Algèbre, équations et inéquations

Petites résolutions du premier degré

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du premier degré suivantes. Les solutions seront exprimées sous la forme la plus simple possible.

a. $5-4x=7x+27$ **b.** $7x-3\times(5-2x)+1=6+5\times(x-2)$

c. $\frac{1}{3}x-2=\frac{2}{5}x-\frac{4}{7}$

Le corrigé

a. Résolvons cette première équation.

$$5-4x=7x+27 \Leftrightarrow -4x-7x=27-5$$

$$\Leftrightarrow -11x=22 \xrightarrow{\div(-11)} x=\frac{22}{-11}=-2$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$$S=\{-2\}$$

b. Résolvons cette seconde équation.

$$\underbrace{7x-3\times(5-2x)}_{\text{On distribue }-3}+1=6\underbrace{+5\times(x-2)}_{\text{On distribue }+5} \Leftrightarrow 7x-15+6x+1=6+5x-10$$

$$\Leftrightarrow 13x-14=5x-4$$

$$\Leftrightarrow 13x-5x=-4+14$$

$$\Leftrightarrow 8x=10 \xrightarrow{\div 8} x=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1,25$$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'équation :

$$S=\left\{\frac{5}{4}\right\}$$

c. Résolvons cette troisième équation du premier degré.

$$\frac{1}{3}x-2=\frac{2}{5}x-\frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x-\frac{2}{5}x=-\frac{4}{7}+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\times5}{3\times5}x-\frac{2\times3}{5\times3}x=-\frac{4}{7}+\frac{2\times7}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-6}{15}x=\frac{-4+14}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{15}x=\frac{10}{7} \Leftrightarrow x=\frac{10}{7}\div\frac{-1}{15}=\frac{10}{7}\times\frac{15}{-1}=-\frac{150}{7}$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette troisième équation est :

$$S=\left\{-\frac{150}{7}\right\}$$

Petits développements

L'énoncé

Développer et réduire les expressions suivantes.

$$\mathrm{A}(x)=(3x-1)^2+2x(x+3) \qquad \mathrm{B}(x)=x^2-(2x+7)(3-x)$$

$$\mathrm{C}(x)=(3+4x)^2-(3+7x)(3-7x)$$

Le corrigé

Développons les expressions proposées :

$$\mathrm{A}(x)=\overbrace{(3x-1)^2}^{(a-b)^2}+\overbrace{\boxed{2x}(x+3)}^{\text{On distribue}}=\overbrace{(3x)^2-2\times 3x\times 1+1^2}^{a^2-2\times a\times b+b^2}+\boxed{2x}\times x+\boxed{2x}\times 3$$

$$=9x^2-\cancel{6x}+1+2x^2+\cancel{6x}=\underline{11x^2+1}$$

$$\mathrm{B}(x)=x^2-\overbrace{\left[(2x+7)(3-x)\right]}^{\text{On développe...}}=x^2-\overbrace{\left[6x-2x^2+21-7x\right]}^{\text{...à l'abri des crochets !}}$$

$$=x^2-\left[-2x^2-x+21\right]=x^2+2x^2+x-21=\underline{3x^2+x-21}$$

$$\mathrm{C}(x)=\overbrace{(3+4x)^2}^{(a+b)^2}-\overbrace{\left[(3+7x)\times(3-7x)\right]}^{\text{On développe }(a+b)(a-b)\text{...}}$$

$$=\overbrace{3^2+2\times 3\times 4x+(4x)^2}^{a^2+2\times a\times b+b^2}-\overbrace{\left[3^2-(7x)^2\right]}^{a^2-b^2}$$

$$=9+24x+16x^2-9+49x^2=\underline{64x^2+24x}$$

Au tableau !

L'énoncé

a. On appelle *f* la fonction définie par :

$$f(x)=4x(-x-5)(7x-14)$$

1. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\leq 0$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$6x>5x^2 \qquad x^2+16x+15<0$$

Le corrigé

a.1. Examinons les facteurs affines constituant le produit $f(x)=4x(-x-5)(7x-14)$:

- Le coefficient directeur du facteur $4x$ est égal à 4 et est $\boxed{\text{Positif}}$.

  Il s'annule lorsque $4x=0 \iff x=\dfrac{0}{4}=\underline{0}$.
- Le coefficient directeur du facteur $-x-5$ est égal à -1 et est $\boxed{\text{Négatif}}$.

  Il s'annule lorsque $-x-5=0 \iff -x=5 \iff x=\underline{-5}$
- Le coefficient directeur du facteur $7x-14$ est 7 et est $\boxed{\text{Positif}}$.

  Il s'annule lorsque $7x-14=0 \iff 7x=14 \iff x=\dfrac{14}{7}=\underline{2}$

Par conséquent, le tableau de signe du produit $f(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		-5		0		2		$+\infty$
$4x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x-5$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$7x-14$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

a.2. Résoudre l'inéquation $f(x)\leq 0$, c'est déterminer quand le produit $f(x)$ est négatif ou nul. D'après le tableau de signe précédent, nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=\underline{[-5;0]\cup[2;+\infty[}$$

b.1. Pour résoudre cette première inéquation, nous allons tout ramener dans le membre de gauche, puis nous chercherons à aboutir à un produit qui sera quelque chose par rapport à 0. Nous allons donc devoir factoriser.

$$6x > 5x^2 \Leftrightarrow 6x - 5x^2 > 0 \Leftrightarrow \overbrace{6 \times \boxed{x} - 5 \times \boxed{x} \times x > 0}^{\text{On factorise l'expression avec le facteur commun } x} \Leftrightarrow \boxed{x} \times (6 - 5x) > 0$$

Résoudre cette première inéquation revient donc à savoir quand le produit $x(6-5x)$ est strictement positif. Dressons son tableau de signe !

Le premier facteur affine x s'annule en 0.

Le second facteur s'annule lorsque $6 - 5x = 0 \Leftrightarrow -5x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{-5} = \frac{6}{5} = 1,2$

	x	$-\infty$		0		$6/5$		$+\infty$
$a = 1 \rightarrow$	x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$a = -5 \rightarrow$	$-5x+6$		$+$	|	$+$	0	$-$	
	Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit est strictement positif entre 0 et 1,2. L'ensemble des solutions est :

$$S = [0;1,2]$$

b.2. La résolution de la seconde inéquation suivra la même stratégie que précédemment.

$$x^2 + 16x + 15 < 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 2 \times x \times 8}_{\text{Début de cette...}} + 15 < 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x+8)^2 - 8^2}_{\text{...identité remarquable}} + 15 < 0$$

On factorise le membre de gauche en utilisant la méthode de la forme canonique.

$$\Leftrightarrow (x+8)^2 - 64 + 15 < 0 \Leftrightarrow (x+8)^2 - 49 < 0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x+8)^2 - 7^2}^{a^2-b^2} < 0 \Leftrightarrow \overbrace{[(x+8)+7] \times [(x+8)-7]}^{[a+b]\times[a-b]} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x+15) \times (x+1) < 0$$

Le tableau de signe du produit $(x+15)(x+1)$ est dressé ci-contre ☞☞

x	$-\infty$		-15		-1		$+\infty$
$x+15$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de cette seconde inéquation est :

$$S =]-15;-1[$$

Quand le quotient se signe

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{4x}{(5-x)(3x+6)} \geq 0$ **b.** $\dfrac{2x+1}{3-2x} \leq -4$ **c.** $\dfrac{3}{x+3} > \dfrac{2}{x-2}$

Le corrigé

a. Résoudre cette première inéquation, c'est savoir quand le quotient $\dfrac{4x}{(5-x)(3x+6)}$ est positif ou nul. Examinons les facteurs affines le composant.

- $\underset{\oplus}{\boxed{4}}\,x$ s'annule lorsque $4x = 0 \Leftrightarrow x = 0/4 = 0$
- $\underset{\ominus}{\boxed{(-1)}}\,x + 5$ s'annule lorsque $5 - x = 0 \Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = 5$
- $\underset{\oplus}{\boxed{3}}\,x + 6$ s'annule lorsque $3x + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{3} = -2$

Le tableau de signe de notre quotient est le suivant :

x	$-\infty$		-2		0		5		$+\infty$
$4x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+5$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Les valeurs de x pour lesquelles notre quotient est positif ou nul constituent l'ensemble des solutions de cette première inéquation.

$$S =]-\infty;-2[\cup [0;5[$$

b. Pour résoudre cette deuxième inéquation, nous allons tout ramener à gauche, tout mettre au même dénominateur, puis nous aurons à nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{2x+1}{3-2x} \leq -4 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3-2x} + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3-2x} + \frac{4 \times (3-2x)}{3-2x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{3-2x} + \frac{12-8x}{3-2x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x+13}{-2x+3} \leq 0$$

La résolution de cette deuxième inéquation se résume donc à savoir quand ce dernier quotient est négatif ou nul. Examinons les facteurs affines le constituant :

- $\underset{\ominus}{\boxed{-6}}\,x+13$ s'annule lorsque $-6x+13=0 \Leftrightarrow -6x=-13 \Leftrightarrow x=\dfrac{-13}{-6}=\dfrac{13}{6}$
- $\underset{\ominus}{\boxed{-2}}\,x+3$ s'annule lorsque $-2x=-3 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3}{-2}=1{,}5$

Le tableau de signe de notre quotient est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{13}{6}$		$+\infty$
$-6x+13$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$-2x+3$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Leur quotient		$+$	||	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette deuxième inéquation est :

$$S=\left]1{,}5;\frac{13}{6}\right]$$

c. Cette dernière inéquation se résout de la même façon que la précédente.

$$\frac{3}{x+3}>\frac{2}{x-2} \Leftrightarrow \frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-2}>0 \Leftrightarrow \frac{3\times(x-2)-2\times(x+3)}{(x+3)\times(x-2)}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-6-2x-6}{(x+3)(x-2)}>0 \Leftrightarrow \frac{x-12}{(x+3)(x-2)}>0$$

Examinons les trois facteurs affines constituant le quotient du membre de gauche.

$\underset{\oplus}{\boxed{x}}-12=0 \Leftrightarrow x=12$ $\quad$ $\underset{\oplus}{\boxed{x}}+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ $\quad$ $\underset{\oplus}{\boxed{x}}-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Le tableau de signe du quotient constituant le membre de gauche est le suivant :

x	$-\infty$		-3		2		12		$+\infty$
$x-12$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
Le quotient		$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette troisième inéquation est :

$$S=]-3;2[\cup]12;+\infty[$$

L'impossible inéquation

L'énoncé

a. Dresser le tableau de signe du quotient $Q(x)=\dfrac{(2x-1)(2x+7)}{1-x}$.

b. En utilisant la méthode de la forme canonique, factoriser l'expression :

$$N(x)=4x^2+12x-7$$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{9}{1-x}>4x+16$.

Indication : à un certain moment, on pourra utiliser les résultats des questions **a** et **b** car cette inéquation a déjà été résolue en partie...

Le corrigé

a. Avant toutes choses, déterminons les valeurs de x où le quotient $Q(x)$ s'annule.

- $\underset{\oplus}{\boxed{2}}\,x-1$ s'annule lorsque $2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}=0{,}5$
- $\underset{\oplus}{\boxed{2}}\,x+7$ s'annule lorsque $2x+7=0 \Leftrightarrow 2x=-7 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{2}=-3{,}5$
- $\underset{\ominus}{\boxed{(-1)}}\,x+1$ s'annule lorsque $1-x=0 \Leftrightarrow -x=-1 \Leftrightarrow x=1$

Nous en déduisons que le tableau de signe du quotient $Q(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+1$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

b. Factorisons par la méthode de la forme canonique la forme du second degré proposée.

$$N(x)=4x^2+12x-7=\underbrace{(2x)^2+2\times 2x\times 3}_{\text{Début de cette...}}-7=\underbrace{(2x+3)^2-3^2}_{\text{...identité remarquable}}-7$$

$$=(2x+3)^2-9-7=(2x+3)^2-16$$

$$=\underbrace{(2x+3)^2-4^2}_{a^2-b^2}=\underbrace{\left[(2x+3)+4\right]\times\left[(2x+3)-4\right]}_{[a+b]\times[a-b]}=\boxed{(2x+7)\times(2x-1)}$$

c. Pour résoudre cette inéquation, nous allons tout ramener à gauche, tout mettre au même dénominateur, puis nous aurons à nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{9}{1-x}>4x+16 \Leftrightarrow \frac{9}{1-x}-4x-16>0 \Leftrightarrow \frac{9-4x\times(1-x)-16\times(1-x)}{1-x}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9-4x+4x^2-16+16x}{1-x}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+12x-7}{1-x}>0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{(2x-1)(2x+7)}{1-x}}_{\text{D'après la question b.}}>0 \Leftrightarrow \boxed{Q(x)>0}$$

D'après la question **a**, le quotient $Q(x)$ est négatif entre $-3,5$ et $0,5$, puis après 1.

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de notre inéquation est :

$$S=\boxed{]-\infty;-3,5[\cup]0,5;1[}$$

Systèmes scolaires

L'énoncé

a. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y :

$$(S)\begin{cases}5x+3y=2\\7x+5y=4\end{cases}$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire de trois équations à trois inconnues x, y et z :

$$(S')\begin{cases}x-3y-4z=5\\3x-2y+z=4\\2y+5z=-7\end{cases}$$

Indication : les solutions x, y et z sont des entiers relatifs.

Le corrigé

a. Nous allons résoudre le système $(S)\begin{cases}5x+3y=2 & \textbf{(1)}\\7x+5y=4 & \textbf{(2)}\end{cases}$ par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour trouver x, on vise l'élimination des y.	Pour obtenir y, on vise la suppression des x.
(1) $\xrightarrow{\times 5}$ $25x+15y=10$ $\ominus$	***(1)*** $\xrightarrow{\times 7}$ $35x+21y=14$ $\ominus$
(2) $\xrightarrow{\times 3}$ $21x+15y=12$	***(2)*** $\xrightarrow{\times 5}$ $35x+25y=20$
$4x=-2$	$-4y=-6$
$x=\frac{-2}{4}=\boxed{-0,5}$	$y=\frac{-6}{-4}=\boxed{1,5}$

Conclusion : le système (S) n'admet pour seule solution que le couple $(-0,5;1,5)$. Ce que l'on résume par :

$$S=\boxed{\{(-0,5;1,5)\}}$$

b. Pour résoudre ce système $(S')\begin{cases}x-3y-4z=5 & \textbf{(1)}\\3x-2y+z=4 & \textbf{(2)}\\2y+5z=-7 & \textbf{(3)}\end{cases}$, nous allons constituer un système de deux équations avec les deux inconnues y et z.

C'est le meilleur choix car nous disposons déjà d'une première équation avec ces deux inconnues : la ***(3).***

Pour la seconde équation, nous allons combiner ***(1)*** et ***(2)*** de façon à éliminer x :

$$\begin{array}{lll} \textbf{\textit{(1)}} & \xrightarrow{\times 3} & 3x-9y-12z=15 \\ \textbf{\textit{(2)}} & \xrightarrow{\quad} & 3x-2y+z=4 \\ \hline & & -7y-13z=11 \quad \textbf{\textit{(12)}} \end{array} \quad \ominus$$

Pour déterminer l'inconnue z, nous allons combiner les équations ***(12)*** et ***(3)*** de façon à éliminer y.

$$\begin{array}{lll} \textbf{\textit{(12)}} & \xrightarrow{\times 2} & -14y-26z=22 \\ \textbf{\textit{(2)}} & \xrightarrow{\times 7} & 14y+35z=-49 \\ \hline \end{array} \quad \oplus$$

$$9z=-27 \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{-27}{9}=\underline{-3}$$

Pour obtenir y, nous décidons de remplacer z par sa valeur -3 dans l'équation ***(3)***.

$$2y+5\times(-3)=-7 \quad \Leftrightarrow \quad 2y-15=-7 \quad \Leftrightarrow \quad 2y=-7+15=8 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{8}{2}=\underline{4}$$

Finalement, nous allons trouver x en remplaçant y et z par leurs valeurs respectives dans l'équation ***(1)***.

$$x-3\times 4-4\times(-3)=5 \quad \Leftrightarrow \quad x-12+12=5 \quad \Leftrightarrow \quad x=\underline{5}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions du système (S') est :

$$S=\underline{\{(5;4;-3)\}}$$

Algorithmique

Demandez le programme !

L'énoncé

On considère le programme ou algorithme suivant :

```
i et s sont deux entiers
s=1
Pour i=3 jusqu'à 5
        s=s×i+1
Si s est pair alors s=s+5
                sinon s=s+2
```

Exécuter cet algorithme et donner la valeur de l'entier *s* à l'issue de son exécution.

Le corrigé

Exécutons l'algorithme proposé.

Instruction et commentaire	*i*	*s*
s=1	?	1
Pour i=3 :	3	1
s=s×i+1 $=1\times3+1=4$	1	4
Pour i=4 :	4	4
s=s×i+1 $=4\times4+1=17$	4	17
Pour i=5 :	5	17
s=s×i+1 $=5\times17+1=86$	5	86
Comme s est pair alors s=s+5 $=5\times17+1=91$	5	91
A l'issue de l'exécution, la variable *s* est égale à 91.		

Redemandez le programme !

L'énoncé

On considère le programme ou algorithme suivant :

```
i, n et p sont deux entiers
p=1
Pour i=2 jusqu'à 4
        p=p+i²
n=1
Tant que p<39 effectuer la boucle
        p=p+n
        n=n+2
Si p est pair alors p=p/2
                sinon p=(p+1)/2
```

Exécuter cet algorithme et donner la valeur de l'entier *p* à l'issue de son exécution.

Le corrigé

Exécutons l'algorithme proposé.

Instruction et commentaire	*i*	*n*	*p*
`p=1`	?	?	1
`Pour i=2 :`	2	?	1
`p=p+i²` $=1+2^2=1+4=5$	2	?	5
`Pour i=3 :`	3	?	5
`p=p+i²` $=5+3^2=5+9=14$	3	?	14
`Pour i=4 :`	4	?	14
`p=p+i²` $=14+4^2=14+16=30$	4	?	30
`n=1`	4	1	30
`Tant que: comme p<39, on effectue la boucle`	4	1	30
`p=p+n` $=30+1=31$	4	1	31
`n=n+2` $=1+2=3$	4	3	31
`Tant que: comme p<39, on effectue la boucle`	4	3	31
`p=p+n` $=31+3=34$	4	3	34
`n=n+2` $=3+2=5$	4	5	34
`Tant que: comme p<39, on effectue la boucle`	4	5	34
`p=p+n` $=34+5=39$	4	5	39
`n=n+2` $=5+2=7$	4	7	39
`Tant que: comme p≥40, on sort de la boucle`	4	7	39
`Comme p est impair sinon p=(p+1)/2` $=(39+1)/2=20$	4	7	20

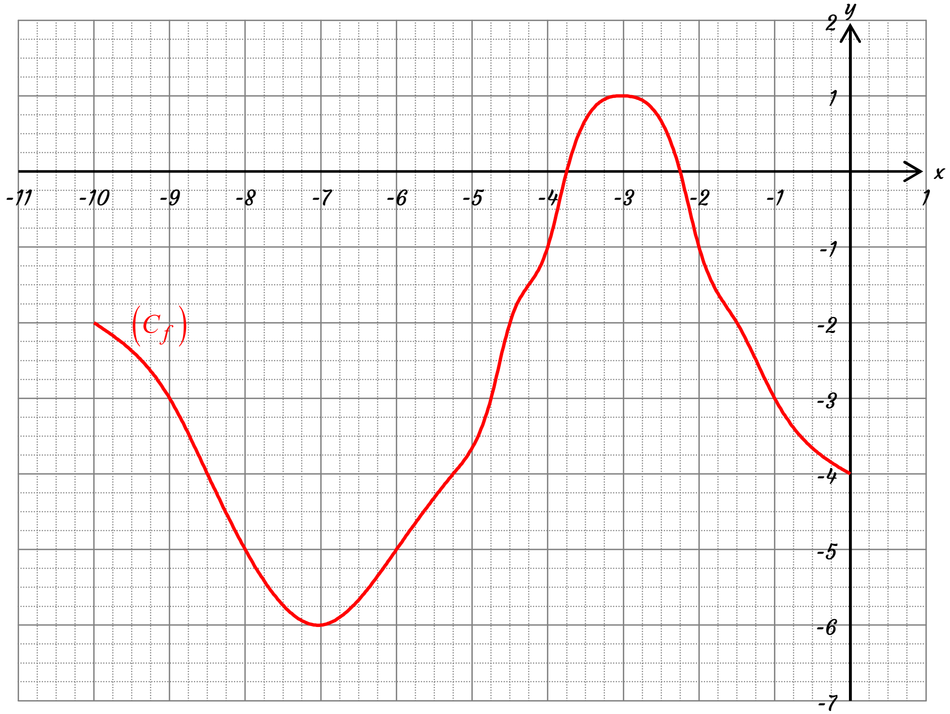
A l'issue du programme, la variable *p* est égale à 20

Fonctions

Une fonction par un graphique

L'énoncé

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\left(C_f\right)$ représentant la fonction *f* qui est définie sur l'intervalle $[-10;0]$.



A partir du graphique précédent, on répondra directement sur la présente feuille aux questions suivantes avec toute la précision permise par ce premier. Aucune justification n'est demandée.

a. Compléter ce qui suit :

1. Le minimum de *f* sur son ensemble de définition est...... Il est atteint en $x =$ ....

2. Le (les) antécédent(s) de -2 par la fonction *f* est (sont)..........................

3. Le maximum de *f* sur l'intervalle $[-10;-5]$ est........ Il est atteint en $x =$ ....

4. Le (ou les) image(s) de -2 par la fonction *f* est (sont)........................

5. Le (ou les) image(s) de 1 par la fonction *f* est (sont)........................

6. Le minimum de *f* sur l'intervalle $[-5;0]$ est........ Il est atteint en $x =$ ....

7. Le (les) antécédent(s) de 1 par la fonction *f* est (sont)..........................

8. $f(-5) =$ ....

b. En utilisant le graphique ci-contre, résoudre les équations :

$f(x) = -2,5$	$f(x) = 2,5$
S = ...	S = ...

c. Compléter le tableau de variation suivant résumant les variations de la fonction *f* sur son ensemble de définition :

x	
f	

d. Compléter le tableau de signe suivant résumant le signe de $f(x)$ sur D_f.

x	
$f(x)$	

e. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

1. $f(x) > -1$ **2.** $f(x) \leq -4$ **3.** $f(x) \geq -6$ **4.** $-5 < f(x) \leq 3$

Le corrigé

a.1. Sur l'intervalle $[-10;0]$, le point le plus bas de la courbe (C_f) a pour coordonnées $(-7;-6)$.
Donc, le minimum de *f* sur son ensemble de définition est -6. Il est atteint en $x=-7$.

a.2. Trois points de la courbe de la courbe (C_f) ont pour ordonnée -2. Ils ont pour abscisses $x=-10$ $x=-4,5$ $x=-1,5$. Ce sont les trois antécédents de -2 par *f*.

a.3. Sur l'intervalle $[-10;-5]$, le point le plus haut de la courbe (C_f) a pour coordonnées $(-10;-2)$.
Par conséquent, le maximum de la fonction *f* sur l'intervalle $[-10;-5]$ est -2. Il est atteint en $x=-10$.

a.4. Le point de la courbe (C_f) ayant pour abscisse -2 a pour ordonnée -1.
Donc l'image de -2 par la fonction *f* est -1. Ce que l'on résume par $f(-2)=-1$

a.5. 1 n'appartenant pas à l'ensemble de définition $[-10;0]$ de la fonction *f*, il ne peut avoir d'image par cette fonction.

a.6. Le point le plus de la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-5;0]$ a pour coordonnées $(0;-4)$.
Donc le minimum de *f* sur l'intervalle $[-5;0]$ est -4. Il est atteint en $x=0$.

a.7. Un seul point de la courbe (C_f) a pour ordonnée 1. Il a pour abscisse -3.
Par conséquent, 1 a un seul antécédent par la fonction f. Il s'agit de -3.

a.8. Graphiquement, on détermine que le point de la courbe (C_f) d'abscisse -5 a pour ordonnée environ $-3,66$. Par conséquent, $f(-5)\approx -3,66$.

b.1. Pour résoudre l'équation $f(x)=-2,5$, il faut considérer tous les points de la courbe représentative (C_f) dont l'ordonnée est égale à $-2,5$. Il en existe trois qui ont pour abscisse $x\approx -9,37$ $x\approx -4,63$ $x\approx -1,25$. Ce sont les trois solutions de l'équation.

$$S=\{-9,37;-4,63;-1,25\}$$

b.2. Aucun point de la courbe (C_f) n'ayant pour ordonnée $2,5$, l'équation $f(x)=2,5$ n'admet pas de solution. Ce que l'on résume par : $S=\varnothing$

c. Le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[-10;0]$ est :

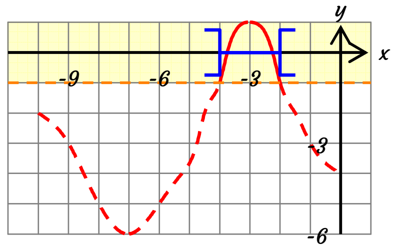
x	-10		-7		-3		0
f	-2	↘	-6	↗	1	↘	-4

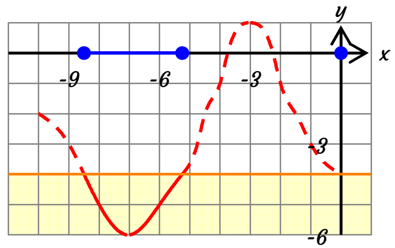
d. Le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-10;0]$ est :

x	-10		$-3,75$		$-2,25$		0
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e.1. Pour résoudre l'inéquation $f(x)>-1$, il faut considérer tous les points de la courbe (C_f) dont l'ordonnée est strictement supérieure à -1. Leurs abscisses sont les solutions de cette inéquation.

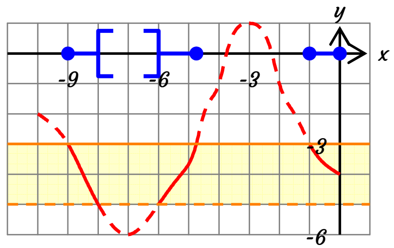
$$S=]-4;-2[$$





e.2. Les solutions de l'inéquation $f(x)\leq -4$ sont les abscisses des points de la courbe (C_f) dont l'ordonnées est inférieure ou égale à -4.

$$S=[-8,5;-5,25]\cup\{0\}$$



e.3. Tous les points de la courbe (C_f) ayant une ordonnée supérieure ou égale à -6, toutes leurs abscisses sont solutions !

$$S=D_f=[-10;0]$$

e.4. En considérant les points de la courbe dont l'ordonnée est dans l'intervalle $]-5;-3]$:

$$S=[-9;-8[\cup]-6;-4,75]\cup[-1;0]$$

Une fonction par le calcul

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 5$$

a. Calculer les images de 0 ; 3 et -2 par la fonction f.

b. Déterminer le ou les antécédents de 5 par la fonction f.

Le corrigé

a. Calculons les trois images par la fonction f demandées :

$$\begin{cases} f(0) = 4\times 0^2 - 3\times 0 + 5 = 0 - 0 + 5 = \underline{5} \\ f(3) = 4\times 3^2 - 3\times 3 + 5 = 4\times 9 - 9 + 5 = 36 - 4 = \underline{32} \\ f(-2) = 4\times(-2)^2 - 3\times(-2) + 5 = 4\times 4 + 6 + 5 = 16 + 11 = \underline{27} \end{cases}$$

b. Déterminer les antécédents de 5 par f, c'est chercher tous les réels x vérifiant l'égalité :

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + \cancel{5} = \cancel{5}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x}\times 4x - 3\times\boxed{x}}_{\text{Facteur commun}} = 0$$

Une équation du second degré (en x^2) se résout en recherchant un produit nul.

$$\Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x}\times(4x-3) = 0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{\underline{x = 0} \quad \text{ou} \quad 4x - 3 = 0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4} = \underline{0{,}75}$$

<u>Conclusion :</u> 5 a deux antécédents par la fonction f qui sont 0 et 0,75.

Au tableau !

L'énoncé

Le tableau de variation de la fonction f qui est définie sur l'intervalle $[-10;10]$ a été dressé ci-dessous :

x	-10		-2		1		5		10
f	2	↗	7	↘	-1	↗	1	↘	-5

On précise également que cette fonction f est continue, c'est-à-dire que sa courbe (C_f) est d'un seul tenant, sans ruptures.

A partir de ce tableau, on dira si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Seules ces deux alternatives sont possibles. Une réponse correcte rapporte 0,75 points; une réponse incorrecte ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée. On entourera la réponse choisie.

	L'affirmation est...	
1. Le maximum de f sur l'intervalle $[-10;10]$ est 10. Il est atteint en $x = -5$	Vraie	Fausse
2. L'image $f(7)$ peut être égale à -7.	Vraie	Fausse
3. -3 a exactement un antécédent par la fonction f dans l'intervalle $[-10;10]$.	Vraie	Fausse
4. Le minimum de f sur l'intervalle $[-10;0]$ est nécessairement égal à 2 et est nécessairement atteint en $x = -10$.	Vraie	Fausse
5. L'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions dans l'intervalle $[-10;10]$	Vraie	Fausse
6. L'image $f(-1)$ peut être égale à 6,999.	Vraie	Fausse

7. Si a est un réel de l'intervalle $[-10;-2]$ et b un réel de l'intervalle $[5;10]$, alors $f(a) \geq f(b)$.	Vraie	Fausse
8. Si a et b sont deux réels de l'intervalle $[2;4]$ tels que $a > b$, alors l'image $f(b)$ est plus grande que l'image $f(a)$.	Vraie	Fausse

Le corrigé

Passons les huit affirmations en revue :

1. Vu son tableau de variation, le maximum de *f*, c'est-à-dire la plus haute valeur prise par *f* sur l'intervalle $[-10;10]$ est 7 et est atteint en $x=-2$. Fausse !
2. Comme 7 appartient à l'intervalle $[5;10]$ sur laquelle la fonction *f* est décroissante, alors son image $f(7)$ est nécessairement comprise entre celles de 5 et 10, c'est-à-dire entre $f(10)=-5$ et $f(5)=1$. Fausse !
3. Le minimum de *f* sur l'intervalle $[-10;5[$ étant -1, le réel -3 n'a pas d'antécédent par *f* dans cet intervalle.
   Par contre, il en a un dans $[5;10]$. En effet, sur cet intervalle, la fonction *f* décroit de 1 à -5. Elle croise alors une et une seule fois l'altitude -3.
   En conclusion, -3 a exactement un antécédent par *f* dans $[-10;10]$. Vraie !
4. Vu le tableau de variation, le minimum de *f* sur l'intervalle $[-10;-2]$ est 2. Cet extremum est atteint en $x=-10$.
   Sur l'intervalle $[-2;0]$, la fonction *f* est décroissante. Mais jusqu'au où ?
   Car nous ignorons la valeur de $f(0)$ et tout dépend d'elle.
   Ainsi, si $f(0)=3$, alors le minimum de *f* sur l'intervalle $[-10;0]$ sera 2.
   Mais si $f(0)=1$, alors le minimum de *f* sur $[-10;0]$ sera 1. Fausse !
5. Vu son tableau de variation sur l'intervalle $[-10;10]$, la fonction *f* passe exactement trois fois par l'altitude 0 : une première fois sur l'intervalle $]-2;1[$, une deuxième fois sur l'intervalle $]1;5[$ et une dernière fois sur $[5;10]$. Fausse !
6. La fonction *f* décroissant sur l'intervalle $[-2;1]$, l'image $f(-1)$ sera inférieure à l'image $f(-2)=7$ et sera supérieure à l'image $f(1)=-1$.
   Ce sont là les seules conditions s'imposant.
   Par conséquent, l'image $f(-1)$ peut être égale à 6,999. Vraie !
7. Le minimum de la fonction *f* sur l'intervalle $[-10;-2]$ est 2.
   Par conséquent, tout réel $a \in [-10;-2]$ est tel que $f(a) \geq 2$.
   Ensuite, le maximum de *f* sur l'intervalle $[5;10]$ est 1.
   Tout réel $b \in [5;10]$ vérifie donc que $f(b) \leq 1$.
   Nous concluons que nous avons bien :
   $$f(a) \geq 2 > 1 \geq f(b)$$ Vraie !
8. D'après son tableau de variation, *f* est croissante sur l'intervalle $[2;4]$. C'est-à-dire qu'elle y conserve l'ordre. Par conséquent, nous avons :
   $$\underbrace{a > b}_{\in[2;4]} \xrightarrow[\text{Croissante sur } [2;4]]{f} f(a) > f(b)$$ Fausse !

La rectitude de l'affinage

L'énoncé

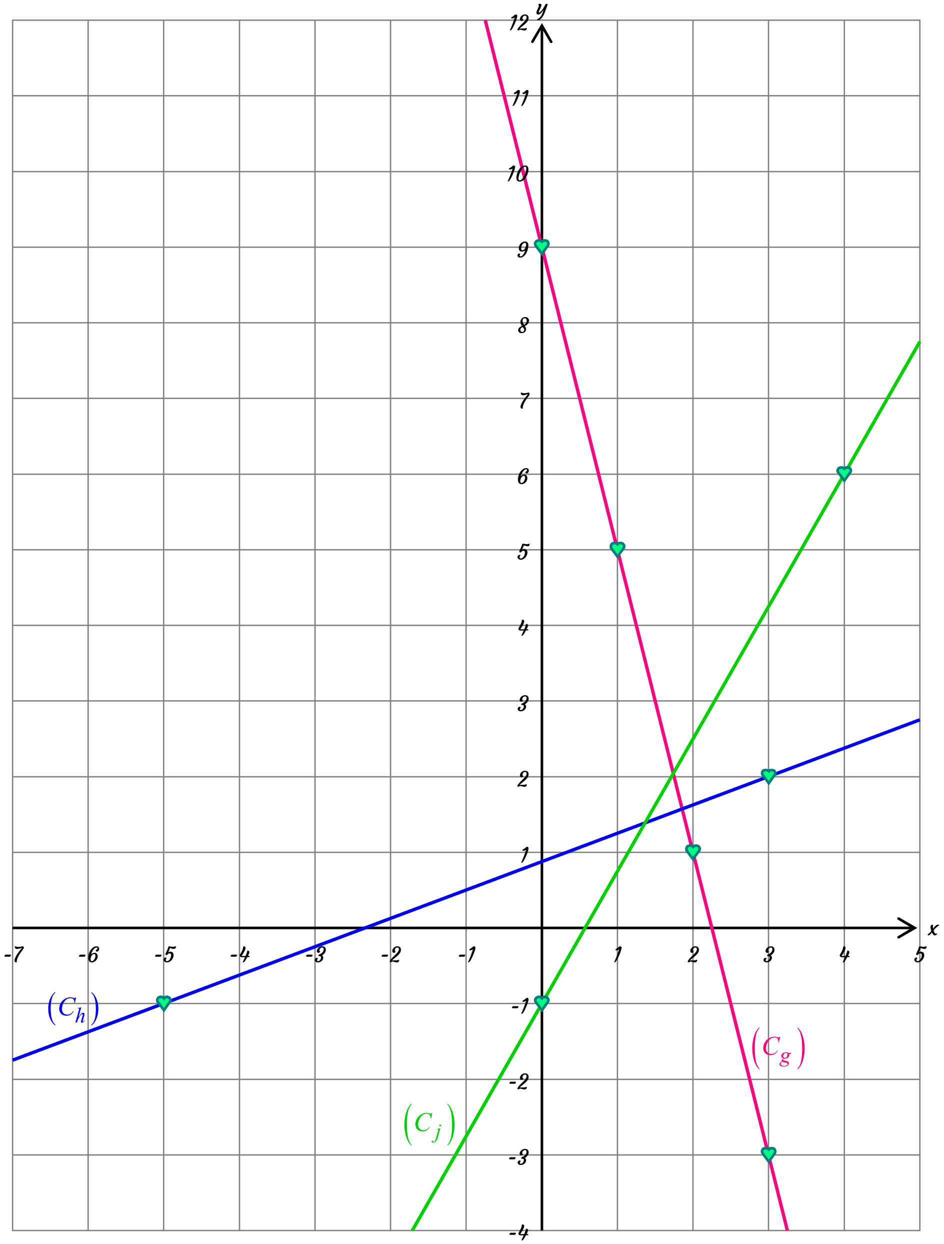
a. On appelle *f* la fonction définie pour tout réel *x* par :

$$f(x)=\frac{7-3x}{5}$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

1. Montrer que *f* est bien une fonction affine de la forme $ax+b$. On précisera les valeurs des coefficients *a* et *b*.
   Comment appelle-t-on les coefficients *a* et *b* ?
2. Calculer les images $f(-1)$ et $f(4)$.
3. Tracer sur le graphique ci-contre la courbe représentative de la fonction (C_f).
4. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction *f*.
5. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
6. α et β sont deux réels tels que $\alpha<\beta$.
   En partant de cette inégalité, établir le sens de variation de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

b. Sur le graphique ci-contre, on a tracé dans un repère orthonormé et centimétrique trois droites (C_g), (C_h) et (C_j) représentant les fonctions *g*, *h* et *j*. On a également placé tous leurs points à coordonnées entières.
Déterminer les expressions des fonctions affines *g*, *h* et *j*.



Le corrigé

a.1. Nous pouvons écrire que pour tout réel *x* :

$$f(x)=\frac{7-3x}{5}=\frac{7}{5}-\frac{3}{5}x=\underbrace{\boxed{-\frac{3}{5}}}_{a}\times x+\underbrace{\boxed{\frac{7}{5}}}_{b}=\underbrace{\boxed{-0,6}}_{a}\times x+\underbrace{\boxed{1,4}}_{b}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction *f* est affine et
a pour coefficient directeur $a=-\frac{3}{5}=-0,6$
a pour ordonnée à l'origine $b=\frac{7}{5}=1,4$

a.2. Calculons les images demandées :

$$f(-1)=\frac{7-3\times(-1)}{5}=\frac{7+3}{5}=\frac{10}{5}=2 \quad\Rightarrow\quad \text{A}(-1;2) \text{ appartient à } (C_f)$$

$$f(4)=\frac{7-3\times 4}{5}=\frac{7-12}{5}=\frac{-5}{5}=-1 \quad\Rightarrow\quad \text{B}(4;-1) \text{ appartient à } (C_f)$$

a.3. La courbe de la fonction affine *f* est une droite passant par les points A et B définis lors de la question précédente.

a.4. Pour déterminer les antécédents de 0 par la fonction *f*, nous allons résoudre dans ℝ l'équation :

$$f(x)=0 \xrightarrow{\times 5} \frac{7-3x}{\cancel{5}}\times\cancel{5}=\underbrace{0\times 5}_{0} \xrightarrow{+7} -3x=-7 \xrightarrow{\div(-3)} x=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}$$

Conclusion : 0 a un seul antécédent par la fonction *f* qui est $\frac{7}{3}$.

a.5. Nous connaissons déjà la valeur de x pour laquelle la fonction affine $f(x)$ s'annule.
f ayant un coefficient directeur $a=-0,6$ négatif, son tableau de signe est :

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)=-0,6x+1,4$		$+$	0	$-$	

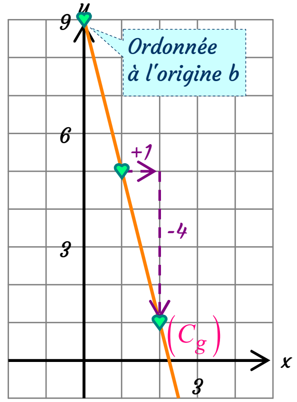
a.6. Soient α et β deux réels tels que $\alpha<\beta$.
Comment sont rangées leurs images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$?

$$\begin{array}{lccc} & \alpha & < & \beta \\ \times(-3) & -3\alpha & > & -3\beta \\ +7 & 7-3\alpha & > & 7-3\beta \\ \div 5 & \dfrac{7-3\alpha}{5} & > & \dfrac{7-3\beta}{5} \end{array}$$

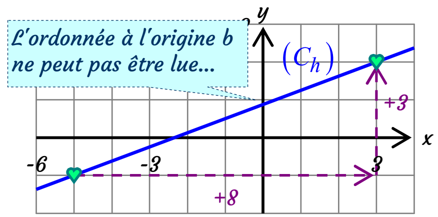
f change l'ordre sur ℝ

Conclusion : la fonction *f* est strictement décroissante sur ℝ.

b. Sa courbe étant une droite, la fonction g est affine et l'une de ses écritures est de la forme $g(x)=ax+b$.



Son coefficient directeur a est égal à la variation d'ordonnée lorsque l'on progresse d'une unité en abscisse.
D'après le graphique, $a=-4$.
Ensuite, l'ordonnée à l'origine b est l'ordonnée du point d'intersection de la droite (C_g) avec l'axe ordonnée (Oy).
D'après le graphique, $b=9$
Conclusion : une écriture de $g(x)$ est $g(x)=-4x+9$



Sa courbe (C_h) étant une droite, la fonction h est affine comme g.
Son coefficient directeur a est égal au quotient de la variation d'ordonnées divisée par la variation d'abscisse correspondante. D'après le graphique :

$$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{+3}{+8}=\frac{3}{8}=0,375$$

Donc une expression de $h(x)$ est de la forme $h(x)=\frac{3}{8}x+b$

L'ordonnée à l'origine b ne pouvant être lue directement, nous la déterminons en sachant :

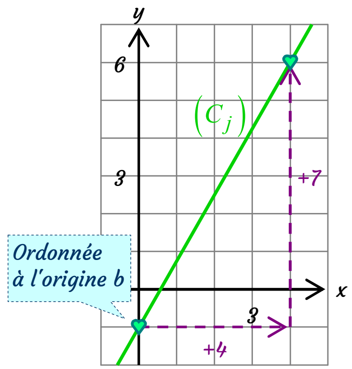
$$h(-5)=-1 \iff \frac{3}{8}\times(-5)+b=-1 \iff -\frac{15}{8}+b=-1 \iff b=\frac{-1\times 8}{8}+\frac{15}{8}=\frac{7}{8}$$

Conclusion : une écriture de la fonction affine h est $h(x)=\frac{3}{8}x+\frac{7}{8}=0,375x+0,875$

A l'instar de g et h, la fonction j est aussi affine et une de ses écritures est de la forme $j(x)=ax+b$.
L'ordonnée à l'origine b est égale à -1.
Lorsque l'on progresse de 4 unités en abscisse, on monte de 7 en ordonnée. Par conséquent, le coefficient directeur de la fonction j est $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{+7}{+4}=\frac{7}{4}=1,75$

Conclusion : une expression de la fonction j est :

$$j(x)=\frac{7}{4}x-1$$



Références fonctionnelles

L'énoncé

a. En utilisant les fonctions de référence (carré, cube, inverse et racine carrée), résoudre les inéquations suivantes. On pourra simplement donner les ensembles de solutions.

1. $-2<\dfrac{1}{x}<0,5$ **2.** $\sqrt{x}\geq 64$ **3.** $x^3\leq -729$ **4.** $121<x^2\leq 289$

b. A l'aide d'un montage et en s'appuyant sur les variations des fonctions de référence :

1. Etablir le sens de variation de la fonction $f(x)=1-(2x+8)^2$ sur l'intervalle $]-\infty;-4[$.
2. Etablir le sens de variation de la $g(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{8-x^3}}$ sur l'intervalle $]-\infty;2[$.

Le corrigé

a. En s'appuyant sur les courbes des fonctions de référence, on établit :

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-2<\dfrac{1}{x}<0,5$ est $]-\infty;-0,5[\cup]2;+\infty[$.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x}\geq 64$ est $[4096;+\infty[$.
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3\leq -729$ est $]-\infty;-9]$.
4. L'ensemble des solutions de $121<x^2\leq 289$ est $[-17;-11[\cup]11;17]$.

b.1. Sur l'intervalle $]-\infty;-4[$, la fonction $f(x)=1-(2x+8)^2$ est le montage suivant :

$$x<-4 \xrightarrow[\text{Croissante}]{\times 2} 2x<-8 \xrightarrow[\text{Croissante}]{+8} \underbrace{2x+8}_{\in{]-\infty;0[}}<0 \xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur } {]-\infty;0[}}]{\text{Carré}} (2x+8)^2$$

$$(2x+8)^2 \xrightarrow[\text{Décroissante}]{\times(-1)} -(2x+8)^2 \xrightarrow[\text{Croissante}]{+1} f(x)$$

<u>Conclusion :</u> l'ordre changeant à deux reprises (deux composantes décroissantes), il ne change pas au final. Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty;-4[$.

b.2. Sur l'intervalle $]-\infty;2[$, la fonction $g(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{8-x^3}}$ est le montage suivant :

$$x<-2 \xrightarrow[\substack{\text{Croissante}\\ \text{sur } \mathbb{R}}]{\text{Cube}} x^3<-8 \xrightarrow[\text{Décroissante}]{\times(-1)} -x^3>-8 \xrightarrow[\text{Croissante}]{+8} \dots$$

$$8-x^3>0 \xrightarrow[\substack{\text{Croissante}\\ \text{sur } {[0;+\infty[}}]{\text{Racine}} \underbrace{\sqrt{8-x^3}}_{\in{]0;+\infty[}}>0 \xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur } {]0;+\infty[}}]{\text{Inverse}} \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{8-x^3}} \xrightarrow[\text{Décroissante}]{\times(-3)} \frac{-3}{\sqrt{8-x^3}}=g(x)$$

<u>Conclusion :</u> l'ordre changeant à trois reprises (trois composantes décroissantes), il change au final. Donc la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2[$.

c. La courbe **orange** représente la fonction carré, la courbe **verte** est la fonction cube, la courbe **violette** est la fonction racine carrée, la courbe **rouge** représente la fonction inverse, la courbe **bleu marine** représente la fonction f et la courbe **rouge foncé** est la fonction g.

Second degré et forme canonique

L'énoncé

Ecrire sous forme canonique la fonction du second degré $f(x)=-3x^2-24x-41$.

Le corrigé

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\overbrace{-3x^2-24x}^{\text{On factorise...}}-41=\overbrace{-3\times\left[x^2+8x\right]}^{\text{... par }-3}-41$$

$$=-3\times\left[\overbrace{x^2+2\times x\times 4}^{\text{Début d'une...}}\right]-41=-3\times\overbrace{\left[(x+4)^2-4^2\right]}^{\text{...identité remarquable}}-41$$

$$=\overbrace{-3\times\left[(x+4)^2-16\right]}^{\text{On redistribue...}}-41=\overbrace{-3\times(x+4)^2-3\times(-16)}^{\text{...le facteur }-3}-41$$

$$=-3\times(x+4)^2+48-41=\underline{-3\times(x+4)^2+7}$$

Second degré et homographiques

L'énoncé

a. La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=-5x^2+30x-38$$

1. Calculer les images de -4 et 3 par la fonction f.
2. Ecrire la fonction f sous forme canonique.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f.

b. On appelle h la fonction définie par :

$$h(x)=\frac{-7x+1}{2x+4}$$

On appelle (C_h) sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Déterminer le ou les antécédents de -7 par la fonction h.
3. Dresser le tableau de signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Comment se comporte la courbe (C_h) lorsque x est un très grand nombre positif ou négatif ? On expliquera sa réponse.

Le corrigé

a.1. Calculons les images demandées :

$$f(-4)=-5\times(-4)^2+30\times(-4)-38=-5\times16-120-38=-80-158=\underline{-238}$$

$$f(3)=-5\times3^2+30\times3-38=-5\times9+90-38=-45+52=\underline{7}$$

a.2. Ecrivons la fonction f sous forme canonique :

$$f(x)=\overbrace{-5x^2+30x}^{\text{On factorise...}}-38=\overbrace{-5\times\left[x^2-6x\right]}^{\text{... par }-5}-38$$

$$=-5\times\left[\overbrace{x^2-2\times x\times 3}^{\text{Début d'une...}}\right]-38=-5\times\overbrace{\left[(x-3)^2-3^2\right]}^{\text{...identité remarquable}}-38$$

$$=\overbrace{-5\times\left[(x-3)^2-9\right]}^{\text{On redistribue...}}-38=\overbrace{-5\times(x-3)^2-5\times(-9)}^{\text{...le facteur }-5}-38$$

$$=-5\times(x-3)^2+45-38=\underline{-5\times(x-3)^2+7}$$

a.3. *f* est une fonction du second degré de la forme ax^2+bx+c avec $\begin{vmatrix} a=-5 \\ b=30 \\ c=-38 \end{vmatrix}$

La fonction *f* change de variation en $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{30}{2\times(-5)}=\dfrac{-30}{-10}=\boxed{3}$

Comme son coefficient dominant $a=-5$ est négatif, alors le tableau de variation de la fonction *f* est :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
			7		
f		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

b.1. La fonction *h* est le quotient de deux fonctions affines qui sont définies sur $\mathbb{R}$.
La seule chose qui puisse faire que l'image $h(x)$ n'existe pas est l'éventuelle annulation de son dénominateur.

Le quotient $h(x)$ n'existe pas $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $2x+4$ est nul

$$\Leftrightarrow \quad 2x+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=-4 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{4}{2}=\boxed{-2}$$

Conclusion : à l'exception de -2, tous les réels *x* ont une image par la fonction *h*.
L'ensemble de définition de la fonction *h* est :

$$D_h = \boxed{\mathbb{R}\backslash\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[}$$

b.2. Pour déterminer les antécédents de -4 par la fonction *h*, nous devons résoudre dans l'ensemble de définition D_h l'équation :

$$h(x)=-7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-7x+1}{2x+4}=-7 \quad \xrightarrow[\text{qui est non nul sur } D_h]{\times(2x+4)} \quad \frac{-7x+1}{\cancel{2x+4}}\times\cancel{(2x+4)}=-7\times(2x+4)$$

$$\Leftrightarrow \quad -7x+1=-14x-28 \quad \Leftrightarrow \quad -7x+14x=-28-1$$

$$\Leftrightarrow \quad 7x=-29 \quad \Leftrightarrow \quad x=\boxed{-\frac{29}{7}}$$

Conclusion : -7 a un seul antécédent par la fonction *h* qui est $-\dfrac{29}{7}$.

b.3. Examinons les deux facteurs composant le quotient $h(x)$:

- Le numérateur $-7x+1$ a un coefficient directeur -7 négatif et il s'annule en :

$$-7x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad -7x=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-1}{-7}=\boxed{\frac{1}{7}}$$

- Le dénominateur $2x+4$ a un coefficient directeur 2 positif et il s'annule en -2.

Nous en déduisons que le tableau de signe du quotient $h(x)$ est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{7}$		$+\infty$
$-7x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$h(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

b.4. Lorsque *x* devient très grand :

- Son numérateur $-7x+1$ est (relativement) très proche de $-7x$;
- Son dénominateur $2x+4$ est (relativement) très proche de $2x$;

Donc $h(x)$ est (relativement) très proche de $\dfrac{-7\cancel{x}}{2\cancel{x}}=-3{,}5$.

Conclusion : lorsque *x* est un très grand nombre, la courbe (C_h) est proche de la droite horizontale d'équation $y=-3{,}5$. On dit que cette dernière est une asymptote à la courbe (C_h) aux voisinages des infinis.

Géométrie analytique

Point(s) analytique(s)

L'énoncé

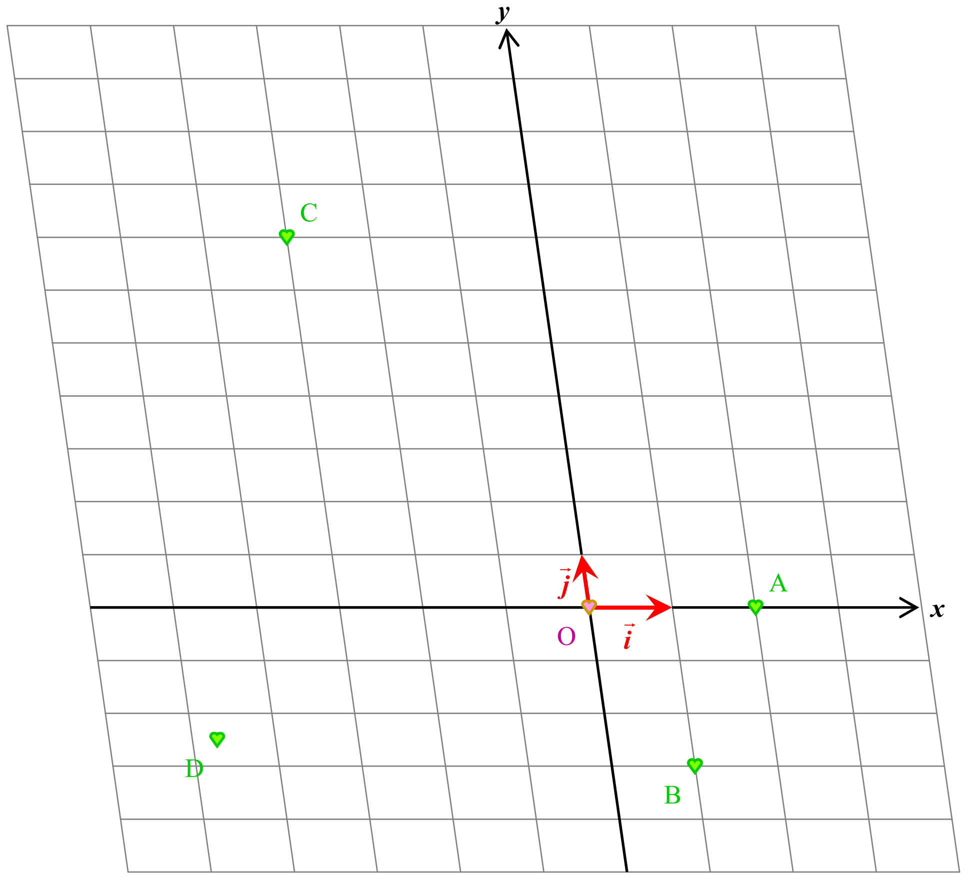
Sur la figure ci-dessous, le plan est rapporté à un repère non orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dans ce repère, on a placé les points de coordonnées :

$A(2;0)$ $\quad B(1;-3)$ $\quad C(-3;7)$ $\quad D(-4,7;-2,5)$

1. Placer sur la figure ci-dessous le point E défini par $\overrightarrow{AE}=5\vec{j}-3\vec{i}$.
2. Construire au compas, puis déterminer par le calcul les coordonnées des points F et G définis par les relations vectorielles : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AB}$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points H, I et J définis par :

$$\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{5}\times\overrightarrow{CA} \qquad 7\times\overrightarrow{BI}+3\times\overrightarrow{CI}=\vec{0} \qquad 5\times\overrightarrow{AJ}-2\times\overrightarrow{BC}=2\times\overrightarrow{CJ}$$



Le corrigé

1. Le point E se positionne comme étant l'arrivée d'un vecteur $5\vec{j}-3\vec{i}$ partant de A.
Par le calcul, on vérifie que ses coordonnées sont...

$$\overrightarrow{AE}=5\vec{j}-3\vec{i} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_E-2 \\ y_E-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{x_E-2=-3}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{y_E=5}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$x_E=-3+2$$
$$=-1$$

2. Déterminons les coordonnées du point F qui est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_F-1 \\ y_F-(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3-(-4,7) \\ 7-(-2,5) \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{x_F-1=1,7}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{y_F+3=9,5}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$x_F=1,7+1 \qquad y_F=6,5$$
$$=2,7$$

<u>Conclusion :</u> le point F a pour coordonnées $(2,7;6,5)$. Géométriquement, F se construit au compas comme étant le quatrième sommet du parallélogramme BDCF.

➲ Passons aux coordonnées du point G qui est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}-4,7-x_G\\-2,5-y_G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{-4,7-x_G=-1}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{-2,5-y_G=-3}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$-x_G=-1+4,7 \qquad -y_G=-0,5$$

$$-x_G=3,7 \qquad y_G=0,5$$

$$x_G=-3,7$$

Conclusion : le point G a pour coordonnées $(-3,7;0,5)$. Géométriquement, le point G se construit au compas comme étant le quatrième sommet du parallélogramme ABDG.

3. Calculons les coordonnées de H. Ce point est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{5}\times\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_H+3\\y_H-7\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\times\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_H+3\\y_H-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\times 5\\-\frac{1}{5}\times(-7)\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}x_H+3\\y_H-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1,4\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{x_H+3=-1}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{y_H-7=1,4}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$x_H=-1-3 \qquad y_H=1,4+7$$

$$x_H=-4 \qquad y_H=8,4$$

Conclusion : le point H a pour coordonnées $(-4;8,4)$.

➲ Déterminons les coordonnées de point I qui est défini par la relation vectorielle :

$$7\times\overrightarrow{BI}+3\times\overrightarrow{CI}=\vec{o} \Leftrightarrow 7\times\begin{pmatrix}x_I-1\\y_I+3\end{pmatrix}+3\times\begin{pmatrix}x_I+3\\y_I-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}7x_I-7\\7y_I+21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3x_I+9\\3y_I-21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}10x_I+2\\10y_I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{10x_I+2=0}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{10y_I=0}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$10x_I=-2 \qquad y_I=\frac{0}{10}$$

$$x_I=\frac{-2}{10} \qquad y_I=0$$

$$=-0,2$$

Conclusion : les coordonnées du point I sont $(-0,2;0)$.

➲ Enfin, le point J est défini par la relation vectorielle :

$$5\times\overrightarrow{AJ}-2\times\overrightarrow{BC}=2\times\overrightarrow{CJ} \Leftrightarrow 5\times\begin{pmatrix}x_J-2\\y_J\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}=2\times\begin{pmatrix}x_J+3\\y_J-7\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}5x_J-10\\5y_J\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_J+6\\2y_J-14\end{pmatrix}$$

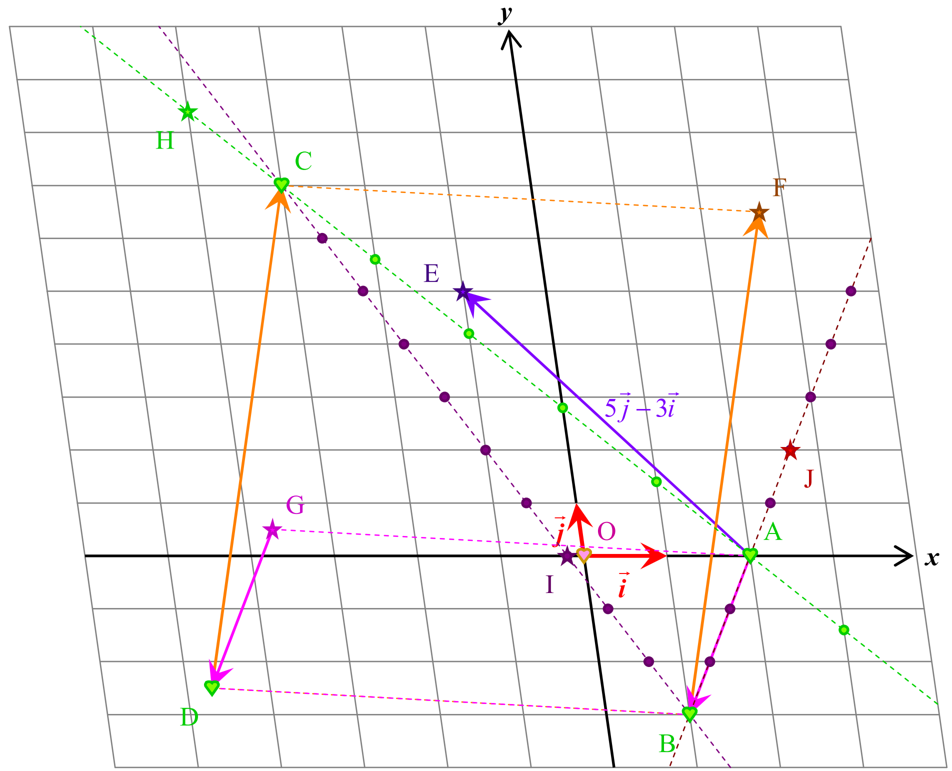
$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}5x_J-2\\5y_J-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_J+6\\2y_J-14\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{5x_J-2=2x_J+6}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{5y_J-20=2y_J-14}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$5x_J-2x_J=6+2 \qquad 5y_J-2y_J=-14+20$$

$$3x_J=8 \qquad 3y_J=6$$

$$x_J=\frac{8}{3} \qquad y_J=\frac{6}{3}=2$$



Un problème total de géométrie analytique

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants :

$\mathrm{A}(1;-4)$ $\mathrm{B}(6;-1)$ $\mathrm{C}(7;5)$ $\mathrm{D}(3,6;3)$ $\mathrm{E}(8;-8)$ $\mathrm{F}(1;4,3)$

a. On appelle G le quatrième sommet du parallélogramme EBFG.

1. Sur la figure ci-contre, construire au compas le point G. On laissera apparents les traits de construction.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G.
3. Les points A, B et G sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.

b. On appelle H le point défini par la relation vectorielle :

$$3\times\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{EA}}-2\times\overrightarrow{\mathrm{EH}}$$

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point H.
2. Calculer les coordonnées du milieu I du segment [AE].
3. Démontrer que le point H appartient à la droite (BI).

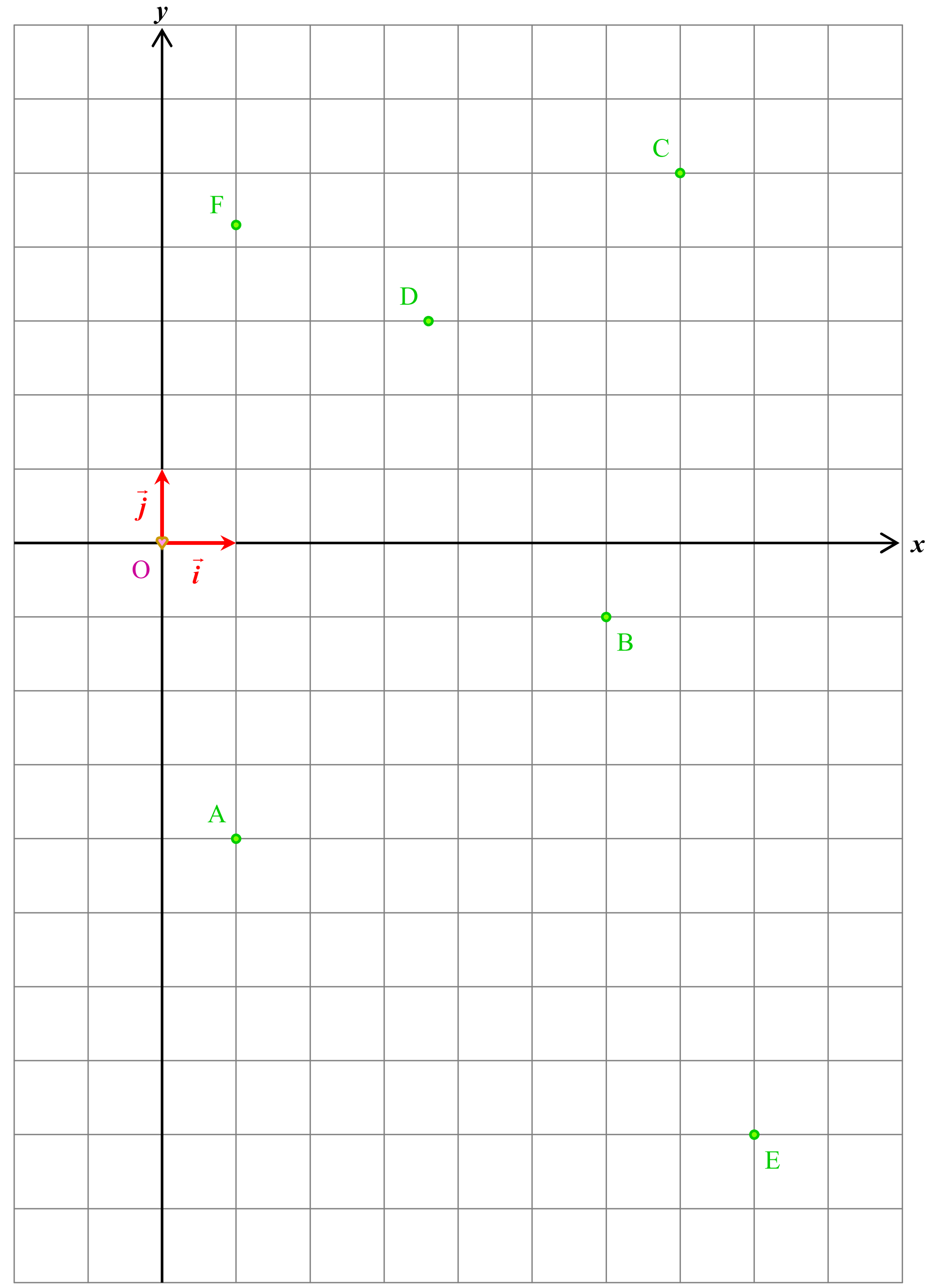
c. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? On justifiera sa réponse.

d. Déterminer par le calcul les coordonnées du point K qui est l'intersection de l'axe des abscisses $\left(\mathrm{O};\vec{i}\right)$ et de la droite (AB).

e. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par le point E.

1. Calculer la valeur exacte du rayon du cercle $\mathscr{C}$.
2. Le point F appartient-il au cercle $\mathscr{C}$? On justifiera sa réponse.
3. On appelle L le point du cercle $\mathscr{C}$ dont l'abscisse x_{L} est égale à 3,4 et dont l'ordonnée y_{L} est négative.
   Déterminer la valeur de cette ordonnée y_{L}.

f. Le triangle ABD est-il rectangle en B ? On justifiera sa réponse.



Le corrigé

a.1. Le point G se construit au compas en reportant la distance BF depuis E, puis en reportant la distance BE depuis F.

a.2. Comme EBFG est un parallélogramme, alors ces quatre points vérifient la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_G-8 \\ y_G-(-8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-6 \\ 4,3-(-1)\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{aligned} x_G-8&=-5 \\ x_G&=-5+8 \\ &=3\end{aligned}}^{\text{Abscisses égales}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{\begin{aligned} y_G+8&=5,3 \\ y_G&=5,3-8 \\ &=-2,7\end{aligned}}^{\text{Ordonnées égales}}$$

<u>Conclusion :</u> le point G a pour coordonnées $(3;-2,7)$.

a.3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-1=5 \\ -1-(-4)=3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 3-1=2 \\ -2,7-(-4)=1,3\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Pour le savoir, calculons leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1,3\end{vmatrix}=5\times1,3-3\times2=6,5-6=0,5\neq0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires.
<u>Conclusion :</u> les points A, B et G ne sont pas alignés.

b.1. Le point H est défini par la relation vectorielle :

$$3\times\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{EA}-2\times\overrightarrow{EH} \Leftrightarrow 3\times\begin{pmatrix} x_H-6 \\ y_H+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 4\end{pmatrix}-2\times\begin{pmatrix} x_H-8 \\ y_H+8\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_H-18 \\ 3y_H+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2x_H+16 \\ -2y_H-16\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 3x_H-18 \\ 3y_H+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x_H+9 \\ -2y_H-12\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{aligned} 3x_H-18&=-2x_H+9 \\ 3x_H+2x_H&=9+18 \\ 5x_H&=27 \\ x_H&=\frac{27}{5}=5,4\end{aligned}}^{\text{Abscisses égales}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{\begin{aligned} 3y_H+3&=-2y_H-12 \\ 3y_H+2y_H&=-12-3 \\ 5y_H&=-15 \\ y_H&=\frac{-15}{5}=-3\end{aligned}}^{\text{Ordonnées égales}}$$

<u>Conclusion :</u> le point H a pour coordonnées $(5,4;-3)$.

b.2. Les coordonnées du milieu I du segment [AE] sont données par les formules :

$$x_I=\frac{x_A+x_E}{2}=\frac{1+8}{2}=\frac{9}{2}=4,5 \quad \underline{\text{et}} \quad y_I=\frac{y_A+y_E}{2}=\frac{(-4)+(-8)}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

<u>Conclusion :</u> le point I a pour coordonnées $(4,5;-6)$.

b.3. On démontre rapidement que les points B, H et I sont alignés.

$$\det\left(\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BI}\right)=\begin{vmatrix} -0,6 & -1,5 \\ -2 & -5\end{vmatrix}=(-0,6)\times(-5)-(-2)\times(-1,5)=-3+3=0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et les points B, H et I sont alignés.

c. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3,6-7=-3,4 \\ 3-5=-2\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\begin{vmatrix} 5 & -3,4 \\ 3 & -2\end{vmatrix}=5\times(-2)-3\times(-3,4)=-10+10,2=0,2\neq0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
<u>Conclusion :</u> les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

d. Le point K appartenant à l'axe des abscisses $(O;\vec{i})$, son ordonnée y_K est nulle.

Ensuite, le point K appartenant à la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} x_K-1 \\ 0-(-4)=4\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Donc le déterminant de ces derniers est nul. Il vient alors :

$$K\in(AB) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 & x_K-1 \\ 3 & 4\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 5\times4-3\times(x_K-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 20-3x_K+3=0 \Leftrightarrow -3x_K=-23 \Leftrightarrow x_K=\frac{-23}{-3}=\frac{23}{3}$$

<u>Conclusion :</u> le point K a pour coordonnées $(23/3;0)$.

e.1. Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est égal à la longueur de son rayon [BE].

$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 8-6=2 \\ -8-(-1)=-7\end{pmatrix} \Rightarrow BE=\sqrt{2^2+(-7)^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}\text{ cm}$$

<u>Conclusion :</u> le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est égal à $\sqrt{53}$ centimètres.

e.2. Pour savoir si le point F appartient au cercle $\mathcal{C}$, calculons la longueur BF.

$$\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 1-6=-5 \\ 4,3-(-1)=5,3\end{pmatrix} \Rightarrow BF=\sqrt{(-5)^2+(5,3)^2}=\sqrt{25+28,09}=\sqrt{53,09}\neq\sqrt{53}$$

<u>Conclusion :</u> sa distance vis-à-vis du centre B excédant le rayon $\sqrt{53}$ centimètres, le point F n'appartient pas au cercle $\mathscr{C}$.

e.3. Les coordonnées du point L sont de la forme $(3,4; y_L)$ avec $y_L < 0$.

Le point L appartenant au cercle $\mathscr{C}$, la distance BL est égale au rayon $\sqrt{53}$ centimètres.

Or : $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} 3,4-6=-2,6 \\ y_L-(-1)=y_L+1 \end{pmatrix} \Rightarrow BL=\sqrt{(-2,6)^2+(y_L+1)^2}=\sqrt{6,76+(y_L+1)^2}$

Reprenant notre raisonnement, il vient alors :

$$B \in \mathscr{C} \Rightarrow BL=\sqrt{53}$$
$$\Rightarrow \sqrt{6,76+(y_L+1)^2}=\sqrt{53} \xrightarrow{\text{Carré}} 6,76+(y_L+1)^2=53$$
$$\Rightarrow (y_L+1)^2+6,76-53=0 \Rightarrow (y_L+1)^2-46,24=0$$
$$\Rightarrow \overbrace{(y_L+1)^2-6,8^2}^{a^2-b^2}=0 \Rightarrow \overbrace{[(y_L+1)+6,8]}^{(a+b)}\times\overbrace{[(y_L+1)-6,8]}^{(a-b)}=0$$
$$\Rightarrow \overbrace{(y_L+7,8)\times(y_L-5,8)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Rightarrow y_L+7,8=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad y_L-5,8=0$$
$$y_L=\boxed{-7,8} \qquad\qquad y_L=5,8$$

<u>Conclusion :</u> l'ordonnée y_L du point L est égale à la seule solution négative : $-7,8$.

f. Deux méthodes permettent de répondre à cette question.

➲ La première consiste à calculer les longueurs des trois côtés :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{25+9}=\underline{\sqrt{34}}$$
$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3,6-1=2,6\\3-(-4)=7\end{pmatrix} \Rightarrow AD=\sqrt{2,6^2+7^2}=\sqrt{6,76+49}=\underline{\sqrt{55,76}}$$
$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3,6-6=-2,4\\3-(-1)=4\end{pmatrix} \Rightarrow BD=\sqrt{(-2,4)^2+4^2}=\sqrt{5,76+16}=\underline{\sqrt{21,76}}$$

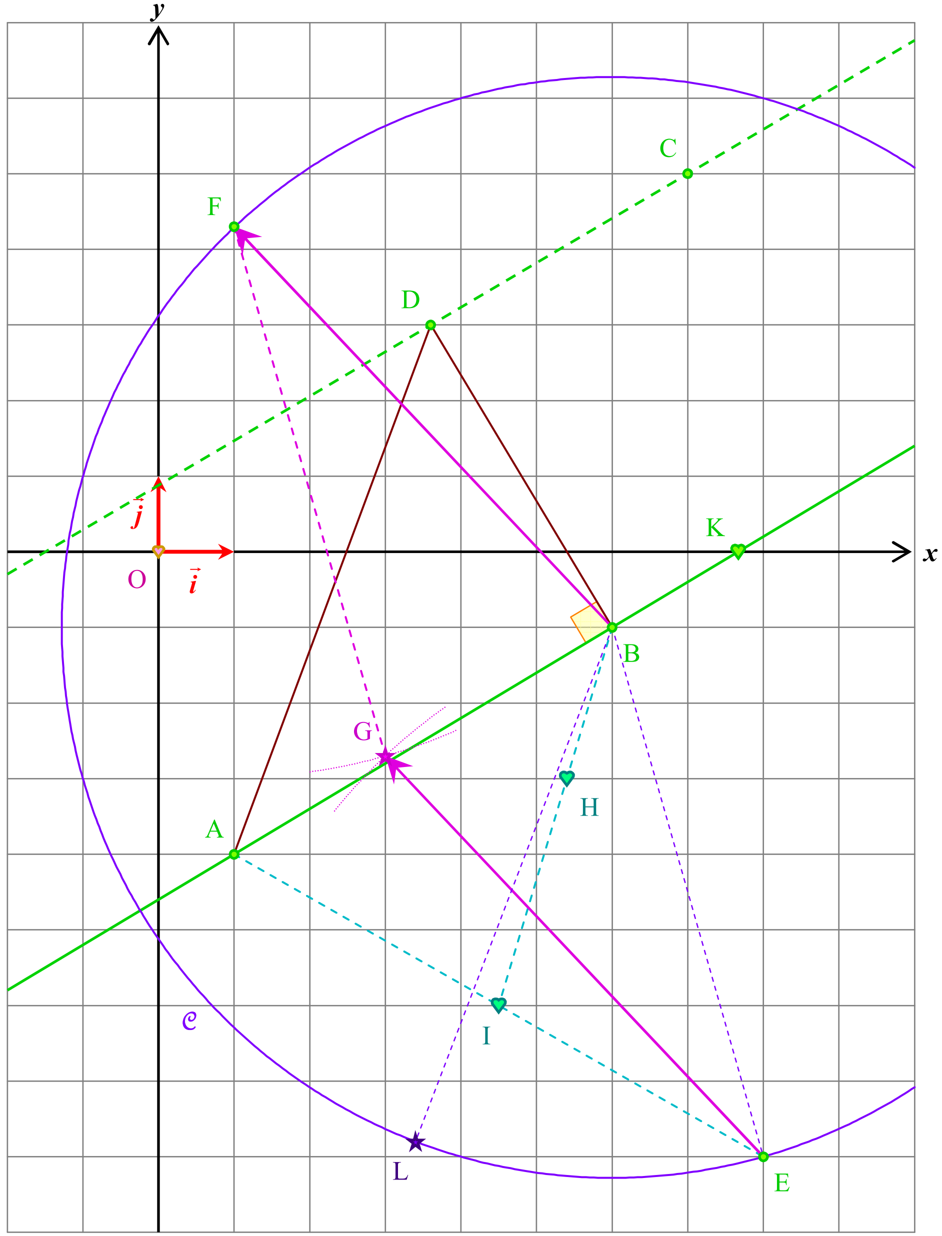
Comme $AB^2+BD^2=34+21,76=55,76=AD^2$, alors, en application du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en B.

➲ Une seconde méthode consiste à employer notre test d'orthogonalité :

$$\text{Orthogonalite}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})=x_{AB}\times x_{BD}+y_{AB}\times y_{BD}=5\times(-2,4)+3\times4=-12+12=\underline{0}$$

Le test étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux. Donc le triangle ABD est rectangle en B.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Une rapide histoire de droites

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants :

$$A(-5;4) \qquad B(-3;-1) \qquad C(4;2)$$

a. On appelle Δ la droite dont une équation cartésienne est $5x+8y-7=0$.

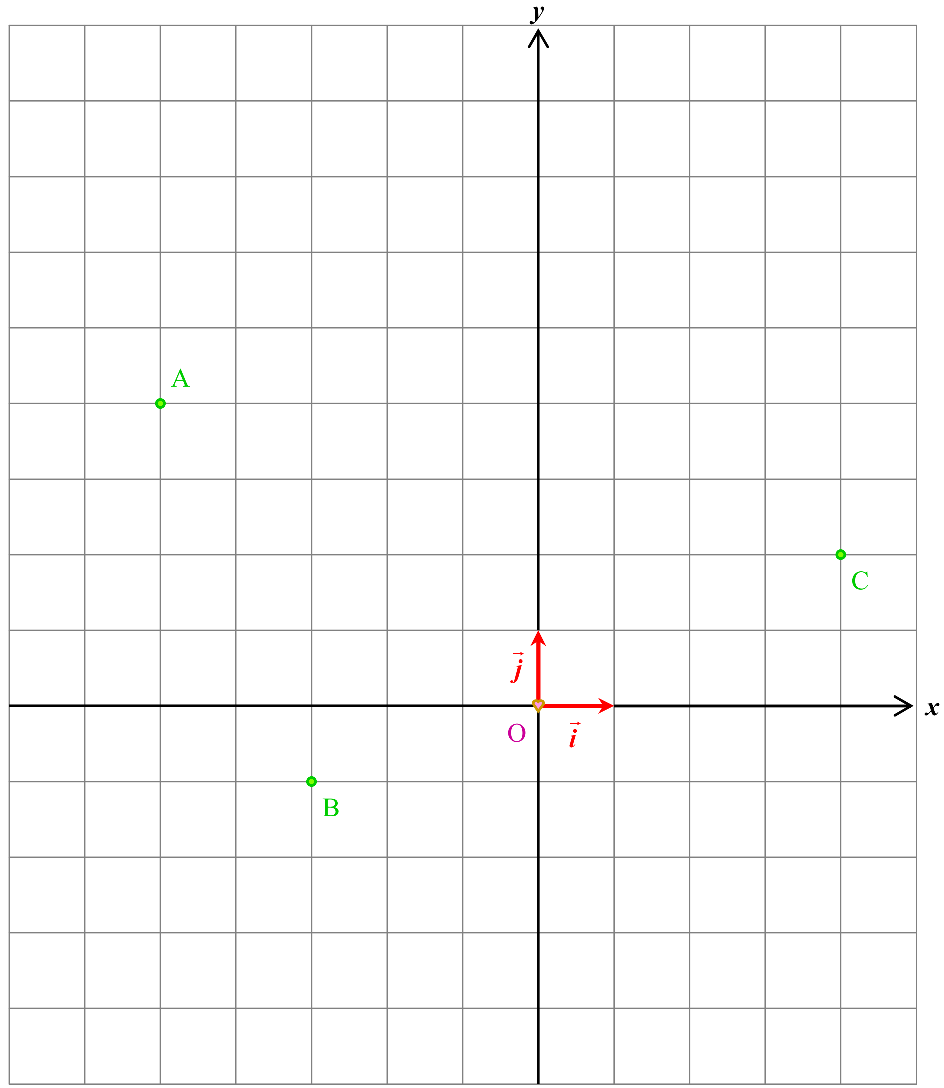
4. Démontrer que le point A appartient à la droite Δ.
5. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite Δ.
6. Sur le graphique ci-contre, tracer la droite Δ.
7. On appelle K le point d'intersection de l'axe des abscisses (Ox) et de la droite Δ.
   Placer le point K sur la figure.
   Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point K.

b. Dans ces questions, on s'intéresse à la droite (BC).

1. Déterminer, par le calcul, une équation cartésienne de la droite (BC).
2. Démontrer, par le calcul, que les droites (BC) et Δ ne sont pas parallèles.
3. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point H qui est l'intersection des droites (BC) et Δ.

c. On appelle I le milieu du segment [AC].

1. Calculer les coordonnées du point I.
2. Placer le point I sur la figure, puis tracer la droite (BI).
3. Les droites (BI) et Δ sont-elles perpendiculaires ? On justifiera sa réponse.



Le corrigé

a.1. Les coordonnées du point A vérifient-elles l'équation de la droite Δ ?

$$5x_A+8y_A-7=5\times(-5)+8\times4-7=-25+32-7=0$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées de A vérifiant l'équation de la droite, A appartient à Δ.

a.2. D'après un résultat du cours, un vecteur directeur de la droite Δ d'équation

$\underbrace{\boxed{5}}_{a}x+\underbrace{\boxed{8}}_{b}y-7=0$ est le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-b=-8\\ a=5\end{pmatrix}$.

a.3. Pour tracer Δ, il suffit de positionner le vecteur directeur $\vec{v}$ arrivant en A et partant d'un autre point A' de la droite ayant pour coordonnées $(3;-1)$. Ainsi se trace Δ.

a.4. Le point K appartenant à l'axe des abscisses (Ox), son ordonnée y_K est nulle.
Ensuite, le point K appartenant à la droite Δ, ses coordonnées $(x_K;0)$ en vérifient l'équation.
Par suite, il vient :

$$5x_K+8\times0-7=0 \iff 5x_K-7=0 \iff 5x_K=7 \iff x_K=\frac{7}{5}=1{,}4$$

<u>Conclusion :</u> le point K a pour coordonnées $(1{,}4;0)$.

b.1. Déterminons une équation de la droite (BC).

$$M(x;y)\in(BC) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-(-3)\\x-(-1)\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4-(-3)\\2-(-1)\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+3 & 7\\ y+1 & 3\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\times 3-(y+1)\times 7=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+9-7y-7=0 \Leftrightarrow 3x-7y+2=0$$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne de la droite (BC) est $3x-7y+2=0$.

b.2. Pour établir que les droites (BC) et Δ ne sont pas parallèles, intéressons-nous à la colinéarité pouvant exister entre deux de leurs vecteurs directeurs : $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{v}$.
Calculons le déterminant de ces deux vecteurs !

$$\det\left(\overrightarrow{BC},\vec{v}\right)=\begin{vmatrix}7 & -8\\ 3 & 5\end{vmatrix}=7\times5-3\times(-8)=35-(-24)=59\neq 0$$

<u>Conclusion :</u> leur déterminant étant non nul, les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Donc les droites (BC) et Δ ne sont pas parallèles mais sécantes

b.3. Le point H appartenant aux deux droites (BC) et Δ, ses coordonnées en vérifient les deux équations. Ainsi :

$$H\in(BC) \Leftrightarrow 5x_H+8y_H-7=0 \quad \textbf{(1)}$$
$$H\in\Delta \Leftrightarrow 3x_H-7y_H+2=0 \quad \textbf{(2)}$$

Nous allons résoudre ce système par un double coup de combinaisons linéaires :

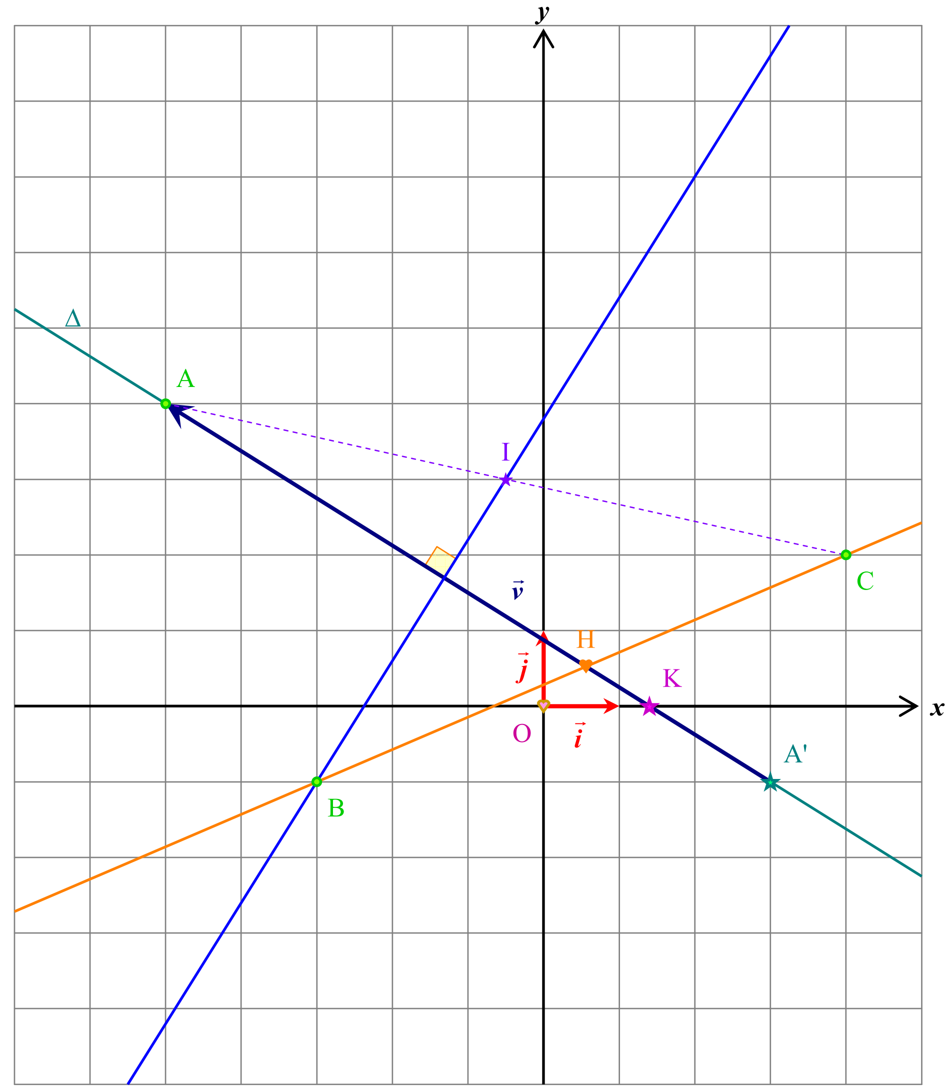
Pour trouver x_H, on élimine y_H.	Pour obtenir y_H, on supprime x_H.
(1) $\xrightarrow{\times 7}$ $35x_H+56y_H-49=0$ ⊕	***(1)*** $\xrightarrow{\times 3}$ $15x_H+24y_H-21=0$ ⊖
(2) $\xrightarrow{\times 8}$ $24x_H-56y_H+16=0$	***(2)*** $\xrightarrow{\times 5}$ $15x_H-35y_H+10=0$
$59x_H-33=0$	$59y_H-31=0$
$x_H=\dfrac{33}{59}$	$y_H=\dfrac{31}{59}$

c.1. Les coordonnées du milieu I du segment [AC] sont données par la formule :

$$x_I=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{(-5)+4}{2}=\frac{-1}{2}=-0{,}5 \quad \underline{\text{et}} \quad y_I=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3$$

<u>Conclusion :</u> le milieu I a pour coordonnées $(-0{,}5;3)$.

c.2. A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre :



c.3. Autrement posée, la question est de savoir si le vecteur $\vec{v}$ directeur de la droite Δ et le vecteur $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-0{,}5-(-3)=2{,}5\\3-(-1)=4\end{pmatrix}$ directeur de la droite (BI) sont orthogonaux.

Pour le savoir, utilisons notre test d'orthogonalité !

$$x_{\vec{v}}\times x_{\overrightarrow{BI}}+y_{\vec{v}}\times y_{\overrightarrow{BI}}=(-8)\times2{,}5+5\times4=-20+20=0$$

<u>Conclusion :</u> leur test d'orthogonalité étant nul, les vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux. Donc les droites Δ et (BI) sont perpendiculaires.

Géométrique classique

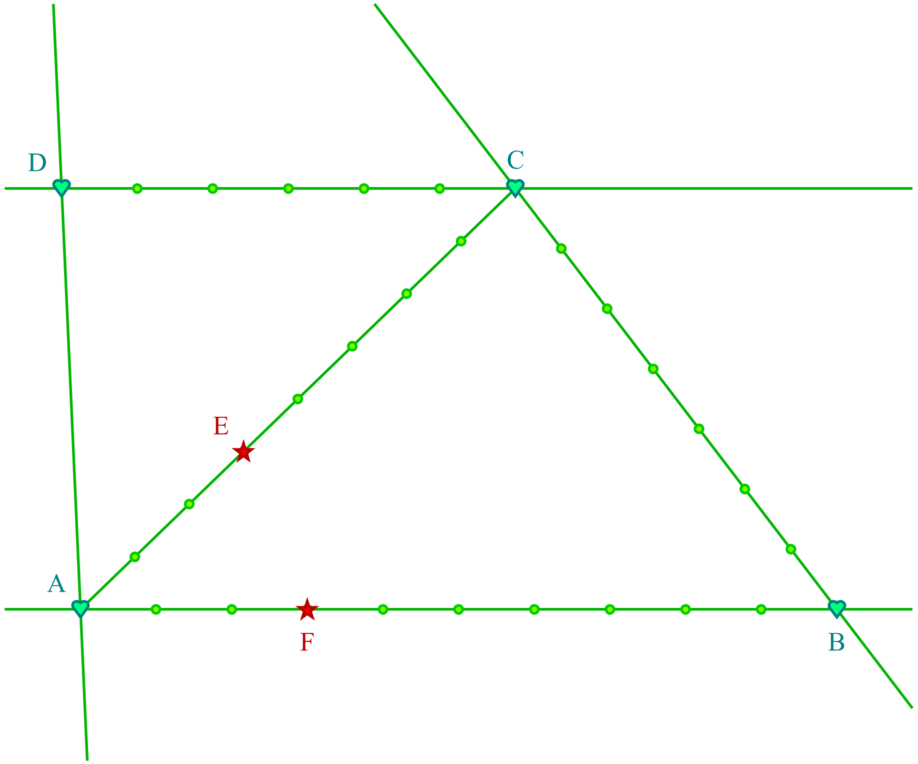
Des points et des vecteurs

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze dont les côtés parallèles sont [AB] et [CD] et qui a les dimensions suivantes :

$AB = 10$ cm $\quad AC = 8$ cm $\quad BC = 7$ cm $\quad CD = 6$ cm

Les quatre côtés [AB], [AC], [BC] et [CD] ont été gradués tous les centimètres.
E et F sont deux points des segments [AC] et [AB] situés à 3 centimètres du point A.



a. Compléter, lorsque cela est possible, les égalités suivantes avec les coefficients qui conviennent. On indiquera explicitement les cas impossibles.

$$\overrightarrow{CD} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{CE} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{BF} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{CE} \qquad \ldots\ldots \times \overrightarrow{AF} + \ldots\ldots \times \overrightarrow{BF} = \vec{o}$$

b. Sur la figure ci-contre, construire les points suivants :

1. Le point K défini par $\overrightarrow{BK} = \frac{5}{7} \times \overrightarrow{BC}$.
2. Le point L défini par $\overrightarrow{CL} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$
3. Le point M défini par $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DA}$
4. Le point N défini par $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5} \times \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \times \overrightarrow{AC}$

c. Le point P est défini par la relation vectorielle :

$$9 \times \overrightarrow{BP} - 2 \times \overrightarrow{CP} = \vec{o}$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CP}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{CB}$, c'est-à-dire qu'il faut rechercher une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{CP} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{CB}$
2. Placer le point P sur la figure ci-contre.

Le corrigé

a.1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à une translation de 10 centimètres vers la droite. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ correspond à une translation de 6 centimètres vers la gauche. Par suite :

$$\boxed{\overrightarrow{CD} = -\frac{3}{5} \times \overrightarrow{AB}}$$

a.2. Le point E se trouvant aux cinq huitièmes du segment [CA] à partir du point C, nous avons la relation vectorielle :

$$\boxed{\overrightarrow{CE} = \frac{5}{8} \times \overrightarrow{CA}}$$

a.3. Les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CE}$ n'étant pas colinéaires (parallèles), il n'est pas possible d'exprimer l'un en fonction de l'autre.

a.4. Le vecteur $\overrightarrow{AF}$ correspond à une translation de 3 centimètres vers la droite.
Le vecteur $\overrightarrow{BF}$ correspond à une translation de 7 centimètres vers la gauche.

Nous en déduisons :

$$\underbrace{7\times\overrightarrow{AF}+3\times\overrightarrow{BF}}_{\text{21 centimètres vers la droite compensés par 21 centimètres vers la gauche, au final, on ne bouge pas !}}=\vec{o}$$

b.1. Vu la relation vectorielle le définissant, le point K se place aux cinq septièmes du segment [BC] à partir du point B.

b.2. Le point L se trouve par rapport au point C à une distance égale au tiers de la longueur du segment [CD] mais à l'opposé de D.

b.3. Comme $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{DA}$, alors le quadrilatère CMAD est un parallélogramme. M se construit au compas comme étant le quatrième point de ce dernier.

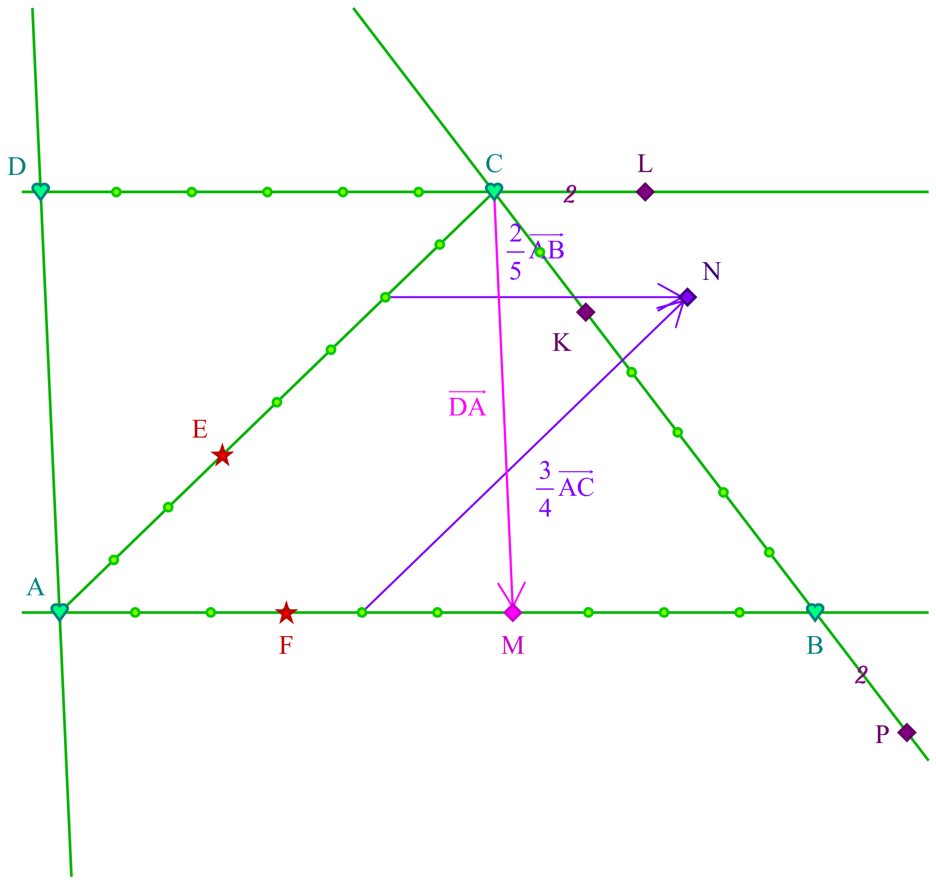
b.4. Comme $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\times\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AC}$, alors N se construit comme le quatrième point d'un parallélogramme dont les deux côtés de base seraient les vecteurs $\frac{2}{5}\times\overrightarrow{AB}$ et $\frac{3}{4}\times\overrightarrow{AC}$.

c. Quand on observe la relation vectorielle initiale et celle à laquelle on veut aboutir, on comprend que le vecteur $\overrightarrow{BP}$ doit être décomposé en passant par le point C.

$$\begin{aligned}
9\times\overrightarrow{BP}-2\times\overrightarrow{CP}=\vec{o} &\Leftrightarrow 9\times\underbrace{\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}\right)}_{\text{Merci Chasles ! } =\overrightarrow{BP}}-2\times\overrightarrow{CP}=\vec{o}\\
&\Leftrightarrow 9\times\overrightarrow{BC}+9\times\overrightarrow{CP}-2\times\overrightarrow{CP}=\vec{o}\\
&\Leftrightarrow 9\times\overrightarrow{BC}+7\times\overrightarrow{CP}=\vec{o}\\
&\Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{CP}=-9\times\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CP}=\frac{-9}{7}\times\overrightarrow{BC}=\boxed{\frac{9}{7}\times\overrightarrow{CB}}
\end{aligned}$$

Conclusion : le segment [CB] mesurant 7 centimètres, P se trouve sur la droite (BC) à $\frac{9}{\cancel{7}}\times\cancel{7}=9$ centimètres du point C...au-delà du point B.

A la fin de l'exercice, la figure est la suivante :



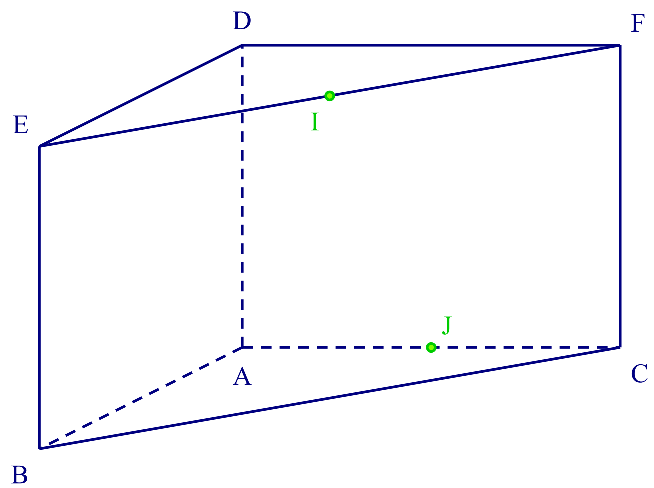
Espace détente

L'énoncé

ABCDEF est un prisme droit s'appuyant sur deux triangles isométriques ABC et DEF respectivement rectangles en A et en D, et vérifiant :

AB = 3cm AC = 5cm AD = 4cm

De plus, on appelle I et J les milieux respectifs des côtés [EF] et [AC].



a. Cette sous-partie un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, trois propositions sont faites mais une seule est juste. Laquelle ? On entourera la proposition choisie.
Chaque bonne réponse rapporte 0,75 points. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rajoute, ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

a.1. Les droites (AF) et (BC) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

a.2. La droite (IJ) et le plan (BAD) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse.	La droite est incluse dans le plan.

a.3. Les plans (DEI) et (BCJ) sont :

Sécants	parallèles distincts	Confondus

a.4. Les droites (FJ) et (AD) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

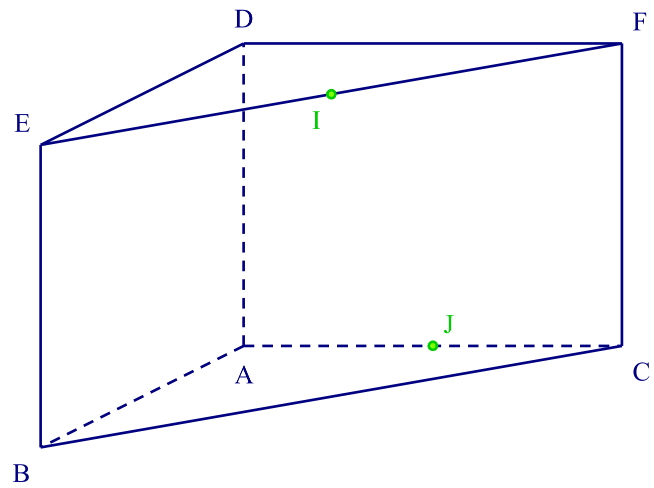
a.5. La droite (BI) et le plan (ACD) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse	La droite est incluse dans le plan

a.6. Les plans (ADI) et (BCF) sont :

Sécants	parallèles distincts	Confondus

b. Sur la figure ci-dessous, tracer l'intersection $\mathcal{S}$ des plans (DIJ) et (BCE). On expliquera les étapes de la construction.



Le corrigé

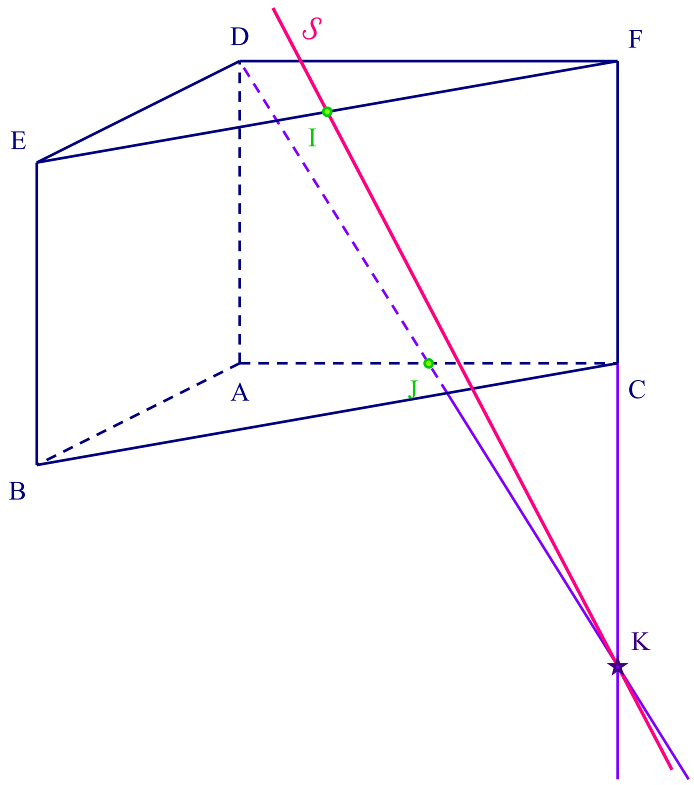
a. Examinons les six questions posées :

1. Le point A n'appartenant pas au plan vertical (BCF), les droites (AF) et (BC) sont non coplanaires.
2. Si on appelle I' le milieu du segment [ED], alors on établit sans peine que la droite (JI) est parallèle à la droite (AI') du plan (BAD). Donc la droite (IJ) est parallèle au plan (BAD).
   De plus, comme les points I et J n'appartiennent pas au plan (BAD), alors ce parallélisme est strict.
3. Le plan horizontal haut (DEI) est parallèle au plan horizontal (BCJ). Ce parallélisme est strict.
4. Les droites (FJ) et (AD) sont sécantes dans le plan (ACFD).
5. Les droites (BI) et (CF) sont sécantes dans le plan (BCF). Leur point d'intersection est aussi celui de la droite (BI) avec le plan (ACD) dont la droite (CF) fait partie. Ainsi, la droite (BI) est-elle sécante au plan (ACD).
6. D'abord, remarquons que le point I est commun aux deux plans (ADI) et (BCF). Le plan (ADI) est sécant au plan (BCF) suivant une droite qui est la parallèle aux droites (AD) et (CF) passant par I. C'est le théorème du toit qui s'applique.

b. L'intersection $\mathcal{S}$ des deux plans sécants (DIJ) et (BCE) est une droite.
Le point I étant commun aux deux plans, il appartient de facto à l'intersection $\mathcal{S}$.
Ensuite, les droites (DJ) et (CF) sont sécantes dans le plan vertical du fond (ACFD) en un point que nous appellerons K.

Comme $\left| \begin{array}{l} K \in \text{droite (DJ)} \subset \text{plan (DIJ)} \\ K \in \text{droite (FC)} \subset \text{plan (BCE)} \end{array} \right.$, alors K appartient à l 'intersection $\mathcal{S}$.

<u>Conclusion :</u> l'intersection $\mathcal{S}$ des plans (DIJ) et (BCE) est la droite (IK).



Statistiques et probabilités

Les jeux sont faits !

L'énoncé

Cette partie est constituée de deux exercices de probabilités indépendants.

a. La *Blancoise des Jeux* vient de lancer son dernier jeu : *une seule verte*.
Une partie de ce jeu se déroule de la manière suivante. Une urne contient sept boules indiscernables au toucher et qui ont toutes la même probabilité d'être tirées. Deux de ces sept boules sont vertes, les cinq autres rouges.
D'abord, le joueur tire au hasard une première boule. Il note sa couleur. Si cette première boule tirée est verte, il ne la remet pas dans l'urne. Mais si elle est rouge, il la remet dans l'urne.
Il tire ensuite une seconde boule dont il note la couleur. Là, le jeu s'arrête.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation d'une partie.
2. Le joueur gagne la partie si <u>une seule</u> des deux boules tirées est verte.
   Quelle est la probabilité qu'il gagne une partie ? On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

b. La direction de *Radio-Bahut* vient de choisir les huit lycéens-animateurs qui officieront sur son antenne en janvier prochain. Pour ne pas faire de jaloux, il a été décidé qu'un tirage au sort serait effectué afin de déterminer les trois animateurs qui animeront les trois émissions proposées : celle du matin, celle du midi et celle du soir.
Parmi les huit lycéens-animateurs, il y a quatre élèves de seconde, trois élèves de première et un élève de terminale.
On précise que chaque lycéen-animateur ne peut animer qu'une seule des trois émissions.
On appelle *distribution* l'attribution précise des trois émissions à trois élèves précis.

1. Justifier qu'il existe 336 distributions possibles.
2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

A = «les trois émissions sont animées par trois élèves de seconde»

B = «aucune émission n'est animée par un élève de première»

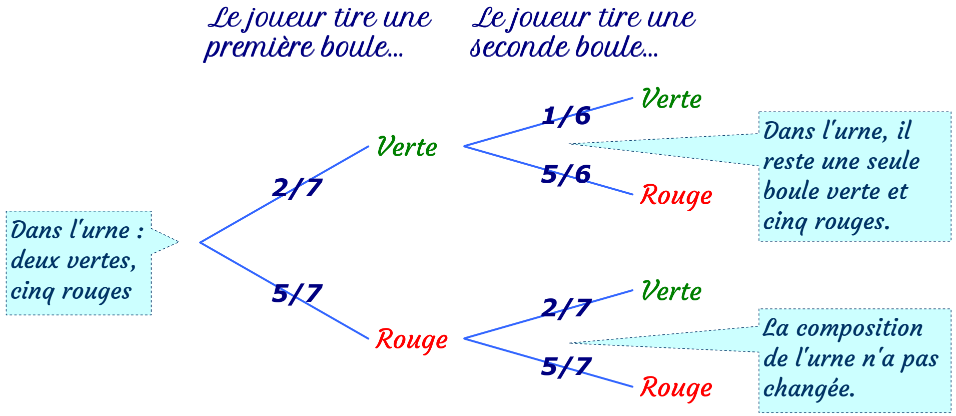
C = «l'émission du matin est animée par un élève de seconde, celle du midi par un élève de première et celle du soir par l'élève de terminale»

D = «au moins l'une des trois émissions est animée par un élève de première»

Le corrigé

a.1. Le secret de l'arbre pondéré est de se demander ce qu'il y a dans l'urne au moment où une boule s'apprête à être tirée.

La situation d'une partie du jeu *une seule verte* est la suivante :



a.2. Le joueur gagne lorsqu'il n'a tirée qu'une seule boule verte parmi les deux tirées. Deux branches de l'arbre sont à prendre en compte.

$$p(\text{"Le joueur gagne"}) = p(\text{"Verte Rouge"}) + p(\text{"Rouge Verte"})$$

$$= \frac{2}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{7}\times\frac{2}{7} = \frac{5}{21}+\frac{10}{49} = \frac{5\times7+10\times3}{147} = \frac{35+30}{147} = \frac{65}{147}$$

b.1. Constituons notre distribution :

Le matin		Le midi		Le soir		
8 candidats	×	7 candidats	×	6 candidats	=	336 distributions possibles

b.2. Déterminons le nombre de distributions favorables à l'événement A :

Le matin		Le midi		Le soir		
4 seconde	×	3 seconde	×	2 seconde	=	24 distributions A

Nous en déduisons que la probabilité de l'événement A est donnée par :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de distributions favorables à A}}{\text{Nombre total de distributions}} = \frac{24}{336} = \frac{1}{14}$$

Si aucune émission n'est animée par un élève première, c'est qu'elles le sont par des élèves de seconde ou de terminale. Le nombre de distributions favorables à B est :

Le matin		Le midi		Le soir		
5 sec. ou term.	×	4 sec. ou term.	×	3 sec. ou term.	=	60 distributions B

Nous en déduisons : $p(B) = \frac{\text{Nombre de distributions B}}{\text{Nombre total de distributions}} = \frac{60}{336} = \frac{5}{28}$

Le nombre de distributions favorables à l'événement C est donné par :

Le matin		Le midi		Le soir		
4 (seconde)	×	3 (première)	×	1 (terminale)	=	12 distributions C

Nous en déduisons : $p(\mathrm{C}) = \dfrac{\text{Nombre de distributions C}}{\text{Nombre total de distributions}} = \dfrac{12}{336} = \dfrac{1}{28}$

L'événement «au moins l'une des trois émissions est animée par un élève de première» est l'événement contraire de «aucune émission n'est animée par un élève de première».
Nous en déduisons :

$$p(\mathrm{D}) = 1 - p(\mathrm{B}) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{28}{28} - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$$

Les amis du thermomètre

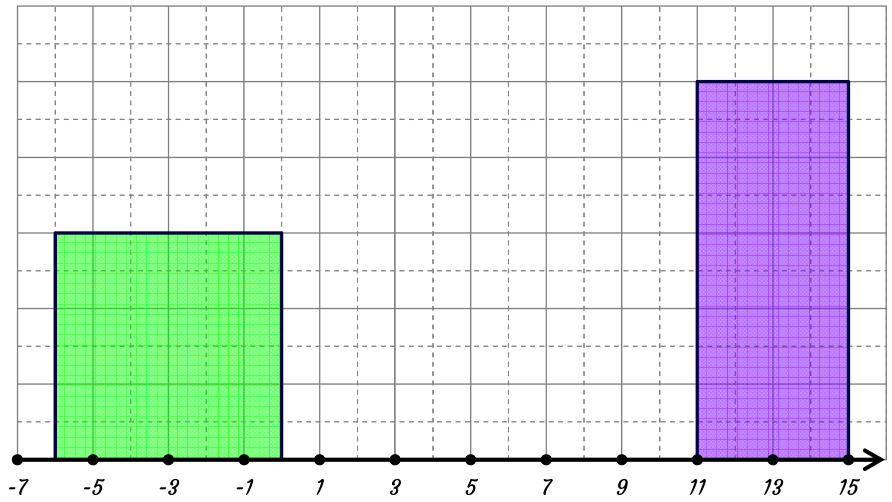
L'énoncé

Le site *Météo Blancoise* a compilé les températures quotidiennes maximales relevées entre le début de l'année 1971 et le second trimestre de l'année 1973. Afin de présenter ces données brutes au public, il a procédé à un regroupement par classes qui a abouti à la série statistique suivante...hélas incomplète !

Classe de températures en °C	?	$[0;5[$	$[5;11[$	?
Effectif ou nombre de jours	?	150	135	?

Heureusement, cette série a été complétée par l'histogramme se trouvant ci-contre...hélas lui aussi incomplet !
Sur notre histogramme se trouvant ci-dessous ;

- 1 centimètre sur l'axe des modalités représente 2°C.
- 1 centimètre carré représente 30 jours.



a. Compléter le tableau et l'histogramme précédents.

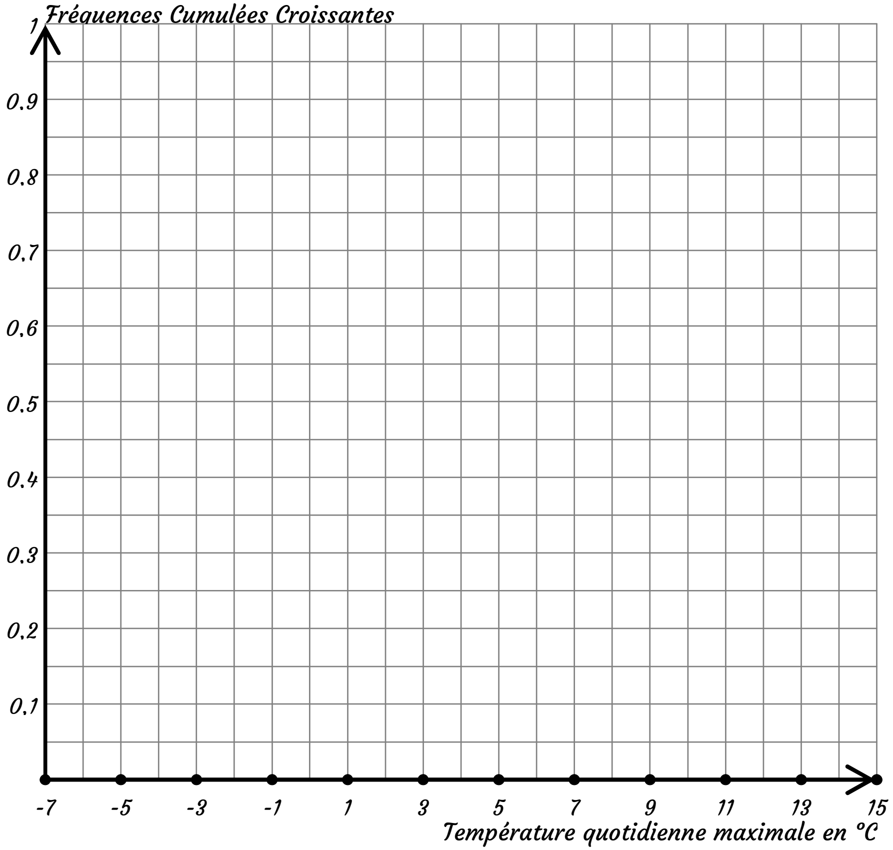
b. Parmi les propositions suivantes, entourez celle qui est égale à l'effectif total. Aucune justification n'est demandée.

755 805 855 905

c. On fait l'hypothèse que, dans une même classe, les individus sont régulièrement répartis. Ecrire le calcul qui permet de calculer la moyenne de cette série statistique, puis donner sa valeur arrondie au dixième de degré Celsius près.

d. Construire sur le graphique au verso le polygone ou courbe des fréquences cumulées croissantes.

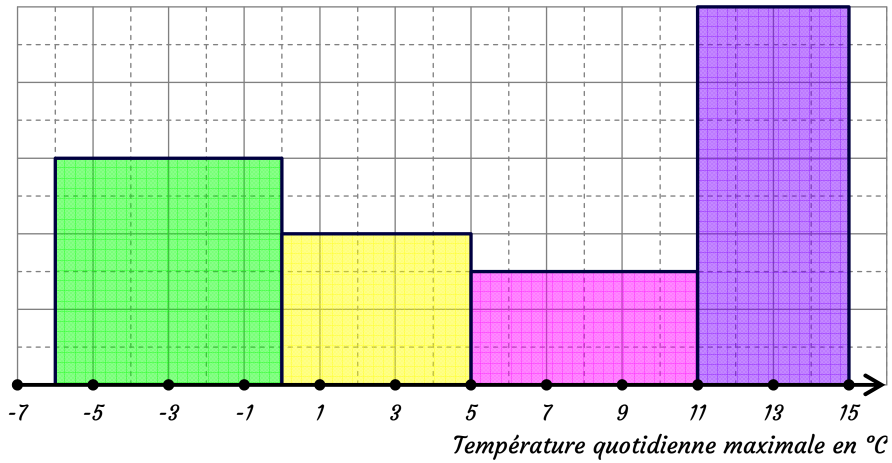
e. A partir de ce graphique, déterminer les valeurs approchées de la médiane et des deux quartiles Q_1 et Q_3 de notre série statistique.



Le corrigé

a. Nous compléterons le tableau et l'histogramme simultanément, l'un contenant les informations manquantes de l'autre.

Classe de températures en °C	$[-6;0[$	$[0;5[$	$[5;11[$	$[11;15[$
Effectif ou nombre de jours	270	150	135	300
Rectangle $\underbrace{aire}_{cm^2} = \underbrace{base}_{cm} \times \underbrace{hauteur}_{cm}$	$9 = 3\times 3$	$5 = 2,5\times 2$	$4,5 = 3\times 1,5$	$10 = 2\times 5$



b. L'effectif total de la série statistique est égal à $270+150+135+300 = 855$ jours

c. La moyenne de notre série statistique est donnée par le calcul :

$$\text{Moyenne} = \frac{\sum \text{effectif} \times \text{milieu de classe}}{\text{Effectif total}}$$

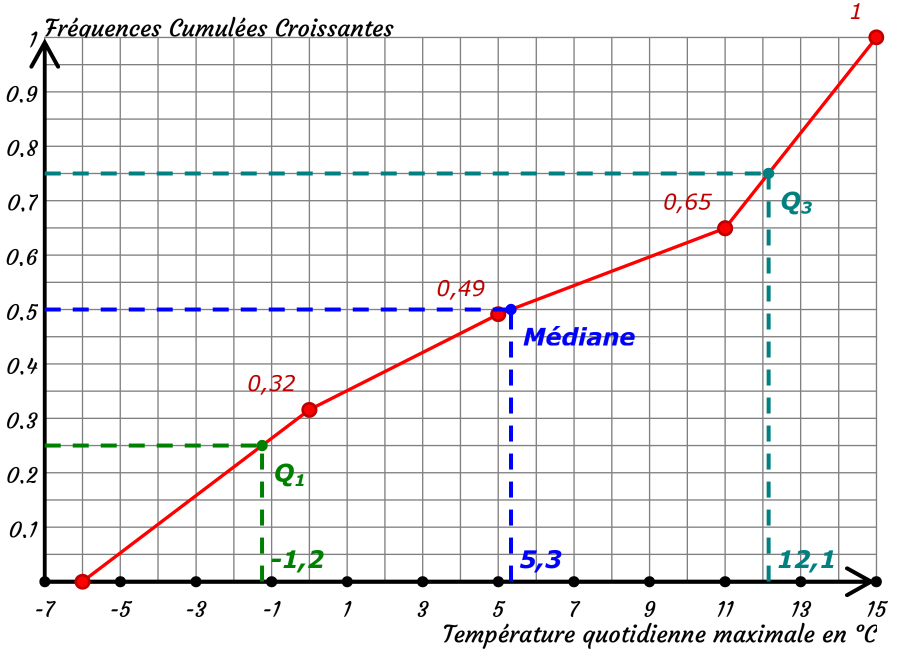
$$= \frac{270\times(-3)+150\times 2,5+135\times 8+300\times 13}{855} = \frac{4545}{855} \approx 5,3\,°\text{C}$$

d. D'abord, calculons les fréquences cumulées croissantes de chaque classe.

Classe de températures en °C	$[-6;0[$	$[0;5[$	$[5;11[$	$[11;15[$
Effectif ou nombre de jours	270	150	135	300
Fréquence cumulée croissante	0,32	0,49	0,65	1

Puis, on construit le polygone ou courbe des fréquences cumulées croissantes en se souvenant des principes suivants :

- La fréquence cumulée croissante est définie entre la plus petite modalité $-6°C$ et la plus grande $15°C$.
- La fréquence cumulée croissante ou FCC de la plus petite modalité est 0.
- La fréquence cumulée croissante d'une classe n'est entièrement acquise que sur la borne supérieure de cette classe.



e. La médiane est la modalité pour laquelle la fréquence cumulée croissante ou FCC est égale à 0,5. Graphiquement, on détermine que cette médiane vaut à peu près $5{,}3°C$.

Le premier quartile Q_1 est la modalité pour laquelle la FCC est égale à 0,25. Le graphique nous indique que Q_1 est proche de $-1{,}2°C$.

Le troisième quartile Q_3 est la modalité pour laquelle la FCC est égale à 0,75. La courbe ci-dessus nous indique qu'il vaut environ $12{,}1°C$

Incertitudes échantillonnées

L'énoncé

a. La *Blancoise de la Dope* a mis au point un nouveau médicament permettant de soulager une maladie terrible, la bavardite aïgue, qui induit un bavardage continuel chez ceux qui en sont atteints.
Ella a décidé de comparer l'efficacité de ce nouveau médicament avec celle de l'ancien. Pour ce faire, elle constitue deux groupes de malades choisis au hasard :

- Aux 527 malades du *groupe A*, elle donne l'ancien médicament. Après une semaine de traitement, 347 malades de ce groupe déclarent moins bavarder.
- Aux 389 malades du *groupe B*, elle donne le nouveau médicament. Après une semaine de traitement, 290 malades de ce groupe déclarent moins bavarder.

1. Pour chacun de ces groupes, déterminer l'intervalle de confiance au seuil de 95% de la proportion de malades déclarant moins bavarder après une semaine de traitement. On arrondira les bornes au millième-près.
2. Ces intervalles de confiance de confiance permettent-ils, au niveau de confiance 0,95, de considérer que le nouveau médicament est plus efficace que l'ancien ? On justifiera sa réponse.
3. La *Blancoise de la Dope* souhaite obtenir un intervalle de confiance au seuil de 95% dont la longueur serait inférieure à 0,04. Combien l'échantillon constitué doit-il compter de malades ?

b. On sait que 42,5% des français apprécient Madame Aude Idonk. On rencontre au hasard 731 de ces français et exactement 289 d'entre eux déclarent apprécier Madame Aude Idonk.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de cet échantillon. On arrondira les bornes au millième près.
2. Peut-on considérer que l'échantillon constitué par les 731 personnes pense comme tous les français à propos de Madame Aude Idonk ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a.1. Le *groupe A* constitue un échantillon de $n_A = 527$ individus où la fréquence de gens déclarant moins bavarder après une semaine de traitement est $f_A = \frac{347}{527} \approx 0{,}658$

La proportion p_A de gens prenant l'ancien médicament et bavardant moins après une semaine de traitement appartient avec une probabilité d'au moins 95% à l'intervalle de confiance au seuil de 95% qu'est $\left[f_A - \frac{1}{\sqrt{n_A}}; f_A + \frac{1}{\sqrt{n_A}}\right] = [0{,}614;0{,}703]$

En minorant la borne inférieure, en majorant la borne supérieure.

Le *groupe B* est un échantillon de $n_B = 389$ individus où la fréquence de gens déclarant moins bavarder après une semaine de traitement est $f_B = \dfrac{290}{389} \approx 0,746$

La proportion p_B de gens prenant <u>le nouveau médicament</u> et bavardant moins après une semaine de traitement appartient avec une probabilité d'au moins 95% à l'intervalle de confiance au seuil de 95% qu'est $\left[f_B - \dfrac{1}{\sqrt{n_B}} ; f_B + \dfrac{1}{\sqrt{n_B}} \right] = [0,694;0,797]$

En minorant la borne inférieure, en majorant la borne supérieure.

a.2. Les deux intervalles de confiance se chevauchant, il n'est pas exclu que la proportion p_B soit inférieure ou égale à la proportion p_A. Par conséquent, on ne peut pas déduire des résultats précédents que le nouveau médicament est plus efficace que l'ancien.

a.3. La longueur d'un intervalle de confiance au seuil de 95% se rapportant à un échantillon de *n* individus est égale à $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

On veut savoir pour quelles valeurs de *n* on a :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,04 \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]0;+\infty[]{\text{Inverse}} \frac{\sqrt{n}}{2} \geq \frac{1}{0,04} \xrightarrow{\times 2} \sqrt{n} \geq \frac{2}{0,04} = 50$$

$$\xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Carré}} n \geq 50^2 = 2500$$

<u>Conclusion :</u> pour que l'intervalle de confiance au seuil de 95% ait une longueur au plus égale à 0,04, il faut que l'échantillon compte au moins 2500 individus.

b.1. La proportion de français appréciant Aude Idonk est égale $p = 0,425$

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% relatif à un échantillon de $n = 731$ individus est donné par la formule $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right] = [0,388;0,462]$

En minorant la borne inférieure, en majorant la borne supérieure.

b.2. La fréquence observée sur l'échantillon est égale à $\dfrac{289}{731} \approx 0,395$.

La théorie prescrit qu'une fréquence observée sur un échantillon de 731 individus appartient avec une probabilité au moins égale à 95% à l'intervalle de fluctuation précédent.
C'est le cas de notre fréquence. Donc, on peut considérer que l'échantillon pense comme les français.

Femmes, il vous aime !

L'énoncé

Le patron d'une chaine nationale de supermarchés affirme que les deux tiers de ses clients sont des femmes. Pour corroborer cette affirmation, un institut d'études d'opinion a réalisé un sondage sur un échantillon de 783 clients de l'enseigne qui ont été choisis au hasard.
On appelle *f* la fréquence observée sur cet échantillon

- **a.** Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence *f*. On écrira les formules adéquates et on arrondira ses bornes au millième près.
- **b.** L'institut a compté qu'il y avait 503 femmes dans l'échantillon de 783 clients. Au regard de ce résultat, peut-on considérer, au seuil de 95%, que l'affirmation du président de la compagnie est fondée ?

Le corrigé

a. La fréquence *f* appartient avec une probabilité au moins égale à 95% à l'intervalle de fluctuation :

Borne inférieure $= p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{783}} \approx 0,630$ ← en minorant

Borne supérieure $= p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{783}} \approx 0,703$ ← en majorant

<u>Conclusion :</u> l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% recherché est $[0,630;0,703]$.

b. La fréquence de femmes observée sur l'échantillon est $f = \dfrac{503}{783} \approx 0,642$

Celle-ci appartenant à l'intervalle de fluctuation, on peut considérer au seuil de risque 5% que l'affirmation du patron de l'enseigne de supermarché est fondée.

Et l'année prochaine, ce sera vachement plus pire !

Le mot de l'auteur

Publié avec un peu de retard, voici le recueil de mes méfaits de seconde, c'est-à-dire de la totalité des exercices que j'ai donnés en devoir aux élèves de cette classe durant la saison scolaire 2014-2015.
Dans son ensemble, cette classe d'une trentaine d'élèves était peu attirée par ma matière. Les grands pédagogues diront que je n'ai pas su intéresser cette jeunesse qui ne demandait qu'à se cultiver, qu'à s'instruire, qu'à s'élever. Et ils n'auront pas tort !
Car il n'y a pas de mauvais élèves, mais juste des profs incapables ! Et je suis l'un d'eux. Il est au moins une chose que j'aurai réussie dans ma misérable vie.
Cela étant, si les incapables dans mon genre n'existaient pas, nul ne remarquerait les profs brillants qui passent plus de temps à disserter devant leurs collègues qu'à enseigner devant leurs élèves. J'ai donc une certaine utilité.
Le problème actuel des collégiens qui débarquent au lycée n'est pas leur manque d'envie mais juste qu'ils n'ont pas fait assez de mathématiques au collège où les programmes sont assez pauvres et ne permettent de faire des travaux longs construits et structurés. Quelque chose que l'on fait trop peu, on le fait très mal.
Les anciens collégiens et nouveaux lycéens manquant d'expérience et de culture mathématique, j'en suis revenu à faire des tonnes d'exercices sur un même sujet afin qu'ils assimilent au mieux les concepts et les méthodes. Je travaille le foncier !
Désormais, les exercices donnés en devoir ne sont que la répétition de ce qui a été fait et refait en cours. Il y a parfois une à deux questions nouvelles mais ça ne va pas plus loin.
Les gamins actuels ne sont pas plus nuls que nous ne l'étions; c'est juste qu'on ne les a pas assez fait travailler. Mes collègues des classes antérieures n'y sont pour rien; ils appliquent juste au mieux les élucubrations dégoulinant des étages supérieurs.

Jérôme Onillon

Au sommaire du rodéo :