Le mot de l'auteur

Comme chaque année au début de l'été, je publie l'intégralité des exercices que j'ai donnés en devoirs dans certaines des classes que j'avais. Voici la cuvée seconde 2008-2009 !
Cela faisait deux ans que je n'avais pas eu de seconde. Deux années durant lesquelles les choses ont bien changé. Déjà que ce n'était pas terrible, mais là, les choses ont versé dans le grand n'importe quoi.
Avec le socle commun des connaissances, sorte de RMI scolaire, et les nouveaux programmes de collèges, les mathématiques ont été atrophiés. Au nom de l'égalité des chances et de la réussite de tous les élèves, on a éliminé tout ce qui pouvait représenter la moindre difficulté. Surtout ne plus prononcer les mots «effort» et «réfléxion». Moi qui croyais qu'on allait à l'école pour apprendre et que c'est après que l'on réussissait un examen, un concours ou dans un boulot.
Au collège, la géométrie et le raisonnement sont désormais réduits à la portion congrue. Le maître mot est de faire «réussir tous les élèves». D'ailleurs, on organise même des stages pour «former» les profs de lycée à cette nouvelle doctrine de l'abandon et de la décadence.
Les élèves qui nous arrivent du collège ne sont pas plus bêtes que ceux qui les ont précédés, ils sont juste moins instruits. On s'étonne qu'ils soient incapables de courir un marathon mais personne ne les a jamais entrainés.
Grâce à une réaction vigoureuse de la confrérie des profs de maths, un projet de programme émanant des Inspections dans la continuité de ceux qu'ils avaient mis en place au collège a été repoussé. Comme l'a dit notre Inspecteur-Chef, à quoi sert-il de parler des vecteurs en seconde alors que cela concernera tout au plus 40% des élèves. Ca sert justement à voir ces 40% d'élèves qui ont un profil scientifique et à éviter aux autres de se fourvoyer dans des études qui ne sont pas faites pour eux. Et ça sert aussi à alléger une année de première S déjà bien lourde. Plus on en fait avant, moins il y en a à faire après !
Mais il ne fait aucun doute que la «réforme des lycées» voulue par Carlito et attendue avec envie par les amis de Monsieur Mérieu, ces profiteurs d'abandon et ces profesionnels de la décadence, nous imposera une remise en cause qui pourrait bien signifier le glas de la filière scientifique en France.
Depuis cinq siècles, l'Occident a assis sa domination du monde sur la science et la technique. Si les choses continuent ainsi, demain nous serons les dominés grâce à eux.

Les exercices de ce volume sont classés par catégories :

La taverne de l'Irlandais
[http://www.tanopah.com]
présente

Le Grand N'importe Quoi de seconde

Le recueil des exercices donnés en devoirs de mathématiques durant la saison 2008-2009
par Jérôme ONILLON, prof. désagrégé et même pas recyclable de mathématiques

Edition du jeudi 12 août 2010

Equations, inéquations, ordre et techniques algébriques

Et quoi ? Scions ?

Le contexte

Un exercice pratiquement de collège où il s'agit de résoudre deux équations du premier degré.

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les équations suivantes. On conclura chaque résolution en donnant l'ensemble des solutions.

$$5.x-3\times(6.x-7)+2=13+5\times(3-2.x)$$

$$2.x-\frac{1}{3}\times(4.x-7)=3+\frac{1}{7}\times(2.x-5)$$

Le corrigé

➲ Résolvons dans ℝ la première équation proposée.

$$5.x-3\times(6.x-7)+2=13+5\times(3-2.x) \Leftrightarrow \overbrace{5.x-18.x+21+2=13+15-10.x}^{\text{On commence par développer séparément chaque membre...}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{-13.x+23=28-10.x}^{\text{...que l'on réduit ensuite.}}$$

$$\Leftrightarrow -13.x+10.x=28-23$$

$$\Leftrightarrow -3.x=5 \Leftrightarrow x=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}$$

Conclusion : la solution de cette équation est $-\frac{5}{3}$. Ce qui se résume par : $S=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

➲ Résolvons dans ℝ la seconde équation.

$$2.x-\frac{1}{3}\times(4.x-7)=3+\frac{1}{7}\times(2.x-5) \Leftrightarrow \overbrace{2.x-\frac{4}{3}.x+\frac{7}{3}=3+\frac{2}{7}.x-\frac{5}{7}}^{\text{On commence par développer séparément chaque membre.}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{2.x-\frac{4}{3}.x-\frac{2}{7}.x=3-\frac{5}{7}-\frac{7}{3}}^{\text{Puis, pour réduire chaque membre,...}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\frac{42}{21}.x-\frac{28}{21}.x-\frac{6}{21}.x=\frac{63}{21}-\frac{15}{21}-\frac{49}{21}}^{\text{...on met toutes les fractions au même dénominateur } 3\times7=21.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{21}\times x=\frac{-1}{21} \Leftrightarrow \overbrace{\cancel{21}\times\frac{8}{\cancel{21}}\times x=\frac{-1}{\cancel{21}}\times\cancel{21}}^{\text{On peut multiplier les deux membres par 21...}}$$

$$\Leftrightarrow 8\times x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{8}$$

Conclusion : l'équation a pour seule solution $-\frac{1}{8}$. Ce que l'on résume : par $S=\left\{-\frac{1}{8}\right\}$

En cas de roman

Le contexte

Un exercice où il s'agit de même en oeuvre les opérations sur les inégalités. Très formateur.

L'énoncé

3°) Troisième partie : en cas de roman

a est un réel appartenant à l'intervalle $]-4;3[$.

b est un autre réel appartenant à l'intervalle $]-7;-2[$.

Déterminer un encadrement des réels suivants. Dans chaque cas, on précisera les opérations qui ont été effectuées.

$4\times a+3\times b-5$	$2\times a-b$

Le corrigé

Comme le réel a appartient à l'intervalle $]-4;3[$, alors il vérifie l'inégalité $-4<a<3$.

De même, b faisant partie de l'intervalle $]-7;-2[$, il vérifie l'inégalité $-7<b<-2$.

Rappelons que s'il est permis d'ajouter deux inégalités membre à membre, il est en revanche totalement interdit de les soustraire membre à membre.

➲ Déterminons un encadrement de $4\times a+3\times b-5$.

$$\left.\begin{array}{l} -4<a<3 \xrightarrow{\times 4} -16<4\times a<12 \\ -7<b<-2 \xrightarrow{\times 3} -21<3\times b<-6 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{membre à membre}]{\text{On ajoute ces inégalités}} -37<4\times a+3\times b<6$$

$$\Downarrow \boxed{\text{On ajoute } -5} \Downarrow$$

$$-42<4\times a+3\times b-5<1$$

Conclusion : la somme $4\times a+3\times b-5$ appartient à l'intervalle $]-42;1[$.

➲ Déterminons un encadrement de $2\times a-b$.

On contourne l'interdiction de soustraire une inégalité à une autre en multipliant la première par -1 , puis en l'ajoutant à la seconde. Car soustraire, c'est additionner l'opposé.

$$\left.\begin{array}{l} -4<a<3 \xrightarrow{\times 2} -8<2.a<6 \rightarrow -8<2.a<6 \\ -7<b<-2 \xrightarrow{\times(-1)} 7>-b>2 \rightarrow 2<-b<7 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{membre à membre}]{\text{Ajout}} -6<2.a-b<13$$

Conclusion : la somme $2\times a-b$ appartient à l'intervalle $]-6;13[$.

Ensembles et à part

Le contexte

Un exercice simple et direct à propos des intersections d'intervalles.

L'énoncé

Simplifier les intersections suivantes. Aucune justification n'est demandée. On répondra directement sur la feuille.

$]-4;5]\cap[3;+\infty[=$

$]-\infty;-3[\cap[-5;9[=$

$]-\infty;5[\cap[5;9]=$

$]-5;12[\cap[3;7]=$

Le corrigé

Pour répondre aux questions posées, on peut s'aider d'un schéma. Les réponses sont :

$\underbrace{]-4;5]\cap[3;+\infty[=[3;5]}$
3 et 5 appartiennent aux deux intervalles qui se chevauchent.

$\underbrace{]-\infty;-3[\cap[-5;9[=[-5;-3[}$
-3 n'appartient pas au premier intervalle.

$\underbrace{]-\infty;5[\cap[5;9]=\varnothing}$
Le premier intervalle se termine juste avant que le second ne commence.

$\underbrace{]-5;12[\cap[3;7]=[3;7]}$
Le second intervalle est inclus dans le premier.

LES PRODUITS DE MÉFORMES

Le contexte

Dans cet exercice, il s'agit de mettre en oeuvre sur des formes du second degré trois techniques de factorisation :

- ☑ les identités remarquables (différence de deux carrés).
- ☑ la mise en facteur d'un facteur commun.
- ☑ recherche de la forme canonique pour aboutir à la forme factorisée.

Cette dernière technique est clairement hors programme mais je l'aime tellement...

L'énoncé

Factoriser les expressions suivantes. Dans chaque cas, on précisera la méthode employée.

$A(x)=100-(2.x+1)^2$	$B(x)=x^2+12\times x-13$
$C(x)=3\times x^2-2\times x$	$D(x)=(7.x-2)\times(6.x-8)+5\times(3.x-4)^2$
$E(x)=16\times x^2-40\times x+21$	$F(x)=2\times x^2-4\times x-16$

Le corrigé

Trois méthodes permettent de factoriser une expression : la recherche d'un facteur commun, la différence de deux carrés et la recherche de la forme canonique (qui aboutit à une différence de deux carrés). Voyons ce qu'il en est des six expressions proposées.

$$A(x)=\overbrace{100-(2.x+1)^2}^{\text{C'est une différence de deux carrés : } a^2-b^2}=10^2-(2.x+1)^2=\overbrace{[10+(2.x+1)]}^{a+b}\times\overbrace{[10-(2.x+1)]}^{a-b}$$

$$=[10+2.x+1]\times[10-2.x-1]=(2.x+11)\times(9-2.x)$$

Conclusion : la forme factorisée de $A(x)$ est $A(x)=(2.x+11)\times(9-2.x)$

Recherchons la forme canonique de cette expression.

$x^2+2\times x\times 6$ est le début de l'identité remarquable $(x+6)^2=x^2+12.x+36$

$$B(x)=x^2+12\times x-13=\underbrace{x^2+2\times x\times 6}-13=\underbrace{(x+6)^2-36}-13=(x+6)^2-49$$

$$=(x+6)^2-7^2=[(x+6)+7]\times[(x+6)-7]=(x+13)\times(x-1)$$

Conclusion : la forme factorisée de $B(x)$ est $B(x)=(x+13)\times(x-1)$

Entre ces deux termes, il y a un facteur commun évident : x

$$C(x)=3.x^2-2.x=3\times x\times\boxed{x}-2\times\boxed{x}=\boxed{x}\times[3\times x-2]=x\times(3.x-2)$$

Conclusion : la forme factorisée de $C(x)$ est $C(x)=x\times(3.x-2)$.

Enetre ces deux termes, il semble y avoir un facteur commun : 3.x−4

$$D(x)=(7.x-2)\times(6.x-8)+5\times(3.x-4)^2$$

$$=(7.x-2)\times 2\times\underbrace{\boxed{(3.x-4)}}_{\text{Le facteur...}}+5\times(3.x-4)\times\underbrace{\boxed{(3.x-4)}}_{\text{...commun}}$$

$$=\boxed{(3.x-4)}\times[(7.x-2)\times 2+5\times(3.x-4)]$$

$$=(3.x-4)\times[14.x-4+15.x-20]=(3.x-4)\times(29.x-24)$$

Conclusion : la forme factorisée de $D(x)$ est $D(x)=(3.x-4)\times(29.x-24)$

Recherchons la forme canonique de cette expression.

$(4.x)^2-2\times 4.x\times 5$ est le début de l'identité remarquable $(4.x-5)^2=16.x^2-40.x+25$

$$E(x)=16\times x^2-40\times x+21=\underbrace{(4.x)^2-2\times 4.x\times 5}+21=\underbrace{(4.x-5)^2-25}+21$$

$$=(4.x-5)^2-4$$

$$=(4.x-5)^2-2^2=[(4.x-5)+2]\times[(4.x-5)-2]=(4.x-3)\times(4.x-7)$$

Conclusion : la forme factorisée de $E(x)$ est $E(x)=(4.x-3)\times(4.x-7)$

Pour pouvoir trouver simplement la forme canonique de cette expression, nous commençons par tout factoriser par 2.

$$F(x)=2\times x^2-4\times x-16=\boxed{2}\times x^2-\boxed{2}\times 2\times x-\boxed{2}\times 8=\boxed{2}\times[x^2-2\times x-8]$$

A présent, recherchons la forme canonique de $x^2-2.x-8$.

$x^2-2\times x\times 1$ est le début de l'identité remarquable $(x-1)^2=x^2-2.x+1$

$$x^2-2.x-8=\underbrace{x^2-2\times x\times 1}-8=\underbrace{(x-1)^2-1}-8=(x-1)^2-9$$

$$=(x-1)^2-3^2=[(x-1)+3]\times[(x-1)-3]=(x+2)\times(x-4)$$

Conclusion : la forme factorisée de $F(x)$ est $F(x)=2\times(x+2)\times(x-4)$

RÉMINISCENCES OU PRESQUE

Le contexte

Cet exercice se compose de deux inéquations du premier degré et d'une équation du second degré qui se résout par une résolution par facteur commun.

L'énoncé

a) Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes.

$$4\times(3.x-7)-17.x\geq 12-5\times(4-7.x) \qquad \frac{3.x-2}{7}-1<\frac{4.x+1}{5}$$

b) Résoudre dans ℝ l'équation suivante :

$$4\times(x+5)^2-(2.x+1)\times(3.x+15)=0$$

Le corrigé

a) Résolvons dans ℝ la première inéquation :

On commence par développer séparément chaque membre...

$$4\times(3.x-7)-17.x\geq 12-5\times(4-7.x) \Leftrightarrow 12.x-28-17.x\geq 12-20+35.x$$

...que l'on réduit ensuite.

$$\Leftrightarrow -5.x-28\geq 35.x-8 \Leftrightarrow -5.x-35.x\geq -8+28$$

On divise par le réel négatif -40. L'ordre change...

On simplifie...

$$\Leftrightarrow -40.x\geq 20 \Leftrightarrow x\leq\frac{20}{-40}=-\frac{1}{2}=-0,5$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

➲ L'embêtant dans cette seconde inéquation, ce sont les dénominateurs 7 et 5.

On multiplie les deux membres par 7×5=35 pour éliminer les dénominateurs 7 et 5

$$\frac{3.x-2}{7}-1<\frac{4.x+1}{5} \Leftrightarrow 35\times\left(\frac{3.x-2}{7}-1\right)<\left(\frac{4.x+1}{5}\right)\times 35$$

On aboutit à une inéquation classique...

$$\Leftrightarrow \frac{35}{7}\times(3.x-2)-35\times 1<(4.x+1)\times\frac{35}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5\times(3.x-2)-35<(4.x+1)\times 7 \Leftrightarrow 15.x-10-35<28.x+7$$

$$\Leftrightarrow 15.x-45<28.x+7 \Leftrightarrow 15.x-28.x<7+45$$

$$\Leftrightarrow -13.x<52 \Leftrightarrow x>\frac{52}{-13}=-4$$

On divise par le négatif -13. L'ordre change...

Conclusion : l'ensemble des solutions est l'intervalle $]-4;+\infty[$.

b) Si l'on développe le premier membre cette équation, il reste des x^2. Donc factorisons !

On déplie l'expression...

$$4.(x+5)^2-(2.x+1).(3.x+15)=0 \Leftrightarrow 4\times(x+5)\times\underbrace{\boxed{(x+5)}}_{\text{Facteur...}}-(2.x+1)\times 3\times\underbrace{\boxed{(x+5)}}_{\text{...commun}}=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x+5)}\times[4\times(x+5)-(2.x+1)\times 3]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+5)\times[4.x+20-6.x-3]=0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est...

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+5)\times(-2.x+17)=0}_{\text{Ce produit est nul si et seulement...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x+5=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad -2.x+17=0}_{\text{...si l'un de ses deux facteurs l'est.}}$$

$$\Leftrightarrow x=-5 \quad \underline{\text{ou}} \quad -2.x=-17 \quad \text{soit} \quad x=\frac{-17}{-2}=8,5$$

Conclusion : l'équation proposée admet deux solutions que sont -5 et $8,5$.

LES CHAMPS DU SIGNE

Le contexte

Dans cet exercice, il s'agit de résoudre deux équations produits et deux équations quotients au moyen de tableaux de signe et après éventuellement quelques modifications de forme...

L'énoncé

Dans cet exercice, on conclura chaque résolution en donnant l'ensemble des solutions.

a) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$(3.x-7)\times(5-2.x)\geq 0$$

b) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$(7.x-8)^2>(5.x+6)^2$$

c) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{3.x-5}{x+7}\geq 4$$

d) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{7}{x-8}\leq\frac{9}{x+1}$$

Le corrigé

a) Résoudre cette première inéquation, c'est savoir quand le produit $(3.x-7)\times(-2.x+5)$ est positif ou nul. D'abord, déterminons les valeurs où les deux facteurs affines s'annulent.

$$3.x-7=0 \Leftrightarrow 7.x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3} \quad\vdots\quad -2.x+5=0 \Leftrightarrow -2.x=-5 \Leftrightarrow x=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$$

Le tableau de signe du produit $(3.x-7)\times(-2.x+5)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$3.x-7$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-2.x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Le produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Attention aux signes des facteurs affines !

Le coefficient directeur 3 est positif.

Le coefficient directeur -2 est négatif.

Le produit $(3.x-7)\times(-2.x+5)$ est positif ou nul entre $\frac{7}{3}$ et $\frac{5}{2}$.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $\left[\frac{7}{3};\frac{5}{2}\right]$.

b) Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons tout ramener dans le membre de gauche, puis chercher à factoriser. Alors nous nous prononcerons sur le signe d'un produit.

$$(7.x-8)^2>(5.x+6)^2 \Leftrightarrow \underbrace{(7.x-8)^2-(5.x+6)^2}_{\text{Identité remarquable } a^2-b^2}>0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[(7.x-8)+(5.x+6)\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(7.x-8)-(5.x+6)\right]}_{(a-b)}>0$$

$$\Leftrightarrow [7.x-8+5.x+6]\times[7.x-8-5.x-6]>0$$

$$\Leftrightarrow (2.x-2)\times(7.x-14)>0$$

Résoudre cette inéquation, c'est savoir quand ce dernier produit est strictement positif.
Les deux facteurs affines $2.x-2$ et $7.x-14$ s'annulent respectivement en 1 et 2.
Le tableau de signe du produit $(2.x-2)\times(7.x-14)$ est :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$2.x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$7.x-14$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Le produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit $(2.x-2)\times(7.x-14)$ est strictement positif avant 1 et après 2, les deux bornes étant non comprises. Par conséquent :

$$S=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$$

c) Pour résoudre cette troisième inéquation, nous allons tout ramener dans un seul membre, puis tout mettre au même dénominateur de façon à pouvoir soustraire. Nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'une fraction.

$$\frac{3.x-5}{x+7}\geq 4 \Leftrightarrow \frac{3.x-5}{x+7}-4\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3.x-5}{x+7}-\frac{4\times(x+7)}{x+7}\geq 0$$

On met au même dénominateur...

...et on soustrait.

$$\Leftrightarrow \frac{3.x-5-4\times(x+7)}{x+7}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3.x-5-4.x-28}{x+7}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-33}{x+7}\geq 0$$

Résoudre cette inéquation, c'est savoir quand le quotient $\frac{-x-33}{x+7}$ est positif ou nul.

D'abord, déterminons où ses numérateur et dénominateur s'annulent.

$-x-33=0 \Leftrightarrow -x=33 \Leftrightarrow x=-33$

C'est presque inutile si l'on remarque que 33−33=0.

$x+7=0 \Leftrightarrow x=-7$

Encore plus futile ! Car −7+7=0.

Le tableau de signe du quotient $\dfrac{-x-33}{x+7}$ est :

x	$-\infty$		-7		33		$+\infty$
$-x+33$		+		+	0	−	
$x+7$		−	0	+		+	
Le quotient		−	‖	+	0	−	

Ca s'annule au dénominateur...

Ca s'annule au numérateur.

Le quotient $\dfrac{-x-33}{x+7}$ est positif ou nul où entre -7 non compris (c'est une valeurinterdite) et 33 compris (où il est nul). Par conséquent :

$$S=\left]-7;33\right]$$

d) Pour résoudre cette inéquation, nous allons tout ramener dans le membre de gauche, puis additionner les deux fractions après une mis au même dénominateur et nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'un quotient au moyen d'un tableau de signe.

$$\frac{7}{x-8} \leq \frac{9}{x+1} \Leftrightarrow \frac{7}{x-8}-\frac{9}{x+1} \leq 0$$

On met au même dénominateur...

$$\Leftrightarrow \frac{7\times(x+1)-9\times(x-8)}{(x-8)\times(x+1)} \leq 0$$

...et on soustrait.

$$\Leftrightarrow \frac{7.x+7-9.x+72}{(x-8)\times(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2.x+79}{(x-8)\times(x+1)} \leq 0$$

Ce quotient est composé de trois facteurs affines. Cherchons les valeurs de x pour lesquelles ils s'annulent :

$-2.x+79=0$

$-2.x=-79$

$x=\dfrac{-79}{-2}=39,5$

$x-8=0$

$x=8$

$x+1=0$

$x=-1$

Le tableau de signe de ce quotient est alors le suivant :

x	$-\infty$		-1		8		$39,5$		$+\infty$
$-2.x+79$ ***Numérateur***		+		+		+	0	−	
$x-8$ ***Dénominateur***		−		−	0	+		+	
$x+1$ ***Dénominateur***		−	0	+		+		+	
Leur quotient		+	‖	−	‖	+	0	−	

Ca s'annule au dénominateur...

Ca s'annule au dénominateur...

Ca s'annule au numérateur.

Le quotient est négatif ou nul entre -1 et 8 non compris, puis après $39,5$ compris. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=\left]-1;8\right[\cup\left[39,5;+\infty\right[$$

LES TAS BLEUS DE CYGNES

Le contexte

Un second exercice sur les équations produits et quotients à résoudre avec soit une belle factorisation avant, soit une mise au même dénominateur

L'énoncé

a) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$(x+3).(x+7) > (x+3).(3.x+2)$$

b) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{5}{2.x+3} \geq \frac{8}{3.x+1}$$

c) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$64.x^2 - 10 > 48.x - 3$$

Le corrigé

a) Pour résoudre cette équation du second degré (avec des x^2), il n'y a qu'une seule voie possible : tout ramener dans un même membre, factoriser et rechercher le signe du produit au moyen d'un tableau de signe.

$$(x+3).(x+7) > (x+3).(3.x-1) \Leftrightarrow \underbrace{(x+3)}_{\text{Facteur...}}.(x+7) - \underbrace{(x+3)}_{\text{...commun.}}\ (x+3).(3.x-1) > 0$$

Pour factoriser, une seule méthode : le facteur commun !

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+3)}.\underbrace{\left[(x+7)-(3.x+2)\right]}_{\text{soit } x+7-3.x-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3).(-2.x+5) > 0$$

Où les facteurs s'annulent-ils ?

$x+3=0$ $-2.x+5=0$

$x=-3$ $-2.x=-5$

$x=2{,}5$

Le tableau de signe du produit est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		-3		$2{,}5$		$+\infty$
$x+3$		–	0	+		+	
$-2.x+8$		+		+	0	–	
Leur produit		–	0	+	0	–	

Le produit est (strictement) positif entre -3 et 2,5. Nous en concluons :

$$S =]-3;2,5[$$

b) Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons tout ramener dans le membre de gauche, puis soustraire les deux fractions après une mise au même dénominateur. Nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'un quotient au moyen d'un tableau de signe.

$$\frac{5}{2.x+3} \geq \frac{8}{3.x+1} \Leftrightarrow \frac{5}{2.x+3} - \frac{8}{3.x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\times(3.x+1) - 8\times(2.x+3)}{(2.x+3)\times(3.x-5)} \leq 0$$

Mise au même dénominateur. Mais inutile de le développer car nous connaissons déjà les signes de ses deux facteurs

Et on soustrait.

$$\Leftrightarrow \frac{15.x+5-16.x-24}{(2.x+3)\times(3.x+1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-19}{(2.x+3)\times(3.x+1)} \leq 0$$

Ce quotient est composé de trois facteurs affines. Cherchons où ils s'annulent !

$-x-19=0$	$2.x+3=0$	$3.x+1=0$
$-x=+19$	$2.x=-3$	$3.x=-1$
$x=-19$	$x=-\frac{3}{2}=-1{,}5$	$x=-\frac{1}{3}\approx-0{,}33$

Le tableau de signe de ce quotient est le suivant :

x	$-\infty$		-19		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-x+19$ ***Numérateur***		+	0	–		–		–	
$2.x+3$ ***Dénominateur***		–		–	0	+		+	
$3.x+1$ ***Dénominateur***		–		–		–	0	+	
Le quotient		+	0	–	‖	+	‖	–	

Ca s'annule au numérateur.   Ca s'annule au dénominateur   Ca s'annule au dénominateur.

Le quotient est positif ou nul entre avant -19, puis -3/2 et -1/3. Ainsi :

$$S =]-\infty;-19] \cup \left]-\frac{3}{2};-\frac{1}{3}\right[$$

c) La seule méthode connue pour résoudre cette inéquation du second degré est de tout ramener dans un seul membre, puis de rechercher une factorisation. Nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'un produit.

$$64.x^2 - 10 > 48.x - 3 \Leftrightarrow 64.x^2 - 10 - 48.x + 3 > 0 \Leftrightarrow 64.x^2 - 48.x - 7 > 0$$

Pour factoriser, une seule méthode : la forme canonique.

$$\Leftrightarrow \underbrace{(8.x)^2 - 2\times 8.x \times 3}_{\text{Début d'une identité...}} - 7 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(8.x-3) - 3^2}_{\text{...remarquée.}} - 7 > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(8.x-3)^2 - 16}_{a^2-b^2} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left[(8.x-3)-4\right]}_{(a-b)} \times \underbrace{\left[(8.x-3)+4\right]}_{(a+b)} > 0$$

$$\Leftrightarrow (8.x-7).(8.x+1) > 0$$

Où s'annulent les facteurs ?

$8.x - 7 = 0$ $\quad 8.x + 1 = 0$

$8.x = 7$ $\quad 8.x = -1$

$x = \frac{7}{8}$ $\quad x = -\frac{1}{8}$

Par conséquent, le tableau de signe de leur produit est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		$-\frac{1}{8}$		$\frac{7}{8}$		$+\infty$
$8.x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$8.x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Le produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est positif avant $-\frac{1}{8}$ et après $\frac{7}{8}$. On en conclut : $\boxed{S = \left]-\infty;-\frac{1}{8}\right[\cup \left]\frac{7}{8};+\infty\right[}$

Six thèmes à deux inconnues

Le contexte

Cet exercice est constitué de trois systèmes de deux équations à deux inconnues qui ont tous des solutions...différentes.

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues x et y suivants.

$$(S_1)\begin{cases} 91.x + 39.y = 26 \\ 35.x + 15.y = 10 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 8.x - 11.y = 9 \\ 4.x + 7.y = 13 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 5\times(2.x - y) - 7 = x + y \\ 12 - 4\times(x - y + 1) = 2.x + 2 \end{cases}$$

Le corrigé

a) Commençons par calculer le déterminant du système $(S_1)\begin{cases} 91.x + 39.y = 26 & \textit{(1)} \\ 35.x + 15.y = 10 & \textit{(2)} \end{cases}$ pour connaître le nombre de ses solutions.

$$\det(S_1) = \begin{vmatrix} 91 & 39 \\ 35 & 15 \end{vmatrix} = 91\times 15 - 35\times 39 = 1365 - 1365 = 0$$

Comme son déterminant est nul, alors le système (S_1) a :

☑ soit une infinité solution si ses six coefficients sont proportionnels.

☑ soit aucune solution si ses six coefficients ne sont pas proportionnels.

Regardons si ces six coefficients sont proportionnels en calculant leurs rapports.

Quotient des coefficients en x	Quotient des coefficients en y	Quotient des coefficients constants
$\frac{91}{35} = \frac{13\times\cancel{7}}{5\times\cancel{7}} = \frac{13}{5} = 2,6$	$\frac{39}{15} = \frac{13\times\cancel{3}}{5\times\cancel{3}} = \frac{13}{5} = 2,6$	$\frac{26}{10} = \frac{13\times\cancel{2}}{5\times\cancel{2}} = \frac{13}{5} = 2,6$

Comme les trois rapports sont égaux, alors les équations ***(1)*** et ***(2)*** sont équivalentes. Comprenez qu'il s'agit en fait de la même équation au facteur près.

<u>Conclusion :</u> le système (S_1) admet une infinité de solution.

Nous aurions pu aller un peu plus vite...
Pour peu que l'on connaisse les tables de 13 et de 5, on voit assez vite que les équations ***(1)*** et ***(2)*** sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il s'agit de la même équation au facteur près.

$$(S_1)\begin{cases} \textit{(1)}\quad 91.x+39.y=26 \xrightarrow{\div 13} 7.x+3.y=2 \\ \textit{(2)}\quad 35.x+15.y=10 \xrightarrow{\div 5} 7.x+3.y=2 \end{cases}$$

b) D'abord, calculons le déterminant du système $(S_2)\begin{cases} 8.x-11.y=9 & \textit{(1)} \\ 4.x+7.y=13 & \textit{(2)} \end{cases}$

$$\det(S_2)=\begin{vmatrix} 8 & -11 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=8\times 7-4\times(-11)=56+44=100\neq 0$$

Comme son déterminant est non nul, alors le système (S_2) admet une unique solution que nous allons déterminer par combinaisons linéaires.

Pour obtenir x, nous allons multiplier l'égalité ***(1)*** par 7 et l'égalité ***(2)*** par 11, afin de pouvoir éliminer y en les additionnant.

$$\begin{array}{lcr} \textit{(1)} & \xrightarrow{\times 7} & 56.x-77.y=63 \\ \textit{(2)} & \xrightarrow{\times 11} & 44.x+77.y=143 \\ \hline & & 100.x=206 \end{array} \oplus$$

D'ou :

$$\boxed{x=\frac{206}{100}=\frac{103}{50}=2,06}$$

Pour obtenir y, nous allons juste multiplier l'égalité ***(2)*** par 2, de façon à éliminer x par soustraction.

$$\begin{array}{lcr} \textit{(1)} & \longrightarrow & 8.x-11.y=9 \\ \textit{(2)} & \xrightarrow{\times 2} & 8.x+14.y=26 \\ \hline & & -25.y=-17 \end{array} \ominus$$

D'ou :

$$\boxed{y=\frac{-17}{-25}=\frac{17}{25}=0,68}$$

<u>Conclusion :</u> le système (S_2) admet une unique solution qui est le couple $(2,06;0,68)$.

c) Pour résoudre le système (S_3), la première chose à faire est de développer, puis réduire chaque équation.

$$\begin{cases} \textit{(1)}\quad 5\times(2.x-y)-7=x+y \Leftrightarrow 10.x-5.y-7=x+y \Leftrightarrow 9.x-6.y=7 \\ \textit{(2)}\quad 12-4\times(x-y+1)=2.x+2 \Leftrightarrow 12-4.x+4.y-4=2.x+2 \Leftrightarrow -6.x+4.y=-6 \end{cases}$$

A présent qu'il est écrit sous la forme adéquate, nous pouvons calculer le discriminant du système (S_3) afin de connaître le nombre de ses solutions.

$$\det(S_3)=\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}=9\times 4-(-6)\times(-6)=36-36=0$$

Comme son déterminant est nul, le système (S_3) a soit infinité de solutions, soit aucune.

Pour le savoir, regardons si ses six coefficients $\begin{pmatrix} 9 & -6 & 7 \\ -6 & 4 & -10 \end{pmatrix}$ sont proportionnels en calculant leurs rapports.

Quotient des coefficients en x	**Quotient des coefficients en y**	**Quotient des coefficients constants**
$\frac{9}{-6}=\frac{3\times\cancel{3}}{-2\times\cancel{3}}=-\frac{3}{2}=-1,5$	$\frac{6}{-4}=\frac{3\times\cancel{2}}{-2\times\cancel{2}}=-\frac{3}{2}=-1,5$	$\frac{7}{-6}=-\frac{7}{6}\neq -1,5$

Comme les trois rapports ne sont pas égaux, alors les équations ne sont pas équivalentes.
<u>Conclusion :</u> le système (S_3) n'admet aucune solution.

Là encore, nous aurions pu conclure un peu plus rapidement...

$$(S_3)\begin{cases} \textit{(1)}\quad 9.x-6.y=7 \xrightarrow{\div 3} 3.x-2.y=7/3 \\ \textit{(2)}\quad -6.x+4.y=-10 \xrightarrow{\div(-2)} 3.x-2.y=5 \end{cases}$$

Les coefficients en x et y étant égaux mais les constants étant différents, les équations ***(1)*** et ***(2)*** ne sont pas équivalentes. Donc il n'y a pas de solutions.

Les fonctions

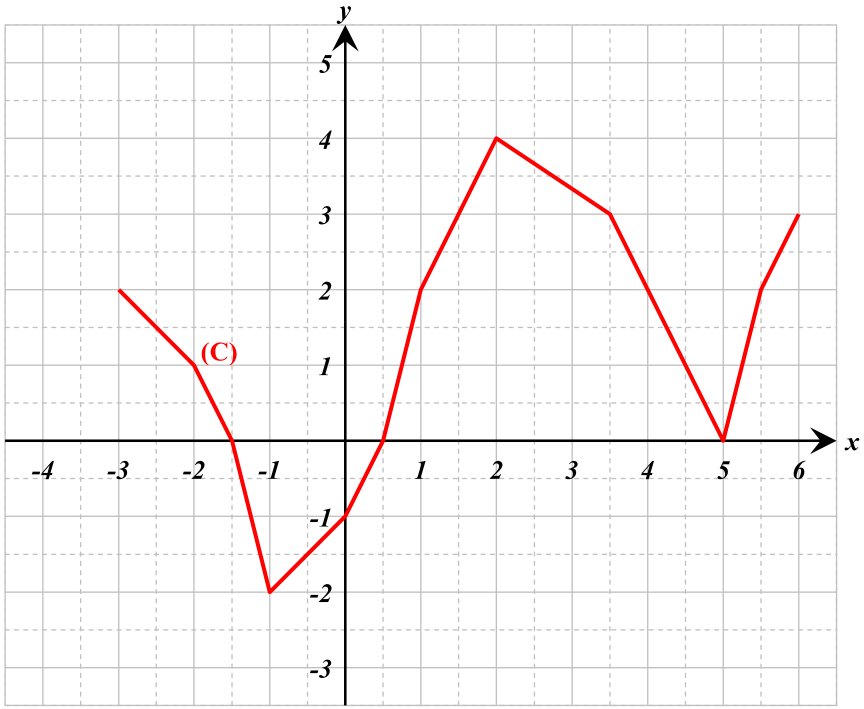
LECTURE D'UNE COURBE BIEN...AFFINÉE

Le contexte

Un exercice de lecture graphique de début d'année pas trop compliqué. Le minimum de ce qu'il faut savoir avec la courbe d'une fonction.

L'énoncé

On appelle f la fonction dont la courbe représentative (C) est tracée ci-dessous.



A partir du graphique ci-contre, répondre aux questions suivantes sur la présente feuille d'énoncé.

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b) Quelle est l'image de 3,5 par la fonction f ?
Compléter les égalités ci-dessous :

$f(-1,5) = \dots\dots\dots\dots\dots$ $f(0) = \dots\dots\dots\dots\dots$

c) Déterminer les antécédents par la fonction f de 0 ; 2 et 5.

d) Compléter le tableau de variation (ci-dessous) de la fonction f sur son ensemble de définition.

x	
f	

e) Quel est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[1;6]$? On précisera la ou les valeurs de x pour lesquelles il est atteint.

f) Résoudre les inéquations suivantes :

$f(x) \leq 0$ $2 < f(x) \leq 3$

Le corrigé

a) L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[-3;6]$.

b) Le point d'abscisse 3,5 de la courbe (C) a pour ordonnée 3. Par conséquent, l'image de 3,5 par la fonction f est égale à 3. Ce que l'on résume par $f(3,5) = 3$.
De même, comme les points d'abscisses $-1,5$ et 0 de la courbe (C) ont pour ordonnées respectives 0 et -1, alors nous en déduisons que $f(-1,5) = 0$ et $f(0) = -1$.

c) La courbe (C) comporte trois points dont l'ordonnée est égale 0. Ils ont pour abscisses $-1,5$; $0,5$ et 5. Par conséquent, 0 a trois antécédents par f qui sont $-1,5$; $0,5$ et 5.

➲ Quatre points de la courbe (C) ont pour ordonnée 2. Leurs abscisses sont -3 ; 1 ; 4 et 5,5. Ces quatre réels sont les antécédents de 2 par la fonction f.

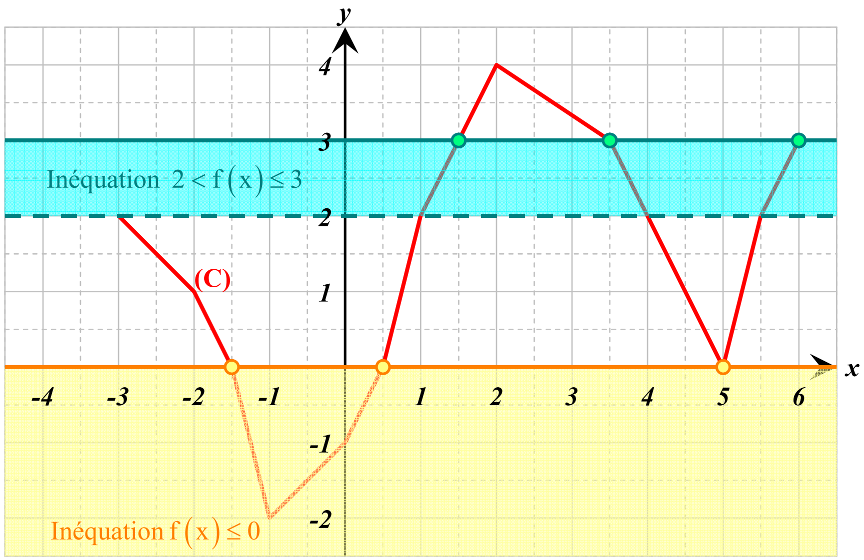
➲ Aucun point de la courbe (C) n'ayant pour ordonnée 5, 5 n'a pas d'antécédent par f.

d) Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	-3		-1		2		5		6
f	2	↘	-2	↗	4	↘	0	↗	3

e) Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[1;6]$ est 0. Il est atteint en $x=5$.

f) Pour résoudre l'inéquation $f(x)\leq 0$, on s'intéresse aux points de la courbe (C) dont l'ordonnée $f(x)$ est négative ou nulle. Les abscisses de ces points font partie de l'ensemble $[-1,5;0,5]\cup\{5\}$. C'est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leq 0$.



➲ L'ensemble des solutions de l'inéquation $2<f(x)\leq 3$ est $]1;1,5]\cup[3,5;4[\cup]5,5;6]$.

Affinoscopitude

Le contexte

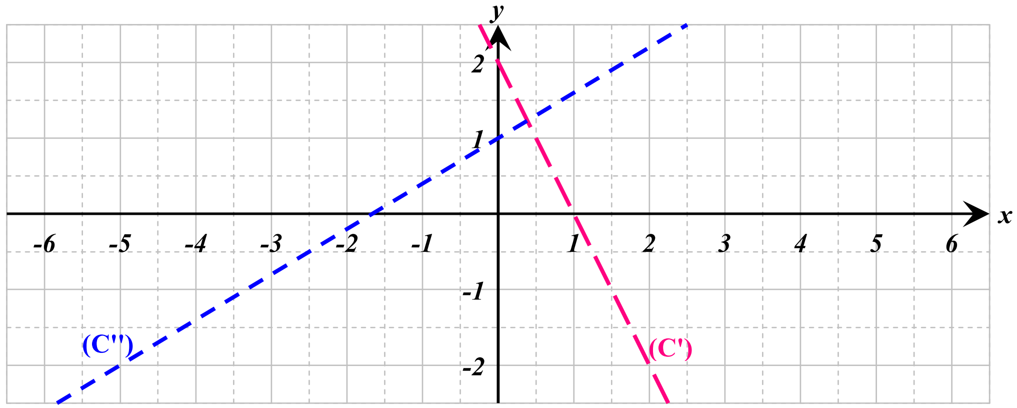
Un exercice sur les fonctions affines où est mis en oeuvre tout ce qui doit être su sur elles.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=\frac{5-3.x}{4}$$

a) Quels sont les coefficient directeur et ordonnée à l'origine de la fonction affine f ?
Déterminer les images de -1 et 3 par la fonction f.
Déterminer les antécédents de 1 par la fonction f.
Tracer la courbe représentant (C) représentant la fonction f sur le graphique ci-dessous.



b) Sur le graphique ci-dessus, les courbes (C') et (C'') représentent les fonctions g et h.
Déterminer les expressions des fonctions g et h.

Le corrigé

a) Comme :

$$f(x)=\frac{5-3.x}{4}=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\times x=-\frac{3}{4}\times x+\frac{5}{4}$$

alors le coefficient directeur de la fonction affine f est égal à $-\frac{3}{4}=-0,75$ et son ordonnée à l'origine à $\frac{5}{4}=1,25$.

➲ Calculons les images de -1 et 3 par f.

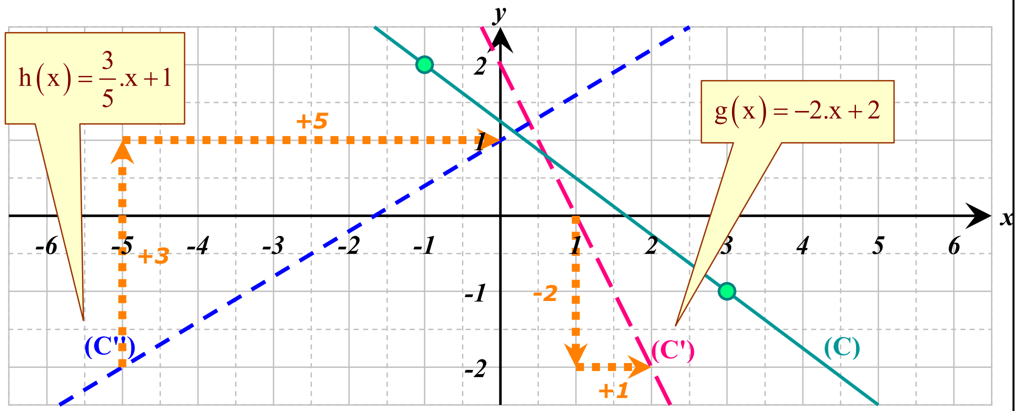
$f(-1)=\frac{5-3\times(-1)}{4}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2$ $\qquad$ $f(3)=\frac{5-3\times 3}{4}=\frac{5-9}{4}=\frac{-4}{4}=-1$

Donc la courbe (C) est une droite passant par les points de coordonnées $(-1;2)$ et $(3;-1)$.

➲ Pour déterminer les antécédents de 1 par f, nous devons résoudre l'équation $f(x)=1$.

$$\frac{5-3.x}{4}=1 \Leftrightarrow \cancel{4}\times\frac{5-3.x}{\cancel{4}}=1\times 4 \Leftrightarrow 5-3.x=4 \Leftrightarrow -3.x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

<u>Conclusion :</u> 1 a un seul antécédent par la fonction f. Il s'agit de $1/3$



LE RETOUR DE L'AFFINOSCOPITUDE

Le contexte

Un second exercice sur les fonctions affines dans la continuité du précédent.

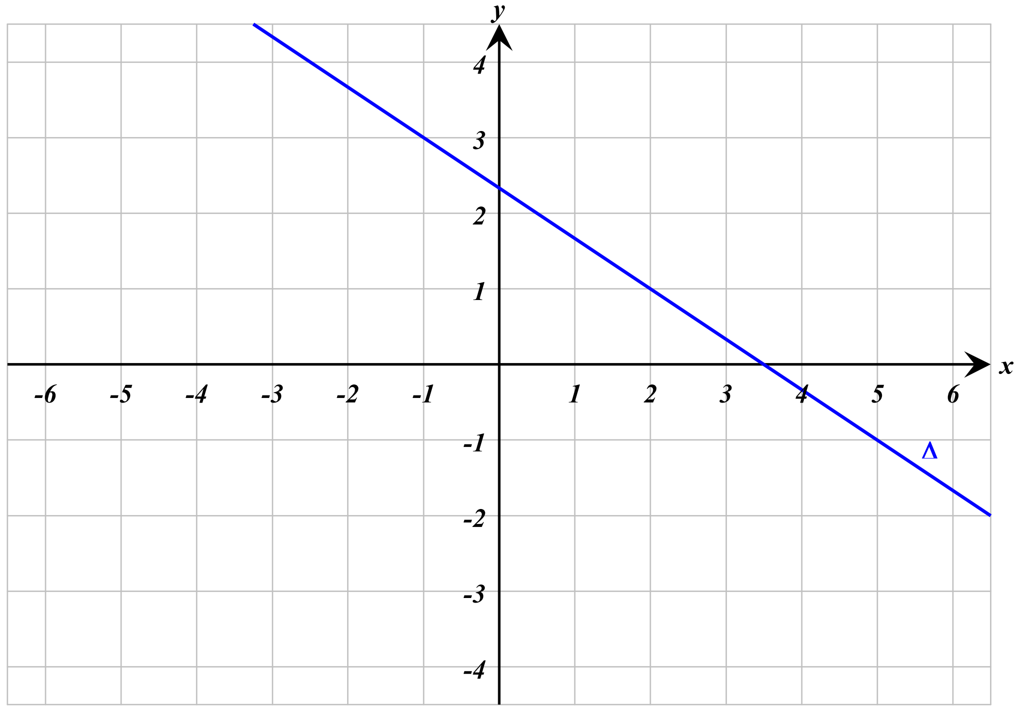
L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=\frac{4.x-10}{5}$$

a) Quels sont les coefficient directeur et ordonnée à l'origine de la fonction affine f ?
Déterminer les images de 0 et 5 par la fonction f.
Déterminer les antécédents de -3 par la fonction f.
Tracer la courbe (C) représentant la fonction f sur le graphique ci-contre.

On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est la droite Δ tracée sur le graphique ci-dessous.



b) Déterminer une expression de la fonction g.

c) Résoudre par le calcul l'équation $f(x)=g(x)$.

Que représentent la ou les solutions de cette équation pour la courbe (C) et la droite Δ ?

Le corrigé

a) Comme $f(x)=\frac{4.x-10}{5}=\frac{4}{5}\times x-\frac{10}{5}=\frac{4}{5}\times x-2$, alors le coefficient directeur de la fonction affine f est égal à $\frac{4}{5}=0,8$ et son ordonnée à l'origine à -2.

➲ Calculons les images de 0 et 5 par f.

$$\underbrace{f(0)=\frac{4\times 0-10}{5}=\frac{0-10}{5}=-\frac{10}{5}=-2}_{\text{L'image de 0 est toujours l'ordonnée à l'origine...}}$$

$$f(5)=\frac{4\times 5-10}{5}=\frac{20-10}{5}=\frac{10}{5}=2$$

Donc la courbe (C) représentant la fonction affine f est une droite qui passe par les points de coordonnées $(0;-2)$ et $(5;2)$.

➲ Pour déterminer les antécédents de -3 par f, nous devons résoudre dans ℝ l'équation :

$$f(x)=-3 \Leftrightarrow \frac{4.x-10}{5}=-3 \Leftrightarrow \cancel{5}\times\frac{4.x-10}{\cancel{5}}=-3\times 5 \Leftrightarrow 4.x-10=-15$$

$$\Leftrightarrow 4.x=-15+10 \Leftrightarrow 4.x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$$

<u>Conclusion :</u> -3 a un seul antécédent par la fonction f qui est $-\frac{5}{4}=-1,25$.

b) Comme sa courbe représentative Δ est une droite, alors la fonction g est affine.
Donc l'une de ses expressions est de la forme $g(x)=a\times x+b$ où a est son coefficient directeur et b son ordonnée à l'origine.
La droite Δ passe par les points de coordonnées $(-1;3)$ et $(2;1)$. Le coefficient directeur a est donné par la formule :

$$a=\frac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}}=\frac{1-3}{2-(-1)}=\frac{-2}{2+1}=-\frac{2}{3}$$

Donc l'expression de la fonction affine g que nous recherchons est de la forme :

$$g(x)=-\frac{2}{3}\times x+b.$$

A présent, déterminons l'ordonnée à l'origine b. Pour ce faire, nous savons :

$$g(-2)=3 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\times(-1)+b=3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}+b=3 \Leftrightarrow b=3-\frac{2}{3}=\frac{9}{3}-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$$

<u>Conclusion :</u> une expression de la fonction affine g est : $g(x)=-\frac{2}{3}\times x+\frac{7}{3}=\frac{7-2.x}{3}$

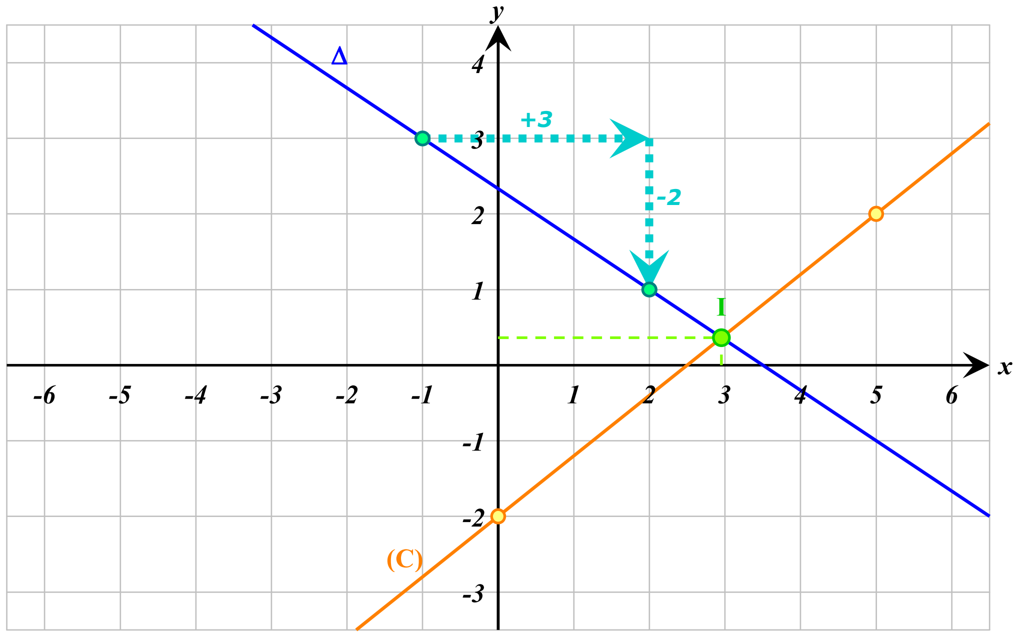
c) Résolvons dans ℝ l'équation proposée :

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{4.x-10}{5}=\frac{7-2.x}{3} \Leftrightarrow 3\times(4.x-10)=5\times(7-2.x)$$

$$\Leftrightarrow 12.x-30=35-10.x \Leftrightarrow 12.x+10.x=35+30$$

$$\Leftrightarrow 22.x=65 \Leftrightarrow x=\frac{65}{22}$$

La solution $\frac{65}{22}$ de cette équation est l'abscisse du point I, intersection des droites (C) et Δ.



UN SECOND DEGRÉ PAR L'IMAGE ET PAR LA FORME

Le contexte

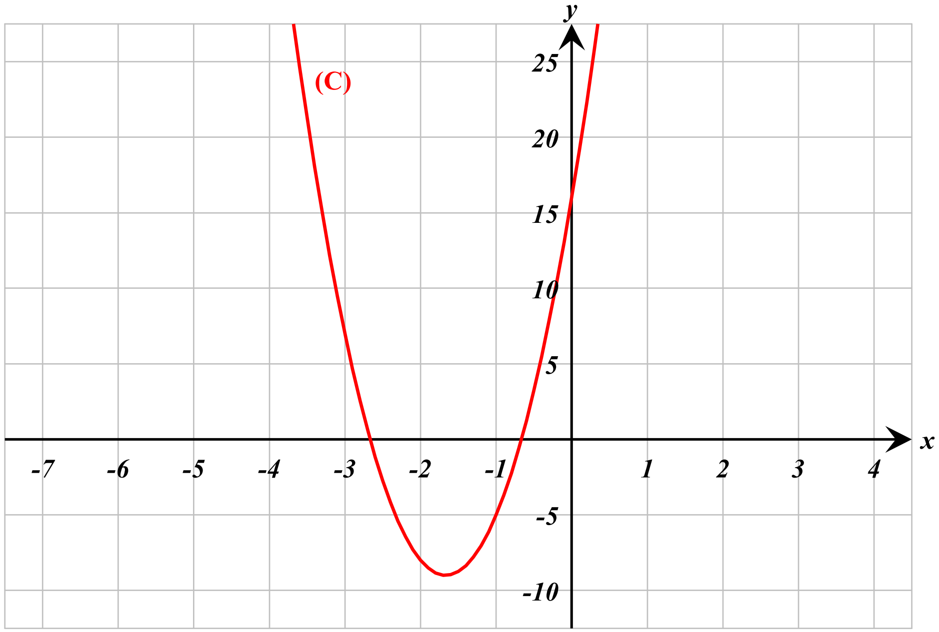
Cet exercice est principalement axé sur la recherche d'images et surtout d'antécédents par une fonction du second degré. Ces dernières nécessitent l'emploi de techniques de factorisation dont la forme canonique. Et puis, il y a les conséquences graphiques.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=9.x^2+30.x+16$$

Sa courbe représentative (C) est tracée sur le graphique ci-dessous.



a) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme :

$$f(x)=(\ldots x+\ldots)^2-\ldots$$

En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

b) Calculer les images de 2 ; -3 et $\frac{2}{3}$ par la fonction f.

c) Déterminer les antécédents de 0 ; 16 ; -9 et -10 par la fonction f.

d) A partir de la courbe (C) et de certains résultats obtenus à la question 4.c, dresser le tableau de variation, puis le tableau de signe de la fonction f.

e) Laquelle des deux images $f(-2000001)$ et $f(-2000000)$ est la plus grande ? Justifier.

Le corrigé

a) Ecrivons $f(x)$ sous sa forme canonique, puis nous obtiendrons la forme factorisée.

$$f(x)=\underbrace{9.x^2+30.x+16}_{\text{Forme développée}}=\underbrace{(3.x)^2+2\times3.x\times5}_{\text{Mais c'est le début de...}}+16=\underbrace{(3.x+5)^2-5^2}_{\text{...cette identité remarquable ! A condition d'enlever } 5^2\text{.}}+16$$

$$=(3.x+5)^2-25+16=\underbrace{\boxed{(3.x+5)^2-9}}_{\text{Forme canonique recherchée}}$$

$$=\underbrace{(3.x+5)^2-3^2}_{\text{Une splendide différence de deux carrés : } a^2-b^2}=\underbrace{\left[(3.x+5)+3\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(3.x+5)-3\right]}_{(a-b)}=\underbrace{\boxed{(3.x+8)\times(3.x+2)}}_{\text{Forme factorisée recherchée}}$$

b) Pour calculer les trois images demandées, nous disposons de trois écritures de $f(x)$.

On choisit une écriture au hasard.

$$f(2)=\overbrace{(3\times2+5)^2-9}^{\text{Avec l'écriture canonique de } f(x)}=(6+5)^2-9$$
$$=11^2-9=121-9=112$$

$$f(-3)=\overbrace{(3\times(-3)+8)\times(3\times(-3)+2)}^{\text{Avec l'écriture factorisée de } f(x)}$$
$$=(-9+8)\times(-9+2)=(-1)\times(-7)=7$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\underbrace{9\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+30\times\frac{2}{3}+16}_{\text{Avec la forme développée de } f(x)}=\cancel{9}\times\frac{4}{\cancel{9}}+\cancel{3}\times10\times\frac{2}{\cancel{3}}+16=4+20+16=40$$

Simplifier les fractions, c'est se simplifier la vie !

c) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f, c'est chercher les réels x dont l'image par f est égale à 0, c'est-à-dire tels que $f(x)=0$. Résolvons cette équation !

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{(3.x+8)\times(3.x+2)=0}_{\text{Un produit est nul si et seulement si...}} \Leftrightarrow \underbrace{3.x+8=0 \ \underline{\text{ou}}\ 3.x+2=0}_{\text{...si l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$\Leftrightarrow 3.x=-8 \ \underline{\text{ou}}\ 3.x=-2$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{8}{3} \ \underline{\text{ou}}\ x=-\frac{2}{3}$$

Dans ce cas précis, la forme factorisée est la plus rapide. Mais l'on peut très bien utiliser la forme canonique.

<u>Conclusion :</u> 0 a deux antécédents par la fonction f qui sont $-\frac{8}{3}$ et $-\frac{2}{3}$.

➲ Pour trouver les antécédents de 16 par f, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x)=16 \Leftrightarrow 9.x^2+30.x+\cancel{16}=\cancel{16} \Leftrightarrow \underbrace{9.x\times\boxed{x}+30\times\boxed{x}=0}_{\text{Pour factoriser, il y a un facteur commun : x}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x}\times(9.x+30)=0}_{\text{Un produit est nul si et seulement si...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0 \ \underline{\text{ou}}\ 9.x+30=0}_{\text{...si l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$\Leftrightarrow x=0 \ \underline{\text{ou}}\ x=-\frac{30}{9}=-\frac{10}{3}$$

Dans ce cas précis, la forme développée est la plus rapide. Mais l'on peut très bien utiliser la forme canonique.

<u>Conclusion :</u> 16 a deux antécédents par la fonction f qui sont 0 et $-\frac{10}{3}$.

➲ Pour trouver les antécédents de -9 par f, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x)=-9 \Leftrightarrow (3.x+5)^2\cancel{-9}=\cancel{-9} \Leftrightarrow \underbrace{(3.x+5)^2=0}_{\text{Le seul carré nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{3.x+5=0}_{\text{...est celui de 0.}}$$

$$\Leftrightarrow 3.x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$$

Ici, la forme canonique est la seule utilisable.

<u>Conclusion :</u> -9 a un seul antécédent par f qui est $-5/3$.

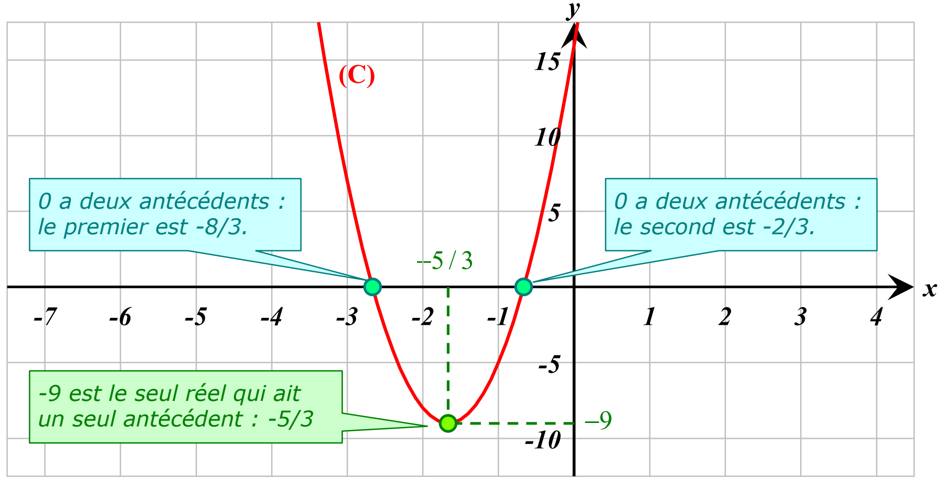
➲ Pour trouver les antécédents de -10 par f, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x)=-10 \Leftrightarrow (3.x+5)^2-9=-10 \Leftrightarrow \underbrace{(3.x+5)^2+1=0}_{\text{Nous n'avons pas de différence de deux carrés !}} \Leftrightarrow \underbrace{(3.x+5)^2=-1}_{\text{Cette égalité est fausse ! Un carré n'est jamais négatif.}}$$

La forme canonique est la seule utilisable.

<u>Conclusion :</u> comme l'équation $f(x)=-10$ n'admet aucune solution, alors -10 n'a pas d'antécédent par la fonction f.

d) La question 4.c apportent des valeurs très importantes qui manquaient au graphique :



Du graphique ci-dessus, nous déduisons...

...le tableau de variation de f...

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	-9	↗	$+\infty$

...et le tableau de signe de f(x)

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

e) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right]$. Par conséquent :

Comme $-2000001<-2000000$ alors $\underbrace{f(-2000001)>f(-2000000)}_{\text{Comme f est décroissante sur }\left]-\infty;-5/3\right]\text{, alors f change l'ordre sur cet intervalle.}}$

COMME AVANT...OU PRESQUE

Le contexte

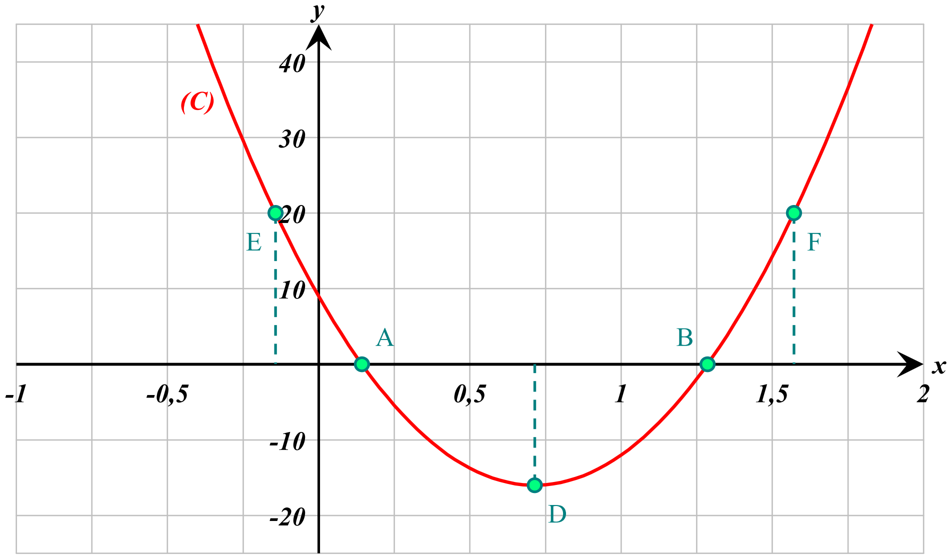
Un exercice dans la lignée du précédent mais avec cette fois-ci l'introduction des tableaux de signe.

L'énoncé

La fonction h est définie pour tout réel x par :

$$h(x) = 49.x^2 - 70.x + 9$$

Sa courbe représentative (C) est tracée sur le graphique ci-dessous.



a) Ecrire $h(x)$ sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme :

$$h(x) = (\ldots x - \ldots)^2 - \ldots$$

En déduire la forme factorisée de $h(x)$.

b) Résoudre par le calcul l'inéquation :

$$h(x) \geq 20$$

c) Sur le graphique ci-dessus :

- A et B sont les points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
- D est le point où la courbe (C) atteint son minimum.
- E et F sont les points d'intersection de la courbe (C) et de la droite horizontale d'équation $y = 20$.

En s'aidant des questions précédentes, indiquer sur le graphique et sans justifications les abscisses exactes des points A, B, D, E et F.

Le corrigé

a) La forme canonique de $h(x)$ nous mènera à sa forme factorisée.

$$h(x) = \underbrace{49.x^2 - 70.x + 9}_{\text{Forme développée}} = \underbrace{(7.x)^2 - 2 \times 7.x \times 5}_{\text{Mais c'est le début de...}} + 9 = \underbrace{(7.x-5)^2 - 5^2}_{\text{...cette identité remarquable ! A condition d'enlever } 5^2.} + 9$$

$$= (7.x-5)^2 - 25 + 9 = \underbrace{\boxed{(7.x-5)^2 - 16}}_{\text{Forme canonique recherchée}}$$

$$= \underbrace{(7.x-5)^2 - 4^2}_{\text{Une splendide différence de deux carrés : } a^2-b^2} = \underbrace{\left[(7.x-5)+4\right]}_{(a+b)} \times \underbrace{\left[(7.x-5)-4\right]}_{(a-b)} = \underbrace{\boxed{(7.x-1)\times(7.x-9)}}_{\text{Forme factorisée recherchée}}$$

b) Résolvons dans ℝ l'inéquation :

$$h(x) > 20 \Leftrightarrow \underbrace{(7.x-5)^2 - 16}_{\text{Vu qu'il va falloir factoriser, la forme canonique de } h(x) \text{ est la plus adaptée !}} > 20 \Leftrightarrow (7.x-5)^2 - 16 - 20 > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(7.x-5)^2 - 36}_{\text{Une différence...}} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(7.x-5)^2 - 6^2}_{\text{...de deux carrés.}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(7.x-5)-6\right] \times \left[(7.x-5)+6\right] > 0 \Leftrightarrow (7.x-11)\times(7.x+1) > 0$$

A présent, il s'agit de savoir quand le produit $(7.x-11)\times(7.x+1)$ est strictement positif.

Commençons par déterminer les valeurs où les deux facteurs s'annulent.

$$7.x - 11 = 0 \Leftrightarrow 7.x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{7} \qquad \vdots \qquad 7.x + 1 = 0 \Leftrightarrow 7.x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$$

Le tableau du signe du produit $(7.x-11)\times(7.x+1)$ est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		$\frac{11}{7}$		$+\infty$
$7.x-11$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$7.x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit $(7.x-11)\times(7.x+1)$ est positif avant $-\frac{1}{7}$ et après $\frac{11}{7}$. Nous en concluons :

$$S = \left]-\infty;-\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{11}{7};+\infty\right[$$

c) Les abscisses des points A et B sont les antécédents de 0 par la fonction h. Déterminons ces antécédents ! Pour ce faire, nous devons résoudre l'équation :

$$h(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{(7.x-1)\times(7.x-9)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{7.x-1=0 \text{ ou } 7.x-9=0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x=\frac{1}{7}}}_{\text{Abscisse de A}} \text{ ou } \underbrace{\boxed{x=\frac{9}{7}}}_{\text{Abscisse de B}}$$

➲ L'abscisse du point D est le minimum de la fonction $\underbrace{h(x)=(7.x-5)^2-16}_{\text{La forme canonique est la plus adaptée en cas de problème...}}$ sur ℝ.

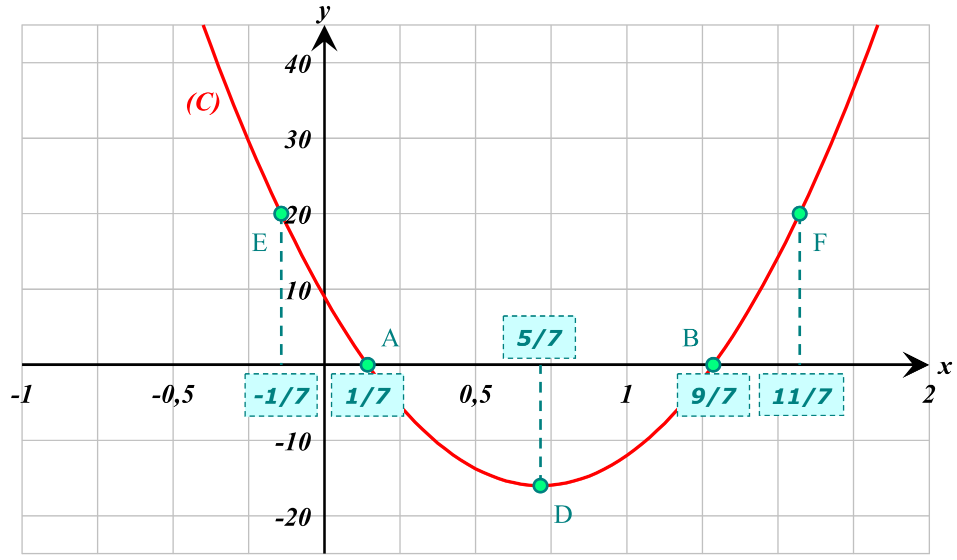
Or la différence $(7.x-5)^2-16$ est minimale lorsque le terme $(7.x-5)^2$ est minimal.

Un carré étant positif ou nul, le terme $(7.x-5)^2$ est minimal lorsqu'il est nul. Ainsi :

$$h(x) \text{ est minimal} \Leftrightarrow \underbrace{(7.x-5)^2=0}_{\text{Le seul carré nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{7.x-5=0}_{\text{... est celui de 0.}} \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x=\frac{5}{7}}}_{\text{Abscisse de D}}$$

➲ Enfin, les abscisses des points E et F sont les antécédents de 20 par la fonction h. Autrement dit, ce sont les solutions de l'équation $h(x)=20$.

D'après la question 4.b, il y a deux solutions : $-\frac{1}{7}$ qui est l'abscisse de E et $\frac{11}{7}$ celle de F.



LA TÊTE AU CARRÉ

Le contexte

Encore un exercice sur une fonction du second degré. Sauf que cette fois, on s'intéresse à ses variations à déduire à partir de celles de la fontion carré.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 49 - (2.x - 5)^2$$

a) Déterminer les images par la fonction f de -1 et $2,5$.

b) Déterminer la forme développée de $f(x)$.
Déterminer les antécédents de 24 par la fonction f.

c) Déterminer la forme factorisée de $f(x)$

Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

d) Au moyen d'un enchaînement d'inégalités, déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty ; 2,5[$.
Sans recommencer le raisonnement précédent, donner le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]2,5 ; +\infty[$. On justifiera brièvement sa réponse en expliquant juste ce qui change.
Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction f.

Le corrigé

a) Calculons les deux images demandées :

☑ $f(-1) = 49 - (2 \times (-1) - 5)^2 = 49 - (-2 - 5)^2 = 49 - (-7)^2 = 49 - 49 = 0$

☑ $f(2,5) = 49 - (2 \times 2,5 - 5)^2 = 49 - (5 - 5)^2 = 49 - (0)^2 = 49 - 0 = 49$

b) $f(x)$ nous est donnée sous forme canonique. Développons cette écriture :

$$f(x) = 49 - \underbrace{\left[(2.x-5)^2\right]}_{\text{Précaution utile...}} = 49 - \underbrace{\left[4.x^2 - 20.x + 25\right]}_{\text{...maintenant !}} = 49 - 4.x^2 + 20.x - 25$$

$$= -4.x^2 + 20.x + 24$$

➲ Déterminer les antécédents de 24 par la fonction f, c'est chercher les réels x dont l'image par f est égale à 24, c'est-à-dire ceux tels que :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{-4.x^2 + 20.x + \cancel{24} = \cancel{24}}_{\text{La forme développée est la plus adaptée...}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{-4.x \times \boxed{x} + 20 \times \boxed{x} = 0}_{\text{...car on peut factoriser par x !}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\boxed{x} \times (-4.x + 20) = 0}_{\text{Un produit est nul...}} \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{x = 0 \quad \underline{\text{ou}} \quad -4.x + 20 = 0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est !}}$$

$$-4.x = -20$$

$$x = \frac{-20}{-4} = 5$$

<u>Conclusion :</u> 24 a deux antécédents par la fonction f : il s'agit de 0 et 5.

c) La forme canonique $f(x) = 49 - (2.x - 5)^2$ est une différence de deux carrés...facile à factoriser !

$$f(x) = \underbrace{7^2}_{a^2} - \underbrace{(2.x-5)^2}_{b^2} = \underbrace{(7 + (2.x-5))}_{(a+b)} \times \underbrace{(7 - (2.x-5))}_{(a-b)}$$

$$= (7 + 2.x - 5) \times (7 - 2.x + 5) = \underbrace{(2.x + 2) \times (-2.x + 12)}_{\text{Forme factorisée}}$$

Les deux facteurs $2.x + 2$ et $-2.x + 12$ s'annulent en -1 et 6. Par conséquent, le tableau de signe de f est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$2.x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-2.x+12$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Les fonctions croissantes sur un intervalle y conservent l'ordre, alors que les décroissantes le changent. Voyons dans quelle catégorie se situe f sur $]-\infty;2,5[$.

Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-\infty;2,5[$ tels que $a<b$.

Comment leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont-elles rangées ? Au départ, nous avons :

$$\begin{array}{lccccc}
 & a & < & b & < & 2,5 \\
\times 2 & 2.a & < & 2.b & < & 5 \\
-5 & 2.a-5 & < & 2.b-5 & < & 0 \\
 & \multicolumn{5}{c}{\uparrow \text{ Trois quantités négatives ou nulles } \uparrow} \\
\text{Carré} & (2.a-5)^2 & > & (2.b-5)^2 & > & 0 \\
 & \multicolumn{5}{c}{\uparrow \text{ L'ordre change une première fois. } \uparrow} \\
\times(-1) & -(2.a-5)^2 & < & -(2.b-5)^2 & < & 0 \\
 & \multicolumn{5}{c}{\uparrow \text{ L'ordre change une seconde fois. } \uparrow} \\
+49 & \underbrace{49-(2.a-5)^2}_{f(a)} & < & \underbrace{49-(2.b-5)^2}_{f(b)} & < & 49
\end{array}$$

La fonction carrée est décroissante sur]-∞ ; 0].

La fonction f conserve l'ordre sur]-∞ ; 2,5[

<u>Conclusion :</u> f conservant l'ordre sur $]-\infty;2,5[$, cette fonction est croissante sur cet intervalle.

➲ Si l'on recommençait le même raisonnement sur l'intervalle $]2,5;+\infty[$, la fonction carré s'appliquerait cette fois à l'inégalité $\underbrace{2.a-5 \;>\; 2.b-5 \;>\; 0}_{\text{Trois quantités positives ou nulles}}$.

La fonction carré étant croissante pour les réels positifs, l'ordre ne changerait pas.
Au final, l'ordre ne changerait qu'une seule fois (lors de la multiplication par -1).
<u>Conclusion :</u> la fonction f changeant l'ordre sur l'intervalle $]2,5;+\infty[$, nous pouvons en déduire qu'elle y est décroissante.

➲ Finalement, le tableau de variation de la fonction f sur ℝ est le suivant :

x	$-\infty$		$2,5$		$+\infty$
f			49		
		↗		↘	
	$-\infty$				$-\infty$

Une racine plus loin

Le contexte

Un exercice classique visant à établir les variations d'une fonction en s'appuyant sur celles des fonctions de référence par le biais d'un montage.

L'énoncé

La fonction f est définie par :

$$f(x)=\sqrt{25-(2.x-7)^2}$$

Compléter l'enchaînement d'inégalités suivant. On indiquera à chaque fois l'opération qui a été effectuée ou la fonction qui a été appliquée.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & < & a & < & b & < & 3,5 \\
\ldots\ldots & \ldots & 2.a & \ldots & 2.b & \ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots & 2.a-7 & \ldots & 2.b-7 & \ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots & (2.a-7)^2 & \ldots & (2.b-7)^2 & \ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots & -(2.a-7)^2 & \ldots & -(2.b-7)^2 & \ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots & 25-(2.a-7)^2 & \ldots & 25-(2.b-7)^2 & \ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots & \sqrt{25-(2.a-7)^2} & \ldots & \sqrt{25-(2.b-7)^2} & \ldots & \ldots\ldots
\end{array}$$

Que peut-on déduire de l'enchaînement d'inégalités précédent quant à la fonction f ?

Le corrigé

Dûment complété, l'enchaînement d'inégalités conduisant de deux réels a et b à leurs images par la fonction f est le suivant :

$$1 < a < b < 3{,}5$$

×2

$$2 < 2.a < 2.b < 7$$

-7

$$-5 < 2.a-7 < 2.b-7 < 0$$

↑ Quatre quantités négatives ou nulles ↑

Carré

La fonction carrée est décroissante sur]-∞ ; 0].

$$25 > (2.a-7)^2 > (2.b-7)^2 > 0$$

↑ L'ordre change une première fois. ↑

×(-1)

$$-25 < -(2.a-7)^2 < -(2.b-7)^2 < 0$$

↑ L'ordre change une seconde fois. ↑

+25

$$0 < 25-(2.a-7)^2 < 25-(2.b-7)^2 < 25$$

Racine

La fonction racine est croissante sur [0;+∞[.

$$0 < \underbrace{\sqrt{25-(2.a-7)^2}}_{f(a)} < \underbrace{\sqrt{25-(2.b-7)^2}}_{f(b)} < 5$$

Dans l'enchaînement ci-dessus, a et b sont deux réels de l'intervalle $[1;3{,}5]$ tels que $a<b$.

A l'issue de celui-ci, les images $f(a)$ et $f(b)$ sont rangées dans le même ordre que a et b.

Conclusion : comme la fonction f conserve l'ordre sur l'intervalle $[1;3{,}5]$, alors elle est strictement croissante sur l'intervalle $[1;3{,}5]$.

LA FONCTION AUX MAUX GRAPHIQUES

Le contexte

Une étude rapide du signe et des variations d'une fonction homographique.

L'énoncé

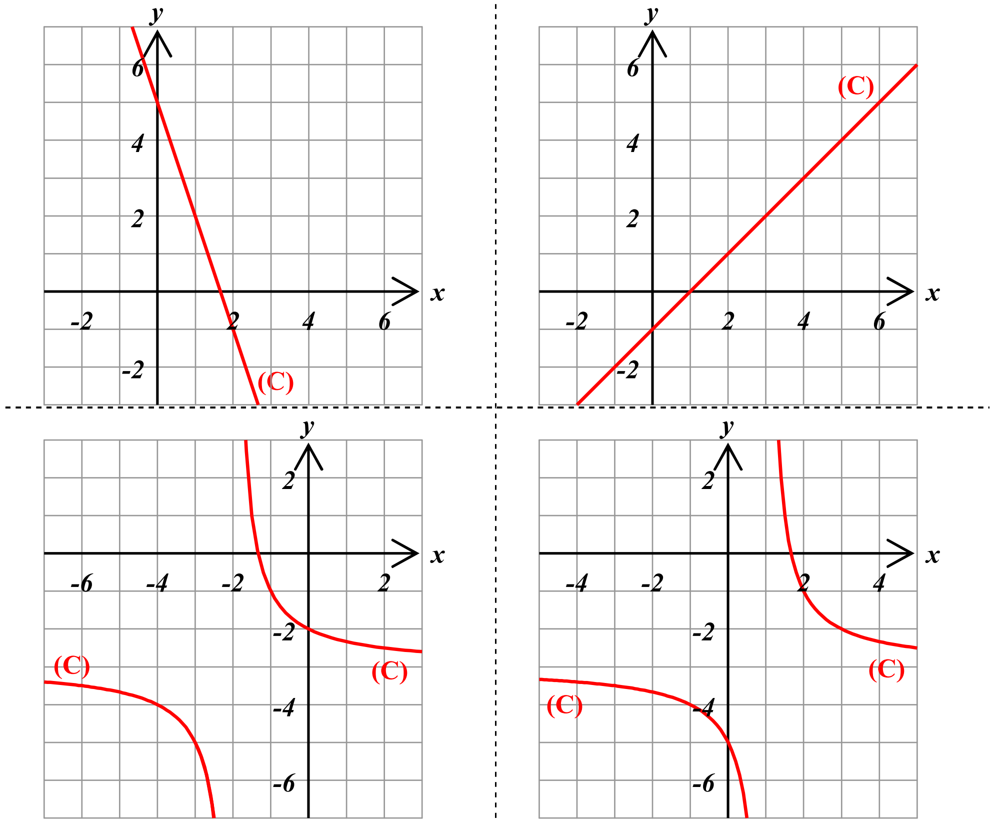
La fonction f est définie par :

$$f(x)=\frac{-3.x+5}{x-1}$$

a) Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

En déduire l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Parmi les quatre courbes tracées ci-dessous, laquelle est la courbe (C) représentant la fonction f ? On entourera la courbe choisie. Aucune justification n'est demandée.



c) Déterminer deux coefficients a et b tels que pour tout réel $x \in D_f$, on ait :

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1}$$

Etablir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Le corrigé

a) Cherchons où s'annulent...

➔ Le numérateur :

$$-3.x+5=0 \iff -3.x=-5 \iff x=\frac{-5}{-3}=\frac{5}{3}$$

➔ Le dénominateur :

$$x-1=0 \iff x=1$$

D'où le tableau de signe ci-contre

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$-3.x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

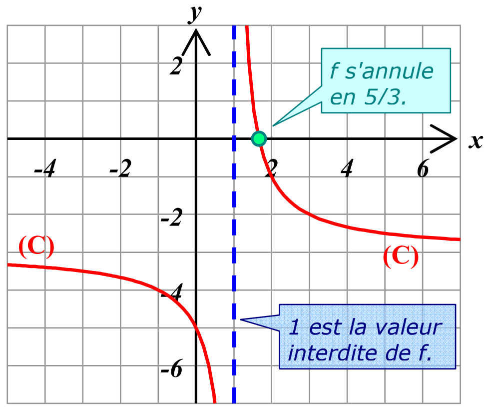
➲ Seul 1 n'a pas d'image par la fonction f. Par conséquent, son ensemble de définition est :

$$D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} = \boxed{]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$$

b) Les deux premières courbes proposées sont des droites qui représentent des fonctions affines. La première est la courbe de la fonction affine $g(x)=-3.x+5$, la seconde celle de la fonction affine $h(x)=x-1$.

Parmi les deux courbes restantes, seule la quatrième convient. En effet, c'est la seule à présenter deux caractéristiques apparaissant dans le tableau de signe de la fonction f :

- ⏩ une rupture en 1 (valeur interdite).
- ⏩ une annulation en $\frac{5}{3}$.



c) Décomposons la fonction homographique f. Pour tout réel $x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$, on a :

$$f(x)=\frac{\overbrace{-3.x}^{\text{Combien de fois } x-1 \text{ ?}}+5}{x-1}=\frac{\overbrace{-3\times(x-1)}^{\text{Remplace } -3.x}-3+5}{x-1}=\underbrace{\frac{-3\times\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}+\frac{2}{x-1}}_{\text{On fractionne pour simplifier...}}=\underbrace{\boxed{-3+\frac{2}{x-1}}}_{\text{Forme décomposée}}$$

➲ Déterminons le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]1;+\infty[$ en utilisant son écriture décomposée. Soient a et b deux réels de l'intervalle $]1;+\infty[$ tels que $a<b$.

Comment leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont-elles rangées ? Au départ, nous avons :

$$1 < a < b$$

-1

$$0 < a-1 < b-1$$

↑ *Deux quantités positives.*

Inverse

La fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[

$$\frac{1}{a-1} > \frac{1}{b-1}$$

↑ *L'ordre change.* ↑

×2

$$\frac{2}{a-1} > \frac{2}{b-1}$$

-3

$$\underbrace{-3+\frac{2}{a-1}}_{f(a)} > \underbrace{-3+\frac{2}{b-1}}_{f(b)}$$

La fonction f change l'ordre sur]1 ; +∞[

<u>Conclusion :</u> comme la fonction f change l'ordre sur $]1;+\infty[$, alors elle est strictement décroissante sur cet intervalle.

DÉMONTAGE RATIONNELLE

Le contexte

Un dernier exercice sur une fonction (rationelle) en forme de conclusion, reprenant tout ce qui avait déjà demandé dans les exercices précédents.

L'énoncé

La fonction f est définie par :

$$f(x)=\frac{4.x^2+28.x+33}{x+3}$$

a) En utilisant sa forme canonique, factoriser le numérateur $N(x)=4.x^2+28.x+33$.

Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

En déduire l'ensemble de définition de la fonction f que l'on notera D_f.

b) Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.

1. Etablir que pour tout réel $x\in D_f$, on a :
$$4.x+16-\frac{15}{x+3}=\frac{4.x^2+28.x+33}{x+3}$$
2. Quel est le sens de variation de la fonction affine $u(x)=4.x+16$? Etablir, au moyen d'un enchaînement d'inégalités, le sens de variation de la fonction $v(x)=\frac{-15}{x+3}$ sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.
3. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$. On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a) Le numérateur de $f(x)$ est une forme du second degré à factoriser en passant par sa forme canonique.

$$N(x)=4.x^2+28.x+33=\underbrace{(2.x)^2+2\times 2.x\times 7}_{a^2+2\times a\times b}+33=\underbrace{(2.x+7)^2-7^2}_{(a+b)^2-b^2}+33$$

$$=(2.x+7)^2-49+33=(2.x+7)^2-16$$

$$=(2.x+7)^2-4^2=[(2.x+7)+4]\times[(2.x+7)-4]=\underline{(2.x+11)\times(2.x+3)}$$

Nonobstant, la fonction rationnelle f est à présent entièrement factorisée.

Donc, le tableau de signe de $f(x)=\frac{(2.x+11)\times(2.x+3)}{x+3}$ est celui-ci contre ➔

x	$-\infty$		$-5,5$		-3		$-1,5$		$+\infty$
$2.x+11$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2.x+3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

➲ -3 étant la seule valeur interdite, l'ensemble de définition de la fonction f est :

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3\}=]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$$

b.1) Pour démontrer cette égalité, le mieux est encore de partir de la forme décomposée et de tout mettre au même dénominateur. Il vient alors :

$$4.x+16-\frac{15}{x+3}=\frac{(4.x+16)\times(x+3)-15}{x+3}=\frac{4.x^2+12.x+16.x+48-15}{x+3}=f(x)$$

b.2) Comme son coefficient directeur 4 est positif, alors la fonction affine $u(x)=4.x+16$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle $]-3;+\infty[$

b.3) Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-3;+\infty[$ tels que $a<b$.

Comment leurs images $v(a)$ et $v(b)$ sont-elles rangées ?

$$-3<a<b$$

+3

$$0<a+3<b+3$$

↑ Deux quantités positives. ↑

Inverse

La fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[

$$\frac{1}{a+3}>\frac{1}{b+3}$$

↑ L'ordre change. ↑

x-15

$$\underbrace{\frac{-15}{a+3}}_{v(a)}<\underbrace{\frac{-15}{b+3}}_{v(b)}$$

La fonction v change l'ordre sur]-3 ; +∞[

Conclusion : v conservant l'ordre sur $]-3;+\infty[$, la fonction est croissante sur cet intervalle.

b.4) f est la somme des deux fonctions u et v qui sont croissantes sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.
Quand deux termes augmentent, il en va de même pour leur somme.
C'est pour cela que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ ...et aussi avant -3.

LA DERNIÈRE FONCTION…TRIGONOMÉTRIQUE

Le contexte

Cet exercice aborde l'étude d'une fonction définie avec un sinus. Au menu : montage, variations et aussi cercle trigonométrique.

L'énoncé

f est la fonction définie sur ℝ par :

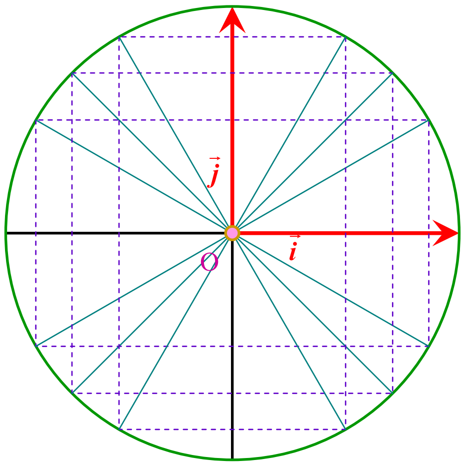
$$f(t)=\sin(4.t)-1$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

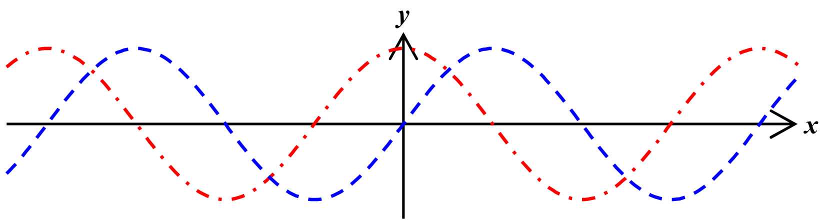
L'objet de cet exercice est l'étude partielle de la fonction f.

A titre d'aides, sont fournis :

☑ Un cercle trigonométrique incomplet :



☑ Deux esquisses des courbes des fonctions cosinus et sinus mais qui est qui ?



a) Calculer les valeurs exactes des images par f suivantes. On détaillera ses calculs.

$f\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{16}\right)=$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=$ $\qquad f\left(\dfrac{7\pi}{24}\right)=$

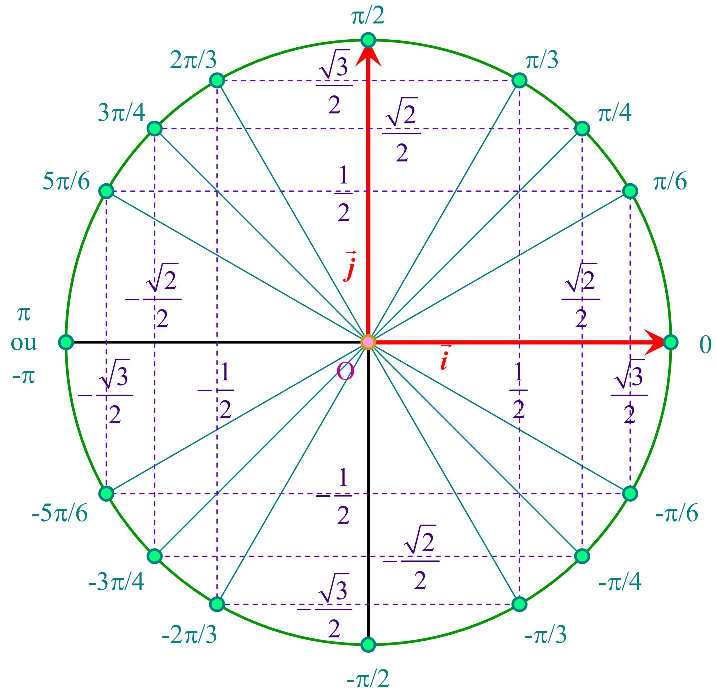
b) Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est vraie ? Aucune justification n'est demandée. On pourra s'aider des résultats de la question précédente.

La fonction f est paire et impaire.	La fonction f est paire mais n'est pas impaire.	La fonction f est impaire, mais n'est pas paire.	La fonction n'est ni paire, ni impaire.

c) Etablir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{8}\right]$.

Le corrigé

a) Avant toutes choses, complétons le cercle trigonométrique avec les angles remarquables et les sinus et cosinus associés :



En nous appuyant sur ce cercle, le calcul des cinq images demandées devient...aisé :

☑ $f\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=\sin\left(4\times\dfrac{-\pi}{8}\right)-1=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)-1=-1-1=\underline{-2}$

☑ $f\left(\dfrac{\pi}{16}\right)=\sin\left(4\times\dfrac{\pi}{16}\right)-1=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-1=\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1}$ On ne peut pas faire mieux...

☑ $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sin\left(4\times\dfrac{\pi}{8}\right)-1=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-1=1-1=\underline{0}$

☑ $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(4\times\dfrac{\pi}{6}\right)-1=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)-1=\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}$ On ne peut pas faire mieux...

☑ $f\left(\dfrac{7\pi}{24}\right)=\sin\left(4\times\dfrac{7\pi}{24}\right)-1=\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)-1=-\dfrac{1}{2}-1=\underline{-1,5}$

b) La question précédente nous a appris que $f\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)=-2$ et $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=0$

Une fonction est paire si tout réel t et son opposé $-t$ ont des images égales.

Comme les images par f de $\dfrac{\pi}{8}$ et de $-\dfrac{\pi}{8}$ ne sont pas égales, alors <u>f n'est pas paire</u>.

Une fonction est dite impaire si tout réel t et son opposé $-t$ ont des images opposées.

Les images par f de $\dfrac{\pi}{8}$ et de $-\dfrac{\pi}{8}$ n'étant pas opposées, <u>la fonction n'est pas impaire</u>.

c) Soient a et b deux réels de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{8}\right]$ tels que $a<b$.

Comment leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont-elles rangées ?

$$\frac{\pi}{4}\leq a<b\leq\frac{3\pi}{8}$$

×4

$$\pi\leq 4.a<4.b\leq\frac{3\pi}{2}$$

Sinus

Sinus est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3.\pi}{2}\right]$

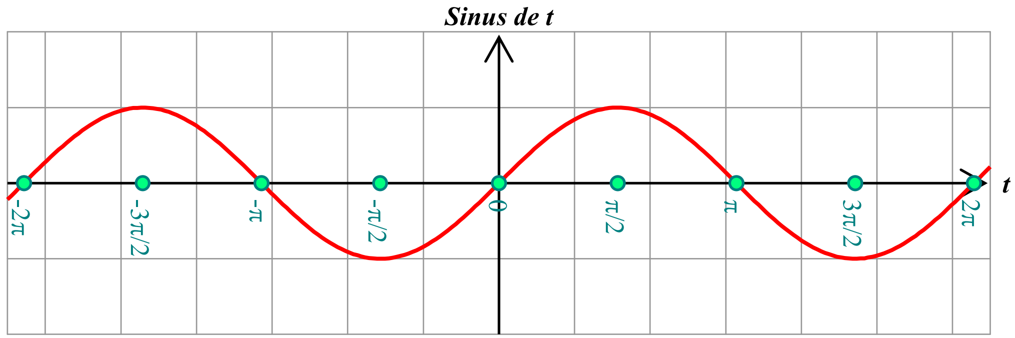
$$0\geq\sin(4.a)>\sin(4.b)\geq-1$$

-1

$$-1\geq\underbrace{\sin(4.a)-1}_{f(a)}>\underbrace{\sin(4.b)-1}_{f(b)}\geq-2$$

f change l'ordre, donc est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{8}\right]$

Pour rappel, la courbe de la fonction sinus est la suivante :



Géométrie analytique

Savoir faire de base et de repère

Le contexte

Un exercice sur les savoir-faire de base de la géométrie analytique mais sans les équations cartésiennes de droites.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dans celui-ci, on considère les points :

$\mathrm{A}\left(-3;-4\right)$ $\mathrm{B}\left(2;3\right)$ $\mathrm{C}\left(-1;4\right)$

a) Sur la figure ci-contre, placer (directement et sans calcul) les points A, B et C.

b) Les points O, A et B sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse par un calcul.

c) Déterminer par le calcul les coordonnées du milieu I du segment [AB].

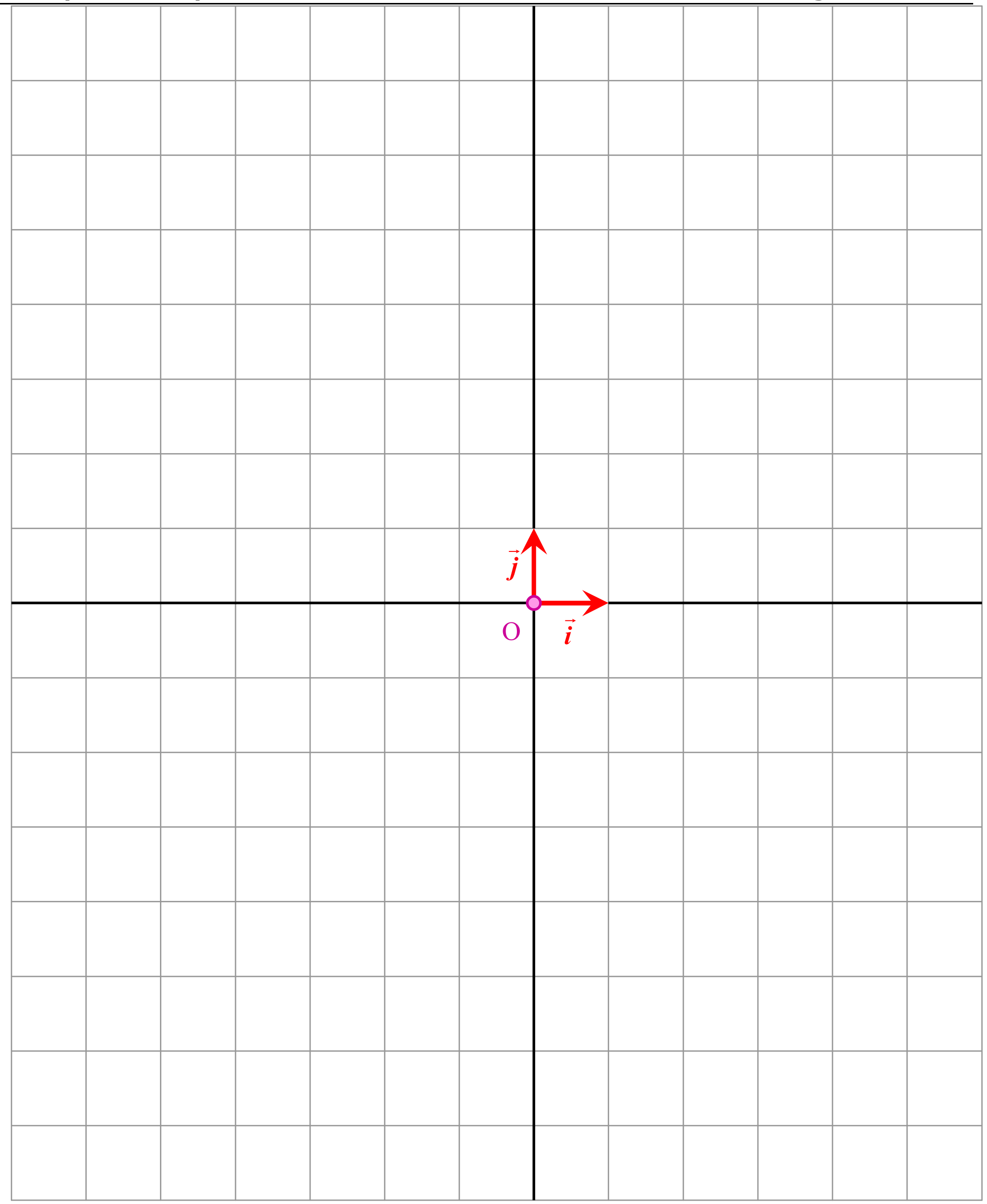
d) On appelle D le point tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
Déterminer par le calcul les coordonnées du point D.

e) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$3.\overrightarrow{\mathrm{AG}}+2.\overrightarrow{\mathrm{BG}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{o}$$

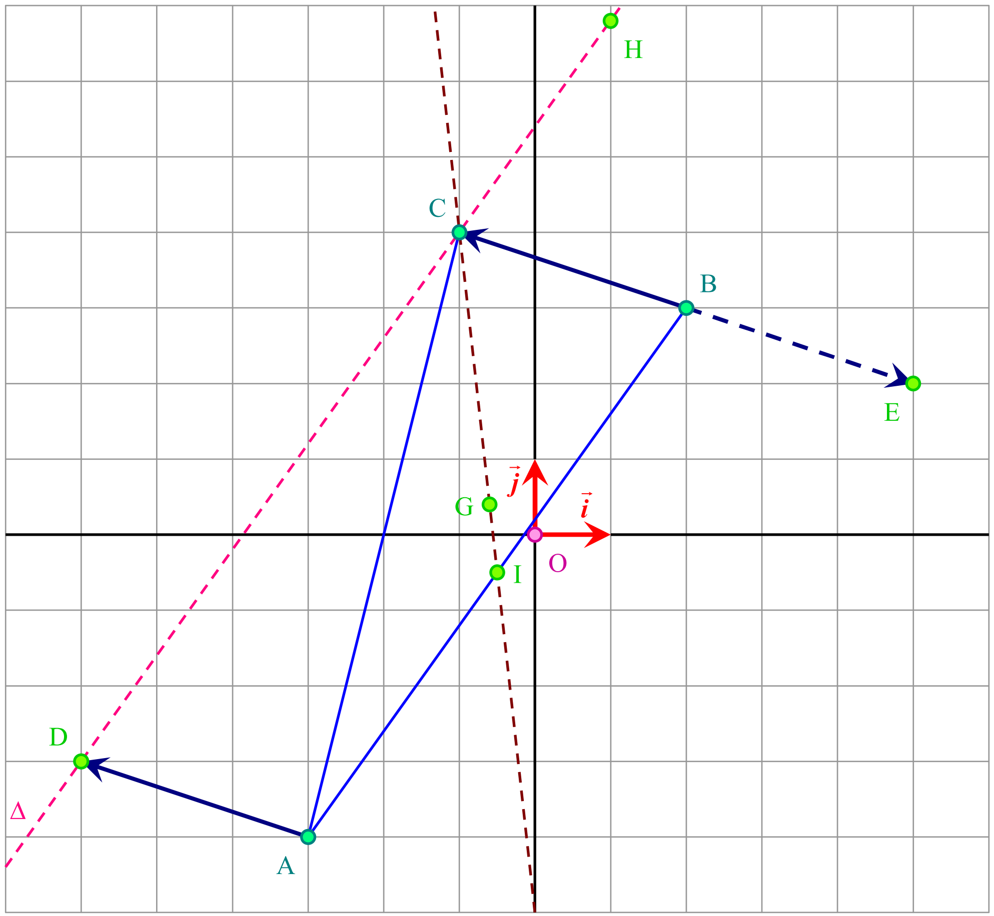
1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G.
2. Démontrer que le point G appartient à la droite (CI).

f) On appelle Δ la droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C.
On note H le point de la droite Δ dont l'abscisse est égale à 1.
Déterminer par le calcul l'ordonnée du point H.



Le corrigé

a) A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-dessous :



b) Les points O, A et B sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Pour résoudre cette insoutenable énigme, calculons leur déterminant !

$$\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\begin{vmatrix}-3 & 2\\-4 & 3\end{vmatrix}=(-3)\times 3-(-4)\times 2=-9+8=-1\neq 0$$

<u>Conclusion :</u> comme leur déterminant est non nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points O,A et B ne sont pas alignés.

c) Nous notons $(x_D;y_D)$ les coordonnées de D. Ce point est défini par :

On remplace les deux vecteurs par leurs coordonnées.

$$\text{ABCD est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overset{\overrightarrow{AD}}{\begin{pmatrix}x_D-(-3)\\y_D-(-4)\end{pmatrix}}=\overset{\overrightarrow{BC}}{\begin{pmatrix}-1-2\\4-3\end{pmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_D+3\\y_D+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

Deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales.

$$\Leftrightarrow x_D+3=-3 \quad \underline{\text{et}} \quad y_D+4=1$$

$$x_D=-3-3 \qquad y_D=1-4$$

$$x_D=-6 \qquad y_D=-3$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point D sont $(-6;-3)$.

d) Soient $(x_E;y_E)$ les coordonnées du point E. Ce dernier est défini par :

On remplace les deux vecteurs par leurs coordonnées.

$$\text{B est le milieu du segment } [CE] \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overset{\overrightarrow{CB}}{\begin{pmatrix}2-(-1)\\3-4\end{pmatrix}}=\overset{\overrightarrow{BE}}{\begin{pmatrix}x_E-2\\y_E-3\end{pmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_E-2\\y_E-3\end{pmatrix}$$

Deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales.

$$\Leftrightarrow 3=x_E-2 \quad \underline{\text{et}} \quad -1=y_E-3$$

$$x_E=3+2 \qquad y_E=-1+3$$

$$x_E=5 \qquad y_E=2$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point E sont $(5;2)$

e) On appelle $(x_G;y_G)$ les coordonnées du point G. Celui-ci vérifie l'égalité vectorielle :

$$3.\overrightarrow{AG}+2.\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CA}=\vec{o} \Leftrightarrow 3.\overset{\overrightarrow{AG}}{\begin{pmatrix}x_G+3\\y_G+4\end{pmatrix}}+2.\overset{\overrightarrow{BG}}{\begin{pmatrix}x_G-2\\y_G-3\end{pmatrix}}+\overset{\overrightarrow{CA}}{\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}}=\overset{\vec{o}}{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}$$

On remplace les vecteurs par leurs coordonnées.

On développe, puis on réduit...

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3.x_G+9\\3.y_G+12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2.x_G-4\\2.y_G-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}5.x_G+3\\5.y_G-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow 5.x_G+3=0 \quad \underline{\text{et}} \quad 5.y_G-2=0$$

Deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales.

$$5.x_G=-3 \qquad 5.y_G=2$$

$$x_G=-\frac{3}{5} \qquad y_G=\frac{2}{5}$$

➲ Les coordonnées $\left(x_I ; y_I\right)$ du milieu I du segment [AB] sont données par les formules :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{(-3)+2}{2} = \frac{-1}{2} = -0,5 \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(-4)+3}{2} = \frac{-1}{2} = -0,5$$

Conclusion : les coordonnées du point I sont $\left(-0,5 ; -0,5\right)$.

➲ Les vecteurs $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} -0,6-(-1)=0,4 \\ 0,4-4=-3,6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} -0,5-(-1)=0,5 \\ -0,5-4=-4,5 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Pour le savoir, calculons leur déterminant !

$$\det\left(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CI}\right) = \begin{vmatrix} 0,4 & 0,5 \\ -3,6 & -4,5 \end{vmatrix} = 0,4 \times (-4,5) - (-3,6) \times 0,5 = -1,8 + 1,8 = 0$$

Conclusion : comme leur déterminant est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires et les points C, G et I sont alignés.

f) Nous noterons y_H l'ordonnée de H. Les coordonnées de ce point sont donc $\left(1 ; y_H\right)$.
ABCD étant un parallélogramme, la parallèle Δ n'est rien d'autre que la droite (CD).

$$\text{H appartient à la } \underbrace{\text{droite } \Delta}_{\text{aussi (CD)}} \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} 2 \\ y_H - 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overbrace{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}}^{=\overrightarrow{DC}} \text{ sont colinéaires.}$$

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ y_H - 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \times 7 - \left(y_H - 4\right) \times 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14 - 5 \times y_H + 20 = 0 \Leftrightarrow -5.y_H + 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5.y_H = -34 \Leftrightarrow y_H = \frac{-34}{-5} = 6,8$$

Conclusion : les coordonnées du point H sont $\left(1 ; 6,8\right)$.

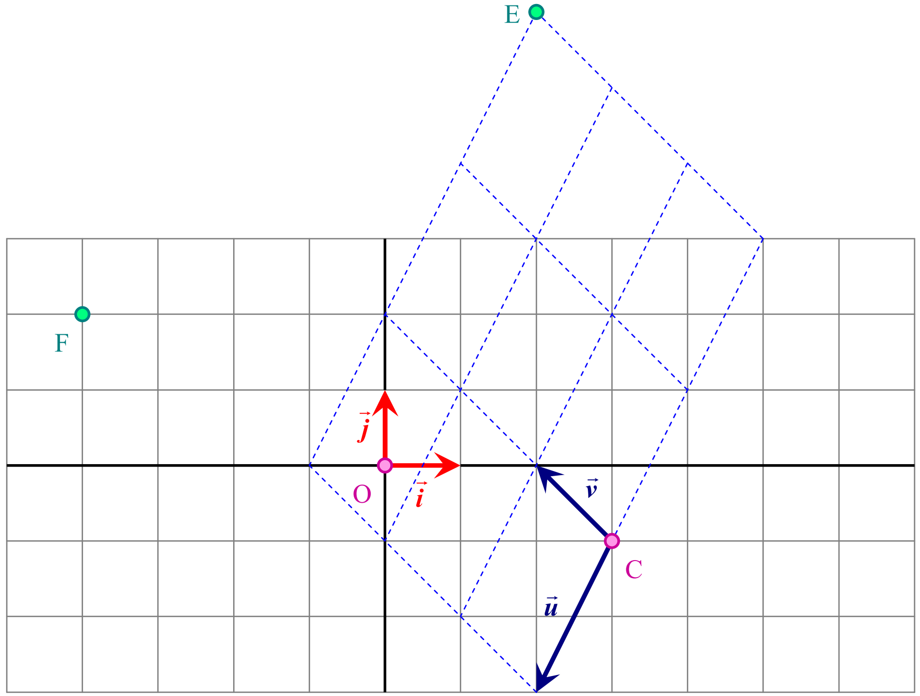
LES DEUX REPÈRES FONT LA PAIRE

Le contexte

Un exercice un peu hors programme sur la lien entre coordonnées d'un point dans un repère et calcul vectoriel. En filigrane, on entrevoit le changement de repère.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est muni de deux repères $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ et $\left(C ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.



a) On cherche à exprimer les vecteurs d'une base en fonction des vecteurs de l'autre.

1. A partir du graphique, exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Par le calcul, démontrer que $\vec{i} = -\frac{1}{3}.\vec{u} - \frac{2}{3}.\vec{v}$ puis que $\vec{j} = -\frac{1}{3}.\vec{u} + \frac{1}{3}.\vec{v}$

b) On cherche les coordonnées du point E dans les deux repères.

1. A partir du graphique, déterminer les coordonnées de E dans le repère $\left(C;\vec{u},\vec{v}\right)$.
2. En déduire par un calcul vectoriel les coordonnées de E dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

c) On cherche les coordonnées du point F dans les deux repères.

1. A partir du graphique, déterminer les coordonnées de F dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
2. En déduire par un calcul vectoriel les coordonnées de F dans le repère $\left(C;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Le corrigé

a) Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne pose guère de difficultés. A partir de la figure, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\vec{u}=-\vec{i}-2.\vec{j}}_{\text{Nous appellerons cette égalité } (1)} \qquad\qquad \underbrace{\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}}_{\text{Nous noterons cette égalité } (2)}$$

Réciproquement, pour exprimer les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il nous faut "résoudre" le système formé par les deux équations précédentes :

$$\begin{cases}\vec{u}=-\vec{i}-2.\vec{j} & (1)\\ \vec{v}=-\vec{i}+\vec{j} & (2)\end{cases}$$

Pour exprimer $\vec{i}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, nous allons multiplier l'égalité ***(2)*** par 2 afin de pouvoir éliminer les vecteurs $\vec{j}$.

$$\begin{array}{lrl} (1) \longrightarrow & \vec{u} &= -\vec{i}-2\vec{j} \\ (2) \xrightarrow{\times 2} & 2.\vec{v} &= -2.\vec{i}+2.\vec{j} \quad \oplus \\ \hline & \vec{u}+2.\vec{v} &= -3.\vec{i} \end{array}$$

D'ou :

$$3.\vec{i}=-\vec{u}-2.\vec{v} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{i}=-\frac{1}{3}.\vec{u}-\frac{2}{3}.\vec{v}}$$

Pour exprimer $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, nous allons juste soustraire l'égalité ***(2)*** à la ***(1)*** de façon éliminer les vecteurs $\vec{i}$.

$$\begin{array}{lrl} (1) \longrightarrow & \vec{u} &= -\vec{i}-2.\vec{j} \\ (2) \longrightarrow & \vec{v} &= -\vec{i}+\vec{j} \quad \ominus \\ \hline & \vec{u}-\vec{v} &= -3.\vec{j} \end{array}$$

D'ou :

$$3.\vec{j}=-\vec{u}+\vec{v} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{j}=-\frac{1}{3}.\vec{u}+\frac{1}{3}.\vec{v}}$$

b) D'après la figure, comme $\overrightarrow{CE}=-2.\vec{u}+3.\vec{v}$, alors le point E a pour coordonnées $(-2;3)$ dans le repère $\left(C;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Cette relation conduit aussi aux coordonnées de E dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. En effet :

$$\overrightarrow{OE}=\underbrace{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}}_{\text{D'après Chasles}}=\underbrace{\left(3.\vec{i}-\vec{j}\right)}_{\overrightarrow{OC}}+\underbrace{\left(-2.\vec{u}+3.\vec{v}\right)}_{\overrightarrow{CE}}=3.\vec{i}-\vec{j}-2\times\underbrace{\left(-\vec{i}-2.\vec{j}\right)}_{\vec{u}}+3\times\underbrace{\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)}_{\vec{v}}$$

$$=3.\vec{i}-\vec{j}+2.\vec{i}+4.\vec{j}-3.\vec{i}+3.\vec{j}=\boxed{2.\vec{i}+6.\vec{j}}$$

<u>Conclusion :</u> le point E a pour coordonnées $(2;6)$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

c) D'après la figure, comme $\overrightarrow{OF}=-4.\vec{i}+2.\vec{j}$, alors le point F a pour coordonnées $(-4;2)$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Cette relation vectorielle va nous emmener aux coordonnées de F dans le repère $\left(C;\vec{u},\vec{v}\right)$.

$$\overrightarrow{CF}=\underbrace{\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OF}}_{\text{Encore Chasles !}}=\underbrace{\left(-3.\vec{i}+\vec{j}\right)}_{\overrightarrow{CO}}+\underbrace{\left(-4.\vec{i}+2.\vec{j}\right)}_{\overrightarrow{OF}}=-7.\vec{i}+3.\vec{j}$$

$$=-7\times\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\vec{u}-\frac{2}{3}.\vec{v}\right)}_{\vec{i}}+3\times\underbrace{\left(-\frac{1}{3}.\vec{u}+\frac{1}{3}.\vec{v}\right)}_{\vec{j}}=\frac{7}{3}.\vec{u}+\frac{14}{3}.\vec{v}-\frac{3}{3}.\vec{u}+\frac{3}{3}.\vec{v}=\boxed{\frac{4}{3}.\vec{u}+\frac{17}{3}.\vec{v}}$$

<u>Conclusion :</u> le point F a pour coordonnées $(4/3;17/3)$ dans le repère $\left(C;\vec{u},\vec{v}\right)$.

ULTIME REPÈRE

Le contexte

Un exercice très classique abordant les savoir faire de base de la géométrie analytique avec cette fois-ci en plus les équations de droite.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Dans celui-ci, on considère les points de coordonnées :

$A(3;2)$ $B(-2;5)$ $C(1;-1)$ $D(-5;-3)$

a) Sur la figure ci-contre, placer (directement et sans calcul) les points A, B, C et D.

b) On appelle E le symétrique du point A par rapport à C.
Déterminer par le calcul les coordonnées du point E.

c) Les points O, A et D sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.

d) Le point F est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AF}+2.\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EF}=\vec{o}$$

3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point F.
4. Démontrer que F est le milieu du segment [BC].

On appelle Δ la parallèle à la droite (AB) passant par le point D.

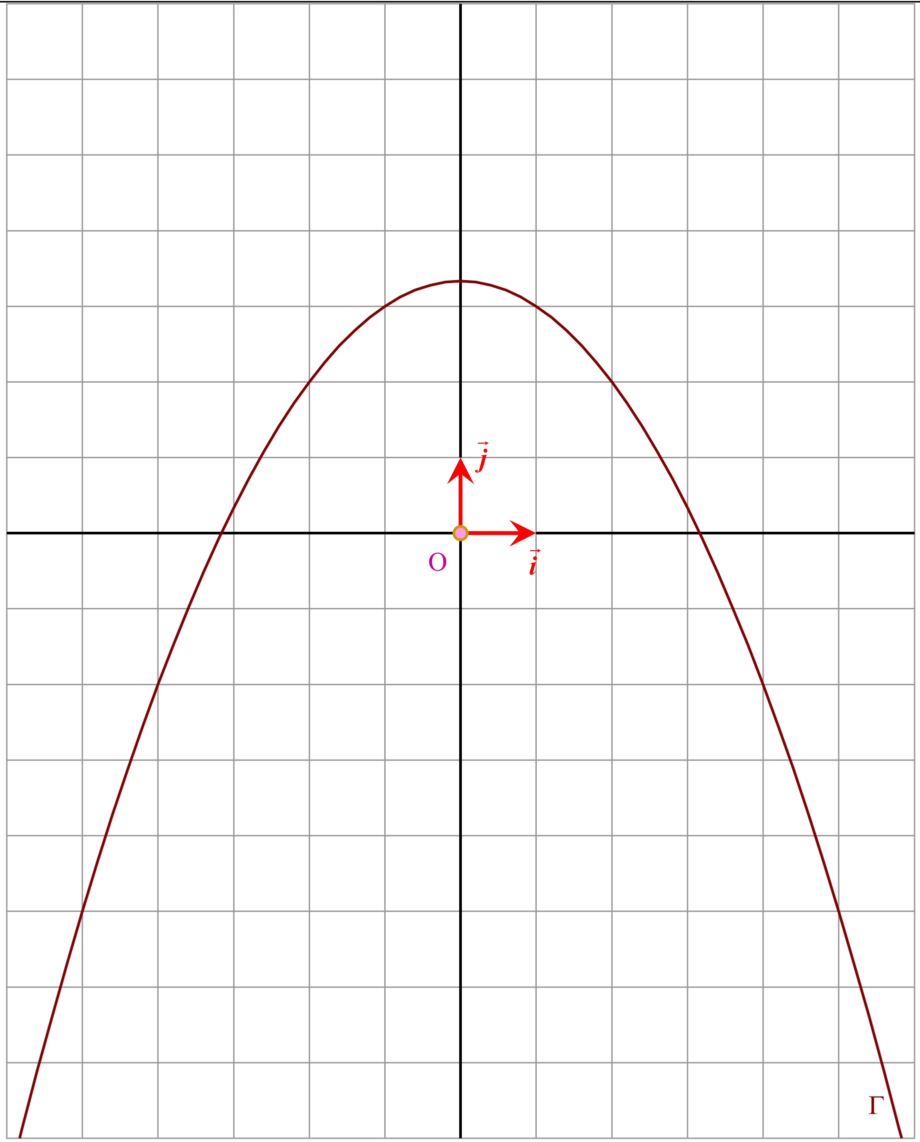
e) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ.

On appelle *d* la droite dont une équation cartésienne est :

$$7.x-3.y-20=0$$

f) On appelle G le point de la droite *d* dont l'ordonnée est égale à -2.
Déterminer l'abscisse x_G du point G.
Tracer la droite *d*. On indiquera les éléments qui ont permis le tracé.

g) Démontrer que les droites *d* et Δ sont séantes.
Déterminer les coordonnées $(x_H;y_H)$ du point H qui est l'intersection des droites *d* et Δ.



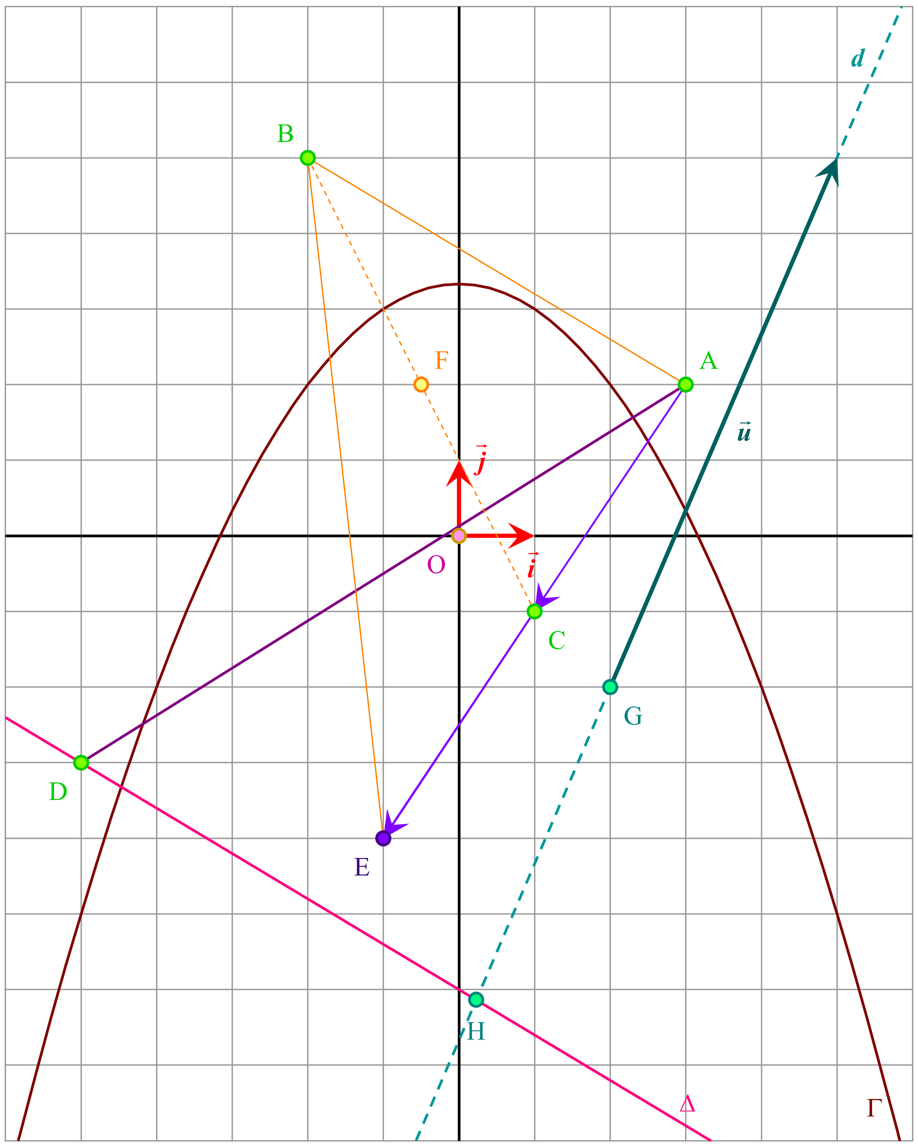
h) Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe Γ (prononcer «gamma») d'équation :

$$y=\frac{10-x^2}{3}$$

Déterminer par le calcul les coordonnées du ou des points d'intersection de la courbe Γ et de la droite *d*.

Le corrigé

a) A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-dessous :



b) On appelle $(x_E;y_E)$ les coordonnées du point E. Avec A et C, ils vérifient l'égalité :

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}x_E-1\\ y_E-(-1)\end{pmatrix}}^{\overrightarrow{CE}}=\overbrace{\begin{pmatrix}1-3\\ -1-2\end{pmatrix}}^{\overrightarrow{AC}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_E-1\\ y_E+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -3\end{pmatrix}$$

Deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales.

$$\Leftrightarrow x_E-1=-2 \quad \underline{\text{et}} \quad y_E+1=-3$$

$$x_E=-2+1 \qquad y_E=-3-1$$

$$x_E=\boxed{-1} \qquad y_E=\boxed{-4}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point E sont $(-1;4)$

c) O, A et D sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Pour le savoir, calculons leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)=\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & -3\end{vmatrix}=3\times(-3)-2\times(-5)=-9+10=1\neq 0$$

<u>Conclusion :</u> comme leur déterminant est non nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points O,A et D ne sont pas alignés.

d) On note $(x_F;y_F)$ les coordonnées du point F qui est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AF}+2.\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EF}=\vec{o} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}x_F-3\\ y_F-2\end{pmatrix}}^{\overrightarrow{AF}}+2\times\overbrace{\begin{pmatrix}x_F+2\\ y_F-5\end{pmatrix}}^{\overrightarrow{BF}}+\overbrace{\begin{pmatrix}x_F+1\\ y_F+4\end{pmatrix}}^{\overrightarrow{EF}}=\overbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}}^{\vec{o}}$$

On remplace les vecteurs par leurs coordonnées.

On développe, puis on réduit...

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_F-3\\ y_F-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2.x_F+4\\ 2.y_F-10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_F+1\\ y_F+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4.x_F+2\\ 4.y_F-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 4.x_F+2=0 \quad \underline{\text{et}} \quad 4.y_F-8=0$$

Deux vecteurs égaux ont des coordonnées

$$4.x_F=-2 \qquad 4.y_G=8$$

$$x_F=\frac{-2}{4}=\boxed{-\frac{1}{2}} \qquad y_G=\frac{8}{4}=\boxed{2}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point F sont $(-0,5;2)$.

➲ On appelle I le milieu du segment [BC] et on note $(x_I ; y_I)$ ses coordonnées.

Les coordonnées de ce milieu I sont-elles les mêmes que celle de F ? Calculons-les !

$$x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{(-2)+1}{2} = \frac{-1}{2} = -0{,}5 \qquad y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

<u>Conclusion :</u> comme leurs coordonnées sont identiques, alors les points I et F sont confondus. Par conséquent, F est bien le milieu du segment [BC].

Une autre manière de l'établir : par le calcul vectoriel

D'abord, C étant le milieu du segment [AE], ces trois points vérifient la relation :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} = \vec{o}}_{\text{Deux vecteurs ayant même direction, même norme mais de sens opposés. Donc leur somme est nulle.}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EC} = \vec{o}$$

L'égalité vectorielle définissant F peut alors se modifier avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AF} + 2.\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EF} = \vec{o} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}}_{\text{Chasles}} + 2.\overrightarrow{BF} + \underbrace{\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}}_{\text{Re-Chasles}} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EC}}_{=\vec{o}} + 2.\overrightarrow{CF} + 2.\overrightarrow{BF} = \vec{o} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{CF} + 2.\overrightarrow{BF} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BF} = \vec{o}}_{\text{Après division par 2}} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FC}}_{\text{Donc F est le milieu [BC]}}$$

e) La parallèle Δ est définie par son point D et son vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-3=-5 \\ 5-2=3 \end{pmatrix}$.

A quelle condition sur ses coordonnées $(x;y)$ un point M appartient-il à la droite Δ ?

$$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} x+5 \\ y+3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+5 & -5 \\ y+3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+5)\times 3 - (y+3)\times(-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3.x + 15 + 5.y + 15 = 0 \Leftrightarrow 3.x + 5.y + 30 = 0$$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne de la parallèle Δ est $3.x + 5.y + 30 = 0$.

f) Comme le point G appartient à la droite *d*, alors les coordonnées $(x_G ; -2)$ vérifient l'équation cartésienne de cette dernière. Il vient alors :

$$7.x_G - 3\times(-2) - 20 = 0 \Leftrightarrow 7.x_G + 6 - 20 = 0 \Leftrightarrow 7.x_G - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7.x_G = 14 \Leftrightarrow x_G = \frac{14}{7} = 2$$

<u>Conclusion :</u> le point G a pour coordonnées $(2;-2)$.

➲ Connaissant déjà les coordonnées de l'un de ses points, il nous suffit juste d'en déterminer un vecteur directeur pour construire la droite *d*.

d ayant pour équation $7.x - 3.y - 20 = 0$, l'un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

En positionnant ce vecteur directeur au départ de G, puis en prolongeant le segment, on obtient la si recherchée droite *d*.

g) Dans le plan, si deux droites ne sont pas sécantes, alors elles sont parallèles.
Et deux droites sont parallèles lorsque et seulement lorsque deux de leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Aussi la question qui se pose est :

Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour Δ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ pour *d* sont-ils colinéaires ?

Pour le savoir, calculons leur déterminant :

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = (-5)\times 7 - 3\times 3 = -35 - 9 = -44 \neq 0$$

<u>Conclusion :</u> comme leur déterminant est non nul, alors les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires. Donc les droites Δ et *d* qu'ils dirigent ne sont pas parallèles mais sécantes en un point H dont nous allons déterminer les coordonnées.

➲ Comme le point H appartient aux deux droites Δ et *d*, alors ses coordonnées vérifient les deux équations de ces dernières. Ses coordonnées sont la solution du système linéaire :

$$\begin{cases} 3.x + 5.y = -30 & \textbf{\textit{(1)}} \quad \leftarrow \text{H appartient à } \Delta \\ 7.x - 3.y = 20 & \textbf{\textit{(2)}} \quad \leftarrow \text{H appartient à } d \end{cases}$$

Résolvons ce système par un double coup de combinaisons linéaires :

Pour obtenir x, nous allons multiplier l'égalité ***(1)*** par 3 et l'égalité ***(2)*** par 5, puis nous additionnerons pour éliminer les y.

$$\begin{array}{lll} \textbf{\textit{(1)}} & \xrightarrow{\times 3} & 9.x + 15.y = -90 \\ \textbf{\textit{(2)}} & \xrightarrow{\times 5} & 35.x - 15.y = 100 \\ \hline & & 44.x = 10 \end{array} \oplus$$

D'ou :

$$x = \frac{10}{44} = \frac{5}{22}$$

Pour obtenir y, nous allons multiplier l'égalité ***(1)*** par 7, la ***(2)*** par 3, de façon à éliminer x par soustraction.

$$\begin{array}{lll} \textbf{\textit{(1)}} & \xrightarrow{\times 7} & 21.x + 35.y = -210 \\ \textbf{\textit{(2)}} & \xrightarrow{\times 3} & 21.x - 9.y = 60 \\ \hline & & 44.y = -270 \end{array} \ominus$$

D'ou :

$$y = \frac{-270}{44} = -\frac{135}{22}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point d'intersection H sont $\left(\frac{5}{22} ; -\frac{135}{22}\right)$.

h) Les coordonnées des points d'intersection de la courbe Γ et de la droite *d* vérifient leurs deux équations :

$$\underbrace{y=\frac{10-x^2}{3}}_{\text{Appartenance à la courbe }\Gamma \text{ Equation } (1)} \quad \text{et} \quad \underbrace{7.x-3y=20}_{\text{Appartenance à la droite } d \text{ Equation } (2)}$$

Dans l'équation ***(2)***, remplaçons y par ce qu'il vaut en x d'après l'équation ***(1)***.

$$7.x-3.y=20 \Leftrightarrow 7.x-\cancel{3}\times\frac{10-x^2}{\cancel{3}}=20 \Leftrightarrow 7.x-\left(10-x^2\right)-20=0$$

Elle se résout via la forme canonique...

$$\Leftrightarrow 7.x-10+x^2-20=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+7.x-30=0}_{\text{Une splendide équation du second degré}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x+2\times x\times 3,5}_{\text{Début de cette...}}-30=0 \Leftrightarrow \underbrace{(x+3,5)^2-3,5^2}_{\text{...identité remarquable}}-30=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3,5)^2-12,25-30=0 \Leftrightarrow \underbrace{(x+3,5)^2-42,25=0}_{\text{Forme canonique}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+3,5)^2-6,5^2}_{a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left[(x+3,5)-6,5\right]}_{(a-b)}\times\underbrace{\left[(x+3,5)+6,5\right]}_{(a+b)}=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x-3)\times(x+10)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x-3=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad x+10=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$x=3 \qquad\qquad x=-10$$

Ainsi, la courbe Γ et la droite *d* ont deux points d'intersection qui pour ordonnées :

Pour le premier dont l'abscisse x est 3, son ordonnée y est :	Pour le second dont l'abscisse x est -10, son ordonnée y est :
$y=\frac{10-3^2}{3}=\frac{10-9}{3}=\frac{1}{9}$	$y=\frac{10-10^2}{3}=\frac{10-100}{3}=\frac{-90}{3}=-30$

<u>Conclusion :</u> Γ et d ont deux points d'intersection de coordonnées $\left(3;\frac{1}{9}\right)$ et $(-10;-30)$.

REJOUE ET...REPÈRE

Le contexte

Un ultime exercice de géométrie analytique standard bien comme il faut.

L'énoncé

Sur la figure ci-après, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dans celui-ci, on considère les points de coordonnées :

$A(5;1)$ $\quad B(-1;-3)$ $\quad C(-4;4)$ $\quad E(4;5)$

a) On appelle Δ la droite d'équation $y=-2$ et Γ la droite d'équation $x=4$.

1. Tracer sur la figure ci-contre et sans justification les droites Δ et Γ.
2. Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection F ?

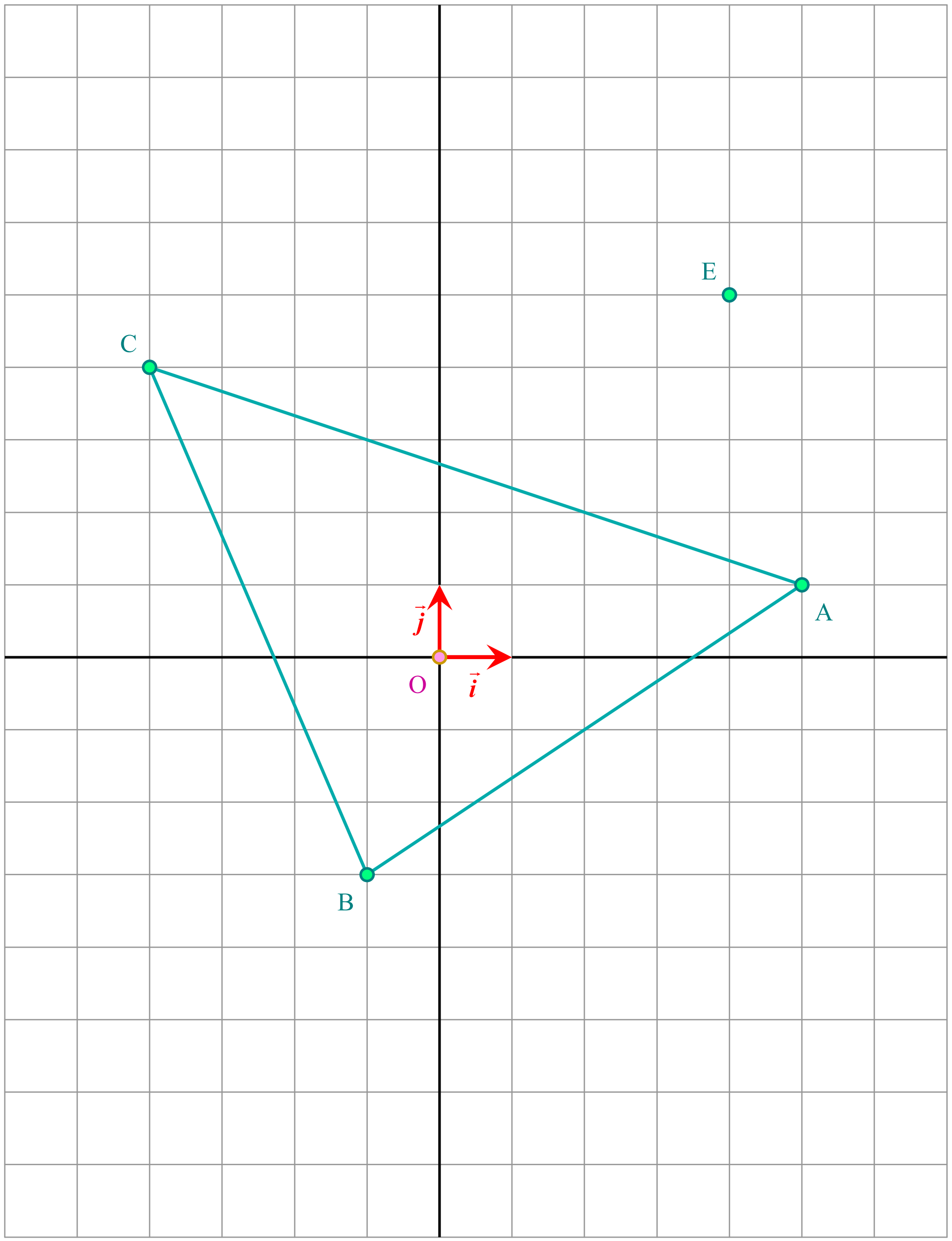
On appelle ***d*** la droite dont une équation cartésienne est $6.x-9.y+21=0$.

b) Le but de ces questions est de tracer la droite ***d***.

1. Démontrer que les droites ***d*** et (AB) sont parallèles.
2. Les points C et E appartiennent-ils à la droite ***d*** ? On justifiera ses réponses.
3. Tracer la droite ***d*** sur la figure ci-contre

c) Déterminer une équation de la droite (BC).

d) Déterminer les coordonnées du point I qui est l'intersection des droites (BC) et ***d***.



Le corrigé

a.1) La droite Δ d'équation $y=-2$ est une parallèle à l'axe des abscisses $\left(O;\vec{i}\right)$.

La droite Γ d'équation $x=4$ est une parallèle à l'axe des ordonnées $\left(O;\vec{j}\right)$.

a.2) Les coordonnées du point F, intersection de Δ et Γ, vérifient les équations de ces deux droites. Par conséquent, les coordonnées de F sont $(4;-2)$.

b.1) Pour prouver que les droites ***d*** et (AB) sont parallèles, nous allons établir que deux de leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

☑ Un vecteur de la droite ***d*** d'équation $6.x-9.y+21=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$.

☑ Un vecteur de la droite (AB) est... $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-5=-6\\-3-1=-4\end{pmatrix}$.

Calculons le déterminant de ces deux vecteurs :

$$\det\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}9 & -6\\6 & -4\end{vmatrix}=9\times(-4)-6\times(-6)=-36+36=0$$

<u>Conclusion :</u> comme leur déterminant est nul, alors les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Donc, les droites ***d*** et (AB) sont parallèles.

b.2) Pour savoir si les points C et E appartiennent à la droite ***d***, regardons si les coordonnées des premiers vérifient l'équation de la seconde.

☑ Pour le point $C(-4;4)$:

$$6.x_C-9.y_C+21=6\times(-4)-9\times4+21=-24-36+21=-39\neq0$$

Ses coordonnées n'en vérifiant pas l'équation, le point C n'appartient pas à ***d***.

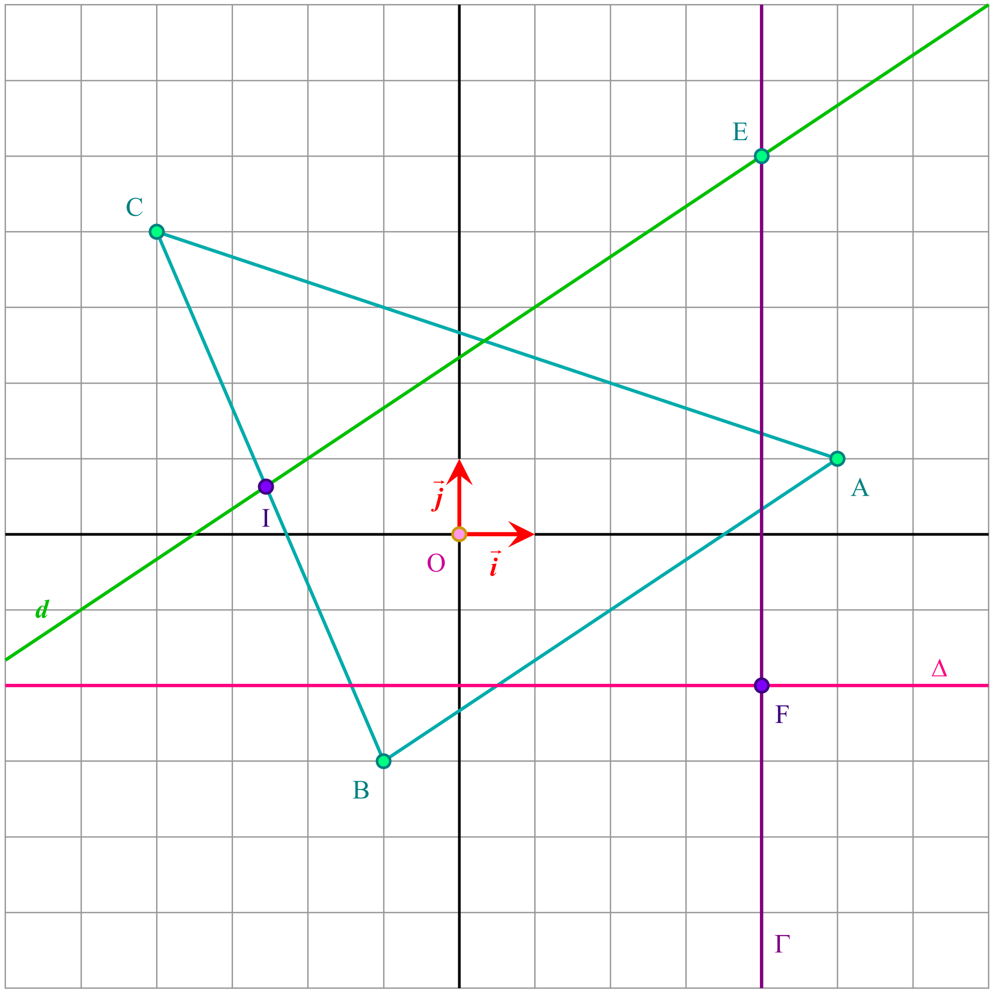
☑ Pour le point $E(4;5)$:

$$6.x_E-9.y_E+21=6\times4-9\times5+21=24-45+21=0$$

Ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point E appartient bien à la droite ***d***.

b.3) Compte tenu des questions précédentes, la droite ***d*** est la parallèle à la droite (AB) passant par le point E. C'est comme telle que nous l'avons tracée ci-contre.

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-dessous :



c) La droite (BC) est définie son vecteur directeur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4-(-1)=-3 \\ 4-(-3)=7 \end{pmatrix}$ et le point B.

$$M(x;y)\in(BC) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-(-3) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & -3 \\ y+3 & 7 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\times 7-(-3)\times(y+3)=0$$

$$\Leftrightarrow 7.x+7+3.y+9=0 \Leftrightarrow 7.x+3.y+16=0$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite (BC) est $7.x+3.y+16=0$.

d) La première chose dont il faut s'assurer est que ce point d'intersection I existe bien.
En d'autres termes, les droites ***d*** et (BC) sont-elles sécantes (ou non parallèles) ?

$$\det\left(\vec{u},\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}=9\times 7-6\times(-3)=63+18=81\neq 0$$

Comme leur déterminant est nul, alors les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non colinéaires. En conséquence, les droites ***d*** et (BC) sont sécantes et leur point d'intersection I existe bel et bien.

Les coordonnées de ce point I sont les solutions du système linéaire de deux équations à deux inconnues qu'est :

Après division par 3...

$$\begin{cases} 2.x-3.y+7=0 & \textbf{\textit{(1)}} \quad \leftarrow \text{I appartient à } \boldsymbol{d} \\ 7.x+3.y+16=0 & \textbf{\textit{(2)}} \quad \leftarrow \text{I appartient à } (BC) \end{cases}$$

Résolvons ce système par combinaisons linéaires :

Pour obtenir x, nous allons additionner les égalités ***(1)*** et ***(2)*** afin d'éliminer les y.

$$\begin{array}{lcr} \textbf{\textit{(1)}} & \longrightarrow & 2.x-3.y+7=0 \\ \textbf{\textit{(2)}} & \longrightarrow & 7.x+3.y+16=0 \\ \hline & & 9.x+23=0 \end{array} \oplus$$

D'ou :

$$9.x=-23 \Leftrightarrow x=-\frac{23}{9}$$

Puis, pour obtenir y, il y a juste à remplacer x par sa valeur dans l'équation ***(2)*** :

$$7\times\frac{-23}{9}+3.y+16=0$$

$$3.y=\frac{161}{9}-16=\frac{161}{9}-\frac{144}{9}$$

$$y=\frac{1}{3}\times\frac{17}{9}=\frac{17}{27}$$

Conclusion : les coordonnées du point d'intersection I sont $\left(-\frac{23}{9};\frac{17}{27}\right)$.

Géométrie plane et dans l'espace

La boucle isométrique

Le contexte

Voici un exercice sur les isométries...légèrement hors programme. Et pourtant, il fut plutôt bien réussi. De mon point vue, l'étude «globale» des isométries est bien plus passionnantes que celle des triangles isométriques.

L'énoncé

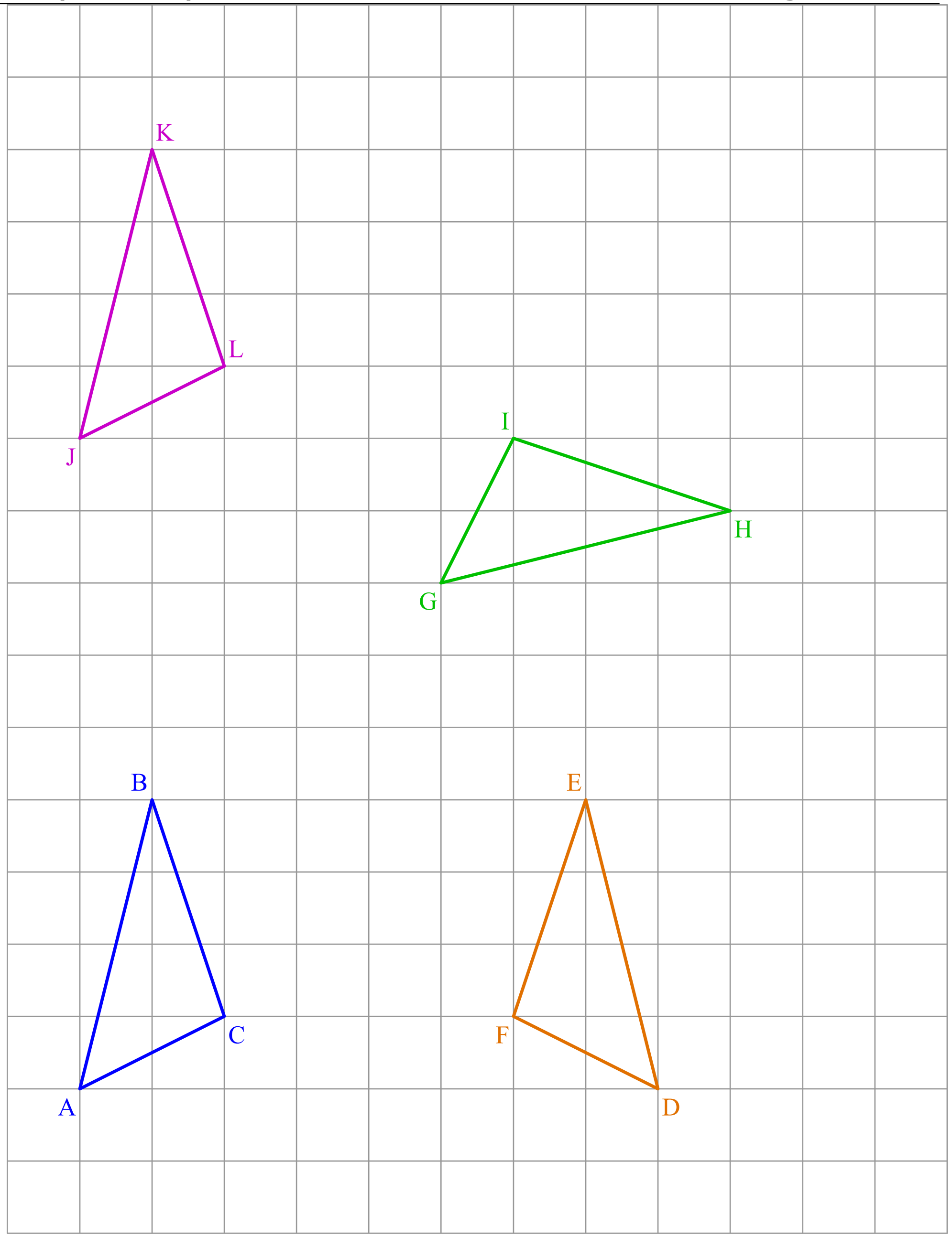
Sur la figure ci-contre, les quatre triangles ABC, DEF, GHI et JKL sont isométriques.
C'est-à-dire que l'on peut passer de l'un à l'autre au moyen d'une isométrie (translation, rotation, symétrie axiale ou symétrie glissée). Tout le problème est de savoir laquelle !
C'est l'objet de cet exercice.
Dans ce qui suit, lorsque l'isométrie sera une symétrie axiale, on construira son axe de symétrie. S'il s'agit d'une rotation, on construira son centre et on donnera une estimation de son angle. Sinon aucune autre construction n'est demandée.

a) Par quelle isométrie passe-t-on du triangle ABC au triangle DEF ?

b) Par quelle isométrie passe-t-on du triangle DEF au triangle GHI ?

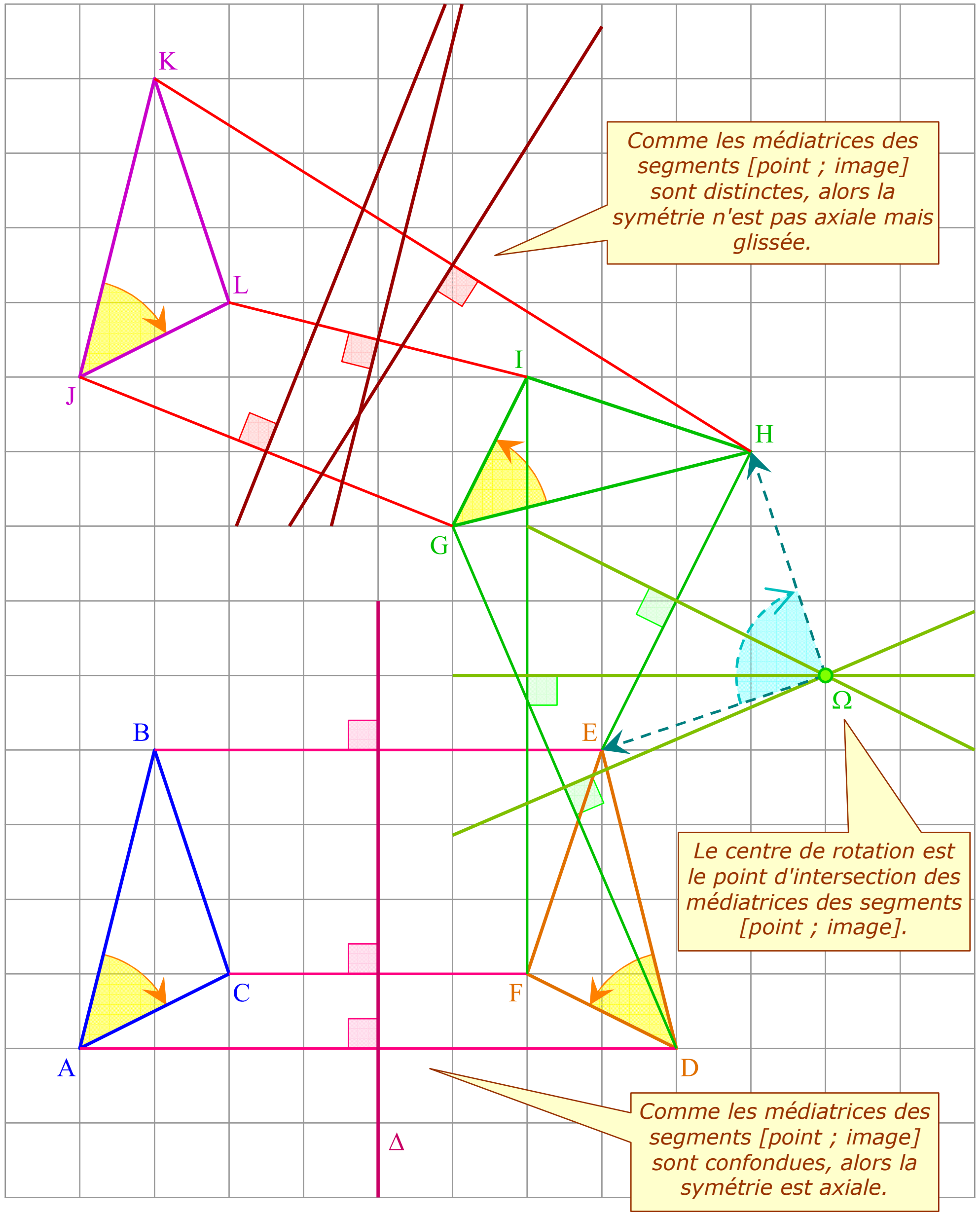
c) Par quelle isométrie passe-t-on du triangle GHI au triangle JKL ?

d) Par quelle isométrie passe-t-on du triangle JKL au triangle ABC ?



Le corrigé

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-dessous :



a) Comme les angles $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right)$ sont orientés dans des sens opposés, alors l'isométrie $\boldsymbol{f}$ qui envoie le triangle ABC sur le triangle DEF est indirecte : il s'agit soit une symétrie axiale, soit d'une symétrie glissée.
Les trois segments [AD], [BE] et [CF] partageant la même médiatrice Δ, nous en déduisons que l'isométrie $\boldsymbol{f}$ est une symétrie axiale (ou réflexion) d'axe Δ.

b) Les angles $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DF}\right)$ et $\left(\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GI}\right)$ étant orientés dans le même sens, l'isométrie $\boldsymbol{g}$ qui au triangle DEF fait correspondre le triangle GHI est directe. $\boldsymbol{g}$ est soit une translation, soit une rotation.
Comme les triangles ne sont pas disposés de la même manière, $\boldsymbol{g}$ ne peut pas être une translation. C'est donc une rotation.
Le centre Ω de cette dernière est le point d'intersection des médiatrices des segments [DG], [EG] et [FI] : les segments [un point ; son image].

L'angle de rotation est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega H}\right)=-90°=-\dfrac{\pi}{2}$ radians .

c) Comme les angles $\left(\overrightarrow{GH},\overrightarrow{GI}\right)$ et $\left(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{JL}\right)$ ne sont pas orientés de la même manière, alors l'isométrie $\boldsymbol{h}$ par laquelle le triangle GHI a pour image JKL est indirecte. C'est soit une symétrie axiale, soit une glissée.
Les trois médiatrices des segments [GJ], [HK] et [IL] étant distinctes (en fait, deux distinctes suffisent), alors $\boldsymbol{h}$ est une symétrie glissée.

d) Enfin, les triangles JKL et ABC étant disposés de la même manière, c'est bien évidemment une translation verticale de 9 carreaux vers le bas qui permet de passer du premier au deuxième.

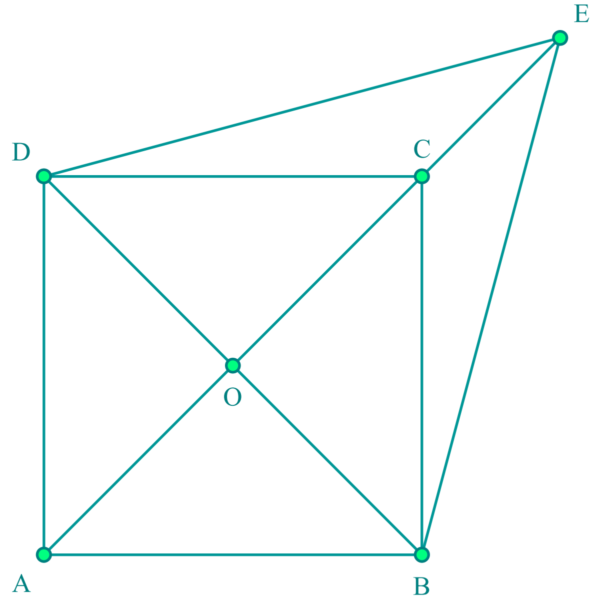
DES ANGLES AU RIZ EN THÉ

Le contexte

Un exercice basique sur les angles orientés qui sont...hors programme.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de centre O et le triangle BDE est équilatéral.



Déterminer en radians une mesure des angles orientés suivants. Une mesure donnée en degrés sera considérée comme fausse.

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=$

$\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DO}\right)=$

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{EB}\right)=$

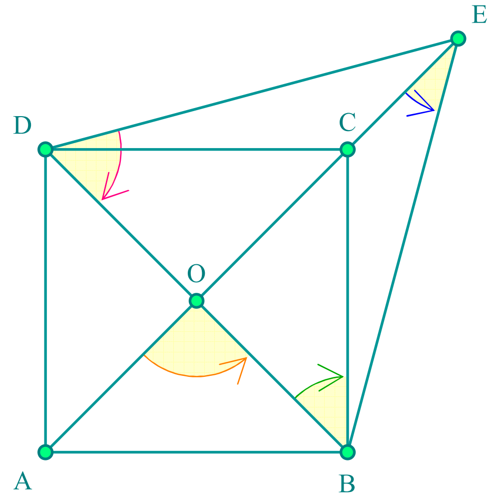
$\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{AD}\right)=$

Le corrigé

En se basant sur la figure complétée et les divers renseignements fournis, nous en déduisons :

Dans un angle orienté, tout vecteur peut être remplacé par un autre ayant même demi-direction (même direction et même sens).

- ☑ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\right)=\frac{\pi}{2}$
- ☑ $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DO}\right)=-\frac{\pi}{3}$
- ☑ $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{EB}\right)=\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EB}\right)=\frac{\pi}{6}$
- ☑ $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{4}$



Sept questions très...indécentes

Le contexte

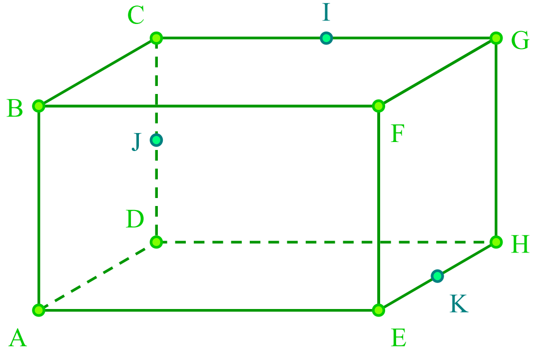
Un exercice rapide de géométrie dans l'espace et plus particulièrement sur la position relative des droites et des plans.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous réalisée en perspective cavalière, ABCDEFGH est un pavé droit tel que :

AE = 5cm AB = 3cm AD = 4cm

On appelle I le milieu du segment [CG], J celui de [CD] et K celui de [EH].

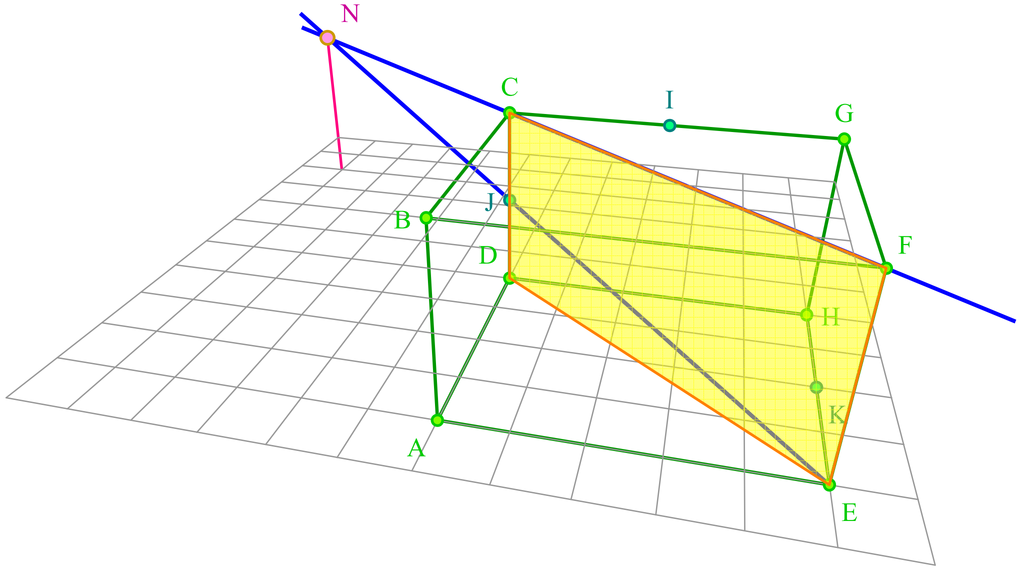


Pour chacune des sept questions, on entourera la réponse choisie parmi les trois propositions. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte deux points, chaque mauvaise réponse enlève 0,5. Une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

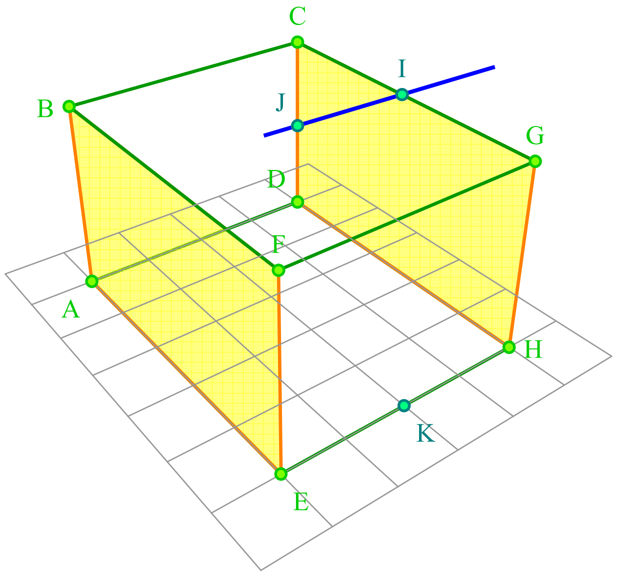
Question 1 : Les droites (EJ) et (FC) sont...	**sécantes**	**parallèles**	**non coplanaires**
Question 2 : La droite (IJ) et le plan (AEF) sont...	**sécants**	**parallèles distincts**	**Le plan contient la droite**
Question 3 : Les plans (BEF) et (IJH) sont...	**sécants**	**parallèles distincts**	**confondus**
Question 4 : Les droites (AI) et (BD) sont...	**sécantes**	**parallèles**	**non coplanaires**
Question 5 : Les plans (ABE) et (IJK) sont...	**sécants**	**parallèles distincts**	**confondus**
Question 6 : Les droites (IJ) et (AF) sont...	**sécantes**	**parallèles**	**non coplanaires**
Question 7 : La droite (GH) et le plan (IJK) sont...	**sécants**	**parallèles distincts**	**Le plan contient la droite**

Le corrigé

Question 1 : les droites (EJ) et (FC) sont sécantes dans le plan diagonale (FCDE) en un point N qui est situé derrière le cube.

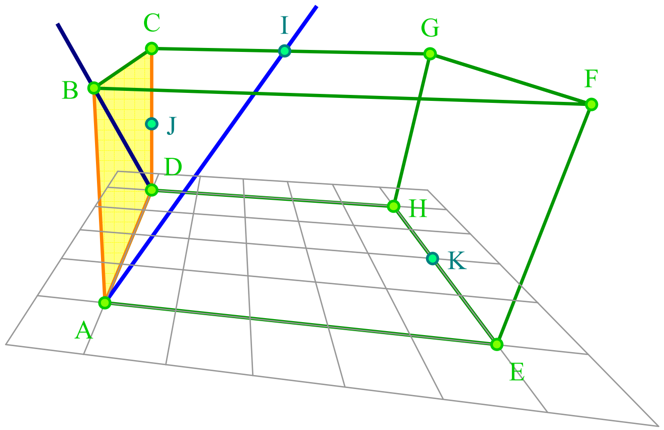


Question 2 : la droite (IJ) est située dans le plan du fond (CDHG) qui est parallèle au plan de devant (AEFB). Donc la droite (IJ) est parallèle au plan (AEF).

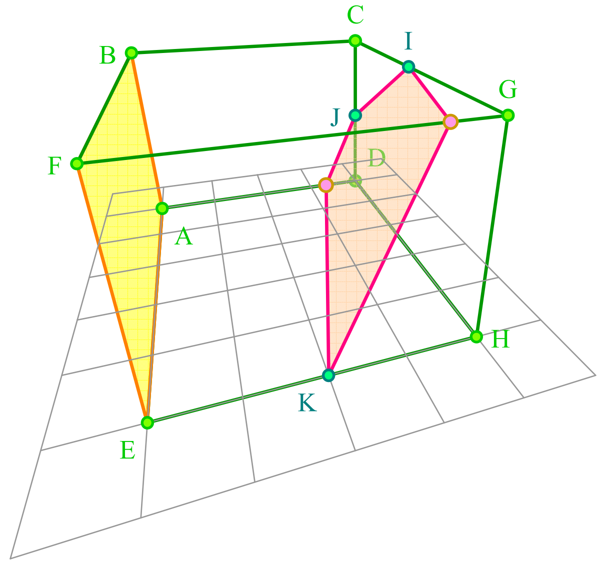


Question 3 : une autre appellation du plan (IJH) est (CDHG).
Le plan «de devant» (BEF) et le plan «du fond» (IJH) sont parallèles distincts.

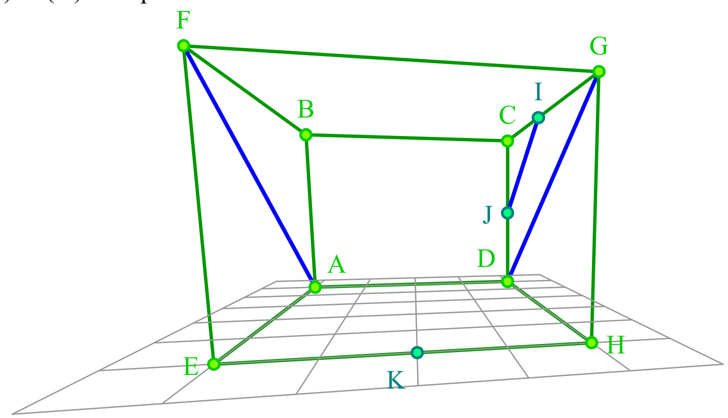
Question 4 : les trois points A, B et D appartiennent au plan «de gauche» (ABD).
Ce qui n'est pas le cas du point I.
Par conséquent, les droites (AI) et (BD) sont non coplanaires...comme les quatre points B, D, A et I.



Question 5 : les plans (ABE) et (IJK) sont sécants suivant une droite Δ qui se trouve bien en dessous de la face AEHD.

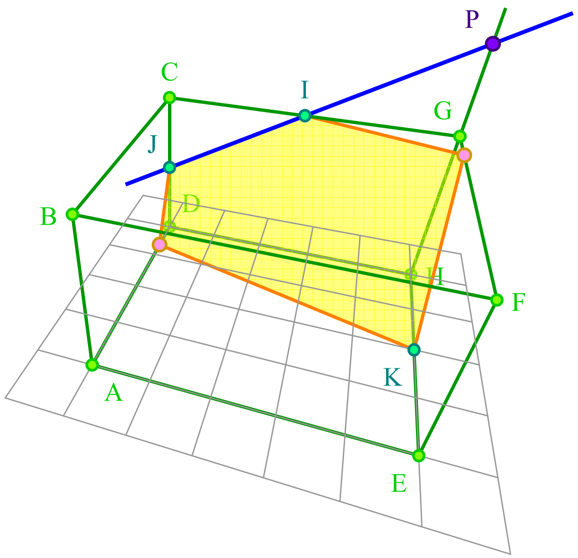


Question 6 : d'après le théorème des milieux appliqué dans le triangle CGD, la droite des milieux (IJ) est parallèle au côté (DG).
Comme la diagonale arrière (DG) est aussi parallèle à la diagonale avant (AF), alors les droites (AF) et (IJ) sont parallèles.



Question 7 : les droites (GH) et (IJ) sont sécantes dans le plan du fond (CDHG) en un point que nous nommerons P.
La droite (GH) et le plan (IJK) ayant en commun le point P, alors deux alternatives sont possibles :
- ➔ soit ils sont sécants
- ➔ soit la droite est incluse dans le plan.

Comme les points G et H n'appartiennent pas au plan (IJK), alors la droite (GH) n'est pas incluse dans le plan (IJK).
Par conséquent, le droite (GH) est sécante au plan (IJK) en P.



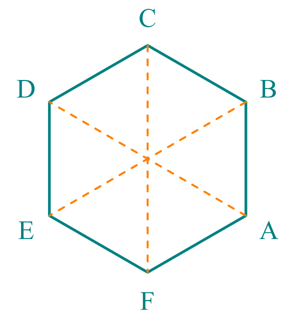
HEXAGONALE ALTITUDE

Le contexte

Un exercice classique de géométrique dans l'espace mais peu évident où il s'agit de construire l'intersection de deux plans en recherchant deux paires de leurs droites sécantes.

L'énoncé

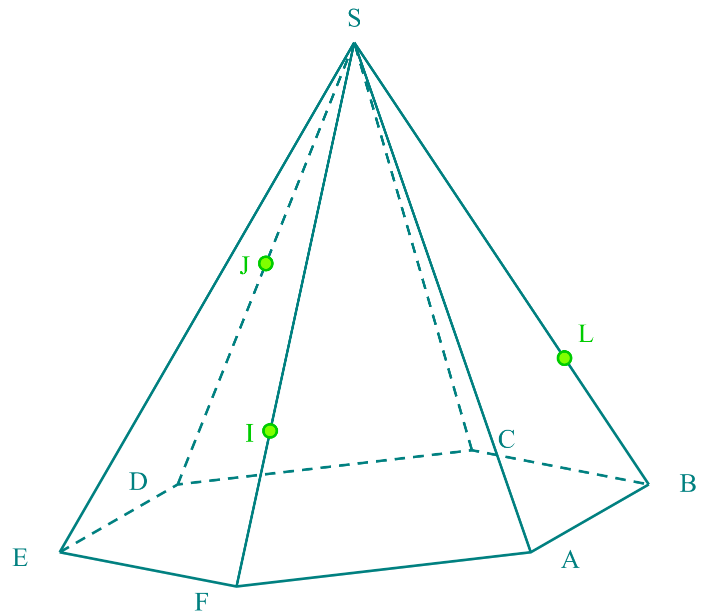
Sur la figure ci-dessous réalisée en perspective cavalière, SABCDEF est une pyramide de sommet S dont la base ABCDEF est un hexagone régulier représenté ci-contre en vue de dessus ➔



Les points I, J et L sont définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{SI} = \frac{5}{7}.\overrightarrow{SF} \qquad \overrightarrow{SJ} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{SD} \qquad \overrightarrow{BL} = \frac{2}{7}.\overrightarrow{BS}$$

Construire l'intersection des plans (IJL) et (ACE). On laissera apparents les traits de construction.



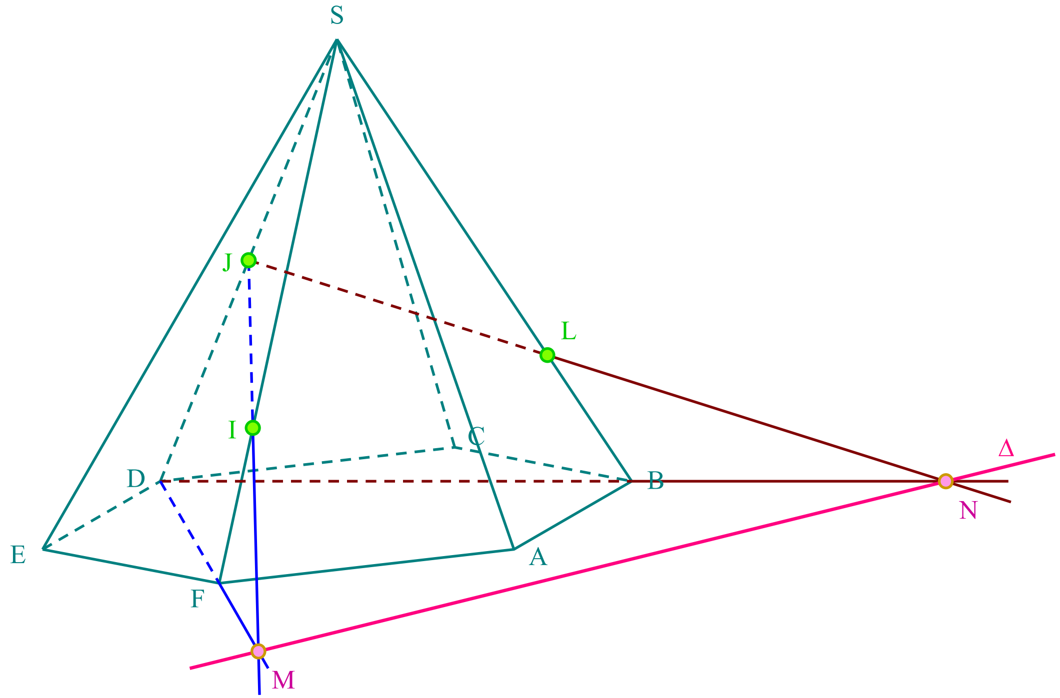
Le corrigé

Comme les plans (IJL) et (ACE) ne sont pas parallèles, alors leur intersection est une droite que nous appellerons Δ. Pour tracer cette dernière, nous allons en construire deux points.

Les droites (JI) et (DF) sont sécantes dans le plan (SDF) en un point que nous noterons M. Ce point M appartenant aux droites (JI) et (DF), il fait partie des plans (IJL) et (ACE). Donc il appartient à leur intersection Δ.

De même, les droites (JL) et (DB) sont sécantes dans le plan (SDB) en point que nous baptiserons N. De facto, ce point N appartient aux plans (IJL) et (ACE) donc à la droite Δ.

Conclusion : l'intersection Δ des plans (IJL) et (ACE) est la droite (MN).



Statistiques

Ce tas se tisse tique

Le contexte

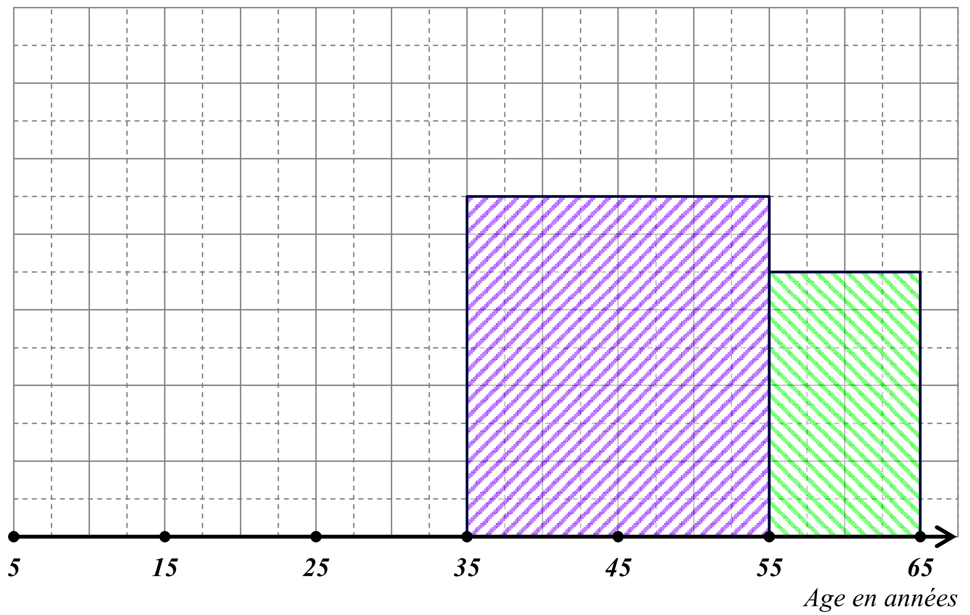
Un exercice classique de statistiques sur une série à caractère quantitatif continu

L'énoncé

La Blancoise du Sport, célèbre club omnisport de l'Indre compte 460 membres. Leur répartition par tranches d'âge est la suivante :

Tranche d'âges	Entre 5 et 15 ans	Entre 15 et 20 ans	Entre 20 et 35 ans	Entre 35 et 55 ans	Entre 55 et 65 ans
Classe	$[5;15[$	$[15;20[$	$[20;35[$	$[35;55[$	$[55;65[$
Effectif	96	44	120		

Les données du tableau ci-dessus sont complétées par l'histogramme partiellement construit ci-dessous où un centimètre carré représente 8 individus

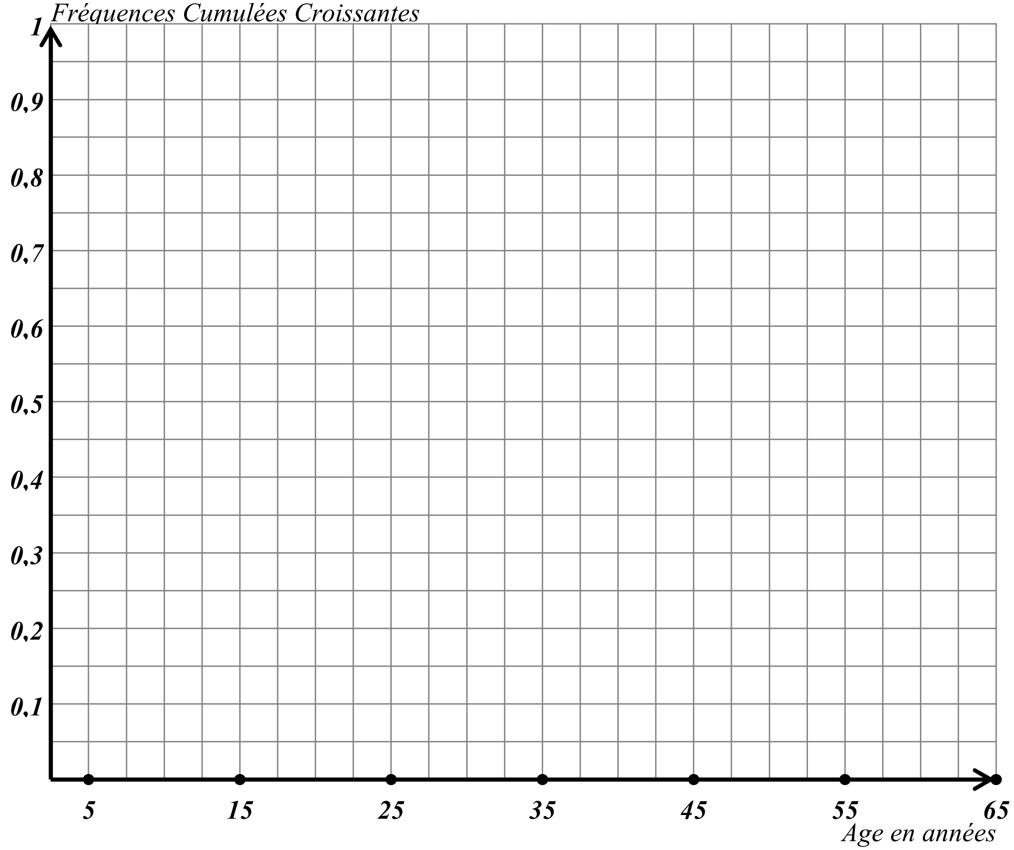


a) A partir de l'histogramme, déterminer les effectifs des classes $[35;55[$ et $[55;65[$. On expliquera son raisonnement.

b) Compléter l'histogramme en représentant les classes $[5;15[$, $[15;20[$ et $[20;35[$.

c) Déterminer l'age moyen des membres du club *La Blancoise du Sport*.

d) Sur le graphique ci-dessous, tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes. On indiquera sur la copie le détail des étapes permettant sa construction.



En utilisant le graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer l'age médian (la médiane) des membres du club.
2. Déterminer la part des membres du Club qui ont entre 25 et 40 ans.

Le corrigé

a) Dans un histogramme, c'est l'aire qui représente (est proportionnel à) l'effectif.

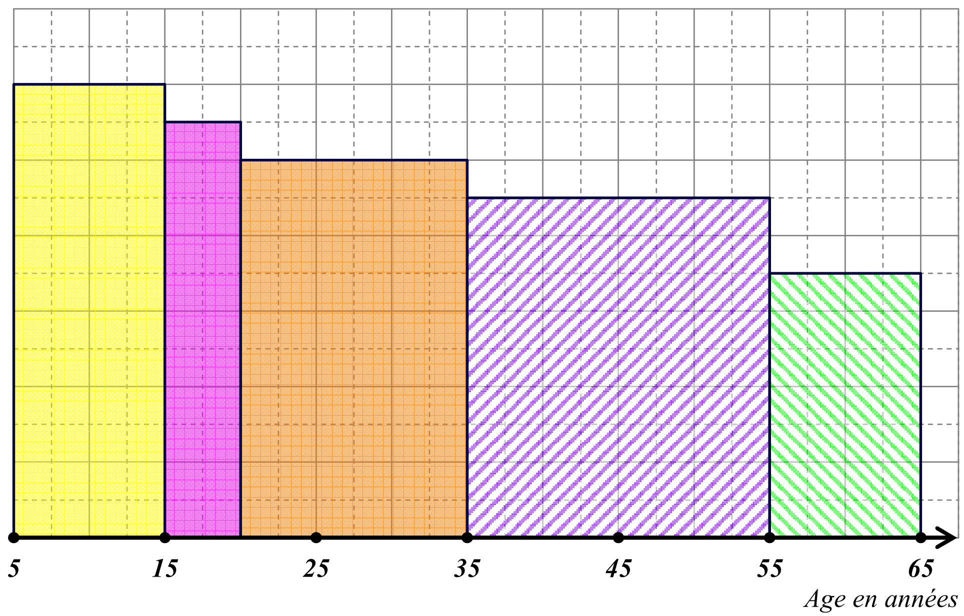
La classe $[35;55[$ est représentée par un rectangle de $4\times 4,5=18$ centimètres carrés soit $18\times 8=144$ individus.

La classe $[55;65[$ est représentée par un rectangle de $2\times 3,5=7$ centimètres carrés soit $7\times 8=56$ individus.

b) Les dimensions des rectangles représentant les effectifs des trois premières classes sont les suivantes :

Classe	Effectif	Dimensions d'un rectangle en centimètres (carrés) Aire	Base (de la classe)	Hauteur
$[5;15[$	96	$12=96\div 8$	2	$6=12\div 2$
$[15;20[$	44	$5,5=44\div 8$	1	$5,5=5,5\div 1$
$[20;35[$	120	$15=120\div 8$	3	$5=15\div 3$

L'histogramme complété est le suivant :



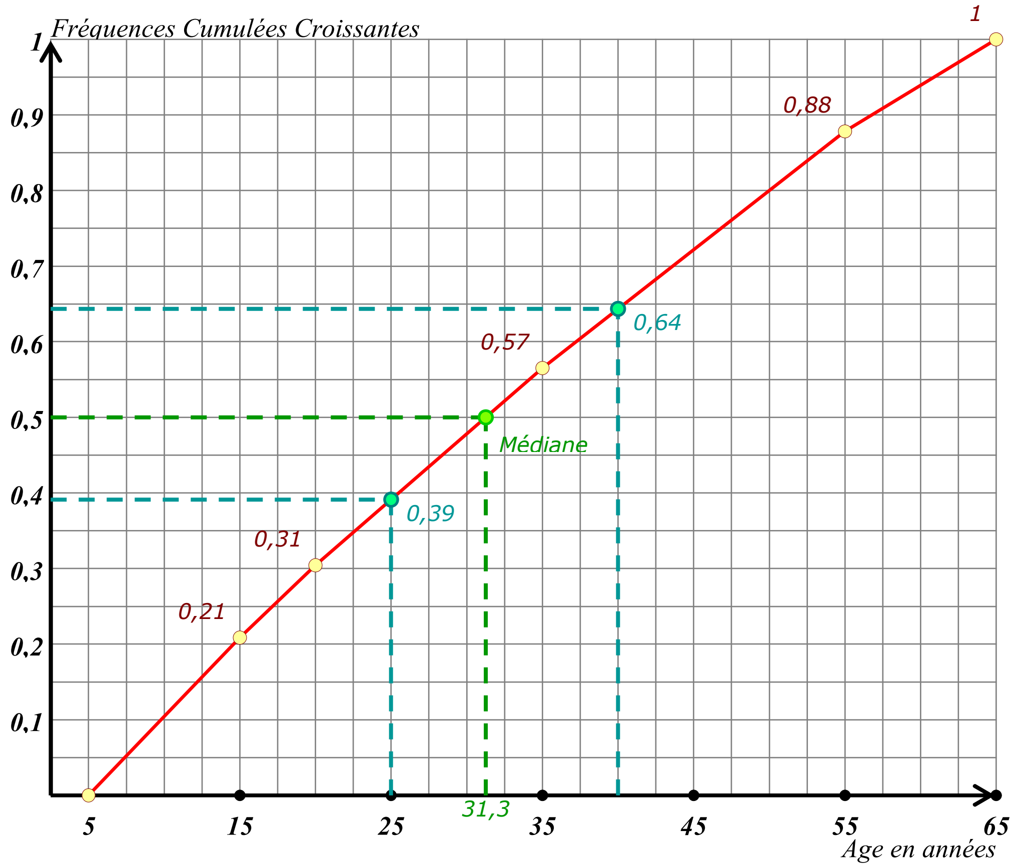
c) La série statistique étudiée est à caractère quantitatif continu. Par conséquent, l'age moyen des 460 membres du club de sport est donné par la formule :

$$\text{Moyenne}=\frac{\overbrace{96\times 10+44\times 17,5+120\times 27,5+144\times 45+56\times 60}^{\text{Somme des produits effectif}\times\text{milieu de la plage considérée}}}{460}=\frac{14870}{460}\approx 32,3\text{ ans}$$

d) Pour cumuler les fréquences, encore faut-il d'abord les calculer !

Classe	$[5;15[$	$[15;20[$	$[20;35[$	$[35;55[$	$[55;65[$
Fréquence	0,21	0,10	0,26	0,31	0,12
Fréquence Cumulée croissante	0,21	0,31	0,57	0,88	1

Puis, on reporte les points obtenus sur le graphique ci-dessous



D'après le graphique précédent :

1. L'age médian, c'est-à-dire l'age pour lequel la fréquence cumulée croissante est égale à 0,5 est de 31,3 ans.
2. En se basant sur la différence des fréquences cumulées croissantes entre 25 et 40 ans, nous pouvons conclure que la proportion de membres du club ayant entre 25 et 40 ans est d'environ $25\% = 0,25 = 0,64 - 039$.

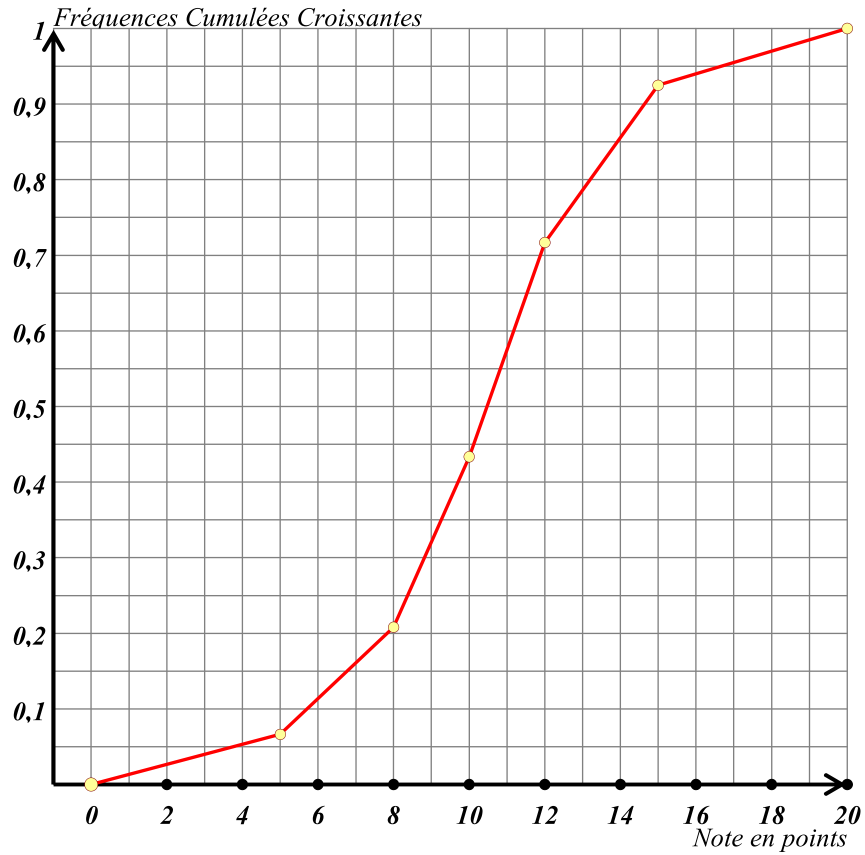
Un polygone pour relever les notes

Le contexte

Un exercice rapide de lecture d'un polygone des fréquences cumulées croissantes.

L'énoncé

Les résultats du dernier devoir commun de mathématiques ont fait l'objet d'un regroupement en classe. A partir de celles-ci, on a établi le polygone des fréquences cumulées croissantes suivant :



Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Une bonne réponse rapporte un point alors qu'une mauvaise en enlève 0,5. Une absence de réponse n'enlève, ni ne rajoute aucun point. Aucune justification n'est demandée. On entourera la réponse choisie.

a. Plus d'un quart des élèves a une note inférieure ou égale à 8.	**VRAI**	**FAUX**
b. La médiane de cette série statistique est comprise entre 10 et 11.	**VRAI**	**FAUX**
c. Moins de 10% des élèves ont une note supérieure à 15.	**VRAI**	**FAUX**
d. La part des élèves ayant obtenu une note comprise entre 8 et 12 est inférieure à 40%.	**VRAI**	**FAUX**

Le corrigé

a. Cette affirmation est fausse : environ 21% des élèves ont obtenu une note inférieure à 8.
b. Cette affirmation est vraie : l'antécédent d'une FCC égale à 0,5 est à peu près de 10,5.
c. Cette affirmation est vraie : plus de 90% des élèves ont obtenu une note inférieur à 15.
d. Cette affirmation est fausse : la part des élèves entre 8 et 12 est de $0,51 = 0,72 - 0,21$.

Les vecteurs

UNE HISTOIRE D'ÉVÊQUES...TEURS

Le contexte

Un exercice basique sur les vecteurs et le calcul vectoriel. Ce qu'il faut savoir faire !

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, ABCD est un trapèze où les côtés [AD] et [BC] sont parallèles.

a) Compléter sur l'énoncé les égalités suivantes :

$\overrightarrow{AD} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{BC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CB} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{AD}$

Pourquoi ne peut-on pas exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{DC}$?

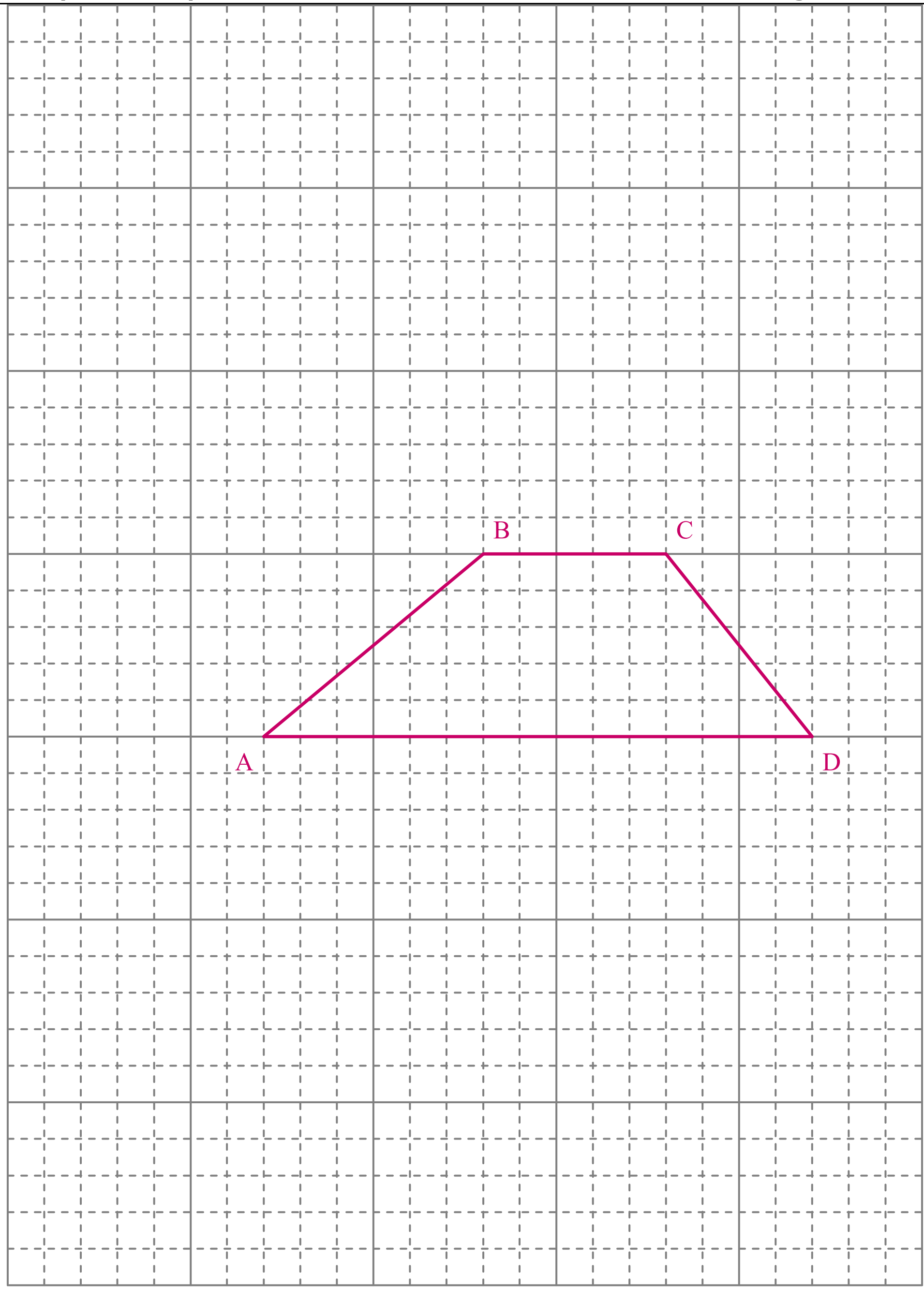
....

b) Les points J, L et M sont définis par les relations vectorielles :

$\overrightarrow{BJ} = 2.\overrightarrow{AB} - 3.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ $\qquad$ $3.\overrightarrow{AL} + 2.\overrightarrow{DL} = \vec{o}$ $\qquad$ $5.\overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{MD}$

A partir des égalités ci-dessus :

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CD}$, puis construire le point J.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AL}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AD}$, puis placer le point L.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$, puis construire le point M.



Le corrigé

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont mêmes directions et mêmes sens mais la norme du premier est trois fois plus grande que celle du second. Ainsi : $\overrightarrow{AD} = 3\times\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{3}.\overrightarrow{AD}$.

➲ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ n'étant pas colinéaires, ils ne sont pas proportionnels et on ne peut pas exprimer l'un en fonction de l'autre.

b.1) Nous cherchons une relation vectorielle du type $\overrightarrow{BJ} = \ldots\times\overrightarrow{CB} + \ldots\times\overrightarrow{CD}$. Nous avons :

$$\overrightarrow{BJ} = 2.\overrightarrow{AB} - 3.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2.\overrightarrow{AB} + \underbrace{3}_{3=2+1}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \underbrace{2.\overrightarrow{CA} + 2.\overrightarrow{AB}}_{\text{Chasles}} + \underbrace{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}}_{\text{Chasles}} = 2.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$$

On fait absorber le signe moins.

A partir du point B, on se déplace de deux vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et d'un vecteur $\overrightarrow{CD}$ et on aboutit en A. Le point J est confondu avec le point A.

b.2) Pour placer L, nous devons obtenir une relation du type $\overrightarrow{AL} = \ldots\times\overrightarrow{AD}$. Nous savons :

$$3.\overrightarrow{AL} + 2.\overrightarrow{DL} = \vec{o} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AL} + \underbrace{2.\overrightarrow{DA} + 2.\overrightarrow{AL}}_{=2.\overrightarrow{DL}} = \vec{o} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{AL} = 2.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AL} = \frac{2}{5}.\overrightarrow{AD}$$

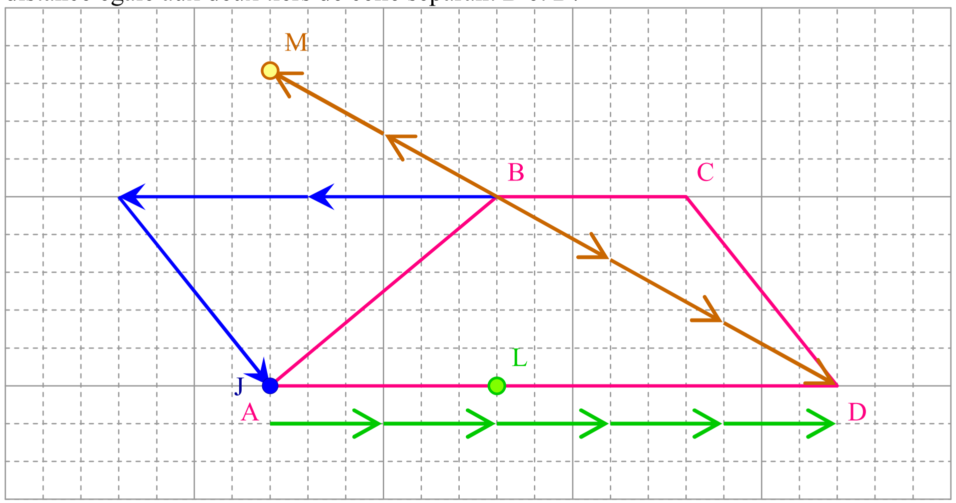
Le point L se trouve aux deux cinquièmes du segment [AD] à partir de A.

b.3) Nous recherchons une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{BM} = \ldots\times\overrightarrow{BD}$. Nous savons :

$$5.\overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{MB} = \underbrace{2.\overrightarrow{MB} + 2.\overrightarrow{BD}}_{=2.\overrightarrow{MD}} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{MB} - 2.\overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{BD}$$

$$\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow -3.\overrightarrow{BM} = 2.\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3}.\overrightarrow{BD}$$

Le point M se trouve à l'extérieur du segment [BD], sur la droite (BD) au-delà de B, à une distance égale aux deux tiers de celle séparant B et D.



La droite sifflera trois fois

Le contexte

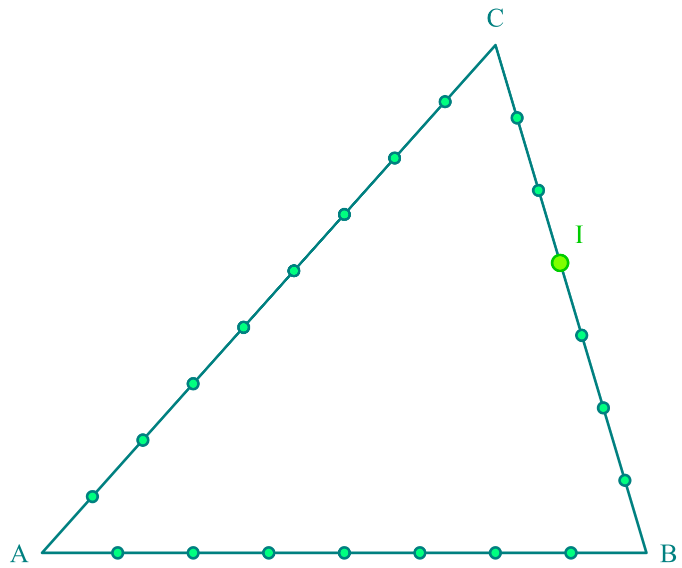
Dans cet exerice, il s'agit de prouver que trois points sont alignés en utilisant le calcul vectoriel. Très formateur sur le sujet.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC a pour dimensions :

AB = 8cm AC = 9cm BC = 7cm

Les trois côtés ont été gradués tous les centimètres. Le point I appartient au côté [BC].



a) Sur la figure ci-dessus, placer le point G défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}.\overrightarrow{AC}$$

On laissera apparents les traits de construction.

b) A partir de la figure, exprimer le vecteur $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

Puis, démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{7}.\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}.\overrightarrow{AC}$.

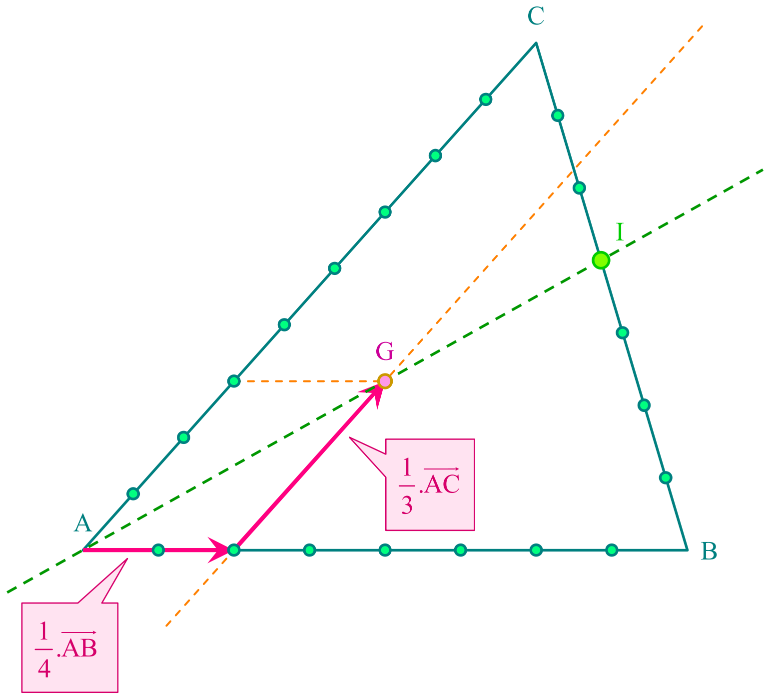
c) Démontrer que les points A, G et I sont alignés.

Le corrigé

a) Pour construire le point G, on se déplace d'abord de deux centimètres depuis A en direction du point B, puis parallèlement à la droite (AC) de trois centimètres dans le sens de A vers C.

b) Le point I se situe aux quatre septièmes du segment [BC]. Par conséquent :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{4}{7}.\overrightarrow{BC}$$



A présent, exprimons le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\frac{4}{7}.\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}.\overrightarrow{AC}}_{\text{Soit } 4/7.\overrightarrow{BC}} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{7}.\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}.\overrightarrow{AC} = \frac{3}{7}.\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}.\overrightarrow{AC}$$

c) Comparons les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ selon leurs composantes en $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Nous recherchons une relation de proportionnalité entre ces deux vecteurs.

	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AG}$	$1/4$	$1/3$
	$\downarrow$ $\frac{1}{4} \times \frac{12}{7} = \frac{3 \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times 7} = \frac{3}{7}$ $\downarrow$	$\downarrow$ $\frac{1}{3} \times \frac{12}{7} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 7} = \frac{3}{7}$ $\downarrow$
$\overrightarrow{AI}$	$3/7$	$4/7$

On déduit du tableau de proportionnalité ci-contre que :

$$\overrightarrow{AG} \times \frac{12}{7} = \overrightarrow{AI}$$

<u>Conclusion :</u> comme les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires, alors les point A, G et I sont alignés.

SUR UNE SEULE LIGNE

Le contexte

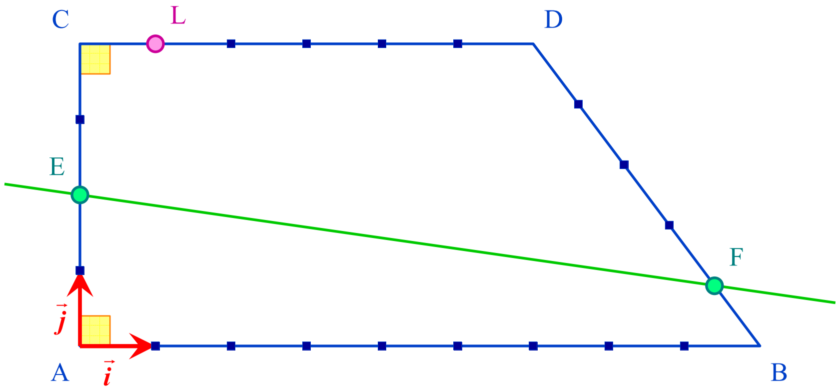
Un autre exercice où il s'agit de prouver que trois points sont alignés en utilisant le calcul vectoriel. Décidément un domaine très important...pour moi !

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABDC est un trapèze droit (en A et C) tel que :

$AB = 9\text{cm}$ | $BD = 5\text{cm}$ | $DC = 5\text{cm}$ | $AC = 4\text{cm}$

Les quatre côtés du trapèze ont été gradués tous les centimètres.



On appelle E le milieu du côté [AC].
F est un point se trouvant au cinquième du segment [BD] à partir de B.
L est un point se trouvant au sixième du segment [CD] à partir de C.
Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs de norme (de longueur) un centimètre tels que :

$$\overrightarrow{AB} = 9.\vec{i} \qquad \overrightarrow{AC} = 4.\vec{j}$$

Les points L et G sont définies par les relations vectorielles :

$$2.\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FG} = \vec{0} \qquad 5.\overrightarrow{AK} = 4.\overrightarrow{KB}$$

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{EF}$. Placer le point G.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Placer le point K.

c) Quelle est la nature du quadrilatère BDLK ? On justifiera sa réponse.

d) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KL}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

e) Démontrer la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BF} = -\frac{3}{5}.\vec{i} + \frac{4}{5}.\vec{j}$$

Puis, exprimer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

f) Démontrer la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{KG} = -\frac{6}{5}.\vec{i} + \frac{8}{5}.\vec{j}$$

g) Prouver que les points K, G et L sont alignés.

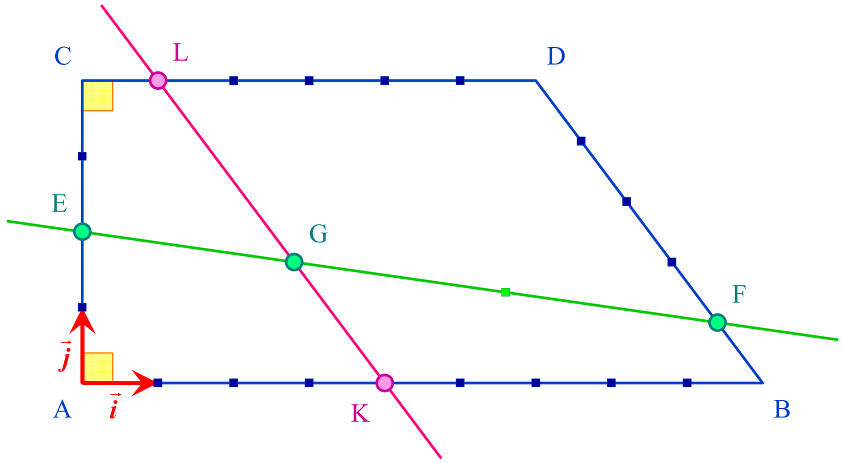
Le corrigé

a) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$. Nous savons à propos du point G :

$$2.\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FG} = \vec{0} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{EG} + \underbrace{\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG}}_{=\overrightarrow{FG}} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{EF}$$

<u>Conclusion :</u> le point G se trouve au tiers du segment [EF] à partir de E.

La figure complétée est la suivante :



b) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Nous savons à propos du point K :

$$5.\overrightarrow{AK}=4.\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{AK}=\underbrace{4.\overrightarrow{KA}+4.\overrightarrow{AB}}_{=4.\overrightarrow{KB}} \Leftrightarrow \underbrace{5.\overrightarrow{AK}+4.\overrightarrow{AK}}_{=9.\overrightarrow{AK}}=4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{4}{9}.\overrightarrow{AB}$$

<u>Conclusion :</u> le point K se trouve aux quatre neuvièmes du segment [AB] à partir de B.

c) En nous appuyant sur la figure, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\overrightarrow{LD}=\frac{5}{6}.\overrightarrow{CD}=\frac{5}{\cancel{6}}\times\cancel{6}.\vec{i}=5.\vec{i} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{KB}=\frac{5}{9}.\overrightarrow{AB}=\frac{5}{\cancel{9}}\times\cancel{9}.\vec{i}=5.\vec{i}}_{\text{Donc les vecteurs } \overrightarrow{LD} \text{ et } \overrightarrow{KB} \text{ sont égaux}}$$

<u>Conclusion :</u> comme $\overrightarrow{LD}=\overrightarrow{KB}$, alors le quadrilatère BDLK est un parallélogramme.

d) Partons à l'aventure de K vers L le long du trapèze ABDC.

$$\overrightarrow{KL}=\underbrace{\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CL}}_{\text{soit } \overrightarrow{KL} \text{ par Chasles}}=-4.\vec{i}+4.\vec{j}+\vec{i}=-3.\vec{i}+4.\vec{j}$$

Pour aller de K vers L, on passe par A et C...

e) Le point F étant situé au cinquième du segment [BD] à partir de B, il vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{5}.\overrightarrow{BD}=\underbrace{\frac{1}{5}.\overrightarrow{BA}+\frac{1}{5}.\overrightarrow{AC}+\frac{1}{5}.\overrightarrow{CD}}_{\text{Un cinquième de } \overrightarrow{BD}}=\frac{1}{5}\times\left(-9.\vec{i}\right)+\frac{1}{5}\times4.\vec{j}+\frac{1}{5}\times6.\vec{i}$$

$$=-\frac{9}{5}.\vec{i}+\frac{4}{5}.\vec{j}+\frac{6}{5}.\vec{i}=-\frac{3}{5}.\vec{i}+\frac{4}{5}.\vec{j}$$

Pour aller de B vers D, on passe par A et C...

Une autre voie : en s'appuyant sur le parallélogramme BDLK.
Comme BDLK est un parallélogramme, alors les vecteur $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont égaux. Ainsi :

$$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{5}.\overrightarrow{BD}=\frac{1}{5}.\overrightarrow{KL}=\frac{1}{5}\times\left(-3.\vec{i}+4.\vec{j}\right)=-\frac{3}{5}.\vec{i}+\frac{4}{5}.\vec{j}$$

➲ Repartons à l'aventure le long de notre trapèze !

$$\overrightarrow{EF}=\underbrace{\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}}_{=\overrightarrow{EF}\text{ d'après Chasles}}=-2.\vec{j}+9.\vec{i}+\overrightarrow{BF}$$

Pour aller de E vers F, on passe par A et B...

$$=-2.\vec{j}+9.\vec{i}-\frac{3}{5}.\vec{i}+\frac{4}{5}.\vec{j}=\left(\frac{45}{5}-\frac{3}{5}\right).\vec{i}+\left(-\frac{10}{5}+\frac{4}{5}\right).\vec{j}=\overbrace{\frac{42}{5}.\vec{i}-\frac{6}{5}.\vec{j}}^{8,4.\vec{i}-1,2.\vec{j}}$$

f) Encore une fois, c'est le long de notre trapèze que nous allons nous déplacer pour établir la relation vectorielle demandée entre $\overrightarrow{KG}$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

$$\overrightarrow{KG}=\underbrace{\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}}_{=\overrightarrow{KG}}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}.\overrightarrow{EF}$$

On va de K vers G en passant par A et E.

$$=-4.\vec{i}+2.\vec{j}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{42}{5}.\vec{i}-\frac{6}{5}.\vec{j}\right)=-4.\vec{i}+2.\vec{j}+\frac{14\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times5}.\vec{i}-\frac{2\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times5}.\vec{j}$$

$$=-4.\vec{i}+\frac{14}{5}.\vec{i}+2.\vec{j}-\frac{2}{5}.\vec{j}=\left(-\frac{20}{5}+\frac{14}{5}\right).\vec{i}+\left(\frac{10}{5}-\frac{2}{5}\right)\vec{j}=-\frac{6}{5}.\vec{i}+\frac{8}{5}.\vec{j}$$

g) Comparons les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KG}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

	$\vec{i}$	$\vec{j}$
$\overrightarrow{KL}$	-3	4
	$\downarrow$ $-3\times\frac{2}{5}=\frac{-6}{5}$ $\downarrow$	$\downarrow$ $4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$ $\downarrow$
$\overrightarrow{BK}$	$-6/5$	$8/5$

On déduit du tableau de proportionnalité ci-contre que :

$$\overrightarrow{KL}\times\frac{2}{5}=\overrightarrow{KG}$$

Conclusion : comme les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KG}$ sont colinéaires, alors les points K, L et G sont alignés.

LA DROITE SIFFLERA TROIS FOIS...ENCORE

Le contexte

Un nouvel exercice sur un alignement à établir via une colinéarité.

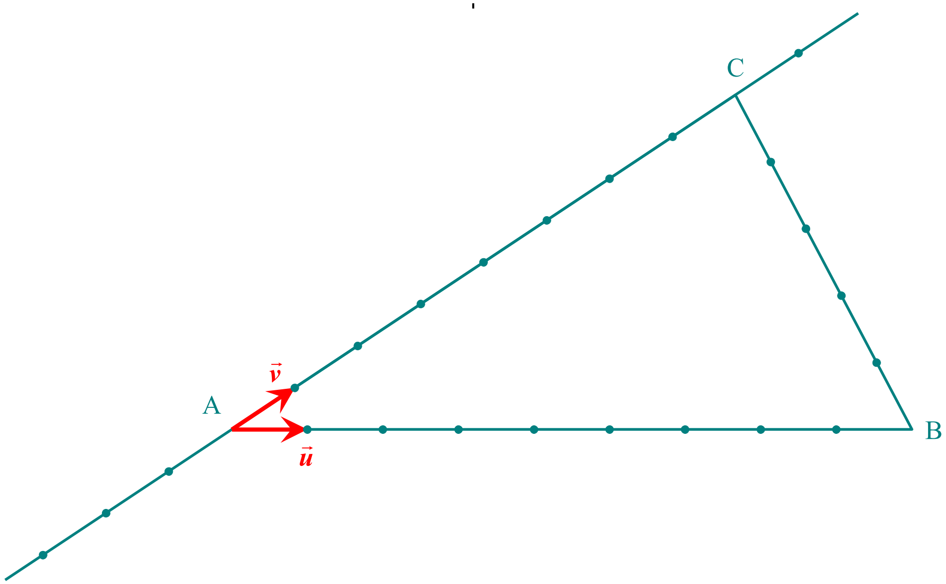
L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC a pour dimensions :

AB = 9cm AC = 8cm BC = 5cm

Les trois côtés ont été gradués tous les centimètres.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de norme un centimètre et sont tels que :

$$\overrightarrow{AB} = 9.\vec{u} \qquad \overrightarrow{AC} = 8.\vec{v}$$



a) Placer sur la figure les points J et K qui sont définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{4}{5}.\overrightarrow{CB} \qquad \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{4}.\overrightarrow{AC}$$

On appelle I le point défini par la relation vectorielle :

$$5.\overrightarrow{IA} + 4.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis placer le point I.

c) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{KI}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d) Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{16}{5}.\vec{u} + \frac{8}{5}.\vec{v}$

e) En déduire que les points I, J et K sont alignés.

Le corrigé

a) Compte tenu des relations vectorielles :

- Le point J est situé aux quatre cinquièmes du segment [CB] à partir de C. Donc à 4 centimètres de C et à 1 de B.
- La distance AK mesure le quart de la longueur AC. Donc le point K est situé sur la droite (AC) à $\frac{1}{4} \times 8 = 2$ centimètres du point A à l'opposé de C.

b) Nous recherchons une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{AI} = \ldots \times \overrightarrow{AB}$. Le point I est défini par la relation vectorielle :

$$5.\overrightarrow{IA} + 4.\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{IA} + \underbrace{4.\overrightarrow{IA} + 4.\overrightarrow{AB}}_{4.\overrightarrow{IB}\text{ par Chasles !}} = \vec{0} \Leftrightarrow 9.\overrightarrow{IA} = 4.\overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{9.\overrightarrow{AI} = 4.\overrightarrow{AB}}_{\text{Leurs opposés sont aussi égaux !}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{4}{9}.\overrightarrow{AB}$$

Le segment [AB] mesurant 9 centimètres, le point I se trouve à 4 centimètres de A sur ce premier.

c) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{KI}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En utilisant la figure, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{KI} = \underbrace{\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AI}}_{\overrightarrow{KI}\text{ par Chasles !}} = 2.\vec{v} + 4.\vec{u} = 4.\vec{u} + 2.\vec{v}$$

d) Le but de cette question est d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En nous référant à la figure, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}}_{\overrightarrow{IJ}\text{ par Chasles !}} = 5.\vec{u} + \frac{1}{5}.\overrightarrow{BC}$$

Si nous parvenons à savoir combien le vecteur $\overrightarrow{BC}$ vaut de vecteurs $\vec{u}$ et de vecteurs $\vec{v}$, l'affaire sera pliée.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -9.\vec{u} + 8.\vec{v}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= 5.\vec{u} + \frac{1}{5}.\overrightarrow{BC} \\ &= 5.\vec{u} + \frac{1}{5} \times \left(-9.\vec{u} + 8.\vec{v}\right) = 5.\vec{u} - \frac{9}{5}.\vec{u} + \frac{8}{5}.\vec{v} = \frac{25}{5}.\vec{u} - \frac{9}{5}.\vec{u} + \frac{8}{5}.\vec{v} = \boxed{\frac{16}{5}.\vec{u} + \frac{8}{5}.\vec{v}}\end{aligned}$$

e) Comparons les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{IJ}$ suivant ce qu'ils valent en $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Nous recherchons une relation de proportionnalité entre ces deux premiers.

	$\overrightarrow{KI}$	***Le coefficient de colinéarité***	$\overrightarrow{IJ}$
$\vec{u}$	4	$4 \times \boxed{\frac{4}{5}} = \frac{4 \times 4}{5} = \frac{16}{5}$	$\frac{16}{5}$
$\vec{v}$	2	$2 \times \boxed{\frac{4}{5}} = \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$	$\frac{8}{5}$

Nous déduisons du tableau de proportionnalité ci-contre la relation vectorielle :

$$\boxed{\frac{4}{5} \times \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{IJ}}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.

<u>Conclusion :</u> comme les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires, alors les points I, J et K sont alignés...comme toujours.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :