique, nous allons chercher à exprimer le terme v_{n+1} en fonction de v_n.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous pouvons écrire :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 250$$
$$= \underbrace{0,8\times u_n + 50}_{\text{Relation de récurrence}} - 250 = 0,8\times[v_n + 250] - 200 = 0,8.v_n + 200 - 200 = 0,8.v_n$$

Pour passer du terme v_n au suivant v_{n+1}, on multiplie à chaque fois par 0,8. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 250 = 1750$.

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = 1750\times 0,8^n$ et par suite $u_n = \underbrace{1750\times 0,8^n}_{v_n} + 250$

c) Pour tout entier n, nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{\left[1750\times 0,8^{n+1} + 250\right]}_{u_{n+1}} - \underbrace{\left[1750\times 0,8^n + 250\right]}_{u_n}$$
$$= 1750\times \underbrace{0,8\times 0,8^n}_{\text{n+1 facteurs 0,8}} - 1750\times 0,8^n$$
$$= 1750\times 0,8^n \times[0,8-1] = -0,2\times 1750\times 0,8^n = -350\times 0,8^n$$

La différence de deux termes consécutifs $u_{n+1}-u_n$ étant toujours négative, la suite (u_n) est donc décroissante.

La surface de la pelouse de ce brave Anastase ne fera que décroître. Bref, la situation est grave !

d) Lorsque n tend vers $+\infty$, $0,8^n$ tend vers 0. Donc la suite (u_n) converge vers 250.

Bien que diminuant d'année en année, la surface de la pelouse d'Anastase finira par se stabiliser vers les 250 mètres carrés. Il restera toujours un peu de son beau gazon !

Dernière partie : le lièvre et la tortue, la revanche ?

a) $L_2 = L_1 + \underbrace{5}_{\text{temps supplémentaire}} = 155$.

De manière générale, le temps L_{n+1} mis par Monsieur Lièvre pour couvrir le kilomètre $n+1$ a augmenté de 5 secondes par rapport à celui L_n mis pour parcourir le kilomètre n.

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $L_{n+1} = L_n + 5$.

La suite (L_n) est donc arithmétique de raison 5 et de premier terme $L_1 = 150$.

Par suite pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons : $L_n = L_1 + (n-1)\times 5 = 145 + 5.n$

Appliquant cette formule au rang 21, on obtient que Monsieur Lièvre a mis 250 secondes soit 4 minutes et 10 secondes pour parcourir son dernier kilomètre.

b) $T_2 = T_1 - 3\%\text{ de } T_1 = T_1 - 0,03\times T_1 = (1-0,03).T_1 = 0,97\times T_1 = 261,9s$

De manière générale, le temps T_{n+1} mis par Madame Tortue pour couvrir le kilomètre $n+1$ a diminué de 3% par rapport à celui T_n mis pour parcourir le kilomètre n.

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$T_{n+1} = T_n - 3\%\text{ de } T_n = T_n - 0,03\times T_n = 0,97\times T_n$$

La suite (T_n) est géométrique de raison 0,97 et de premier terme $T_1 = 270$.

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$T_n = T_1 \times 0,97^{n-1} = 270 \times 0,97^{n-1}$$

Appliquant cette formule au rang 21, on obtient que Monsieur Tortue a mis 146,8 secondes soit 2 minutes et 26 secondes pour parcourir son dernier kilomètre.

c) Le temps mis par chaque concurrent est la somme des 21 temps de parcours kilométriques. Pour Monsieur Lièvre, il s'agit des 21 premiers termes de la suite arithmétique (L_n) et pour Madame Tortue des 21 premiers termes de la suite géométrique (T_n). D'où les emplois des formules adéquates.

Calculons le temps mis par Monsieur Lièvre.

$$\text{Temps} = \underbrace{L_1 + L_2 + ... + L_{21}}_{\substack{\textit{Somme de 21 termes consécutifs} \\ \textit{de la suite ariméthique } (L_n)}} = \underbrace{21}_{\substack{\textit{Nombre} \\ \textit{de termes}}} \times \frac{L_1 + L_{21}}{2} = 4200 \text{ secondes} = 1 \text{ heure } 10$$

Calculons le temps mis par Madame Tortue.

$$\text{Temps} = \underbrace{T_1 + T_2 + ... + T_{21}}_{\substack{\textit{Somme de 21 termes consécutifs} \\ \textit{de la suite géométrique } (T_n) \\ \textit{de raison 0,97}}} = T_1 \times \frac{1 - 0,97^{21}}{1 - 0,97} = 4252,68'' = 1 \text{ heure } 10'\ 52''$$

Conclusion : Monsieur Lièvre mettra 52 secondes de moins que Madame Tortue. Il tient enfin sa revanche.

Devoir Surveillé No.8

Le contexte

Ce huitième et dernier devoir était consacré aux limites de suites (et à travers elles celles des fonctions) ainsi qu'à la géométrie analytique dans l'espace.
La première partie prolongeait celle du précédent devoir. Cette dernière avait été un tel succès qu'une revanche me parut nécessaire.
Beaucoup trouveront que la dernière partie consacrée à la géométrie analytique dans l'espace dépasse de beaucoup le programme officiel de première S. Par contre, elle est tout à fait dans les limites de celui de la spécialité math de première ES. Comme si les élèves de cette classe étaient meilleurs que leurs camarades scientifiques ! Et après, on viendra vous parler de cohérence des programmes !
Pour conclure, précisons que ce dernier devoir fut un des plus réussis de l'année. Il faut dire qu'il faisait peu appel au bon sens et à l'initiative...

L'énoncé

Première partie : le retour des suites et de leurs limites

Dans le présent exercice, une grande attention sera portée à la rédaction et aux justifications. On attire l'attention de l'aimable participant(e) qu'il est toutefois inutile de se lancer dans de grandes tirades sans fins. Soyez efficace !

a) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \dfrac{2}{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$

b) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 7^n - 8^n$

c) Déterminer la limite de la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{2.n+1}}$.

d) Déterminer la limite de la suite (x_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = \dfrac{3^n - 4^n}{3^n + 2^n}$

Seconde partie : wide open spaces !

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dans celui-ci, on considère les points :

$A(3;-2;1)$ $B(0;2;4)$ $C(2;4;0)$ $D(-4;-2;12)$ $E(-2;3;-2)$

Le point F est le barycentre des points pondérés $(A,3)$, $(C,5)$ et $(E,-4)$.

a) Faire une figure correspondant à la situation décrite ci-dessus.

b) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

c) Quelle relation vectorielle le point F vérifie-t-il ?
A partir de celle-ci, déterminer par le calcul les coordonnées du point F.

d) Les points A, B et E sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse. Peut-on alors parler du plan (ABE) ?
Démontrer que $\vec{u}(27;24;-5)$ est un vecteur normal au plan (ABE).
Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

On appelle I le point d'intersection du plan (ABE) et de l'axe $(O;\vec{i})$. J est le point d'intersection du plan (ABE) et de l'axe $(O;\vec{j})$. Enfin, on baptise K le point d'intersection de l'axe $(O;\vec{k})$ et du plan (ABE).

e) Le point I appartenant à l'axe $(O;\vec{i})$, que peut-on dire de ses coordonnées ?
Indication : *on pourra s'intéresser à ses ordonnée et cote.*
Déterminer les coordonnées du point I.
Indication : *on rappelle que le point I appartient à l'axe* $(O;\vec{i})$ *et au plan (ABE).*

f) Déterminer les coordonnées des points J et K.
Tracer le triangle (IJK) qui est la trace du plan (ABE) sur les axes de coordonnées.

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 3$.

g) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{E}$.
A partir de son équation cartésienne, déduire la nature de cet ensemble $\mathcal{E}$ dont on précisera les attributs.

Le corrigé

Première partie : le retour des suites et de leurs limites

a) Lorsque n tend vers $+\infty$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ tend vers 0. Donc u_n tend vers $1-\frac{2}{1-0}=-1$

b) De prime abord, v_n est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$. Factorisons par le terme qui nous semble le plus fort, c'est-à-dire par 8^n .
Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$v_n=7^n-8^n=8^n\times\left[\left(\frac{7}{8}\right)^n-1\right]$$

Lorsque n tend vers $+\infty$:

- $\left(\frac{7}{8}\right)^n$ tend vers 0
- 8^n s'envole vers $+\infty$.

Donc v_n s'en va vers $(+\infty)\times[0-1]=-\infty$.

c) Là encore, nous sommes face à une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Pour nous sortir d'affaire, factorisons numérateur et dénominateur de w_n par leurs termes dominants.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$w_n=\frac{n+1}{\sqrt{2.n+1}}=\frac{n\times\left[1+\frac{1}{n}\right]}{\sqrt{n}\times\sqrt{2+\frac{1}{n}}}=\frac{n}{\sqrt{n}}\times\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}=\sqrt{n}\times\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}$$

Or lorsque n tend vers $+\infty$:

- $\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$
- $1+\frac{1}{n}$ vers 1
- $\sqrt{2+\frac{1}{n}}$ vers $\sqrt{2}$.

Donc w_n s'en va vers $\lim(v_n)=(+\infty)\times\frac{1}{\sqrt{2}}=+\infty$

d) L'indétermination du type $\frac{\infty-\infty}{\infty}$ pesant sur la fraction x_n se lève en factorisant ses numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$x_n=\frac{3^n-4^n}{3^n+2^n}=\frac{4^n\times\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right]}{3^n\times\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}=\left(\frac{4}{3}\right)^n\times\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

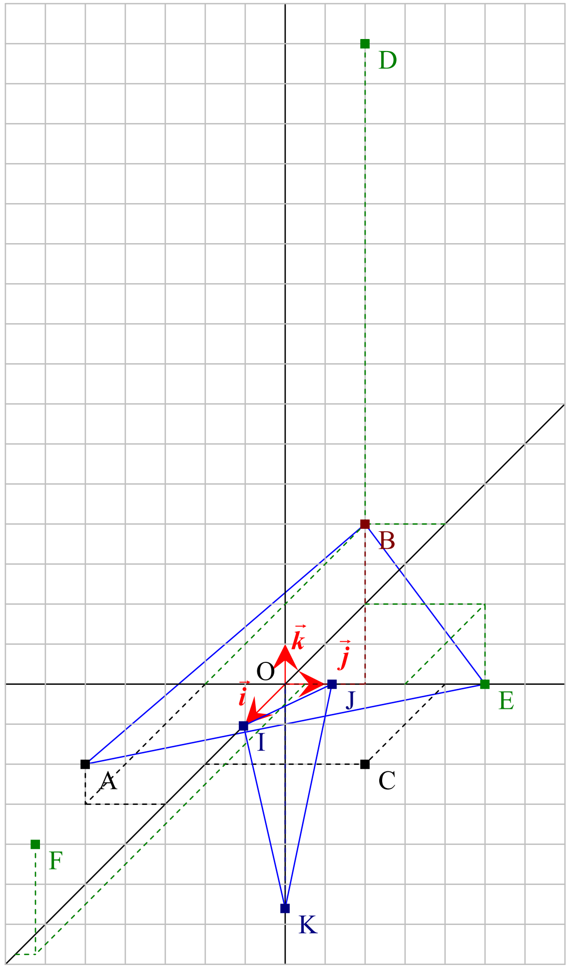
Or lorsque n tend vers $+\infty$:

- $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ s'envole vers $+\infty$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^n-1$ tend vers -1
- $1+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ vers 1.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=(+\infty)\times\frac{-1}{1}=-\infty$.

Seconde partie : wide open spaces !

a) Graphiquement, la situation est la suivante :



b) La question est de savoir s'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{AD}=\alpha.\overrightarrow{AB}+\beta.\overrightarrow{AC}$?

Sous forme de coordonnées, cette relation vectorielle s'écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-7\\0\\11\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AD}}=\alpha.\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\4\\3\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}}+\beta.\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\6\\-1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AC}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-7\\0\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3.\alpha-\beta\\4.\alpha+6.\beta\\3.\alpha-\beta\end{pmatrix}$$

Or deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales. Ainsi ont-ils :

Mêmes abscisses	Mêmes ordonnées	Mêmes côtes
$-7=-3.\alpha-\beta$	$0=4.\alpha+6.\beta$	$11=3.\alpha-\beta$

Nous sommes amener à résoudre le système linéaire 3×2 $\begin{cases}-3.\alpha-\beta=-7 & \textbf{\textit{(1)}}\\ 4.\alpha+6.\beta=0 & \textbf{\textit{(2)}}\\ 3.\alpha-\beta=11 & \textbf{\textit{(3)}}\end{cases}$.

A partir de ***(1)*** et ***(2)***, nous allons déterminer α et β par combinaisons linéaires.

Pour déterminer α, nous éliminons β

$$\begin{array}{lr}\textbf{\textit{(1)}}\xrightarrow{\times 5} & -18.\alpha-6.\beta=-42\\ \oplus & \\ \textbf{\textit{(2)}}\longrightarrow & 4.\alpha+6.\beta=0\\ \hline & -14.\alpha=-42\\ & \alpha=3\end{array}$$

Pour déterminer β, nous éliminons α

$$\begin{array}{lr}\textbf{\textit{(1)}}\xrightarrow{\times 4} & -12.\alpha-4.\beta=-28\\ \oplus & \\ \textbf{\textit{(2)}}\xrightarrow{\times 3} & 12.\alpha+18.\beta=0\\ \hline & 14.\beta=-28\\ & \beta=-2\end{array}$$

Mais les deux valeurs trouvées sont-elles aussi solutions de l'équation ***(3)*** ? Vérifions-le !

$$3.\alpha-\beta=3\times 3-(-2)=9+2=11$$

Vérifiant les trois équations, le couple $(3;-2)$ est donc la solution du système 3×2.

Ainsi avons-nous que $\overrightarrow{AD}=3.\overrightarrow{AB}-2.\overrightarrow{AC}$. Donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

c) Comme F est le barycentre de $(A,3)$, $(C,5)$ et $(E,-4)$ alors $3.\overrightarrow{AF}+5.\overrightarrow{CF}-4.\overrightarrow{EF}=\vec{o}$.

Appelons $(x;y;z)$ les coordonnées de ce point F. Du point de vue des coordonnées :

$$3.\underbrace{\begin{pmatrix}x-3\\y+2\\z-1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AF}}+5.\underbrace{\begin{pmatrix}x-2\\y-4\\z\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{CF}}-4.\underbrace{\begin{pmatrix}x+2\\y-3\\z+2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{EF}}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{o}}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4.x-27\\4.y-2\\4.z-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Or deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales. Ainsi ont-ils :

Mêmes abscisses	Mêmes ordonnées	Mêmes côtes
$4.x-27=0$	$4.x-2=0$	$4.x-11=0$
$x=\frac{27}{4}=6,75$	$y=\frac{2}{4}=0,5$	$x=\frac{11}{4}=3,75$

Conclusion : les coordonnées du point F sont $(6,75;0,5;2,75)$.

d) Pour savoir si les points A, B et E sont alignés, intéressons-nous aux vecteurs $\overrightarrow{AB}(-3;4;3)$ et $\overrightarrow{AE}(-5;5;-3)$. Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.
En effet :

$$\underbrace{\frac{-3}{-5}=0,6}_{\textit{Quotient abscisses}} \quad \neq \quad \underbrace{\frac{4}{5}=0,8}_{\textit{Quotient ordonnées}} \quad \neq \quad \underbrace{\frac{3}{-3}=-1}_{\textit{Quotient cotes}}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les points A, B et E ne sont pas alignés. C'est pour cela que l'on peut parler du plan (ABE).

➲ Démontrons que le vecteur $\vec{u}(27;24;-5)$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABE).

D'abord : $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}27\\24\\-5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3\\4\\3\end{pmatrix}=27\times(-3)+24\times4+(-5)\times3=-81+96-15=0$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Ensuite : $\vec{u}.\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}27\\24\\-5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-5\\5\\-3\end{pmatrix}=27\times(-5)+24\times5+(-5)\times(-3)=-135+120+15=0$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont aussi orthogonaux.

Conclusion : étant orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABE), le vecteur $\vec{u}$ est donc normal à ce dernier.

➲ Le plan (ABE) est défini par son point $B(0;2;4)$ et son vecteur normal $\vec{u}(27;24;-5)$.

$$M(x;y;z)\in(ABE) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y-2\\z-4\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}27\\24\\-5\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BM}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y-2\\z-4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}27\\24\\-5\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x.27+(y-2).24+(z-4).(-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 27.x+24.y-5.z-28=0$$

Conclusion : une équation du plan (ABE) est $27.x+24.y-5.z-28=0$.

e) Le point I appartenant à l'axe $(O;\vec{i})$, les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires.

Donc il existe un réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\overrightarrow{OI}=\boldsymbol{k}.\vec{i}=\boldsymbol{k}.\vec{i}+0.\vec{j}+0.\vec{k}$.

Donc le point I a des coordonnées de la forme $(\boldsymbol{k};0;0)$: ses ordonnée et cote sont nulles.
Le point I appartenant aussi au plan (ABE), ses coordonnées en vérifient l'équation.

$$27.\boldsymbol{k}+24\times0-5\times0-28=0 \Leftrightarrow 27.\boldsymbol{k}=28 \Leftrightarrow \boldsymbol{k}=\frac{28}{27}$$

Conclusion : le point I a pour coordonnées $\left(\frac{27}{28};0;0\right)$.

f) Le point J appartenant à l'axe $(O;\vec{j})$, ses coordonnées sont de la forme $(0;\boldsymbol{l};0)$.

Comme de plus, il appartient au plan (ABE) alors ses coordonnées en vérifient l'équation.

$$27\times0+24\times\boldsymbol{l}-5\times0-28=0 \Leftrightarrow 24.\boldsymbol{l}=28 \Leftrightarrow \boldsymbol{l}=\frac{28}{24}=\frac{7}{6}$$

Conclusion : le point J a pour coordonnées $\left(0;\frac{7}{6};0\right)$.

➲ De même, le point K appartenant à l'axe $(O;\vec{k})$ alors ses coordonnées sont de la forme $(0;0;\boldsymbol{m})$. K appartient aussi au plan (ABE) donc ses coordonnées en vérifient l'équation :

$$27\times0+24\times0-5\times\boldsymbol{m}-28=0 \Leftrightarrow -5.\boldsymbol{m}=28 \Leftrightarrow \boldsymbol{l}=-\frac{28}{5}=-5,6$$

Conclusion : les coordonnées du point K sont $(0;0;-5,6)$.

g) Déterminons une équation cartésienne de l'ensemble en question.

$$M(x;y;z) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z-4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z \end{pmatrix} = 3$$

$$\Leftrightarrow x.(x-2)+(y-2).(y-4)+(z-4).z = 3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2.x + y^2 - 6.y + 8 + z^2 - 4.z = 3}_{\text{Ce peut être l'équation d'une sphère...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 - 1}_{x^2-2.x} + \underbrace{(y-3)^2 - 9}_{y^2-6.y} + \underbrace{(z-2)^2 - 4}_{z^2-2.z} + 8 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2} = 3$$

$\Leftrightarrow$ $M(x;y;z)$ appartient à la sphère de centre $\Omega(1;3;2)$ et de rayon 3

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est la sphère de centre $\Omega(1;3;2)$ et de rayon 3. Une de ses équations cartésiennes est $x^2 + y^2 + z^2 - 2.x - 6.y - 4.z + 5 = 0$.

Les coulisses de ce journal de marche

*Le présent journal de marche a été réalisé avec Microsoft Word 2002. Le fichier PDF a été généré avec **GhostWord**. Certaines figures ont été réalisées avec le logiciel de géométrie **Déclic**. Les courbes ont été tracées avec le logiciel **GraphMatica 1.6**.*