Le mot de l'auteur

Cet été encore, je publie la cuvée des exercices que j'ai donnés en devoirs durant la saison scolaire écoulée. Voici donc la cuvée 2009-2010 ! Celle-ci est plus ou moins conforme au nouveau programme de seconde.
La publication estivale de mes méfaits est souvent l'occasion de me défouler contre la dégradation du niveau. Et cette cuvée n'y fera pas exception car la réforme des lycées qui s'amène va dissoudre l'enseignement scientifique dans «l'égalité des chances et la réussite scolaire pour tous». Nous voici dans le culte de l'ignardise ! Mais ne dites surtout aux parents qu'ils ne savent plus rien car il n'y a plus de mauvais élèves, il n'y a plus que des mauvais profs
A force d'allègement dans les classes inférieures, les nouveaux programmes ont accumulé les notions compliquées en terminale. Car, désormais, la spécialisation se fait en terminale. En une année, les élèves devront ingurgiter ce que nous avions à digérer en trois années. Bonne appétit !
Nos grandioses pédagogues vous répondront qu'avec les «nouvelles technologies», ce qu'ils appellent les TICE, on n'apprend plus de la même façon. En fait, on n'apprend plus du tout, on recopie.
On nous parle de connaissances, de compétences, on a oublié le mot maîtrise.
Alors que les Etats-Unis, la Chine, le Japon, l'Inde et la Corée du Sud forment à tour de bras des scientifiques, nos décideurs ont décidé de ne plus former que des consommateurs. C'est-à-dire des futurs esclaves.

Les exercices de ce volume sont classés par catégories :

La taverne de l'Irlandais
[http://www.tanopah.com]
présente

Une seconde... ...à contresens !

Le recueil des exercices donnés en devoirs de mathématiques durant la saison 2009-2010
par Jérôme ONILLON, prof. désagrégé et même pas recyclable de mathématiques

Conformité douteuse

Edition du jeudi 12 août 2010

Algorithmique

Tout un programme

Le contexte

L'algorithmique (et non la programmation, expliquez-moi la différence) est l'une des nouveautés du programme de seconde de cette année. Mais son introduction résulte surtout de la volonté de certains de ne pas permettre l'émergence d'une option informatique indépendante ainsi que cela avait pû se faire dans les années 80.
Dans cet exercice, on demande à l'aimable participant d'exécuter un programme assez complexe faisant appel à toutes les structures de programmation de base : affectation de variables, instructions conditionnelles, boucles...
L'honnêteté m'oblige à dire que ce ne fut pas une grande réussite.
Les passionnés vous le diront : la programmation n'est pas une chose qui peut se faire à moitié. Or, c'est ainsi qu'elle est faite en seconde !

L'énoncé

Vous êtes une machine pourvue seulement d'un écran. Exécuter le programme suivant et écrire sur l'écran situé à droite de celui-ci ce qui doit être affiché.
Les instructions sont soulignées. Les instructions d'un même bloc sont alignées sur une même colonne.

```
I et J sont deux entiers
J=0
Afficher "Examinons les valeurs"

Pour I={-6;3;5}
    Afficher J
    Afficher I
    J=I*I-1
    Si J<20 alors
        Afficher "Plus petit"
    sinon
        Afficher "Plus grand"

Afficher "Terminé !"
```

Le corrigé

Exécutons le programme instruction par instruction :

Instruction et commentaires	Valeurs de... I	Valeurs de... J	Affichage
`I et J sont deux entiers`	*On définit juste les deux entiers I et J*		
`J=0`		0	
`Afficher "Examinons les valeurs"`		0	Examinons les valeurs
`Pour I=-6` ***Première boucle***	-6	0	
`Afficher J`	-6	0	0
`Afficher I`	-6	0	-6
`J=I*I-1`	-6	35	
`...sinon Afficher "Plus Grand"`	-6	35	Plus grand
`Pour I=3` ***Seconde boucle***	3	35	
`Afficher J`	3	35	35
`Afficher I`	3	35	3
`J=I*I-1`	3	8	
`Si J<20 alors Afficher "Plus Petit"`	3	8	Plus petit
`Pour I=5` ***Dernière boucle***	5	8	
`Afficher J`	5	8	8
`Afficher I`	5	8	5
`J=I*I-1`	5	24	
`...sinon Afficher "Plus Grand"`	5	24	Plus grand
`Afficher "Terminé !`	5	24	Terminé

Equations, inéquations, ordre et techniques algébriques

Des solutions aux équations !

Le contexte

Un exercice assez classique de résolution d'équations du premier degré.

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les équations suivantes. On conclura chaque résolution en donnant l'ensemble de ses solutions.

$$5.(2-3.x)-8.x+3=23-7.(2.x-5) \qquad\qquad 1-\frac{1}{3}.\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}.x-\frac{7}{5}$$

Le corrigé

➲ Résolvons dans ℝ la première des équations proposées.

On commence par développer séparément chaque membre...

$$5.(2-3.x)-8.x+3=23-7.(2.x-5) \Leftrightarrow 10-15.x-8.x+3=23-14.x+35$$

...que l'on réduit ensuite.

$$\Leftrightarrow -23.x+13=58-14.x$$

$$\Leftrightarrow -23.x+14.x=58-13$$

$$\Leftrightarrow -9.x=45 \Leftrightarrow x=\frac{45}{-9}=-5$$

Conclusion : la solution de cette équation est -5. Ce qui se résume par : $S=\{-5\}$.

➲ Résolvons dans ℝ la seconde équation.

On développe séparément chaque membre... ...que l'on réduit ensuite.

$$1-\frac{1}{3}.\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}.x-\frac{7}{5} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}=\frac{5}{4}.x-\frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{6}{6}-\frac{1}{3}.x+\frac{1}{6}=\frac{5}{4}.x-\frac{7}{5}$$

Puis, nous transférons les termes en x à gauche et les autres à droite.

$$\Leftrightarrow \frac{7}{6}-\frac{1}{3}.x=\frac{5}{4}.x-\frac{7}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}.x-\frac{5}{4}.x=-\frac{7}{5}-\frac{7}{6}$$

On met chaque membre au même dénominateur...

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{12}.x-\frac{15}{12}.x=-\frac{42}{30}-\frac{35}{30} \Leftrightarrow -\frac{19}{12}\times x=-\frac{77}{30}$$

Diviser, c'est multiplier par l'inverse...

$$\Leftrightarrow x=\frac{\frac{7}{30}}{\frac{19}{12}}=\frac{77}{30}\times\frac{12}{19}=\frac{77\times 2\times \cancel{6}}{5\times \cancel{6}\times 19}=\frac{154}{95}$$

Conclusion : l'équation a pour seule solution $\frac{154}{95}$. Ce que l'on résume par : $S=\left\{\frac{154}{95}\right\}$

INÉQUATIONS

Le contexte

Un second exercice sur la résolution d'inéquations du premier degré

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes. On conclura chacune d'elle en donnant l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

$2-3.(4.x-1)\geq 5-14.x$	$13<12-7.x<54$	$-5<\dfrac{4.x-9}{5}\leq 7$

Le corrigé

➲ Résolvons dans ℝ l'inéquation :

$$2-3.(4.x-1)\geq 5-14.x \Leftrightarrow 2-12.x+3\geq 5-14.x \Leftrightarrow -12.x+5\geq 5-14.x$$
$$\Leftrightarrow -12.x+14.x\geq 5-5 \Leftrightarrow 2.x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle fermé $\left[0;+\infty\right[$.

➲ Résolvons dans ℝ l'inéquation :

On divise par un négatif, l'ordre change...

$$13<12-7.x<54 \overset{-12}{\Leftrightarrow} 1<-7.x<42 \overset{\div(-7)}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{7}>x>-6$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle ouvert $\left]-6;-\dfrac{1}{7}\right[$

➲ Résolvons dans ℝ l'inéquation :

$$-5<\frac{4.x-9}{5}\leq 7 \overset{\times 5}{\Leftrightarrow} -25<4.x-9\leq 35 \overset{+9}{\Leftrightarrow} -16<4.x\leq 44 \overset{\div 4}{\Leftrightarrow} -4<x\leq 11$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $\left]-4;11\right]$.

PEINTURES DE VILAINS PETITS CANARDS

Le contexte

Un exercice de résolutions d'inéquations produits et quotients où il faut s'appuyer sur les tableaux de signes. Il est aussi demandé une traduction graphique des inéquations résolues.

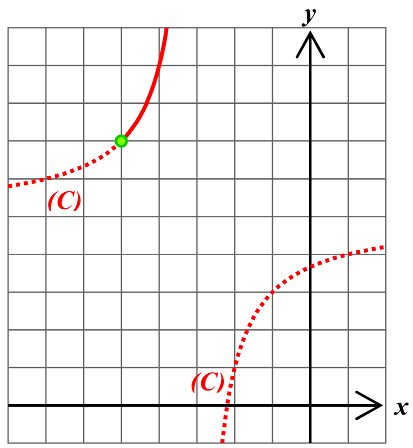
L'énoncé

a) Résoudre dans ℝ les quatre inéquations suivantes. On conclura chacune d'entre elles en donnant l'ensemble des solutions.

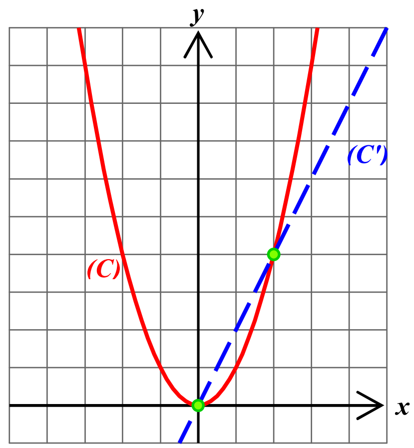
1.	$x^2\leq 2.x$	*2.*	$(2.x-3)^2>(5.x-6)^2$
3.	$\dfrac{5.x+11}{x+3}\geq 7$	*4.*	$4.x^2+6.x\leq -2.x-3$

b) Chaque graphique ci-dessous illustre une des quatre inéquations ci-dessus. Associer chaque graphique à chaque inéquation. Aucune justification n'est demandée.
Les quatre graphiques sont quadrillés de un en un.
Les courbes *(C)* et *(C')* représentent deux fonctions qui changent à chaque graphique.

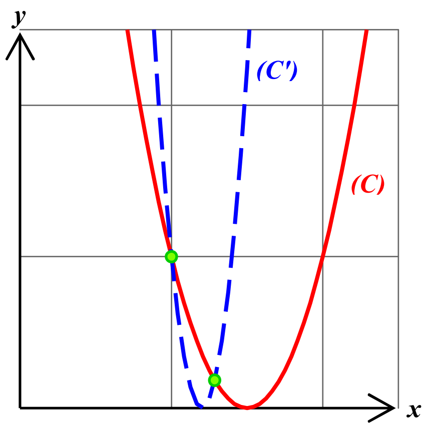
Le *graphique 1* illustre l'inéquation.......



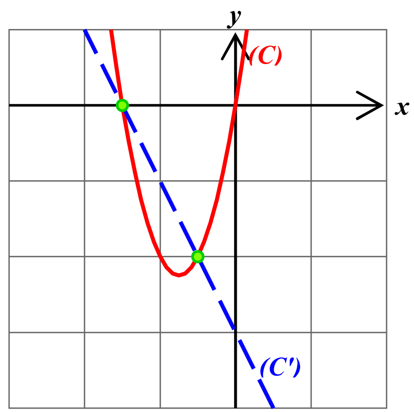
Le *graphique 2* illustre l'inéquation.......



Le *graphique 3* illustre l'inéquation.......



Le *graphique 4* illustre l'inéquation.......



Le corrigé

a) Résolvons dans ℝ l'inéquation :

$$x^2 \leq 2.x \Leftrightarrow x^2 - 2.x \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x}_{\text{Facteur...}} \times x - 2 \times \underbrace{x}_{\text{...commun}} \leq 0 \Leftrightarrow x \times (x-2) \leq 0$$

Dressons le tableau de signe de ce produit :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
x - 2		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le coefficient directeur 1 est positif.
$x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Le coefficient directeur 1 est positif.
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Le produit est négatif ou nul entre 0 et 2 compris.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $[0;2]$.

🛈 Cette inéquation est illustrée par le *graphique 2* où la courbe *(C)* d'équation $y = x^2$ est au-dessous de la droite *(C')* d'équation $y = 2.x$ entre 0 et 2.

2) Résolvons dans ℝ l'inéquation :

$$(2.x-3)^2 > (5.x-6)^2 \Leftrightarrow \underbrace{(2.x-3)^2 - (5.x-6)^2}_{\text{Identité remarquable } a^2-b^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[(2.x-3)+(5.x-6)]}_{(a+b)} \times \underbrace{[(2.x-3)-(5.x-6)]}_{(a-b)} > 0$$

$$\Leftrightarrow [2.x-3+5.x-6] \times [2.x-3-5.x+6] > 0$$

$$\Leftrightarrow (7.x-9) \times (-3.x+3) > 0$$

Pour quelles valeurs de x ce produit est-il strictement positif ?

Le tableau de signe de ce produit est :

x	$-\infty$		1		$\frac{9}{7}$		$+\infty$
7.x - 9		$-$	|	$-$	0	$+$	
-3.x + 3		$+$	0	$-$	|	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le coefficient directeur 7 est positif.
$7.x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{7}$

Le coefficient directeur -3 est négatif.
$-3.x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{-3} = 2$

Le produit est strictement positif entre 1 et $\frac{9}{7}$ non compris.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de cette seconde inéquation est l'intervalle $\left]1;\frac{9}{7}\right[$.

🛈 Cette seconde équation est illustrée par le *graphique 3*. La courbe *(C)* d'équation $y = (2.x-3)^2$ est au-dessus de la courbe *(C')* d'équation $y = (5.x-6)^2$ entre 1 et $\frac{9}{7}$.

3) Résolvons dans ℝ l'inéquation :

On met tout au même dénominateur x+3...

$$\frac{5.x+11}{x+3} \geq 7 \Leftrightarrow \frac{5.x+11}{x+3} - 7 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(5.x+11) - 7 \times (x+3)}{x+3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5.x+11-7.x-21}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2.x-10}{x+3} \geq 0$$

Pour quelles valeurs de x ce quotient est-il positif ou nul ?

Le tableau de signe de ce quotient est :

x	$-\infty$		-5		-3		$+\infty$
-2.x - 10		+	0	–	|	–	
x + 3		–	|	–	0	+	
Leur quotient		–	0	+	||	–	

Le coefficient directeur -2 est négatif.
$-2.x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{10}{-2}=-5$

Le coefficient directeur 1 est positif.
$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

Le quotient $\frac{-2.x-10}{x+3}$ est nul entre -5 compris et -3 non compris.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $[-5;-3[$.

ⓘ Cette troisième inéquation est illustrée par le *graphique 1* où la courbe *(C)* a pour équation $y=\frac{5.x+11}{x+3}$. La partie en trait plein est celle se trouvant au-dessus du niveau 7. Cette partie correspond à l'intervalle $[-5;-3[$.

4) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$4.x^2+6.x \leq -2.x-3 \Leftrightarrow 4.x^2+6.x+2.x+3 \leq 0 \Leftrightarrow 4.x^2+8.x+3 \leq 0$

Nous allons factoriser cette somme avec la forme canonique.

$\Leftrightarrow \underbrace{(2.x)^2+2\times 2.x\times 2}_{\text{Début de cette identité...}}+3 \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(2.x+2)^2}_{\text{...remarquable.}}-4+3 \leq 0$

$\Leftrightarrow (2.x+2)^2-1 \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(2.x+2)^2}_{a^2}-\underbrace{1^2}_{b^2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{[(2.x+2)+1]}_{(a+b)}\times\underbrace{[(2.x+2)-1]}_{(a-b)} \leq 0 \Leftrightarrow (2.x+3).(2.x+1) \leq 0$

Pour quelles valeurs de x ce produit est-il négatif ou nul ?

Dressons le tableau de signe de ce produit :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
2.x + 3		–	0	+	|	+	
2.x + 1		–	|	–	0	+	
Leur produit		+	0	–	0	+	

Le coefficient directeur 2 est positif.
$2.x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{2}=-1,5$

Le coefficient directeur 2 est positif.
$2.x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}=-0,5$

Le produit est négatif ou nul entre $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ compris.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]$.

ⓘ Cette dernière inéquation est illustrée par le *graphique 4* où la courbe *(C)* d'équation $y=4.x^2+6.x$ est au-dessous de la droite *(C')* d'équation $y=-2.x-3$ entre $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

TOILES DE MAÎTRES

Le contexte

Cet exercice est dans la lignée du précédent : résolutions d'inéquations du second degré et quotient au moyen de tableau de signe.

L'énoncé

a) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{3.x+7}{x+2} \leq 4$$

b) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$x^2 < 4.x+5$$

Le corrigé

a) Résolvons dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{3.x+7}{x+2} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{3.x+7}{x+2} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3.x+7)-4\times(x+2)}{x+2} \leq 0$$

On met tout au même dénominateur x+2...

$$\Leftrightarrow \frac{3.x+7-4.x-8}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{x+2} \leq 0$$

Pour quelles valeurs de x ce quotient est-il négatif ou nul ?

Dressons le tableau de signe de ce quotient :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	

Le coefficient directeur -1 est négatif.
$-x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Le coefficient directeur 1 est positif.
$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Conclusion : le quotient $\frac{-x-1}{x+2}$ est négatif ou nul avant -2 non compris et après -1 compris. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est la réunion d'intervalles :

$$S =]-\infty;-2[\cup [-1;+\infty[$$

b) Résolvons dans ℝ l'inéquation :

$$x^2 < 4.x+5 \Leftrightarrow x^2-4.x-5<0$$

Nous allons factoriser cette somme avec la forme canonique.

$$\Leftrightarrow \overbrace{x^2-2\times x\times 2}^{\text{Début de cette identité...}} -5<0 \Leftrightarrow \overbrace{(x-2)^2-4}^{\text{...remarquable.}}-5<0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-9<0 \Leftrightarrow \overbrace{(x-2)^2}^{a^2}-\overbrace{3^2}^{b^2}<0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{[(x-2)+3]}^{(a+b)}\times\overbrace{[(x-2)-3]}^{(a-b)}<0 \Leftrightarrow (x+1).(x-5)<0$$

Pour quelles valeurs de x ce produit est-il strictement négatif ?

Dressons le tableau de signe de ce produit :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le coefficient directeur 1 est positif.
$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Le coefficient directeur 1 est positif.
$x-5=0 \Leftrightarrow x=5$

Conclusion : le produit $(x+1).(x-5)$ est strictement négatif entre -1 et 5 non compris.
En conséquence, l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle :

$$S =]-1;5[$$

Trois systèmes, sept équations

Le contexte

Cet exercice assez classique traite de la résolution de systèmes linéaires, qu'ils soient 2×2 ou 3×3. Je ne suis pas sûr que ces dernières dimensions ne soient pas hors programme. Mais bon, c'est essentiellement de la technique et des calculs.

L'énoncé

a) Résoudre les deux systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 3x+5.y=7 \\ 6.x+10.y=10 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 7.x+5.y=11 \\ 4.x+3.y=6 \end{cases}$$

b) Résoudre le système linéaire de trois équations à trois inconnues x, y et z suivant :

$$\begin{cases} 3.x+y+2.z=6 \\ 5.x+y+z=10 \\ 2.x+y+3.z=5 \end{cases}$$

Indication : les trois inconnues à trouver sont des entiers positifs ou négatifs simples.

Le corrigé

a.1) Avant toutes choses, examinons l'éventuelle proportionnalité des coefficients du système (S_1).

Rapport des coefficients en x $= 3/6 = 1/2 = 0,5$
Rapport des coefficients en y $= 5/10 = 1/2 = 0,5$
Rapport des coefficients constants $= 7/10 = 0,7$

Conclusion : comme seuls les coefficients en x et en y sont proportionnels, alors le système (S_1) n'admet aucune solution.

a.2) Examinons l'éventuelle proportionnalité des coefficients en x et y du système

$$(S_2)\begin{cases} 7.x+5.y=11 & \textit{(1)} \\ 4.x+3.y=6 & \textit{(2)} \end{cases}$$

Rapport des coefficients en x $= 7/4$
Rapport des coefficients en y $= 5/3$
Rapport des coefficients constants $= 11/6$

Comme les coefficients en x et en y ne sont pas proportionnels, alors le système (S_2) admet un unique couple solution que nous allons déterminer par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour déterminer x, nous multiplions l'équation ***(1)*** par 3 et l'équation ***(2)*** par 5, afin de pouvoir éliminer y par soustraction.

$$\begin{array}{lcl} \textit{(1)} & \xrightarrow{\times 3} & 21.x+15.y=33 \\ \textit{(2)} & \xrightarrow{\times 5} & 20.x+15.y=30 \\ \hline & & x=3 \end{array} \quad \ominus$$

Pour trouver y, nous multiplions l'équation ***(1)*** par 4 et l'équation ***(2)*** par 7, de façon à éliminer x par soustraction.

$$\begin{array}{lcl} \textit{(1)} & \xrightarrow{\times 4} & 28.x+20.y=44 \\ \textit{(2)} & \xrightarrow{\times 7} & 28.x+21.y=42 \\ \hline & & -y=2 \end{array} \quad \ominus$$

Conclusion : le système (S_2) a une unique solution qui est le couple $(3;-2)$.

b) Résolvons dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} 3.x+y+2.z=6 & \textit{(1)} \\ 5.x+y+z=10 & \textit{(2)} \\ 2.x+y+3.z=5 & \textit{(3)} \end{cases}$$

La première chose à faire est de constituer un système linéaire de deux équations à deux inconnues. L'inconnue y semblant la plus facile à éliminer, nous allons conserver les inconnues x et z dans le futur système 2×2.

Une première équation pour le 2×2
Nous soustrayons l'équation ***(1)*** à la ***(2)*** de façon à éliminer l'inconnue y.

$$\begin{array}{lcl} \textit{(2)} & \longrightarrow & 5.x+y+z=10 \\ \textit{(1)} & \longrightarrow & 3.x+y+2.z=6 \\ \hline & & 2.x-z=4 \quad \textit{(21)} \end{array} \quad \ominus$$

Une seconde équation pour le 2×2
Nous soustrayons l'équation ***(3)*** à la ***(1)*** pour faire disparaître l'inconnue y.

$$\begin{array}{lcl} \textit{(1)} & \longrightarrow & 3.x+y+2.z=6 \\ \textit{(3)} & \longrightarrow & 2.x+y+3.z=5 \\ \hline & & x-z=1 \quad \textit{(13)} \end{array} \quad \ominus$$

Une troisième équation à partir des équations *(2)* et *(3)*

$$\textit{(2)}-\textit{(3)} \longrightarrow \underbrace{(5.x+y+z)}_{\textit{(2)}}-\underbrace{(2.x+y+3.z)}_{\textit{(3)}}=\underbrace{10}_{\textit{(2)}}-\underbrace{5}_{\textit{(3)}} \Leftrightarrow 3.x-2y=5 \quad \textit{(23)}$$

Cette équation ***(23)*** est liée aux équations ***(21)*** et ***(13)***. En effet, elle en est la somme.

Les inconnues x et z sont donc les solutions du système 2×2 :

$$\begin{cases} 2.x-z=4 & \textit{(21)} \\ x-z=1 & \textit{(13)} \end{cases}$$

Ce système assez simple peut se résoudre par combinaisons linéaires ou par substitution. Nous optons pour cette seconde méthode.

A partir de l'équation ***(13)***, on exprime x en fonction de z.

$$x - z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = z + 1$$

Puis, on remplace x par ce qu'il vaut en z dans l'équation ***(21)*** de façon à obtenir z.

$$2.\underbrace{(z+1)}_{x} - z = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2.z + 2 - z = 4 \quad \Leftrightarrow \quad z + 2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2$$

Il vient alors pour l'inconnue x :

$$x = z + 1 = 2 + 1 = 3$$

Enfin, pour trouver y, il suffit de remplacer x et z par leurs valeurs 3 et 2 dans l'une des trois équations : nous optons pour la première...un peu au pif !

$$3 \times 3 + y + 2 \times 2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 9 + y + 4 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 6 - 9 - 4 = -7$$

<u>Conclusion :</u> la solution du système 3×3 est le triplet $\underbrace{(3;-7;2)}_{(x;y;z)}$

Les fonctions

Lectures exponentiello-parabolo-affine

Le contexte

Un premier exercice de lecture graphique assez simple et très classique.

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-4;7]$. Sa courbe représentative (C) est tracée ci-contre ➔

On répondra aux questions suivantes directement sur la présente feuille d'énoncé en utilisant le graphique ci-dessus.
Les réponses données seront, le cas échéant, arrondies au dixième près.
a) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On entourera la réponse choisie. Une bonne réponse rapporte 0,75 points, une mauvaise enlève 0,25 points. Une absence de réponse n'ajoute, ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

5 n'a pas d'image par la fonction f.	Vrai	Faux
Un antécédent de 5 par la fonction f est 0.	Vrai	Faux
Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[1;7]$ est 3.	Vrai	Faux
Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[2;6]$ est -2.	Vrai	Faux

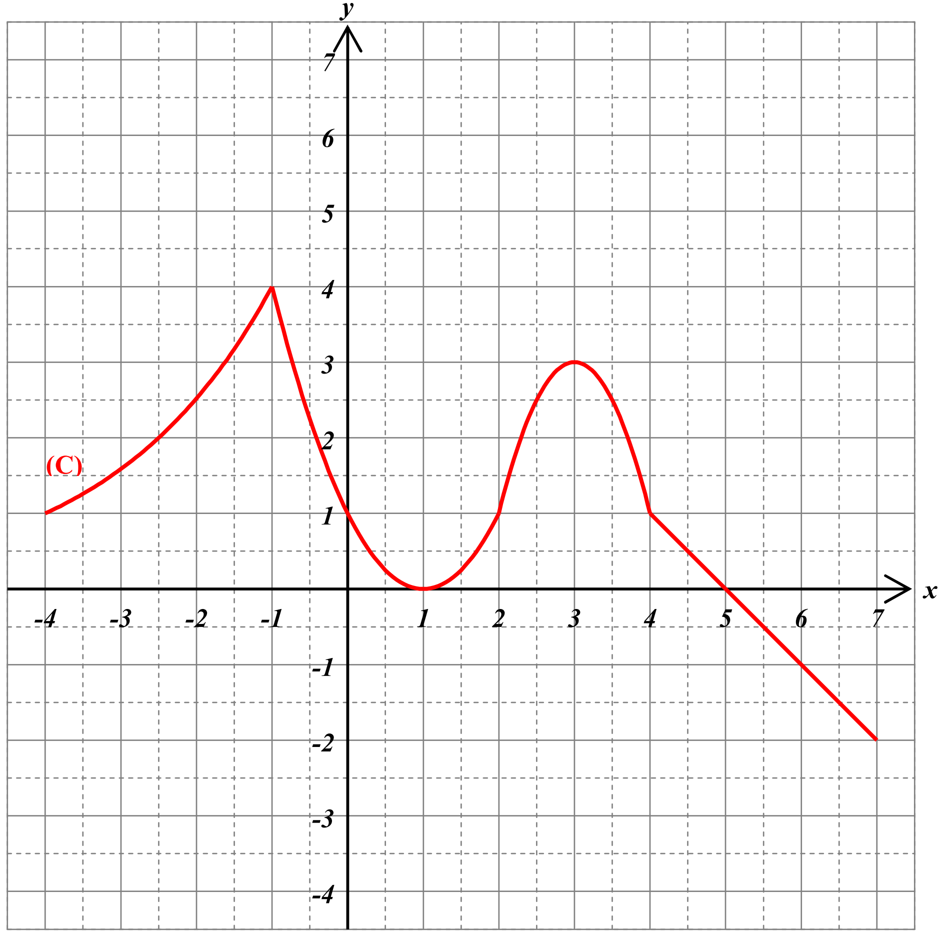
b) Compléter les égalités et les phrases suivantes :

L'image de 2 par la fonction f est ....

Le ou les antécédents de 2 par f sont : ....

$f(2) =$ ....

Les solutions de l'équation $f(x)=2$ sont...



c) Compléter le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition se trouvant ci-dessous :

x	
f	

d) Compléter le tableau de signe de $f(x)$ se trouvant ci-dessous.

x	
$f(x)$	

e) Résoudre les inéquations suivantes :

$f(x) > -1$

S = ...

$f(x) \leq 1$

S = ...

Le corrigé

a) Examinons les quatre affirmations à la lueur de la courbe (C) :

- 5 a une image par la fonction f car il appartient à son ensemble de définition l'intervalle $[-4;7]$. D'ailleurs, d'après le graphique, cette image est égale à 0.
- Aucun point de la courbe (C) n'a une ordonnée égale à 5. Par conséquent, 5 n'a pas d'antécédent par la fonction f.
- Le point le plus haut de la courbe (C) sur l'intervalle $[1;7]$ a pour ordonnée 3.
  Donc 3 est bien le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[1;7]$.
- Le point le plus bas de la courbe (C) sur l'intervalle $[2;6]$ a pour ordonnée -1.
  Donc le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[2;6]$ est -1 et non -2.

b) Le point de la courbe (C) dont l'abscisse est 2 a pour ordonnée 1. Nous en déduisons :

→ $f(2) = 1$

→ L'image de 2 par la fonction est égale à 1

Quatre points de la courbe (C) ont pour ordonnée 2. Ils ont pour abscisses (approchées) :

$$-2,5 \quad -0,4 \quad 2,3 \quad 3,8$$

Nous en déduisons :

→ L'équation $f(x) = 2$ a quatre solutions qui sont : $-2,5 \quad -0,4 \quad 2,3 \quad 3,8$

→ 2 a quatre antécédents par la fonction f. Il s'agit de : $-2,5 \quad -0,4 \quad 2,3 \quad 3,8$

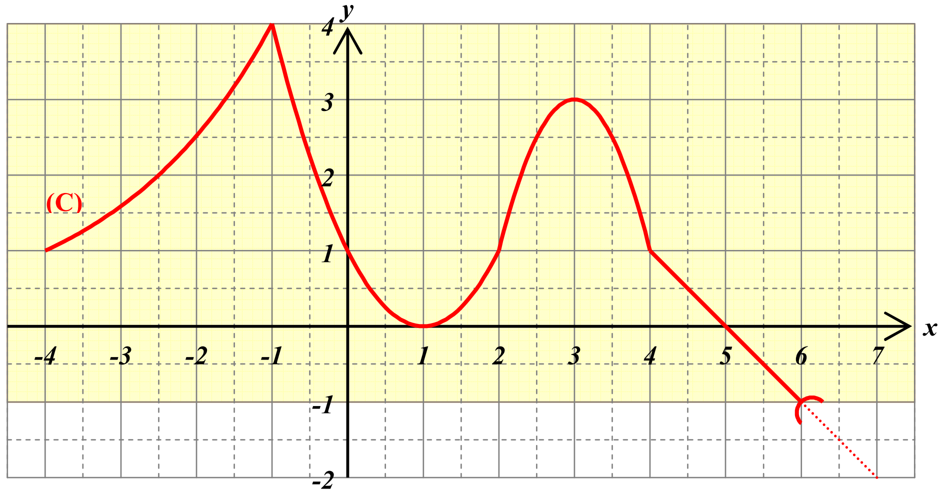
c) D'après sa courbe (C), le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-4;7]$ est :

x	-4		-1		1		3		7
f	1	↗	4	↘	0	↗	3	↘	-2

d) D'après la courbe (C), le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-4;7]$ est :

x	-4		1		5		7
$f(x)$		+	0	+	0	−	

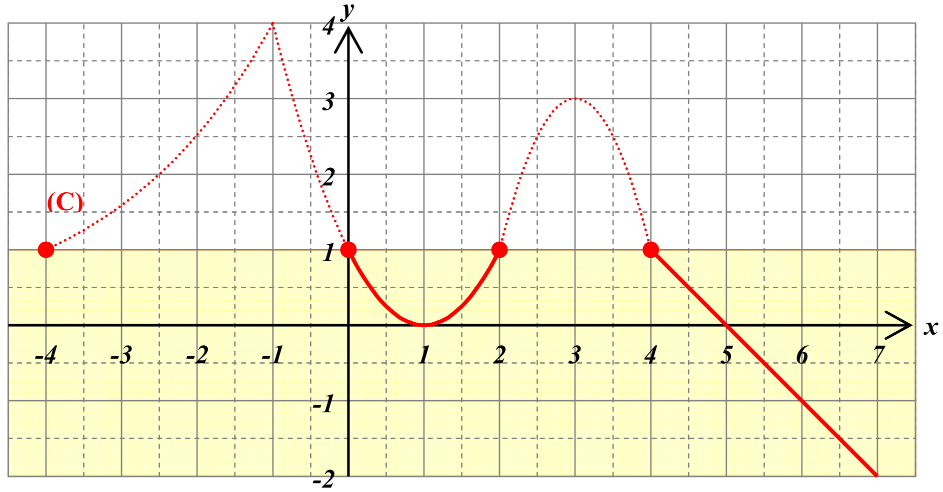
e) Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > -1$, nous devons considérons tous les points de la courbe (C) dont l'ordonnée $f(x)$ est strictement supérieure à -1.
Cette partie de (C) est représentée en trait continu sur le graphique ci-dessous.
Le point de coordonnées $(6;-1)$ doit être exclu car son ordonnée $f(6)$ est égale à -1



L'ensemble des réels x vérifiant l'inégalité $f(x) > -1$ est l'intervalle $[-4;6[$. Ainsi :

$$S = [-4;6[$$

➲ Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 1$, nous devons considérer tous les points de (C) dont l'ordonnée $f(x)$ est inférieure ou égale à 1.



L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 1$ est la réunion :

$$S = \{-4\} \cup [0;2] \cup [4;7]$$

LES PRODUITS NULS

Le contexte

Un exercice assez classique sur le calcul d'images et la recherche d'antécédents par une fonction du second degré. Bien souvent, la principale difficulté est de choisir la bonne écriture de la fonction : développée, factorisée ou canonique...

L'énoncé

La fonction f est définie par :

$$f(x) = (2.x+1).(2.x+7)$$

a) Calculer les images de 0 et de -5 par la fonction f. On indiquera le détail des calculs.

b) Développer $f(x)$.

c) Pour résoudre les questions suivantes, on pourra utiliser l'indication contenue dans le titre de l'exercice...

1. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
2. Déterminer les antécédents de 7 par la fonction f.
3. Déterminer les antécédents de 16 par la fonction f.

Le corrigé

a) Au début de cet exercice, nous ne disposons que de la forme factorisée de $f(x)$.

C'est avec elle que nous allons calculer les images de 0 et -5 par la fonction f.

$$f(0) = (2\times 0+1).(2\times 0+7) = (0+1).(0+7) = 1\times 7 = 7$$

$$f(-5) = (2\times(-5)+1).(2\times(-5)+7) = (-10+1).(-10+7) = (-9)\times(-3) = 27$$

b) Développons la forme factorisée de $f(x)$.

$$f(x) = (2.x+1).(2.x+7) = 4.x^2+14.x+2.x+7 = 4.x^2+16.x+7$$

c) *En seconde, on ne peut résoudre une équation du second degré, c'est-à-dire comportant des termes en x², qu'en recherchant un produit nul. Car un produit n'est nul que lorsque et seulement lorsque l'un de ses facteurs l'est. On connaît la suite...*

c.1) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f, c'est chercher tous les réels x dont l'image par f est égale à 0. Pour ce faire, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{(2.x+1).(2.x+7)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{2.x+1=0 \quad \text{ou} \quad 2.x+7=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$2.x=-1 \qquad\qquad 2.x=-7$$

$$x=-\frac{1}{2} \qquad\qquad x=-\frac{7}{2}$$

La forme factorisée de f(x) nous amène directement un produit nul...

Conclusion : 0 a deux antécédents par la fonction f. Il s'agit de $-3,5$ et de $-0,5$.

c.2) Pour déterminer les antécédents de 7 par f, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x)=7 \Leftrightarrow 4.x^2+16.x+\cancel{7}=\cancel{7} \Leftrightarrow 4.x^2+16.x=0 \Leftrightarrow \overbrace{4.x\times x+16\times x}^{\text{Il y a un facteur commun : x}}=0$$

La forme factorisée de f(x) nous ne donnerait pas un produit nul. Voyons avec la forme développée...

$$\Leftrightarrow \underbrace{x\times(4.x+16)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x=0 \quad \text{ou} \quad 4.x+16=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$4.x=-16$$

$$x=\frac{-16}{4}=-4$$

Conclusion : 0 a deux antécédents par la fonction f. Il s'agit de -4 et 0.

c.3) Pour déterminer les antécédents de 16 par f, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x)=16 \Leftrightarrow 4.x^2+16.x+7=16 \Leftrightarrow 4.x^2+16.x+7-16=0 \Leftrightarrow 4.x^2+16.x-9=0$$

Il est toujours possible de factoriser une forme développée en passant par la forme canonique.

$$\Leftrightarrow \underbrace{(2.x)^2+2\times 2.x\times 4}_{\text{C'est le début de cette...}}-9=0 \Leftrightarrow \underbrace{(2.x+4)^2-16}_{\text{...identité remarquable.}}\;-9=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(2.x+4)^2-5^2}_{a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left[(2.x+4)+5\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(2.x+4)-5\right]}_{(a-b)}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(2.x+9)\times(2.x-1)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{2.x+9=0 \quad \text{ou} \quad 2.x-1=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$2.x=-9 \qquad\qquad 2.x=1$$

$$x=-4,5 \qquad\qquad x=0,5$$

Conclusion : 16 a deux antécédents par la fonction f. Il s'agit de $-4,5$ et 0,5.

Affinités paraboliques

Le contexte

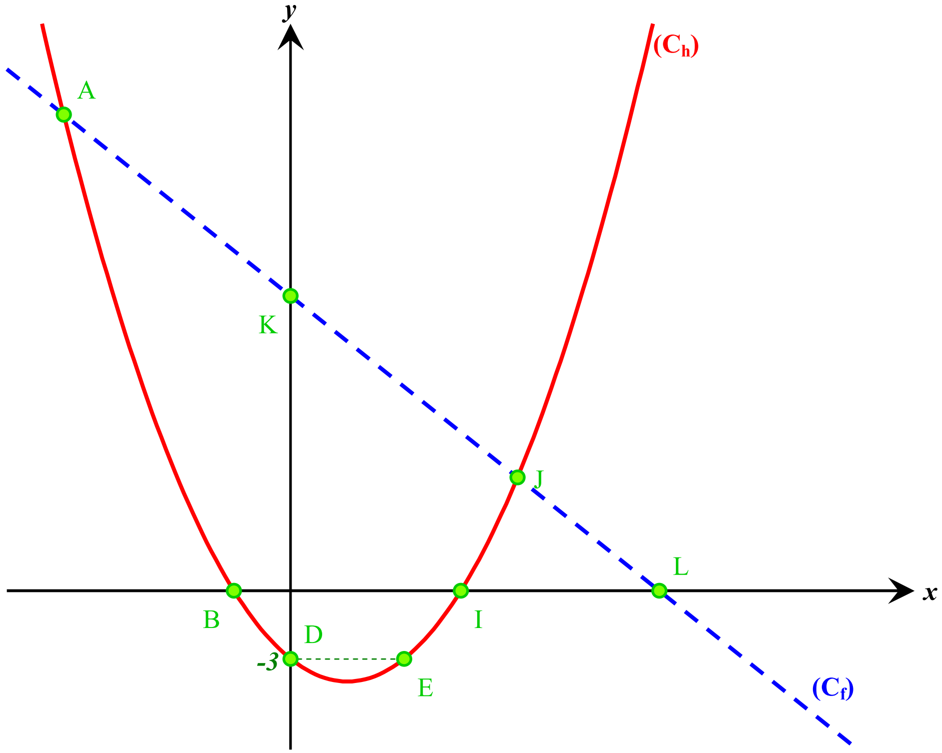
Un exercice combinant lectures graphiques, résolutions d'équations et fonctions affines. Là encore, le choix de la bonne écriture permet de s'éviter bien des tracas.

L'énoncé

Les fonctions f et h sont définies sur ℝ par :

$$f(x)=-8.x+13 \qquad\qquad h(x)=16.x^2-8.x-3$$

La courbe (C_f) qui représente la fonction f et la courbe (C_h) qui représente la fonction h ont été tracées sur le graphique ci-dessous. Le repère utilisé n'est pas orthonormé.



On rappelle que l'abscisse d'un point est sa coordonnée horizontale x et que son ordonnée est sa coordonnée verticale y.

Les trois premières sous-parties de l'exercice (a, b et c) sont indépendantes.

a) Dans ces questions, nous allons travailler avec la fonction affine f.

1. Calculer $f(0)$.
   A quoi correspond $f(0)$ sur le graphique ?
2. Déterminer l'antécédent de 0 par la fonction f.
   A quoi correspondent ces résultats sur le graphique ?
3. Soient α et β deux nombres réels quelconques tels que $\alpha<\beta$.
   Laquelle des deux images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ est la plus grande ? On justifiera sa réponse par un enchaînement d'inégalités.
   Que peut-on en déduire quant à la fonction f ?

b) Dans ces questions, nous allons nous intéresser à la fonction du second degré h.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
   $$h(x)=-3$$
   A quoi correspondent les solutions de cette équation sur le graphique ?
2. Déterminer le ou les antécédents de 0 par la fonction h.
   A quoi correspondent ces antécédents sur le graphique ?

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$h(x)=f(x)$$
A quoi correspondent les solutions de cette équation sur le graphique ?

d) En utilisant les résultats des trois premières sous-parties a, b et c ainsi que le graphique ci-contre, donner les ensembles de solutions des inéquations :

$f(x)\leq 0$	$h(x)>-3$	$h(x)<f(x)$
S = ...	S = ...	S = ...

Le corrigé

a.1) Calculons l'image de 0 par la fonction f.
$$f(0)=-8\times 0+13=0+13=\boxed{13}$$
Conclusion : l'image de 0 par la fonction f est égale à 13. Cette image est aussi l'ordonnée du point K.

$$\boxed{\text{Le point K a pour coordonnées } (0;13).}$$

a.2) Déterminer les antécédents par la fonction f, c'est chercher tous les réels x pour lesquels l'image par f est égale à 0. Pour ce faire, nous devons résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$f(x)=0 \Leftrightarrow -8.x+13=0 \Leftrightarrow -8.x=-13 \Leftrightarrow x=\frac{-13}{-8}=\boxed{\frac{13}{8}=1,625}$$

Conclusion : 0 a un seul antécédent par la fonction f. Il s'agit de $\frac{13}{8}$. Ce nombre est l'abscisse du point L.

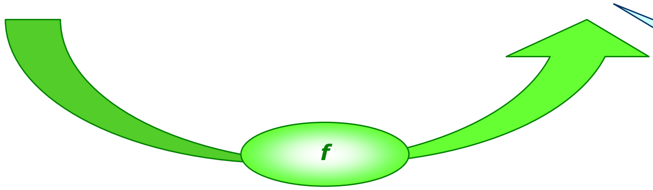
$$\boxed{\text{Le point L a pour coordonnées } \left(\frac{13}{8};0\right).}$$

a.3) Dans cette question, on cherche à établir le sens de variation de la fonction affine f.
Au départ, α et β sont deux réels quelconques tels que $\alpha<\beta$.
Allons jusqu'à leurs images par un enchaînement d'inégalités

Comme on multiplie par le négatif -8, l'ordre change...

$$\alpha<\beta \xrightarrow{\times(-8)} -8.\alpha>-8.\beta \xrightarrow{+13} \overbrace{-8.\alpha+13}^{f(\alpha)}>\overbrace{-8.\beta+13}^{f(\beta)}$$

$f(\alpha)$ est plus grand que $f(\beta)$



La fonction f change l'ordre...

Conclusion : Comme la fonction f change l'ordre sur $\mathbb{R}$, alors f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ $\leftarrow$ *Cet intervalle n'est autre que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.*

b.1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

C'est une équation du second degré. Si nous voulons la résoudre, il faut viser le produit nul. Donc il faut chercher à factoriser...

$$h(x)=-3 \Leftrightarrow 16.x^2-8.x\cancel{-3}=\cancel{-3}$$
$$\Leftrightarrow 16.x^2-8.x=0 \Leftrightarrow \overbrace{16.x\times x-8\times x}^{\text{Il y a un facteur commun : x}}=0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{x\times(16.x-8)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x=0} \text{ ou } 16.x-8=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$
$$16.x=8$$
$$x=\frac{8}{16}=\boxed{\frac{1}{2}=0,5}$$

Conclusion : -3 a deux antécédents par la fonction h. Il s'agit de 0 et $\dfrac{1}{2}$.

Ces deux nombres sont respectivement les abscisses des points D et E.

Le point D a pour coordonnées $(0;-3)$. | Le point E a pour coordonnées $(0,5;-3)$.

b.2) Déterminer le ou les antécédents de 0 par la fonction h, c'est chercher tous les réels x dont l'image par h est égale à 0. C'est-à-dire les réels x vérifiant l'équation :

Là encore, cette équation est du second degré. Il faut viser le produit nul donc factoriser en utilisant la forme canonique.

$$h(x)=0 \Leftrightarrow 16.x^2-8.x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(4.x)^2-2\times 4.x\times 1}_{\text{C'est le début de cette...}}-3=0 \Leftrightarrow \underbrace{(4.x-1)^2-1}_{\text{...identité remarquable.}}-3=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(4.x-1)^2-2^2}_{a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left[(4.x-1)+2\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(4.x-1)-2\right]}_{(a-b)}=0$$

Forme canonique de h(x)

$$\Leftrightarrow \underbrace{(4.x+1)\times(4.x-3)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{4.x+1=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad 4.x-3=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$4.x=-1 \qquad\qquad 4.x=3$$

$$x=-\frac{1}{4} \qquad\qquad x=\frac{3}{4}$$

Conclusion : 0 a deux antécédents par la fonction h. Il s'agit de $-0,25$ et $0,75$.
Ces deux nombres sont les abscisses respectives des points B et I.

Le point B a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{4};0\right)$. | Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{4};0\right)$.

c) Résolvons dans ℝ l'équation :

$$h(x)=f(x) \Leftrightarrow 16.x^2\cancel{-8.x}-3=\cancel{-8.x}+13 \Leftrightarrow 16.x^2=13+3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{16}.x^2=\cancel{16}}_{\text{On simplifie par 16}} \Leftrightarrow \overbrace{x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \quad \underline{\text{ou}} \quad x=1}^{\text{Seuls deux nombres ont pour carré 1 : il s'agit de }-1\text{ et }1.}$$

Conclusion : l'équation $h(x)=f(x)$ a deux solutions. Il s'agit de -1 et 1.

Ce sont les abscisses respectives des points A et J.

Le point A a pour coordonnées $(-1;21)$. | Le point J a pour coordonnées $(1;5)$.

Un autre final pour l'équation h(x)=f(x) : en utilisant une différence de deux carrés

$$h(x)=f(x) \Leftrightarrow 16.x^2\cancel{-8.x}-3=\cancel{-8.x}+13 \Leftrightarrow 16.x^2-3-13=0$$

Là encore, on recherche le produit nul, donc on cherche à factoriser...

$$\Leftrightarrow 16.x^2-16=0 \Leftrightarrow \underbrace{(4.x)^2-4^2}_{a^2-b^2}=0$$

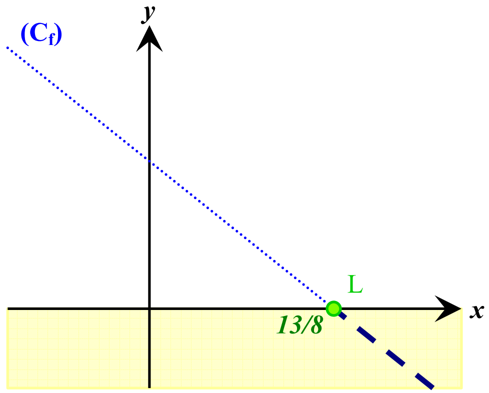
$$\Leftrightarrow \overbrace{\underbrace{(4.x+4)}_{(a+b)}.\underbrace{(4.x-4)}_{(a-b)}=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{4.x+4=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad 4.x-4=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

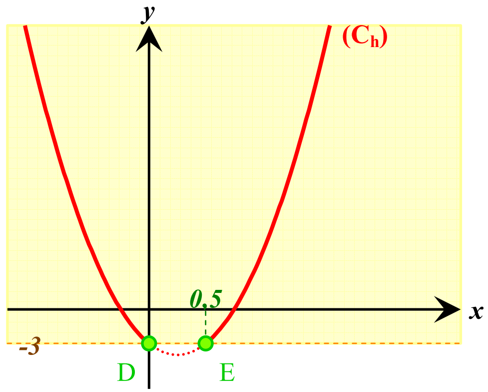
$$4.x=-4 \qquad\qquad 4.x=4$$

$$x=-1 \qquad\qquad x=1$$

d) Pour résoudre l'inéquation $f(x)\le 0$, nous devons considérer tous les points de la droite (C_f) dont l'ordonnée est négative ou nulle.
Les abscisses de ces points sont les solutions de l'inéquation.
Après lecture graphique, nous pouvons dire que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\le 0$ est l'intervalle :

$$\left[\frac{13}{8};+\infty\right[$$





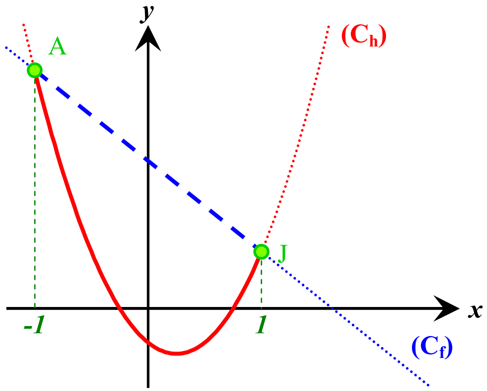
➲ Pour résoudre l'inéquation $h(x)>-3$, nous devons considérer tous les points de la courbe (C_h) dont l'ordonnée est strictement supérieure à -3
Leurs abscisses sont les solutions de notre inéquation.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x)>-3$ est la réunion d'intervalles :

$$\left]-\infty;0\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

➲ Pour résoudre l'inéquation $h(x) < f(x)$, nous devons chercher les valeurs de x pour lesquelles la courbe (C_h) est au-dessous (strictement) de la droite (C_f).

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle :

$$]-1;1[$$



Affinitisémales !

Le contexte

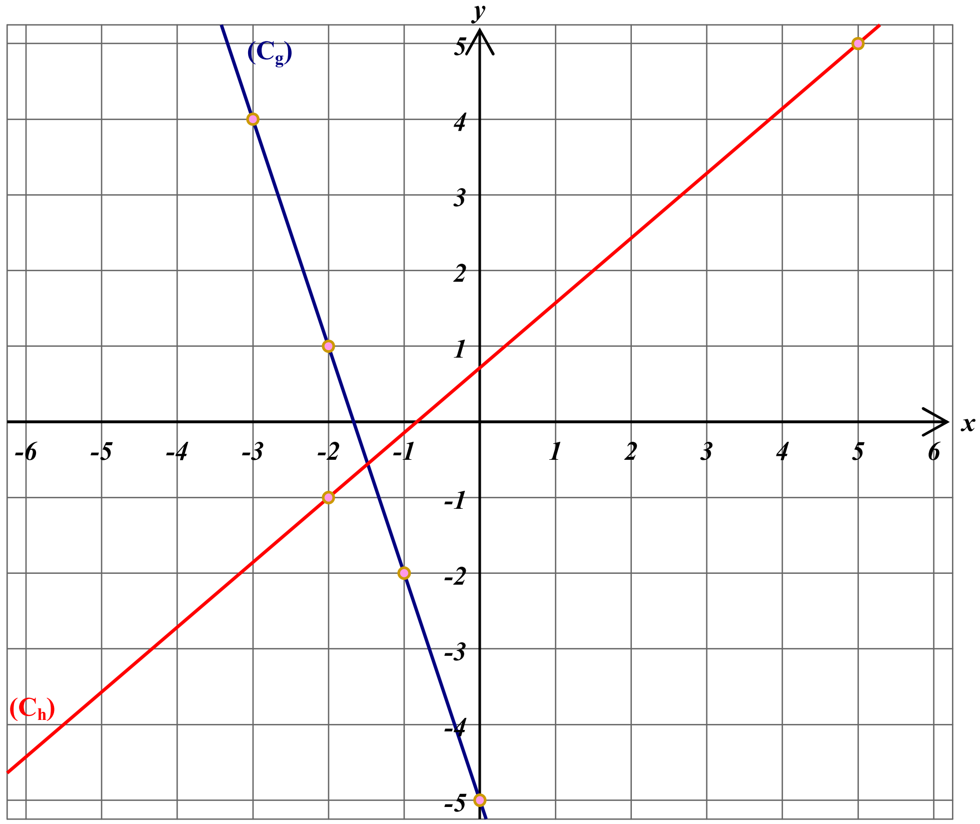
Un exercice basique sur les fonctions affines et les droites qui les représentent.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = -\frac{3}{4}.x - 1$$

Les droites (C_g) et (C_h) représentant les fonctions g et h ont été tracées ci-dessous.



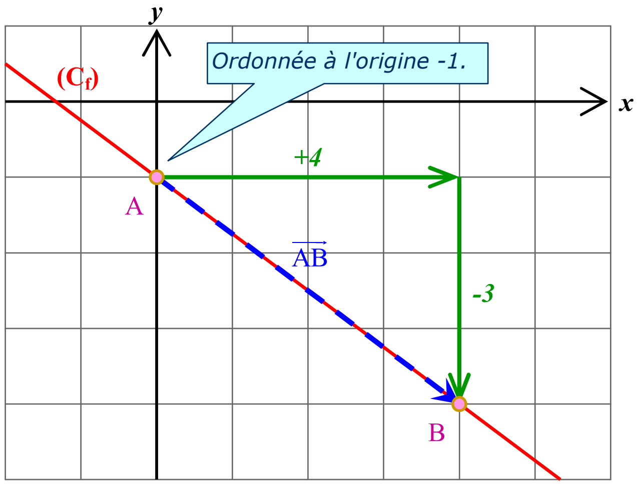
a) Tracer sur le graphique ci-dessus la courbe (C_f) représentant la fonction f.

b) Déterminer les expressions des fonctions g et h.

Le corrigé

a) De par son expression, la fonction f est affine.
Donc sa courbe représentative (C_f) est une droite.
Il nous faut en connaître deux points pour la tracer.

Comme l'ordonnée à l'origine est égale à -1, alors la droite (C_f) passe par le point A de coordonnées $(0;-1)$.
A se situe sur l'axe des ordonnées 0y.



Son coefficient directeur est égal à $-\frac{3}{4}=\frac{-3}{4}=\frac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}}$.

En appliquant ces variations à partir du point A, on aboutit au point B qui a pour coordonnées $(4;-4)$. Ce dernier appartient aussi à la droite (C_f).

<u>Conclusion :</u> la droite $(AB)=(C_f)$ représente la fonction affine f.

On dit aussi que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3;4)$.

b) Comme sa courbe représentative (C_g) est une droite, alors la fonction g est affine.
Donc une de ses expressions est de la forme :

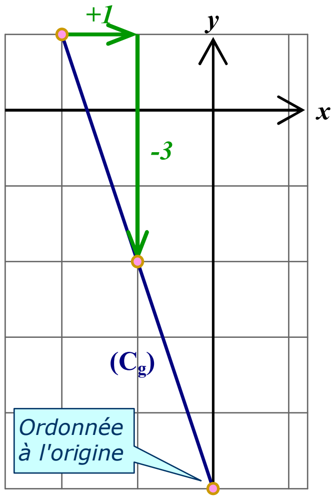
$$g(x)=a.x+b$$

où :

- Le coefficient directeur a est donné par :
$$a=\frac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}}=\frac{-3}{+1}=-3.$$
- L'ordonnée à l'origine b est l'ordonnée du point d'intersection de la droite (C_g) avec l'axe des ordonnées Oy. Nous lisons : $b=-5$.

<u>Conclusion :</u> l'expression de la fonction affine g est :

$$g(x)=-3.x-5$$



➲ Sa courbe représentative (C_h) étant une droite, la fonction h est affine.
Par conséquent, une de ses expressions est de la forme :

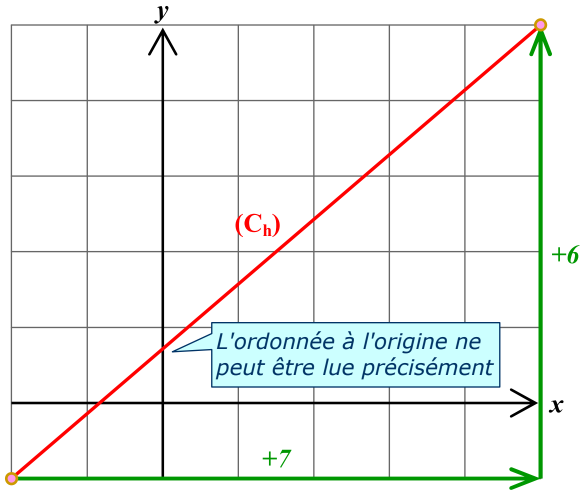
$$h(x)=a.x+b$$

Le coefficient directeur a est donné par :

$$a=\frac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}}=\frac{+6}{+7}=\frac{6}{7}$$

Donc une écriture de $h(x)$ est :

$$h(x)=\frac{6}{7}.x+b$$



Il nous reste à trouver b.
Compte tenu de l'imprécision du graphique, l'ordonnée à l'origine b ne peut être lue précisément. Tout au plus, pouvons-nous affirmer qu'elle est comprise entre 0 et 1.
Cependant, le graphique nous apprend que l'image de 5 par h est 5. Il vient alors :

$$h(5)=5 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{6}{7}\times 5+b=5 \quad\Leftrightarrow\quad b=5-\frac{30}{7}=\frac{5\times 7-30}{7}=\frac{5}{7}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction affine h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\frac{6}{7}.x+\frac{5}{7}=\frac{6.x+5}{7}$

PETITE ÉTUDE AU SECOND DEGRÉ

Le contexte

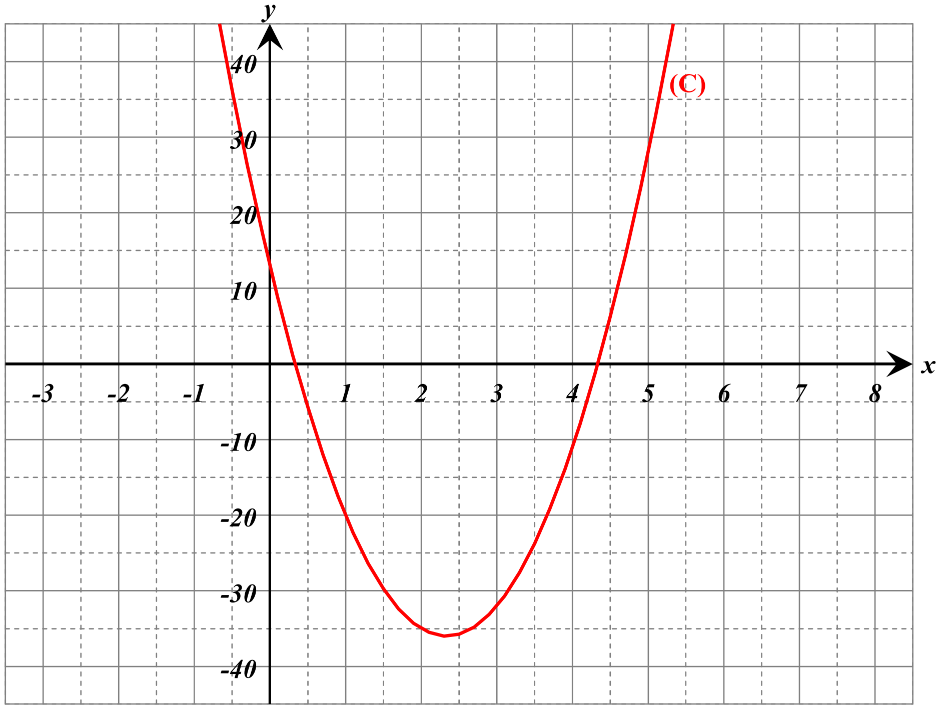
Dans cet exercice, il s'agit de manipuler et d'étudier (signe et variations) une fonction du second degré des plus sympathiques. Là encore, la forme utilisée est importante !

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=9.x^2-42.x+13$$

Sa courbe représentative (C) est tracée ci-dessous.



a) Déterminer les écritures canonique et factorisée de $f(x)$.

b) Pour répondre aux questions suivantes, on emploiera l'écriture de $f(x)$ semblant la plus adéquate. On identifiera sur la figure les résultats obtenus.

1. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.
2. Déterminer les antécédents par la fonction f de 13, puis de -11 et de -36.

c) Pour quelle valeur de x la fonction f semble-t-elle atteindre son minimum ?
Par un enchaînement d'inégalités, établir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;\dots[$.

En déduire le sens de variation sur l'intervalle $]\dots;+\infty[$.

Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction f.

Le corrigé

a) Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=9.x^2-42.x+13=\underbrace{(3.x)^2-2\times 3.x\times 7}_{\text{Début de cette identité...}}+13=\underbrace{(3.x-7)^2-7^2}_{\text{...remarquable !}}+13$$

$$=(3.x-7)^2-49+13=\underbrace{(3.x-7)^2-36}_{\text{Forme canonique}}$$

$$=\underbrace{(3.x-7)^2-6^2}_{a^2-b^2}=\underbrace{\left[(3.x-7)+6\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(3.x-7)-6\right]}_{(a-b)}=\underbrace{(3.x-1)\times(3.x-13)}_{\text{Forme factorisée}}$$

Pour la suite de l'exercice, nous connaissons désormais trois écritures de $f(x)$.

$$f(x)=\underbrace{9.x^2-42.x+13}_{\text{Forme développée}}=\underbrace{(3.x-7)^2-36}_{\text{Forme canonique}}=\underbrace{(3.x-1)\times(3.x-13)}_{\text{Forme factorisée}}$$

Suivant la tâche à effectuer, l'une d'entre elles peut être plus adéquate que ses consoeurs.

b.1) Pour dresser le tableau de signe de $f(x)$, nous utilisons la forme où il est un produit. Autrement dit, sa forme factorisée.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{13}{3}$		$+\infty$
$3.x-1$		–	0	+	|	+	
$3.x-13$		–	|	–	0	+	
$f(x)$		+	0	–	0	+	

b.2) Pour déterminer les antécédents de 13 par la fonction f, nous devons résoudre l'équation $f(x)=13$. Pour ce faire, nous allons utiliser la forme développée de $f(x)$.

$$f(x)=13 \Leftrightarrow 9.x^2-42.x+\cancel{13}=\cancel{13} \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x}\times 9.x-\boxed{x}\times 42}^{\text{On voit un facteur commun}} =0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x}\times(9.x-42)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad 9.x-42=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

$$x=\frac{42}{9}=\frac{14}{3}$$

<u>Conclusion :</u> 13 a deux antécédents par la fonction f. Il s'agit de 0 et $14/3$.

➲ Pour résoudre l'équation $f(x)=-11$ qui nous donnera les antécédents de -11 par la fonction f, nous allons utiliser la forme canonique de $f(x)$. Les deux autres écritures conduisent à des impasses...

$$f(x)=-11 \Leftrightarrow (3.x-7)^2-36=-11 \Leftrightarrow (3.x-7)^2=-11+36$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(3.x-7)^2=25}^{\text{Deux nombres ont pour carré 25...}} \Leftrightarrow \overbrace{(3.x-7)=-5 \quad \underline{\text{ou}} \quad (3.x-7)=5}^{\text{...il s'agit de } -5 \text{ et } 5.}$$

$$3.x=2 \qquad\qquad 3.x=12$$

$$x=\frac{2}{3} \qquad\qquad x=4$$

<u>Conclusion :</u> -11 a deux antécédents par la fonction f. Il s'agit de $\frac{2}{3}$ et 4.

➲ Là encore, pour connaître les antécédent de -36 par la fonction f, nous devons résoudre l'équation $f(x)=-36$ et nous allons utiliser la forme canonique de $f(x)$.

$$f(x)=-36 \Leftrightarrow (3.x-7)^2\cancel{-36}=\cancel{-36} \Leftrightarrow \overbrace{(3.x-7)^2=0}^{\text{Un seul nombre a pour carré 0...}} \Leftrightarrow \overbrace{(3.x-7)=0}^{\text{...il s'agit de 0.}}$$

$$3.x=7$$

$$x=\frac{7}{3}$$

<u>Conclusion :</u> -36 a un seul antécédent par la fonction f. Il s'agit de $\frac{7}{3}$.

c) Au vu de sa courbe (C) et de ce qui vient d'être fait, la fonction f semble admettre un minimum en $x=7/3$, celui-ci valant -36.

Cette hypothèse peut être démontrée ! En effet, pour tout réel x, nous avons :

$$\boxed{(3.x-7)^2\geq 0} \xrightarrow{-36} (3.x-7)^2-36\geq -36 \quad \text{soit} \quad f(x)\geq f\left(\frac{7}{3}\right)$$

Car le carré $(3.x-7)^2$ est toujours positif ou nul.

➲ Concernant les variations de la fonction f, tout semble aussi se passer par rapport à $\frac{7}{3}$.

Soient α et β deux réels de l'intervalle $\left]-\infty;\frac{7}{3}\right[$ tels que $\alpha<\beta$.

Comment leurs images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont-elles rangées ?

$$\alpha < \beta < \frac{7}{3}$$

×3

$$3.\alpha < 3.\beta < 7$$

-7

$$3.\alpha-7 < 3.\beta-7 < 0$$

↑ Deux quantités négatives ↑

Carré

La fonction carré est décroissante sur]+∞ ; 0]

$$(3.\alpha-7)^2 > (3.\beta-7)^2$$

-36

$$\underbrace{(3.\alpha-7)^2-36}_{f(\alpha)} > \underbrace{(3.\beta-7)^2-36}_{f(\beta)}$$

La fonction f change l'ordre sur]-∞; 7/3[

<u>Conclusion :</u> la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;7/3[$.

➲ A contrario, si α et β sont deux réels de l'intervalle $\left]-\infty;\frac{7}{3}\right[$ tels que $\alpha<\beta$, alors :

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{7}{3} & < & \alpha & < & \beta \\
7 & < & 3.\alpha & < & 3.\beta \\
0 & < & 3.\alpha-7 & < & 3.\beta-7 \\
 & & (3.\alpha-7)^2 & < & (3.\beta-7)^2 \\
 & & \underbrace{(3.\alpha-7)^2-36}_{f(\alpha)} & < & \underbrace{(3.\beta-7)^2-36}_{f(\beta)}
\end{array}
$$

×3

-7

Carré

-36

↑ Deux quantités positives ↑

La fonction carré est croissante sur [0 ; +∞[

La fonction f conserve l'ordre sur]7/3 ; +∞[

Conclusion : la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]7/3;+\infty[$.

Le tableau de variation de la fonction f est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	-36	↗	$+\infty$

Long is the road

Le contexte

Voici un exercice des plus classiques où il s'agit d'établir les variations d'une fonction en s'appuyant sur un montage (c'est-à-dire une composition) de fonctions de référence.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty;0[$ par :

$$f(x)=-\frac{1}{x^2+5}$$

a) Ecrire le montage correspondant à cette expression de $f(x)$.

b) Etablir au moyen d'une enchaînement d'inégalités le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

Le corrigé

a) Sur l'intervalle $]-\infty;0]$, la fonction f est le résultat du montage suivant :

$$x \xrightarrow{\text{Carré}} x^2 \xrightarrow{+7} x^2+7 \xrightarrow{\text{Inverse}} \frac{1}{x^2+7} \xrightarrow{\times(-1)} \frac{-1}{x^2+7}=f(x)$$

b) Soient α et β deux réels de l'intervalle $]-\infty;0[$ tels que $\alpha<\beta$.

Comment leurs images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont-elles rangées ?

$$
\begin{array}{ccccc}
\alpha & < & \beta & < & 0 \\
\alpha^2 & > & \beta^2 & > & 0 \\
\alpha^2+7 & > & \beta^2+7 & > & 7 \\
\frac{1}{\alpha^2+7} & < & \frac{1}{\beta^2+7} & & \\
\underbrace{\frac{-1}{\alpha^2+7}}_{f(\alpha)} & < & \underbrace{\frac{-1}{\beta^2+7}}_{f(\beta)} & &
\end{array}
$$

Carré

↑ Deux réels négatifs

+7

↑ Deux sommes positives

Inverse

×(-1)

La fonction carré est décroissante sur]+∞ ; 0]

La fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[

La fonction f change l'ordre sur]-∞ ; 0[

Conclusion : la fonction f changeant l'ordre sur $]-\infty;0[$, f est décroissante sur l'intervalle.

HOMO SAPIENS VS. HOMO GRAPHIQUE

Le contexte

Un autre exercice des plus classiques où l'on étudie en détail une fonction homographique, c'est-à-dire une fonction qui est le quotient de deux fonctions affines.
Au menu : ensemble de définition, signe et variations par un montage de fonctions de référence.

L'énoncé

La fonction h est définie par :

$$h(x)=\frac{3.x-1}{x+2}$$

a) Calculer l'image de 0 par la fonction h.

b) Dresser le tableau de signe de $h(x)$.

En déduire l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

c) Dans cette question, nous allons chercher à établir le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;-2[$

1. Décomposer la fonction homographique $h(x)$. C'est-à-dire que l'on cherche à écrire $h(x)$ sous la forme :

$$h(x)=a+\frac{b}{x+2}$$

où a et b sont deux coefficients fixés.

2. Etablir au moyen d'un enchaînement d'inégalités le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;-2[$.

Le corrigé

a) Calculons l'image de 0 par la fonction h :

$$h(0)=\frac{3\times 0-1}{0+2}=\frac{0-1}{2}=-\frac{1}{2}=-0,5$$

b) Le tableau de signe du quotient $h(x)$ est dressé ci contre ➔

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3.x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$h(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

A l'exception de -2, tous les réels x ont une image par h. L'ensemble de définition est :

$$D_h=\mathbb{R}\setminus\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$$

c.1) Décomposons la fonction homographique h. Pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, nous avons :

Combien de fois x+2 ?

$$h(x)=\frac{\boxed{3.x}-1}{x+2}=\frac{\boxed{3\times(x+2)-6}-1}{x+2}=\frac{3\times\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}+\frac{-7}{x+2}=3-\frac{7}{x+2}$$

c.2) Nous allons déterminer de h sur $]-\infty;-2[$ en utilisant son écriture décomposée.

Soient α et β deux réels de l'intervalle $]-\infty;-2[$ tels que $\alpha<\beta$.

Comment leurs images par la fonction h sont-elles rangées ?

$$\alpha<\beta<-2$$

+2

$$\alpha+2<\beta+2<0$$

🡑 Deux réels négatifs

Inverse

La fonction inverse est décroissante sur]-∞ ; 0[

$$\frac{1}{\alpha+2}>\frac{1}{\beta+2}$$

×(-7)

$$\frac{-7}{\alpha+2}<\frac{-7}{\beta+2}$$

+3

$$\underbrace{3+\frac{-7}{\alpha+2}}_{h(\alpha)}<\underbrace{3+\frac{-7}{\beta+2}}_{h(\beta)}$$

La fonction h conserve l'ordre sur]-∞ ; -2[

Conclusion : la fonction h est (strictement) croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$.

HOMO CARRÉ

Le contexte

Cet exercice est une coktail des deux précédents. Il s'agit d'étudier les variations d'une fonction presque homographique avec les techniques inhérentes à ces dernières.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=\frac{7.x^2+4}{x^2+1}$$

a) Pourquoi peut-on affirmer que $f(x)$ est toujours strictement positif ?

b) Décomposer la fonction rationnelle $f(x)$. Autrement dit, on veut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x)=a+\frac{b}{x^2+1}$$

où a et b sont deux coefficients fixés.

c) Etablir au moyen d'un enchaînement d'inégalités le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On ne demande pas de refaire le raisonnement précédent, mais juste de dire ce qui change.

Le corrigé

a) Examinons le quotient $f(x)$:

- Le numérateur est la somme du carré $7.x^2$ qui est toujours positif ou nul et de 4. Par conséquent, il est strictement positif en tant que somme de positifs.
- Le dénominateur est la somme du carré x^2 qui est toujours positif ou nul et de 1. Donc, le dénominateur est aussi strictement positif pour ces mêmes raisons.

Conclusion : Etant le quotient de deux strictement positifs, $f(x)$ l'est lui aussi.

b) Décomposons la fonction rationnelle f. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

Combien de fois x^2+1 ?

$$f(x)=\frac{\boxed{7.x^2}+4}{x^2+1}=\frac{\boxed{7\times\left(x^2+1\right)-7}+4}{x^2+1}=\frac{7\times\cancel{\left(x^2+1\right)}}{\cancel{x^2+1}}+\frac{-3}{x^2+1}=\boxed{7-\frac{3}{x^2+1}}$$

c) Etablissons le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

Soient α et β deux réels de l'intervalle $]-\infty;0[$ tels que $\alpha<\beta$.

Comment leurs images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont-elles rangées ?

$$\alpha<\beta<0$$

Deux réels négatifs

Carré — La fonction carré est décroissante sur]+∞ ; 0]

$$\alpha^2>\beta^2>0$$

+1

$$\alpha^2+1>\beta^2+1>1$$

Deux sommes positives

Inverse — La fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[

$$\frac{1}{\alpha^2+1}<\frac{1}{\beta^2+1}$$

×(-3)

$$\frac{-3}{\alpha^2+1}>\frac{-3}{\beta^2+1}$$

+7

$$\underbrace{7-\frac{3}{\alpha^2+1}}_{f(\alpha)}>\underbrace{7-\frac{3}{\beta^2+1}}_{f(\beta)}$$

La fonction f change l'ordre sur]-∞ ; 0[

Conclusion : comme la fonction y change l'ordre, alors, f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

Géométrie analytique

Les essentiels analytiques

Le contexte

La géométrie a été l'une des grandes sacrifiées des derniers programmes de collège et du nouveau programme seconde sur l'autel de la «réussite».
La géométrie analytique a été restreinte à des outils très simples. Il faut surtout éviter la moindre difficulté. On applique et c'est tout !
Il serait exagéré de dire que cet exercice respecte le programme officiel.
Il ne requiert que quelques compétences de base : savoir démontrer un alignement, calculer les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle...

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a positionné les points :

$$A\left(-3;3\right) \qquad B\left(2;-5\right) \qquad C\left(4;2\right) \qquad D\left(-1,1;0\right)$$

a) Le point D appartient-il à la droite (AB) ? On justifiera sa réponse par un calcul.

b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point E qui est le quatrième sommet du parallélogramme CADE.

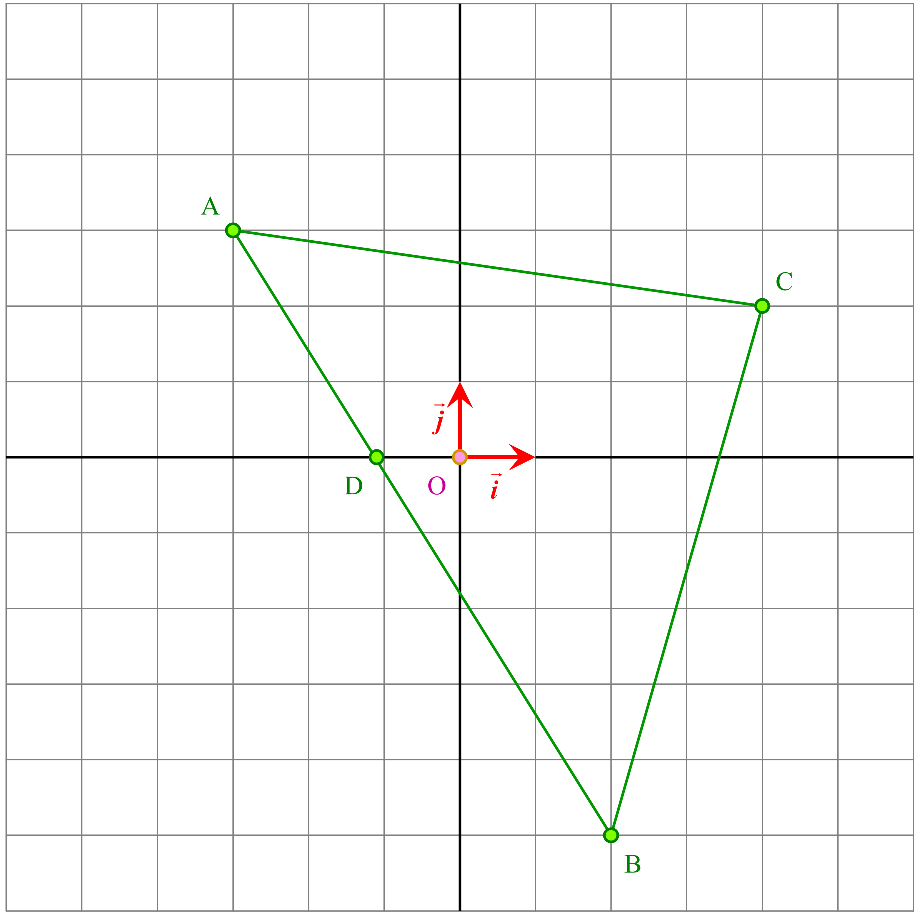
c) On appelle F le point défini par la relation vectorielle :

$$7.\overrightarrow{BF}+7.\overrightarrow{CF}=2.\overrightarrow{CA}$$

Déterminer par le calcul les coordonnées du point F.

d) On appelle G le point du segment [AC] dont l'abscisse est égale à 2.
Déterminer les coordonnées du point G.

e) Montrer que le point F est le milieu du segment [BG].



Le corrigé

a) Regardons si les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1,1-\left(-3\right)=1,9\\0-3=-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-\left(-3\right)=5\\-5-3=-8\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\det\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}1,9 & 5\\-3 & -8\end{vmatrix}=1,9\times\left(-8\right)-\left(-3\right)\times 5=-15,2+15=-0,2\neq 0$$

<u>Conclusion :</u> leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires. Donc le point D n'appartient pas à la droite (AB).

b) On appelle $(x_E; y_E)$ les coordonnées du point D dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Comme le point E est le quatrième sommet du parallélogramme CADE, alors il vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_E - (-1{,}1) \\ y_E - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-(-3) \\ 2-3 \end{pmatrix}}_{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{matrix} x_E + 1{,}1 = 7 \\ x_E = 5{,}9 \end{matrix}}_{\text{Abscisses égales}} \quad \text{et} \quad \underbrace{y_E = -1}_{\text{Ordonnées égales}}$$

Conclusion : le point E a pour coordonnées $(5{,}9;-1)$

c) Déterminons les coordonnées $(x_F; y_F)$ du point F qui vérifie la relation vectorielle :

$$7.\overrightarrow{BF} + 7.\overrightarrow{CF} = 2.\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 7\times\begin{pmatrix} x_F - 2 \\ y_F + 5 \end{pmatrix} + 7\times\begin{pmatrix} x_F - 4 \\ y_F - 2 \end{pmatrix} = 2\times\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7.x_F - 14 \\ 7.y_F + 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7.x_F - 28 \\ 7.y_F - 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 14.x_F - 42 \\ 14.y_F + 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 2 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{14.x_F - 42 = -14}^{\text{Abscisses égales}} \quad \text{et} \quad \overbrace{14.y_F + 21 = 2}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$14.x_F = 28 \qquad 14.y_F = -19$$

$$x_F = 2 \qquad y_F = -\frac{19}{14}$$

Conclusion : les coordonnées du point F sont $\left(2;-\frac{19}{14}\right)$.

d) Les coordonnées de ce point G sont de la forme $(2;y_G)$.

Le point G appartenant au segment [AC], les vecteurs $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 2-(-3)=5 \\ y_G - 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. Donc leur déterminant est nul.

$$\overrightarrow{AG} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ y_G - 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\times(-1) - (y_G - 3)\times 7 = 0 \Leftrightarrow -5 - 7.y_G + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow -7.y_G = -16 \Leftrightarrow y_G = \frac{-16}{-7} = \frac{16}{7}$$

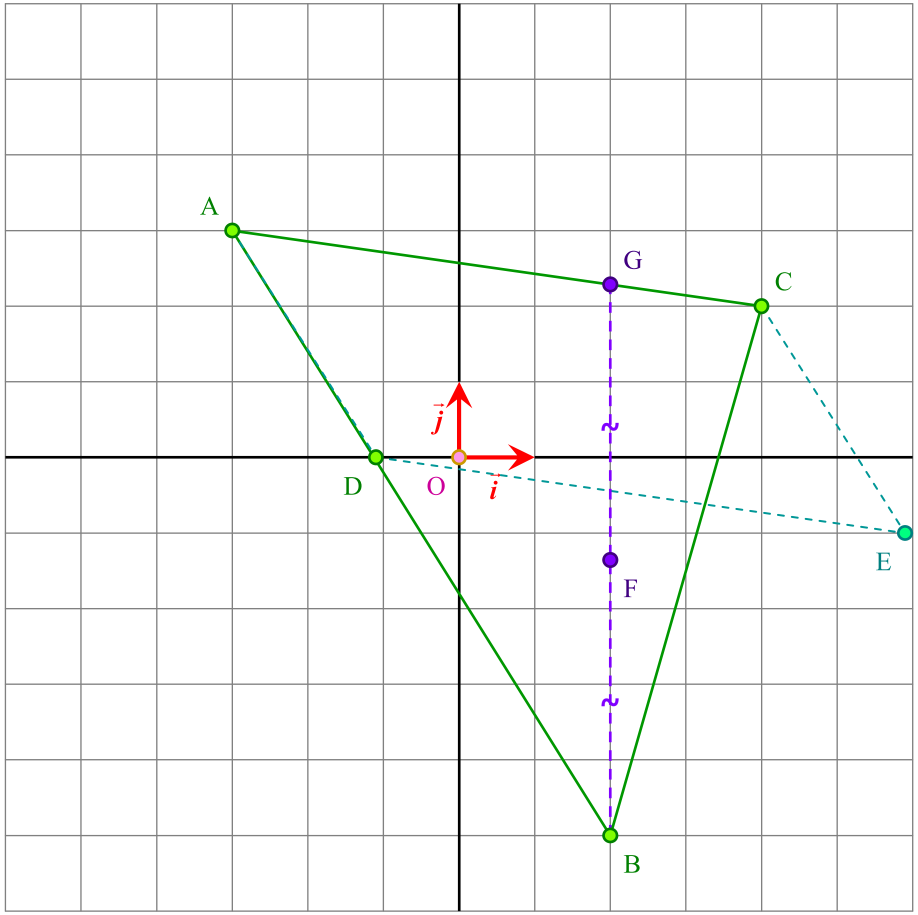
Conclusion : les coordonnées du point G sont $\left(2;\frac{16}{7}\right)$.

e) On appelle I le milieu du segment [BG]. Ses coordonnées sont données par :

$$x_I = \frac{x_B + x_G}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 = x_F$$

$$y_I = \frac{y_B + y_G}{2} = \frac{-5 + \frac{16}{7}}{2} = \frac{-\frac{35}{7} + \frac{16}{7}}{2} = \frac{-\frac{19}{7}}{2} = -\frac{19}{14} = y_F$$

Conclusion : les points I et F ayant les mêmes coordonnées, ils sont confondus. Par conséquent, F est bien le milieu du segment [BG]



PREMIER SERVICE !

Le contexte

Dans cet exercice, il s'agit de démontrer dans un cas particulier que, dans un triangle, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont alignés. Les outils analytiques utilisés ne sont pas nécessairement ceux préconisés par le programme officiel.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points :

$$A\left(-3;-1\right) \qquad B\left(-1;5\right) \qquad C\left(6;-1\right) \qquad H\left(-1;-1\right)$$

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AB].
On a également tracé la droite Δ ainsi que tous les points à coordonnées entières par lesquels elle passe.
Enfin, on appelle ***d*** la droite dont une équation cartésienne est :

$$7.x-6.y+15=0$$

a) Commençons par tracer la droite ***d***.
1. Démontrer que le point A appartient à la droite ***d***.
2. Donner un vecteur directeur de la droite ***d***.
3. Tracer la droite ***d*** sur le graphique ci-contre.
4. La droite ***d*** est-elle perpendiculaire à la droite (BC) ? On justifiera sa réponse par un calcul.

b) Déterminer les coordonnées du point E qui est le point d'intersection de la droite ***d*** et de la droite (BH).

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ.

d) On appelle ***d'*** la parallèle à la droite ***d*** passant par le point I.
1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point I
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite ***d'***.
3. Démontrer que les droites Δ et ***d'*** ne sont pas parallèles.

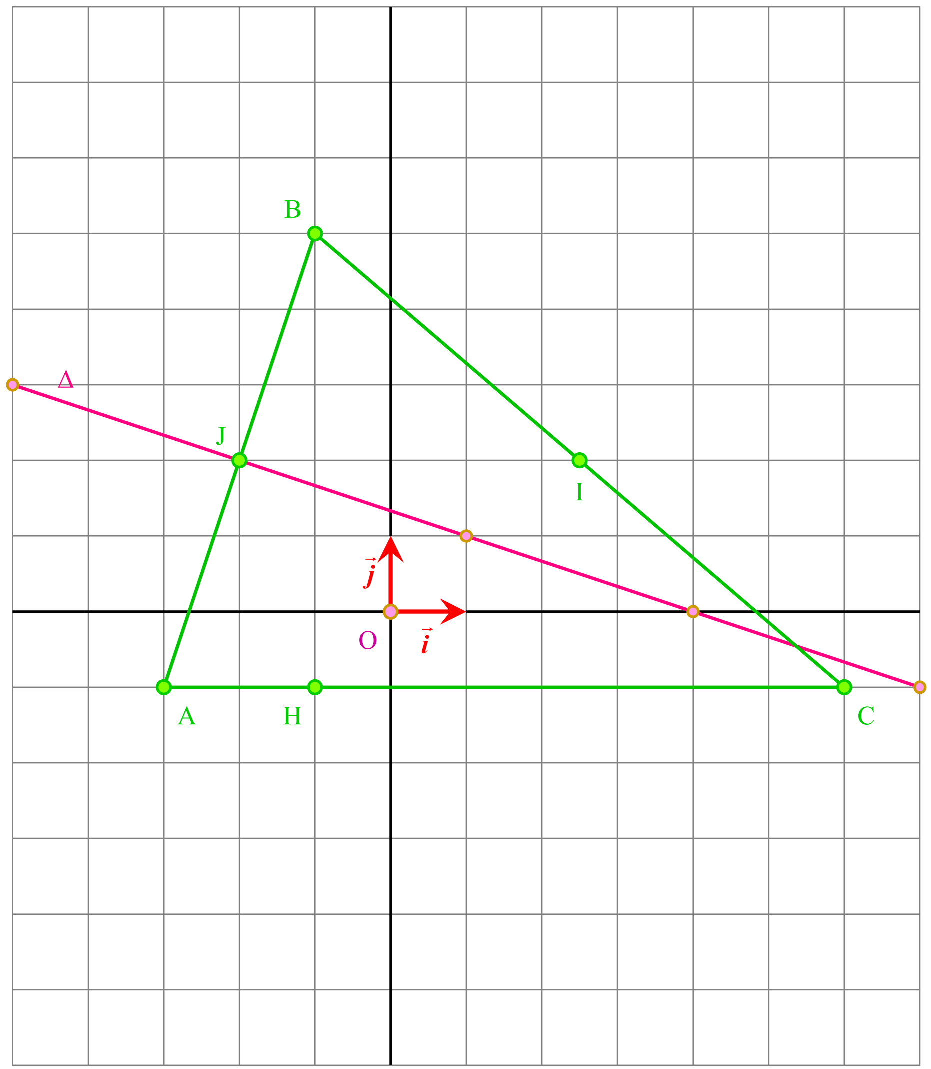
Comme les droites Δ et ***d'*** ne sont pas parallèles, alors elles sont sécantes en un point F.

e) Déterminer par le calcul les coordonnées du point F.

f) Déterminer les coordonnées du point G qui est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{CG}+2.\overrightarrow{JG}=\vec{o}$$

g) Les points E, F et G sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse par un calcul.



Le corrigé

a.1) Pour savoir si le point A appartient à droite ***d***, regardons si les coordonnées du premier vérifient l'équation cartésienne qui définit la seconde :

$$7.x_A-6.y_A+15=7\times\left(-3\right)-6\times\left(-1\right)+15=-21+6+15=\underline{0}$$

<u>Conclusion :</u> ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point A appartient à la droite ***d***.

a.2) Un vecteur directeur de la droite ***d*** d'équation $\boxed{7}.x-\boxed{6}.y+15=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}\boxed{6}\\ \boxed{7}\end{pmatrix}$

a.3) On trace la droite ***d*** en plaçant le vecteur $\vec{u}$ au départ du point A. On obtient ainsi un second point A' de la droite ***d***. Il ne reste plus alors qu'à prolonger.

a.4) Pour savoir si les droites ***d*** et (BC) sont perpendiculaires, regardons si le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$ de la première est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6-(-1)=7\\-1-5=-6\end{pmatrix}$ à l'aide d'un test d'orthogonalité appelé le «produit scalaire».

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=\underbrace{6\times7+7\times(-6)}_{\text{Somme des produits dans chaque coordonnée}}=42-42=0$$

Conclusion : comme leur produit scalaire est nul, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. Donc les droites ***d*** et (BC) sont perpendiculaires.

*Donc **d** est la hauteur du triangle ABC issue de A.*

b.1) On appelle $(x_E;y_E)$ les coordonnées du point E.

Tous les points de la droite (BH) ont la même abscisse : -1.
D'ailleurs, une équation de la droite (BH) est $x=-1$.
Par conséquent, comme E appartient à la droite (BH), alors :

$$x_E=-1.$$

Mais ce n'est pas tout ! En effet, comme le point E appartient aussi à la droite ***d***, alors ses coordonnées en vérifient l'équation. Ainsi :

$$7.x_E-6.y_E+15=0 \Leftrightarrow 7\times(-1)-6.y_E+15=0 \Leftrightarrow -7-6.y_E+15=0$$
$$\Leftrightarrow -6.y_E+8=0 \Leftrightarrow -6.y_E=-8 \Leftrightarrow y_E=\frac{-8}{-6}=\frac{4}{3}$$

Conclusion : les coordonnées du point E sont $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$

Comme la droite (BH) est perpendiculaire au côté (AC) et qu'elle passe par le point B, alors (BH) est la hauteur du triangle ABC issue de B.
Ainsi, E est le point d'intersection de deux hauteurs : c'est l'orthocentre du triangle ABC

c) J étant le milieu du segment [AB], ses coordonnées sont données par :

$$x_J=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-3+(-1)}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \qquad \text{et} \qquad y_J=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$$

La droite Δ passe par le point $J(-2;3)$ et l'un de ses vecteurs directeurs est $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

Par conséquent :

$$M(x;y)\in\Delta \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{JM}\begin{pmatrix}x+2\\y-2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{JM},\vec{v}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{vmatrix}x+2 & 3\\ y-2 & -1\end{vmatrix}=0}^{\text{On écrit le déterminant de } \overrightarrow{JM} \text{ et } \vec{v} \text{ avec leurs coordonnées}} \Leftrightarrow (x+2)\times(-1)-(y-2)\times3=0$$
$$\Leftrightarrow -x-2-3.y+6=0 \Leftrightarrow -x-3.y+4=0 \underset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} x+3.y-4=0$$

Pour voir si l'équation est correcte, on peut regarder si les coordonnées de J la vérifient. ***-2+3×2-4=0***

Conclusion : une équation cartésienne de la droite Δ est $x+3.y-4=0$.

d.1) Les coordonnées du milieu I du segment [BC] sont données par :

$$x_I=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-1+6}{2}=\frac{5}{2}=2,5 \qquad \text{et} \qquad y_I=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{5+(-1)}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Conclusion : les coordonnées du milieu I sont $(2,5;2)$.

d.2) La droite ***d'*** passe par le point $I(2,5;2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$...comme ***d***.

Il vient alors :

$$M(x;y)\in d' \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-2,5\\y-2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{IM},\vec{u}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{vmatrix}x-2,5 & 6\\ y-2 & 7\end{vmatrix}=0}^{\text{On écrit le déterminant de } \overrightarrow{IM} \text{ et } \vec{u} \text{ avec leurs coordonnées}} \Leftrightarrow (x-2,5)\times7-(y-2)\times6=0$$
$$\Leftrightarrow 7.x-17,5-6.y+12=0 \Leftrightarrow 7.x-6.y-5,5=0$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite ***d'*** est $7.x-6.y-5,5=0$.
Une autre équation cartésienne de ***d'*** est $14.x-12.y-11=0$.

Une autre manière de faire...peut-être plus rapide ?

Comme une équation de la droite ***d*** est $\boxed{7.x-6.y}+15=0$, alors une des équations de sa parallèle ***d'*** est de la forme $\boxed{7.x-6.y}+c=0$ où c est une constante à déterminer.

Comme le point I appartient à la droite ***d'***, alors ses coordonnées en vérifient l'équation.

$$7.x_I-6.x_I+c=0 \Leftrightarrow 7\times2,5-6\times2+c=0 \Leftrightarrow 17,5-12+c=0 \Leftrightarrow c=-5,5$$

d.3) Regardons si les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires avec le déterminant.

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 6\times(-1) - 3\times 7 = -6-21 = \boxed{-27}$$

Comme leur déterminant est non nul, alors le vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ n'est pas colinéaire au vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite ***d'***. Donc Δ et ***d'*** ne sont pas parallèles.

e) Les coordonnées du point d'intersection F sont les solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} x+3.y-4=0 & \textbf{\textit{(1)}} \quad \leftarrow \quad \text{Car F appartient à la droite } \Delta \\ 7.x-6.y-5,5=0 & \textbf{\textit{(2)}} \quad \leftarrow \quad \text{Car F fait aussi partie de } \boldsymbol{d'} \end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système par substitution.
A partir de l'équation ***(1)***, on exprime l'inconnue x en fonction de l'inconnue y.

$$x+3.y-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x=4-3.y}$$

Puis, on remplace x par ce qu'il vaut en y dans l'équation ***(2)***.

$$7.x-6.y-5,5=0 \quad \Leftrightarrow \quad 7.(4-3.y)-6.y-5,5=0 \quad \Leftrightarrow \quad 28-21.y-6.y-5,5=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 27.y=22,5 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{22,5}{27}=\frac{45}{54}=\frac{\cancel{9}\times 5}{\cancel{9}\times 6}=\boxed{\frac{5}{6}}$$

Nous en déduisons alors pour l'inconnue x :

$$x=4-3.y=4-3\times\frac{5}{6}=4-\frac{\cancel{3}\times 5}{\cancel{3}\times 2}=\frac{8}{2}-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}=\boxed{1,5}$$

Conclusion : les coordonnées du point F sont $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{6}\right)$.

F étant l'intersection de deux médiatrices du triangle ABC, c'est le centre du cercle circonscrit à ABC

f) Le point G vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{CG}+2.\overrightarrow{JG}=\vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_G-6 \\ y_G+1 \end{pmatrix} + 2\times\begin{pmatrix} x_G+2 \\ y_G-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_G-6 \\ y_G+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.x_G+4 \\ 2.y_G-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 3.x_G-2 \\ 3.y_G-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{Deux vecteurs égaux...}}$$

Or deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales. Il vient alors :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 3.x_G-2 \\ 3.y_G-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{Deux vecteurs égaux}} \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{3.x_G-2=0}^{\text{Abscisses égales}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{3.y_G-3=0}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$3.x_G=2 \qquad\qquad 3.y_G=3$$

$$x_G=\boxed{\frac{2}{3}} \qquad\qquad y_G=\frac{3}{3}=\boxed{1}$$

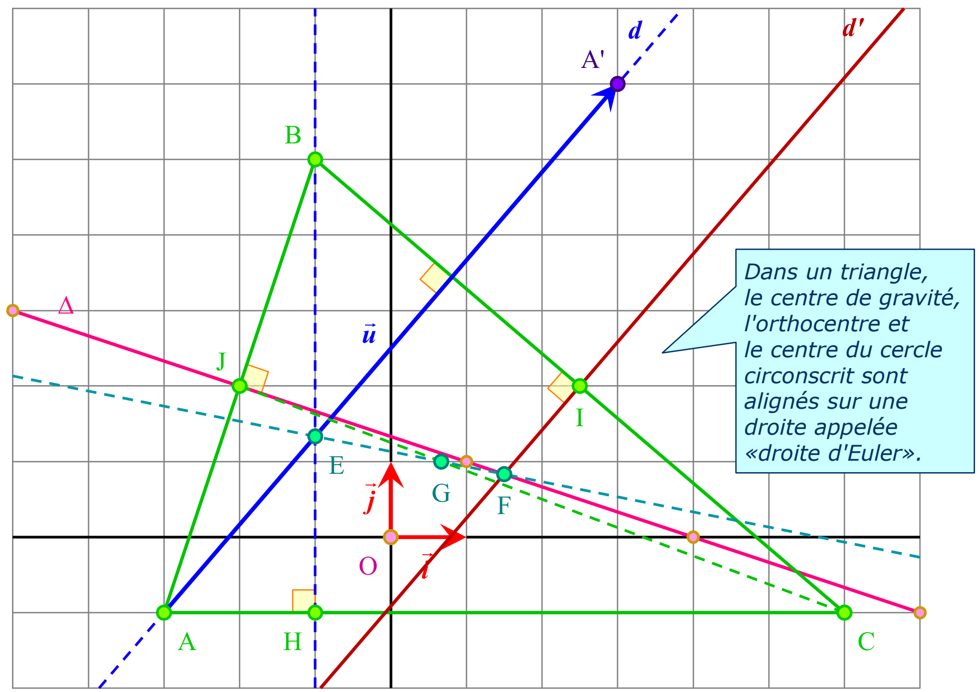
Conclusion : les coordonnées du point G sont $\left(\frac{2}{3};1\right)$

G se situant aux deux tiers de la médiane [CJ], il est le centre de gravité du triangle ABC.

f) Pour savoir si les points E, F et G sont alignés, regardons si les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

$$\det\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}\right) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}+1 & \frac{2}{3}+1 \\ \frac{5}{6}-\frac{4}{3} & 1-\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{6}+\frac{5}{6} = \boxed{0}$$

Comme leur déterminant est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.
Conclusion : les points E, F et G sont alignés.



SECONDE SERVICE !

Le contexte

Le présent exercice est un remake du précédent mais dans une autre situation. Il s'agit de démontrer par le calcul et dans un cas particulier une certaine relation vectorielle existant entre les trois sommets d'un triangle, son orthocentre et son centre du cercle circonscrit.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ dans lequel on a placé les points :

$A(-3;3)$ $B(4;6)$ $C(4;-2)$ $E(-1;8)$ $F(2;1)$

a) D'abord, nous allons travailler avec la droite (EF).

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (EF).
   Note : pour vérifier que l'équation trouvée est correcte, on testera si les coordonnées des points E et F la vérifient.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point I qui est le milieu du segment [AB].
3. Par un calcul, démontrer que le point I appartient à la droite (EF).
4. Les droites (AB) et (EF) sont-elles perpendiculaires ? On justifiera sa réponse.
5. Que peut-on en déduire quant à la droite (EF) ?

b) On appelle Δ la médiatrice du segment [BC].

1. Tracer la droite Δ sur la figure.
2. Sans justification et à partir du graphique, donner une équation de la droite Δ.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point L qui est l'intersection des droites Δ et (EF).

c) On appelle ***d*** la droite dont une équation cartésienne est :

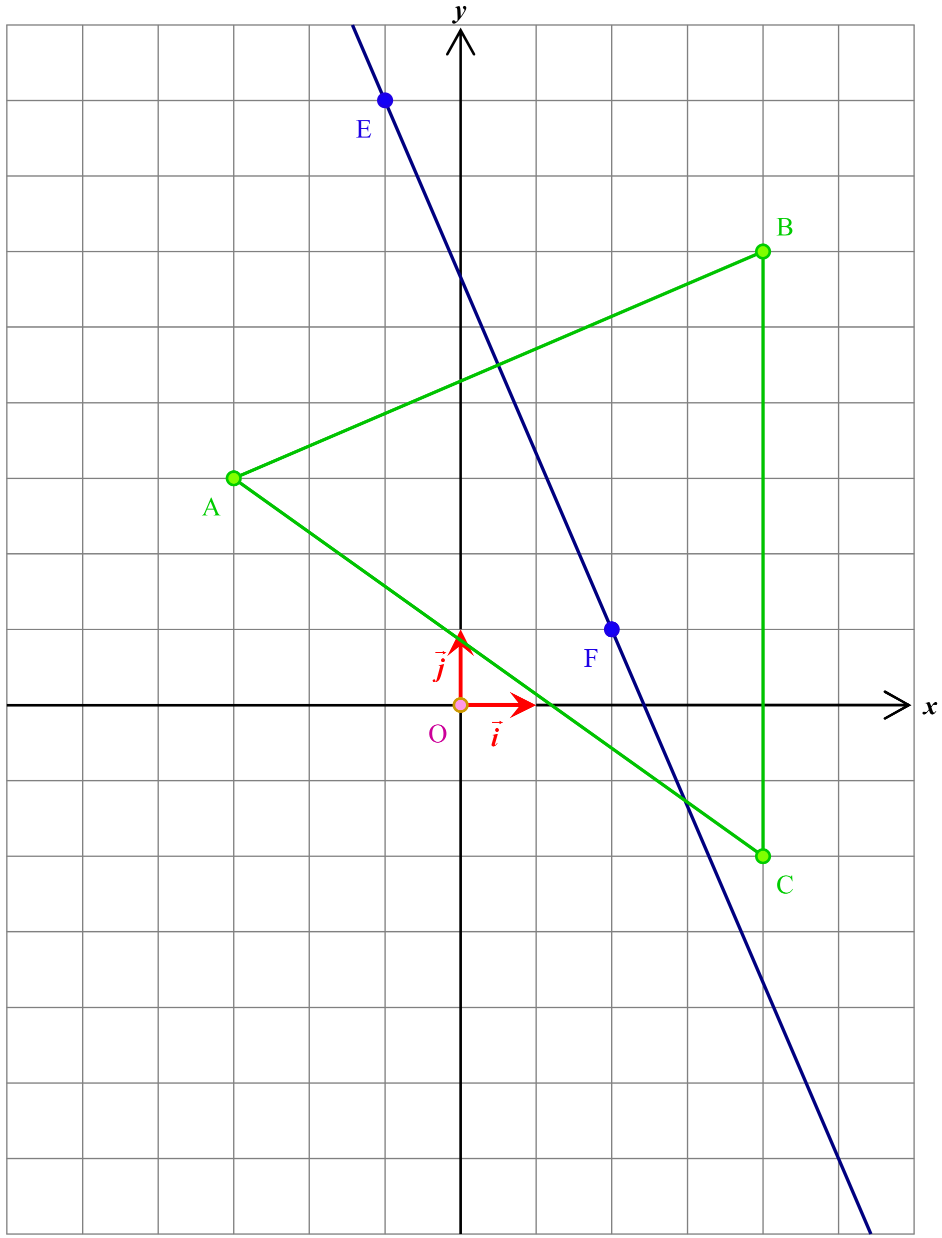
$$7.x-5.y+2=0$$

1. Démontrer que le point B appartient à la droite ***d***.
2. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite ***d***.
3. Tracer la droite ***d*** sur le graphique ci-contre.

d) On appelle ***d'*** la droite dont une équation cartésienne est :

$$7.x+3.y-22=0$$

Démontrer que ***d'*** est la parallèle à la droite (EF) passant par le point C.



e) On appelle H le point d'intersection des droites ***d*** et ***d'***.

1. Résoudre le système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$(S)\begin{cases} 7.x-5.y+2=0 \\ 7.x+3.y-22=0 \end{cases}$$

2. En déduire les coordonnées du point H.

f) En calculant les coordonnées des vecteurs, démontrer l'égalité :

$$\overrightarrow{LH}=\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{LC}$$

Le corrigé

a.1) La droite (EF) est définie par son vecteur directeur $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2-(-1)=3 \\ 1-8=-7 \end{pmatrix}$ et le point E.

Nous pouvons écrire :

$$M(x;y)\in(EF) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-8 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EF}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y-8 & -7 \end{vmatrix}}^{\text{On écrit le déterminant de } \overrightarrow{EM} \text{ et } \overrightarrow{EF} \text{ avec leurs coordonnées}}=0 \Leftrightarrow (x+1)\times(-7)-(y-8)\times 3=0$$

$$\Leftrightarrow -7.x-7-3.y+24=0 \Leftrightarrow -7x-3.y+17=0$$

$$\Leftrightarrow 7.x+3.y-17=0$$

Après multiplication par -1

Conclusion : une équation cartésienne de la droite (EF) est $7.x+3.y-17=0$.

Un instrument de vérification de l'équation

Pour vérifier si l'équation trouvée est correcte, on peut regarder si les coordonnées des points E et F la vérifient.

Pour $E(-1;8)$: $7.x_E+3.y_E-17=7\times(-1)+3\times 8-17=-7+24-17=0$ ***Ok!***

Pour $F(2;1)$: $7.x_F+3.y_F-17=7\times 2+3\times 1-17=14+3-17=0$ ***Ok!***

a.2) Les coordonnées du milieu I du segment [AB] sont données par :

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}=0,5 \quad \text{et} \quad y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3+6}{2}=\frac{9}{2}=4,5$$

Conclusion : les coordonnées du point I sont $(0,5;4,5)$.

a.3) Pour savoir si le point I appartient à droite (EF), regardons si les coordonnées du premier vérifient l'équation cartésienne de la seconde :

$$7.x_I+3.y_I-17=7\times 0,5+3\times 4,5-17=3,5+13,5-17=0$$

Conclusion : comme ses coordonnées en vérifient l'équation, alors I appartient à (EF).

a.4) Pour savoir si les droites (EF) et (AB) sont perpendiculaires, nous allons tester une éventuelle orthogonalité entre les vecteurs $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-(-3)=7 \\ 6-3=3 \end{pmatrix}$.

Ce test d'orthogonalité s'appelle le produit scalaire.

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB}=\underbrace{3\times 7+(-7)\times 3}_{\text{Somme des produits dans chaque coordonnée}}=21-21=0$$

Comme leur produit scalaire est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
Conclusion : les droites (EF) et (AB) sont perpendiculaires.

a.5) La droite (EF) est la perpendiculaire au segment [AB] qui passe par son milieu I.
En conséquence, (EF) est la médiatrice du segment [AB].

b.1) La médiatrice Δ est la perpendiculaire à [BC] passant par son milieu $J(4;2)$.

b.2) Une des équations de la droite Δ qui est parallèle à l'axe $(O;\vec{i})$ est :

$$y=2$$

b.3) Déterminons les coordonnées $(x_L;y_L)$ du point L.

Comme le point L appartient à la droite Δ, alors son ordonnée y_L est égale à 2.

Comme le point L appartient à la droite (EF), alors les coordonnées du premier vérifient l'équation de la seconde.

$$7.x_L+3.y_L-17=0 \Leftrightarrow 7.x_L+3\times 2-17=0 \Leftrightarrow 7.x_L+6-17=0$$

$$\Leftrightarrow 7.x_L-11=0 \Leftrightarrow 7.x_L=11 \Leftrightarrow x_L=\frac{11}{7}$$

Conclusion : les coordonnées du point L sont $\left(\frac{11}{7};2\right)$.

L est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

c.1) Regardons si les coordonnées du point B vérifient l'équation de la droite ***d***.

$$7.x_B-5.y_B+2=7\times 4-5\times 6+2=28-30+2=0$$

Conclusion : le point B appartient bien à la droite ***d***.

c.2) Un vecteur directeur de la droite ***d*** d'équation $\boxed{7}.x-\boxed{5}.y+2=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{7} \end{pmatrix}$.

c.3) Le vecteur $\vec{u}$ est peu pratique pour tracer la droite ***d*** car il nous fait sortir du graphique. Utilisons plutôt son opposé $-\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-7\end{pmatrix}$ que nous mettons au départ du point B.

Nous construisons ainsi un point B' qui appartient à ***d***.

d) Deux choses sont à établir :

- **D'abord que le point C appartient à la droite *d'*.**
  $7.x_C + 3.y_C - 22 = 7\times 4 + 3\times(-2) - 22 = 28 - 6 - 22 = 0$
  Comme ses coordonnées en vérifient l'équation, alors C fait partie de ***d'***.

- **Ensuite que les droites *d'* et (EF) sont parallèles.**
  Comme une équation de la droite ***d'*** est $7.x + 3.y - 22 = 0$, alors un vecteur directeur de ***d'*** est $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$ qui n'est rien d'autre que le vecteur $\overrightarrow{EF}$.

  Comme $\overrightarrow{EF}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (EF), nous en déduisons que les droites ***d'*** et (EF) sont parallèles.

Une autre manière de prouver le parallélisme
Deux droites dont des équations cartésiennes ont les mêmes coefficients en x et y sont parallèles. C'est précisément le cas des droites

$$\begin{cases} (EF) : \boxed{7.x + 3y} - 17 = 0 \\ \boldsymbol{d'} : \boxed{7.x + 3y} - 22 = 0 \end{cases}$$

e.1) Nous allons résoudre le système ***(S)*** par un double coup de combinaisons linéaires.

$$(S)\begin{cases} 7.x - 5.y + 2 = 0 & \textbf{(1)} \\ 7.x + 3.y - 22 = 0 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Pour déterminer x, nous allons multiplier l'égalité ***(1)*** par 3 et l'égalité ***(2)*** par 5, afin de pouvoir éliminer y par une addition.	Pour obtenir y, nous allons juste soustraire l'équation ***(2)*** à l'équation ***(1)*** de façon à éliminer x .
(1) $\xrightarrow{\times 3}$ $21.x - 15.y + 6 = 0$ ⊕	***(1)*** $\longrightarrow$ $7.x - 5.y + 2 = 0$ ⊖
(2) $\xrightarrow{\times 5}$ $35.x + 15.y - 110 = 0$	***(2)*** $\longrightarrow$ $7.x + 3.y - 22 = 0$
$56.x - 104 = 0$	$-8.y + 24 = 0$
Il vient alors :	Nous en déduisons :
$56.x = 104 \Leftrightarrow x = \frac{104}{56} = \frac{13\times \cancel{8}}{7\times 8} = \frac{13}{7}$	$-8.y = -24 \Leftrightarrow y = \frac{-24}{-8} = 3$

Conclusion : le système *(S)* a une unique solution. Il s'agit du couple $\left(\frac{13}{7};3\right)$.

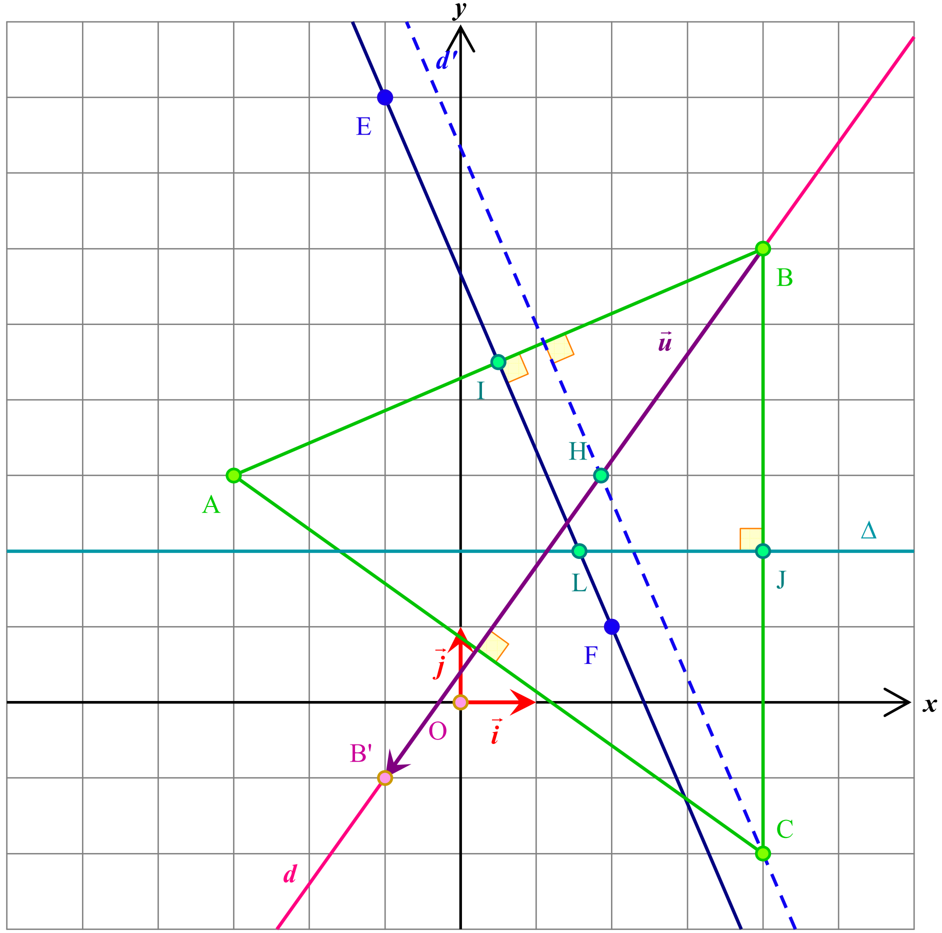
e.2) Comme le point H appartient aux droites ***d*** et ***d'***, alors ses coordonnées $\left(x_H;y_H\right)$ en vérifient les deux équations :

$$\begin{cases} H \in \boldsymbol{d} \Leftrightarrow 7.x_H - 5.y_H + 2 = 0 \\ H \in \boldsymbol{d'} \Leftrightarrow 7.x_H + 3.y_H - 22 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, les coordonnées de H sont la solution du système *(S)*.

Conclusion : les coordonnées du point H sont $\left(\frac{13}{7};3\right)$

*Les droites **d** et **d'** sont deux hauteurs du triangle ABC. H en est donc l'orthocentre.*



f) Calculons séparément les coordonnées des deux membres vectoriels :

- $\overrightarrow{LK} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} - \frac{11}{7} \\ 3-2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 1 \end{pmatrix}}$

- $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} = \begin{pmatrix} -3 - \frac{11}{7} \\ 3-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 - \frac{11}{7} \\ 6-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 - \frac{11}{7} \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{32}{7} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 1 \end{pmatrix}}$

Conclusion : deux vecteurs ayant des coordonnées égales sont égaux. Par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{LH} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC}}$$

Cette relation vectorielle est vraie dans n'importe quel triangle !

Probabilités et statistiques

IMPROBABLE POULET

Le contexte

Les probabilités sont l'une des nouveautés du programme de seconde de cette année. Dans ses attentes, le programme officiel est peu ambitieux. De mon point de vue, les probas ont toujours relevé du bon sens.

L'énoncé

Paul Héphritte est un policier de la FBI (Formation Blancoise d'Investigation).

C'est jour de marché et Paul est bien embêté. Car c'est à lui que revient la tâche de distribuer les emplacements où se mettent les commerçants ambulants.
Précisément, ce matin là, il n'a que trois places disponibles numérotées de ***1*** à ***3***.
Il doit répartir ces trois places entre huit commerçants. Il y a :

- ♥ Quatre commerçants vendant des fruits et des légumes.
- ♥ Trois commerçants vendant de la viande.
- ♥ Madame Fringue qui vend des vêtements.

Voulant demeurer impartial, il décide de procéder pour chaque place à un tirage au sort parmi les commerçants. Un commerçant ne peut occuper qu'une seule place. Ainsi, s'il a la chance d'avoir été retenu pour la place ***1***, un commerçant ne pourra concourir pour la ***2***.
On appelle ***répartition*** une distribution de ces trois places parmi les huit commerçants.
Les probabilités demandées seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

a) Combien y a-t-il de répartitions possibles ?

b) Combien y a-t-il de répartitions où les trois places sont occupées par trois commerçants vendant des fruits et des légumes ?

c) Déterminer les probabilités des événements suivants :

A = «Les trois places sont occupées par trois commerçants vendant des fruits et des légumes.»

B = «La place ***1*** est occupée par Madame Fringue, la place ***2*** par un commerçant vendant des fruits et des légumes et, la place ***3*** par un commerçant vendant de la viande.»

C = «Les trois places sont occupées par des commerçants vendant des fruits, des légumes ou de la viande.»

D = «Madame Fringue occupe l'une des trois places.»

d) Une étude effectuée sur les habitués du marché a montré :

- ♥ 60% des habitués du marché sont des femmes.
- ♥ 50% des habitués du marché sont des retraités (sans distinction de sexe).
- ♥ 80% des habitués du marché sont des femmes ou des retraités (sans distinction de sexe).

Paul Héphritte rencontre un habitué au hasard. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'une femme à la retraite.

Le corrigé

a) Répartissons les trois places parmi les huit commerçants :

Place ***1***	Place ***2***	Place ***3***	
8 candidats	7 candidats	6 candidats	soit $8\times7\times6=\boxed{336\text{ répartitions}}$

Conclusion : il y a 336 répartitions possibles.

b) Distribuons les trois places parmi les quatre commerçants vendant des fruits et légumes.

Place ***1***	Place ***2***	Place ***3***	
4 candidats	3 candidats	2 candidats	soit $4\times3\times2=\boxed{24\text{ répartitions}}$

Conclusion : il y a 24 répartitions où les trois places sont occupées par des commerçants vendant des fruits et des légumes.

c) Depuis la question précédente, nous savons qu'il y a 24 répartitions favorables à l'événement A. Par conséquent :

$$p(A)=\frac{\text{Nombre de répartitions favorables à A}}{\text{Nombre de répartitions au total}}=\frac{24}{336}=\boxed{\frac{1}{14}}$$

➲ D'abord, dénombrons le nombre de répartitions favorables à l'événement B.
La place ***1*** doit être occupée par Madame Fringue, la place ***2*** par un commerçant de fruits et légumes et, la place ***3*** par un commerçant vendant de la viande. Soit :

Place ***1***	Place ***2***	Place ***3***	
1 candidate	4 candidats Fruits et légumes	3 candidats viande	soit $1\times4\times3=\boxed{12\text{ répartitions}}$

Nous en déduisons la probabilité de l'événement B :

$$p(B)=\frac{\text{Nombre de répartitions favorables à B}}{\text{Nombre de répartitions au total}}=\frac{12}{336}=\boxed{\frac{1}{28}}$$

➲ Combien de répartitions sont favorables à l'événement C ?
Distribuons les trois places parmi les sept commerçants vendant des fruits, des légumes ou de la viande.

Place *1*	Place *2*	Place *3*		
7 candidats	6 candidats	5 candidats	soit	$7\times6\times5=210$ répartitions

Nous en déduisons la probabilité de l'événement C :

$$p(C)=\frac{\text{Nombre de répartitions favorables à C}}{\text{Nombre de répartitions au total}}=\frac{210}{336}=\frac{5}{8}$$

➲ L'événement contraire de «Madame Fringue occupe l'une des trois places» est «Madame Fringue ne fait pas partie de la répartition».
Autrement dit, D est l'événement contraire de l'événement C. Nous en déduisons :

$$p(D)=1-p(C)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

d) Pour plus de clarté, nous définissons les événements suivants :
F = «La personne rencontrée est une femme»
R = «La personne rencontrée est un retraité»
L'objectif de cette question est de calculer la probabilité de l'événement
$F\cap R$ = «La personne rencontrée est femme et retraitée»
D'après une formule dite fondamentale vue en cours, nous pouvons écrire :

$$p(F\cup R)=p(F)+p(R)-p(F\cap R)$$
$$0,80=0,6+0,5-p(F\cap R)$$

Nous en déduisons :

$$p(F\cap R)=1,1-0,8=0,3$$

Cartes blanches

Le contexte

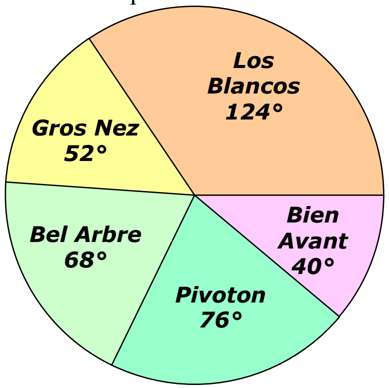
Voici un exercice très complet sur les statistiques ! Peut-être même un peu trop ?!?
Toutes les notions du programme sont abordées et un peu de bon sens est exigé...

L'énoncé

Le Brelan Blancois est un club de Poker des Indres Occidentales comptant 450 membres.

a) On a demandé aux 450 membres du club la localité dans laquelle ils habitaient.
Cette série statistique est représentée par le diagramme circulaire ci-contre ➔
Déterminer les effectifs des cinq modalités.

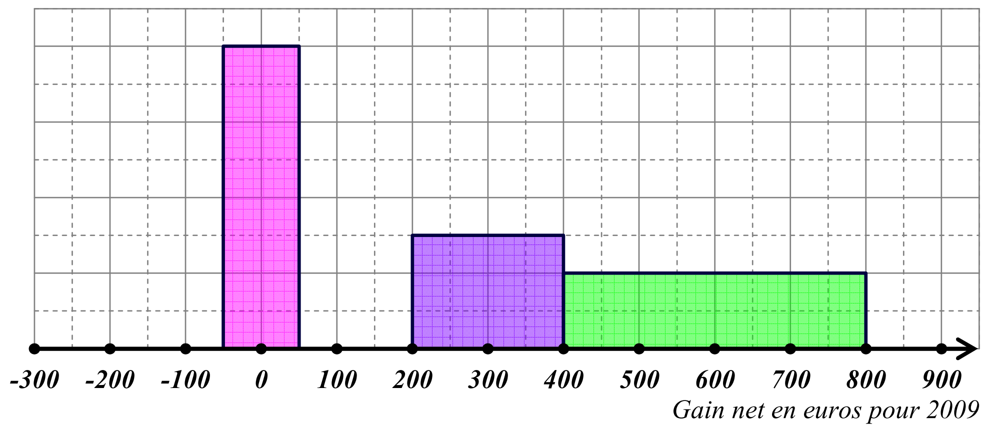
Localité	**Effectif**
Bel Arbre	
Bien Avant	
Gros Nez	
Los Blancos	
Pivoton	



b) On a demandé aux 450 membres leurs gains nets (mises déduites) accumulés durant l'année 2009. Les données de cette enquête ont été comptabilisées en classes.
Dans le tableau ci-dessous, la classe $[50;200[$ regroupe les personnes ayant gagné entre 50 et 200 euros durant l'année 2009. La classe $[-250;-50[$ regroupe les personnes ayant perdu entre 250 et 50 euros durant l'année 2009.

Classe	$[-250;-50[$	$[-50;50[$	$[50;200[$	$[200;400[$	$[400;800[$
Effectif	140		90		

Le tableau partiellement rempli ci-dessus est complété par l'histogramme partiellement construit ci-dessous où un centimètre carré représente 20 individus.

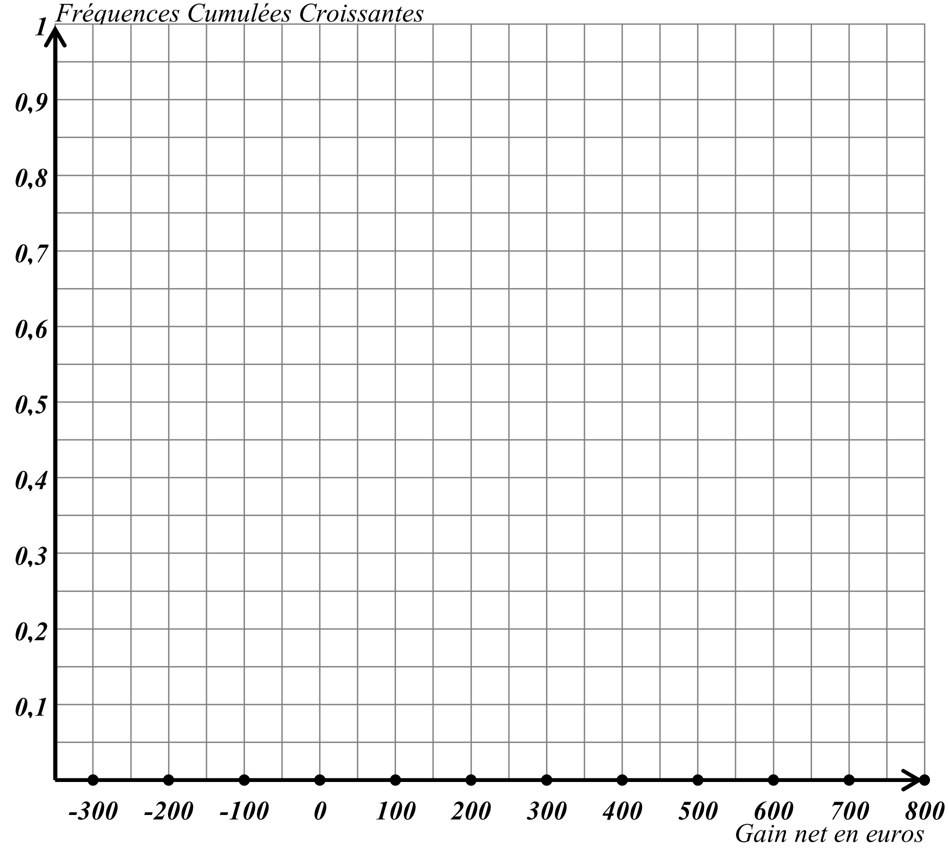


On fait l'hypothèse que les individus d'une même classe sont uniformément répartis à l'intérieur de celle-ci.

1. Compléter le tableau et l'histogramme précédents.
2. Calculer le gain moyen d'un membre du club.
3. Construire sur le graphique ci-dessous le polygone des fréquences cumulées croissantes.
4. A partir du graphique ci-dessous, déterminer les quartiles Q_1 et Q_3 ainsi que la médiane M_e.
5. Donner une estimation du pourcentage des membres du club qui ont obtenu un gain supérieur au gain moyen durant l'année 2009 ?

c) L'âge moyen des 450 membres du club est de 36 ans. L'âge moyen des femmes du club est de 29 ans alors que l'âge moyen des hommes du club est de 39 ans.
Le club compte 45 retraités dont l'âge moyen est de 72 ans.

1. Déterminer l'âge moyen des non-retraités.
2. Déterminer le nombre de femmes et le nombre d'hommes dans le club.



Le corrigé

a) Les 360° du cercle représentent les 450 membres du club de poker. Par conséquent, nous avons le tableau de proportionnalité suivant :

Portion de disque	68°	40°	52°	124°	76°	360°
Localité	Bel Arbre	Bien Avant	Gros Nez	Los Blancos	Pivoton	Total
Effectif	85	50	65	155	95	450

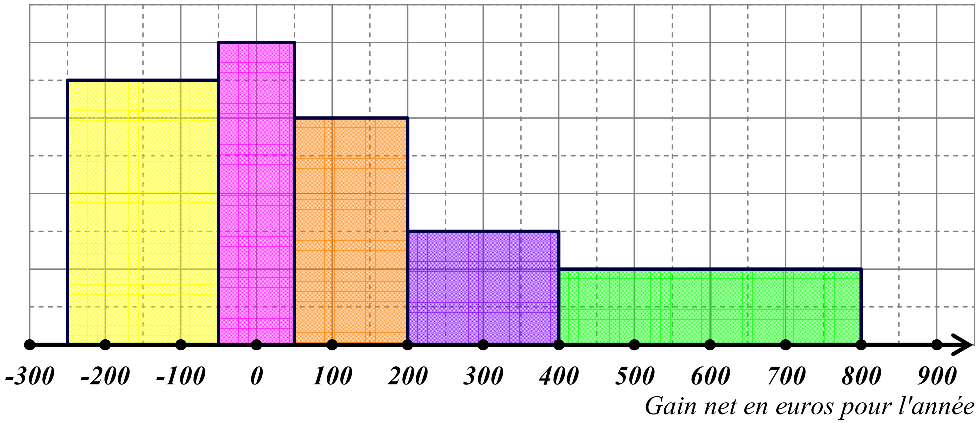
$\times \frac{450}{360} = 1,25$

b.1) Nous allons ajouter à notre tableau avec deux lignes :

- La première indiquera l'aire du rectangle représentant l'effectif de la classe.
- La seconde indiquera les dimensions $\text{base} \times \text{hauteur}$ du dit rectangle.

Classe	$[-250;-50[$	$[-50;50[$	$[50;200[$	$[200;400[$	$[400;800[$
Effectif	140	80	90	60	80
Aire en cm²	7	4	4,5	3	4
Dimensions en cm	$2\times 3,5$	1×4	$1,5\times 3$	$2\times 1,5$	4×1

Complété, l'histogramme est le suivant :



b.2) La moyenne de cette série statistique à caractère quantitatif continu est donnée par :

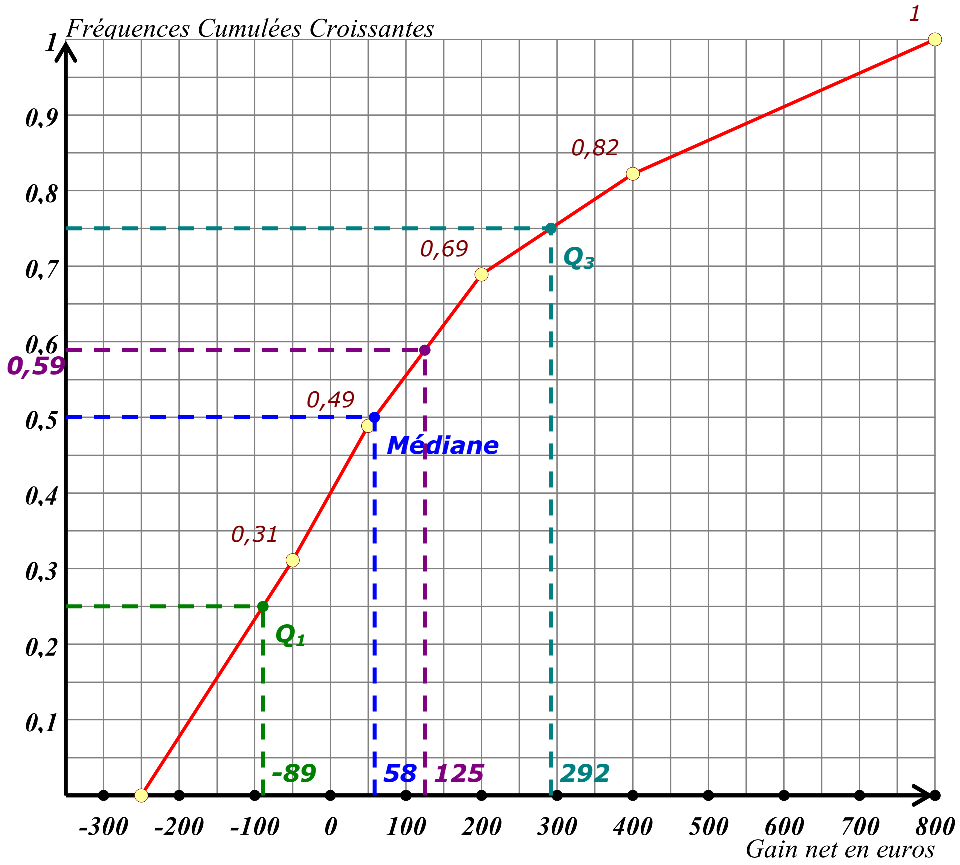
$$\text{Gain net moyen} = \frac{140\times(-150)+80\times 0+90\times 125+60\times 300+80\times 600}{450} = \frac{56250}{450} = \boxed{125€}$$

<u>Conclusion :</u> le gain net moyen par joueur a été de 125€ pour l'année 2009.

b.3) Pour construire le polygone des fréquences cumulées croissantes, il faut au préalable calculer les fréquences cumulées croissantes. Pour faciliter notre travail, nous allons ajouter au tableau de l'énoncé avec deux lignes : une pour les effectifs cumulés croissants et une autre pour les fréquences cumulées croissantes.

Classe	$[-250;-50[$	$[-50;50[$	$[50;200[$	$[200;400[$	$[400;800[$
Effectif	140	80	90	60	80
Effectifs Cumulés Croissants	140	220	310	370	450
Fréquences Cumulées Croissantes	0,31	0,49	0,69	0,82	1

Le polygone des fréquences cumulées croissantes est alors le suivant :



b.4) Le premier quartile Q_1 est la modalité pour laquelle les fréquences cumulées croissantes sont égales à $0,25$. D'après le graphique ci-dessus : $Q_1 = \boxed{-89€}$

La médiane M_e est la modalité pour laquelle les fréquences cumulées croissantes sont égales à 0,5. D'après le graphique : $M_e = \boxed{58€}$.

Le troisième quartile Q_3 est la modalité pour laquelle les fréquences cumulées croissantes sont égales à 0,75. D'après le graphique : $Q_1 = \boxed{292€}$

b.5) D'après la question b.2, la moyenne de notre série statistique est de 125€.
D'après le graphique, les fréquences cumulées croissantes correspondant à un gain net de 125€ sont égales à 0,59.
Nous en concluons que $1-0,59$ soit 41% des membres du club ont obtenu un gain supérieur au gain moyen en 2009.

c.1) La situation des retraités et des non-retraités quant à leurs âges peut être résumée par la série statistique suivante :

	Retraités	Non-retraités	Tous
Age moyen en années	72	a	36
Effectif	45	$405 = 450 - 45$	450

Le calcul de la moyenne de cette série statistique aboutit à l'équation d'inconnue a :

$$\underbrace{36}_{\text{Age moyen du club}} = \frac{45\times 72 + 405\times a}{450} \Leftrightarrow 45\times 72 + 405\times a = 36\times 450$$

$$\Leftrightarrow 3240 + 405\times a = 16200$$

$$\Leftrightarrow 405\times a = 12960 \Leftrightarrow a = \frac{12960}{405} = 32$$

<u>Conclusion :</u> l'âge moyen des non-retraités est de 32 ans.

c.2) Les membres du club qui ne sont pas des femmes sont des hommes.
Si on appelle n le nombre de femmes dans le club, alors il y a $450 - n$ hommes dans ce club.
La situation des femmes et des hommes quant à leurs âges peut être résumée par la série statistique suivante :

	Femmes	Hommes	Tous
Age moyen en années	29	39	36
Effectif	n	$450 - n$	450

Le calcul de la moyenne de cette série statistique amène à l'équation d'inconnue n :

$$\underbrace{36}_{\text{Age moyen du club}} = \frac{n\times 29 + (450-n)\times 39}{450} \Leftrightarrow 29\times n + 450\times 39 - 39\times n = 36\times 450$$

$$\Leftrightarrow 17750 - 10\times n = 16200$$

$$\Leftrightarrow -10\times n = -1350 \Leftrightarrow n = \frac{-1350}{-10} = 135$$

<u>Conclusion :</u> le club compte 135 femmes et $450 - 135 = 315$ hommes.

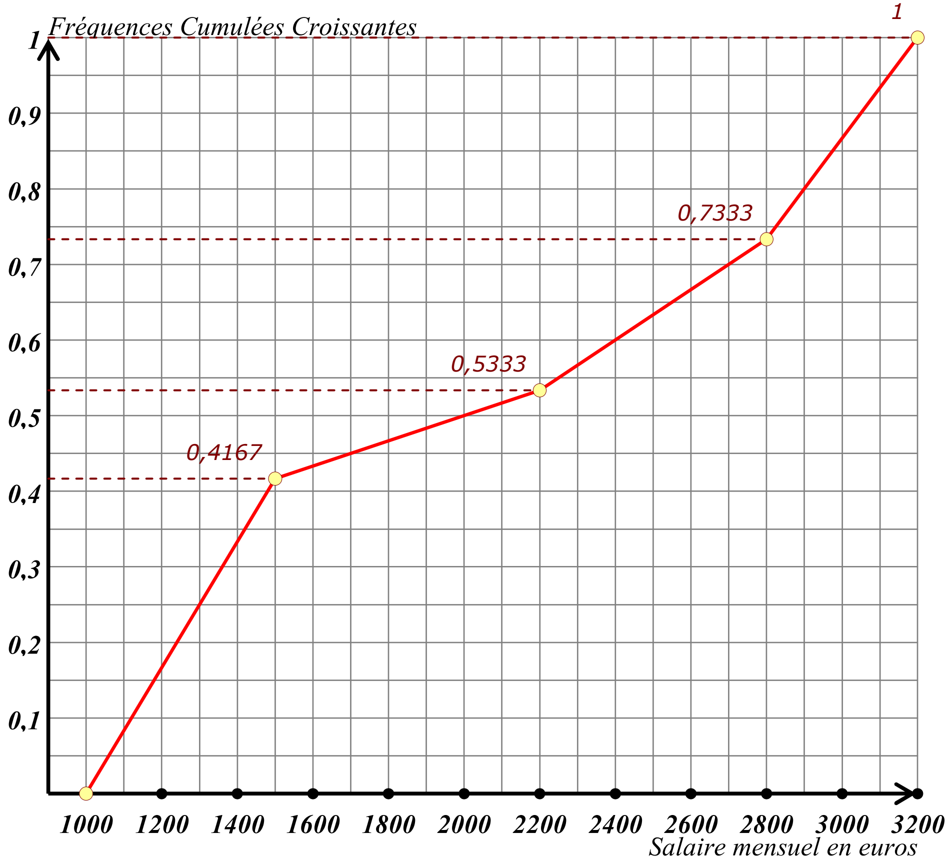
LA PART DU GÂTEAU

Le contexte

Ce second exercice de statistiques reprend toutes les notions et toutes les recettes utilisées de l'exercice précédent...mais dans un autre sens !

L'énoncé

La direction de l'entreprise *Le Biscuit Blancois* a lancé une grande étude statistique concernant les salaires mensuels de ses 360 employés.
A partir des données collectées, elle a construit le polygone des fréquences cumulées croissantes ci-dessous :



En utilisant ce graphique, on répondra aux questions suivantes.

a) Déterminer la médiane M_e et les deux quartiles Q_1 et Q_3 de cette série statistique.

b) La direction affirme que dans l'entreprise, il y a plus de gens gagnant plus de 3000€ par mois que de gens gagnant moins de 1200€. Cette affirmation est-elle juste ? On justifiera sa réponse.

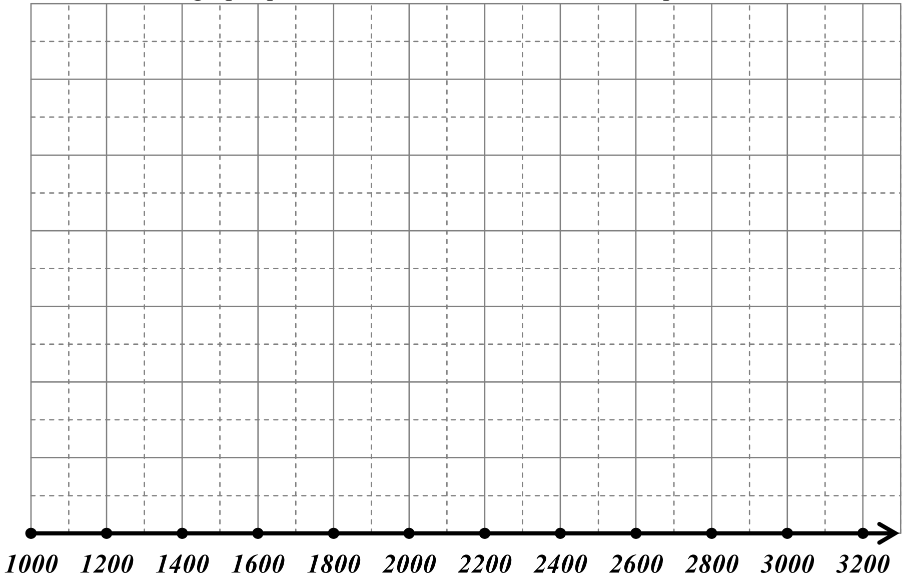
c) Compléter le tableau de répartition des salariés ci-dessous :

Classe des salaires en €	$[1000;1500[$	$[1500;2200[$	$[2200;2800[$	$[2800;3200[$	**Total**
Fréquence					**1**
Effectif					**360**

Note : les effectifs comptabilisant des employés, ils seront arrondis à l'être humain près.

d) Calculer le salaire moyen des 360 employés.
La direction affirme que dans l'entreprise, le salaire mensuel de la majorité des employés est supérieur au salaire moyen. Cette affirmation est-elle juste ? On justifiera sa réponse.

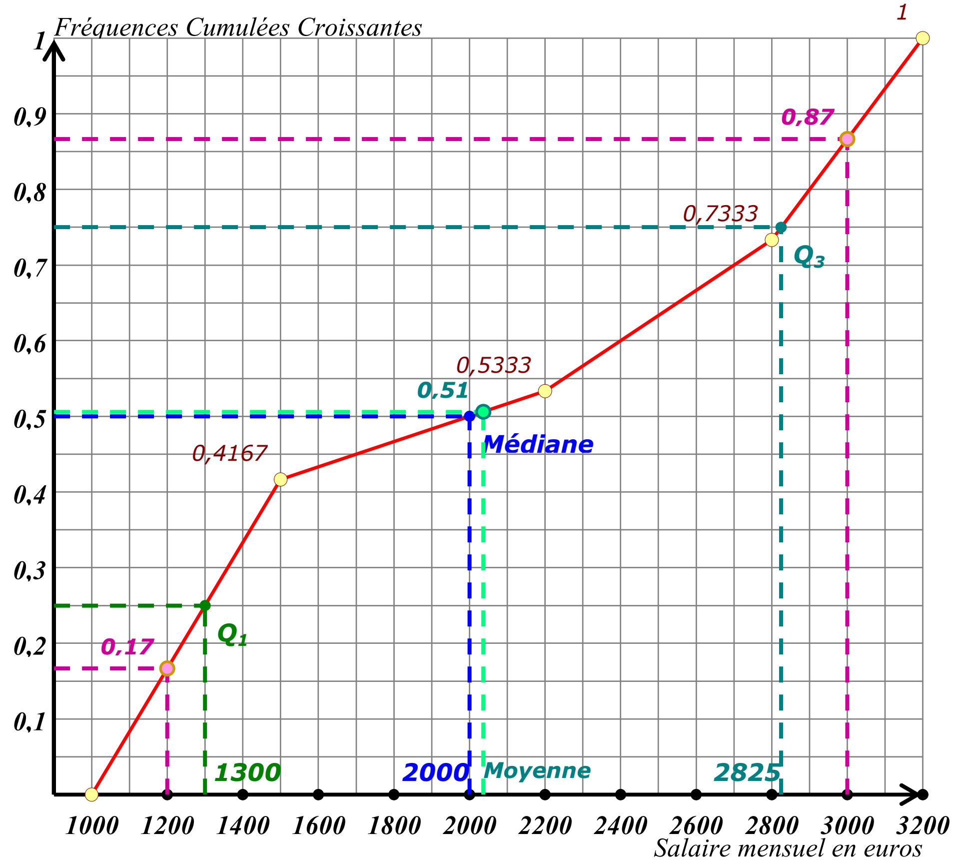
e) Construire sur le graphique ci-dessous l'histogramme correspondant à la série statistique précédente. Sur le graphique ci-dessous, un centimètre carré représentera 12 individus.



Le corrigé

a) A partir du graphique, nous déduisons :

- La médiane est la modalité pour laquelle les fréquences cumulées croissantes sont égales à 0,5. D'après le graphique, celle-ci est égale à $M_e = 2000€$
- Le premier quartile est la modalité pour laquelle les fréquences cumulées croissantes sont égales à 0,25. Sur le graphique, nous lisons : $Q_1 = 1300€$
- Le troisième quartile est la modalité pour laquelle les fréquences cumulées croissantes sont égales à 0,75. Sur le graphique, celle-ci est égale à $Q_3 = 2825€$



b) D'après le graphique :

- Les fréquences cumulées croissantes correspondant à un salaire mensuel de 1200€ sont d'environ de 0,17. Donc environ 17% des employés gagnent moins de 1200€ par mois.
- Les fréquences cumulées croissantes correspondant à un salaire mensuel de 3000€ est de 0,87. Donc environ 13% des employés gagnent plus de 3000€ par mois.

Conclusion : l'affirmation est fausse.

c) Pour remplir le tableau demandé, il faut d'abord «décumuler» les fréquences cumulées croissantes données par le graphique. Puis on calcule les effectifs de chaque classe en multipliant les fréquences par l'effectif total 360.

Classe des salaires en €	$[1000;1500[$	$[1500;2200[$	$[2200;2800[$	$[2800;3200[$	**Total**
Fréquences Cumulées Croissante	0,4167	0,5333	0,7333	1	
Fréquence	0,4167	0,1166	0,2	0,2667	**1**
Effectif	150	42	72	96	**360**

d) Comme le polygone des fréquences cumulées croissantes est la courbe d'une fonction affine par morceaux, alors cela signifie que les employés d'une même classe sont répartis de manière homogène dans celle-ci. En tout cas, c'est hypothèse qui a été faite !

Par conséquent, la moyenne de cette série statistique est donnée par :

$$\text{Salaire moyen} = \frac{150\times 1250+42\times 1850+72\times 2500+96\times 3000}{360} = \frac{733200}{360} = 2036,67€$$

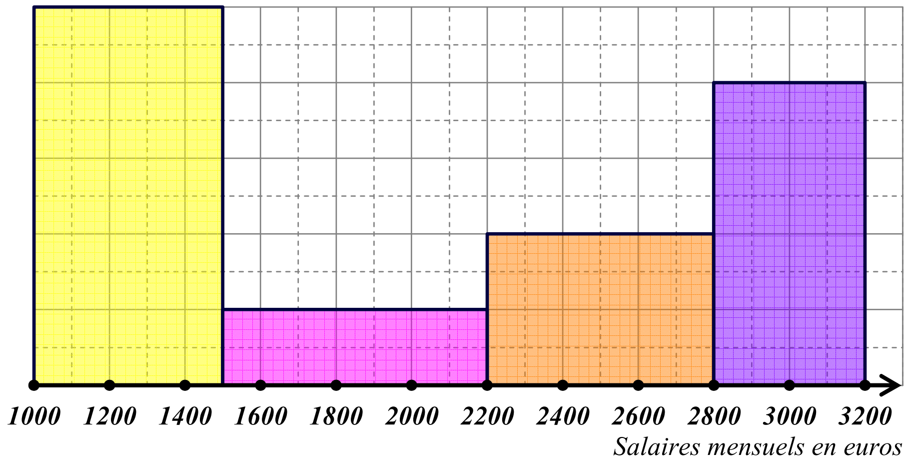
➲ D'après le graphique, les fréquences cumulées croissantes correspondant à un salaire de 2036,67€ sont de 0,51. Par conséquent, un peu moins de 50% des employés ont un salaire moyen supérieur au salaire moyen. Donc l'affirmation est fausse...en tout cas ambigüe.

e) Dans un histogramme, c'est l'aire qui représente et est proportionnel à l'effectif.

Pour construire l'histogramme en question, nous devons compléter le tableau suivant :

Classe	$[1000;1500[$	$[1500;2200[$	$[2200;2800[$	$[2800;3200[$
Effectif	150	42	72	96
Aire du rectangle	12,5 cm²	3,5 cm²	6 cm²	8 cm²
Dimensions du rectangle	$2,5\times 5$ cm	$1\times 3,5$ cm	2×3 cm	2×4 cm

L'histogramme représentant la série statistique est le suivant :



Les vecteurs

Placés gagnants

Le contexte

Les vecteurs ont failli être l'une des grandes victimes du nouveau programme de seconde. Comme le préconisaient certains, à quoi bon enseigner à tout le monde ce qui ne servira qu'à certains ? Ca évite juste le gavage terminal mais ça, il ne faut pas le dire !
Le présent exercice est un exercice de manipulation des vecteurs et de placements de points définis par une relation vectorielle. C'est une sorte d'exercice de base.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le triangle ABC a pour mesures :

$AB = 7\text{cm}$ $\quad$ $AC = 4\text{cm}$ $\quad$ $BC = 5\text{cm}$

Les constructions demandées seront faites à la règle graduée et au compas. On laissera apparents les traits de construction.
Le cas échéant, il faudra au préalable modifier la relation vectorielle définissant le point à construire. On indiquera alors les calculs effectués.

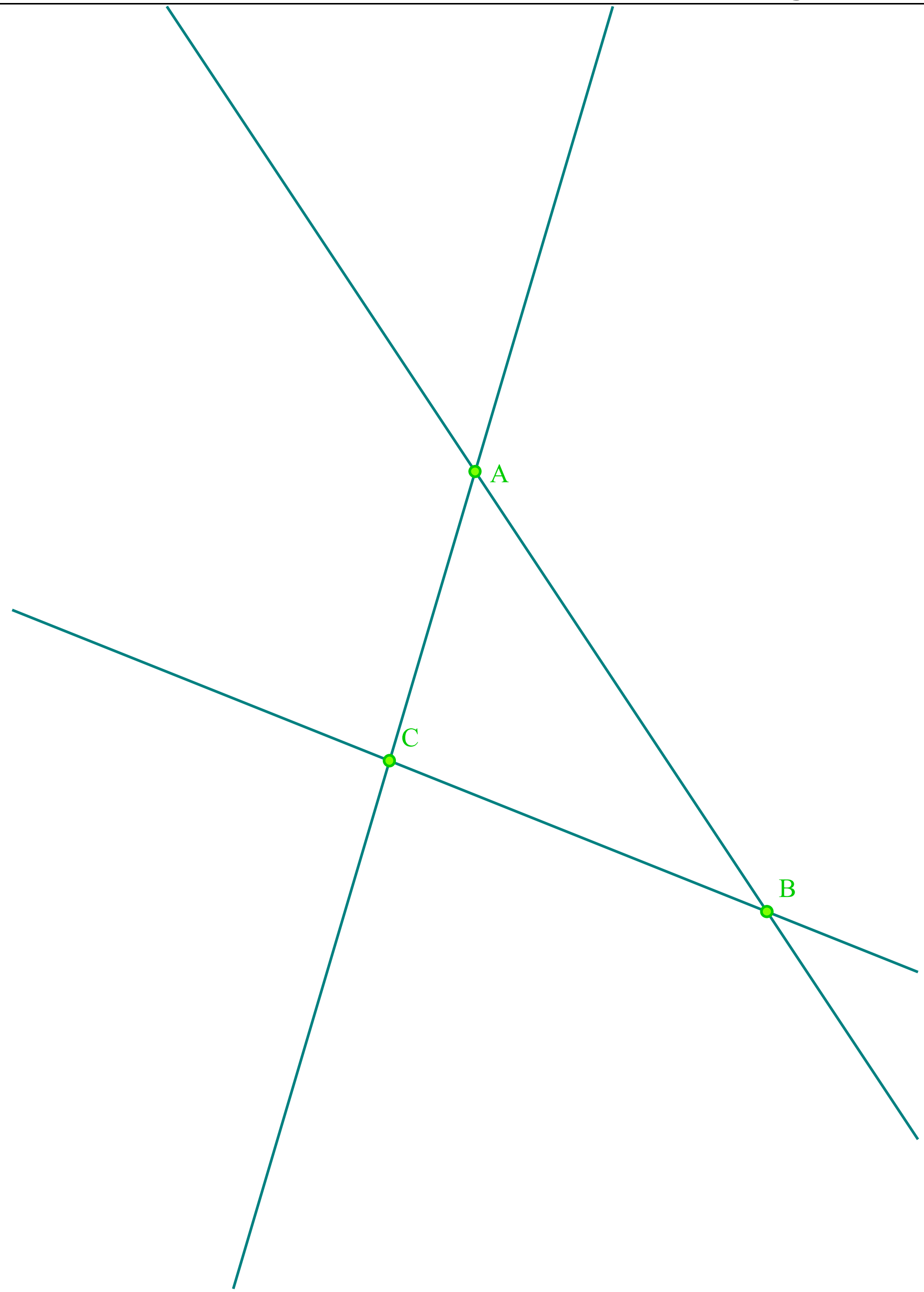
Sur la figure ci-contre, placer les points suivants :

a) Le point E défini par la relation vectorielle :
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$$

b) Le point F défini par la relation vectorielle :
$$2.\overrightarrow{AF} + 5.\overrightarrow{BF} = \vec{o}$$

c) Le point G défini par la relation vectorielle :
$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$$

d) Le point H défini par la relation vectorielle :
$$\overrightarrow{CH} = 3.\overrightarrow{AB} - 2.\overrightarrow{AC} + 2.\overrightarrow{BC}$$



Le corrigé

a) Comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$, alors le point E est le quatrième sommet du parallélogramme ABCE
C'est ainsi qu'on le construit au compas.

b) Il est difficile de placer le point F à partir de la relation vectorielle $2.\overrightarrow{AF} + 5.\overrightarrow{BF} = \vec{o}$.
Par contre, le fait que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BF}$ soient colinéaires indique que le point F se situe sur la droite (AB). Pour savoir où, exprimons le vecteur $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

$$2.\overrightarrow{AF} + 5.\overrightarrow{BF} = \vec{o} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{AF} + \underbrace{5.\overrightarrow{BA} + 5.\overrightarrow{AF}}_{5.\overrightarrow{BF} \text{ par Chasles}} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AF} = -5.\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AF} = 5.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AF} = \frac{5}{7}.\overrightarrow{AB}}$$

<u>Conclusion :</u> le point F se situe aux cinq septièmes du segment [AB] à partir de A.

Nous aurions aussi pu chercher à placer F à partir de B et aurions alors utilisé la relation :

$$2.\overrightarrow{AF} + 5.\overrightarrow{BF} = \vec{o} \Leftrightarrow \underbrace{2.\overrightarrow{AB} + 2.\overrightarrow{BF}}_{2.\overrightarrow{AF} \text{ par Chasles}} + 5.\overrightarrow{BF} = \vec{o} \Leftrightarrow 7.\overrightarrow{BF} = 2.\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{BF} = \frac{2}{7}.\overrightarrow{BA}}$$

c) L'addition vectorielle étant commutative, la relation vectorielle définissant le point G s'écrit aussi :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}}$$

Par contre, la relation Chasles n'est pas applicable.

Partant du point B, on aboutit d'abord en C à l'issue d'un vecteur $\overrightarrow{BC}$, avant d'aller à l'opposé de A pour une translation de vecteur égal à la moitié de $\overrightarrow{AC}$. On aboutit alors au point G.

d) Pour pouvoir placer le point H, nous devons simplifier la relation vectorielle le définissant.

On remet un peu d'ordre...

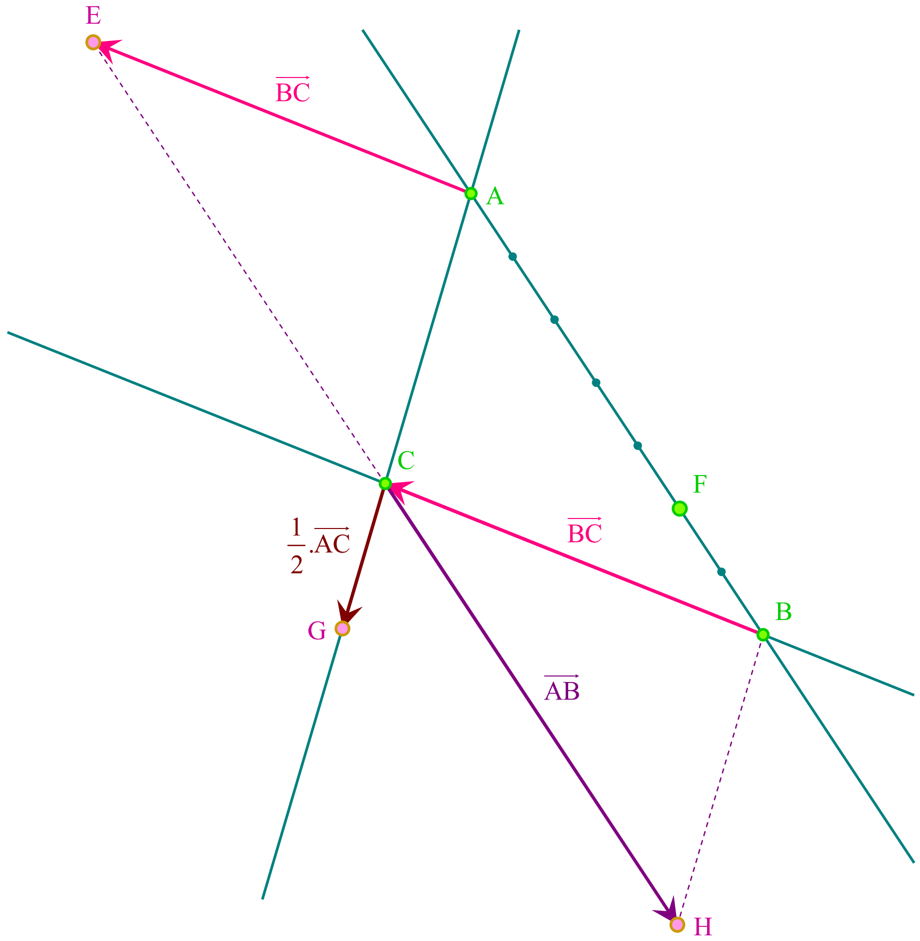
$$\overrightarrow{CH} = 3.\overrightarrow{AB} - 2.\overrightarrow{AC} + 2.\overrightarrow{BC}$$

$$= 3.\overrightarrow{AB} + 2.\overrightarrow{BC} + 2.\overrightarrow{CA} = 3.\overrightarrow{AB} + 2.\underbrace{\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)}_{\text{Chasles}} = 3.\overrightarrow{AB} + 2.\overrightarrow{BA}$$

$$= 3.\overrightarrow{AB} - 2.\overrightarrow{AB} = \boxed{\overrightarrow{AB}}$$

<u>Conclusion :</u> le point H est le quatrième sommet du parallélogramme CABH.

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre. ➚



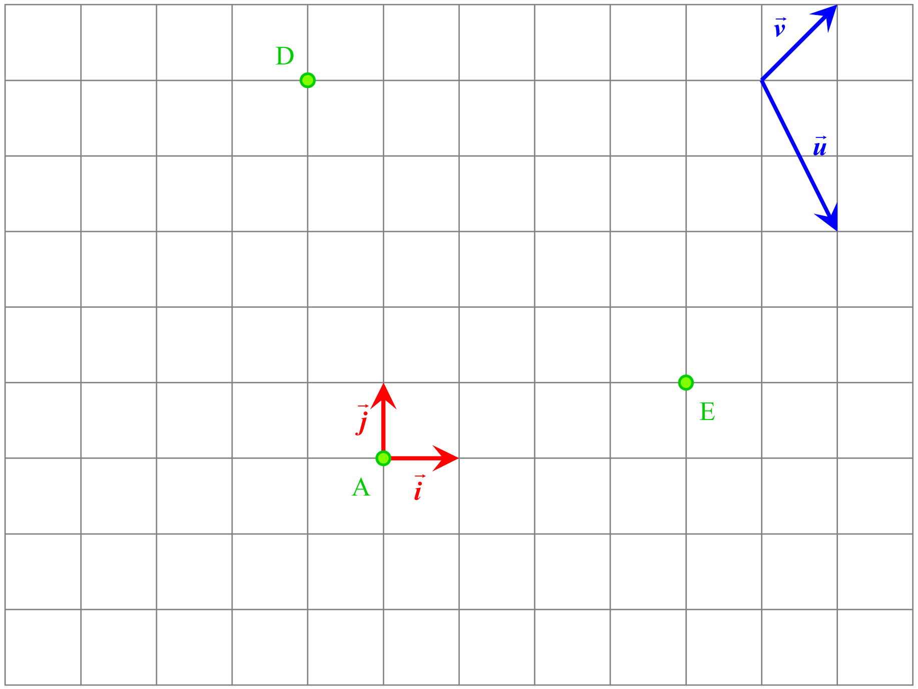
Le quadrille des âges

Le contexte

Dans le présent exercice, il s'agit d'exprimer un vecteur en fonction de deux autres.
Il préfigure les repères, les vecteurs de base et les coordonnées mais pas sous le bon angle !

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le quadrillage est constitué de carrés faisant un centimètre de côté.



a) Sur le graphique ci-dessus, placer les points B et C définis par les relations vectorielles :

$\overrightarrow{AB} = -3.\vec{i} - 2.\vec{j}$ $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + 4.\vec{v}$

b) On répondra aux questions suivantes sans justification, en donnant directement le résultat sur la feuille.

1. Déterminer deux coefficients réels tels que :

$$\overrightarrow{DE} = \ldots\ldots \times \vec{u} + \ldots\ldots \times \vec{v}$$

2. Déterminer deux coefficients réels tels que :

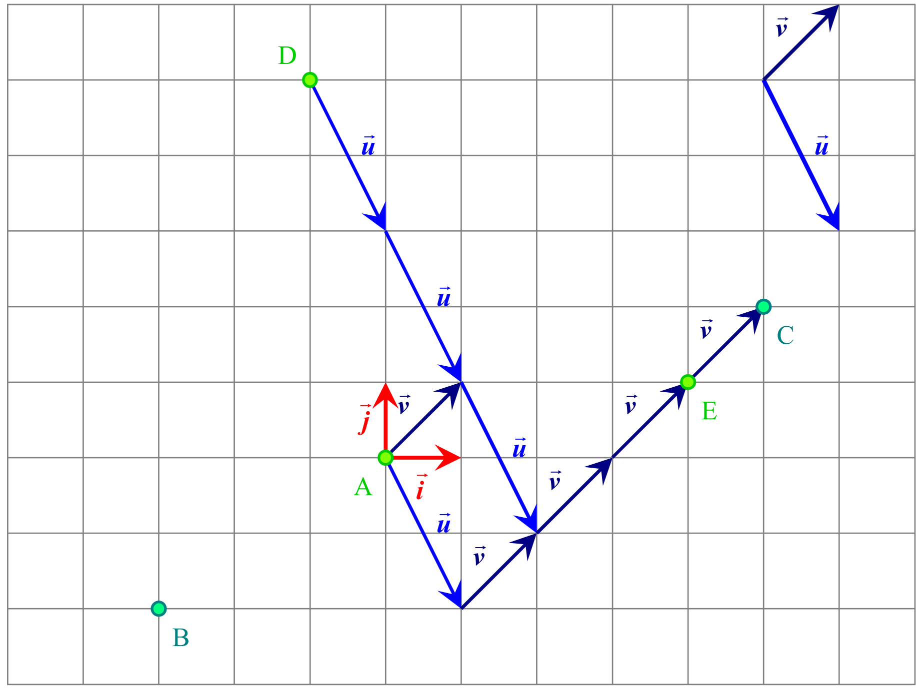
$$\overrightarrow{AD} = \ldots\ldots \times \vec{i} + \ldots\ldots \times \vec{j}$$

3. Déterminer deux coefficients réels tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \ldots\ldots \times \vec{u} + \ldots\ldots \times \vec{v}$$

Le corrigé

a) On se déplace en $\vec{i}$ et en $\vec{j}$ en suivant le quadrillage qui est basé sur ces deux vecteurs orthonormés. Le déplacement en vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se fait en biais.
Les points B et C ont été construits sur le graphique ci-après.



b) D'après le graphique, on établit :

$$\overrightarrow{DE} = \boxed{3 \times \vec{u} + 2 \times \vec{v}}$$
$$\overrightarrow{AD} = (-1) \times \vec{i} + 5 \times \vec{j} = \boxed{-\vec{i} + 5.\vec{j}}$$
$$\overrightarrow{AD} = \vec{v} - 2.\vec{u} = \boxed{(-2) \times \vec{u} + \vec{v}}$$

DANS LA LIGNE DE MIRE

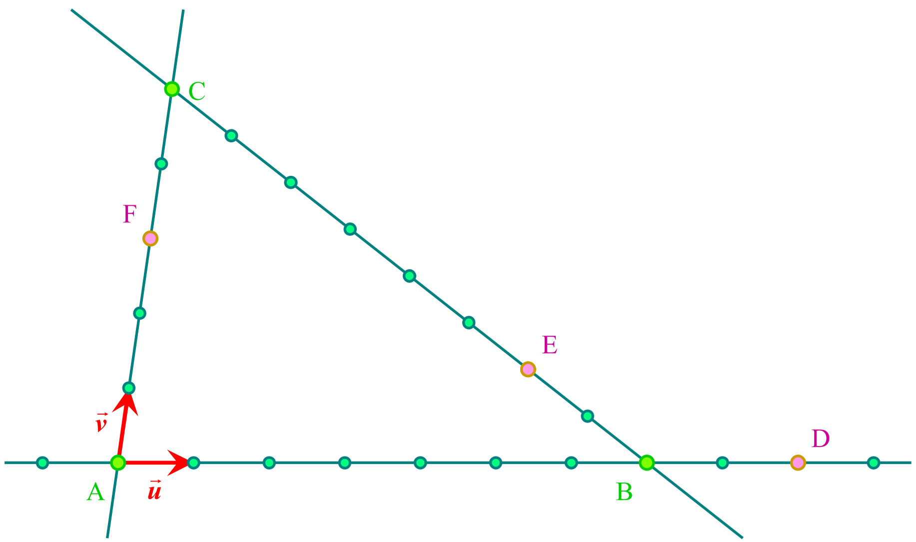
Le contexte

Dans cet exercice qui est vraisemblablement hors programme, il s'agit de prouver en utilisant les vecteurs et la colinéarité que trois points sont alignés. Un exercice principalement destiné aux scientifiques donc nuisible à l'égalité des chances.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC a pour mesures :

$AB = 7\text{cm}$ $\qquad AC = 5\text{cm}$ $\qquad BC = 8\text{cm}$



Les droites ont été graduées tous les centimètres. Les points D, E et F se situent exactement aux graduations indiquées sur la figure.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour norme (longueur) un centimètre.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{FD}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) En décomposant le vecteur $\overrightarrow{ED}$, démontrer que :

$$\overrightarrow{ED} = \frac{15}{4}.\vec{u} - \frac{5}{4}.\vec{v}$$

c) Les points D, E et F sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a) En nous appuyant sur la figure ci-contre, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{FD} = \underbrace{\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD}}_{\text{Chasles}} = -3.\vec{v} + 9.\vec{u} = \boxed{9.\vec{u} - 3.\vec{v}}$$

b) Toujours en nous appuyant sur la figure, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{ED} = \underbrace{\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD}}_{\text{Chasles}}$$

Nous devons convertir ces vecteurs en $\vec{u}$ et en $\vec{v}$

$$= \frac{2}{8}.\overrightarrow{CB} + 2.\vec{u} = \frac{1}{4}.\underbrace{\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)}_{\overrightarrow{CB}\text{ par Chasles}} + 2.\vec{v} = \frac{1}{4}.\left(-5.\vec{v} + 7.\vec{u}\right) + 2.\vec{u}$$

$$= -\frac{5}{4}.\vec{v} + \frac{7}{4}.\vec{u} + 2.\vec{u} = -\frac{5}{4}.\vec{v} + \frac{7}{4}.\vec{u} + \frac{8}{4}.\vec{u} = -\frac{5}{4}.\vec{v} + \frac{15}{4}.\vec{u} = \boxed{\frac{15}{4}.\vec{u} - \frac{5}{4}.\vec{v}}$$

c) Pour savoir si les points D, E et F sont alignés, regardons si les vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.

Comparons les vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{ED}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

	$\overrightarrow{FD}$		$\overrightarrow{ED}$	
$\vec{u}$	9	$\xrightarrow{\times\frac{5}{12}}$	$\frac{15}{4}$	$9\times\frac{5}{12} = \frac{\cancel{3}\times 15}{\cancel{3}\times 4}$
$\vec{v}$	-3	$\xrightarrow{\times\frac{5}{12}}$	$-\frac{5}{4}$	$-3\times\frac{5}{12} = -\frac{\cancel{3}\times 5}{\cancel{3}\times 4}$

Il faut tâtonner pour trouver le facteur 5/12. On regarde ce qui manque aux numérateurs et dénominateurs...

Nous en déduisons :

$$\boxed{\frac{5}{12}\times\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{ED}}$$

<u>Conclusion :</u> les vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires. Donc les points F, D et E sont alignés.

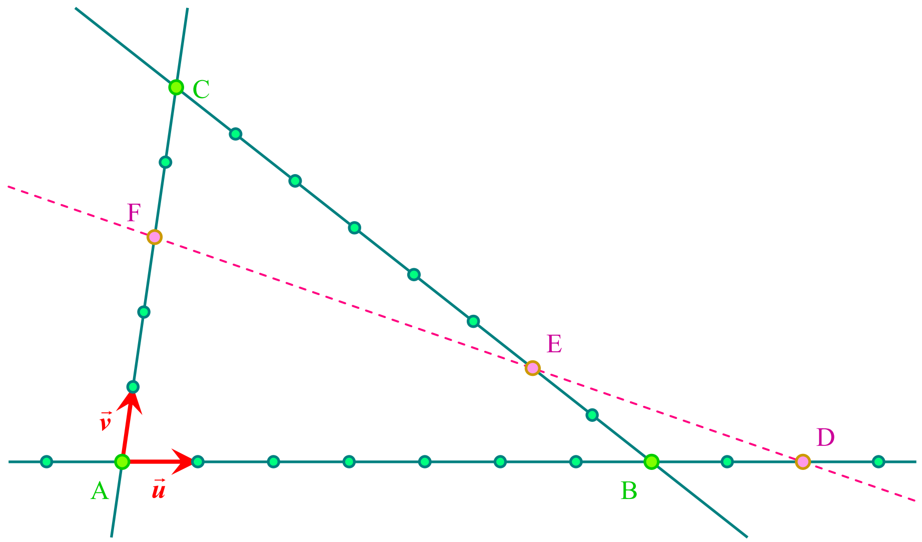
Une autre méthode pour établir la proportionnalité des coefficients : le déterminant

Calculons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{ED}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \underbrace{9\times\frac{-5}{4}}_{\text{Une diagonale...}} - \underbrace{(-3)\times\frac{15}{4}}_{\text{...et l'autre}} = -\frac{45}{4} + \frac{45}{4} = \boxed{0}$$

Comme le déterminant est nul, alors les coefficients sont proportionnels. Donc les vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires. Et les points D, E et F sont alignés.
Cette méthode ne donne pas le facteur de proportionnalité, mais elle indique qu'il y en a une proportionnalité. Et c'est ce que nous recherchons...

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



PETIT REFRAÎCHISSEMENT VECTORIEL

Le contexte

Cet exercice est dans la lignée du précédent. Il s'agit de prouver des alignements (ou non) en s'appuyant sur les vecteurs. La géométrie analytique n'est jamais très loin...

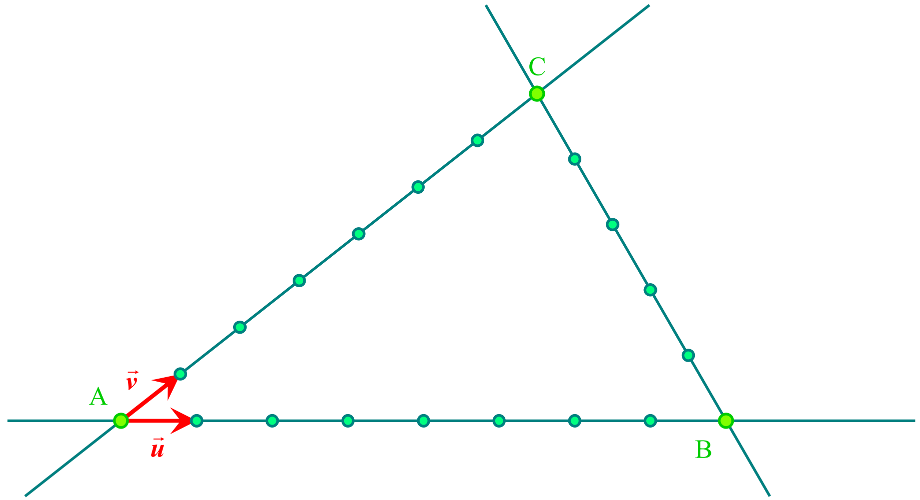
L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC a pour mesures :

AB = 8cm AC = 7cm BC = 5cm

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesurent un centimètre et vérifient les égalités vectorielles :

$$\vec{u} = \frac{1}{8}.\overrightarrow{AB} \quad \underline{\text{et}} \quad \vec{v} = \frac{1}{7}.\overrightarrow{AC}$$



a) Les points G et I sont définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}.\overrightarrow{AC} \quad \underline{\text{et}} \quad 3.\overrightarrow{BI} + 2.\overrightarrow{CI} = \vec{o}$$

1. Placer le point G sur la figure ci-dessus.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{CB}$, puis placer le point C sur la figure.

c) On s'intéresse à l'alignement des points A, G et I.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont-ils colinéaires ? Conclure.

d) Les points J et H sont définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{CA} + \frac{3}{10}.\overrightarrow{CB} \qquad \text{et} \qquad 5.\overrightarrow{AJ} + 3.\overrightarrow{BJ} = \vec{o}$$

Les points C, J et H sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.

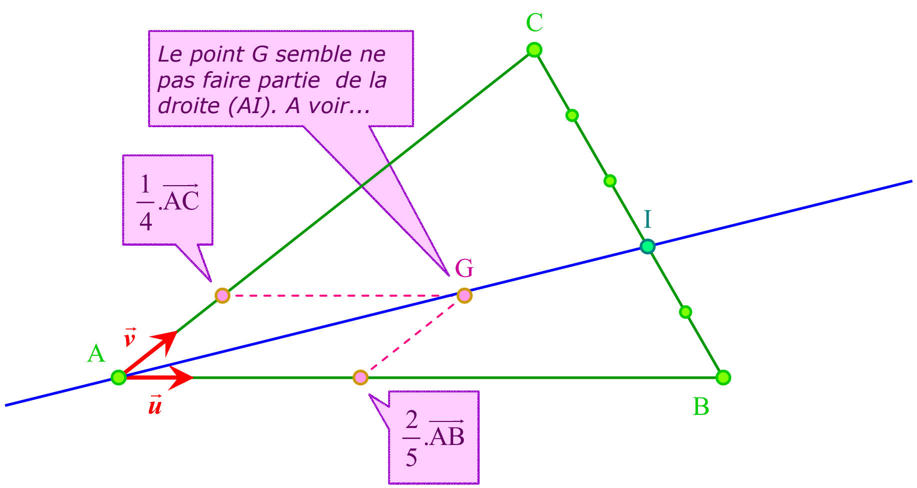
Le corrigé

a.1) Le point G est le quatrième sommet d'un parallélogramme. C'est au compas qu'il se construit.

a.2) La relation vectorielle $3.\overrightarrow{BI} + 2.\overrightarrow{CI} = \vec{o}$ indique que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires. Le point I se situe donc sur la droite (BC). Mais où exactement ? C'est ce que nous allons déterminer.

$$3.\overrightarrow{BI} + 2.\overrightarrow{CI} = \vec{o} \Leftrightarrow \underbrace{3.\overrightarrow{BC} + 3.\overrightarrow{CI}}_{3.\overrightarrow{BI}} + 2.\overrightarrow{CI} = \vec{o} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{CI} = 3.\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{CI} = \frac{3}{5}.\overrightarrow{CB}}$$

a.3) le point I se situe à trois centimètres de C sur le segment [CB].



b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ peuvent s'exprimer à partir des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
En s'aidant de la figure, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{AB} = 8.\vec{u} \qquad \overrightarrow{AC} = 7.\vec{v} \qquad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -7.\vec{v} + 8.\vec{u}$$

Ces choses ayant été dites, nous allons pouvoir faire ce qui est demandé sans trop d'efforts.

b.1) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
D'après l'énoncé, nous savons :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}.\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5} \times 8.\vec{u} + \frac{1}{4} \times 7.\vec{v} = \boxed{\frac{16}{5}.\vec{u} + \frac{7}{4}.\vec{v}}$$

b.2) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{AI} = \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}}_{\overrightarrow{AI}} = 7.\vec{v} + \frac{3}{5}.\overrightarrow{CB} = 7.\vec{v} + \frac{3}{5}.\underbrace{\left(-7.\vec{v} + 8.\vec{u}\right)}_{\overrightarrow{CB}} = \frac{35}{5}.\vec{v} - \frac{21}{5}.\vec{v} + \frac{24}{5}.\vec{u} = \boxed{\frac{24}{5}.\vec{u} + \frac{14}{5}.\vec{v}}$$

b.3) Pour établir si oui ou non les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires, nous devons regarder si leurs coefficients en $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnels. Deux méthodes sont possibles.

- ❤ **On peut chercher à déterminer les facteurs de proportionnalité entre ces quatre coefficients**

	$\overrightarrow{AG}$		$\overrightarrow{AI}$	
$\vec{u}$	$\frac{16}{5}$	$\xrightarrow{\times\frac{3}{2}}$	$\frac{24}{5}$	$\frac{16}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$
$\vec{v}$	$\frac{7}{4}$	$\xrightarrow{\times\frac{8}{5}}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{7}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{56}{20} = \frac{14}{5}$

Comme les facteurs $\frac{3}{2}$ et $\frac{8}{5}$ sont différents, alors les coefficients ne sont pas proportionnels. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ ne sont pas colinéaires.

- ❤ **On peut aussi calculer un produit en croix : le déterminant**

Rappelons l'équivalence suivante :

Voilà les produits en croix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ sont proportionnels } \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow a \times d = c \times b \Leftrightarrow a \times d - c \times b = 0$$

Le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ dans la base $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est donné par :

$$\det\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AI}\right) = \overbrace{\frac{16}{5} \times \frac{14}{5}}^{\text{Une diagonale...}} - \overbrace{\frac{7}{4} \times \frac{24}{5}}^{\text{...et l'autre.}}$$

On fait la différence des produits des diagonales du tableau ci-dessus.

$$= \frac{224}{25} - \frac{168}{20} = \frac{896}{100} - \frac{840}{100} = \frac{56}{100} = 0,56 \neq 0$$

Comme le déterminant est non nul, alors les coefficients ne sont pas proportionnels.

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les points A, G et I ne sont pas alignés.

La meilleure base possible ?

Pour déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires, nous avons travaillé dans la base $(\vec{u},\vec{v})$. Nous aurions pu aussi évoluer dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et aurions alors établi :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}.\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}.\overrightarrow{AC}$$

Là encore, il n'y a pas de proportionnalité entre les coefficients.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ ne sont pas colinéaires.

d) La première chose à faire est de placer ces deux points H et J de la même façon que nous avons positionné les points G et I.

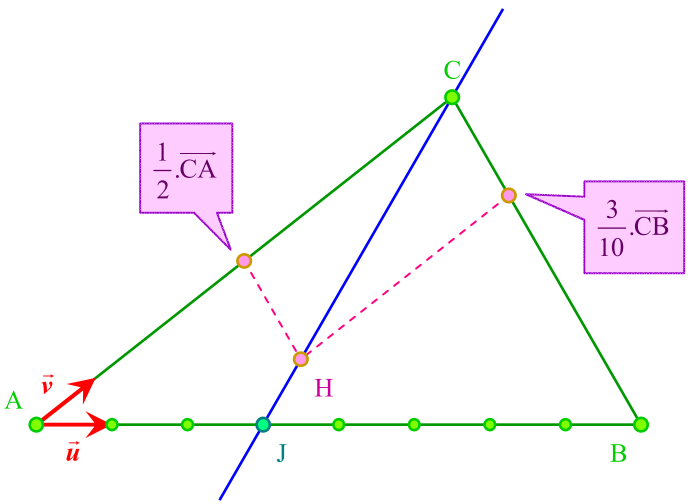
A l'instar de G, le point H est le quatrième sommet d'un parallélogramme débutant en C.

La relation vectorielle $5.\overrightarrow{AJ}+3.\overrightarrow{BJ}=\vec{0}$ indique que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires, donc que le point J se trouve sur droite (AB). Mais où exactement ?

Pour le savoir, nous allons chercher à exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

$$5.\overrightarrow{AJ}+3.\overrightarrow{BJ}=\vec{0} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{AJ}+\underbrace{3.\overrightarrow{BA}+3.\overrightarrow{AJ}}_{3.\overrightarrow{BJ}}=\vec{0} \Leftrightarrow 8.\overrightarrow{AJ}=\underbrace{3.\overrightarrow{AB}}_{-3.\overrightarrow{BA}} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{8}.\overrightarrow{AB}}$$

Le segment [AB] mesurant 8 centimètres, le point J se trouve à trois centimètres du point A sur le segment [AB].



Sur la figure, les points C, H et J semblent alignés. Mais le sont-ils réellement ?

Pour le savoir, nous allons procéder comme avec les points A, G et I. D'abord, nous allons exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CJ}$ en fonction des vecteurs de base $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Puis nous essaierons de trouver une certaine proportionnalité entre leurs coefficients...et donc une certaine colinéarité

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{CH}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{CH}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{CA}+\frac{3}{10}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\times\underbrace{\left(-7.\vec{v}\right)}_{\overrightarrow{CA}}+\frac{3}{10}\times\underbrace{\left(-7.\vec{v}+8.\vec{u}\right)}_{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}$$

$$=-\frac{7}{2}.\vec{v}-\frac{21}{10}.\vec{v}+\frac{24}{10}.\vec{u}=-\frac{35}{10}.\vec{v}-\frac{21}{10}.\vec{v}+\frac{24}{10}.\vec{u}=\boxed{\frac{24}{10}.\vec{u}-\frac{56}{10}.\vec{v}=2,4\times\vec{u}-5,6\times\vec{v}}$$

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{CJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{CJ}=\underbrace{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AJ}}_{\overrightarrow{CJ}}=-7.\vec{v}+\frac{3}{8}\times\overrightarrow{AB}=-7.\vec{v}+\frac{3}{8}\times\left(8.\vec{u}\right)=\boxed{3.\vec{u}-7.\vec{v}}$$

Les coefficients des vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CJ}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ sont-ils proportionnels ?

Pour le savoir, nous avons toujours deux méthodes :

En recherchant les facteurs de proportionnalité qui se voient assez vite...

	$\overrightarrow{CH}$		$\overrightarrow{CJ}$
$\vec{u}$	2,4	$\xleftarrow{\times 0,8}$	3
$\vec{v}$	−5,6	$\xleftarrow{\times 0,8}$	−7

...ou en calculant le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CJ}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$

$$\det\left(\overrightarrow{CH},\overrightarrow{CJ}\right)=\overbrace{2,4\times(-7)}^{\text{Une diagonale}}-\overbrace{(-5,6)\times 3}^{\text{...et l'autre}}$$

$$=-16,8+16,8=0$$

Comme le déterminant est nul, alors les coefficients sont proportionnels.

Comme les coefficients sont proportionnels, alors les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires. D'ailleurs :

$$\boxed{\overrightarrow{CH}=\frac{4}{5}.\overrightarrow{CJ}}$$

Le déterminant indique s'il y a proportionnalité ou non. Mais il ne donne pas le facteur de proportionnalité.

<u>Conclusion :</u> les points C, H et J sont bien alignés.