Quelques mots d'introduction...

Au fil des années, les sections technologiques et professionnelles sont devenues des filières sélectives. J'allais presque écrire d'excellence car pour certaines d'entre elles, ce terme ne serait pas galvaudé. A l'inverse, les secondes de détermination de l'enseignement général sont devenues des fourre-tout dans lesquels se côtoient des élèves normaux et des égarés qu'on n'a jamais voulu faire redoubler ou orienter ailleurs.

Le redoublement, parlons-en ! La grande idée actuellement est que le redoublement ne sert à rien parce que c'est trop souvent un échec. C'est peu étonnant car on ne propose le redoublement à un élève qu'en dernier recours, que lorsque les lacunes sont déjà trop importantes. Et ce n'est pas en neuf mois que l'on peut remédier à des années d'abandon et d'aveuglement.

C'est ainsi que vous arrivent en seconde des élèves certes sympathiques mais qui savent à peine rédiger et compter correctement. En amont, on a ouvert les vannes à fond puisque le redoublement ne sert à rien. Et si vous osez affirmer que ces élèves n'ont pas leur place en seconde alors malheur à vous ! Leur échec est dû à votre incompétence. Alors pour avoir la paix, vous vous taisez et rentrez dans leur combine.

Le terme de cette comédie des lâches est soit une réorientation en fin de seconde (après un éventuel redoublement), soit un bac raté deux ans plus tard. Mais que de temps perdu et de frustrations accumulées.

Le présent document regroupe les neuf devoirs surveillés donnés par mes soins durant la saison 2005-2006 à une classe de seconde contenant beaucoup de ces élèves égarés. Par rapport à ceux de l'année précédente, mes devoirs sont nettement moins ambitieux.

Comme bien souvent avec moi, ces devoirs requièrent souvent plus que le temps qui était alloué. En contrepartie, à chaque fois, plus de vingt points étaient distribués.

Jérôme ONILLON

Au sommaire :

Dans la collection Inquiétantes confessions,
la Taverne de l'Irlandais vous présente

Une seconde d'illusion

L'intégralité des devoirs de maths de la saison 2005-2006

Tous les exercices de ce recueil ont été conçus, rédigés et corrigés par Jérôme ONILLON, professeur de maths de plus en plus désagrégé.

100%

La taverne de l'Irlandais
http://www.tanopah.com

Edition du mercredi 21 juin 2006
Contre tous les ennemis . . .

Devoir Surveillé No.1

Le contexte

Ce premier devoir surveillé d'une heure eut lieu à la fin du mois de septembre 2005. Il portait sur mes grands classiques de début d'année que sont la résolution d'inéquations du premier degré, les fonctions sous leur aspect graphique et....l'usage de la forme canonique pour résoudre des équations du second degré. Il est certain que cette technique est aux limites du programme. Mais bon, moi aussi !
Ca parlait aussi de valeur absolue...dont je doute qu'ils aient compris le concept.
Les calculatrices étaient heureusement autorisées.

L'énoncé

Première partie : des inéquations au premier degré...

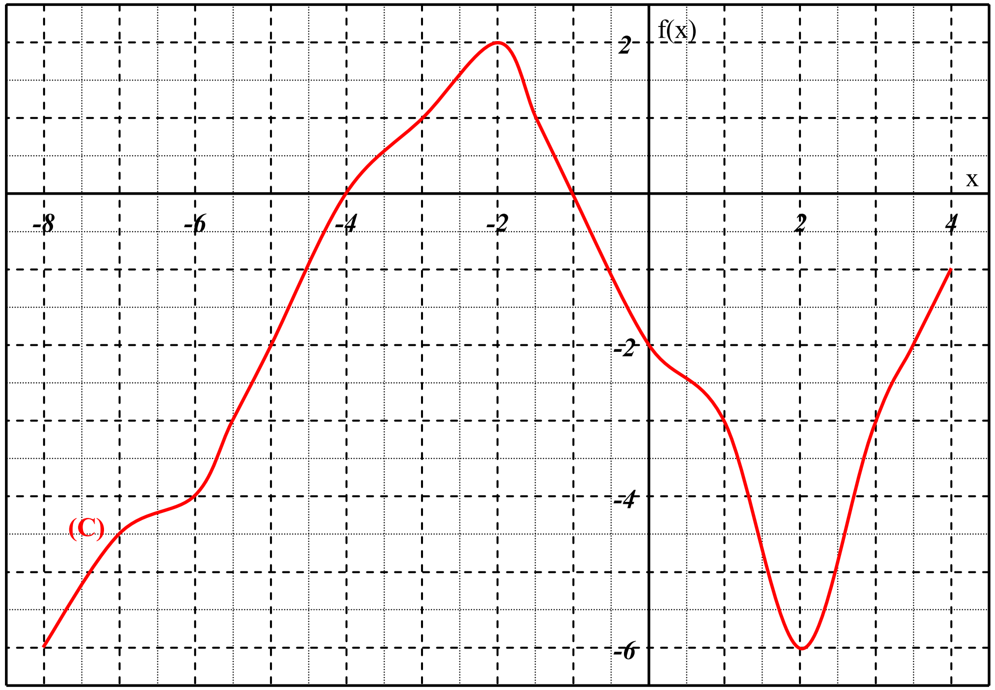
Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes. On conclura chaque résolution en donnant l'ensemble des solutions.

$$7.x-4.(5-3.x)\geq 2.(4.x+3)-8 \qquad \frac{2.x+1}{3}-1<x-\frac{4.x+1}{7}$$

$$|7-2.x|<5$$

Seconde partie : définie par sa courbe

La courbe (C) représentant la fonction f est la suivante :
A partir du graphique ci-contre, répondre aux questions suivantes.



a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Déterminer les images par la fonction f de -7 ; 1 ; 3 et 5.

c) Déterminer le ou les antécédents de -6 par la fonction f.
Déterminer le ou les antécédents de -2 par la fonction f.
Déterminer le ou les antécédents de 3 par la fonction f.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

e) Déterminer les minimum et maximum de la fonction f sur son ensemble de définition. On précisera où ils sont atteints.

f) A partir du graphique, résoudre les équations et inéquations suivantes. On indiquera pour chacune d'entre elles quel est l'ensemble des solutions.

$$f(x)=-3 \qquad f(x)\geq 1$$

$$f(x)<0 \qquad f(x)>-6$$

Dernière partie : des équations au second degré...

Résoudre dans ℝ les équations suivantes. On conclura chaque résolution en donnant l'ensemble des solutions :

$$(2.x+5)^2-(3.x-4)^2=0 \qquad (4.x+6).(7.x-1)-(2.x+3)^2=0$$

$$4.x^2+16.x-84=0$$

Le corrigé

Première partie : des inéquations au premier degré...

a) Résolvons dans ℝ l'inéquation $7.x-4.(5-3.x)\geq 2.(4.x+3)-8$.

$$7.x-4.(5-3.x)\geq 2.(4.x+3)-8 \Leftrightarrow \underbrace{7.x-20+12.x}_{\text{On développe...}}\geq \underbrace{8.x+6-8}_{\text{...chaque membre.}}$$

$$\Leftrightarrow 19.x-20\geq 8.x-2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{19.x-20+20\geq 8.x-2+20}_{\text{On ajoute 20 aux deux membres}} \Leftrightarrow 19.x\geq 8.x+18$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{19.x-8.x\geq 8.x+18-8.x}_{\text{On ajoute } -8.x \text{ aux deux membres}} \Leftrightarrow 11.x\geq 18$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x\geq\frac{18}{11}}_{\text{On divise les deux membres par 11}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $\left[\frac{18}{11};+\infty\right[$.

b) Résolvons dans ℝ l'inéquation $\frac{2.x+1}{3}-1<x-\frac{4.x+1}{7}$.

$$\frac{2.x+1}{3}-1<x-\frac{4.x+1}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{3}.(2.x+1)-1<x-\frac{1}{7}.(4.x+1)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{21\times\left[\frac{1}{3}.(2.x+1)-1\right]<\left[x-\frac{1}{7}.(4.x+1)\right]\times 21}_{\text{On multiplie les deux membres par 21 pour éliminer les dénominateurs}}$$

$$\Leftrightarrow 21\times\frac{1}{3}.(2.x+1)-21\times 1<21\times x-21\times\frac{1}{7}.(4.x+1)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{7.(2.x+1)-21<21.x-3.(4.x+1)}_{\text{Nous voici avec une inéquation beaucoup plus sympa !}}$$

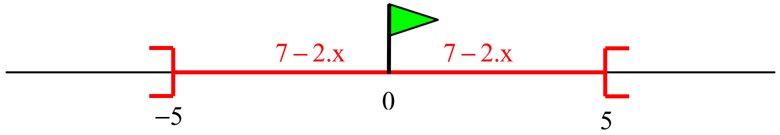
$$\Leftrightarrow \underbrace{14.x-14+14<9.x-3+14}_{\text{On ajoute 14 aux deux membres}} \Leftrightarrow 14.x<9.x+11$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{14.x-9.x<9.x+11-9.x}_{\text{On ajoute } -9.x \text{ aux deux membres}} \Leftrightarrow 5.x<11 \Leftrightarrow \underbrace{x<\frac{11}{5}}_{\text{On divise par 5}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de cette inéquation est $]-\infty;2,2[$

c) Résolvons dans ℝ l'inéquation $|7-2.x|<5 \Leftrightarrow d(0;7-2.x)<5$.

La distance entre 0 et un nombre est strictement inférieure à 5 lorsque celui-ci est compris strictement entre -5 et 5.



Autrement écrit :

$$-5<7-2.x<5 \Leftrightarrow \underbrace{-12<-2.x<-2}_{\text{On a ajouté } -7 \text{ aux trois membres}} \Leftrightarrow \underbrace{6>x>1}_{\text{On a divisé les trois membres par } -2\text{. L'ordre change.}} \Leftrightarrow 1<x<6$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de l'inéquation $|7-2.x|<5$ est l'intervalle $]1;6[$.

Seconde partie : définie par sa courbe

a) D'après la courbe (C), les réels x ayant une image par la fonction f sont ceux se trouvant entre -8 et 4. Donc l'ensemble de définition de f est l'intervalle $[-8;4]$.

b) Pour lire l'image d'un nombre, on repère sa position sur l'axe des abscisses, puis on se projette verticalement sur la courbe. L'image recherchée est l'ordonnée du point rencontré. En procédant ainsi, on trouve :

$f(-7)=-4,5$ $\qquad f(1)=-3$ $\qquad f(3)=-3$

Par contre, 5 n'a pas d'image par la fonction f car il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction f qu'est l'intervalle $[-8;4]$.

c) Pour lire graphiquement le ou les antécédents d'un réel, on repère sa position sur l'axe des ordonnées, puis on se projette horizontalement sur la courbe. Les antécédents recherchés sont les abscisses des points rencontrés. En procédant ainsi, on trouve :

- -6 a deux antécédents par la fonction f qui sont -8 et 2.
- -2 a trois antécédents par la fonction f qui sont -5 ; 0 et $3,5$.
- 3 n'a aucun antécédent par la fonction f. La courbe (C) ne monte pas si haut.

d) Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	-8		-2		2		4
f			2				-1
		↗		↘		↗	
	-6				-6		

e) Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-8;4]$ est -6. Il est atteint en -8 et 2.
Son maximum sur ce même intervalle vaut 2. Il est atteint en $x=-2$.

f) L'équation $f(x)=-3$ a trois solutions qui sont $-5,5$; 1 et 3.
➲ L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\geq 1$ est l'intervalle $[-3;-1,5]$.
➲ L'ensemble des solutions de $f(x)<0$ est la réunion d'intervalles $[-8;-4[\cup]1;4]$.
Les bornes -4 et 1 ne sont pas solutions car leurs images par f sont égales à 0.
➲ L'ensemble des solutions de $f(x)>-6$ est la réunion d'intervalles $]-8;2[\cup]2;4]$.
A l'exception de -8 et 2, tous les points de la courbe (C) ont une ordonnée strictement supérieure à -6.

Dernière partie : des équations au second degré...

Une méthode pour résoudre les équations du second degré est de chercher factoriser de façon à aboutir à un produit nul. C'est ainsi que nous allons procéder.

a) Résolvons dans ℝ l'équation du second degré $(2.x+5)^2-(3.x-4)^2=0$.

Le premier membre est la différence des carrés de $a=(2.x+5)$ et $b=(3.x+4)$.

$$\underbrace{(2.x+5)^2}_{a^2}-\underbrace{(3.x-4)^2}_{b^2}=0 \Leftrightarrow \underbrace{[(2.x+5)+(3.x-4)]}_{(a+b)}.\underbrace{[(2.x+5)-(3.x-4)]}_{(a-b)}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[2.x+5+3.x-4]}_{\text{On réduit...}}.\underbrace{[2.x+5-3.x+4]}_{\text{...chaque crochet}}=0$$

$$\Leftrightarrow (5.x+1).(-x+9)=0$$

Or un produit n'est nul que lorsque et seulement lorsque l'un de ses facteurs l'est. Ainsi :

$$\underbrace{(5.x+1).(-x+9)=0}_{\text{Produit nul}} \Leftrightarrow \underbrace{5.x+1=0}_{\text{Premier facteur nul}} \quad \textbf{\textit{ou}} \quad \underbrace{-x+9=0}_{\text{Second facteur nul}}$$

$$\Leftrightarrow 5.x=-1 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad -x=-9$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}=-0,2 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad x=9$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $(2.x+5)^2-(3.x-4)^2=0$ a deux solutions que sont $-0,2$ et 9.

b) Résolvons dans ℝ l'équation du second degré $(4.x+6).(7.x-1)-(2.x+3)^2=0$.

Il apparaît presque un facteur commun dans les deux produits $(4.x+6).(7.x-1)$ et $(2.x+3)^2$. Car $4.x+6$ est le double de $2.x+3$. Exploitons cette découverte !

$$(4.x+6).(7.x-1)-(2.x+3)^2=0 \Leftrightarrow \overbrace{2.\underbrace{(2.x+3)}_{\text{Facteur...}}}^{4.x+6}.(7.x-1)-\underbrace{(2.x+3)}_{\text{...commun}}.(2.x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (2.x+3).[2.(7.x-1)-(2.x+3)]=0$$

$$\Leftrightarrow (2.x+3).\underbrace{[14.x-2-2.x-3]}_{\text{On réduit le crochet...}}=0$$

$$\Leftrightarrow (2.x+3).(12.x-5)=0$$

Encore une fois, un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est. Donc :

$$\underbrace{(2.x+3).(12.x-4)=0}_{\text{Produit nul}} \Leftrightarrow \underbrace{2.x+3=0}_{\text{Premier facteur nul}} \quad \textbf{\textit{ou}} \quad \underbrace{12.x-5=0}_{\text{Second facteur nul}}$$

$$\Leftrightarrow 2.x=-3 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad 12.x=5$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}=-1,5 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad x=\frac{5}{12}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation du second degré a deux solutions que sont $-1,5$ et $\frac{5}{12}$.

c) Résolvons dans ℝ l'équation du second degré $4.x^2+16.x-84=0$.

$$4.x^2+16.x-84=0 \Leftrightarrow \underbrace{(2.x)^2+2\times 2.x\times 4}_{\text{Début de l'identité } (2.x+4)^2}-84=0$$

Le premier membre ne comporte aucune factorisation évidente : ni facteur commun, ni différence de deux carrés. Justement faisons-en apparaître une !

$$\Leftrightarrow \underbrace{(2.x+4)^2-16}_{4.x^2+16.x}-84=0$$

$$\Leftrightarrow (2.x-4)^2-100=0 \Leftrightarrow \underbrace{(2.x-4)^2}_{a^2}-\underbrace{10^2}_{b^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[(2.x+4)+10]}_{(a+b)}.\underbrace{[(2.x+4)-10]}_{(a-b)}=0$$

$$\Leftrightarrow [2.x+14].[2.x-6]=0$$

Dire qu'un produit est nul équivaut à dire que l'un de ses facteurs l'est. Ainsi :

$$\underbrace{(2.x+14).(2.x-6)=0}_{\text{Produit nul}} \Leftrightarrow \underbrace{2.x+14=0}_{\text{Premier facteur nul}} \quad \textbf{\textit{ou}} \quad \underbrace{2.x-6=0}_{\text{Second facteur nul}}$$

$$\Leftrightarrow 2.x=-14 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad 2.x=6$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{14}{2}=-7 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad x=\frac{6}{2}=3$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $4.x^2+16.x-84=0$ a deux solutions que sont -7 et 3.

Devoir Surveillé No.2

Le contexte

Ce second devoir d'une heure eut lieu à la fin octobre 2005. Il portait sur les fonctions sous leur aspect graphique, le calcul d'images et la recherche d'antécédents, les fonctions affines (question de cours) ainsi que les intersections et réunions d'intervalles.
Les calculatrices étaient heureusement autorisées.

L'énoncé

Première partie : il était une fois...des unions et intersections

Déterminer les unions et intersections d'intervalles suivantes.

$A = [4;9[\cap [1;6[$ $\qquad$ $B =]-2;7] \cup]-1;2[$

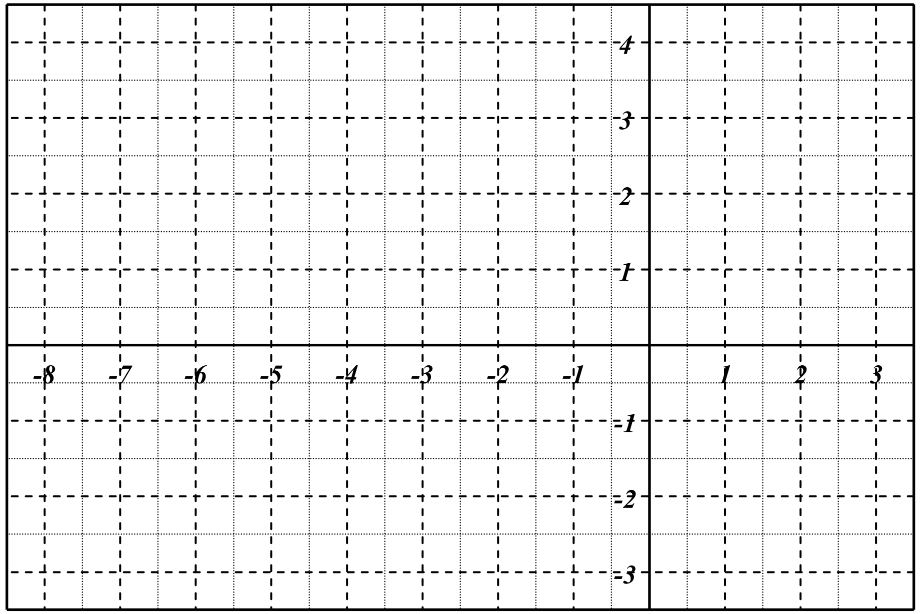
$C =]-2;5[\cap [3;5]$ $\qquad$ $D =]3;8[\cup]-2;3]$

Seconde partie : il était deux fois...la courbe de la fonction f

La fonction f n'est définie que sur l'intervalle $[-7;2]$. On sait de cette fonction f :

- $f(-2)=1$ et $f(2)=2$.
- -2 a exactement deux antécédents par la fonction f. Il s'agit -7 et -5.
- f est croissante sur l'intervalle $[-6;0]$.
- f est décroissante sur les intervalles $[-7;-6]$ et $[0;2]$.
- Le minimum de f sur l'intervalle $[-7;2]$ est -3.
- Le maximum de f sur l'intervalle $[-7;2]$ est 3.
- Lorsque x appartient à l'intervalle $[-7;-3]$, $f(x) \leq -1$

Dans le repère ci-dessous, tracer une courbe (C) pouvant être celle de la fonction f.
Indication : *avant de tracer sa courbe, on pourra dresser le tableau de variations de f.*



Troisième partie : il était trois fois...la fonction affine h

La fonction h est définie pour tout réel x par :

$$h(x) = -\frac{2}{3}.x + 2$$

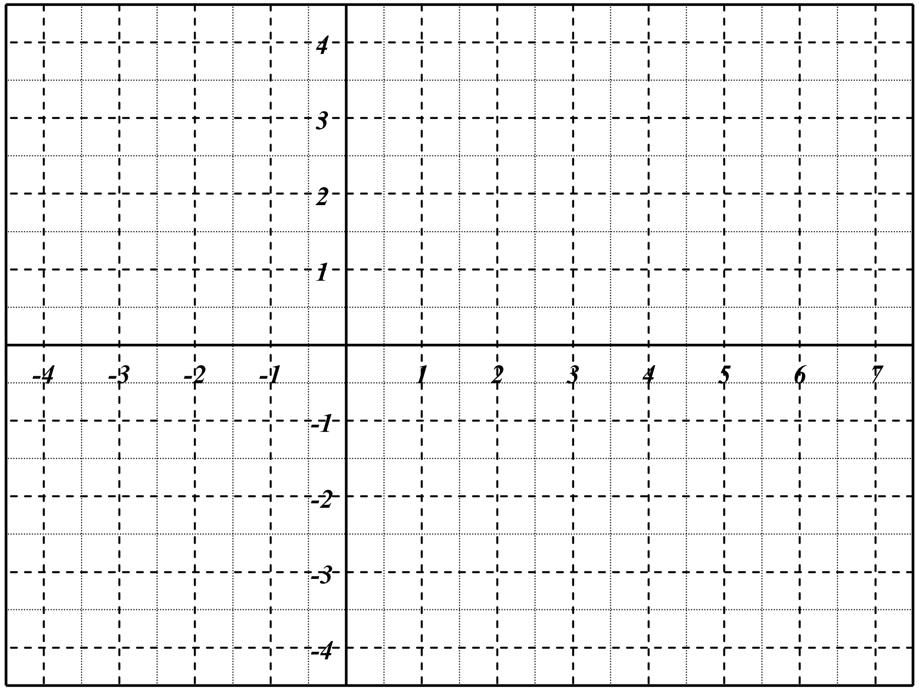
L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction h.

a) Déterminer les images de -3 et 6 par la fonction h.

b) Déterminer le ou les antécédents de -1 par la fonction h.

c) Tracer la courbe (C_h) représentant la fonction h dans le repère ci-dessous.

d) Au moyen d'un enchaînement d'inégalités, démontrer que la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Note : *une grande attention sera portée aux justifications fournies.*



Dernière partie : il était une dernière fois...la fonction j

La fonction j est définie pour tout réel x par :

$$j(x) = 2.x^2 - 8.x + 5$$

Dans cet exercice, nous allons nous amuser avec la fonction du second degré j.

a) Déterminer les images par la fonction j de -2 et $\frac{3}{7}$.

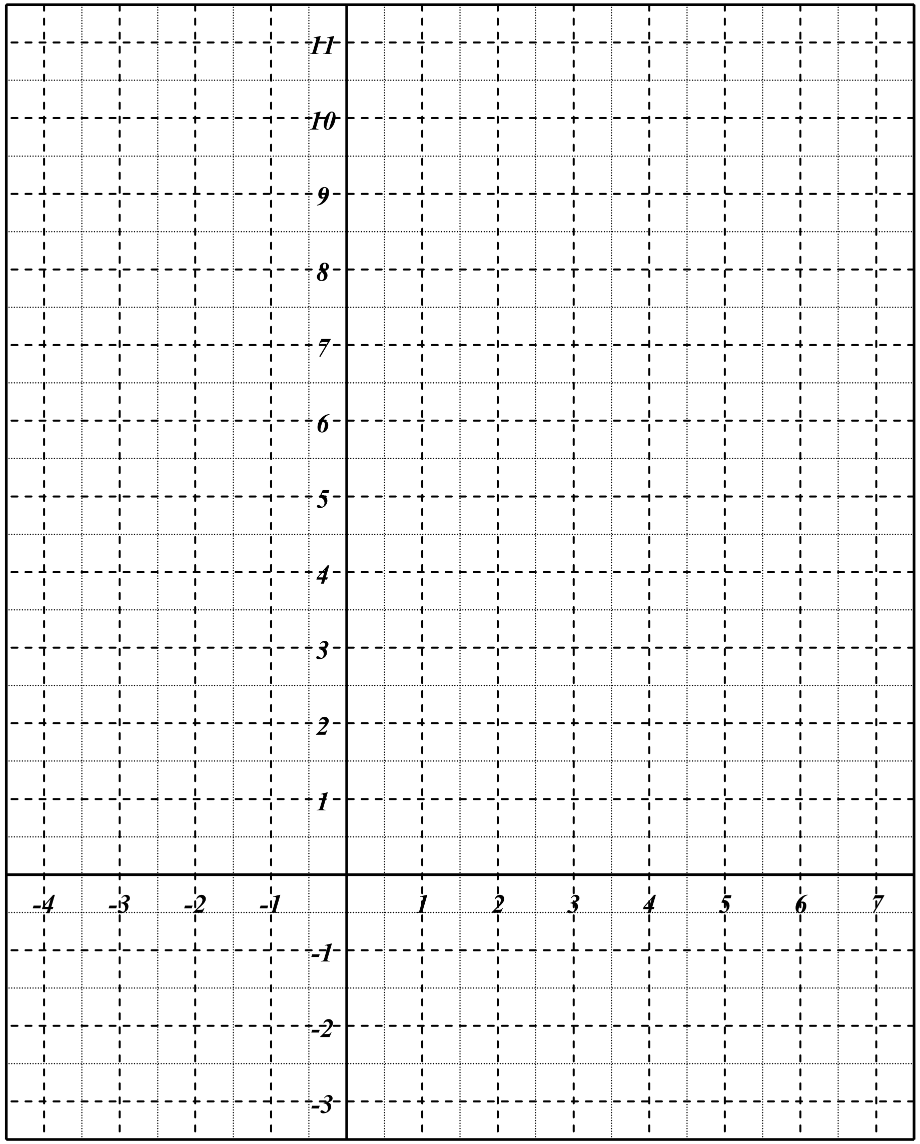
b) Un tableau de valeurs de la fonction j est :

x	−1	0	1	1,7	2	2,2	3	4	5
j(x)	15	5	−1	−2,82	−3	−2,92	−1	5	15

A l'aide de celui-ci, tracer dans le repère ci-contre la courbe (C_j) représentant la fonction j.

c) Déterminer par le calcul le ou les antécédents de 47 par la fonction j.

d) Déterminer par le calcul le ou les antécédents de 1 par la fonction j.



Le corrigé

Première partie : il était une fois...des unions et intersections

$A = [4;9[\cap [1;6[= [4;6[$ $\qquad B =]-2;7] \cup]-1;2[=]-2;7]$

$C =]-2;5[\cap [3;5] = [3;5[$ $\qquad D =]3;8[\cup]-2;3] =]-2;8[$

Seconde partie : il était deux fois...la courbe de la fonction f

Exploitons les renseignements sur la fonction f qui nous sont fournis par l'énoncé.

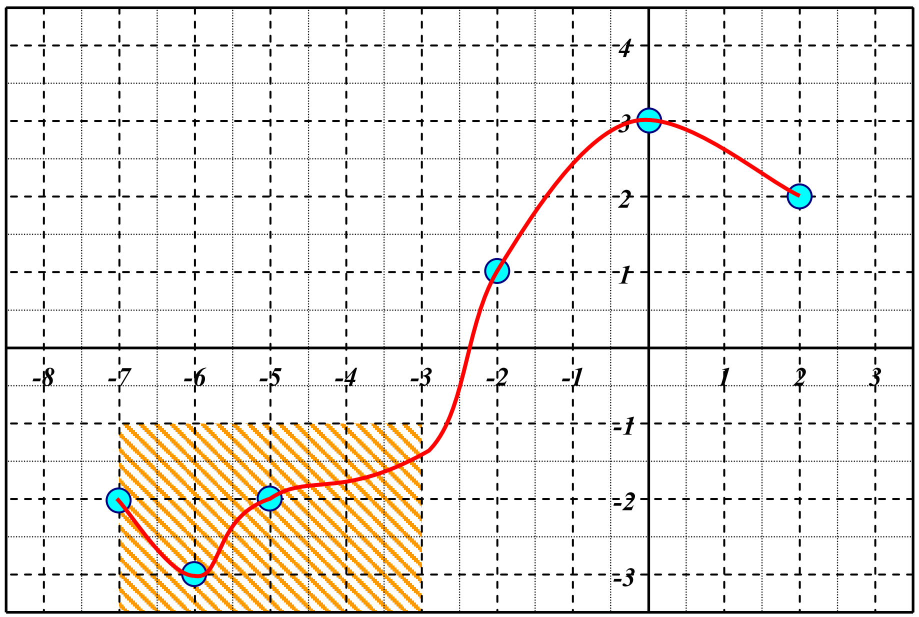
- (C) passe par les points de coordonnées $(-2;1)$, $(2;2)$, $(-7;-2)$ et $(-5;-2)$.
- Le tableau de variation de la fonction f est :

x	-7		-6		0		2
f	-2	↘	-3	↗	3	↘	2

. Donc la courbe (C) passe aussi par les points de coordonnées $(-6;-3)$ et $(0;3)$

- Sur l'intervalle $[-7;-3]$, la courbe (C) est au-dessous du niveau -1.

Ce travail fait, nous pouvons tracer une courbe (C) pouvant être celle de la fonction f.



Troisième partie : il était trois fois...la fonction affine h

a) Calculons les images de -3 et 6 par la fonction h.

$$h(-3) = -\frac{2}{3}\times(-3)+2 = 2+2 = 4 \qquad h(6) = -\frac{2}{3}\times(6)+2 = -4+2 = -2$$

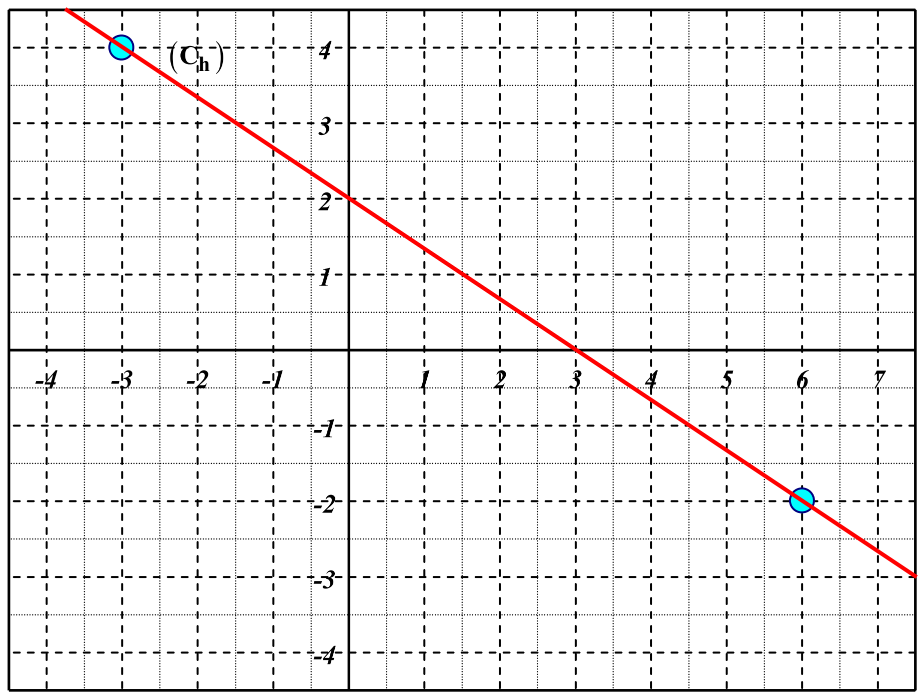
<u>Conclusion :</u> les images de -3 et 6 par la fonction h sont respectivement 4 et -2.

b) Déterminer les antécédents de -1 par h, c'est chercher les réels x dont l'image par h est égale à -1. C'est aussi chercher les réels x tels que $h(x) = -1$.

$$\underbrace{-\frac{2}{3}.x+2}_{h(x)} = -1 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{2}{3}.x = -3}_{\text{On ajoute } -2 \text{ aux deux membres}} \Leftrightarrow \underbrace{x = \frac{-3}{-\frac{2}{3}}}_{\text{On divise les deux membres par } -2/3} \Leftrightarrow \underbrace{x = -3\times\frac{-3}{2} = \frac{9}{2}}_{\text{Diviser c'est multiplier par l'inverse}}$$

<u>Conclusion :</u> -1 a un seul antécédent par la fonction affine h. Il s'agit de 4,5.

c) La courbe (C_h) de la fonction affine h est la droite qui passe par les points de coordonnées $(-3;4)$ et $(6;-2)$. Car d'après la question 2.a, $h(-3) = 4$ et $h(6) = -2$.



d) Soient x et y deux réels quelconques.

Si $x < y$ alors $\underbrace{-\frac{2}{3}.x > -\frac{2}{3}y}_{\text{On multiplie les deux membres par } -2/3.\text{ L'ordre change.}}$ donc $\underbrace{-\frac{2}{3}.x + 2 > -\frac{2}{3}y + 2}_{\text{On ajoute 2 aux deux membres de l'inégalité. L'ordre est conservé}}$ donc $\underbrace{h(x) > h(y)}_{\text{Au départ, nous avions } x<y.\text{ h a changé l'ordre.}}$

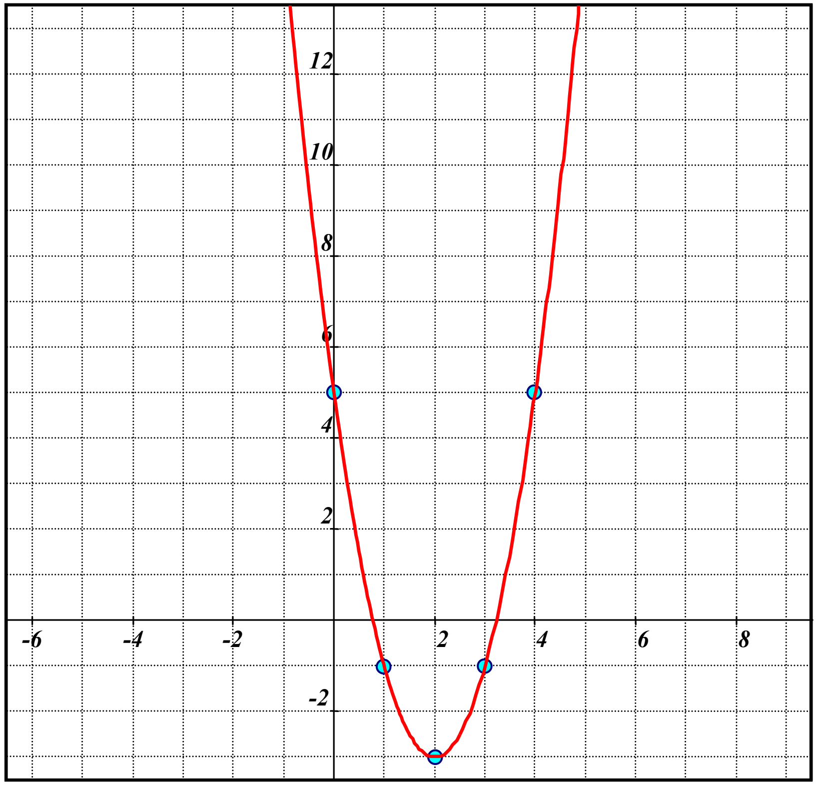
Conclusion : comme la fonction h change l'ordre sur $\mathbb{R}$ alors elle y est décroissante.

Dernière partie : il était une dernière fois...la fonction j

a) $j(-2) = 2\times(-2)^2 - 8\times(-2) + 5 = 2\times 4 + 16 + 5 = 8 + 16 + 5 = 29$

➲ $j\left(\frac{3}{7}\right) = 2\times\left(\frac{3}{7}\right)^2 - 8\times\left(\frac{3}{7}\right) + 5 = 2\times\frac{9}{49} - \frac{24}{7} + 5 = \frac{18}{49} - \frac{168}{49} + \frac{245}{49} = \frac{95}{49}$

b) La courbe représentant la fonction du second degré j est une parabole.



c) Déterminer les antécédents de 47 par j, c'est chercher les réels x tels que $j(x) = 47$.

$$\underbrace{2.x^2 - 8.x + 5}_{j(x)} = 47 \Leftrightarrow 2.x^2 - 8.x - 42 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2.\left[x^2 - 4.x - 21\right]}_{\text{On factorise par 2...}} = 0$$

On résout une équation du second degré en recherchant un produit nul.

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 4.x - 21 = 0}_{\text{On divise tout par 2}} \Leftrightarrow \underbrace{(x-2)^2 - 4}_{x^2-4.x} - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-2)^2 - (5)^2}_{a^2-b^2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-7)}_{(a-b)}.\underbrace{(x+3)}_{(a+b)} = 0$$

Or un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est. Ainsi :

$$\underbrace{(x-7).(x+3) = 0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{x - 7 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0}_{\text{...l'un de facteurs l'est.}} \Leftrightarrow x = 7 \text{ ou } x = -3$$

Conclusion : 47 a deux antécédents par la fonction j. Il s'agit de -3 et 7.

d) Pour déterminer les antécédents de 1 par la fonction j, résolvons l'équation $j(x) = 1$.

$$\underbrace{2.x^2 - 8.x + 5}_{j(x)} = 1 \Leftrightarrow 2.x^2 - 8.x + 4 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2.\left[x^2 - 4.x + 2\right]}_{\text{On refactorise par 2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.\left[\underbrace{(x-2)^2 - 4}_{x^2-4.x} + 2\right] = 0 \Leftrightarrow 2.\left[(x-2)^2 - 2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2.\left[\underbrace{(x-2)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}_{a^2-b^2}\right] = 0 \Leftrightarrow 2.\underbrace{\left(x - 2 - \sqrt{2}\right)}_{(a-b)}.\underbrace{\left(x - 2 + \sqrt{2}\right)}_{(a+b)} = 0$$

Un produit n'étant nul que lorsque et seulement lorsque l'un de ses facteurs l'est, il vient :

$$\underbrace{2.\left(x-2-\sqrt{2}\right).\left(x-2+\sqrt{2}\right) = 0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{2 = 0 \text{ ou } x - 2 - \sqrt{2} = 0 \text{ ou } x - 2 + \sqrt{2} = 0}_{\text{...l'un de facteurs l'est.}}$$

$$\Leftrightarrow \text{Toujours faux ou } x = 2 + \sqrt{2} \text{ ou } x = 2 - \sqrt{2}$$

Conclusion : 1 a deux antécédents par la fonction j. Il s'agit de $2-\sqrt{2}$ et $2+\sqrt{2}$.

Devoir Surveillé No.3

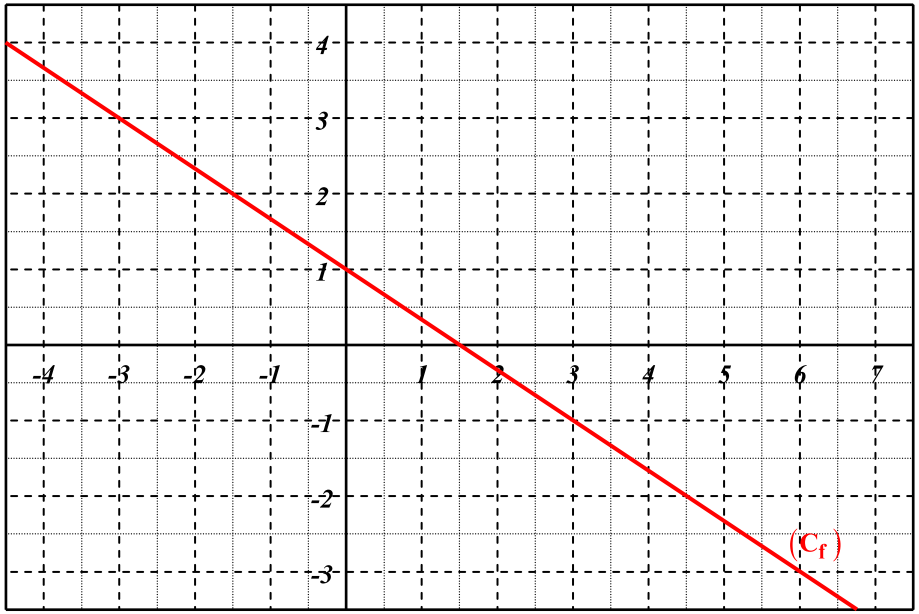
Le contexte

Ce troisième devoir d'une heure eut lieu à la mi novembre 2005. Il portait sur les fonctions affines et les tableaux de signe.
Là déjà, ça commençait à devenir plus compliqué. Surtout que pour le premier exercice, il fallait apprendre ses leçons régulièrement...
Les calculatrices étaient heureusement encore autorisées.

L'énoncé

Première partie : pour vos expressions, jouez l'affine !

f et g sont deux fonctions affines dont nous allons déterminer les expressions.
On sait que les images respectives de 2 et 14 par la fonction affine g sont 3 et 13.
La courbe $\left(C_f\right)$ de la fonction affine f est représentée sur le graphique ci-dessous :



a) A partir du graphique ci-dessus, déterminer l'expression de la fonction affine f.

b) Déterminer par le calcul le ou les antécédents de $\frac{3}{7}$ par f.

c) Déterminer par un raisonnement l'expression de la fonction affine g.
***Note :** une grande attention sera portée à la rédaction du raisonnement.*

d) Tracer sur le graphique ci-dessus la courbe $\left(C_g\right)$ représentant la fonction affine g.

Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection des droites $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$.

Seconde partie : signe city

a) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$(7.x-3).(4.x+5)\leq(7.x-3)^2$$

b) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{x-6}{3.x+5}\geq-7$$

c) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{5}{x-2}\leq1-\frac{x}{x+1}$$

d) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$2.x^2+16.x-10>12-4.x$$

Le corrigé

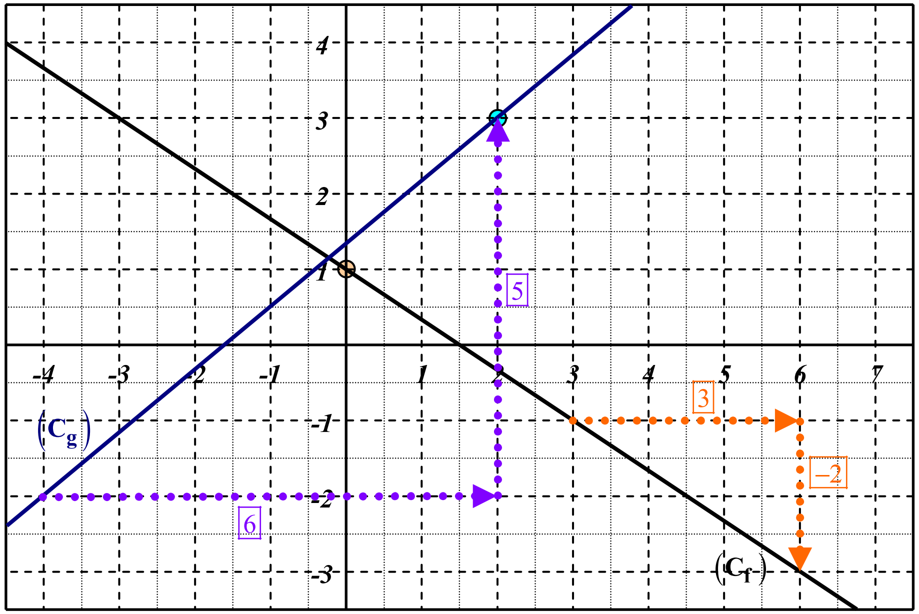
Première partie : pour vos expressions, jouez l'affine !

a) Sa courbe $\left(C_f\right)$ étant une droite, la fonction affine f est de la forme $f(x)=a.x+b$.
Lorsque l'on progresse de 3 en abscisse, la droite $\left(C_f\right)$ baisse de 2 en ordonnée : elle fait -2. Donc le coefficient directeur a de f ou de $\left(C_f\right)$ est donné par :

$$a=\frac{\text{Variation d'ordonnée}}{\text{Variation d'abscisse}}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

De plus, la droite $\left(C_f\right)$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1. L'ordonnée à l'origine b est donc égale à 1.

<u>Conclusion :</u> l'expression réduite de la fonction affine f est $f(x) = -\frac{2}{3}.x + 1$.



b) Déterminer les antécédents de $\frac{3}{7}$ par f, c'est chercher les réels x tels que $f(x) = \frac{3}{7}$.

Résolvons cette équation !

$$\underbrace{-\frac{2}{3}.x + 1}_{f(x)} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}.x = \frac{3}{7} - 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}.x = -\frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{-4/7}{-2/3} = \frac{-4}{7} \times \frac{3}{-2} = \frac{-12}{-14} = \frac{6}{7}$$

<u>Conclusion :</u> l'antécédent de $\frac{3}{7}$ par la fonction affine f est $\frac{6}{7}$.

c) La fonction affine g a une expression réduite de la forme $g(x) = a.x + b$.

Tout le problème est de déterminer ces coefficients a et b. Heureusement, nous savons :

- $g(2) = 3$ donc $a \times 2 + b = 3$ d'où l'équation ***(1)*** : $2.a + b = 3$.
- $g(14) = 13$ donc $a \times 14 + b = 13$ d'où l'équation ***(2)*** : $14.a + b = 13$.

Les coefficients a et b sont les solutions du système linéaire 2×2 qu'est $\begin{cases} 2.a + b = 3 \\ 14.a + b = 14 \end{cases}$.

Résolvons-le par une double combinaisons linéaires :

Pour obtenir a, on vise l'élimination de b.

$$\begin{array}{lrl} \textit{(2)} \longrightarrow & 14.a + b = 13 & \ominus \\ \textit{(1)} \longrightarrow & 2.a + b = 3 & \\ \hline & 12.a = 10 & \\ & a = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} & \end{array}$$

Pour trouver b, nous devons éliminer a.

$$\begin{array}{lrl} \textit{(1)} \xrightarrow{\times 7} & 14.a + 7.b = 21 & \ominus \\ \textit{(2)} \longrightarrow & 14.a + b = 13 & \\ \hline & 6.b = 8 & \\ & b = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} & \end{array}$$

<u>Conclusion :</u> l'expression réduite de la fonction affine g est $g(x) = \frac{5}{6}.x + \frac{4}{3}$.

d) La courbe (C_g) de la fonction affine g est une droite qui passe par le point de coordonnées $(2;3)$ car l'image de 2 par g est égale à 3.

Comme le coefficient directeur a est égal à $\frac{5}{6} = \frac{\text{Variation d'ordonnée}}{\text{Variation d'abscisse}}$ alors lorsque l'on progresse de 6 unités en abscisse, la droite (C_g) monte de 5 unités en ordonnée. D'ou la droite tracée sur le graphique ci-contre.

➲ L'abscisse du point d'intersection des droites (C_f) et (C_g) est la solution de l'équation $f(x) = g(x)$. Résolvons cette dernière !

$$-\frac{2}{3}.x + 1 = \frac{5}{6}.x + \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}.x - \frac{5}{6}.x = \frac{4}{3} - 1 \Leftrightarrow -\frac{9}{6}.x = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1/3}{-9/6} = \frac{1}{3} \times \frac{-6}{9} = \frac{-6}{27} = -\frac{2}{9}$$

<u>Conclusion :</u> Le point d'intersection des droites (C_f) et (C_g) a pour abscisse $-\frac{2}{9}$.

Seconde partie : signe city

Pour les quatre inéquations proposées, nous allons chercher à chaque fois à pouvoir nous prononcer sur le signe d'un produit ou d'un quotient factorisé.

a) Pour résoudre dans ℝ cette première inéquation, nous allons tout ramener dans le premier membre, puis chercher à factoriser afin de pouvoir nous prononcer sur le signe d'un produit.

$$(7.x-3).(4.x+5) \leq (7.x-3)^2 \Leftrightarrow \underbrace{(7.x-3)}_{\text{Facteur...}}.(4.x+5)-\underbrace{(7.x-3)}_{\text{...commun}}.(7.x-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (7.x-3).\left[(4.x+5)-(7.x-3)\right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (7.x-3).\left[4.x+5-7.x+3\right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(7.x-3).(-3.x+8) \leq 0}_{\text{Quand ce produit est-il négatif ou nul ?}}$$

Le signe d'une fonction affine $f(x) = a.x + b$ est conditionné par le signe de son coefficient directeur a.

Déterminons les valeurs de x pour lesquelles nos deux facteurs affines s'annulent.

- Pour le premier facteur $7.x-3$: $7.x-3=0 \Leftrightarrow 7.x=3 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{7}$

  Comme 7 est positif alors $7.x-3$ est nul en $3/7$, négatif avant et positif après.

- Pour le second facteur $-3.x+8$: $-3.x+8=0 \Leftrightarrow -3.x=-8 \Leftrightarrow x=\dfrac{-8}{-3}=\dfrac{8}{3}$

  Comme -3 est négatif alors le facteur affine $-3.x+8$ est nul en $8/3$, positif avant, et négatif après.

Par conséquent, le tableau de signe de leur produit $P(x) = (7.x-3).(-3.x+8)$ est :

x	$-\infty$		$\frac{3}{7}$		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$7.x-3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-3.x+8$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

<u>Conclusion :</u> le produit P(x) est négatif ou nul sur l'ensemble $\left]-\infty;\frac{3}{7}\right] \cup \left[\frac{3}{8};+\infty\right[$.

C'est l'ensemble des solutions de cette première inéquation.

b) Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons tout ramener dans le premier membre, puis additionner les deux fractions après une mise au même dénominateur. Nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{x-6}{3.x+5} \geq -7 \Leftrightarrow \frac{x-6}{3.x+5}+7 \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x-6}{3.x+5}+\frac{7\times(3.x+5)}{1\times(3.x+5)}}_{\text{On met au même dénominteur 3.x+5.}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-6)+7\times(3.x+5)}{3.x+5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-6+21.x+35}{3.x+5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{22.x+29}{3.x+5} \geq 0}_{\text{Quand ce quotient est-il positif ou nul ?}}$$

Examinons les deux facteurs affines apparaissant dans ce quotient :

- Le numérateur $22.x+29$ s'annule en $-\dfrac{29}{22}$. Comme son coefficient directeur 22 est positif alors $22.x+29$ est négatif avant $-29/22$ et positif après.

- Le dénominateur $3.x+5$ s'annule en $-\dfrac{5}{3}$. Son coefficient directeur 3 étant positif, $3.x+5$ est négatif avant $-5/3$ et positif après.

A l'aide de la calculatrice, on remarque que $-\dfrac{29}{22}$ est plus grand que $-\dfrac{5}{3}$.

Le tableau de signe du quotient $Q(x) = \dfrac{22.x+29}{3.x+5}$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{29}{22}$		$+\infty$
$22.x+9$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3.x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$Q(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

<u>Conclusion :</u> le quotient Q(x) est positif ou nul sur l'ensemble $\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right[\cup \left[-\frac{29}{22};+\infty\right[$.

C'est l'ensemble des solutions de cette seconde inéquation.

c) Pour cette troisième l'inéquation, nous allons suivre la même stratégie que pour la seconde.

$$\underbrace{\frac{5}{x-2}\le 1-\frac{x}{x+1}}_{\text{Procédons par étapes !}} \Leftrightarrow \frac{5}{x-2}\le \underbrace{\frac{x+1}{x+1}-\frac{x}{x+1}}_{\text{Au même dénominateur } x+1.} \Leftrightarrow \frac{5}{x-2}\le\frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{5}{x-2}-\frac{1}{x+1}}_{\text{Pour les soustraire...}}\le 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{5\times(x+1)}{(x-2).(x+1)}-\frac{1\times(x-2)}{(x-2).(x+1)}}_{\text{...on les met au même dénominateur } (x-2).(x+1).}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5.x+5)-(x-2)}{(x-2).(x+1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{5.x+5-x+2}{(x-2).(x+1)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{4.x+7}{(x-2).(x+1)}}_{\text{Quand ce quotient est-il négatif ou nul ?}}\le 0$$

Déterminons où les trois facteurs affines apparaissant dans ce quotient s'annulent :

- Le facteur $4.x+7$ s'annule lorsque $4.x+7=0 \Leftrightarrow 4.x=-7 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{4}$.
- Le facteur $x-2$ est nul lorsque $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.
- Le facteur $x+1$ s'annule lorsque $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Ces trois facteurs ont des coefficients directeurs (4 ; 1 ou 1) positifs. Ils seront donc d'abord négatifs avant de s'annuler pour finir positifs.

Le tableau de signe du quotient $Q(x)=\frac{4.x+7}{(x-2).(x+1)}$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{4}$		-1		2		$+\infty$
$4.x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Conclusion : le quotient $Q(x)$ est négatif ou nul sur l'ensemble $\left]-\infty;-\frac{7}{4}\right]\cup\left]-1;-2\right[$.

C'est l'ensemble des solutions de cette troisième inéquation.

d) Pour résoudre cette dernière inéquation qui s'annonce du second degré, nous allons tout ramener dans le premier membre, puis nous chercherons à factoriser. Peut-être aboutirons-nous à un produit dont nous saurons déterminer le signe ?

$$2.x^2+16.x-10>12-4.x \Leftrightarrow 2.x^2+16.x-10-12+4.x>0 \Leftrightarrow 2.x^2+20.x-22>0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2+10.x-11>0}_{\text{On a divisé les deux membres de l'inégalité par 2. L'ordre a été conservé}} \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2\times5\times x}_{\text{Début de l'identité remarquable } (x+5)^2}-11>0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+5)^2-25}_{x^2+10.x}-11>0 \Leftrightarrow (x+5)^2-36>0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+5)^2-(6)^2}_{a^2-b^2}>0 \Leftrightarrow \underbrace{\overbrace{(x-1)}^{(a-b)}.\overbrace{(x+11)}^{(a+b)}}_{\text{Quand ce produit est-il positif ?}}>0$$

Les deux facteurs affines $x-1$ et $x+11$ ayant leurs coefficients directeurs égaux à 1 donc positifs, ils seront d'abord négatifs, puis s'annuleront respectivement en 1 et -11 avant de finir positifs.
Connaissant les signes des facteurs, nous pouvons dresser le tableau de signe de leur produit $P(x)=(x-1).(x+11)$.

x	$-\infty$		-11		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+11$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : le produit $P(x)$ est positif sur l'ensemble $\left]-\infty;-11\right[\cup\left]1;+\infty\right[$. C'est l'ensemble des solutions de cette dernière inéquation.

Devoir Surveillé No.4

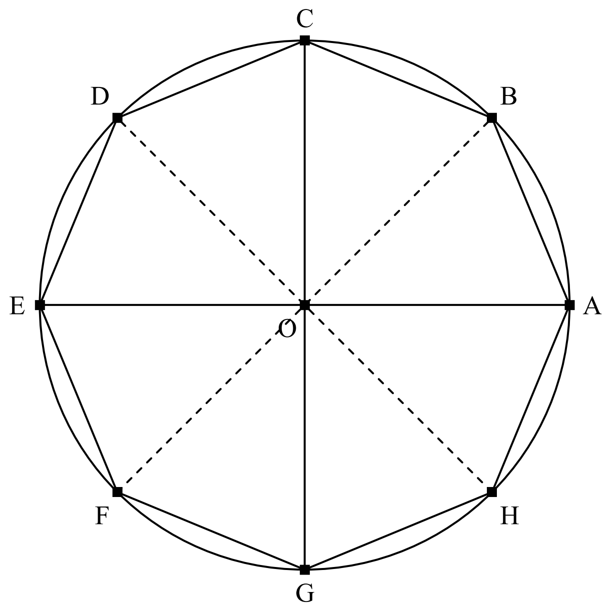
Le contexte

Ce quatrième devoir qui eut lieu juste avant les vacances de Noël portait sur les isométries du plan (translations, rotations et symétries), les vecteurs qui font chez moi toujours l'objet d'un chapitre assez approfondi en vue de la première S et la résolution d'inéquations quotient.
Plus ça allait, plus ça montait et certains avaient visiblement trop mal aux jambes pour pedaler.
Les calculatrices étaient autorisées. Mais à quoi servaient-elles ?

L'énoncé

Première partie : sept questions d'isométrie

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un octogone régulier de centre O.



On répondra directement sur la présente feuille. Aucune justification n'est exigée.
Les angles demandés seront donnés d'abord en degrés puis en radians.

a) Quelle est l'image du segment [AF] par la symétrie de centre O ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

b) Quelle est l'image de la droite (CE) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

c) Quelle est l'image du triangle ABD par la réflexion d'axe (BF) ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

d) Par quelle rotation de centre H le point F a-t-il pour image le point B ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

e) Par quelle rotation le segment [AB] a-t-il pour image le segment [FG] ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

f) Pourquoi n'existe-t-il pas de rotation par laquelle le segment [EF] ait pour image le segment [BH] ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

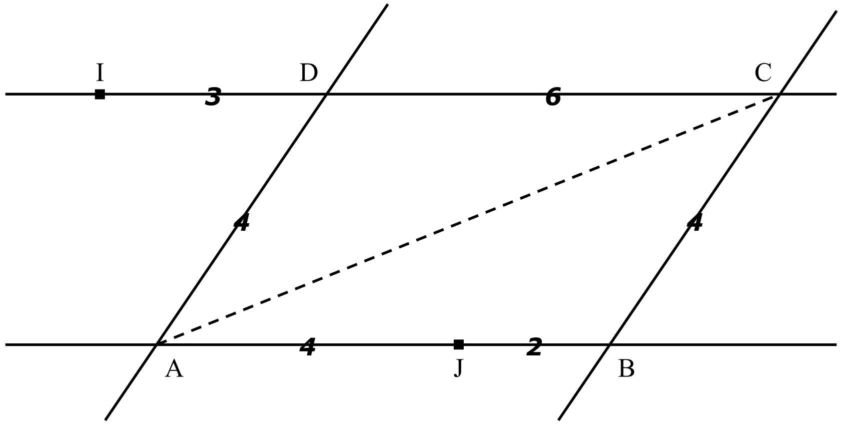
g) Par quelle rotation le point E est-il sa propre image et le point B a-t-il pour image le point H ?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Seconde partie : un K d'alignement ?

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme.
Le point I se situe sur la droite (CD) à trois centimètres du point D à l'opposé de C.
J est un point du segment [AB] situé à 4 centimètres du point A.



a) En s'aidant de la figure ci-dessus, recopier et compléter les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{DI} = \ldots\overrightarrow{DC} \qquad \overrightarrow{AJ} = \ldots\overrightarrow{AB}$$

En cherchant à exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, démontrer que :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{7}{6}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

Le point K est défini par la relation vectorielle :

$$9.\overrightarrow{KA} + 4.\overrightarrow{KC} = \vec{o}$$

b) En cherchant à exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ démontrer que :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{4}{13}.\overrightarrow{AC}$$

Placer le point K sur la figure ci-dessus.

c) Démontrer que :

$$\overrightarrow{KJ} = \frac{14}{39}.\overrightarrow{AB} - \frac{4}{13}.\overrightarrow{AD}$$

Les points I, J et K sont alignés ? On justifiera sa réponse.

Dernière partie : la dernière inéquation...

Le but de cet exercice est la résolution de l'inéquation ***(1)*** :

$$4 - \frac{5}{x-1} \leq \frac{15}{x+4}$$

a) En cherchant à la résoudre, montrer que l'inéquation précédente s'écrit aussi :

$$\frac{4.x^2 - 8.x - 21}{(x+4).(x-1)} \leq 0$$

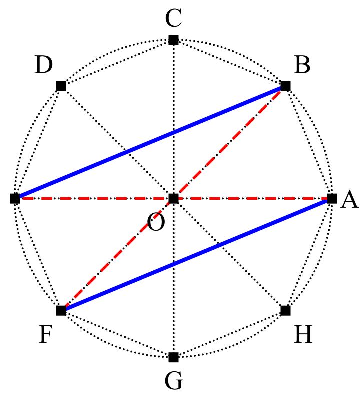
b) Factoriser la forme du second degré $N(x) = 4.x^2 - 8.x - 21$.

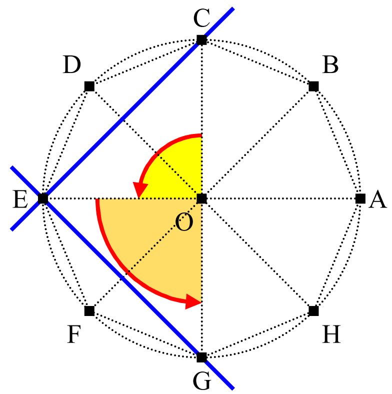
c) Achever la résolution de l'inéquation ***(1)***.

Le corrigé

Première partie : sept questions d'isométrie

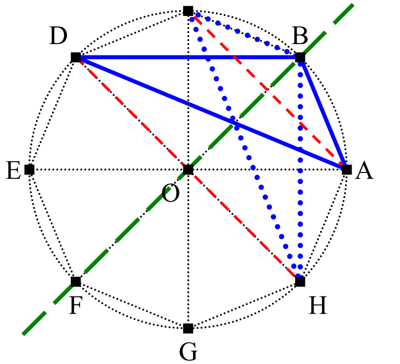
a) Les symétriques des points A et F par rapport au centre O sont respectivement les points E et B.
Par conséquent, l'image du segment [AF] par la symétrie de centre O est le segment [EB].





b) Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ radian correspond à une rotation de 90° dans le sens trigonométrique ou positif.

Par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, les points C et E ont pour images respectives E et G. Donc l'image de la droite (CE) est la droite (EG).

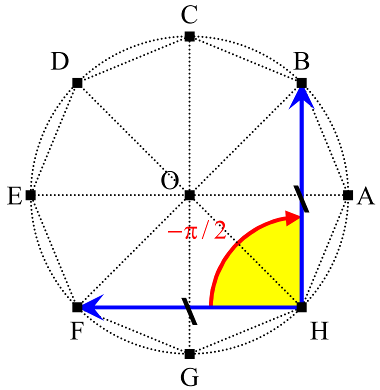


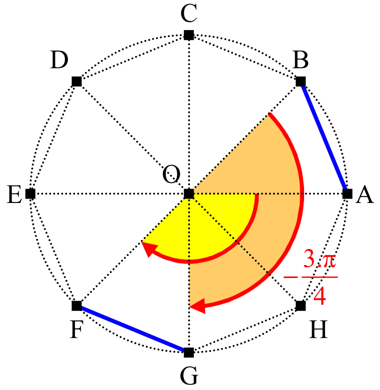
c) Les symétriques des points A, B et D par rapport à l'axe (BF) sont respectivement les points C, B et H.
Par conséquent, l'image du triangle ABD par la réflexion d'axe (BF) est le triangle CBH.

d) D'abord remarquons que les segments [HF] et [HB] sont égaux. Ensuite l'angle orienté

$\left(\overrightarrow{HF},\overrightarrow{HB}\right)=\widehat{FHB}$ mesure $-90°=-\dfrac{\pi}{2}$ radians.

Donc le point B est l'image de F par la rotation de centre H et d'angle $-\pi/2$.





e) Les points A, B, F et G sont sur le même cercle de centre O. Ensuite les angles orientés $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}\right)=\widehat{AOF}$

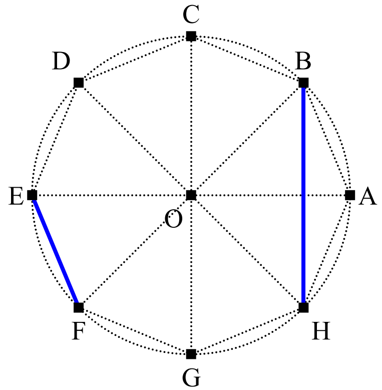
et $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OG}\right)=\widehat{BOG}$ mesurent

$-135°=-3\times 45°=-3\times\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{3.\pi}{4}$ radians.

Donc le segment [FG] est l'image du segment [AB]

par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{3.\pi}{4}$.

f) La rotation est une isométrie, c'est-à-dire qu'elle conserve les longueurs. Les segments [EF] et [BH] n'ont pas la même longueur. Donc le second ne peut pas être l'image du premier par une rotation.

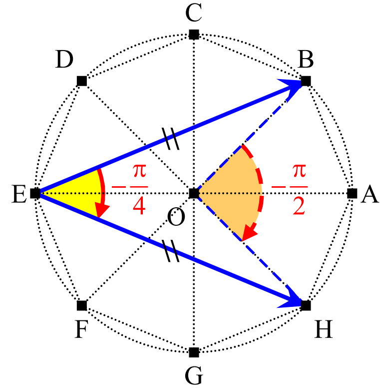


g) Le point E étant sa propre image, il est nécessairement le centre de la rotation.
Ensuite l'angle inscrit $\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EH}\right)$ mesure la moitié

de l'angle au centre $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OH}\right)=-90°=-\dfrac{\pi}{2}$.

Ces deux angles interceptent l'arc de cercle $\overset{\frown}{BH}$
Donc la rotation par laquelle E est sa propre image et B a pour image H est la rotation de centre E et

d'angle $-45°=-\dfrac{\pi}{4}$.



Seconde partie : un K d'alignement ?

a) Les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DC}$ n'ont pas le même sens. Nous avons : $\overrightarrow{DI}=-\dfrac{3}{6}.\overrightarrow{DC}=-\dfrac{1}{2}.\overrightarrow{DC}$.

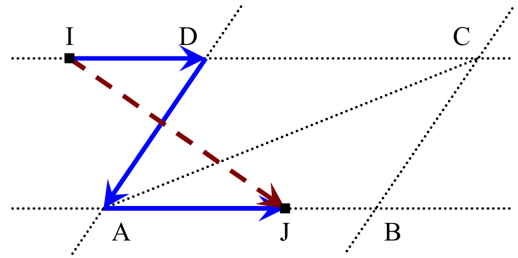
Le point J se situe aux deux tiers du segment [AB] à partir de A. Donc : $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$.

➲ Pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, décomposons ce premier.

$$\overrightarrow{IJ}=\underbrace{\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AJ}}_{\text{Chasles...}}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}}_{\text{Car ABCD est un parallélogramme}}+\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{3}{6}.\overrightarrow{AB}+\frac{4}{6}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\frac{4}{6}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$$



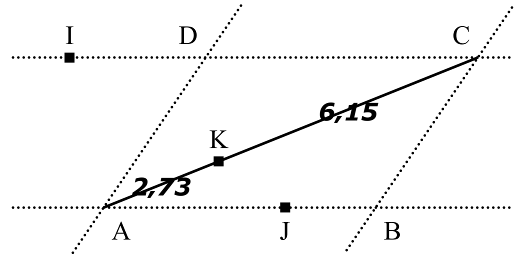
b) Le point K est défini par la relation vectorielle :

$$9.\overrightarrow{KA}+4.\overrightarrow{KC}=\vec{o}$$

$$9.\overrightarrow{KA}+\underbrace{4.\overrightarrow{KA}+4.\overrightarrow{AC}}_{4.\overrightarrow{KC}}=\vec{o}$$

$$\underbrace{13.\overrightarrow{KA}}_{\text{aussi } -13.\overrightarrow{AK}}=-4.\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AK}=\frac{-4}{-13}.\overrightarrow{AC}=\frac{4}{13}.\overrightarrow{AC}$$



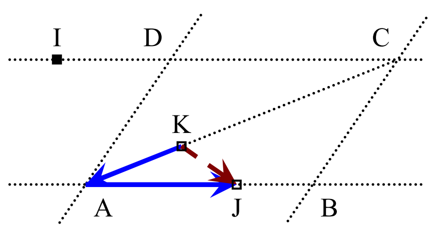
Conclusion : le point K se situe aux quatre treizièmes de la diagonale [AK] à partir de A.

c) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{KJ}$ en fonction des vecteurs de base $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$,

$$\overrightarrow{KJ} = \underbrace{\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AJ}}_{\text{Chasles...}} = -\frac{4}{13}.\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$$

$$= \underbrace{-\frac{4}{13}.\overrightarrow{AB}-\frac{4}{13}.\overrightarrow{AD}}_{\text{Car ABCD est un parallélogramme donc } \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}} +\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$$

$$=-\frac{12}{39}.\overrightarrow{AB}+\frac{26}{39}.\overrightarrow{AB}-\frac{4}{13}.\overrightarrow{AD}=\frac{14}{39}.\overrightarrow{AB}-\frac{4}{13}.\overrightarrow{AD}$$



➲ On passe de $\frac{7}{6}$ et -1 à $\frac{14}{39}$ et $-\frac{4}{13}$ en multipliant par $\frac{4}{13}$. Par conséquent, il vient :

$$\frac{4}{13}.\overrightarrow{IJ}=\frac{4}{13}.\left[\frac{7}{6}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right]=\frac{28}{78}.\overrightarrow{AB}-\frac{4}{13}.\overrightarrow{AD}=\frac{14}{39}.\overrightarrow{AB}-\frac{4}{13}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{KJ}$$

Comme $\frac{4}{13}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{KJ}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires. Par conséquent, les droites (IJ) et (KJ) sont parallèles. Autrement dit, les points I, J et K son alignés.

Dernière partie : la dernière inéquation...

Entamons la résolution de l'inéquation imposée.

$$\underbrace{4-\frac{5}{x-1}}_{\text{D'abord eux...}} \leq \frac{15}{x+4} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{4.(x-1)}{x-1}-\frac{5}{x-1}}_{\text{Au même dénominateur...}} \leq \frac{15}{x+4} \Leftrightarrow \frac{4.x-4-5}{x-1}\leq\frac{15}{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{4.x-9}{x-1}-\frac{15}{x+4}}_{\text{Puis eux...}}\leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{(4.x-9).(x+4)}{(x-1).(x+4)}-\frac{15.(x-1)}{(x+4).(x-1)}}_{\text{Au même dénominateur...}}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[(4.x-9).(x+4)\right]-\left[15.(x-1)\right]}{(x-1).(x+4)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4.x^2+16.x-9.x-36-15.x+15}{(x+4).(x-1)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{4.x^2-8.x-21}{(x+4).(x-1)}\leq 0$$

Tout le problème est désormais la factorisation du numérateur en deux facteurs affines.

Les deux premiers termes de $4.x^2-8.x-21$ sont le début d'une identité remarquable.

$$N(x)=4.x^2-8.x-21=\underbrace{(2.x)^2-2\times2\times2.x}_{\text{Début de }(2.x-2)^2}-21=\underbrace{(2.x-2)^2-4}_{4.x^2-8.x}-21=(2.x-2)^2-25$$

$$=\underbrace{(2.x-2)^2}_{a^2}-\underbrace{(5)^2}_{b^2}=\underbrace{\left[(2.x-2)-5\right]}_{(a-b)}.\underbrace{\left[(2.x-2)+5\right]}_{(a+b)}=(2.x-7).(2.x+3)$$

Donc l'inéquation ***(1)*** s'écrit aussi : $4-\frac{5}{x-1}\leq\frac{15}{x+4} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{(2.x-7).(2.x+3)}{(x-1).(x+4)}}_{\text{Quand ce quotient est-il négatif ou nul ?}}\leq 0$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{2}$		1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2.x-7$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2.x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Le quotient		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Conclusion : l'ensemble des solutions est la réunion d'intervalles $]-4;-1,5]\cup]1;3,5]$.

Devoir Surveillé No.5

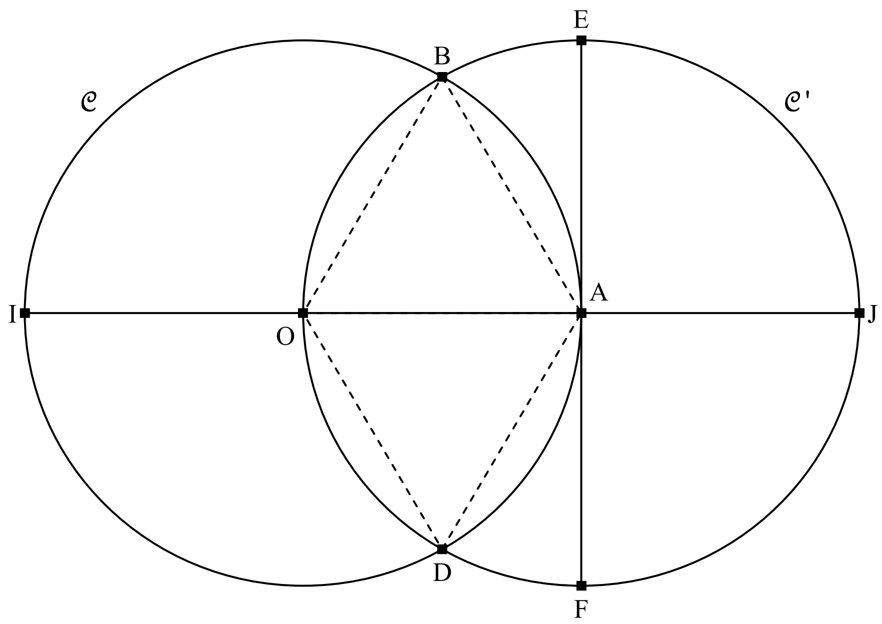
Le contexte

Ce cinquième devoir d'une heure qui se déroula à la fin janvier 2006, portait sur les angles orientés et l'étude des variations de fonctions en s'appuyant sur celles des fonctions de référence (carrée, inverse et racine).
Les calculatrices étaient autorisées. Des fois, ça rassure même si ça ne sert à rien !

L'énoncé

Première partie : les angles orientés contre-attaquent !

Sur la figure ci-dessous, O et A sont deux points distincts du plan.
On appelle $\mathcal{C}$ le cercle de centre O passant par A et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre A passant par O. Ces deux cercles se coupent aux points B et D.
La tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point A coupe le cercle $\mathcal{C}'$ aux points E et F.
On appelle I le symétrique de A par rapport à O. On note J le symétrique du point O par rapport au point A.



a) Démontrer que le triangle OAB est équilatéral, puis que le quadrilatère OBAD est un parallélogramme.

b) Donner une mesure exacte en radians des angles orientés suivants.
Note : *une mesure donnée en degrés sera considérée comme fausse. On pourra répondre directement sur la présente feuille d'énoncé.*

$\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)=$ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=$

$\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OE}\right)=$ $\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{OI}\right)=$

$\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{OD}\right)=$ $\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{EA}\right)=$

Seconde partie : variation d'une fonction homographique

La fonction f est définie par :

$$f(x)=\frac{6.x-17}{2x-4}$$

a) Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

b) Démontrer que pour tout $x\in\left]-\infty;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$, on a :

$$f(x)=3-\frac{5}{2.x-4}$$

c) Etablir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty;2\right[$.
Note : *une grande attention sera portée aux justifications fournies.*

Dernière partie : une racine au second degré

La fonction h est définie pour tout réel x par :

$$h(x) = 49.x^2 + 42.x - 27$$

a) Calculer l'image de -2 par la fonction h.

b) Ecrire $h(x)$ sous forme canonique c'est-à-dire sous la forme :

$$h(x) = (\ldots.x + \ldots)^2 - 36$$

En déduire l'écriture factorisée de $h(x)$.

Dresser le tableau de signe de la fonction h.

c) En utilisant son écriture canonique, déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{3}{7}\right]$.

***Note :** une grande attention sera portée aux justifications fournies.*

Le corrigé

Première partie : les angles orientés contre-attaquent !

a) Exploitons les renseignements fournis par l'énoncé :

- Comme les points A, B et D appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O alors $OA = OB = OD$.
- Comme les points O, B et D appartiennent au cercle $\mathcal{C}'$ de centre A alors $AO = AB = AD$.

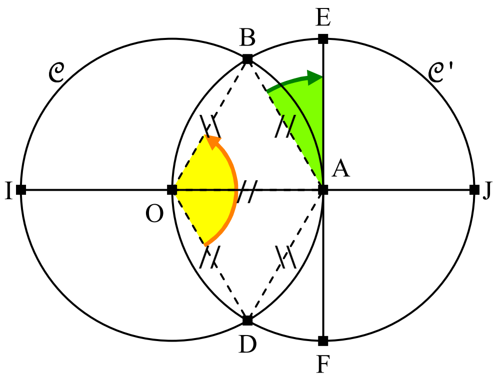
De ces deux doubles inégalités, on en déduit :

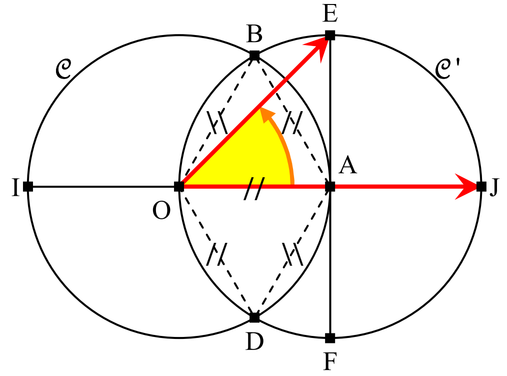
⇒ Comme $AB = OA = OB$ alors le triangle AOB est équilatéral.

⇒ Comme $\underbrace{OB = AB}_{=OA} = \underbrace{AD = OD}_{=OA}$ alors le quadrilatère non croisé OBAD est un losange (quatre côtés consécutifs égaux). Donc OBAD est un parallélogramme.

b) Déterminons des mesures des angles proposés.

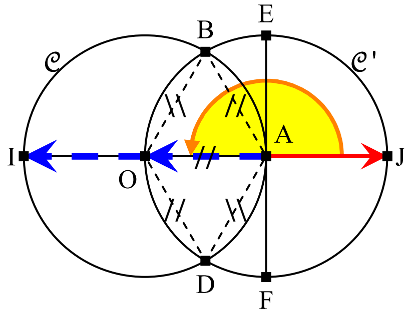
$$\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$$
$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2.\pi}{3}$$
$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right) = \left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AE}\right) - \left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3.\pi}{6} + \frac{2.\pi}{6}$$
$$= -\frac{\pi}{6}$$

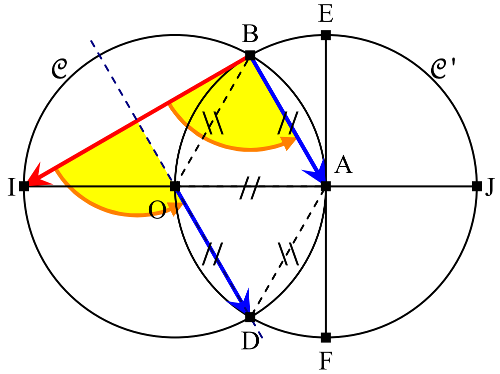




Comme le triangle OAE est isocèle et rectangle en A alors $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{4}$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont égaux alors $\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{OI}\right) = \left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AO}\right) = \pi$



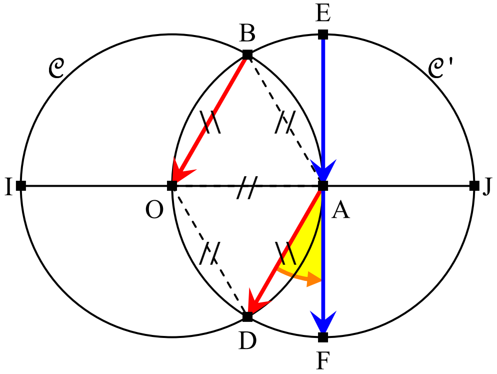


Comme OBAD est un parallélogramme alors les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont égaux. Comme le point B appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [IA] alors le triangle ABI est rectangle en B. Par conséquent :

$$\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Comme OBAD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont égaux.
De même, comme A est le milieu du segment [EF] alors $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AF}$. D'où :

$$\left(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{EA}\right) = \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}\right) = \frac{\pi}{6}$$



Seconde partie : variation d'une fonction homographique

a) La fonction homographique f est le quotient des facteurs affines $6.x-17$ et $2.x-4$. Déterminons pour quelles valeurs de x ils s'annulent :

$$6.x-17=0 \Leftrightarrow 6.x=17 \Leftrightarrow x=\frac{17}{6} \qquad 2.x-4=0 \Leftrightarrow 2.x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{2}=2$$

Par suite, le tableau de signe de la fonction homographique f est le suivant :

x	$-\infty$		2		$\frac{17}{6}$		$+\infty$
$6.x-17$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$2.x-4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Conséquence : le tableau de signe de la fonction f met en évidence son ensemble de définition : tous les réels à l'exception de 2 ont une image par f. $D_f =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

b) Décomposons la fonction homographique h. Pour tout $x \in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{\overbrace{6.x}^{\text{Combien de fois } 2.x-4 \text{ dans } 6.x\ ?} -17}{2x-4} = \frac{\overbrace{3.(2.x-4)+12}^{\text{On compense } -12 \text{ par } +12. =6.x} -17}{2x-4} = \frac{3.(2.x-4)-5}{2.x-4}$$

$$= \underbrace{\frac{3.\cancel{(2.x-4)}}{\cancel{2.x-4}} + \frac{-5}{2.x-4}}_{\text{On fractionne la fraction, puis on simplifie.}} = \underbrace{3-\frac{5}{2.x-4}}_{\text{Forme décomposée de f}}$$

c) L'avantage de l'écriture décomposée de la fonction f est que la variable x n'y apparaît qu'une seule fois. Très intéressant pour un enchaînement d'inégalités.
Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-\infty;2[$ tels que $a<b$.
Comment leurs images $f(a)$ et $f(b)$ sont-elles rangées ?

Si $a<b<2$ $\underset{\boxed{\times 2}}{\text{alors}}$ $2.a<2.b<4$ $\underset{\boxed{-4}}{\text{donc}}$ $\underbrace{2.a-4<2.b-4}_{\text{Deux réels négatifs}}<0$

$\underset{\boxed{\text{Inverse}}}{\text{donc}}$ $\underbrace{\frac{1}{2.a-4}>\frac{1}{2.b-4}}_{\text{La fonction inverse est décroissante sur }]-\infty;0[. \text{ L'ordre change...}}$ $\underset{\boxed{\times(-5)}}{\text{donc}}$ $\underbrace{\frac{-5}{2.a-4}<\frac{-5}{2.b-4}}_{\text{Multipliant par un nombre négatif, l'ordre change...}}$

$\underset{\boxed{+4}}{\text{donc}}$ $\underbrace{3-\frac{5}{2.a-4}}_{f(a)} < \underbrace{3-\frac{5}{2.b-4}}_{f(b)}$

Conclusion : sur l'intervalle $]-\infty;2[$, si $\underbrace{a<b \text{ alors } f(a)<f(b)}_{\text{f conserve l'ordre sur }]-\infty;2[}$.

Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty;2[$.

Dernière partie : une racine au second degré

a) Calculons l'image de -2 par la fonction h, autrement dit calculons $h(-2)$.

$$h(-2) = 49\times(-2)^2+42\times(-2)-27 = 49\times4-84-27 = 196-111 = 85$$

b) La fonction du second degré $h(x)=49.x^2+42.x-27$ nous est donnée sous forme développée. Factorisons-là en passant à la forme canonique !

$$h(x) = 49.x^2 + 42.x - 27 = \underbrace{(7.x)^2 + 2\times 7.x\times 3}_{\text{Début de l'identité remarquable } (7.x+3)^2} - 27 = \underbrace{(7.x+3)^2 - 9}_{49.x^2+42.x} - 27 = \underbrace{(7.x+3)^2 - 36}_{\text{Forme canonique de } h(x)}$$

$$= \underbrace{(7.x+3)^2 - (6)^2}_{a^2-b^2} = \underbrace{(7.x+3-6)}_{(a-b)}.\underbrace{(7.x+3-6)}_{(a+b)} = \underbrace{(7.x-3).(7.x+9)}_{\text{Forme factorisée de } h(x)}$$

➲ D'après son écriture factorisée, la fonction du second degré h est le produit des facteurs affines $7.x-3$ et $7.x+9$. Déterminons les valeurs pour lesquelles ils s'annulent.

$7.x-3=0 \Leftrightarrow 7.x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{7}$ | $7.x+9=0 \Leftrightarrow 7.x=-9 \Leftrightarrow x=-\frac{9}{7}$

Le tableau de signe de la fonction du second degré h est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{7}$		$\frac{3}{7}$		$+\infty$
$7.x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$7.x+9$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Pour établir la variation de la fonction h sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{3}{7}\right]$, utilisons sa forme canonique $h(x)=(7.x+3)^2-36$ car la variable x n'y apparaît qu'une seule fois.

a et b sont deux réels de $\left]-\infty;-\frac{3}{7}\right]$ tels que $a<b$. Comparons $h(a)$ et $h(b)$.

Si $a<b\le -\frac{3}{7}$ $\xrightarrow[\boxed{\times 7}]{\text{alors}}$ $7.a<7.b\le -3$ $\xrightarrow[\boxed{+3}]{\text{donc}}$ $\underbrace{7.a+3<7.b+3}_{\text{Deux réels négatifs}}\le 0$

$\xrightarrow[\boxed{\text{Carré}}]{\text{donc}}$ $\underbrace{(7.a+3)^2>(7.b+3)^2}_{\text{La fonction carré est décroissante sur }]-\infty;0]\text{. L'ordre change...}}$ $\xrightarrow[\boxed{-36}]{\text{donc}}$ $\underbrace{\underbrace{(7.a+3)^2-36}_{h(a)} > \underbrace{(7.b+3)^2-36}_{h(b)}}_{\text{h a changé l'ordre...}}$

<u>Conclusion :</u> la fonction h est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{3}{7}\right]$.

Devoir Surveillé No.6

Le contexte

Ce sixième devoir d'une heure eut lieu à la mi-février 2006. Il était constitué d'un problème portant sur l'étude complète d'une fonction homographique et d'un petit exercice annexe portant sur la détermination d'un ensemble de définition.
Le pire dans ce devoir, c'est qu'il exigeait d'avoir travaillé sérieusement précédemment.
Les calculatrices étaient autorisées.

L'énoncé

Première partie : il était une fois...la fonction homographique h

La fonction homographique h est définie par :

$$h(x)=\frac{6.x-17}{7-2.x}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

Note : *une grande attention sera portée aux justifications fournies.*

b) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-2	1	3	$3,25$	$3,5$	4	5	6	10
$h(x)$	$-2,6$	$-2,2$		5		-7	$-4,3$	$-3,8$	$-3,3$

Sur le graphique ci-contre, tracer la courbe (C_h) représentant la fonction h.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

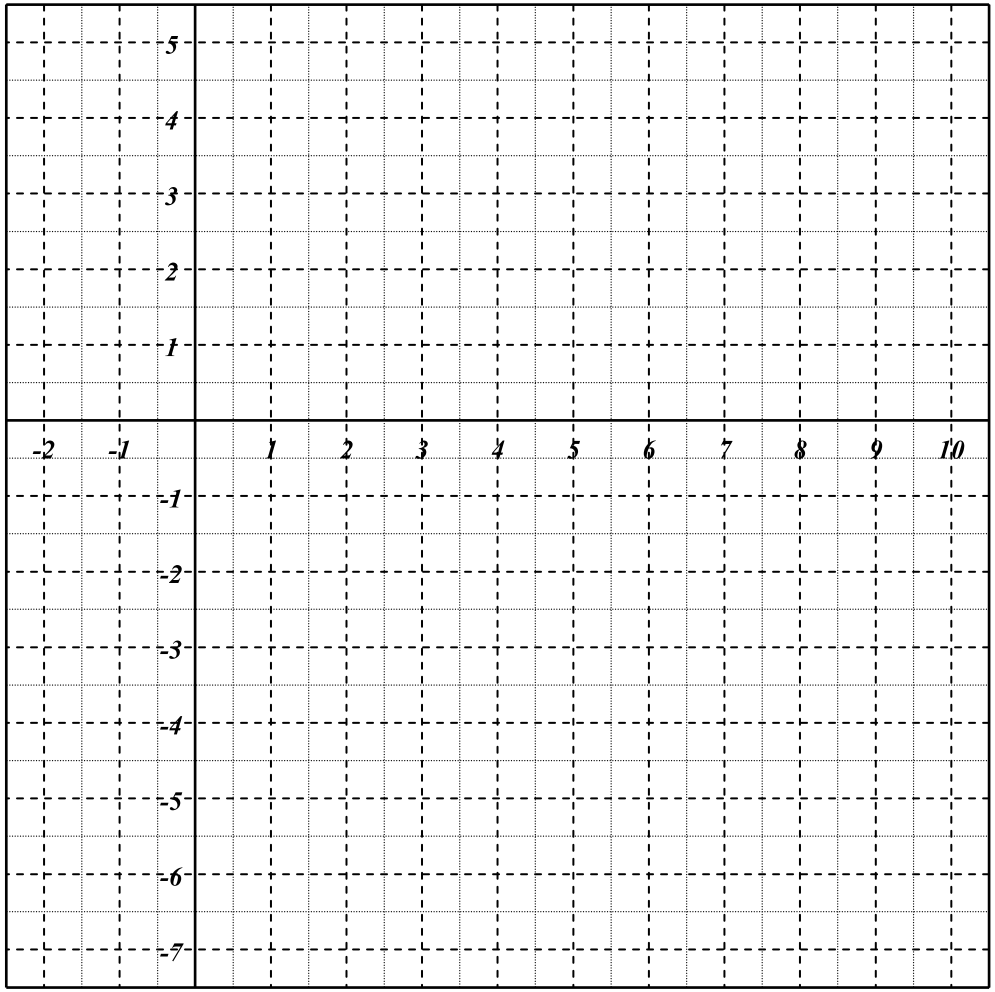
$$h(x)\leq 2$$

d) Décomposer la fonction homographique h, c'est-à-dire déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout réel x appartenant à D_h on ait :

$$h(x)=a+\frac{b}{7-2.x}$$

Au moyen d'un enchaînement d'inégalités, établir le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;3,5[$.

Note : *une grande attention sera portée aux justifications fournies. On indiquera ce qui est fait à chaque étape*



e) Démontrer que pour tous réels x et y appartenant à D_h, on a :

$$h(x)-h(y)=\frac{8.(x-y)}{(7-2.x).(7-2.y)}$$

En utilisant l'égalité précédente, établir le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]3,5;+\infty[$.

f) Conclure cette étude de la fonction h en dressant son tableau de variation.

Seconde partie : les raisons de la définition

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation du second degré :

$$25.x^2-10.x-48>0$$

b) La fonction j est définie par :

$$j(x)=\frac{1}{\sqrt{25.x^2-10.x-48}}$$

En utilisant la question précédente, déterminer l'ensemble de définition de la fonction j.
Note : *une grande attention sera portée aux justifications fournies.*

Le corrigé

Première partie : il était une fois...la fonction homographique h

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction homographique $h(x)=\frac{6.x-17}{-2.x+7}$, c'est trouver tous les réels x qui ont une image par h.
Fondamentalement $h(x)$ est un quotient. Celui-ci ne peut exister que si son dénominateur est non nul.

Le quotient $h(x)$ existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $-2.x+7$ est non nul

$$\Leftrightarrow \quad -2.x+7\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2.x\neq -7 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}=3,5$$

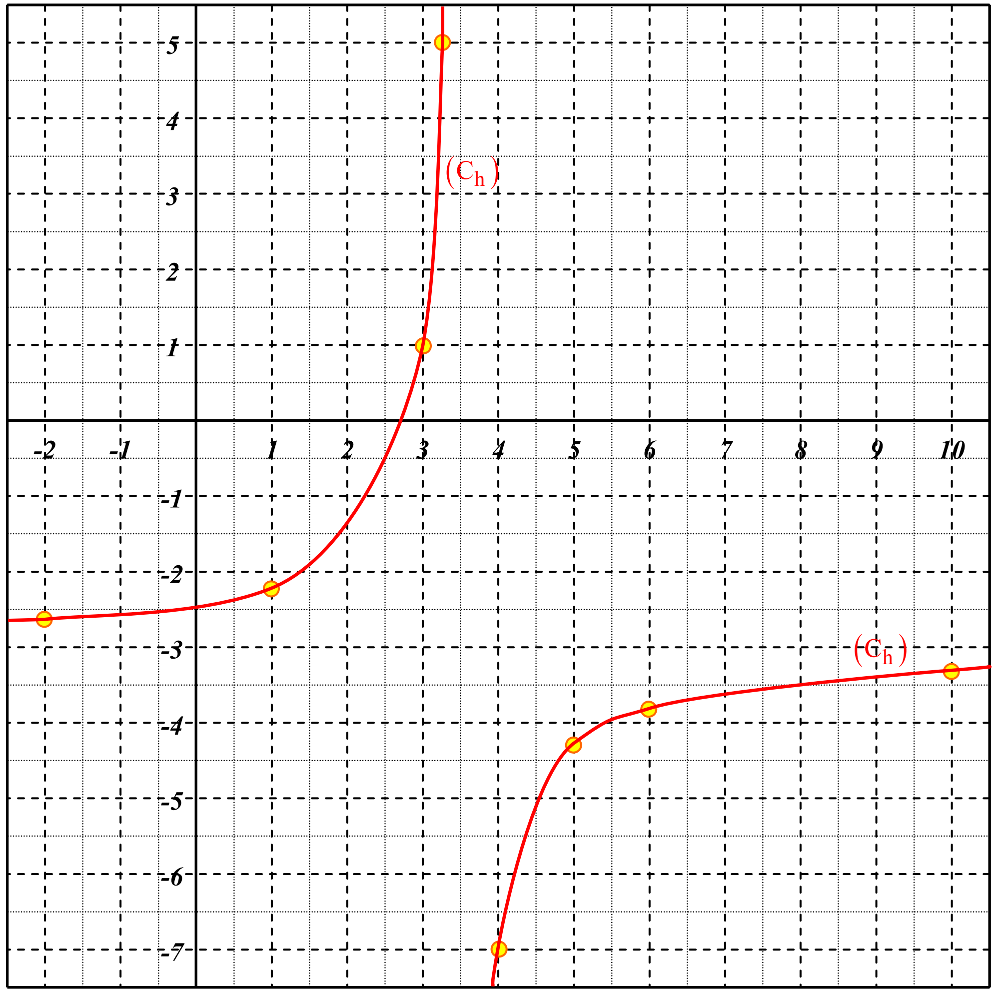
Conclusion : à l'exception de 3,5, tous les réels ont une image par h.

L'ensemble de définition de la fonction h est $D_h = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{7}{2}\right\}=\left]-\infty;\frac{7}{2}\right[\cup\left]\frac{7}{2};+\infty\right[$.

b) Nous venons de voir que 3,5 n'a pas d'image par la fonction h. Inutile de la calculer !
Par contre, 1 appartenant à son ensemble de définition en a une. Calculons la !

$$h(3)=\frac{6\times3-17}{-2\times3+7}=\frac{18-17}{-6+7}=\frac{1}{1}=1$$

➲ L'ensemble de définition de la fonction h étant composé de deux intervalles disjoints, la courbe (C_h) tracée ci-contre est constituée de deux branches disjointes : l'une définie sur $]-\infty;3,5[$ et l'autre sur l'intervalle $]3,5;+\infty[$. Elle présente une coupure en 3,5.



c) Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $h(x) \leq 2$, nous allons chercher à pouvoir nous prononcer sur le signe d'une fraction.

$$\frac{6.x-17}{-2.x+7} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{6.x-17}{-2.x+7} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{6.x-17}{-2.x+7} - \frac{2\times(-2.x+7)}{-2.x+7}}_{\text{On met tout au même dénominteur } -2.x+7.} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(6.x-17)-(-4.x+14)}{-2.x+7} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6.x-17+4.x-14}{-2.x+7} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{10.x-31}{-2.x+7}}_{\text{Quand ce quotient est-il négatif ou nul ?}} \leq 0$$

Depuis la question 1.a, nous savons que le facteur affine $-2.x+7$ s'annule en 3,5.

Pour ce qui est du numérateur : $10.x-31=0 \Leftrightarrow 10.x=31 \Leftrightarrow x=\frac{31}{10}=3{,}1$

Connaissant les signes des facteurs affines $10.x-31$ et $-2.x+7$, nous pouvons dresser le tableau de signe de leur quotient.
Nous voulons savoir quand celui-ci est négatif ou nul.

x	$-\infty$		$\frac{31}{10}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$10.x-31$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-2.x+7$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Le quotient		$-$	0	$+$	||	$-$	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) \leq 2$ est $]-\infty;3{,}1] \cup]3{,}5;+\infty[$.

d) Décomposons la fonction homographique h. Pour tout $x \in D_h$, nous pouvons écrire :

$$h(x) = \frac{\overbrace{6.x}^{\text{Combien de fois } -2.x+7 \text{ dans } 6.x\ ?} -17}{-2.x+7} = \frac{\overbrace{-3\times(-2.x+7)+21}^{\text{On compense } -21 \text{ par } +21. =6.x} -17}{-2.x+7} = \frac{-3\times(-2.x+7)+4}{-2.x+7}$$

$$= \underbrace{\frac{-3\times\cancel{(-2.x+7)}}{\cancel{-2.x+7}} + \frac{4}{-2.x+7}}_{\text{On fractionne, puis on simplifie.}} = \underbrace{-3+\frac{4}{-2.x+7}}_{\text{Forme décomposée de h}}$$

➲ Soient x et y deux réels de $]-\infty;3{,}5[$ tels que $x<y$. Comparons $h(x)$ et $h(y)$.

Si $x<y<3{,}5$ $\underset{\boxed{\times(-2)}}{\text{alors}}$ $\underbrace{2.x>2.y>-7}_{\text{On multiplie par un négatif...}}$ $\underset{\boxed{+7}}{\text{donc}}$ $\underbrace{-2.x+7>-2.y+7>0}_{\text{Deux réels positifs}}$

$\underset{\boxed{\text{Inverse}}}{\text{donc}}$ $\underbrace{\frac{1}{-2.x+7} < \frac{1}{-2.y+7}}_{\text{La fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[. \text{ L'ordre change...}}$ $\underset{\boxed{\times 4}}{\text{donc}}$ $\frac{4}{-2.x+7} < \frac{4}{-2.y+7}$

$\underset{\boxed{-3}}{\text{donc}}$ $-3+\frac{4}{-2.x+7} < -3+\frac{4}{-2.y+7}$ donc $\underbrace{h(x)<h(y)}_{\text{h conserve l'ordre sur }]-\infty;3{,}5[}$

Conclusion : comme elle y conserve l'ordre, la fonction h est croissante sur $]-\infty;3{,}5[$.

e) Pour tous réels x et y appartenant à D_h, nous pouvons écrire :

$$h(x)-h(y) = \frac{6.x-17}{7-2.x} - \frac{6.y-17}{7-2.y} = \underbrace{\frac{[(6.x-17).(7-2.y)]-[(6.y-17).(7-2.x)]}{(7-2.x).(7-2.y)}}_{\text{On met les deux fracstions au même dénominateur...}}$$

$$= \frac{\overbrace{[42.x-\cancel{12.x.y}\cancel{+119}+34.y]-[42.y-\cancel{12.y.x}\cancel{+119}+34.x]}^{\text{Après développements, certaines simplifications peuvent être effectuées.}}}{(7-2.x).(7-2.y)}$$

$$= \frac{42.x+34.y-42.y-34.x}{(7-2.x).(7-2.y)} = \frac{8.x-8.y}{(7-2.x).(7-2.y)} = \frac{8.(x-y)}{(7-2.x).(7-2.y)}$$

➲ D'après sa courbe (C_h), la fonction h semble être croissante sur l'intervalle $]3{,}5;+\infty[$.
Prouvons le en utilisant l'égalité que nous venons d'établir.
Soient x et y deux réels de l'intervalle $]3{,}5;+\infty[$ tels que $x<y$.
Déterminons les signes de tous les facteurs apparaissant dans le quotient $h(x)-h(y)$:

- ➥ Le facteur $x-y$ est négatif car $x<y$ donc $x-y<0$.
- ➥ Le facteur $7-2.x$ est négatif car x appartient à l'intervalle $]3{,}5;+\infty[$. En effet :
  Comme $x \in]3{,}5;+\infty[$ alors $x>3{,}5$ $\underset{\times(-2)}{\text{donc}}$ $\underbrace{-2.x<-7}_{\text{L'ordre change}}$ $\underset{+7}{\text{donc}}$ $7-2.x<0$
- ➥ Le facteur $7-2.y$ est également négatif car y appartient aussi à $]3{,}5;+\infty[$.

Donc la différence $h(x)-h(y) = \frac{8\times\text{négatif}}{\text{négatif}\times\text{négatif}}$ est négative. Donc $h(x)<h(y)$.

Ainsi sur l'intervalle $]3,5;+\infty[$, si $x < y$ alors $h(x) < h(y)$.

<u>Conclusion :</u> comme elle y conserve l'ordre, alors f est croissante sur $]3,5;+\infty[$.

f) Les questions 1.d et 1.e nous permettent de dresser le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		$3,5$		$+\infty$
h	-3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-3

Seconde partie : les raisons de la définition

a) Pour résoudre l'inéquation $25.x^2 - 10.x - 48 > 0$, factorisons via la forme canonique.

$$25.x^2 - 10.x - 48 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(5.x)^2 - 2\times 5.x\times 1}_{\text{Début de l'identité } (5.x-1)^2} - 48 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(5.x-1)^2 - 1}_{25.x^2-10.x} - 48 > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(5.x-1)^2 - 7^2}_{a^2-b^2} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(5.x+6)}_{(a+b)}.\underbrace{(5.x-8)}_{(a-b)} > 0$$

Ayant factorisé la forme du second degré du premier membre, nous pouvons dresser son tableau de signe.

x	$-\infty$	$-1,2$		$1,6$		$+\infty$
$5.x+6$	$-$	0	$+$	|	$+$	
$5.x-8$	$-$	|	$-$	0	$+$	
$25.x^2 - 10.x - 48$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S = \left]-\infty;-\frac{6}{5}\right[\cup \left]\frac{8}{5};+\infty\right[$$

b) La racine $\sqrt{25.x^2 - 10.x - 48}$ n'existe que lorsque $25.x^2 - 10.x - 48$ est positif ou nul. Ensuite, on ne peut inverser que des quantités non nulles. Cela ayant été dit, il vient :

$$\text{La racine } j(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \underbrace{25.x^2 - 10x - 48 \text{ est strictement positif}}_{\sqrt{25.x^2-10x-48} \text{ doit exister et être non nulle.}}$$

$$\Leftrightarrow x \in \underbrace{\left]-\infty;-\frac{6}{5}\right[\cup \left]\frac{8}{5};+\infty\right[}_{\text{Ensemble de définition de } j}$$

Devoir Surveillé No.7

Le contexte

Ce septième devoir d'une heure eut lieu à la mi-mars 2006, juste avant que le soviet du lycée n'en décrète le blocage. Ben oui, il y a des choses bien plus importantes que la géométrie analytique. Par exemple, les vacances.
Ce septième DS était constitué d'un seul problème de géométrie analytique abordant tout ce qui est à savoir sur le sujet selon moi : coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle, manipulation des équations de droites, coordonnées d'une intersection.
Les calculatrices étaient autorisées.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Les deux vecteurs de base ont pour norme un centimètre. Dans ce repère, on considère les points :

$$A(-4;3) \qquad B(1;-3) \qquad C(5;1)$$

Sur le graphique ci-contre est tracée la droite Δ.
On appelle I le milieu du segment [AB].

a) Sur la figure ci-contre, placer les points A, B et C.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ.
Déterminer par le calcul les coordonnées du point I.
Le point I appartient-il à la droite Δ ? On justifiera sa réponse.

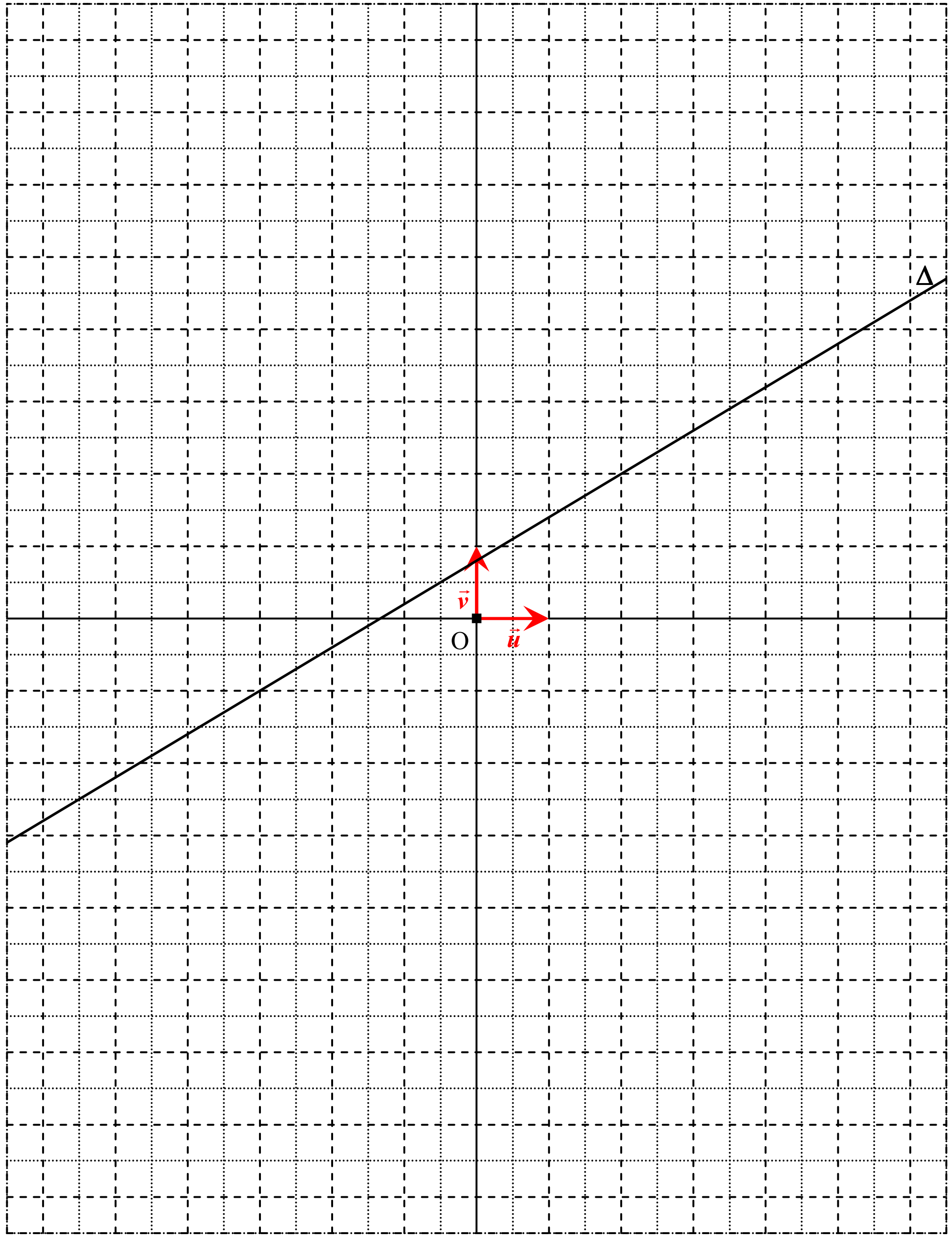
c) Déterminer par le calcul les coordonnées $(x_E;y_E)$ du point E défini par la relation vectorielle :

$$3.\overrightarrow{AE}+2.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CA}$$

Placer le point E sur la figure.

On appelle $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne est $7.x+6.y-42=0$.
La droite $\mathcal{D}'$ a pour équation $y=4$.

d) Tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sur la figure ci-contre. On indiquera comment celles-ci ont été construites.
Déterminer les coordonnées $(x_J;y_J)$ du point J qui est l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.



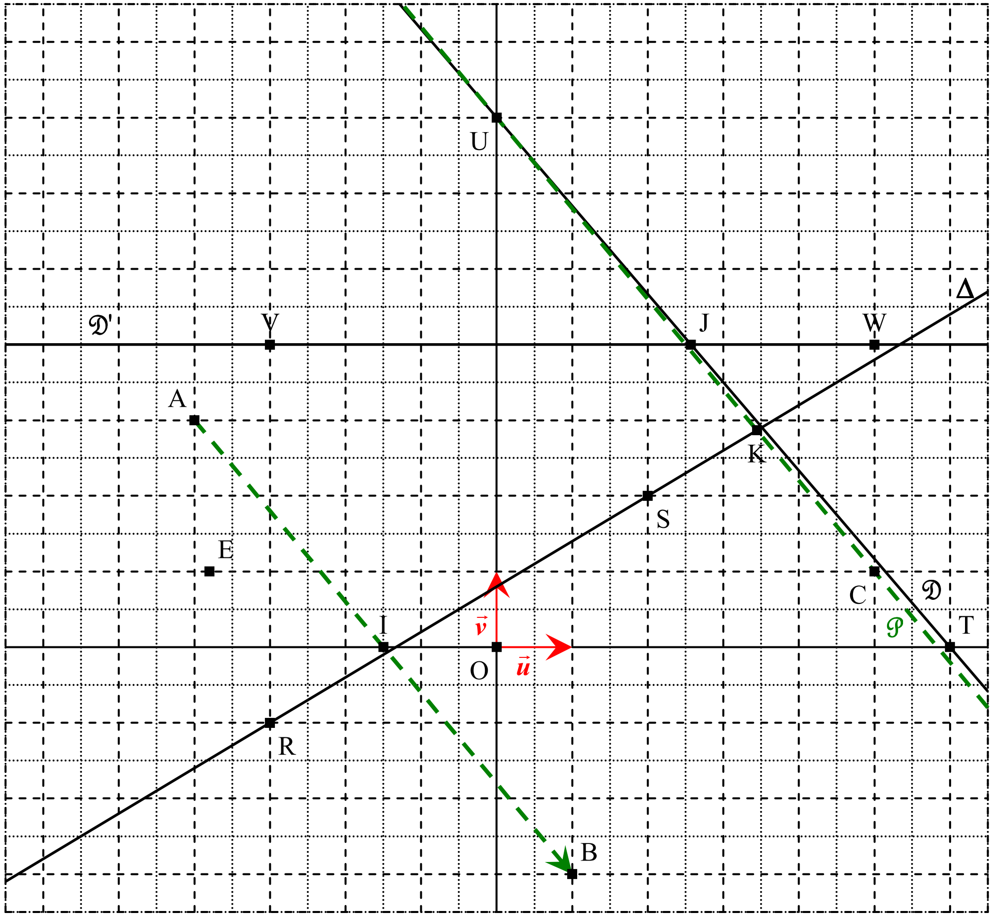
On appelle $\mathcal{P}$ la parallèle à la droite (AB) passant par le point C.

e) Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont-elles parallèles ? On justifiera sa réponse.

f) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{P}$.
Déterminer les coordonnées $(x_K ; y_K)$ du point K qui est l'intersection des droites $\mathcal{P}$ et Δ.

Le corrigé

a) A l'issue du problème, la figure est celle qui suit :



b) Les points $R(-3;-1)$ et $S(2;2)$ appartiennent à la droite Δ. La droite Δ est donc aussi la droite (RS). De plus, un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\overrightarrow{RS}\underbrace{\begin{pmatrix} 2-(-3)=5 \\ 2-(-1)=3 \end{pmatrix}}_{\text{Arrivée−Départ}}$.

Déterminer une équation de la droite Δ, c'est chercher à quelles conditions sur ses coordonnées $(x;y)$ un point M appartient à celle-ci.

$$M(x;y)\in\Delta \iff \text{Les vecteurs } \overrightarrow{RM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y+1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{RS}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff \det\left(\overrightarrow{RM},\overrightarrow{RS}\right)=0 \iff \begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ y+1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$\iff \underbrace{(x+3).3-(y+1).5=0}_{\substack{\text{Différence des produits} \\ \text{de chaque diagonale}}} \iff 3.x+9-5.y-5=0$$

$$\iff 3.x-5.y+4=0$$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne de la droite Δ est $3.x-5.y+4=0$.

Cette équation Δ est juste car les coordonnées des points R et S la vérifient. En effet :

$$\underbrace{3\times(-3)-5\times(-1)+4=-9+5+4=0}_{\text{Pour R}} \qquad \underbrace{3\times 2-5\times 2+4=6-10+4=0}_{\text{Pour S}}$$

➲ Déterminons les coordonnées $(x_I;y_I)$ du point I qui est le milieu du segment [AB].
Le point I vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{AB} \iff \begin{pmatrix} x_I+4 \\ y_I-3 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x_I+4 \\ y_I-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2,5 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\text{Deux vecteurs égaux ont...}}$$

$$\iff \underbrace{x_I+4=2,5}_{\text{...mêmes abscisses...}} \text{ et } \underbrace{y_I-3=-3}_{\text{...et mêmes ordonnées.}} \iff x_I=-1,5 \text{ et } y_I=0$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point I sont $(-1,5;0)$.

➲ Pour savoir si le point I appartient réellement à la droite Δ, regardons si les coordonnées du premier vérifient l'équation de la seconde.

$$3\times(-1,5)-5\times 0+4=-4,5+0+4=-0,5\neq 0$$

<u>Conclusion :</u> comme les coordonnées de I ne vérifient pas l'équation de Δ alors le point n'appartient pas à la droite. Sur la figure, Δ passe juste à côté de I.

c) Le point E est défini par la relation vectorielle $3.\overrightarrow{AE}+2.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CA}$. Traduisons cette dernière sous forme de coordonnées.

$$3.\underbrace{\begin{pmatrix}x_E+4\\y_E-3\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AE}}+2.\underbrace{\begin{pmatrix}x_E-1\\y_G+3\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{BE}}=\underbrace{\begin{pmatrix}-9\\2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{CA}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}3.x_E+12\\3.y_E-9\end{pmatrix}}_{\text{On distribue 3}}+\underbrace{\begin{pmatrix}2.x_E-2\\2.y_E+6\end{pmatrix}}_{\text{On distribue 2}}=\begin{pmatrix}-9\\2\end{pmatrix}$$

$$3.\overrightarrow{AE}+2.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}5.x_E+10\\5.y_E-3\end{pmatrix}}_{\text{On additionne...}}=\begin{pmatrix}-9\\2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 5.x_E+10=-9 \quad \underline{\text{et}} \quad 5.y_E-3=2$$

$$\Leftrightarrow 5.x_E=-19 \quad \underline{\text{et}} \quad 5.y_E=5$$

$$\Leftrightarrow x_E=-\frac{19}{5}=-3,8 \quad \underline{\text{et}} \quad y_E=1$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point E sont $(-3,8;1)$.

d) Pour tracer une droite, il suffit d'en connaître deux points et de posséder une règle. En testant divers entiers dans l'équation $7.x+6.y-42=0$ et en connaissant un peu ses tables de multiplications, on trouve que les points $T(6;0)$ et $U(0;7)$ appartiennent à la droite $\mathcal{D}$ car leurs coordonnées en vérifient l'équation. En effet :

$$\underbrace{7\times6+6\times0-42=42+0-42=0}_{\text{Donc } T\in\mathcal{D}} \qquad \underbrace{7\times0+6\times7-42=0+42-42=0}_{\text{Donc } U\in\mathcal{D}}$$

On trace la droite $\mathcal{D}$ en construisant la droite (TU). Il s'agit de la même droite.

➲ La droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y=4$ est l'ensemble des points du plan dont l'ordonnée y est égale à 4. Elle passe par exemple par les points $V(-3;\underline{4})$ et $W(5;\underline{4})$.

➲ Le point J étant l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, il appartient à ces deux droites. Donc ses coordonnées $(x_J;y_J)$ vérifient les deux équations $\mathcal{D}:7.x+6.y-42=0$ et $\mathcal{D}':y=4$.
Donc les coordonnées $(x_J;y_J)$ sont les solutions du système linéaire :

$$\begin{cases}7.x_J+6.y_J-42=0 & \textit{(1)} \leftarrow J\in\mathcal{D}\\ \qquad\qquad y_J=4 & \textit{(2)} \leftarrow J\in\mathcal{D}'\end{cases}$$

Le connaissant déjà, remplaçons y_J par sa valeur 4 dans l'équation ***(1)*** afin d'obtenir x_J.

$$7.x_J+6\times4-42=0 \Leftrightarrow 7.x_J+24-42=0 \Leftrightarrow 7.x_J-18=0 \Leftrightarrow x_J=\frac{18}{7}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point J sont $(18/7;4)$.

e) Afin de savoir si les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles, comparons deux de leurs vecteurs directeurs. Nous allons chercher à déterminer s'ils sont colinéaires.

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $\underbrace{7.x+6.y-42=0}_{a.x+b.y+c=0}$ est $\vec{u}\underbrace{\begin{pmatrix}-6\\7\end{pmatrix}}_{(-b;a)}$.

Comme la droite $\mathcal{P}$ est parallèle à (AB) alors l'un de ses vecteurs directeurs est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$.

Calculons le déterminant (test de colinéarité) de ces deux vecteurs.

$$\det\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}-6 & 5\\7 & -6\end{vmatrix}=(-6)\times(-6)-7\times5=36-35=1\neq0$$

<u>Conclusion :</u> comme leur déterminant est non nul, alors les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires. Donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles.

f) $\mathcal{P}$ est la droite passant par $C(5;1)$ et dont l'un des vecteurs directeurs est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$.

$$M(x;y)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-5\\y-1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-5 & 5\\y-1 & -6\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5).(-6)-(y-1).5=0 \Leftrightarrow -6.x+30-5.y+5=0$$

$$\Leftrightarrow -6.x-5.y+35=0 \Leftrightarrow \underbrace{6.x+5.y-35=0}_{\text{On multiplie tout par }-1.}$$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne de la droite $\mathcal{P}$ est $6.x+5.y-35=0$.

➲ Comme le point K appartient aux deux droites $\mathcal{P}$ et Δ alors ses coordonnées $(x_K;y_K)$ en vérifient les deux équations $\mathcal{P}:6.x+5.y-35=0$ et $\Delta:3.x-5.y+4=0$.
$(x_K;y_K)$ sont les solutions du système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases}6.x_K+5.y_K-35=0 & \textit{(1)} \leftarrow K\in\mathcal{P}\\ 3.x_K-5.y_K+4=0 & \textit{(2)} \leftarrow K\in\Delta\end{cases}$$

Pour trouver x_K, on élimine y_K par combinaisons linéaires

$$\begin{array}{lcr} \oplus\ (1) & \longrightarrow & 6.x_K+5.y_K-35=0 \\ (2) & \longrightarrow & 3.x_K-5.y_K+4=0 \\ \hline & & 9.x_K-31=0 \\ & & x_K=\dfrac{31}{9} \end{array}$$

Pour déterminer y_K, on supprime x_K toujours en combinant les deux équations.

$$\begin{array}{lcr} \ominus\ (1) & \longrightarrow & 6.x_K+5.y_K-35=0 \\ (2) & \xrightarrow{\times 2} & 6.x_K-10.y_K+8=0 \\ \hline & & 15.y_K-43=0 \\ & & y_K=\dfrac{43}{15} \end{array}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point d'intersection K sont $\left(\dfrac{31}{9};\dfrac{43}{15}\right)$.

Devoir Surveillé No.8

Le contexte

Ce huitième devoir qui dura lui aussi une heure, eut lieu début mai 2006 au retour des vacances de paques. Il était à priori le plus facile de cette fin d'année. Il portait sur les statistiques, la résolution d'un problème au moyen d'un système de deux équations à deux inconnues et les valeurs particulières des sinus et cosinus. Que des choses plutôt simples...et à nouveau, ce qui avait été bien réussi l'année précédente, fut un désastre complet. La fainéantise et la suffisance avaient gagné.
Les calculatrices étaient autorisées.

L'énoncé

Première partie : le poids d'une entreprise de masse

L'obésité, ce mal de l'abondance et de l'immobilisme a fini par gagner l'entreprise Fédugra. Devant l'énormité de la situation, sa présidente, Madame Meg Riratoopri, a décidé de peser tous ses employés. L'étude statistique a donné les résultats suivants :

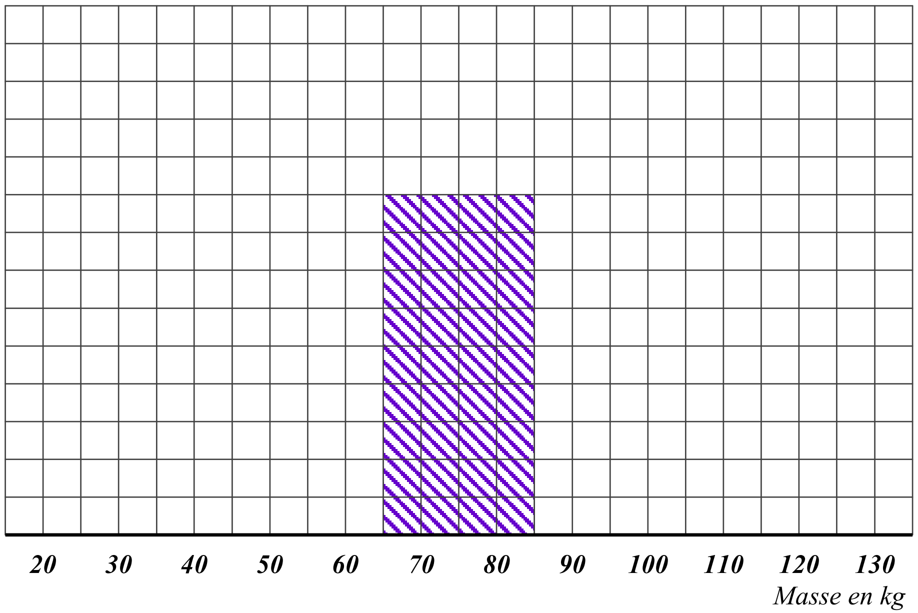
Masse	Entre 30 et 50 kg	Entre 50 et 65 kg	Entre 65 et 85 kg	Entre 85 et 100 kg	Entre 100 et 130 kg
Classe	$[30;50[$	$[50;65[$	$[65;85[$	$[85;100[$	$[100;130[$
Effectif	60	117		156	
Fréquence					$2/9 \approx 22\%$

Les données du tableau ci-dessus sont complétées par l'histogramme ci-contre où un centimètre carré (un carré de quatre carreaux) représente 12 individus.

a) A partir de l'histogramme ci-contre, déterminer l'effectif de la classe $[65;85[$. On expliquera sa réponse avec soin.

b) Démontrer que l'entreprise Fédugra compte au total 567 salariés.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'entreprise compte exactement 567 salariés.



c) Compléter le tableau ci-contre. Les fréquences seront arrondies au pourcent près.

d) Compléter l'histogramme ci-contre. On indiquera les calculs qui ont conduit à sa construction.

e) Calculer la masse moyenne des salariés de l'entreprise. Celle-ci sera arrondie à l'hectogramme près.

f) On sait que la masse moyenne des 380 salariés hommes de l'entreprise est de 87 kg. Calculer la masse moyenne des salariées femmes de l'entreprise. Celle-ci sera arrondie à l'hectogramme près.

g) Dans quelle classe, la médiane de cette série statistique se trouve-t-elle ?
En admettant que dans chacune des classes, les individus sont répartis de manière uniforme, déterminer la masse médiane des salariés de cette entreprise. Celle-ci sera arrondie à l'hectogramme près.

Seconde partie : le retour d'entreprise qui fait le poids !

L'entreprise Fédugra produit deux modèles de pèse-personnes.

- Le modèle Thamégri : son coût de production est de 13€ et il est vendu 20€.
- Le modèle Thagrauci : son coût de production est de 21€ et il est vendu 30€.

L'entreprise Fédugra vient d'honorer une commande d'un certain nombre de pèse-personnes Thamégri et Thagrauci que lui avait passée l'Association des Amis de la Balance. La société n'a concédé aucune remise à l'association.
Le coût de production de cette commande est de 614€.
Le prix de vente de cette commande est de 910€.
Combien l'entreprise Fédugra a-t-elle vendu de pèse-personnes à l'Association des Amis de la Balance ?
Une grande attention sera portée à la rédaction ainsi qu'à la clarté du raisonnement et des calculs.

Dernière partie : de la trigo plein les sinus !

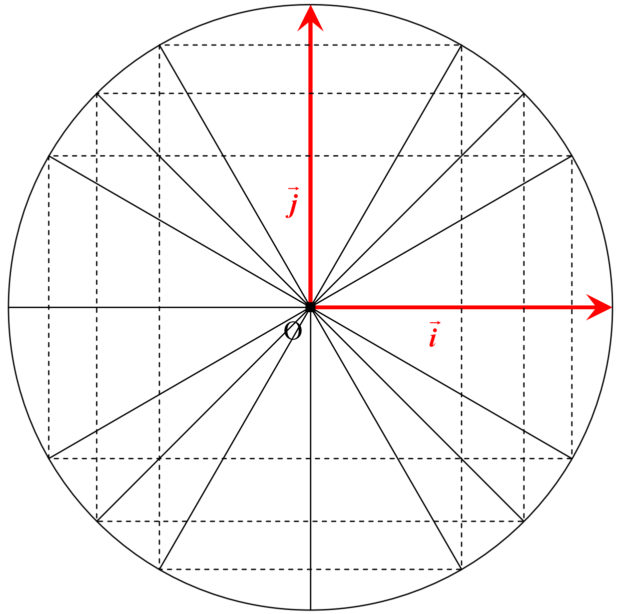
Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les points suivants :

- Le point M associé au réel $\dfrac{15.\pi}{6}$.
- Le point N associé au réel $-\dfrac{3.\pi}{4}$.
- Le point P associé au réel $\dfrac{13.\pi}{3}$.
- Le point Q associé au réel $-\dfrac{17.\pi}{6}$

En déduire les valeurs exactes des sinus et cosinus suivant :

$\cos\left(\dfrac{15.\pi}{6}\right) =$ $\sin\left(-\dfrac{3.\pi}{4}\right) =$

$\sin\left(\dfrac{13.\pi}{3}\right) =$ $\cos\left(-\dfrac{17.\pi}{6}\right) =$



Le corrigé

Première partie : le poids d'une entreprise de masse

a) Sur l'histogramme ci-contre, la classe $[65;85[$ est représentée par un rectangle de $2\times 4,5=9$ centimètres carrés. Cela correspond à $9\times 12=108$ individus ou salariés.

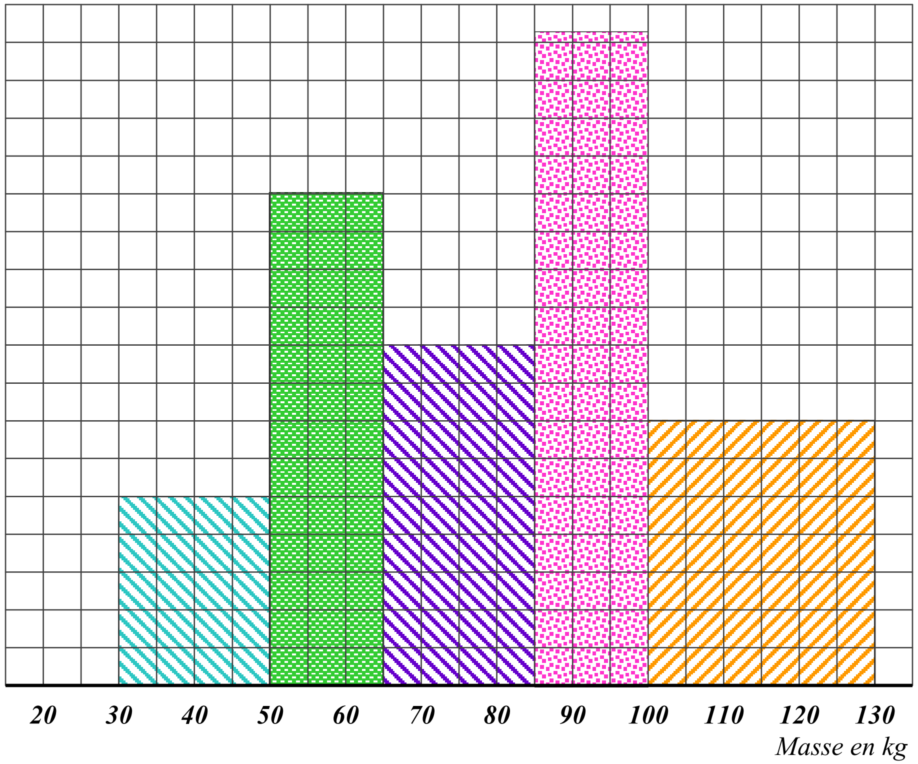
b) La cinquième classe $[100;130[$ représentant les deux neuvièmes de l'effectif total, les quatre premières $[30;50[$; $[50;65[$; $[65;85[$ et $[85;100[$ en sont les sept neuvièmes.
L'effectif cumulé de ces quatre classes est de $60+117+108+156=441$. Ainsi :

$$441=\frac{7}{9}\text{ du total}=\frac{7}{9}\times\text{total} \quad\Leftrightarrow\quad \text{total}=\frac{9}{7}\times 441=567$$

<u>Conclusion :</u> au total, l'entreprise Fédugra compte exactement 567 salariés.

c et d) Les tableau et histogramme complétés sont les suivants :

Masse	Entre 30 et 50 kg	Entre 50 et 65 kg	Entre 65 et 85 kg	Entre 85 et 100 kg	Entre 100 et 130 kg
Classe	$[30;50[$	$[50;65[$	$[65;85[$	$[85;100[$	$[100;130[$
Effectif	60	117	108	156	126
Fréquence	11%	21%	19%	27%	$2/9 \approx 22\%$
Données pour la construction de l'histogramme ci-contre					
Aire du rectangle	5 cm²	9,75 cm²	9 cm²	13 cm²	10,5 cm²
Dimensions du rectangle	$2\times 2,5$	$1,5\times 6,5$	$2\times 4,5$	$1,5\times 8,7$	$3\times 3,5$
	base × hauteur exprimées en centimètres				



e) Ayant à faire à une série statistique à caractère quantitatif continu, la moyenne se calcule en prenant pour modalités les milieux de chacune des classes. Par conséquent :

$$\text{Masse moyenne} = \frac{60\times 40+117\times 57,5+108\times 75+156\times 92,5+126\times 115}{567}$$

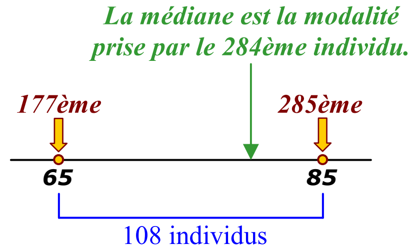
$$= \frac{46147,5}{567} \approx 81,389\text{kg}$$

<u>Conclusion :</u> à l'hectogramme près, la masse moyenne tous les salariés est de 81,4 kg.

f) La masse totale des 567 salariés de l'entreprise est de 46157 kg.
La masse totale des 380 salariés hommes est de $380\times 87 = 33060$ kg.
Donc la masse totale des 187 salariées femmes est de $46147,5-33060 = 13087,5$ kg.

Par conséquent, la masse moyenne des 187 salariées femmes est de $\frac{13087,5}{187} \approx 70$ kg.

g) La médiane d'une série statistique est la plus petite valeur telle qu'au moins la moitié des individus (ici au moins 284) aient une modalité inférieure à cette valeur.
Ce 284ème individu se trouve dans la classe $[65;85[$. Mais où exactement ?
Si l'on admet que les 108 individus de cette classe sont répartis de manière homogène alors ce 284ème individu de la série statistique qui est le $284-177 = 107$ème de la classe $[65;85[$ se trouve exactement au $\frac{107}{108}$ de celle-ci. Par conséquent :



$$\text{Médiane exacte} = 65+\frac{107}{108}\times(85-65) = 84,8\text{kg}$$

Seconde partie : le retour d'entreprise qui fait le poids !

On appelle :

- x le nombre de modèle Thamégri qui ont été vendus dans la commande.
- y le nombre de modèle Thagrauci qui ont été vendus dans la commande.

x et y sont des entiers naturels. Ces deux quantités sont soumises à deux contraintes :

- Le coût de production des x Thamégri et des y Thagrauci est de 614€.
  Cela nous conduit à l'équation : $13.x+21.y = 614$.
- Le prix de vente des x Thamégri et des y Thagrauci est de 910€.
  On en déduit l'équation : $20.x+30.y = 910 \iff \underbrace{2.x+3.y = 91}_{\text{On a tout divisé par 10}}$.

Les entiers x et y sont les solutions du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 13.x + 21.y = 614 & \textit{(1)} \\ 2.x + 3.y = 91 & \textit{(2)} \end{cases}$$

Résolvons-le !

Pour déterminer x, nous allons combiner les équations *(1)* et *(2)* de façon à éliminer y.

$$\begin{array}{lcr} \ominus\;\textit{(1)} & \longrightarrow & 13.x + 21.y = 614 \\ \textit{(2)} & \xrightarrow{\times 7} & 14.x + 6.y = 637 \\ \hline & & -x = -23 \\ & & x = 23 \end{array}$$

Pour obtenir y, on remplace x par sa valeur 23 dans l'équation *(2)*. Il vient :

$$2 \times 23 + 3.y = 91 \;\Leftrightarrow\; 3.y = 91 - 46 \;\Leftrightarrow\; 3.y = 45 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{45}{3} = 15$$

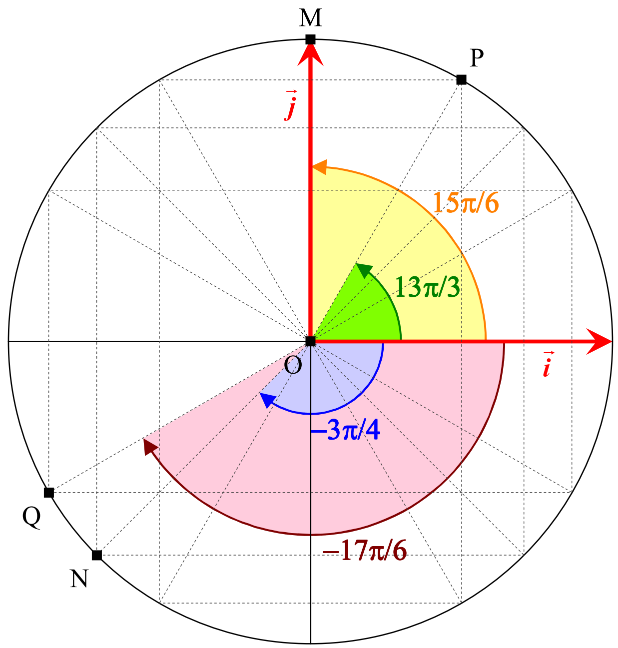
<u>Conclusion :</u> cette commande se composait de 23 modèles Thamégri et de 15 Thagrauci. Donc l'entreprise a vendu 38 pèse-personnes à l'Association des Amis de la Balance.

Dernière partie : de la trigo plein les sinus !

Afin de placer les quatre points en question sur le cercle trigonométrique, nous allons essayer de "ramener" les réels qui les définissent dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

- ☞ Pour le point M : $\frac{15.\pi}{6} = \frac{5 \times \cancel{3} \times \pi}{2 \times \cancel{3}} = \frac{5.\pi}{2} = \frac{4.\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2.\pi + \frac{\pi}{2} = 1 \text{ tour} + \frac{\pi}{2}$.
- ☞ Pour le point N : comme $-\frac{3.\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$ alors aucun travail n'est à faire.
- ☞ Pour le point P : $\frac{13.\pi}{3} = \frac{12.\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 4.\pi + \frac{\pi}{3} = 2 \times 2.\pi + \frac{\pi}{3} = 2 \text{ tours} + \frac{\pi}{3}$.
- ☞ Pour le point Q : $-\frac{17.\pi}{6} = -\frac{12.\pi}{6} - \frac{5.\pi}{6} = -2.\pi - \frac{5.\pi}{6} = -1 \text{ tour} - \frac{5.\pi}{6}$.

Reportons ces quatre points sur le cercle trigonométrique :



Les cosinus et sinus d'un réel t sont respectivement les abscisse et ordonnée du point qui lui est associé sur le cercle trigonométrique. Par suite :

- ☞ $\underbrace{\cos\left(\frac{15.\pi}{6}\right) = \cos\left(2.\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\text{C'est l'abscisse du point M...}} = 0$
- ☞ $\underbrace{\sin\left(-\frac{3.\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{C'est l'ordonnée de N...}}$
- ☞ $\underbrace{\sin\left(\frac{13.\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \times 2.\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{C'est l'ordonnée du point P}}$
- ☞ $\underbrace{\cos\left(-\frac{17.\pi}{6}\right) = \cos\left(-2.\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{C'est l'abscisse du point Q...}}$

Devoir Surveillé No.9

Le contexte

Ce dernier devoir de deux heures qui eut lieu à la fin du mois de mai, revenait sur tous les points scientifiques de ce qui avait été vu dans l'année. Il devait permettre de dire si tel heureux participant avait les connaissances et compétences requises pour aller en première scientifique. Il abordait les tableaux de signes et les variations de fonctions, revenait sur la géométrie analytique du devoir surveillé no.7 et traitait la géométrie dans l'espace qui venait d'être vue.
Comme d'habitude, ce fut un immense désastre. Ben oui, les vacances avaient commencé depuis la mi-mars. Il était con le prof !
Le premier exercice était un QCM dans l'esprit de ce qui se fait au bac.
Les calculatrices étaient interdites.

L'énoncé

Première partie : cinq questions de choix (7,5 pts)

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1,5 points et chaque mauvaise en enlève 0,5. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

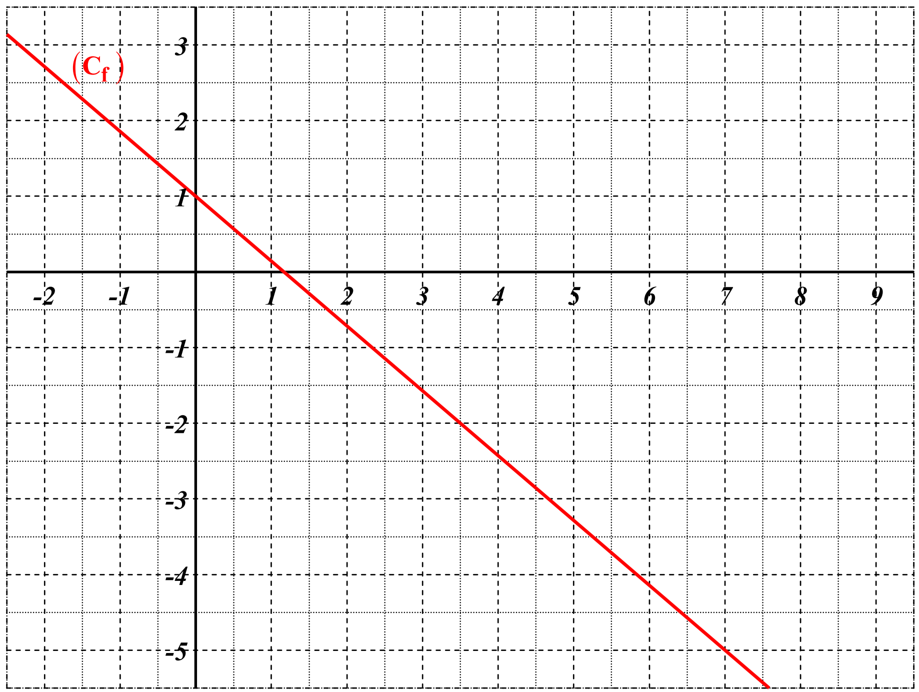
a) Parmi les tableaux de signe suivants, lequel est celui de $h(x)=\dfrac{-3.x+9}{(x-1).(2.x+4)}$?

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$-3.x+9$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2.x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$-3.x+9$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2.x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$-3.x+9$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2.x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

b) La courbe (C_f) représentant la fonction affine f est représentée ci-dessous.



Parmi les expressions suivantes, laquelle est celle de cette fonction affine f ?

$f(x) = -\frac{7}{6}.x + 1$ $\quad$ $f(x) = -\frac{6}{7}.x + 1$ $\quad$ $f(x) = \frac{6}{7}.x + 1$ $\quad$ $f(x) = \frac{7}{6}.x + 1$

c) f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est à la fois paire et 4-périodique.
On sait que f est croissante sur l'intervalle $[0;2]$. De plus :

$f(0) = 1$ $\qquad$ $f(2) = 5$

On s'intéresse à la variation de la fonction f sur l'intervalle $[10;12]$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

f est décroissante sur l'intervalle $[10;12]$ $\quad$ f est croissante sur l'intervalle $[10;12]$ $\quad$ f est d'abord croissante, puis décroissante sur l'intervalle $[10;12]$

d) La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2 - \sin(4.x)$$

On s'intéresse aux variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$.

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

f est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$ $\quad$ f est croissante sur $\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$

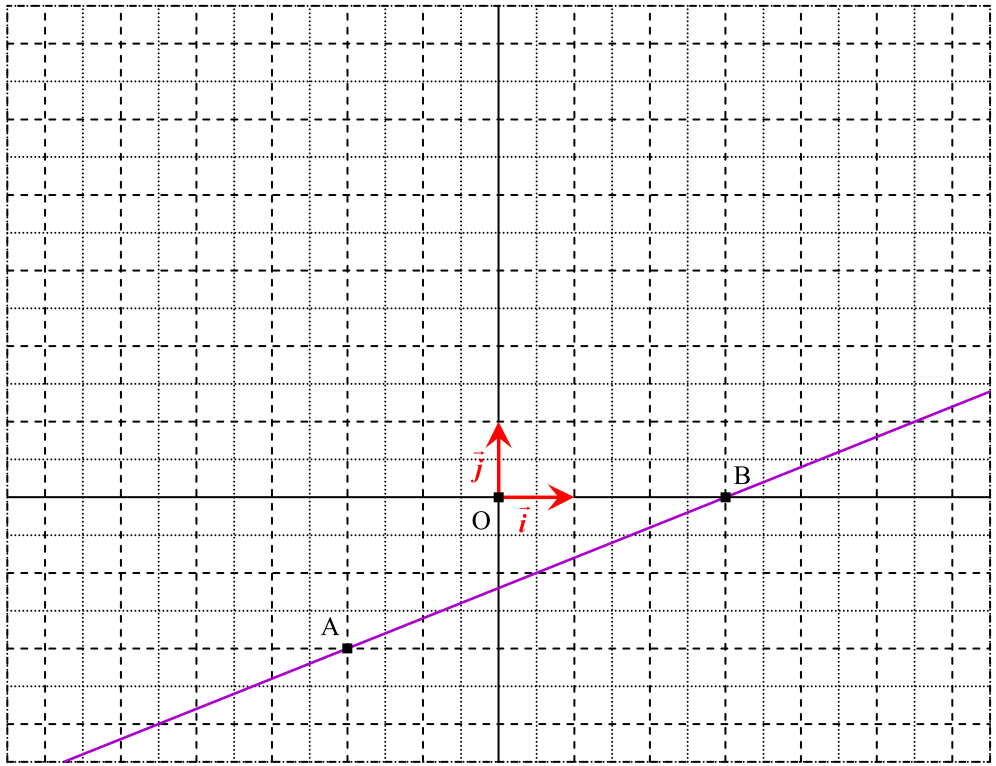
e) Combien l'équation $2.x^2 - 4.x + 10 = 0$ admet-elle de solutions ?

Aucune $\quad$ Une seule $\quad$ Deux

Seconde partie : la vengeance de la géométrie analytique (7 pts)

Sur la figure ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Dans celui-ci, on a placé les points $A(-2;-2)$ et $B(3;0)$.



a) Déterminer par le calcul une équation de la droite (AB).

Le point I est défini par la relation vectorielle :

$$2.\overrightarrow{AI} = 3.\overrightarrow{IB}$$

b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point I.

On appelle *d* la droite d'équation $3.x + 2.y - 7 = 0$.

c) Tracer la droite *d* sur la figure ci-contre. On expliquera sa construction.

d) Démontrer que les droites (AB) et *d* sont sécantes.

e) Résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

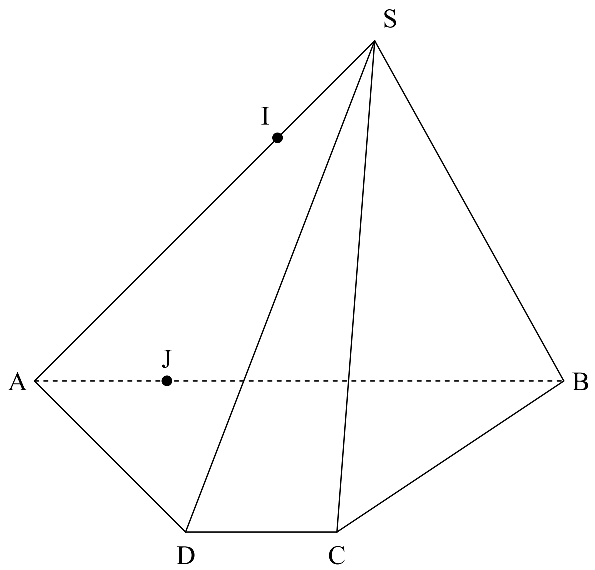
$$\begin{cases} 3.x + 2.y = 7 \\ 2.x - 5.y = 6 \end{cases}$$

En déduire les coordonnées du point E, intersection des droites (AB) et *d*. On expliquera sa réponse.

Dernière partie : un trapèze dans l'espace (5,5 pts)

Sur la figure ci-dessous, SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un trapèze. Dans ce quadrilatère, seuls les côtés [AB] et [CD] sont parallèles.
Les points I et J sont deux points respectivement des arêtes [SA] et [AB] tels que :

$$\overrightarrow{SI} = \frac{2}{7}.\overrightarrow{SA} \qquad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}.\overrightarrow{AB}$$



a) Pour chacune des trois questions suivantes, entourer la seule des affirmations proposées qui est juste. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte 0,75 points et chaque mauvaise en enlève 0,25.
L'absence de réponse n'enlève ni ne rajoute aucun point. Si le total des points obtenus est négatif, il est ramené à 0.

1. Dans l'espace, les droites (IJ) et (SD) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

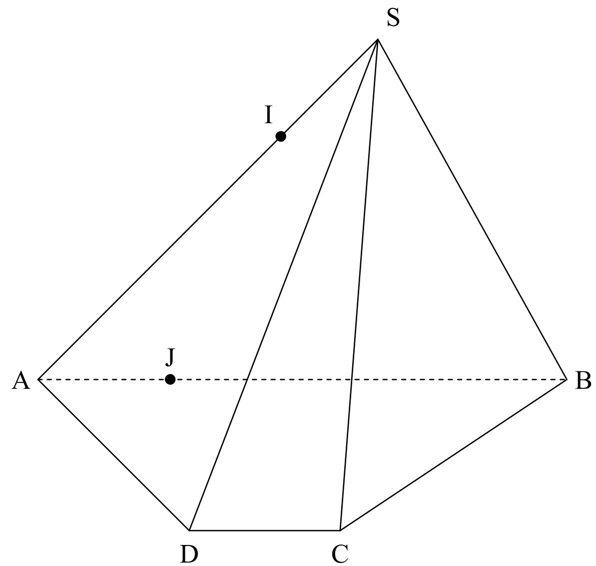
2. Dans l'espace, la droite (CD) et le plan (SAB) sont :

Sécants	La droite (CD) est incluse dans le plan (SAB)	Parallèles distincts

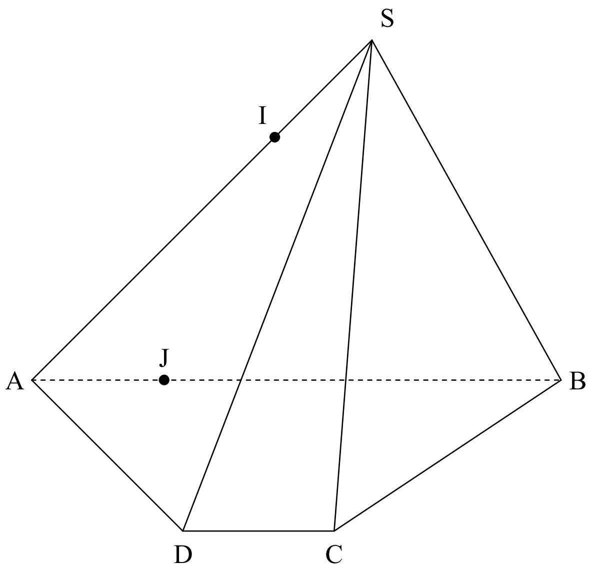
3. Dans l'espace, les plans (AJC) et (BCD) sont :

Sécants	Parallèles distincts	Confondus

b) Sur la figure ci-dessous, construire l'intersection des plans (SBD) et (CIJ). On expliquera sa construction.



c) Sur la figure ci-dessous, construire l'intersection des plans (SAB) et (SCD). On expliquera sa construction.



Le corrigé

Première partie : cinq questions de choix

a) De manière générale, le tableau de signe du facteur affine $a.x+b$ est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$a.x+b$		Signe contraire de a	0	Signe de a	

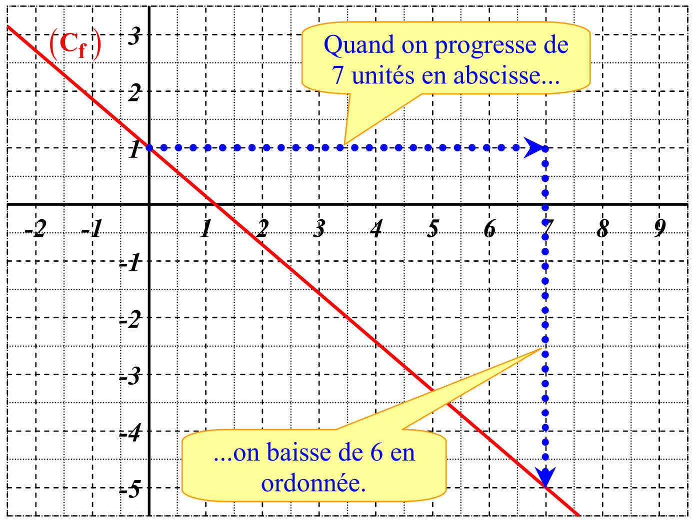
Donc le facteur affine $-3.x+9$ est positif avant 3 et il est négatif après.

De plus, le quotient $h(x)=\dfrac{-3.x+9}{(x-1).(2.x+4)}$ n'existe pas lorsque son dénominateur s'annule. Autrement dit, lorsque l'un des facteurs $x-2$ ou $2.x+4$ est nul.

Compte tenu de toutes ces exigences, le tableau de signe de $h(x)$ ne peut être que le troisième proposé.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$-3.x+9$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2.x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$h(x)$		$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

b) Les quatre propositions faites diffèrent par leur coefficient directeur. Le coefficient directeur d'une droite et par extension d'une fonction affine, correspond à sa pente : c'est la variation d'ordonnée lorsque l'on progresse d'une unité en abscisse.



Mais on établit aussi que le coefficient directeur est donné par :

$$\text{Coefficient directeur}=\frac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}}=\frac{-6}{7}=-\frac{6}{7}$$

<u>Conclusion :</u> la bonne réponse est $f(x)=-\dfrac{6}{7}.x+1$

c) Comme la fonction f est paire et croissante sur l'intervalle $[0;2]$ alors par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, elle est décroissante sur l'intervalle symétrique $[-2;0]$. Connaissant les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2;2]$ qui a pour longueur 4, on obtient celles sur $\mathbb{R}$ tout entier en recopiant ces premières : une sorte de copier-coller.

	Une période		Une période		Une période		Une péri...	
x	-2	0	2	4	6	8	10	12
f	5 ↘	1 ↗	5 ↘	1 ↗	5 ↘	1 ↗	5 ↘	1

Conclusion : f est décroissante sur l'intervalle $[10;12]$.

d) Pour répondre à cette question, établissons le sens de variation de f sur $\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$.

Soient x et y deux réels de cet intervalle tels que $x < y$. La situation est la suivante :

Sinus est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3.\pi}{2}\right]$

$$\frac{\pi}{8} \le x < y \le \frac{\pi}{4}$$

$\times 4$

$$\underbrace{\frac{\pi}{2} \le 4.x < 4.y \le \pi}_{\text{Quatre réels de l'intervalle } [\pi/2;\pi]}$$

Sinus

$$\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} \ge \sin(4.x) > \sin(4.y) \ge \underbrace{\sin(\pi)}_{0}$$

$\times(-1)$

$$-1 \le -\sin(4.x) < -\sin(4.y) \le 0$$

$+2$

$$1 \le \underbrace{2-\sin(4.x)}_{f(x)} < \underbrace{2-\sin(4.y)}_{f(y)} \le 2$$

Conclusion : ainsi sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$, si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$.

Comme elle y conserve l'ordre, alors f est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$.

e) Pour savoir combien l'équation du second degré $2.x^2 - 4.x + 10 = 0$ admet de solutions, le mieux est encore de la résoudre ainsi que nous savons le faire : en passant par la forme canonique.

$$2.x^2 - 4.x + 10 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2\times\left[x^2 - 2.x + 5\right]}_{\text{On factorise par 2...}} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2.x + 5 = 0}_{\text{...puis on divise tout par 2.}}$$

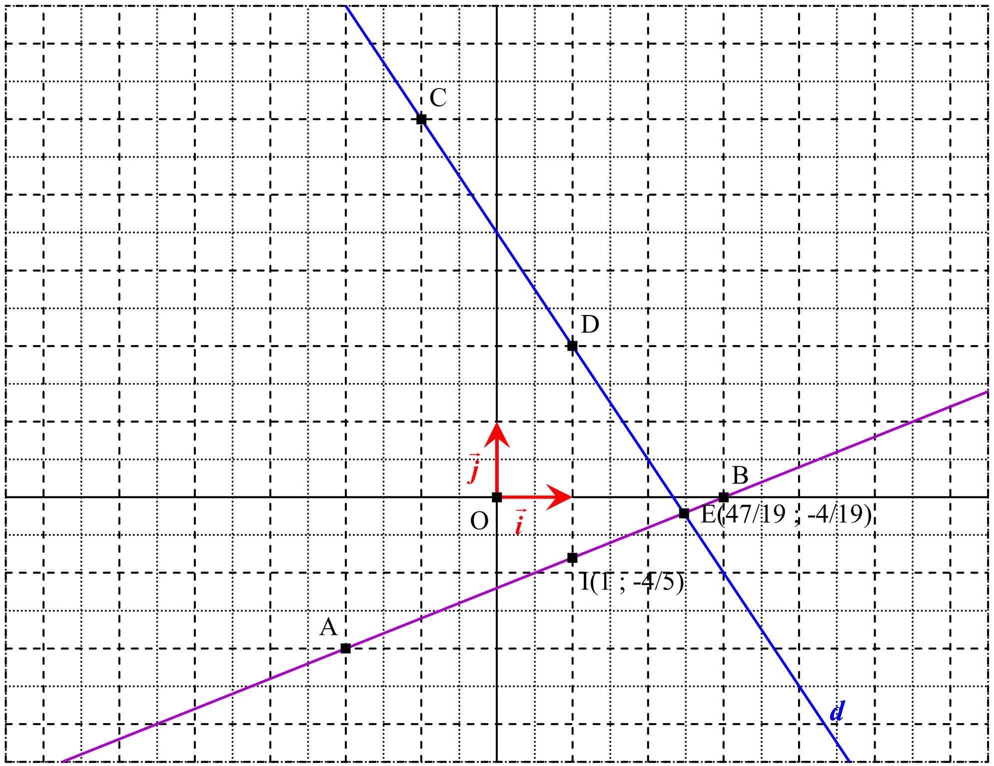
$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2.x}_{\text{Début d'une identité...}} + 5 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 - 1}_{\text{...remarquable.}} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 + 4}_{\text{Ce n'est pas une différence de deux carrés. On ne peut pas factoriser.}} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 = -4}_{\text{Comme un carré n'est jamais négatif, l'équation n'a aucune solution}}$$

Conclusion : l'équation du second degré $2.x^2 - 4.x + 10 = 0$ n'a aucune solution.

Seconde partie : la vengeance de la géométrie analytique

La figure complétée est la suivante :



a) La droite (AB) est définie par le point A et son vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-2)=5\\0-(-2)=2\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}M(x;y)\in(AB) &\Leftrightarrow \text{ Les vecteurs } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y+2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+2 & 5\\ y+2 & 2\end{vmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow (x+2)\times 2-(y+2)\times 5=0 \Leftrightarrow 2.x+4-5.y-10=0\\ &\Leftrightarrow 2.x-5.y-6=0\end{aligned}$$

Conclusion : une équation de la droite (AB) est $2.x-5.y=6$

b) On appelle $(x_I;y_I)$ les coordonnées de ce point I. Celui-ci est défini par une relation vectorielle. Traduisons cette dernière sous forme de coordonnées.

$$2.\overrightarrow{AI}=3.\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2.\begin{pmatrix}x_I+2\\y_I+2\end{pmatrix}=3.\begin{pmatrix}3-x_I\\-y_I\end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}2.x_I+4\\2.y_I+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-3.x_I\\-3.y_I\end{pmatrix}}_{\text{Deux vecteurs égaux ont...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2.x_I+4=9-3.x_I}_{\text{...des abscisses égales...}} \quad \underline{\text{et}} \quad \underbrace{2.y_I+4=-3.y_I}_{\text{...des ordonnées égales.}}$$

$$\Leftrightarrow 5.x_I=5 \quad \underline{\text{et}} \quad 5.y_I=-4 \Leftrightarrow x_I=\frac{5}{5}=1 \quad \underline{\text{et}} \quad y_I=-\frac{4}{5}$$

Conclusion : le point I a pour coordonnées $(1;-0,8)$.

c) Pour tracer la droite *d*, il nous faut connaître deux de ses points. Si possible à coordonnées entières.
A force de tâtonnements sur l'équation de *d*, on remarque :

- ☞ Le point $C(-1;5)$ appartient à *d* car $\underbrace{3\times(-1)+2\times 5-7=-3+10-7=0}_{\text{Les coordonnées de C vérifient l'équation de } d}$.
- ☞ Le point $D(1;2)$ fait partie de *d* car $3\times 1+2\times 2-7=3+4-7=0$.

Conclusion : on trace la droite *d* en construisant la droite (CD).

d) Un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la droite *d* d'équation $\underbrace{3.x+2.y-7=0}_{a.x+b.y+c}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b=-2\\a=3\end{pmatrix}$.

Nous aurions aussi pu prendre aussi le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$. C'est d'ailleurs l'opposé de $\vec{u}$.

Regardons si les deux vecteurs directeurs de (AB) et *d* sont colinéaires.

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)=\begin{vmatrix}5 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=5\times 3-2\times(-2)=15+4=19\neq 0$$

Conclusion : comme leur déterminant est non nul alors les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires. Donc les droites (AB) et *d* ne sont pas parallèles. Par conséquent, elles sont sécantes.

e) Pour résoudre le système $\begin{cases}3.x+2.y=7 & \textbf{\textit{(1)}}\\ 2.x-5.y=6 & \textbf{\textit{(2)}}\end{cases}$, nous allons procéder par un double coup de combinaisons linéaires..

Pour trouver x, on élimine y...

$$\oplus\begin{array}{lcr}\textbf{\textit{(1)}} & \xrightarrow{\times 5} & 15.x+10.y=35\\ \textbf{\textit{(2)}} & \xrightarrow{\times 2} & 4.x-10.y=12\\ \hline & & 19.x=47\\ & & x=\dfrac{47}{19}\end{array}$$

Pour déterminer y, on supprime x...

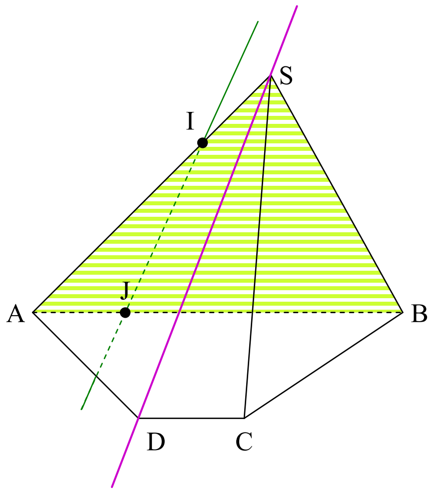
$$\ominus\begin{array}{lcr}\textbf{\textit{(1)}} & \xrightarrow{\times 2} & 6.x+4.y=14\\ \textbf{\textit{(2)}} & \xrightarrow{\times 3} & 6.x-15.y=18\\ \hline & & 19.y=-4\\ & & y=-\dfrac{4}{19}\end{array}$$

Conclusion : le système a pour unique solution le couple de réels $\left(\frac{47}{19};-\frac{4}{19}\right)$.

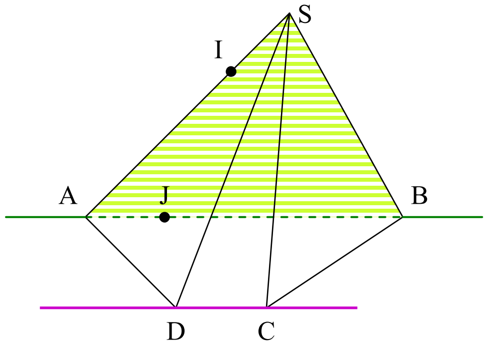
➲ Comme le point E appartient aux droites (AB) et *d* alors ses coordonnées en vérifient les deux équations $2.x-5.y=6$ et $3.x+2.y-7=0$. Elles sont les solutions du système formé par ces deux équations. Ainsi le point E a-t-il pour coordonnées $\left(\frac{47}{19};-\frac{4}{19}\right)$.

Dernière partie : un trapèze dans l'espace

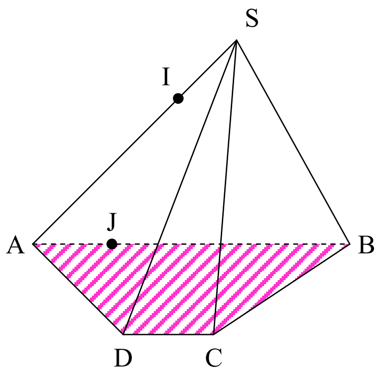
a) Passons en revue les trois questions posées.



1. Comme le point D n'appartient pas au plan (SIJ) alors les droite (IJ) et (SD) ne sont pas coplanaires.

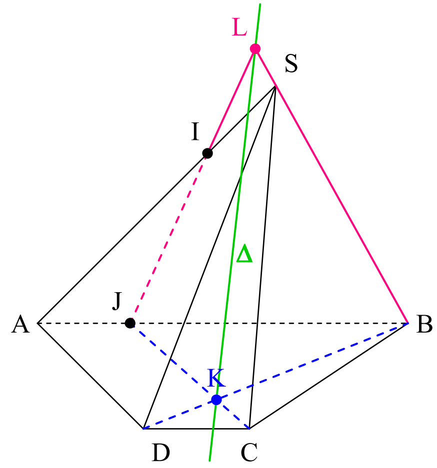


2. Comme la droite (CD) est parallèle à la droite (AB) qui est incluse dans le plan (SAB), alors la droite (CD) est parallèle au plan (SAB).
Mais une droite peut être parallèle à un plan de deux manières : strictement ou en y étant incluse.
Comme les points C et D n'appartiennent pas au plan (SAB), alors la droite (CD) est strictement parallèle à ce plan.



3. Les points A, J, B, C et D appartiennent au même plan. Donc les plans (AJC) et (BCD) sont confondus.

b) Les plans (CIJ) et (SBD) étant sécants, leur intersection est une droite que nous appellerons Δ.
Pour construire cette droite Δ, nous allons en déterminer deux points. Autrement dit, nous devons trouver deux points communs aux plans (CIJ) et (BCD).



1. Les droites (JC) et (BD) sont sécantes dans le plan (ABCD). On appelle K leur point d'intersection.
Comme K appartient à la droite (JC), alors il appartient au plan (CIJ).
Comme K fait partie de la droite (DB), alors il appartient au plan (SBD).
Donc le point K appartient à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire à la droite Δ.
2. Les droites (IJ) et (SB) sont sécantes dans le plan (SAB). On note L leur point d'intersection.

$$\text{Comme}\begin{cases} L \in \text{droite}(IJ) \subset \text{plan}(CIJ) \\ L \in \text{droite}(SB) \subset \text{plan}(SBD) \end{cases} \quad \underline{\text{alors}} \quad L \in \Delta = (CIJ) \cap (SBD).$$

<u>Conclusion :</u> l'intersection des plans (CIJ) et (SBD) est la droite (LK).

c) Les plans (SAB) et (SCD) sont sécants suivant une droite que nous appellerons ***d***.
S appartenant aux deux plans, il fait partie de leur intersection ***d***.
Comme la droite (CD) du plan (SCD) est parallèle à la droite (AB) du plan (SAB), alors en application du théorème dit du toit, l'intersection ***d*** est parallèle à ces deux droites.
<u>Conclusion :</u> l'intersection des plans (SAB) et (SCD) est la parallèle aux droites (AB) et (CD) passant par le point S.