Analyse

Liaison rationnellement fatale

L'énoncé

a. La fonction f est définie sur l'ensemble $D_f =]-\infty;-2[\cup]-2;1]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+x+7}{x+2}$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur l'ensemble D_f.
2. Calculer les images $f(-5)$ et $f(1)$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   Cette limite induit-elle une asymptote pour la courbe (C_f) ? Si oui, on précisera son équation réduite.
4. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 par la gauche, puis par la droite.
   Ces limites induisent-elles des asymptotes pour la courbe (C_f) ? Si oui, on précisera leurs équations réduites.
5. Justifier que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition D_f.
   Etablir que pour tout réel $x \in D_f$, on a :
   $$f'(x) = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$$
   En déduire les variations de la fonction f sur son ensemble de définition D_f.

b. La fonction g est définie sur l'intervalle $D_g =]1;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{5}{x^2-2x+2} - 2$$

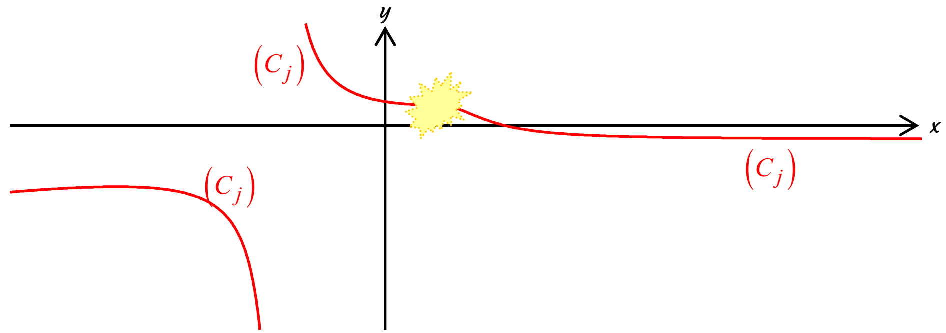
On appelle (C_g) sa courbe représentative.

1. Justifier que la fonction g est bien définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de D_g.
   Ces limites induisent-elles des asymptotes pour la courbe (C_g) ?
3. Justifier que g est dérivable sur son ensemble de définition $D_g =]1;+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel $x \in D_g$, on a :
   $$g'(x) = \frac{10-10x}{(x^2-2x+2)^2}$$
   En déduire les variations de la fonction g sur son ensemble de définition D_g.

c. On souhaite constituer une super fonction j étant égale à f à gauche de 1 et à g à droite de 1. Formellement, la définition de j sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ est la suivante :

$$\begin{cases} j(x) = f(x) & \text{si } x \in]-\infty;-2[\cup]-2;1] \\ j(x) = g(x) & \text{si } x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

Sa courbe représentative (C_j) a été tracée dans un repère simplement orthogonal sur le graphique ci-dessous. Malheureusement, elle a été détériorée au voisinage de 1.



Se pose le problème de la liaison en 1 entre les courbes (C_f) et (C_g) constituant (C_j).

1. La fonction j est-elle continue en 1 ? On justifiera sa réponse.
2. La fonction j est-elle dérivable en 1 ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a.1. La fonction f est le quotient des polynômes $u(x) = x^2+x+7$ et $v(x) = x+2$ qui sont définis et dérivables sur $\mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{Le quotient } f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \text{Son dénominateur } v(x) \text{ est non nul} \\ &\Leftrightarrow x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \end{aligned}$$

C'est pour cela que la fonction f est parfaitement définie sur l'ensemble $]-\infty;1]\backslash\{-2\}$.

a.2. Calculons les images demandées :

$$f(-5)=\frac{(-5)^2+(-5)+7}{(-5)+2}=\frac{25+2}{-3}=\frac{27}{-3}=\underline{-9}$$

$$f(1)=\frac{1^2+1+7}{1+2}=\frac{9}{3}=\underline{3}$$

a.3. De prime abord :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+7}{x+2}=\frac{(+\infty)+(-\infty)+7}{(-\infty)+2}=\frac{\boxed{\text{Forme indéterminée}}}{-\infty}$$

Pour lever l'indétermination, nous allons factoriser numérateur et dénominateur de la fonction rationnelle $f(x)$ par leurs termes nous paraissant les plus forts : x^2 et x.

$$f(x)=\frac{x^2+x+7}{x+2}=\frac{x^2\times\left(1+\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{7}{x^2}\right)}{x\times\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\times\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=x\times\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}$$

Il ne reste plus qu'à conclure :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\times\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=(-\infty)\times\frac{1+0^-+0^+}{1+0^-}=(-\infty)\times\frac{1}{1}=\underline{-\infty}$$

Cette limite infinie à l'infinie n'a aucune conséquence asymptotique sur la courbe (C_f).

a.4. Lorsque x tend vers -2 :

$$u(x)=x^2+x+7\ \xrightarrow[x\to-2]{}\ (-2)^2+(-2)+7=9 \text{ par continuité}$$

$$v(x)=x+2\ \xrightarrow[x\to-2]{}\ (-2)+2=0 \text{ mais de quel signe ?}$$

Le tableau de signe du dénominateur $v(x)$ est :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	

A gauche de -2	A droite de -2
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\frac{9}{0^-}=\underline{-\infty}$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\frac{9}{0^+}=\underline{+\infty}$

La conséquence graphique de ces deux limites infinies en -2 est que la droite verticale d'équation $x=-2$ est une asymptote à la courbe (C_f). Cette dernière plonge à gauche de cette droite et ça s'envole à droite.

a.5. f est le quotient des fonctions

$u(x)=x^2+x+7$ et $v(x)=x+2$

$u'(x)=2x+1$; $v'(x)=1$

Dérivable sur ℝ ; Dérivable sur ℝ.

Non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Donc f est parfaitement dérivable sur son ensemble de définition $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;1]$ et pour chaque réel x de celui-ci, on a :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{(2x+1)\times(x+2)-1\times\left(x^2+x+7\right)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4x+x+2-x^2-x-7}{(x+2)^2}=\underline{\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}}$$

➲ Le signe de la dérivée $f'(x)$ va nous donner le sens de variation de f.

Le signe du numérateur $N(x)=x^2+4x-5$ demeure inconnu. C'est une forme du second degré. Calculons son discriminant :

$$\Delta_{N(x)}=4^2-4\times1\times(-5)=16+20=\underline{36=6^2}$$

Son discriminant étant positif, $N(x)$ a deux racines réelles et distinctes :

$$x=\frac{-4-6}{2\times1}=\frac{-10}{2}=\underline{-5} \quad \underline{\text{ou}} \quad x=\frac{-4+6}{2\times1}=\frac{2}{2}=\underline{1}$$

Le tableau de signe de $f'(x)$ et celui de variation de f sont les suivants :

x	$-\infty$		-5		-2		1
$N(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x+2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	$-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

b.1. La seule chose qui puisse faire que $g(x)$ n'existe pas est l'éventuelle nullité du dénominateur $u(x)=x^2-2x+1$. Calculons le discriminant de cette forme du second degré.

$$\Delta_{u(x)}=(-2)^2-4\times1\times2=4-8=-4$$

Son discriminant étant négatif, le dénominateur $u(x)$ n'est jamais nul mais toujours positif comme son coefficient dominant 1.
C'est pour cela que la fonction g est toujours définie. Elle l'est en particulier sur $]1;+\infty[$.

b.2. Concernant g, deux limites sont à déterminer : l'une à droite de 1 et l'autre en $+\infty$.

La limite de g à droite de 1.
Le polynôme $u(x)=x^2-2x+1$ étant continu sur $\mathbb{R}$, il l'est en particulier en 1.

Donc $\lim\limits_{x\to1^+} u(x)=u(1)=1^2-2\times1+2=1-2+2=1$

Il vient alors : $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{5}{u(x)}-2=\dfrac{5}{1}-2=3$

Cette limite finie en un point n'a aucune conséquence asymptotique sur (C_g).

La limite de g en $+\infty$
Occupons-nous d'abord de la limite du polynôme u en $+\infty$!

$$u(x)=x^2\times\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}(+\infty)\times\left(1-0^++0^+\right)=(+\infty)\times1=+\infty$$

On évite ainsi une forme indéterminée ∞-∞.

Nous

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{u(x)}-2=\frac{5}{+\infty}-2=0^+-2=-2$$

La conséquence de cette limite finie à l'infini est que la droite d'équation $y=-2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_g) au voisinage de $+\infty$.

b.3. La fonction g est de la forme $g=5\times\dfrac{1}{u}-2$ avec
$u(x)=x^2-2x+2$
$u'(x)=2x-2$
Dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par conséquent sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

$$g'(x)=5\times\frac{-u'}{u^2}+0=5\times\frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{-10x+10}{(x^2-2x+2)^2}$$

Le signe de la dérivée $g'(x)$ va nous donner les variations de la fonction g.

x	1		$+\infty$
$-10x+10$		$-$	
$(x^2-2x+2)^2$		$+$	
$g'(x)$		$-$	
g	3	↘	-2

c.1. D'abord, comme sur l'intervalle $]-2;1]$, la fonction j est égale à la fonction f, alors :
$j(1)=f(1)=3$
j est continue comme f (qui est dérivable) à gauche de 1.

Ensuite, à droite de 1, la fonction j est égale à g.
Donc la limite de j à droite de 1 est donnée par :

D'après la limite de g en 1, question b.2.

$$\lim_{\substack{x\to1^+\\x\neq1}} j(x)=\lim_{\substack{x\to1^+\\x\neq1}} g(x)=3=j(1)$$

<u>Conclusion :</u> la fonction j est continue en 1.

c.2. Depuis la question **a.5**, nous savons que f est dérivable sur l'intervalle $]-2;1]$.
Par conséquent, j est dérivable à gauche de 1 et le nombre dérivé de j à gauche de 1 est donné par :

$$j'_g(1)=f'(1)=\frac{1^2+4\times1-5}{(1+2)^2}=\frac{0}{9}=0$$

Maintenant, si l'on se positionne à droite de 1, l'éventuel nombre dérivé de j à droite de 1 est la limite lorsque x tend vers 1 par la droite du quotient :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{j(x)-j(1)}{x-1}=\overbrace{\lim_{x\to1^+}\frac{j(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}^{\text{Car à droite de 1, } j(x)=g(x)}=g'(1)$$

Implicitement, nous prolongeons la fonction g en 1. Il n'y a aucun problème à ce prolongement car nous avons établi lors de la question **b.3** que la fonction g était parfaitement définissable et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Revenons à la fonction j. Celle-ci est donc dérivable à droite de 1 et le nombre dérivable de j à droite de 1 est donné par :

$$j'_d(1) = g'(1) = \frac{10 - 10\times 1}{\left(1^2 - 2\times 1 + 1\right)^2} = \frac{0}{1^2} = 0$$

<u>Conclusion :</u> comme les nombres dérivés de j à gauche et à droite de 1 sont égaux, alors la fonction j est bien dérivable en 1.

Une autre façon de faire en revenant sur la définition de ce qu'est un nombre dérivé.

Nombre dérivé à gauche de 1 - h est un réel négatif proche de 0 $\Leftrightarrow$ $1 + h < 0$

$$\frac{j(1+h) - j(1)}{h} = \frac{\frac{(1+h)^2 + (1+h) + 7}{(1+h)+2} - 3}{h} = \frac{\frac{1 + 2h + h^2 + 1 + h - 3\times(h+3)}{h+3}}{h}$$

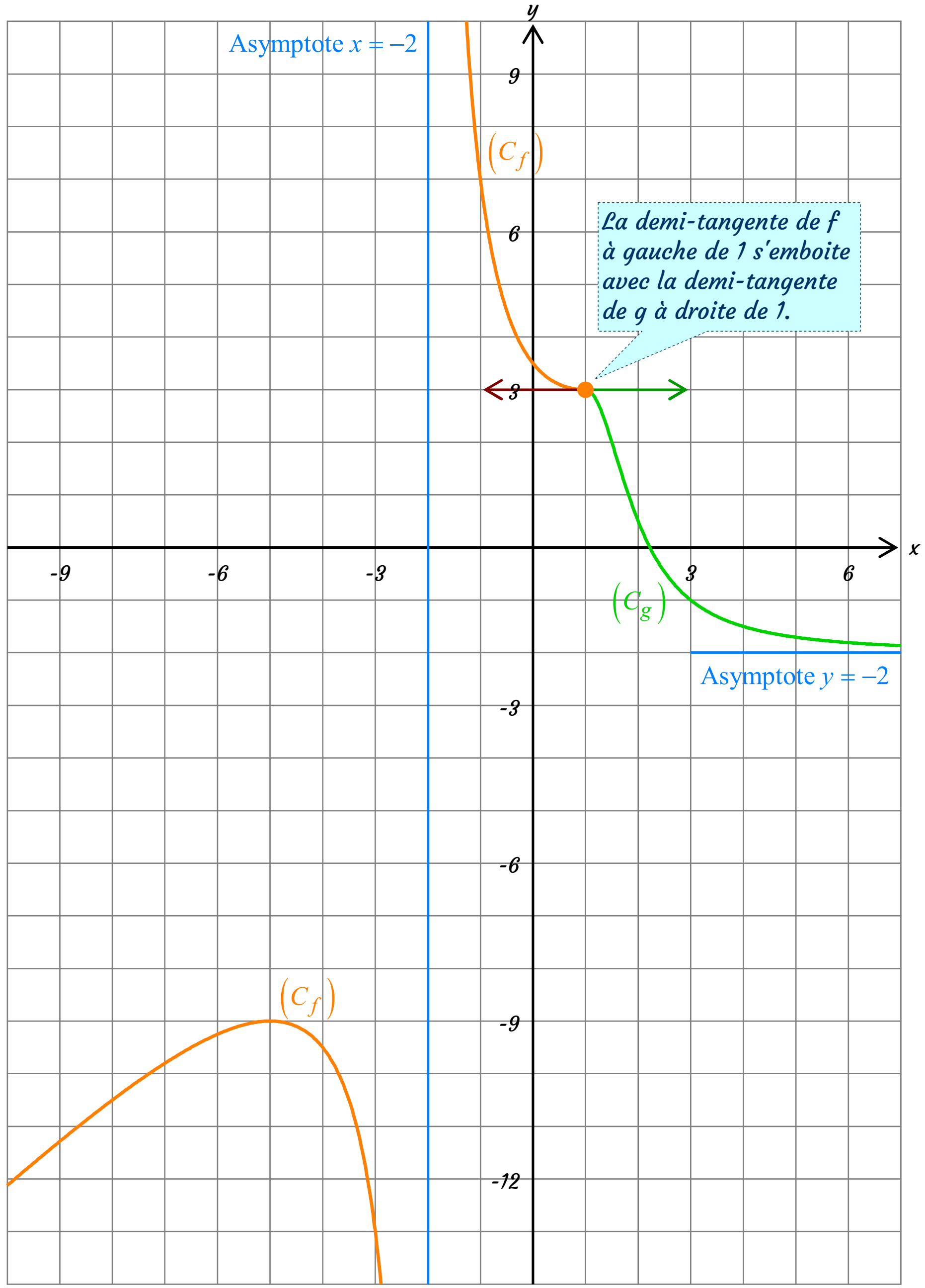
$$= \frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}\times(h+3)} = \frac{h}{h+3} \xrightarrow[h\to 0^-]{} \frac{0^-}{0^- + 3} = \frac{0^-}{3} = 0^+$$

Nombre dérivé à droite de 1 - h est un réel positif proche de 0 $\Leftrightarrow$ $1 + h > 0$

$$\frac{j(1+h) - j(1)}{h} = \frac{\frac{5}{(1+h)^2 - 2(1+h) + 2} - 2 - 3}{h} = \frac{\frac{5}{h^2+1} - 5}{h} = \frac{\frac{5 - 5\times\left(h^2+1\right)}{h^2+1}}{h}$$

$$= \frac{-5\times h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}\times\left(h^2+1\right)} = \frac{-5h}{h^2+1} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{-5\times 0^+}{0^+ + 1} = \frac{0^-}{1} = 0^-$$

Graphiquement, la situation de l'exercice est la suivante :



Méchantes questions en vrac !

L'énoncé

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

a. Dans cette question, il s'agit de déterminer deux primitives.

1. Déterminer <u>une</u> primitive F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction $f(x)=6x^2+5x-4+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$.
2. Déterminer <u>la</u> primitive G définie sur l'intervalle $\left]\sqrt{\frac{11}{3}};+\infty\right[$ de la fonction $g(x)=\frac{9x}{\sqrt{3x^2-11}}+\frac{x}{3x^2-11}$ telle que $G(2)=5$.

b. Exprimer les trois nombres suivants en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(7)$:

$$a=\ln(28) \qquad b=\ln\left(\frac{49}{8}\right) \qquad c=\ln\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

c. Déterminer les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln(x)+\frac{1}{\ln(x)+1} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)-x^3}{x^2+1}$$

Le corrigé

a.1. Toute primitive F de la fonction $f(x)=6\times x^2+5\times x-4+3\times\frac{1}{\sqrt{x}}-2\times\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ est de la forme $F(x)=6\times\frac{1}{3}x^3+5\times\frac{1}{2}x^2-4x+3\times 2\sqrt{x}-2\times\ln(x)-\frac{1}{x}+Cste$

$$=2x^3+2{,}5x^2-4x+6\sqrt{x}-2\ln(x)-\frac{1}{x}+Cste$$

Si l'on souhaite une primitive particulière, il suffit de fixer la constante $Cste$ à 0.

a.2. Examinons les deux termes constituant la différence $g(x)$:

- Le terme $\frac{9x}{\sqrt{3x^2-11}}$ est presque de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x)=3x^2-11$. $u'(x)=6x$

  Dérivable et positive sur l'intervalle de travail.

  Nous avons : $\frac{9x}{\sqrt{3x^2-11}}=9\times\frac{1}{6}\times\frac{6x}{\sqrt{3x^2-11}}=\frac{3}{2}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$

  Cette fonction a pour primitive $\frac{3}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\sqrt{u}=3\sqrt{3x^2-11}$

- Le terme $\frac{x}{3x^2-11}$ est presque de la forme $\frac{u'}{u}$ avec encore $u(x)=3x^2-11$. $u'(x)=6x$

  Nous avons : $\frac{x}{3x^2-11}=\frac{1}{6}\times\frac{6x}{3x^2-11}=\frac{1}{6}\times\frac{u'}{u}$

  Cette fonction a pour primitive $\frac{1}{6}\times\ln(u)=\frac{1}{6}\ln\left(3x^2-11\right)$

Donc une écriture de la primitive G est $G(x)=3\sqrt{3x^2-11}+\frac{1}{6}\ln\left(3x^2-11\right)+Cste$

On détermine la constante $Cste$ en sachant que :

$$G(2)=5 \Leftrightarrow 3\times\sqrt{3\times 2^2-11}+\frac{1}{6}\times\ln\left(3\times 2^2-11\right)+Cste=5$$
$$\Leftrightarrow 3\times\sqrt{1}+\frac{1}{6}\times\ln(1)+Cste=5$$
$$\Leftrightarrow 3+\frac{1}{6}\times 0+Cste=5 \Leftrightarrow Cste=2$$

<u>Conclusion :</u> une écriture de la primitive G est $G(x)=3\sqrt{3x^2-11}+\frac{1}{6}\ln\left(3x^2-11\right)+2$

b. Il s'agit d'écrire les trois nombres proposés sous la forme $\ldots\times\ln(2)+\ldots\times\ln(7)$ en utilisant les propriétés algébriques du logarithme népérien.

$$a=\ln(28)=\ln(4\times 7)=\ln(4)+\ln(7)=\ln\left(2^2\right)+\ln(7)=2\ln(2)+\ln(7)$$
$$b=\ln\left(\frac{49}{8}\right)=\ln(49)-\ln(8)=\ln\left(7^2\right)-\ln\left(2^3\right)=2\ln(7)-3\ln(2)$$
$$c=\ln\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\ln\left(\sqrt{7}\right)-\ln(2)=\frac{1}{2}\ln(7)-\ln(2)$$

c.1. Nous avons : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x)+\dfrac{2}{\ln(x)+1}=0^-+\dfrac{2}{(-\infty)+1}=0^-+\dfrac{2}{-\infty}=0^-+0^-=\boxed{0^-}$

c.2. De prime abord : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)-x^3}{x^2+1}=\dfrac{(+\infty)-(+\infty)}{(+\infty)+1}=\dfrac{\boxed{\text{Forme indéterminée}}}{(+\infty)}$

Nous allons lever cette indétermination en factorisant les numérateur et dénominateur du quotient par leurs termes nous paraissant les plus forts : x^3 pour le haut et x^2 pour le bas.

$$\frac{\ln(x)-x^3}{x^2+1}=\frac{x^3\times\left(\dfrac{\ln(x)}{x^3}-1\right)}{x^2\times\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{x^3}{x^2}\times\frac{\dfrac{\ln(x)}{x^3}-1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=x\times\frac{\dfrac{\ln(x)}{x^3}-1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$

Il vient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)-x^3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\times\dfrac{\dfrac{\ln(x)}{x^3}-1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=(+\infty)\times\dfrac{0^+-1}{1+0^+}=(+\infty)\times\dfrac{-1}{1}=\boxed{-\infty}$

Ln pose problème !

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x^2-4}\right)$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

a. Expliquer pourquoi la fonction f est bien définie sur l'intervalle $]2;+\infty[$.
Existe-t-il d'autres intervalles où cette fonction f pourrait être définie ? Si oui, les citer.

b. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2 par la droite.

Cette limite implique-t-elle une asymptote pour la courbe (C_f) ? Si oui, on précisera son équation réduite.

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Cette limite implique-t-elle une asymptote pour la courbe (C_f) ? Si oui, on précisera son équation réduite.

d. Justifier que la fonction f est dérivable sur son intervalle de définition, puis établir que pour tout réel $x\in\,]2;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x-4}{(x+1)(x^2-4)}$$

e. Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction f sur $]2;+\infty[$.

Le corrigé

a. Le logarithme d'une quantité ne peut exister que si et seulement si cette quantité est strictement positive. Dressons le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ de la quantité $q(x)$.

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$q(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Le quotient $q(x)$ étant strictement positif sur l'intervalle $]2;+\infty[$, son logarithme népérien $f(x)=\ln(q(x))$ est bien défini sur cet intervalle.

Cette fonction logarithmique *f* peut aussi être étendue à l'intervalle $]-2;-1[$ pour cette même raison.

b. Pour déterminer la limite de la fonction $f=\ln(q)$ à droite de 2, nous allons préalablement nous intéresser à celle de q au même endroit.

$$\lim_{x\to 2^+} q(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{3}{0^+}=\underline{+\infty}$$

D'après le tableau de signe de q(x)...

Nous en déduisons :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\ln(q(x))=\ln(+\infty)=\underline{+\infty}$$

La conséquence de cette limite infinie en un point est que la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

c. Comme toutes les fonctions rationnelles aux infinis, il y a de grandes chances que $q(x)$ nous amène à une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. C'est pour éviter cet écueil que nous allons factoriser d'emblée les numérateur et dénominateur de $q(x)$ par leurs termes nous paraissant les plus forts : x et x^2.

$$q(x)=\frac{x+1}{x^2-4}=\frac{x\times\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\times\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{1}{x}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}$$

Nous en concluons :

$$\lim_{x\to+\infty} q(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=0^+\times\frac{1+0^+}{1-0^+}=0^+\times\frac{1}{1}=\underline{0^+}$$

Il vient alors pour la fonction *f* :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(q(x))=\ln(0^+)=\underline{-\infty}$$

Cette limite n'a aucune conséquence asymptotique sur la courbe (C_f).

d. Comme la fonction $q(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$ est dérivable et surtout positive sur $]2;+\infty[$, alors son logarithme $f=\ln(q)$ est aussi dérivable sur cet intervalle.

Avant de dériver *f* et dans le souci de nous éviter des calculs trop compliqués, nous allons assouplir son écriture :

$$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x^2-4}\right)=\underbrace{\ln(x+1)-\ln(x^2-4)}_{\text{Ces deux logarithmes existent car } x+1 \text{ et } x^2-4 \text{ sont positifs sur }]2;+\infty[}$$

Voir le tableau de signe de q(x) de la question a.

Le premier terme $\ln(x+1)$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=x+1$, $u'(x)=1$

Le second terme $\ln(x^2-4)$ est aussi de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=x^2-4$, $u'(x)=2x$

Nous pouvons alors écrire que pour tout réel $x\in]2;+\infty[$, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'}{u}-\frac{u'}{u}=\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2-4}$$
$$=\frac{1\times(x^2-4)-2x\times(x+1)}{(x+1)(x^2-4)}=\frac{x^2-4-2x^2-2x}{(x+1)(x^2-4)}=\underline{\frac{-x^2-2x-4}{(x+1)(x^2-4)}}$$

e. Encore une fois, c'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *f*.

Les signes des facteurs du dénominateur nous sont connus. Reste à déterminer celui du numérateur $n(x)=-x^2-2x-4$ qui est une forme du second degré.

Calculons son discriminant !

$$\Delta_{n(x)}=(-2)^2-4\times(-1)\times(-4)=4-16=\underline{-12}$$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $n(x)$ est toujours du signe de son coefficient dominant. Il est toujours négatif comme -1.

Le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]2;+\infty[$ est celui ci-contre ⇨

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$n(x)$	$-$
$x+1$	$+$
x^2-4	$+$
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty$ ↘ $-\infty$

Re-méchantes questions en vrac !

L'énoncé

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

a. La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=e^{2-x^3}$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ et en déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

b. Déterminer une expression de la primitive F de la fonction $f(x)=10x+7+5e^{4x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ et est telle que $F(0)=3,25$.

c. Dans ces questions, il n'est question que de limites.

1. Compléter les limites suivantes où n est un entier strictement positif.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=\ldots\ldots \qquad \lim_{x\to0^+}x^n\ln(x)=\ldots\ldots \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=\ldots\ldots$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=\ldots\ldots \qquad \lim_{x\to-\infty}x^ne^x=\ldots\ldots \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=\ldots\ldots$$

2. Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction $f(x)=\dfrac{\ln(x)+x^7}{e^x-x}$

d. Simplifier l'écriture du nombre réel $A=\dfrac{\left(e^3\right)^4\times e^{-7}}{\sqrt{e^{12}}}$

Le corrigé

a.1. Quand x tend vers $-\infty$,

$$\left|\begin{array}{lcl} x^3 & \xrightarrow[x\to-\infty]{} & -\infty \\ 2-x^3 & \xrightarrow[x\to-\infty]{} & 2-(-\infty)=+\infty \\ e^{2-x^3} & \xrightarrow[x\to-\infty]{} & e^{+\infty}=\boxed{+\infty} \end{array}\right.$$

➲ De même, quand x s'envole vers $+\infty$,

$$\left|\begin{array}{lcl} x^3 & \xrightarrow[x\to+\infty]{} & +\infty \\ 2-x^3 & \xrightarrow[x\to+\infty]{} & 2-(+\infty)=-\infty \\ e^{2-x^3} & \xrightarrow[x\to+\infty]{} & e^{-\infty}=\boxed{0^+} \end{array}\right.$$

a.2. La fonction f est de la forme e^u

avec $\left|\begin{array}{l} u(x)=2-x^3 \\ u'(x)=0-3x^2=-3x^2 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$.

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)=u'\times e^u=\boxed{-3x^2e^{2-x^2}}$$

Comme toujours, c'est le signe de la dérivée qui va nous donner les variations de la fonction ⇨

x	$-\infty$		0		$+\infty$
-3		$-$	|	$-$	
x^2		$+$	0	$+$	
e^{2-x^3}		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$		↘		0^+

b. Examinons les deux principaux termes constituant la somme $f(x)$:

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $10x+7$ est $10\times\frac{1}{2}x^2+7x=\boxed{5x^2+7x}$.
- Le terme $3e^{4x}$ est presque de la forme $u'\times e^u$ avec $\left|\begin{array}{l} u(x)=4x \\ u'(x)=4 \end{array}\right.$.

  Nous avons : $5e^{4x}=5\times\frac{1}{4}\times4\times e^{4x}=\frac{5}{4}\times u'\times e^u$

  Cette fonction a pour primitive $\frac{5}{4}\times e^u=\boxed{\frac{5}{4}\times e^{4x}}$

Donc une écriture générique de la primitive F est $F(x)=\boxed{5x^2+7x+\frac{5}{4}e^{4x}+Cste}$

On détermine la constante $Cste$ en sachant que :

$$F(0)=3,25 \iff 5\times0^2+7\times0+1,25\times e^0+Cste=3,25$$
$$\iff 0+0+1,25\times1+Cste=3,25 \iff Cste=3,25-1,25=\boxed{2}$$

<u>Conclusion :</u> une écriture de la primitive F est $F(x)=\boxed{5x^2+7x+\frac{5}{4}e^{4x}+2}$

c.1. Petites questions de connaissance en introduction !

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

c.2. De prime abord : $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)+x^7}{e^x - x} = \frac{(+\infty)+(+\infty)}{(+\infty)-(+\infty)} = \frac{+\infty}{\text{Forme indéterminée}}$

Nous allons lever cette indétermination en factorisant les numérateur et dénominateur du quotient par leurs termes nous paraissant les plus forts : x^7 pour le haut et e^x pour le bas.

$$f(x) = \frac{\ln(x)+x^7}{e^x - x} = \frac{x^7 \times \left(\frac{\ln(x)}{x^7}+1\right)}{e^x \times \left(1-\frac{x}{e^x}\right)} = \frac{x^7}{e^x} \times \frac{\frac{\ln(x)}{x^7}+1}{1-\frac{x}{e^x}}$$

Que n valle 1 ou 7 !

Comme $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, alors, pour son inverse, nous avons : $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^7}{e^x} \times \frac{\frac{\ln(x)}{x^7}+1}{1-\frac{x}{e^x}} = 0^+ \times \frac{0^+ + 1}{1-0^+} = 0^+ \times \frac{1}{1} = 0^+$$

d. Simplifions l'écriture du nombre A avec les propriétés algébriques de l'exponentielle.

$$A = \frac{\left(e^3\right)^4 \times e^{-7}}{\sqrt{e^{12}}} = \frac{e^{4\times3} \times e^{-7}}{e^{\frac{1}{2}\times 12}} = \frac{e^{12} \times e^{-7}}{e^6} = \frac{e^{12+(-7)}}{e^6} = \frac{e^5}{e^6} = e^{5-6} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Exponentielle pose problème !

L'énoncé

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2+2x-2\right) \times e^x$$

On appelle $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative.

a. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Cette limite implique-t-elle une asymptote pour la courbe $\left(C_f\right)$? Si oui, on précisera son équation réduite.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Cette limite implique-t-elle une asymptote pour la courbe $\left(C_f\right)$? Si oui, on précisera son équation réduite.

c. Calculer l'image de 0 par la fonction f, puis déterminer les antécédents de 0 par cette même fonction f.

d. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis établir que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(x^2+4x\right) \times e^x$$

e. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

Le corrigé

a. Sous la forme qui nous est proposée, $f(x)$ est une forme indéterminée en $-\infty$. En effet :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2+2x-2\right) \times e^x = \underbrace{\left((+\infty)+(-\infty)-2\right)}_{\text{Forme indéterminée}} \times 0^+ = \text{Forme très indéterminée}$$

Dans les faits, il s'agit d'une «petite forme indéterminée» car il suffit juste de développer :

$$f(x) = x^2e^x + 2\times xe^x - 2\times e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^+ + 2\times 0^+ - 2\times 0^+ = 0^+$$

Nous en concluons que l'axe des abscisses, droite dont l'équation réduite est $y=0$, est une asymptote horizontale à la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$.

b. La limite de *f* en $+\infty$ ne pose guère de problèmes ! En effet :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2+2x-2\right)\times e^x$$
$$= \left((+\infty)+(+\infty)-2\right)\times(+\infty) = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$$

Cette limite infinie à l'infini n'a aucune conséquence asymptotique.

c. L'image de 0 par la fonction *f* nous est donnée par :

$$f(0) = \left(0^2+2\times 0-2\right)\times e^0 = -2\times 1 = -2$$

➲ Pour connaître les antécédents de 0 par la fonction *f*, nous résolvons dans ℝ l'équation :

$$f(x)=0 \iff \overbrace{\left(x^2+2x-2\right)\times e^x = 0}^{\text{Un produit est nul...}} \iff \overbrace{x^2+2x-2=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad \underbrace{e^x=0}_{\text{Niet !}}}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

Une exponentielle étant toujours strictement positive, la seconde sous-équation $e^x=0$ n'a aucune solution.

Pour résoudre la première sous-équation $x^2+2x-2=0$ qui est du second degré, nous allons calculer son discriminant :

$$\Delta = 2^2-4\times1\times(-2) = 4+8 = 12 = \left(\sqrt{12}\right)^2 = \left(\sqrt{4}\times\sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2$$

Son discriminant étant positif, cette première sous-équation admet deux solutions :

$$x = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2\times1} = \frac{\cancel{2}\times\left(-1-\sqrt{3}\right)}{\cancel{2}} = -1-\sqrt{3} \quad \underline{\text{ou}} \quad x = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2\times1} = -1+\sqrt{3}$$

<u>Conclusion :</u> 0 a deux antécédents par la fonction *f* qui sont $-1-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}-1$.

d. La fonction *f* est le produit des fonctions

$u(x)=x^2+2x-2$	<u>et</u>	$v(x)=e^x$
$u'(x)=2x+2$		$v'(x)=e^x$
Dérivable sur ℝ		Dérivable sur ℝ

Donc la fonction $f=u\times v$ est dérivable sur ℝ et pour tout réel *x*, nous avons :

$$f'(x) = u'\times v+v'\times u$$
$$= (2x+2)\times \boxed{e^x} + \boxed{e^x}\times\left(x^2+2x-2\right)$$
$$= \boxed{e^x}\times\left[(2x+2)+\left(x^2+2x-2\right)\right]$$
$$= e^x\times\left(x^2+4x\right) = e^x\times x\times(x+4)$$

e. Le signe de la dérivée $f'(x)$ nous donne les variations de *f*.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
e^x		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0^+	↗	$6e^{-4}$	↘	-2	↗	$+\infty$

Calculons l'image de -4 par la fonction *f* :

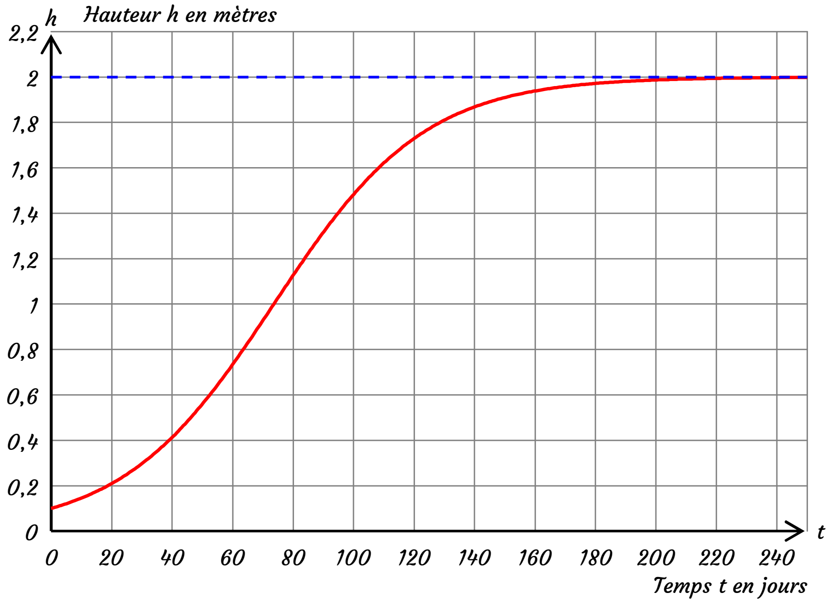
$$f(x) = \left((-4)^2+2\times(-4)-2\right)\times e^{-4} = (16-8-2)\times e^{-4} = 6e^{-4}$$

Un plant façon indienne

L'énoncé

Cet exercice est une adaptation d'un autre donné au bac S à Pondichéry, avril 2013.

a. On s'intéresse à l'évolution de la hauteur h d'un plant de maïs en fonction du temps t.
Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur h est exprimée en mètres et le temps t en jours.



On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t)=\frac{a}{1+be^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure 0,1 mètres et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 mètres.

1. Exprimer l'image $h(0)$ et la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$ en fonction de a et b.
2. En déduire les valeurs des coefficients a et b. Une réponse directe et non justifiée sera considérée comme fausse.

b. On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;250]$ par :

$$f(t)=\frac{2}{1+19e^{-0,04t}}$$

où t est une grandeur temporelle exprimée en jours et $f(t)$ est exprimée en mètres.

1. Calculer la dérivée $f'(t)$ en fonction de t, puis en déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;250]$.
2. Calculer le temps nécessaire pour que la hauteur du plant de maïs dépasse les 1,5 mètres.
3. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f. La vitesse de croissance est maximale pour une certaine valeur de t.
   En utilisant le graphique ci-contre qui est reproduit sur la feuille annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.
   Les constructions à faire le seront sur le graphique de la feuille annexe. On laissera apparents les traits de construction.

Le corrigé

a.1. Exprimons en fonction de a et b l'image et la limite demandées.

L'image : $h(0)=\dfrac{a}{1+be^{-0,04\times0}}=\dfrac{a}{1+be^{0}}=\dfrac{a}{1+b\times1}=\dfrac{a}{1+b}$

La limite : $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)==\dfrac{a}{1+be^{-0,04\times(+\infty)}}=\dfrac{a}{1+be^{-\infty}}=\dfrac{a}{1+b\times0^{+}}=\dfrac{a}{1+0^{+}}=a$

a.2. Exploitons les renseignements apportés par l'énoncé :

- «sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 mètres»
  $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=2 \quad\Leftrightarrow\quad a=2$
- «initialement, pour $t=0$, le plan mesure 0,1 mètres»
  $h(0)=0,1 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{a}{1+b}=0,1 \quad\Leftrightarrow\quad 2=0,1\times(1+b)$
  $\Leftrightarrow\quad 2=0,1+0,1\times b \quad\Leftrightarrow\quad b=\dfrac{2-0,1}{0,1}=\dfrac{1,9}{0,1}=19$

b.1. f est de la forme $f=\frac{1}{u}$ avec
$u(x)=1+19\times e^{-0,04t}=1+19\times e^{u}$
$u'(x)=0+19\times u'\times e^{u}=19\times(-0,04)\times e^{-0,04t}$
Dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0;250]$ et pour tout réel t de cet intervalle, nous avons :

$$f'(t)=2\times\left(-\frac{u'}{u^2}\right)=-\frac{2\times(-0,76)\times e^{-0,04t}}{\left(1+19e^{-0,04t}\right)^2}=\frac{1,52\times e^{-0,04t}}{\left(1+19e^{-0,04t}\right)^2}=\frac{\oplus\times\oplus}{\oplus}$$

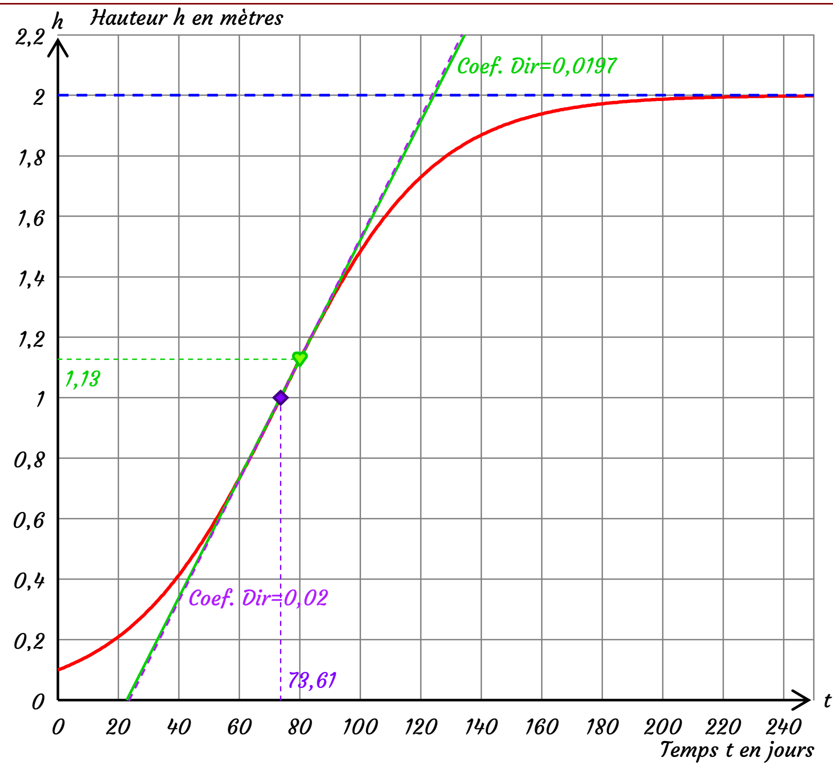
Tous les facteurs apparaissant de ce quotient étant positifs, nous en déduisons que la dérivée $f'(t)$ est aussi strictement positive sur l'intervalle $[0;250]$.
Donc la fonction f est strictement croissante sur ce dernier ensemble.

b.2. Dans cette question, on cherche l'antécédent de 1,5 par la fonction f. Il s'agit de résoudre l'équation :

$$f(t)=1,5 \Leftrightarrow \frac{2}{1+19\times e^{-0,04t}}=1,5 \xrightarrow{\text{Inverse}} \frac{1+19\times e^{-0,04t}}{2}=\frac{1}{1,5}$$
$$\Leftrightarrow 1+19\times e^{-0,04t}=\frac{2}{1,5} \Leftrightarrow 19\times e^{-0,04t}=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow e^{-0,04t}=\frac{1}{57} \xrightarrow{\text{Ln}} -0,04t=-\ln(57) \Rightarrow t=\frac{\ln(57)}{0,04}\approx 101,08$$

Conclusion : le plant de maïs dépasse les 1,5 mètres à l'issue du 101ième jour.

b.3. La vitesse de croissance du plant est maximale lorsque le nombre dérivé de f est maximal, c'est-à-dire lorsque le coefficient de la tangente à la courbe (C_f) est maximal, autrement dit lorsque cette tangente est la «plus pentue» possible.
Vu le graphique, la tangente semble la «plus pentue» au voisinage de $t=80$ jours.
Le plant mesure alors près de 1,13 mètres.



La vérité par les nombres

Pour savoir quand la croissance est maximale, nous pourrions dériver la dérivée $f'(t)$ qui est un quotient et nous aboutirions à la dérivée seconde de f :

$$f''(t)=\frac{0,0608\times e^{-0,04t}\times\boxed{\left(19\times e^{-0,04t}-1\right)}}{\left(19e^{-0,04t}+1\right)^3}$$

Dans ce quotient, seul le facteur $19\times e^{-0,04t}-1$ change de signe, les autres étant positifs.
La dérivée $f'(t)$ est maximale lorsque la dérivée seconde $f''(t)$ change de signe, c'est-à-dire est nulle, c'est-à-dire lorsque :

$$19\times e^{-0,04t}-1=0 \Leftrightarrow e^{-0,04t}=\frac{1}{19} \xrightarrow{\text{Ln}} -0,04t=-\ln(19) \Rightarrow t=\frac{\ln(19)}{0,04}\approx 73,6$$

La croissance est donc maximale pour $t\approx 73,61$ jours.

Exponentielle des Caraïbes

L'énoncé

Cet exercice est une adaptation d'un autre donné au bac S Antilles-Guyane, juin 2014.

On considère la fonction *f* définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. On appelle *g* la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - x + e^x$$

1. Calculer l'image $g(0)$.
2. Déterminer les limites de la fonction *g* en $-\infty$, puis en $+\infty$.
3. Calculer la dérivée $g'(x)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - 1 > 0$.
5. Dresser le tableau donnant les variations de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$.
6. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer les limites de *f* en $-\infty$, puis en $+\infty$.

c. On appelle f' la dérivée de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

1. En calculant la dérivée de la fonction *f*, établir que pour tout réel *x*, on a :
$$f'(x) = e^{-x} \times g(x)$$
2. En déduire le tableau de variation de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
Donner une valeur approchée au dixième près de cette unique solution α.

d. On appelle $\mathcal{T}$ la droite d'équation $y = 2x + 1$.

1. Démontrer que cette droite $\mathcal{T}$ est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
2. En étudiant le signe de la différence d'ordonnées $y_{(C)} - y_{\mathcal{T}} = f(x) - (2x+1)$,
déterminer la position relative de la courbe (C) et de la droite $\mathcal{T}$.

Le corrigé

a.1. Calculons l'image demandée : $g(0) = 1 - 0 + e^0 = 1 + 1 = 2$

a.2. La limite de *g* en $-\infty$ ne pose guère de difficultés :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - x + e^x = 1 - (-\infty) + 0^+ = +\infty$$

Pour la limite de *g* en $+\infty$, ce sera une autre affaire !

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - x + e^x = 1 - (+\infty) + (+\infty) = \boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

L'indétermination se lève en factorisant la somme $g(x)$ par son terme le plus fort : e^x.

$$g(x) = 1 - x + e^x = e^x \times \left[\frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1\right]$$

D'après le cours, le quotient $\frac{e^x}{x}$ tendant vers $+\infty$, son inverse $\frac{x}{e^x}$ tend vers $\frac{1}{+\infty} = 0^+$.

Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x \times \left[\frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1\right] = (+\infty) \times \left[\frac{1}{+\infty} - 0^+ + 1\right] = (+\infty) \times \left[0^+ + 1\right] = +\infty$$

a.3. La fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est une somme de telles fonctions.
Pour tout réel *x*, nous pouvons écrire :

$$g'(x) = 0 - 1 + e^x = e^x - 1$$

a.4. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation demandée :

$$\overbrace{e^x - 1}^{g'(x)} > 0 \iff e^x > 1 \xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Ln}} x > \ln(1) = 0$$

a.5. La question précédente nous indique le signe de la dérivée $g'(x)$. Elle est négative avant 0, nulle en 0 et positive après.
Par conséquent, le tableau de variation de *g* sur $\mathbb{R}$ est celui ci-contre ⇨

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x) = e^x - 1$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a.6. Le minimum de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$ étant 2, $g(x)$ est toujours strictement positif.

b. Déterminons les deux limites demandées :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+1+\frac{x}{e^x} = (-\infty)+1+\frac{-\infty}{0^+}$$

$$= (-\infty)+(-\infty)\times\frac{1}{0^+} = (-\infty)+(-\infty)\times(+\infty) = (-\infty)+(-\infty) = \underline{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+1+\frac{x}{e^x} = (+\infty)+1+0^+ = \underline{+\infty}$$

c.1. Calculons la dérivée de la fonction *f*.

$$f'(x) = \left(x+1+\frac{x}{e^x}\right)' = 1+0+\left(\frac{u}{v}\right)' = 1+\frac{u'\times v - v'\times u}{v^2} = 1+\frac{1\times e^x - e^x\times x}{\left(e^x\right)^2}$$

$$= 1+\frac{\cancel{e^x}(1-x)}{e^{\cancel{2}x}} = \frac{1\times e^x+1-x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x} = \frac{1}{e^x}\times g(x) = \underline{e^{-x}g(x)}$$

c.2. L'exponentielle e^{-x} est toujours strictement positive comme $g(x)$.

Par conséquent, la dérivée $f'(x) = \oplus\times\oplus$ est strictement positive et la fonction *f* est strictement croissante sur ℝ.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)=e^{-x}\times g(x)$		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

c.3. Comme
- la fonction *f* est continue car dérivable sur ℝ
- la fonction *f* est strictement croissante sur ℝ
- 0 appartient à l'intervalle image $f(\mathbb{R}) =]-\infty;+\infty[$

alors, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans ℝ.

D'après la calculatrice, une valeur approchée au dixième près de cette solution α est :

$$\alpha \approx \underline{-0,4}$$

d.1. L'équation réduite de la tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse 0 est de la forme :

$$y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$$

avec $f'(0) = e^{-0}\times g(0) = 1\times 2 = 2$ <u>et</u> $f(0) = 0+1+\frac{0}{e^0} = \underline{1}$

Nous en déduisons que l'équation réduite de la tangente est :

$$y = 2x+1.$$

Soit l'équation de la droite $\mathcal{T}$.

d.2. Explicitons la différence d'ordonnées proposée :

$$y_{(C)} - y_{\mathcal{T}} = f(x)-(2x+1)$$

$$= x+1+\frac{x}{e^x}-2x-1 = \frac{x}{e^x}-x = \frac{x-xe^x}{e^x} = \underline{\frac{x\left(1-e^x\right)}{e^x}}$$

Le signe de $1-e^x = -\left(e^x-1\right)$ est le signe contraire de $g'(x)$.

Le signe de la différence d'ordonnées $y_{(C)}-y_{\mathcal{T}}$ est celui ci-contre ⇨

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1-e^x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$	|	$+$	
$y_{(C)}-y_{\mathcal{T}}$		$-$	0	$-$	

<u>Conclusion :</u> Sauf en $x=0$ où elles se touchent, la courbe (C) est toujours au-dessous de la droite $\mathcal{T}$. Graphiquement, la situation est la suivante :

Exponentielle vs. alien carré

L'énoncé

La fonction *f* est définie par :

$$f(x)=\frac{3x^2-2e^x}{e^x+x^2}$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

a. Justifier que la fonction *f* est parfaitement définie sur ℝ.

b. Déterminer les limites de la fonction *f* en $-\infty$, puis en $+\infty$.
Quelles sont les conséquences asymptotiques de ces deux limites ?

c. Démontrer que la dérivée $f'(x)$ est donnée, pour tout réel *x*, par :

$$f'(x)=\frac{5x\times(2-x)\times e^x}{\left(e^x+x^2\right)^2}$$

En déduire les variations de la fonction *f* sur ℝ.

d. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans ℝ une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au centième près.
En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur ℝ.

Le corrigé

a. *f* est le quotient du numérateur $u(x)=3x^2-2e^x$ et du dénominateur $v(x)=e^x+x^2$ qui sont deux fonctions définies sur ℝ.
De plus, le dénominateur $v(x)$ est toujours strictement positif car il est la somme des deux quantités positives e^x et x^2 dont la première l'est strictement.
Le dénominateur $v(x)$ ne s'annulant jamais, la fonction quotient *f* est bien définie sur ℝ.

b. Commençons par déterminer la limite de la fonction *f* en $-\infty$.
De prime abord :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2e^x}{e^x+x^2}=\frac{3\times(+\infty)-2\times0^+}{0^++(+\infty)}=\frac{+\infty}{+\infty}=\boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

Pour lever cette dernière, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur par leurs termes nous paraissant les plus forts : x^2 dans les deux cas.

Pour tout réel $x\in\left]-\infty;0\right[$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{3x^2-2e^x}{e^x+x^2}=\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}\times\frac{3-\frac{e^x}{x^2}}{\frac{e^x}{x^2}+1}\xrightarrow[x\to-\infty]{}\frac{3-\frac{0^+}{+\infty}}{\frac{0^+}{+\infty}+1}=\frac{3-0^+}{0^++1}=\frac{3}{1}=\underline{3}$$

La conséquence asymptotique de cette limite est que la droite d'équation $y=3$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

➲ A présent, déterminons la limite de la fonction *f* au voisinage de $+\infty$.
De prime abord :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2e^x}{e^x+x^2}=\frac{3\times(+\infty)-2\times(+\infty)}{(+\infty)+(+\infty)}=\frac{\boxed{\text{Forme indéterminée}}}{+\infty}$$

Nous allons lever l'indétermination en factorisant les numérateur et dénominateur par leurs termes nous paraissant les plus forts : e^x dans les deux cas.
Pour tout réel $x\in\left]0;+\infty\right[$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{3x^2-2e^x}{e^x+x^2}=\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}\times\frac{3\times\frac{x^2}{e^x}-2}{1+\frac{x^2}{e^x}}=\underline{\frac{3\times\frac{x^2}{e^x}-2}{1+\frac{x^2}{e^x}}}$$

D'après le cours, lorsque *x* tend vers $+\infty$, le quotient $\frac{e^x}{x^2}$ s'envole vers $+\infty$.

Donc son inverse $\frac{x^2}{e^x}$ s'en va vers $\frac{1}{+\infty}=\underline{0^+}$

Nous en concluons :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\times\frac{x^2}{e^x}-2}{1+\frac{x^2}{e^x}}=\frac{3\times0^+-2}{1+0^+}=\frac{0^+-2}{1}=\underline{-2}$$

La conséquence graphique de cette limite est que la droite d'équation $y=-2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c. *f* est le quotient des fonctions

$u(x)=3x^2-2e^x$ et $v(x)=e^x+x^2$.

$u'(x)=3\times 2x-2e^x=6x-2e^x$ — Dérivable sur ℝ

$v'(x)=e^x+2x$ — Dérivable et non nulle sur ℝ

Par conséquent, la fonction *f* est dérivable sur ℝ et pour tout réel *x*, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{(6x-2e^x)\times(e^x+x^2)-(e^x+2x)\times(3x^2-2e^x)}{(e^x+x^2)^2}$$

$$=\frac{6xe^x+\cancel{6x^3}-\cancel{2e^{2x}}-2x^2e^x-3x^2e^x+\cancel{2e^{2x}}-\cancel{6x^3}+4xe^x}{(e^x+x^2)^2}$$

$$=\frac{10xe^x-5x^2e^x}{(e^x+x^2)^2}=\frac{\boxed{5xe^x}\times 2-\boxed{5xe^x}\times x}{(e^x+x^2)^2}=\frac{\boxed{5xe^x}\times(2-x)}{(e^x+x^2)^2}=\frac{5x(2-x)e^x}{(e^x+x^2)^2}$$

Les signes de tous les facteurs apparaissant dans le quotient précédent nous sont connus.
Calculons les valeurs des deux extrema qui vont apparaitre dans le tableau :

$$f(0)=\frac{3\times 0^2-2\times e^0}{e^0+0^2}=\frac{0-2\times 1}{1+0}=\frac{-2}{1}=-2 \qquad f(2)=\frac{3\times 2^2-2\times e^2}{e^2+2^2}=\frac{12-2e^2}{e^2+4}\approx -0,24$$

Le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et celui de variation de *f* sont les suivants :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$5x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
e^x		$+$	|	$+$	|	$+$	
$(e^x+x^2)^2$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	3	↘	-2	↗	$f(2)$ ⊖	↘	-2

d. Comme
- la fonction *f* est continue car dérivable sur $]-\infty;0[$
- la fonction *f* est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$
- 0 appartient à l'intervalle image $f(]-\infty;0[)=]-3;-2[$

alors, en application du théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-\infty;0[$.

Le maximum de la fonction *f* sur l'intervalle $[0;+\infty[$ qui est égal à $f(2)$ étant négatif, l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution dans cet intervalle.

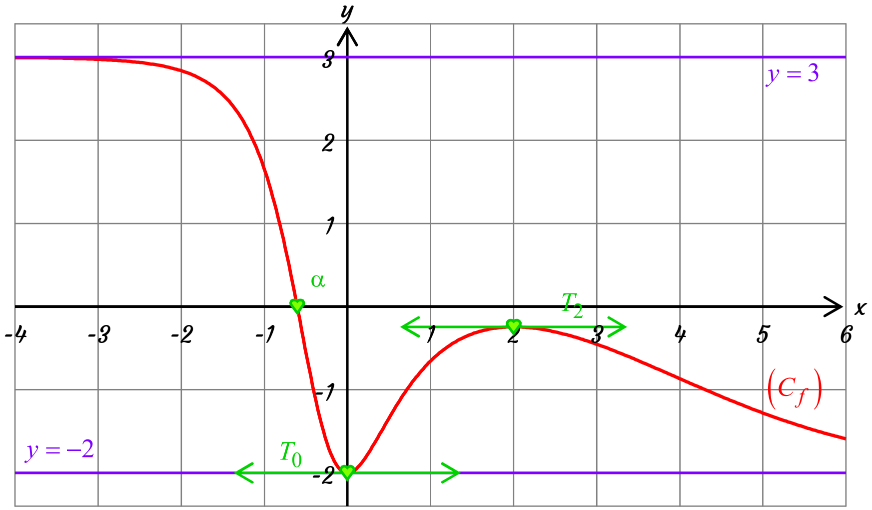
D'après la calculatrice, une valeur approchée au centième près de cette unique solution α est :

$$\alpha\approx -0,60$$

➲ Compte tenu des variations de *f* et de ce qui précède, le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

A l'issue de l'exercice, la situation graphique de la courbe (C_f) accompagnée de ses deux asymptotes et de ses deux tangentes horizontales est la suivante :



Intégrales Lepter

L'énoncé

Cet exercice est constitué de trois sous-parties indépendantes. Un résultat fourni seul, sans justifications, ne sera pas pris en compte.

a. Calculer les intégrales suivantes. On donnera leurs valeurs exactes.

$$I=\int_1^2\left(9x^2-x+\frac{2}{x}\right)dx \qquad J=\int_0^4\frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}dx \qquad K=\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)dx$$

b. La fonction f est définie sur ℝ par :

$$f(x)=\left(6x-2x^2\right)e^{-x}$$

1. Démontrer que la fonction $F(x)=\left(2x^2-2x-2\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur ℝ.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$.

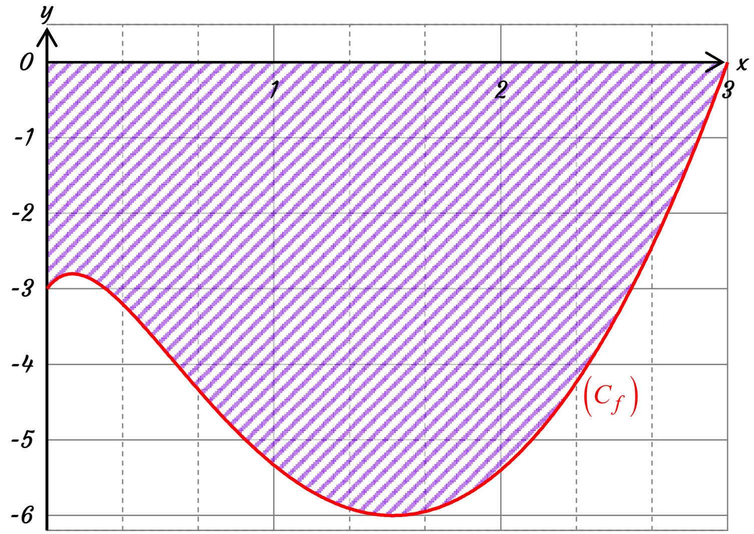
c. La fonction f est définie sur l'intervalle $]-0,5;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{6x^3-17x^2-2x-3}{2x+1}$$

1. Par la méthode de votre choix, déterminer quatre coefficients entiers a,b, c et d tels que pour tout réel $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, on ait : $f(x)=ax^2+bx+c+\dfrac{d}{2x+1}$
2. Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe (C_f) représentant la fonction f dans un repère orthogonal où une unité de longueur en abscisse vaut 3 centimètres et une unité de longueur en ordonnée vaut 1 centimètre.

   La courbe (C_f) franchit l'axe des abscisses (Ox) au point d'abscisse $x=3$.

   Calculer la valeur exacte exprimée en centimètres carrés de l'aire géométrique du domaine hachuré sur la figure ci-contre qui est compris entre l'axe des abscisses (Ox), l'axe des ordonnées (Oy), la droite d'équation $x=3$ et la courbe (C_f).



Le corrigé

a.1. Commençons par calculer l'intégrale I.

Une primitive sur ℝ de $9x^2-x+2\times\frac{1}{x}$ est $9\times\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2\times\ln(x)=\underline{3x^3-\frac{1}{2}x^2+2\ln(x)}$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}I&=\int_1^2\left(9x^2-x+\frac{2}{x}\right)dx\\&=\left[3x^3-\frac{1}{2}x^2+2\times\ln(x)\right]_1^2\\&=\left(3\times2^3-\frac{1}{2}\times2^2+2\times\ln(2)\right)-\left(3\times1^3-\frac{1}{2}\times1^2+2\times\ln(1)\right)\\&=24-2+2\ln(2)-3+0,5-2\times0=\underline{19,5+2\times\ln(2)}\end{aligned}$$

a.2. Calculons la valeur de l'intégrale J.

La fonction $\dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$ est presque de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x)=3x^2+1$

$u'(x)=3\times2x=6x$

Dérivable et positive sur ℝ

Plus particulièrement : $\dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{6\times x}{\sqrt{3x^2+1}}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Donc une primitive sur ℝ de la fonction $\dfrac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$ est $\dfrac{1}{6}\times 2\sqrt{u}=\boxed{\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3x^2+1}}$

Il vient alors :

$$J=\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1}\right]_0^4=\frac{1}{3}\sqrt{3\times 4^2+1}-\frac{1}{3}\sqrt{3\times 0^2+1}=\frac{1}{3}\sqrt{49}-\frac{1}{3}\times\sqrt{1}=\frac{7}{3}-\frac{1}{3}=\boxed{2}$$

a.3. Calculons la valeur exacte de l'intégrale *K*.

Une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-2\times\dfrac{1}{x^2}+4\times\dfrac{1}{x^3}$ est la fonction :

$$2\sqrt{x}-2\times\frac{-1}{x}+4\times\frac{-1}{2x^2}=\boxed{2\sqrt{x}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

Il vient alors :

$$K=\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)dx$$
$$=\left[2\sqrt{x}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right]_1^4=\left(2\sqrt{4}+\frac{2}{4}-\frac{2}{4^2}\right)-\left(2\sqrt{1}+\frac{2}{1}-\frac{2}{1^2}\right)$$
$$=4+0{,}5-0{,}125-2-2+2=2{,}375=\boxed{\frac{19}{8}}$$

b.1. Calculons la dérivée de la fonction $F(x)=\left(2x^2-2x-2\right)e^{-x}$ qui est le produit $u\times v$

des fonctions $u(x)=2x^2-2x-2$, $u'(x)=2\times 2x-2=4x-2$, Dérivable sur ℝ et $v(x)=e^{-x}=e^{u}$, $v'(x)=u'\times e^{u}=-1\times e^{-x}=e^{-x}$, Dérivable sur ℝ

Donc la fonction *F* est dérivable sur ℝ et pour tout réel *x*, on a :

$$F'(x)=u'\times v+v'\times u=(4x-2)\times\boxed{e^{-x}}+\left(-\boxed{e^{-x}}\right)\times\left(2x^2-2x-2\right)$$
$$=\boxed{e^{-x}}\times\left[(4x-2)-\left(2x^2-2x-2\right)\right]$$
$$=e^{-x}\times\left[4x-\cancel{2}-2x^2+2x+\cancel{2}\right]=e^{-x}\times\left(6x-2x^2\right)=\boxed{f(x)}$$

Conclusion : comme la fonction *f* est la dérivée de la fonction *F* sur ℝ, alors *F* est une primitive de *f* sur ce même ensemble.

b.2. La valeur moyenne de la fonction *f* sur l'intervalle $[0;3]$ est donnée par la formule :

$$\text{Valeur moyenne de } f \text{ sur } [0;3]=\frac{1}{3-0}\times\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\times\left[F(x)\right]_0^3=\frac{1}{3}\times\left(F(3)-F(0)\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(\left(2\times 3^2-2\times 3-2\right)\times e^{-3}-\left(2\times 0^2-2\times 0-2\right)\times e^{0}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\left(10e^{-3}+2\times 1\right)=\boxed{\frac{2+10e^{-3}}{3}}$$

c.1. Décomposons la fonction rationnelle $f(x)$ en utilisant la «méthode par identification des coefficients de même degré».

On veut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{2x+1}$$
$$=\frac{\left(ax^2+bx+c\right)\times(2x+1)+d}{2x+1}$$
$$=\frac{2ax^3+ax^2+2bx^2+bx+2cx+c+d}{2x+1}$$
$$\frac{\boxed{6}x^3+\boxed{(-17)}x^2+\boxed{(-2)}x+\boxed{(-3)}}{2x+1}=\frac{\boxed{2a}x^3+\boxed{(a+2b)}x^2+\boxed{(b+2c)}x+\boxed{c+d}}{2x+1}$$

Les deux numérateurs polynomiaux étant égaux, leurs coefficients de même degré sont aussi égaux. Il vient :

En x^3	$6=2a \Leftrightarrow a=\boxed{3}$
En x^2	$-17=a+2b \Leftrightarrow -17=3+2b \Leftrightarrow 2b=-20 \Leftrightarrow b=\boxed{-10}$
En x	$-2=b+2c \Leftrightarrow -2=-10+2c \Leftrightarrow 2c=8 \Leftrightarrow c=\boxed{4}$
Constant	$-3=c+d \Leftrightarrow -3=4+d \Leftrightarrow d=\boxed{-7}$

Conclusion : la forme décomposée de la fonction rationnelle *f* est :

$$\boxed{f(x)=3x^2-10x+4-\frac{7}{2x+1}}$$

Une autre méthode : par extraction du dénominateur de chacun des termes du numérateur

$$f(x)=\frac{\boxed{6x^3}-17x^2-2x-3}{2x+1}=\frac{\boxed{3x^2(2x+1)-3x^2}-17x^2-2x-3}{2x+1}$$

$$=\frac{3x^2\cancel{(2x+1)}}{\cancel{2x+1}}+\frac{\boxed{-20x^2}-2x-3}{2x+1}=3x^2+\frac{\boxed{-10x(2x+1)+10x}-2x-3}{2x+1}$$

$$=3x^2-\frac{10x\cancel{(2x+1)}}{\cancel{2x+1}}+\frac{\boxed{8x}-3}{2x+1}=3x^2-10x+\frac{\boxed{4(2x+1)-4}-3}{2x+1}$$

$$=3x^2-10x+\frac{4\cancel{(2x+1)}}{\cancel{2x+1}}-\frac{7}{2x+1}=3x^2-10x+4-\frac{7}{2x+1}$$

c.2. Le calcul de l'intégrale $\int_0^3 f(x)\,dx$ dépend de la connaissance d'une primitive F de f.

D'abord, une primitive sur IR de $3x^2-10\times x+4$ est $x^3-10\times\frac{x^2}{2}+4x=x^3-5x^2+4x$ Puis,

la fonction $\frac{-7}{2x+1}$ est presque de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $\begin{cases} u(x)=2x+1 \\ u'(x)=2 \\ \text{Dérivable et positive sur } [0;3] \end{cases}$.

Une primitive de $\frac{-7}{2x+1}=-7\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{2x+1}=-3,5\times\frac{u'}{u}$ est $-3,5\times\ln(u)=-3,5\times\ln(2x+1)$

Par conséquent, une primitive de f sur $[0;3]$ est $F(x)=x^3-5x^2+4x-3,5\times\ln(2x+1)$

Il vient alors :

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_0^3=F(3)-F(0)$$

$$=\left(3^3-5\times3^2+4\times3-3,5\times\ln(2\times3+1)\right)-\left(0^3-5\times0^2+4\times0-3,5\times\ln(0+1)\right)$$

$$=\left(27-45+12-3,5\times\ln(7)\right)-\left(0-3,5\times\ln(1)\right)$$

$$=-6-3,5\times\ln(7)\ \text{unités d'aire}$$

Une unité d'aire est l'aire d'un rectangle de 3 centimètres en abscisse sur 1 centimètre en ordonnée. Une unité d'aire vaut donc $3\ \text{cm}^2$.
De plus, l'aire calculée a été comptée négativement car la fonction f est négative ou nulle sur l'intervalle $[0;3]$.

<u>Conclusion :</u> l'aire du domaine hachuré est de $6+3,5\times\ln(7)$ u.a $=18+10,5\times\ln(7)\ \text{cm}^2$

Géométrie et nombres complexes

Petits jeux entre complexes

L'énoncé

a. Le polynôme P est défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z)=2z^3-9z^2+16z-15$$

1. Calculer $P(2{,}5)$.
2. Déterminer trois entiers relatifs a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
$$P(z)=(2z-5)\times\left(az^2+bz+c\right)$$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

b. On appelle f la fonction affine de variable complexe z définie par :

$$f(z)=(3-2\boldsymbol{i})\times z-4\boldsymbol{i}$$

1. Calculer les images $f(-2)$ $f(3\boldsymbol{i})$ $f(1+4\boldsymbol{i})$ $f\left(\dfrac{1}{2+3\boldsymbol{i}}\right)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=8-5\boldsymbol{i}$.
   Que vient-on de déterminer vis-à-vis de f ?

c. La formule de résolution des équations du second degré vue en première et prolongée en terminale fonctionne quelque soit la nature des coefficients de celles-ci : réels ou complexes. Le but de cette question est la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients complexes d'inconnue z suivante :

$$z^2-2\boldsymbol{i}\times z-1-8\boldsymbol{i}=0$$

1. Calculer le discriminant Δ d'une telle équation.
2. Vérifier que le complexe $4+4\boldsymbol{i}$ a pour carré Δ.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-2\boldsymbol{i}\times z-1-8\boldsymbol{i}=0$.

Le corrigé

a.1. Calculons l'image de $2{,}5$ par le polynôme P.

$$P(2{,}5)=2\times\left(\frac{5}{2}\right)^3-9\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+16\times\frac{5}{2}-15=2\times\frac{125}{8}-9\times\frac{25}{4}+40-15$$
$$=\frac{125}{4}-\frac{225}{4}+25=\frac{-100}{4}+25=-25+25=\boxed{0}$$

2,5 étant une racine du polynôme P, alors ce dernier est factorisable par le facteur $z-2{,}5$ ainsi que par son double $2z-5$. Ce qui va être fait dans la question suivante.

a.2. Procédons par identification. On veut écrire le polynôme P sous la forme :

$$P(z)=(2z-5)\times\left(az^2+bz+c\right)$$
$$=2az^3+2bz^2+2cz-5az^2-5bz-5c$$
$$\boxed{2}z^3+\boxed{(-9)}z^2+\boxed{16}z+\boxed{(-15)}=\boxed{2a}z^3+\boxed{(2b-5a)}z^2+\boxed{(2c-5b)}z+\boxed{(-5c)}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux :

En z^3	$2=2a \Leftrightarrow a=\boxed{1}$	*D'un !*
En z^2	$-9=2b-5a \Leftrightarrow -9=2b-5 \Leftrightarrow 2b=-4$ soit $b=\boxed{-2}$	*De deux !*
En z	$16=2c-5b \Leftrightarrow 16=2c+10 \Leftrightarrow 2c=6 \Leftrightarrow c=\boxed{3}$	*De trois !*
Constant	$-15=-5c \Leftrightarrow c=\boxed{3}$	*La vérif' !*

<u>Conclusion :</u> une écriture factorisée du polynôme P est : $P(z)=\boxed{(2z-5)\times\left(z^2-2z+3\right)}$

a.3. Utilisant ce qui vient d'être fait, résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation....

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \overbrace{(2z-5)\times\left(z^2-2z+3\right)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{2z-5=0 \;\underline{\text{ou}}\; z^2-2z+3=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

Solutionnons séparément ces deux sous-équations :

- La première sous-équation ne pose guère de problèmes !
$$2z-5=0 \Leftrightarrow 2z=5 \Leftrightarrow z=\boxed{2{,}5} \quad \text{On s'en serait douté !}$$
- Calculons le discriminant de l'autre sous-équation $z^2-2z+3=0$.
$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times3=4-12=-8=\boxed{\boldsymbol{i}^2\times\sqrt{4\times2}^2=\left(2\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right)^2}$$
Son discriminant étant négatif, cette sous-équation du second degré admet deux solutions complexes, conjuguées et non réelles :
$$z=\frac{-(-2)-2\boldsymbol{i}\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{\cancel{2}-\cancel{2}\boldsymbol{i}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\boxed{1-\boldsymbol{i}\sqrt{2}} \quad \underline{\text{ou}} \quad z=\frac{-(-2)+2\boldsymbol{i}\sqrt{2}}{2\times1}=\boxed{1+\boldsymbol{i}\sqrt{2}}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $P(z)=0$ admet trois solutions dans le corps des complexes $\mathbb{C}$:

$$S=\left\{2{,}5 \quad 1-\boldsymbol{i}\sqrt{2} \quad 1+\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right\}$$

b.1. Calculons les quatre images demandées. Il suffit juste de remplacer z par la valeur donnée.

$$f(-2)=(3-2i)\times(-2)-4i=-6+4i-4i=-6$$
$$f(3i)=(3-2i)\times(3i)-4i=9i-6i^2-4i=5i-6\times(-1)=6+5i$$
$$f(1+4i)=(3-2i)\times(1+4i)-4i=3+12i-2i-8i^2-4i=11+6i$$
$$f\left(\frac{1}{2+3i}\right)=(3-2i)\times\frac{1}{2+3i}-4i=\frac{(3-2i)\times(2-3i)}{(2+3i)\times(2-3i)}-4i$$
$$=\frac{6-9i-4i+6i^2}{2^2+3^2}-4i=\frac{6-13i-6}{13}-4i=-i-4i=-5i$$

b.2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée :

$$f(z)=8-5i \iff (3-2i)\times z-4i=8-5i \xrightarrow{+4i} (3-2i)\times z=8-i$$
$$\iff z=\frac{8-i}{3-2i}=\frac{(8-i)\times(3+2i)}{(3-2i)\times(3+2i)}=\frac{24+16i-3i-2i^2}{3^2+2^2}$$
$$=\frac{24+13i-2\times(-1)}{9+4}=\frac{26+13i}{13}=2+i$$

<u>Conclusion :</u> $8-5i$ a un seul antécédent par la fonction. Il s'agit de $2+i$.

c.1. Notre équation du second degré est de la forme $az^2+bz+c=0$ avec :

$$a=1 \qquad b=-2i \qquad c=-1+8i$$

Par conséquent, le discriminant de notre équation est donné par :

$$\Delta=b^2-4\times a\times c=(-2i)^2-4\times1\times(-1-8i)=4i^2+4+32i=-4+4+32i=32i$$

c.2. Nous avons : $(4+4i)^2=4^2+2\times4\times4i+(4i)^2=\cancel{16}+32i+\cancel{16\times(-1)}=32i$

Nous pourrions presque dire que $4+4i$ est une racine du nombre complexe $32i$.

c.3. Appliquant les formules bien connues, nous en déduisons que les deux solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré $z^2-2i\times z-1-8i=0$ sont :

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a}=\frac{-(-2i)-(4+4i)}{2}=\frac{2i-4-4i}{2}=\frac{-4-2i}{2}=-2-i$$
$$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a}=\frac{-(-2i)+(4+4i)}{2}=\frac{2i+4+4i}{2}=\frac{4+6i}{2}=2+3i$$

Bon plan complexe...ou pas

L'énoncé

Sur la figure ci-après, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique centimétrique. On a aussi tracé les demi-droites radiales d'origine O formant un angle remarquable avec le premier vecteur de base $\vec{u}$.
Enfin, dans ce repère, on a placé les points A, B et C dont les affixes sont :

$$z_A=6i-1 \qquad z_B=4-i \qquad z_C=-2$$

a. On appelle D le point d'affixe $z_D=-3-3i\sqrt{3}$.

1. Déterminer les module et arguments du nombre complexe z_D.
2. En déduire la position et placer le point D sur la figure ci-contre.
3. Le point A appartient-il au cercle de centre O passant par D ? On justifiera sa réponse.

b. On appelle E le quatrième sommet du parallélogramme CDBE.

1. Calculer l'affixe z_E du point E.
2. Construire au compas le point E sur la figure ci-contre.
3. Calculer l'affixe z_I du milieu I du segment [BC].
4. Justifier que le point I est aussi le milieu du segment [ED].

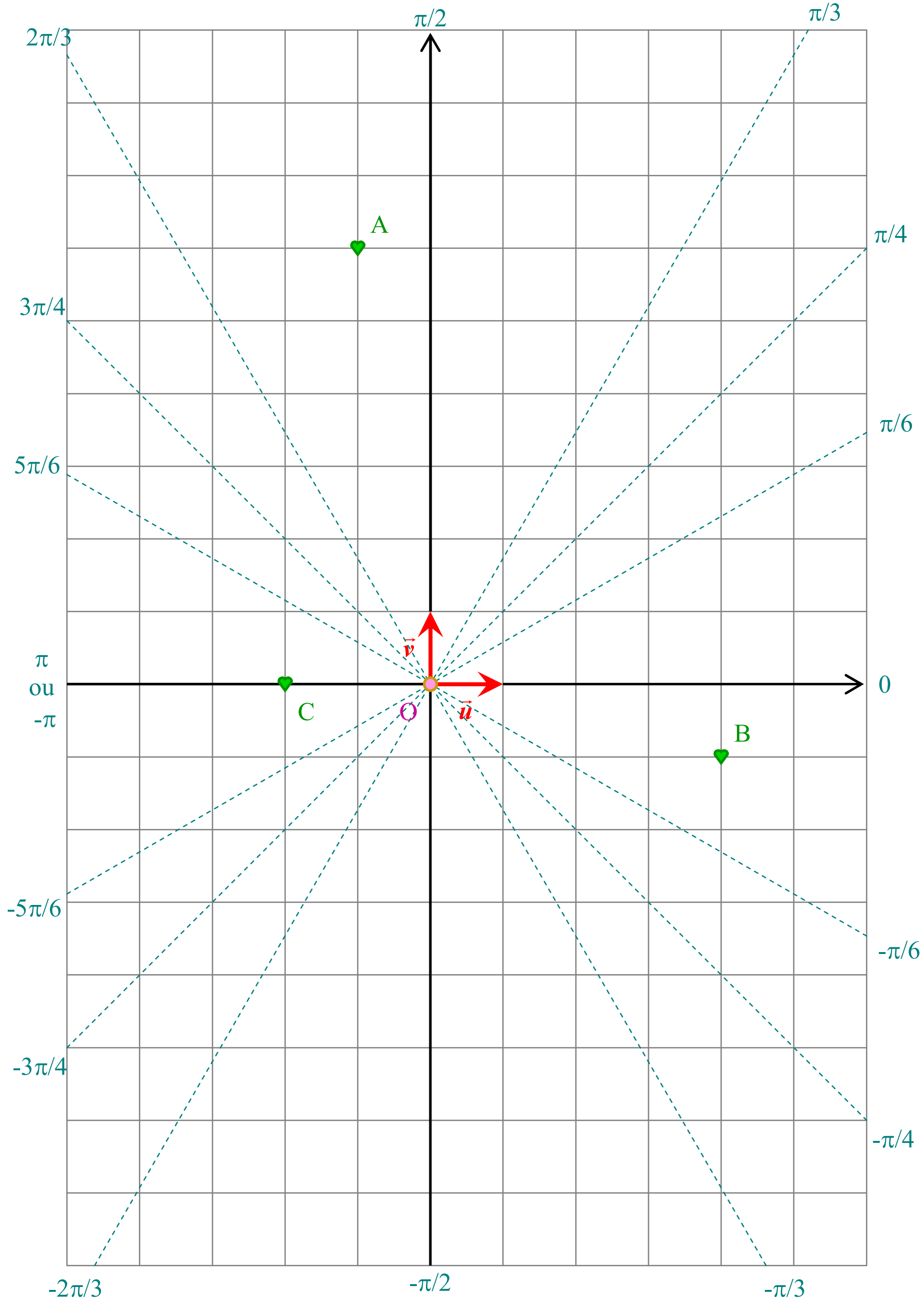
c. On appelle G le point du plan vérifiant l'égalité vectorielle :

$$5\times\overline{AG}+2\times\overline{BG}=\vec{o}$$

1. Déterminer l'affixe z_G du point G.
2. Placer le point G sur la figure.

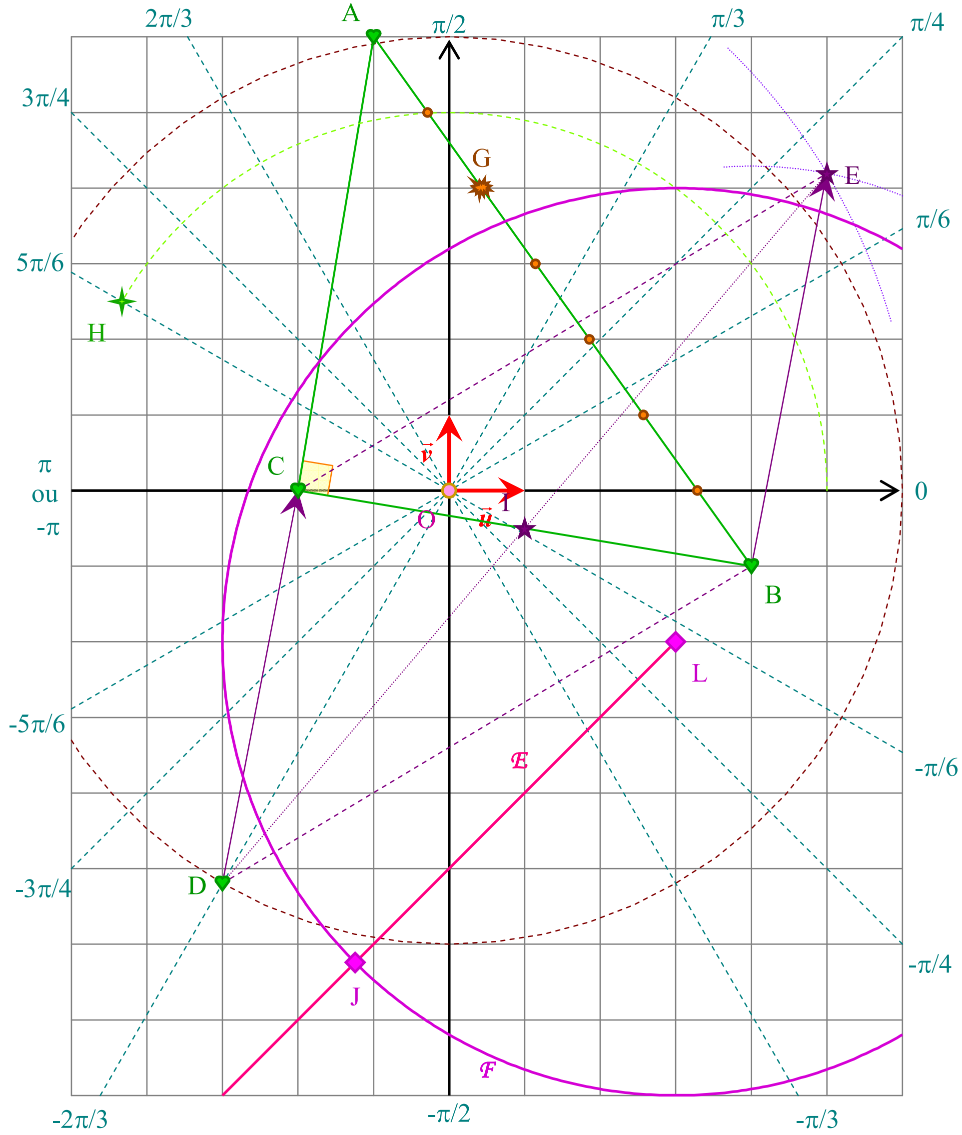
d. On appelle H le point dont l'affixe z_H a pour module 5 et pour argument $\dfrac{29\pi}{6}$.

1. Ecrire z_H sous forme exponentielle, puis en déduire son écriture algébrique.
2. Placer le point H sur la figure.
3. Démontrer que le nombre $p=\left(\dfrac{z_H}{5}\right)^{18}$ est un réel.



Le corrigé

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



a.1. On commence par calculer le module du nombre complexe $z_D = -3 - 3i\sqrt{3}$.

$$|z_D| = \left|-3-3i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-3)^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+9\times 3} = \sqrt{36} = 6$$

Les arguments de z_D sont les réels θ vérifiant les deux égalités :

$$\cos(\theta)=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2} \quad \underline{\text{et}} \quad \sin(\theta)=\frac{-3\sqrt{3}}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta=-\frac{2\pi}{3} \text{ modulo } 2\pi$$

a.2. Vu son module, D appartient au cercle de centre O et de rayon 6.

Vu ses arguments, D appartient à la radiale d'origine O formant un angle de $-\frac{2\pi}{3}$ avec $\vec{u}$.

a.3. Calculons la distance OA.

$$OA=|z_A|=|-1+6i|=\sqrt{(-1)^2+6^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}\neq 6$$

<u>Conclusion :</u> la distance OA étant différente du rayon du cercle de centre O passant par D, le point A n'appartient pas à ce dernier ensemble.

b.1. Comme CDBE est un parallélogramme, alors ces quatre sommets vérifient l'égalité vectorielle :

$$\overbrace{\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DC}}^{\text{Egalité vectorielle}} \Leftrightarrow \overbrace{z_{\overrightarrow{BE}}=z_{\overrightarrow{DC}}=\vec{o} \Leftrightarrow z_E-z_B=z_C-z_D}^{\text{Traduction ou transcription complexe}}$$

$$\Leftrightarrow z_E=z_B+z_C-z_D$$

$$=(4-i)+(-2)-(-3-3i\sqrt{3})=5-i+3i\sqrt{3}$$

b.2. Le point E se construit au compas en s'appuyant sur le triangle de base CDB.

b.3. Comme I est le milieu du segment [BC], alors son affixe est donnée par :

$$z_I=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{(4-i)+(-2)}{2}=\frac{2-i}{2}=1-\frac{i}{2}$$

b.4. Les diagonales [BC] et [ED] du parallélogramme CDBE se coupant en leurs milieux, le point I qui est le milieu du segment [BC] est aussi le milieu de [ED].

c.1. Traduisons sous la forme d'une égalité complexe l'égalité vectorielle définissant le point G.

$$\overbrace{5\times\overrightarrow{AG}+2\times\overrightarrow{BG}=\vec{o}}^{\text{Egalité vectorielle}} \Leftrightarrow \overbrace{5\times z_{\overrightarrow{AG}}+2\times z_{\overrightarrow{BG}}=\vec{o} \Leftrightarrow 5\times(z_G-z_A)+2(z_G-z_B)=0}^{\text{Traduction ou transcription complexe}}$$

$$\Leftrightarrow 5\times z_G-5\times(6i-1)+2\times z_G-2\times(4-i)=0$$

$$\Leftrightarrow 7\times z_G-30i+5-8+2i=0 \Leftrightarrow 7\times z_G-3-28i=0$$

$$\Leftrightarrow 7\times z_G=3+28i \Leftrightarrow z_G=\frac{3}{7}+i\frac{28}{7}=\frac{3}{7}+4i$$

c.2. Vu son affixe, le point G appartient à la droite horizontale d'équation $y=4$.

Vu la relation vectorielle définissant G, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires. Donc le point G appartient aussi à la droite (AB).
C'est à l'intersection de ces deux droites que l'on place le point G.

d.1. Modulo 2π, l'argument $\frac{29\pi}{6}=2\times\frac{12\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=2\text{ tours}+\frac{5\pi}{6}$ est congru à $\frac{5\pi}{6}$.

Nous pouvons alors écrire :

$$z_H=\overbrace{5\times e^{i\frac{29\pi}{6}}=5\times e^{i\frac{5\pi}{6}}}^{\text{Forme exponentielle}}$$

$$=\overbrace{5\times\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)}^{\text{Forme trigonométrique}}=5\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\times\frac{1}{2}\right)=\overbrace{-2,5\sqrt{3}+2,5i}^{\text{Forme algébrique}}$$

d.2. Le point H se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 5 ainsi que sur la demi-droite radiale d'origine O formant un angle de $\frac{5\pi}{6}$ avec le premier vecteur de base $\vec{u}$.

d.3. Nous pouvons écrire :

$$p=\left(\frac{z_H}{5}\right)^{18}=\left(\frac{\cancel{5}\times e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\cancel{5}}\right)^{18}=e^{i18\times\frac{5\pi}{6}}=e^{i3\times5\pi}=\overbrace{e^{i15\pi}}^{\substack{\text{car}\\ 15\pi=7\times2\pi+\pi}}=e^{i\pi}=-1$$

e.1. Ecrivons sous forme algébrique le quotient q :

$$q=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{(4-i)-(-2)}{(6i-1)-(-2)}$$

$$=\frac{(6-i)\times(1-6i)}{(6i+1)\times(1-6i)}=\frac{6-36i-i+6i^2}{1^2+6^2}=\frac{\cancel{6}-37i-\cancel{6}}{37}=-\frac{\cancel{37}i}{\cancel{37}}=-i$$

e.2. Le nombre complexe $-i$ ayant pour module 1 et pour argument $-\frac{\pi}{2}$, nous avons :

$$q=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

e.3. Interprétons géométriquement le quotient q.

- Du point de vue de son module : $|q| = \left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$

  Il vient : $|q| = 1 \iff \dfrac{CB}{CA} = 1 \iff CB = CA \Rightarrow$ ABC est isocèle en C

- Du point de vue de ses arguments : $\arg(q) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$

  Il vient : $\overbrace{\arg(q) = -\dfrac{\pi}{2} \iff \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = -\dfrac{\pi}{2}}^{\text{modulo } 2\pi \text{ bien sûr !}} \Rightarrow$ ABC est rectangle en C

Conclusion : le triangle ABC est isocèle et rectangle (indirect) en C.

f.1. L est le point d'affixe $z_L = 3 - 4i$. L'égalité définissant l'ensemble $\mathcal{E}$ s'écrit aussi :

$$M(z) \in \mathcal{E} \iff \overbrace{\arg(z - 3 + 2i) = \arg(z - (3 - 2i)) = \arg(z - z_L) = \underbrace{-\frac{19\pi}{4} = -2 \times \frac{8\pi}{4}}_{-2 \text{ tours}} - \frac{3\pi}{4}}^{\text{modulo } 2\pi}$$

$$\iff \left(\vec{u}, \overrightarrow{LM}\right) = -\frac{3\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est la demi-droite d'origine L formant un angle de $-\dfrac{3\pi}{4}$ avec $\vec{u}$.

f.2. L'égalité définissant l'ensemble $\mathcal{F}$ s'écrit aussi :

$$M(z) \in \mathcal{F} \iff |z - 3 + 2i| = 6 \iff |z - z_L| = 6 \iff LM = 6$$

$$\iff \text{M appartient au cercle de centre L et de rayon 6}$$

f.3. Comme le point J appartient aux deux ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, alors son affixe z_J vérifie :

$$\overbrace{|z_J - z_L| = 6}^{\text{Appartenance à } \mathcal{F}} \quad \text{et} \quad \overbrace{\arg(z_J - z_L) = -\frac{19\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}(2\pi)}^{\text{Appartenance à } \mathcal{E}}$$

Par conséquent, l'écriture exponentielle du nombre complexe $z_J - z_L$ est :

$$z_J - z_L = 6 \times e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 6 \times \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$$

Nous en déduisons : $z_J = z_L - 3\sqrt{3} - 3i = 3 - 2i - 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} = \left(3 - 3\sqrt{2}\right) - i\left(2 + 3\sqrt{2}\right)$

Petit complexe fonctionnel

L'énoncé

a. Le polynôme P est défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = 4z^3 - (4 + 4i)z^2 + (6 + 4i)z - 6i$$

4. Calculer $P(i)$.
5. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
$$P(z) = (z - i) \times \left(az^2 + bz + c\right)$$
6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

b. On appelle f l'application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe z différente de 2 associe le point M′ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{-iz}{z - 2}$$

On appelle B le point d'affixe $z_B = 2$.

1. Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A′ qui est l'image du point A d'affixe $z_A = 3i$ par l'application f. On indiquera le détail des calculs.
2. On appelle x et y les parties réelle et imaginaire du nombre complexe $z = x + iy$.
Etablir que l'écriture algébrique du nombre complexe z' est :
$$z' = \frac{-2y}{(x-2)^2 + y^2} + i \times \frac{2x - x^2 - y^2}{(x-2)^2 + y^2}$$
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que z' soit un réel.
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur.
5. Démontrer que si M′ est l'image du point M par l'application f, alors ces deux points vérifient les égalités :
$$OM' = \frac{OM}{BM} \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{OM}\right) - \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi$$
6. En déduire que l'image de la médiatrice Δ du segment [OB] par l'application f est incluse dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Le corrigé

a.1. Calculons l'image i par le polynôme P.

$$P(i) = 4 \times i^3 - (4 + 4i) \times i^2 + (6 + 4i) \times i - 6i$$

$$= 4 \times (-i) - (4 + 4i) \times (-1) + \cancel{6i} + 4i^2 - \cancel{6i} = -4i + 4 + 4i - 4 = 0$$

Donc i est une racine du polynôme $P(z)$ et ce dernier est factorisable par le facteur $z - i$.

a.2. Procédons par identification. On veut écrire le polynôme $P(z)$ sous la forme :

$$P(z)=(z-i)\times\left(az^2+bz+c\right)$$
$$=az^3+bz^2+cz-iaz^2-ibz-ic$$

$$\boxed{4}z^3+\boxed{(-4-4i)}z^2+\boxed{(6+4i)}z+\boxed{(-6i)}=\boxed{a}z^3+\boxed{(b-ia)}z^2+\boxed{(c-ib)}z+\boxed{(-ic)}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux :

En z^3	$4=a \Leftrightarrow a=4$	*D'un !*
En z^2	$-4-4i=b-ia \Leftrightarrow -4-\cancel{4i}=b-\cancel{4i} \Leftrightarrow b=-4$	*De deux !*
En z	$6+4i=c-ib \Leftrightarrow 6+\cancel{4i}=c+\cancel{4i} \Leftrightarrow c=6$	*De trois !*
Constant	$-6i=-ic \Leftrightarrow c=6$	*La vérif' !*

<u>Conclusion :</u> une écriture factorisée du polynôme P est :

$$P(z)=4z^3-(4+4i)z^2+(6+4i)z-6i=(z-i)\times\left(4z^2-4z+6\right)$$

a.3. Utilisant ce qui vient d'être fait, résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation....

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \overbrace{(z-i)\times\left(4z^2-4z+6\right)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{z-i=0 \text{ ou } 4z^2-4z+6=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$
$$z=i$$

Il nous reste à résoudre la seconde sous-équation $4z^2-4z+6=0$ qui est du second degré. Calculons son discriminant !

$$\Delta=(-4)^2-4\times4\times6=16-96=-80$$
$$=(-1)\times80=\left[i\times\sqrt{80}\right]^2=\left[i\times\sqrt{16}\times\sqrt{5}\right]^2=\left[4i\sqrt{5}\right]^2$$

Cette seconde sous-équation admet deux solutions complexes et conjuguées qui sont :

$$z=\frac{-(-4)-4i\sqrt{5}}{2\times4}=\frac{\cancel{4}\times\left(1-i\sqrt{5}\right)}{2\times\cancel{4}}=\frac{1-i\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad z=\frac{-(-4)+4i\sqrt{5}}{2\times4}=\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $P(z)=0$ a trois solutions complexes : $S=\left\{i;\frac{1-i\sqrt{5}}{2};\frac{1+i\sqrt{5}}{2}\right\}$

b.1. L'affixe $z_{A'}$ du point A' est donnée par :

$$z_{A'}=\frac{-i\times z_A}{z_A-2}=\frac{-i\times3i}{3i-2}=\frac{-3\times\overbrace{i^2}^{-1}}{-2+3i}=\frac{3\times(-2-3i)}{(-2+3i)\times(-2-3i)}=\frac{-6-9i}{(-2)^2+3^2}=-\frac{6}{13}-\frac{9}{13}i$$

b.2. Nous pouvons écrire :

$$z'=\frac{-iz}{z-2}=\frac{-i\times(x+iy)}{(x+iy)-2}=\frac{-ix-i^2y}{(x-2)+iy}$$
$$=\frac{(y-ix)\times\left[(x-2)-iy\right]}{\left[(x-2)+iy\right]\times\left[(x-2)-iy\right]}=\frac{\cancel{xy}-2y-iy^2-ix^2+2ix-\cancel{xy}}{(x-2)^2+y^2}$$
$$=\frac{-2y}{(x-2)^2+y^2}+i\times\frac{2x-x^2-y^2}{(x-2)^2+y^2}$$

b.3. Nous pouvons écrire pour tout nombre complexe $z\neq2$:

$M(z)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow z'$ est un réel $\Leftrightarrow$ la partie imaginaire de z' est nulle

$$\Leftrightarrow \frac{2x-x^2-y^2}{(x-2)^2+y^2}=0 \xrightarrow[\text{Possible car } z\neq2]{\times\left[(x-2)^2+y^2\right]} 2x-x^2-y^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1^2+(y-0)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{(x-1)^2+(y-0)^2=1 \Leftrightarrow \Omega M^2=1 \Leftrightarrow \Omega M=\sqrt{1}=1}^{\text{On appelle } \Omega \text{ le point d'affixe } z_\Omega=1}$$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre Ω et de rayon 1

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre Ω d'affixe $z_\Omega=1$ et de rayon 1...privé du point B d'affixe 2.

b.4. Nous pouvons écrire pour tout nombre complexe $z\neq2$:

$M(z)\in\mathcal{F} \Leftrightarrow z'$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ la partie réelle de z' est nulle

$$\Leftrightarrow \frac{-2y}{(x-2)^2+y^2}=0 \xrightarrow[\text{Possible car } z\neq2]{\times\left[(x-2)^2+y^2\right]} -2y=0$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{0}{-2} \Leftrightarrow y=0$$

$\Leftrightarrow$ M appartient à l'axe des abscisses $(O;\vec{u})$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{F}$ est l'axe des abscisses $(O;\vec{u})$ ...privé du point B d'affixe 2.

b.5. Si le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par l'application f, alors celles-ci sont liées par la relation :

$$z'=\frac{-iz}{z-2}$$

Interprétons cette égalité du point de vue de...

- ...de son module :

$$|z'| = \left|\frac{-iz}{z-2}\right| = \frac{|-i|\times|z|}{|z-2|} = \frac{1\times|z|}{|z-2|} = \frac{|z|}{|z-z_B|} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{OM}' = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{BM}}}$$

- ...de ses arguments :

$$\arg(z') = \arg\left(\frac{-iz}{z-2}\right) = \arg(-i) + \arg\left(\frac{z-0}{z-2}\right) = -\frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z-z_O}{z-z_B}\right) \text{ modulo } 2\pi$$

Traduit sous forme d'angles orientés, nous en déduisons :

$$\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right) = -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{\mathrm{BM}},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = \boxed{\left(\overrightarrow{\mathrm{BM}},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) - \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi}$$

b.6. Soit M un point de la médiatrice Δ du segment [OB].
De par sa définition, M est équidistant des deux extrémités du segment. Donc $\mathrm{OM} = \mathrm{BM}$.
Il vient alors :

$$\mathrm{OM}' = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{BM}} = 1 \Rightarrow \boxed{\mathrm{M}' \text{ appartient au cercle de centre O et de rayon 1}}$$

Conclusion : l'image $f(\Delta)$ est incluse dans le cercle de centre O et de rayon 1.

Espace des tentes

L'énoncé

Les questions **b**, **c**, **d** et **e** sont dépendantes les unes des autres. La question **a** est indépendante des autres.

a. Cette question est une *«restitution organisée des connaissances»* aussi appelée *«question de cours»*. On rappelle la définition suivante :

> Dire qu'une droite est perpendiculaire à un plan signifie qu'elle est orthogonale à chaque droite incluse dans ce plan.

D'abord, d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ sont deux droites incluses dans un plan $\mathcal{P}$. De plus, ces deux droites sont sécantes en un point A.
Ensuite, d est une droite quelconque du plan $\mathcal{P}$ qui a pour vecteur directeur $\vec{w}$.
Enfin, Δ est une autre droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{v}$. Δ est orthogonale aux droites d_1 et d_2.

1. Justifier qu'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\times\overrightarrow{u_1} + \beta\times\overrightarrow{u_2}$.
2. Démontrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

Dans le reste de l'exercice, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ dans lequel on considère les points de coordonnées :

$$\mathrm{A}(2;3;1) \qquad \mathrm{B}(-4;5;5) \qquad \mathrm{C}(5;9;4)$$

b. Le triangle ABC est-il isocèle en A ? On justifiera sa réponse

c. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan qui nous appellerons $\mathcal{P}$ dans le reste de l'exercice.

d. Δ est la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 14-5t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = -3+7t \end{cases}$$

1. Le point C appartient-il à la droite Δ ? On justifiera sa réponse.
2. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite Δ.
3. Démontrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
   Qu'est alors le vecteur de coordonnées $\vec{v}$ pour le plan $\mathcal{P}$?
4. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
5. Justifier que le plan $\mathcal{P}$ est sécant avec l'axe des ordonnées $\left(O;\vec{j}\right)$, puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection E.

e. On appelle $\mathcal{Q}$ le plan dont une équation cartésienne est $9x+4y-z-77=0$.

1. Déterminer la position relative de la droite Δ et du plan $\mathcal{Q}$.
2. Déterminer les coordonnées du point I qui est le milieu du segment [AB].
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d qui est la parallèle à la droite (AC) passant par le point I.
4. Déterminer les coordonnées du point F qui est l'intersection de la droite d avec le plan $\mathcal{Q}$.

Le corrigé

a.1. D'abord, les droites d_1 et d_2 n'étant pas parallèles, leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires. Le couple $\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)$ est une base du plan $\mathcal{P}$.

La droite d appartenant au plan $\mathcal{P}$, son vecteur directeur $\vec{w}$ est coplanaire avec les deux vecteurs de base $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ du plan $\mathcal{P}$.

Il existe donc deux réels α et β tels que $\vec{w}=\alpha\times\overrightarrow{u_1}+\beta\times\overrightarrow{u_2}$.

a.2. Comme la droite Δ est orthogonale aux droites d_1 et d_2, alors son vecteur directeur $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. Donc des produits scalaires sont nuls :

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_1}=0 \quad \text{et} \quad \vec{v}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$$

Concernant n'importe quelle autre droite d de vecteur directeur $\vec{w}$ du plan $\mathcal{P}$, il vient :

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\overbrace{\vec{v}\cdot\left(\alpha\times\overrightarrow{u_1}+\beta\times\overrightarrow{u_2}\right)}^{\text{On distribue } \vec{v} \text{ scalairement parlant...}}=\alpha\times\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_1}+\beta\times\vec{v}\cdot\overrightarrow{u_1}=\alpha\times0+\beta\times0=\boxed{0}$$

Comme leur vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux, alors la droite Δ est orthogonale à n'importe quelle droite d du plan $\mathcal{P}$.
<u>Conclusion :</u> la droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

b. Pour savoir si le triangle ABC est isocèle en A, le mieux est encore de calculer les longueurs des deux côtés adjacents.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4-2=-6\\5-3=2\\5-1=4\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\sqrt{(-6)^2+2^2+4^2}=\sqrt{36+4+16}=\boxed{\sqrt{56}}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-2=3\\9-3=6\\4-1=3\end{pmatrix} \Rightarrow AC=\sqrt{3^2+6^2+3^2}=\sqrt{9+36+9}=\boxed{\sqrt{54}}$$

<u>Conclusion :</u> les côtés adjacents [AB] et [AC] ayant des longueurs différentes, le triangle ABC n'est pas isocèle en A.

c. Pour qu'ils définissent un plan, il faut et il suffit que les points A, B et C ne soient pas alignés. Une question se pose : les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-elles proportionnelles ?

	$\overrightarrow{AB}$		$\overrightarrow{AC}$
Abscisses	-6	$\xrightarrow{\times(-0,5)}$	3
Ordonnées	2	$\xrightarrow{\times3}$	6
Cotes	4	$\xrightarrow{\times0,75}$	3

Leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés et ils définissent un plan $\mathcal{P}$.

d.1. Les coordonnées du point C vérifient-elles la représentation paramétrique de Δ ?
Existe un réel t tel que $x_C=2+3t$ <u>et</u> $y_C=14-5t$ <u>et</u> $z_C=-3+7t$?

$$5=2+3t \qquad 9=14-5t \qquad 4=-3+7t$$
$$3t=3 \qquad -5t=-5 \qquad 7t=7$$
$$\underbrace{t=\boxed{1} \qquad t=\boxed{1} \qquad t=\boxed{1}}_{\text{La réponse est oui ! Il s'agit de la valeur } t=1}$$

<u>Conclusion :</u> le point A appartient bien à la droite Δ.

d.2. D'après sa représentation paramétrique, un vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}$.

d.3. Regardons si $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont directeurs pour le plan $\mathcal{P}$.

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}=3\times(-6)+(-5)\times2+7\times4=-18-10+28=0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}\perp\overrightarrow{AB}}$$

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}=3\times3+(-5)\times6+7\times3=9-30+21=0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}\perp\overrightarrow{AC}}$$

Comme le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont non colinéaires et directeurs pour le plan $\mathcal{P}$, alors $\vec{v}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$. Par conséquent, la droite Δ est perpendiculaire à ce plan.

d.4. Le plan $\mathcal{P}$ est entièrement défini par l'un de ses points A, B ou C ainsi que par son vecteur normal $\vec{v}$. Il est même l'ensemble des points M de l'espace tel que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux. En conséquence, nous pouvons écrire :

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\\z-1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow (x-2)\times 3+(y-3)\times(-5)+(z-1)\times 7=0$$

$$\Leftrightarrow 3x-6-5y+15+7z-7=0 \Leftrightarrow 3x-5y+7z+2=0$$

Conclusion : une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $3x-5y+7z+2=0$.

d.5. La première chose à vérifier est que le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{v}$ est bien sécante, c'est-à-dire non parallèle avec la droite $(O;\vec{j})$ de vecteur directeur $\vec{j}$.

Calculons leur produit scalaire :

$$\vec{v}\cdot\vec{j}=\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=3\times 0+(-5)\times 1+7\times 0=0-5+0=-5\neq 0$$

Leur produit scalaire étant non nul, le vecteur normal $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$ n'est orthogonal au vecteur directeur $\vec{j}$ de (Oy). Donc le plan est sécant avec l'axe des ordonnées. Le point E annoncé par l'énoncé existe. Déterminons-en les coordonnées !

➲ D'abord, comme le point E appartient à l'axe $(O;\vec{j})$, alors son abscisse et sa cote sont nulles.

Ensuite, comme $\mathrm{E}(0;y_{\mathrm{E}};0)$ appartient également au plan $\mathcal{P}$, alors les coordonnées du premier vérifient l'équation du second.

$$3x_{\mathrm{E}}-5y_{\mathrm{E}}+7z_{\mathrm{E}}+2=0 \Leftrightarrow 3\times 0-5y_{\mathrm{E}}+7\times 0+2=0 \Leftrightarrow -5y_{\mathrm{E}}=2$$

$$\Leftrightarrow y_{\mathrm{E}}=\frac{2}{-5}=-0,4$$

Conclusion : le point E a pour coordonnées $(0;-0,4;0)$.

e.1. Position relative de la droite Δ de vecteur directeur $\vec{v}$ et du plan $\mathcal{Q}$, cela signifie savoir si la première est incluse, parallèle distincte ou bien sécante au second.

$\mathcal{Q}$ ayant pour équation $9x+4y-z-77=0$, l'un de ses vecteurs normaux est $\vec{n}(9;4;-1)$.

Calculons le produit scalaire de ce dernier avec le vecteur directeur $\vec{v}$ de Δ.

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\-1\end{pmatrix}=3\times 9+(-5)\times 4+7\times(-1)=27-20-7=0$$

Le directeur $\vec{v}$ de Δ étant orthogonal au normal $\vec{n}$ de $\mathcal{Q}$, la droite est parallèle au plan. Il reste à savoir si c'est un parallélisme inclus ou strict.

La question **d.1** nous a appris qu'un point de la droite Δ est C. D'après sa représentation paramétrique, un autre point de Δ a pour coordonnées $(2;14;-3)$.

Regardons si les coordonnées du point C vérifient l'équation du plan $\mathcal{Q}$.

$$9x_{\mathrm{C}}+4y_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{C}}-77=9\times 5+4\times 9-4-77=45+36-4-77=0$$

Ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point C appartient au plan $\mathcal{Q}$. La droite Δ étant parallèle au plan $\mathcal{Q}$ et ayant l'un de ses points dans ce dernier a tous ses points dans $\mathcal{Q}$.

Conclusion : la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{Q}$.

e.2. I étant le milieu du segment [AB], ses coordonnées sont données par les formules :

$$x_{\mathrm{I}}=\frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}}{2}=\frac{2-4}{2}=-1 \qquad y_{\mathrm{I}}=\frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{B}}}{2}=\frac{3+5}{2}=4 \qquad z_{\mathrm{I}}=\frac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}}{2}=\frac{1+5}{2}=3$$

e.3. La droite d est entièrement définie par son point I et le vecteur directeur $\overrightarrow{AC}(3;6;3)$.

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in d \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{IM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{IM}=t\times\overrightarrow{AC} \quad\text{soit}\quad \begin{cases}x-(-1)=t\times 3\\y-4=t\times 6\\z-3=t\times 3\end{cases}$$

Conclusion : une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases}x=-1+3t\\y=4+6t\\z=3+3t\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

e.4. La première chose à vérifier est que la droite d est bien sécante au plan $\mathcal{Q}$.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\4\\-1\end{pmatrix}=3\times 9+6\times 4+3\times(-1)=27+24-3=48\neq 0$$

Le directeur $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas orthogonal au normal $\vec{n}$, la droite d et le plan $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles mais sécants en un point qui a été baptisé F.

Ensuite, comme F appartient à la droite d, alors il existe un réel t_{F} tel que $\begin{cases}x_{\mathrm{F}}=-1+3t_{\mathrm{F}}\\y_{\mathrm{F}}=4+6t_{\mathrm{F}}\\z_{\mathrm{F}}=3+3t_{\mathrm{F}}\end{cases}$

Enfin, F faisant partie du plan $\mathcal{Q}$, ses coordonnées en vérifient l'équation :

$$9x_{\mathrm{F}}+4y_{\mathrm{F}}-z_{\mathrm{F}}-77=0 \Leftrightarrow 9\times\left(-1+3t_{\mathrm{F}}\right)+4\times\left(4+6t_{\mathrm{F}}\right)-\left(3+3t_{\mathrm{F}}\right)-77=0$$

$$\Leftrightarrow -9+27t_{\mathrm{F}}+16+24t_{\mathrm{F}}-3-3t_{\mathrm{F}}-77=0$$

$$\Leftrightarrow 48t_{\mathrm{F}}-73=0 \Leftrightarrow 48t_{\mathrm{F}}=73 \Leftrightarrow t_{\mathrm{F}}=\frac{73}{48}$$

Nous en concluons :

$$x_{\mathrm{F}}=-1+3\times\frac{73}{48}=\frac{57}{16} \qquad y_{\mathrm{F}}=4+6\times\frac{73}{48}=\frac{105}{8} \qquad z_{\mathrm{F}}=3+3\times\frac{73}{48}=\frac{121}{16}$$

Probabilités

Préludes improbables

L'énoncé

a. Développer et réduire l'expression de la fonction :

$$f(x)=(2x-3)^5$$

On indiquera le détail des calculs.

b. Toto est furieux : son jeu de cartes préféré qui en comptait à l'origine 32 n'en a plus que 28. Ont disparu les as de pique et de coeur, le roi de carreau et la dame de coeur.
Histoire de se calmer, Toto s'amuse à tirer au hasard et simultanément quatre cartes dans son jeu de 28. Il constitue ainsi une main de quatre cartes.

1. Combien existe-t-il de mains possibles au total ?
2. Combien existe-t-il de mains constituées de deux as et deux dames ?
3. Combien existe-t-il de mains contenant exactement trois coeurs ?

c. Cette question est une restitution organisée des connaissances (aussi appelée question de cours). Dans ce qui suit, A et B sont deux événements de probabilités non nulles.

1. Donner les trois égalités définissant l'indépendance des événements A et B.
2. Démontrer que si A et B sont deux événements indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Le corrigé

a. En utilisant la formule du binôme de Newton, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
f(x)=(2x-3)^5 &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\times(2x)^k\times(-3)^{5-k}\\
&=\binom{5}{0}\times(2x)^0\times(-3)^5+\binom{5}{1}\times(2x)^1\times(-3)^4+\binom{5}{2}\times(2x)^2\times(-3)^3\\
&\quad+\binom{5}{3}\times(2x)^3\times(-3)^2+\binom{5}{4}\times(2x)^4\times(-3)^1+\binom{5}{5}\times(2x)^5\times(-3)^0\\
&=1\times1\times(-243)+5\times2x\times81+10\times4x^2\times(-27)+10\times8x^3\times9\\
&\quad+5\times16x^4\times(-3)+1\times32x^5\times1\\
&=\boxed{32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x-243}
\end{aligned}$$

b.1. Le tirage des quatre cartes étant simultané, Toto constitue des combinaisons.

Par conséquent, il existe $\overbrace{\binom{28}{4}}^{\text{4 cartes à choisir parmi 28}}=\dfrac{28}{1}\times\dfrac{27}{2}\times\dfrac{26}{3}\times\dfrac{25}{4}=\boxed{\text{20475 mains possibles}}$

b.2. Le jeu de cartes de Toto comprend deux as et trois dames.

Donc il existe $\overbrace{\binom{2}{2}}^{\text{2 as à choisir parmi 2}}\times\overbrace{\binom{3}{2}}^{\text{2 dames à choisir parmi 3}}=1\times3=\boxed{\text{3 mains avec 2 as et 2 dames}}$

b.3. Le jeu de cartes de Toto comprend 6 coeurs et 22 autres cartes.

Donc il y a $\overbrace{\binom{6}{3}}^{\text{3 coeurs à choisir parmi 6}}\times\overbrace{\binom{22}{1}}^{\text{1 autre carte à choisir parmi 22}}=20\times22=\boxed{\text{440 mains avec exactement 3 coeurs}}$

c.1. Trois égalités permettent de définir l'indépendance de deux événements A et B.

$$\boxed{\begin{array}{lcccc}
 & & \text{La réalisation d'un événement ne change pas la probabilité l'autre.} & & \text{La probabilité de l'intersection est le produit des probabilités des deux événements.}\\
A \text{ et } B \text{ sont indépendants} & \Leftrightarrow & p_B(A)=p(A) & \Leftrightarrow & p(A\cap B)=p(A)\times p(B)\\
 & \Leftrightarrow & p_A(B)=p(B) & &
\end{array}}$$

c.2. Soient A et B deux événements indépendants. Ils vérifient donc l'égalité :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$

Les événements B et $\overline{B}$ formant une partition de l'univers des possibles, il vient en application de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B}) &\Leftrightarrow p(A)=p(A)\times p(B)+p(A\cap\overline{B})\\
&\Leftrightarrow p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A)\times p(B)\\
&\qquad\qquad\quad =p(A)\times(1-p(B))=\boxed{p(A)\times p(\overline{B})}
\end{aligned}$$

Donc les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Nous irons tous au paradis...ou pas !

L'énoncé

Après le temps de l'existence terrestre, vient celui du purgatoire où chaque ancien vivant saura s'il passe le reste de l'éternité en enfer ou bien au paradis.
De divines études menées depuis la nuit des temps ont établi les données suivantes :

- 30% du genre humain est croyant, 20% est athée et le reste est indécis.
- 62% des croyants et 56% des indécis vont au paradis; 23% des athées finissent en enfer.

Le cas échéant, les probabilités calculées seront arrondies au millième près.

a. On rencontre au hasard un ancien vivant au purgatoire et on définit les événements suivants :

C = «l'ancien vivant était un croyant»
A = «l'ancien vivant était un athée»
I = «l'ancien vivant était indécis»
P = «l'ancien vivant finira au paradis»
E = «l'ancien vivant finira en enfer»

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation d'un ancien vivant rencontré au hasard au purgatoire.
2. Calculer la probabilité de l'événement E.
3. Les événements C et E sont-ils indépendants ? On justifiera sa réponse.
   Le fait d'être croyant prédispose-t-il plus au paradis ?
4. On sait que l'ancien vivant rencontré ira au paradis. Calculer la probabilité qu'il fut athée.

b. Un groupe de 14 anciens vivants ne se connaissant pas vient d'arriver au purgatoire. On note X la variable égale au nombre de ceux-ci qui étaient croyants.

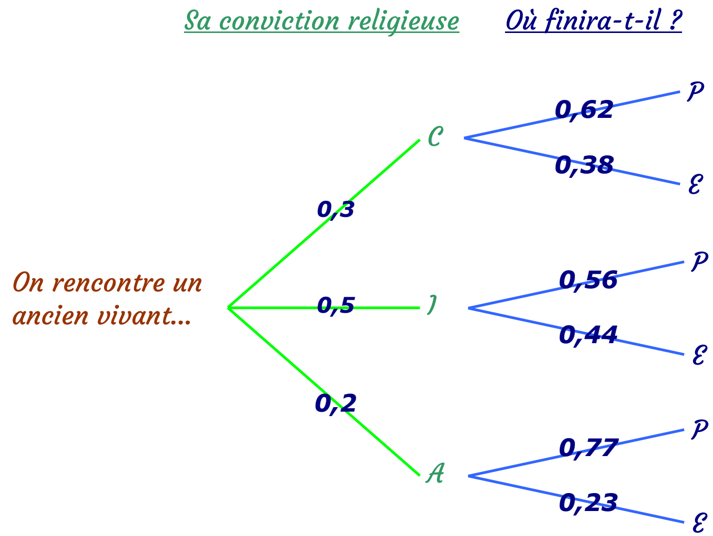
1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?
   Quelle est la loi de probabilité de X ? On justifiera sa réponse.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 de ces 14 anciens vivants fussent croyants.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 6 de ces 14 anciens vivants fussent croyants.

c. Un autre groupe de n anciens vivants ne se connaissant pas vient d'arriver au purgatoire.
On appelle p_n la probabilité qu'au moins un de ces n anciens vivants fut un croyant.

1. Exprimer p_n en fonction de l'entier n.
2. Déterminer le nombre minimal n d'anciens vivants que doit contenir le groupe pour que la probabilité p_n soit supérieure à 99,99%.

Le corrigé

a.1. La situation d'une personne rencontrée au hasard au purgatoire est la suivante :



a.2. Les événements C, I et A formant une partition de l'univers des possibles, il vient en application de la formule des probabilités totales :

$$p(E) = p(E \cap C) + p(E \cap I) + p(E \cap A)$$
$$= 0,3 \times 0,38 + 0,5 \times 0,44 + 0,2 \times 0,23 = 0,38$$

a.3. D'après l'énoncé, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé est égale à 0,38. Ainsi, la réalisation de l'événement C n'altère pas la probabilité de réalisation de l'événements E. Donc E et C sont indépendants.
➲ Comme les événements E et C sont indépendants, alors les événements C et $\overline{E} = P$ le sont aussi. Par conséquent, le fait d'être croyant (ou pas) n'a aucune influence sur l'accès au paradis : il ne prédispose, ni n'indispose.

a.3. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle :

$$p(A \text{ sachant } P) = \frac{p(A \cap P)}{p(P)} = \frac{0,2 \times 0,77}{1 - 0,38} = \frac{0,154}{0,62} \approx 0,248$$

b.1. X comptant un nombre d'individus au plus égal à 14, X peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 14.

➲ Arrivant au purgatoire, chacun de 14 anciens vivants est une épreuve de Bernoulli :

Les 14 anciens vivants ne se connaissant pas sont indépendants les uns des autres. Par conséquent, ils forment un schéma de Bernoulli de 14 épreuves précédentes.
Par conséquent, la variable aléatoire X qui compte le nombre de croyants parmi les 14 anciens vivants suit la loi binomiale $B(14;0,3)$.

b.2. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(X=5)=\binom{14}{5}\times 0,3^5\times 0,7^9=2002\times 0,3^5\times 0,7^9\approx 0,196$$

Cette probabilité peut aussi se calculer directement avec la fonction dédiée de la calculatrice.

b.3. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(X\geq 6)=1-p(X<6)=1-p(X\leq 5)\approx 1-0,781=0,219$$

...en utilisant l'événement contraire et la fonction «cumul binomial» de la calculatrice.

c.1. La situation est similaire à celle décrite dans les questions **b** sauf que la variable aléatoire X suit désormais la loi binomiale $B(n;0,3)$.

La probabilité p_n est donnée par :

$$\begin{aligned} p_n &= p(X\geq 1)\\ &=1-p(X<1)=1-p(X=0)\\ &=1-\binom{n}{0}\times 0,3^0\times 0,7^n=1-1\times 1\times 0,7^n=1-0,7^n \end{aligned}$$

c.2. On cherche la valeur de n pour laquelle :

$$p(X\geq 1)>99,99\% \quad\Leftrightarrow\quad p_n>0,9999 \quad\Leftrightarrow\quad 1-0,7^n>0,9999$$

$$\xrightarrow{-1}\ -0,7^n>-0,0001\ \xrightarrow{\times(-1)}\ 0,7^n<0,0001$$

$$\xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\ln}\ n\times\ln(0,7)<\ln(0,0001)$$

$$\xrightarrow[\text{qui est négatif}]{\div\ln(0,7)}\ n>\frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,7)}\approx 25,82$$

<u>Conclusion :</u> pour que la probabilité qu'il y ait au moins un croyant dans le groupe soit supérieure à 99,99%, il faut qu'il y ait au moins 26 personnes dans ce dernier.

L'improbable vie continue de Toto

L'énoncé

a. Le cours de mathématiques vient de débuter et Toto est au tableau. Il a à résoudre un exercice où il est question d'une variable aléatoire continue X prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et qui est uniformément distribuée sur l'intervalle $[-27;-7]$.

1. Donner l'expression de la densité de probabilité f de la loi de probabilité de X.
2. Calculer la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[-30;-15[$.
3. Donner l'espérance mathématique $E(X)$.

b. C'est enfin la pause et Toto va pouvoir jouer à son jeu vidéo préféré sur son téléphone portable. On appelle S la variable aléatoire continue égale au score (au nombre de points) que fait un joueur au cours d'une partie de ce jeu.
Des études ont montré que cette variable aléatoire S qui prend ses valeurs dans $[0;+\infty[$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Rappeler la densité de probabilité de la loi de probabilité de S.
   Démontrer que $p(S\in[0;1000])=1-e^{-1000\lambda}$.
2. On sait qu'exactement 50% des parties se terminent avec un score S inférieur ou égal à 1000 points.
   Déterminer la valeur exacte du paramètre λ.

Dans la suite de cette partie, nous supposerons que $\lambda=0,000693$. Les probabilités retournées seront arrondies au millième près.

3. Calculer la probabilité que Toto dépasse les 2000 points à l'occasion d'une partie.
4. Toto est excité comme jamais ! Il vient de franchir le cap des 2000 points.
   Calculer la probabilité qu'il ne dépasse pas les 3000 points lors de la partie en cours.
5. Calculer l'espérance mathématiques $E(S)$.
   Quelle est la signification de cette grandeur pour Toto ?
6. Au cours d'une pause particulièrement longue, Toto réussit à faire 9 parties de suite qui sont indépendantes les unes des autres. A la fin de chaque partie, le score est remis à zéro.
   Calculer la probabilité que, sur au moins 4 parties, son score dépasse les 2000 points.

c. Il est midi ! Et à midi, c'est ravioli à la cantine du lycée ! Ils sont conditionnés en barquettes de 275 grammes par la machine de la cuisine centrale. Sauf que la machine étant imparfaite, ces barquettes pèsent environ 275 grammes.
On appelle M la masse exprimée en grammes d'une barquette servie à la cantine.
La variable aléatoire continue M suit la loi normale d'espérance mathématique 275 et d'écart-type 7.

Les probabilités demandées seront arrondies au millième près.

1. Calculer la probabilité qu'une barquette de ravioli servie à la cantine ait une masse comprise entre 260 et 278 grammes.
2. On sait qu'une barquette pèse plus de 280 grammes. Calculer la probabilité qu'elle pèse moins de 290 grammes.
3. Sur les barquettes de la cuisine centrale, il est indiqué qu'exactement 77% des barquettes contiennent plus de *m* grammes de ravioli.
   Déterminer cette masse minimale *m* au dixième de gramme près par défaut.

d. Le déjeuner passé, Toto entame sa sieste quotidienne de début d'après-midi qui dure entre une et deux heures. On appelle D la variable aléatoire continue égale à la durée exprimée en heures de la sieste de Toto.
D prend ses valeurs dans l'intervalle $[1;2]$ et sa loi de probabilité a pour densité la fonction $f(t)=0,6\times t^2-0,6\times t+\dfrac{1}{t^2}$.

1. Déterminer une expression d'une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Démontrer que la fonction f est bien une densité de probabilité sur l'intervalle $[1;2]$.
3. Déterminer une valeur approchée au millième-près de la probabilité que la sieste de Toto dure entre 1 heure 20 et 1 heure 40.
4. Calculer l'espérance mathématique $E(D)$. On donnera d'abord la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième près.
   Conclure.

Le corrigé

a.1. D'après un résultat du cours, la densité de probabilité de la loi de probabilité de la variable X est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{1}{(-7)-(-27)}=\dfrac{1}{20}=0,05 & \text{si } t\in[-27;-7] \\ f(t)=0 & \text{si } t\in]-\infty;-27[\cup]-7;+\infty[\end{cases}$$

a.2. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p\left(X\in[-30;-15[\right)=p\left(X\in[-30;-27[\right)+p\left(X\in[-27;-15[\right)$$
$$=0+\frac{(-15)-(-27)}{(-7)-(-27)}=\frac{12}{20}=\boxed{0,6}$$

a.3. La variable aléatoire continue X étant uniformément distribuée, son espérance mathématique $E(X)$ est donnée par la formule :

$$E(X)=\frac{(-27)+(-7)}{2}=\frac{-34}{2}=\boxed{-17}$$

b.1. La densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre λ suivie par par la variable aléatoire continue S est la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$$

➲ La probabilité demandée est donnée par l'intégrale :

$$p\left(S\in[0;1000]\right)=\int_0^{1000}\lambda e^{-\lambda t}dt$$
$$=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{1000}=\left(-e^{-\lambda\times 1000}\right)-\left(-e^{-\lambda\times 0}\right)=-e^{-1000\lambda}+e^0=\boxed{1-e^{-1000\lambda}}$$

b.2. La probabilité que la variable aléatoire S appartienne à l'intervalle $[0;1000]$ est égale à 0,5. Ce fait nous amène à résoudre l'équation suivante d'inconnue λ :

$$p\left(S\in[0;1000]\right)=0,5 \Leftrightarrow 1-e^{-1000\lambda}=0,5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-1000\lambda}=0,5 \xrightarrow{\text{Ln}} -1000\lambda=\ln(0,5)$$
$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{-\ln(2)}{-1000}=\boxed{\frac{\ln(2)}{1000}\approx 0,000693}$$

b.3. En utilisant les formules vues dans le cours, il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(S\geq 2000)=e^{-2000\times\lambda}=\boxed{e^{-1,386}\approx 0,250}$$

b.4. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle :

$$p(S<3000 \text{ sachant } S\geq 2000)=\frac{p(S<3000 \ \underline{\text{et}}\ S\geq 2000)}{p(S\geq 2000)}$$
$$=\frac{p\left(S\in[2000;3000[\right)}{p(S\geq 2000)}$$
$$=\frac{e^{-2000\lambda}-e^{-3000\lambda}}{e^{-1,386}}=\frac{\cancel{e^{-1,386}}}{\cancel{e^{-1,386}}}-\frac{e^{-2,079}}{e^{-1,386}}$$
$$=\boxed{1-e^{-0,693}\approx 0,500}$$

Ce résultat était prévisible du fait que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement.

b.5. S suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000693$, son espérance mathématique est donnée par la formule :

$$E(S) = \frac{1}{\lambda} \approx \boxed{1443 \text{ points}}$$

Il s'agit là du score moyen que peut espérer faire Toto sur un très grand nombre de parties.

b.6. Chaque partie est pour Toto une épreuve de Bernoulli :

Va-t-il dépasser les 2000 points au cours de la partie ?
- 0,25 → *Oui (Succès)*
- 0,75 → *Non (Échec)*

Les neuf parties qui sont indépendantes les unes des autres, forment un schéma de Bernoulli. Par suite, la variable aléatoire N qui compte le nombre de succès au cours des 9 épreuves suit la loi binomiale $B(9;0{,}25)$.

La probabilité qui nous est demandée est :

$$p(N \geq 4) = \overbrace{1 - p(N<4) = 1 - p(N \leq 3) \approx 1 - 0{,}834}^{\text{On va chercher l'événement contraire pour utiliser la fonction de cumul binomial de la calculatrice}} = \boxed{0{,}166}$$

c.1. Avec la fonction ad-hoc de la calculatrice, il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(M \in [260;278]) \approx \boxed{0{,}650}$$

c.2. Il s'agit la probabilité conditionnelle :

$$p(M \leq 290 \text{ sachant } M \geq 280) = \frac{p(M \leq 290 \ \underline{\text{et}}\ M \geq 280)}{p(M \geq 280)}$$

$$= \frac{p(M \in [280;290])}{p(S \geq 280)} \approx \frac{0{,}2215}{0{,}2375} \approx \boxed{0{,}932}$$

c.3. On cherche la valeur de m pour laquelle :

$$p(X \geq m) = 0{,}77 \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{p(X<m) = 1 - 0{,}77 = 0{,}23 \quad \Leftrightarrow \quad m \approx 269{,}8 \text{ grammes}}^{\text{En utilisant la fonction d'inversion de la loi normale de la calculatrice}}$$

d.1. Une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction $f(t) = 0{,}6 \times t^2 - 0{,}6 \times t + \frac{1}{t^2}$ est la fonction $F(t) = 0{,}6 \times \frac{t^3}{3} - 0{,}6 \times \frac{t^2}{2} - \frac{1}{t} = \boxed{0{,}2t^3 - 0{,}3t^2 - \frac{1}{t}}$

d.2. La fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[1;2]$ car :

- f est <u>définie</u> et dérivable donc <u>continue</u> sur $]0;+\infty[$ sur l'intervalle $[1;2]$.
- f est strictement positive sur l'intervalle $[1;2]$ car $f(t) = \overbrace{\overbrace{0{,}6t}^{\oplus} \times \overbrace{(t-1)}^{\oplus \text{ ou } 0 \text{ car } t \geq 1}}^{\oplus \text{ ou } 0} + \overbrace{\frac{1}{t^2}}^{\oplus}$.

  C'est une somme de termes positifs dont l'un l'est strictement.
- L'intégrale sous la courbe de f prise sur l'intervalle $[1;2]$ vaut 1.

$$\int_{[1;2]} f(t)\,dt = \int_1^2 f(t)\,dt = [F(t)]_1^2$$
$$= F(2) - F(1)$$
$$= \left(0{,}2 \times 2^3 - 0{,}3 \times 2^2 - \frac{1}{2}\right) - \left(0{,}2 \times 1^3 - 0{,}3 \times 1^2 - \frac{1}{1}\right)$$
$$= (1{,}6 - 1{,}2 - 0{,}5) - (0{,}2 - 0{,}3 - 1)$$
$$= (-0{,}1) - (-1{,}1) = \boxed{1}$$

d.3. Un tiers d'une heure représentant 20 minutes, 1 heure 20 représente $\frac{4}{3}$ d'heure et 1 heure 40 en vaut $\frac{5}{3}$. Donc, il s'agit de calculer la probabilité :

$$p\left(D \in \left[\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right]\right) = \int_{4/3}^{5/3} f(t)\,dt = [F(t)]_{4/3}^{5/3}$$
$$= F\left(\frac{5}{3}\right) - F\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$= \underbrace{\left(0{,}2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 0{,}3 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{1}{5/3}\right)}_{-0{,}5074} - \underbrace{\left(0{,}2 \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 0{,}3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{4/3}\right)}_{-0{,}8092}$$
$$= \frac{163}{540} \approx \boxed{0{,}302}$$

<u>Conclusion :</u> la probabilité que Toto dorme entre 1 heure 20 et 1 heure 40 est de 0,302.

d.4. L'espérance de la variable aléatoire D est donnée par la formule :

$$E(S) = \int_1^2 t \times f(t)\,dt = \int_1^2 \left(0{,}6 \times t^3 - 0{,}6 \times t^2 + \frac{1}{t}\right)dt$$

Or, une primitive de $g(t)=0,6\times t^3-0,6\times t^2+\frac{1}{t}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est la fonction :

$$G(t)=0,6\times\frac{t^4}{4}-0,6\times\frac{t^3}{3}+\ln(t)=\boxed{0,15t^4-0,2t^3+\ln(t)}\ .$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}E(D)&=\int_1^2 g(t)\,dt=\left[G(t)\right]_1^2\\&=G(2)-G(1)\\&=\left(0,15\times2^4-0,2\times2^3+\ln(2)\right)-\left(0,15\times1^4-0,2\times1^3+\ln(1)\right)\\&=\left(2,4-1,6+\ln(2)\right)-\left(0,15-0,2+0\right)=0,85+\ln(2)\approx\boxed{1,543\text{ heures}}\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> à chaque sieste, Toto peut espérer dormir un peu moins d'une heure et 33 minutes...en moyenne.

Toc toc badaboum !

L'énoncé

a. *La Blancoise des farces et attrapes* vient de lancer la production d'un nouveau type de bombe atomique : la *Tookipait*. Chacune de ses armes doit délivrer une puissance d'environ 127kt (comprenez kilotonnes, c'est-à-dire la puissance équivalente à 127 000 tonnes de TNT).

On appelle X la puissance exprimée en kilotonnes délivrée par une bombe *Tookipait*. Des études ont montré que la variable aléatoire continue X suivait la loi normale d'espérance 127 et d'écart-type 7,5.

1. Calculer la probabilité qu'une bombe délivre une puissance comprise entre 125 et 130 kilotonnes. On arrondira le résultat au millième près.
2. Déterminer le réel positif a pour lequel $P\left(X\in[127-a;127+a]\right)=0,6$. La valeur de a retournée sera arrondie au dixième près.
   Quelle est la signification de ce résultat ?

b. La compagnie commercialise un autre modèle de bombe : la *Padreugray*. La puissance Y exprimée en kilotonnes délivrée par cette bombe est une variable aléatoire continue suivant la loi normale d'espérance $\mu=255$ kt mais d'écart-type σ inconnu.

On appelle Z la variable aléatoire définie par : $Z=\dfrac{Y-255}{\sigma}$.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z ?
2. On sait que $P(Y\leq 260)=0,7$. Déterminer l'écart-type σ. On donnera une valeur approchée au dixième près.

c. Le président de la *Blancoise des farces et attrapes* affirme que les deux tiers de ses clients sont des femmes. Pour corroborer cette affirmation, un institut d'études d'opinion a réalisé un sondage sur un échantillon de 783 clients de la compagnie choisis au hasard.

On appelle f la fréquence observée sur cet échantillon

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence f. On écrira les formules adéquates et on arrondira ses bornes au millième près.
2. L'institut a compté qu'il y avait 503 femmes dans l'échantillon de 783 clients.
   Au regard de ce résultat, peut-on considérer, au seuil de 95%, que l'affirmation du président de la compagnie est fondée ?

d. Tous les ans, l'institut d'études d'opinion réalise une enquête de satisfaction sur les clients de la *Blancoise des farces et attrapes*.

- En mai 2014, elle avait interrogé 527 clients pris au hasard et 347 s'étaient déclarés satisfaits par les produits de la compagnie.
- En mai 2015, elle a interrogé 389 clients toujours choisis au hasard et 290 d'entre eux ont déclarés être satisfaits par les produits de la compagnie.

1. On considère que toutes les conditions requises pour pouvoir parler d'intervalles de confiance au seuil de 95 % sont réunies.
   Déterminer pour chaque échantillon un intervalle de confiance au seuil de 95% de la proportion de clients satisfaits. Les bornes seront arrondies au millième près.
2. Ces intervalles de confiance permettent-ils, au niveau de confiance 0,95, de considérer que les clients ont été plus satisfaits en mai 2015 qu'en mai 2014.
3. La *Blancoise des farces et attrapes* souhaite obtenir un intervalle de confiance au seuil de 95% dont la longueur serait inférieure à 0,02. Combien l'échantillon constitué doit-il alors compter de clients ?

Le corrigé

a.1. En utilisant la fonction ad hoc de la calculatrice, la probabilité qu'une bombe délivre entre 125 et 130 kilotonnes est donnée par :

$$P\left(X \in [125;130]\right) \approx 0{,}261$$

a.2. La densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}(127;7{,}5)$ étant symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = 127$, nous avons que :

$$P\left(X \in [127-a;127+a]\right) = 2\times P\left(X \in [127;127+a]\right)$$

A partir de là, nous cherchons le réel positif a pour lequel :

$$\begin{aligned}
P\left(X \in [127-a;127+a]\right) = 0{,}6 &\Leftrightarrow 2\times P\left(X \in [127;127+a]\right) = 0{,}6\\
&\Leftrightarrow P\left(X \in [127;127+a]\right) = 0{,}3\\
&\Leftrightarrow P(X<127) + P\left(X \in [127;127+a]\right) = 0{,}5+0{,}3\\
&\Leftrightarrow P(X \leq 127+a) = 0{,}8\\
&\Leftrightarrow 127+a = \overbrace{\text{InversionNormale}(0{,}8)}^{\text{avec } \mu=127 \text{ et } \sigma=7{,}5} \approx 133{,}3\\
&\Leftrightarrow a \approx 6{,}3
\end{aligned}$$

Conclusion : il y a 60% de chance que la puissance délivrée par une bombe *Tookipait* se trouve entre 120,7 et 133,3 kilotonnes.

b.1. Par définition, si la variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}\left(255;\sigma^2\right)$, alors la variable aléatoire centrée réduite Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

b.2. Nous avons l'équivalence :

$$Y \leq 260 \underset{+255}{\overset{-255}{\rightleftarrows}} Y-255 \leq 5 \underset{\times\sigma}{\overset{\div\sigma}{\rightleftarrows}} Z = \frac{Y-255}{\sigma} \leq \frac{5}{\sigma}$$

Ainsi, vient-il :

$$P(Y \leq 260) = 0{,}7 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}7 \Leftrightarrow \frac{5}{\sigma} = \overbrace{\text{InversionNormale}(0{,}7)}^{\text{avec pour espérance 0 et écart-type 1}} \approx 0{,}524$$

Nous en concluons que l'écart-type σ est égal à $\frac{5}{0{,}524} \approx 9{,}5$

c.1. D'abord, remarquons que toutes les conditions pour parler d'intervalle de fluctuation sont remplies :

$$\begin{aligned}
&n = 783 \geq 30\\
&n\times p = 783\times\frac{2}{3} = 522 \geq 5\\
&n\times(1-p) = 783\times\frac{1}{3} = 261 \geq 5
\end{aligned}$$

Ensuite, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence f a pour bornes :

$$\begin{aligned}
&\text{Borne inférieure } = p - 1{,}96\times\sqrt{\frac{p\times(1-p)}{n}} = \frac{2}{3} - 1{,}96\times\sqrt{\frac{1/3\times 2/3}{783}} \approx 0{,}634\\
&\text{Borne supérieure } = p + 1{,}96\times\sqrt{\frac{p\times(1-p)}{n}} = \frac{2}{3} + 1{,}96\times\sqrt{\frac{1/3\times 2/3}{783}} \approx 0{,}700
\end{aligned}$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $[0{,}634;0{,}700]$

c.2. La fréquence f de femmes observée sur l'échantillon est égale à $f = \frac{503}{783} \approx 0{,}642$.

Cette dernière n'appartenant pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique précédent, on peut considérer que l'affirmation du président de la compagnie est fondée au seuil de risque 5%

d.1. La fréquence de clients satisfaits observée sur l'échantillon *mai 2014* est :

$$f_{14} = \frac{347}{527} \approx 0{,}658$$

La proportion p_{14} de clients satisfaits en 2014 appartient avec une probabilité d'au moins 95% à l'intervalle de confiance qu'est

$$\left[f_{14} - \frac{1}{\sqrt{n_{14}}}; f_{14} + \frac{1}{\sqrt{n_{14}}}\right] = \overbrace{[0{,}614;0{,}703]}^{\text{En minorant la borne inf, en majorant la borne sup.}}$$

La fréquence de clients satisfaits observée sur l'échantillon *mai 2015* est :

$$f_{15}=\frac{290}{389}\approx \boxed{0,746}$$

La proportion p_{15} de clients satisfaits en 2015 appartient avec une probabilité d'au moins 95% à l'intervalle de confiance qu'est $\left[f_{15}-\frac{1}{\sqrt{n_{15}}};f_{15}+\frac{1}{\sqrt{n_{15}}}\right]=\boxed{[0,694;0,797]}$

d.2. Les deux intervalles de confiance se chevauchant, il n'est pas exclu que la proportion p_{15} soit inférieure ou égale à la proportion p_{14}. Par conséquent, on ne peut pas déduire des résultats précédents que les clients étaient plus satisfaits en mai 2015 qu'en mai 2014.

d.3. La longueur d'un intervalle de confiance au seuil de 95% se rapportant à un échantillon de n individus est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

On veut savoir pour quelles valeurs de n on a :

$$\frac{2}{\sqrt{n}}\le 0,02 \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]0;+\infty[]{\text{Inverse}} \frac{\sqrt{n}}{2}\ge\frac{1}{0,02} \xrightarrow{\times 2} \sqrt{n}\ge\frac{2}{0,02}=100$$

$$\xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Carré}} n\ge 100^2=\boxed{10000}$$

<u>Conclusion :</u> pour que l'intervalle de confiance au seuil de 95% ait une longueur au plus égale à 0,02, il faut que l'échantillon compte au moins 10000 individus.

Suites

Harry Métik vs. Jay O'Maytrick

L'énoncé

La suite (u_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{4}{11} \times u_n - 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

a. Sur le graphique ci-contre, construire sur l'axe des abscisses (Ox) à la seule règle et sans calculs les quatre premiers termes $u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3$ de la suite (u_n).

b. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$P_n \quad : \quad -4 \leq u_{n+1} < u_n \leq 3$$

Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ? On justifiera sa réponse.

c. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

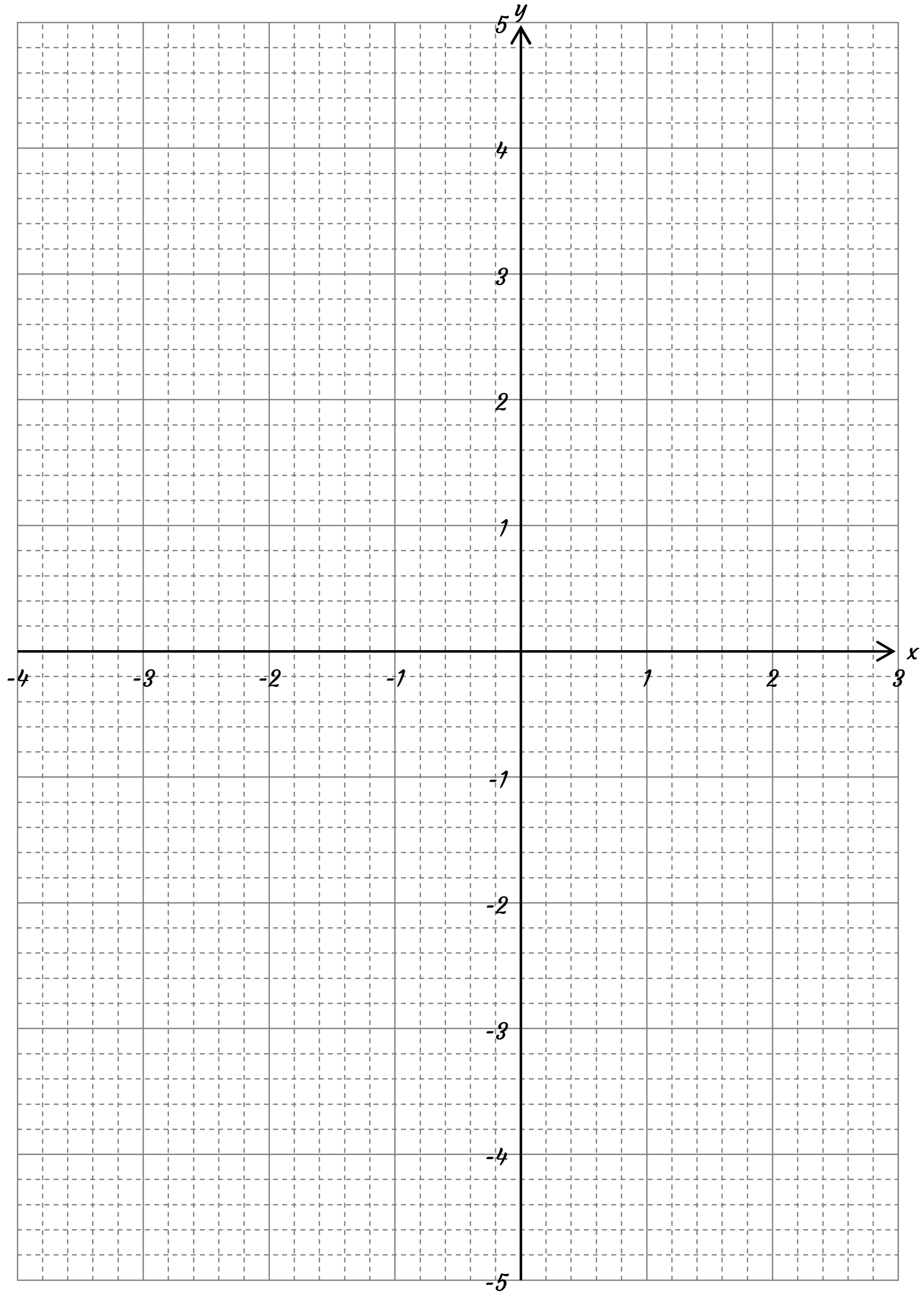
$$a_n = u_n + \frac{22}{7}$$

1. Démontrer que la suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{4}{11}$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{36}{7} \times \left(\frac{4}{11}\right)^n - \frac{22}{7}$
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

d. On considère l'algorithme suivant :

```
L'entier n vaut 0 et le réel u est égal à 2
Tant que u>-3,14
        n prend la valeur n+1
        u prend la valeur 4/11×u-2
En sortie, afficher la valeur de n
```

Que permet de faire cet algorithme ? Quelle est la valeur de n affichée à son issue ?



Le corrigé

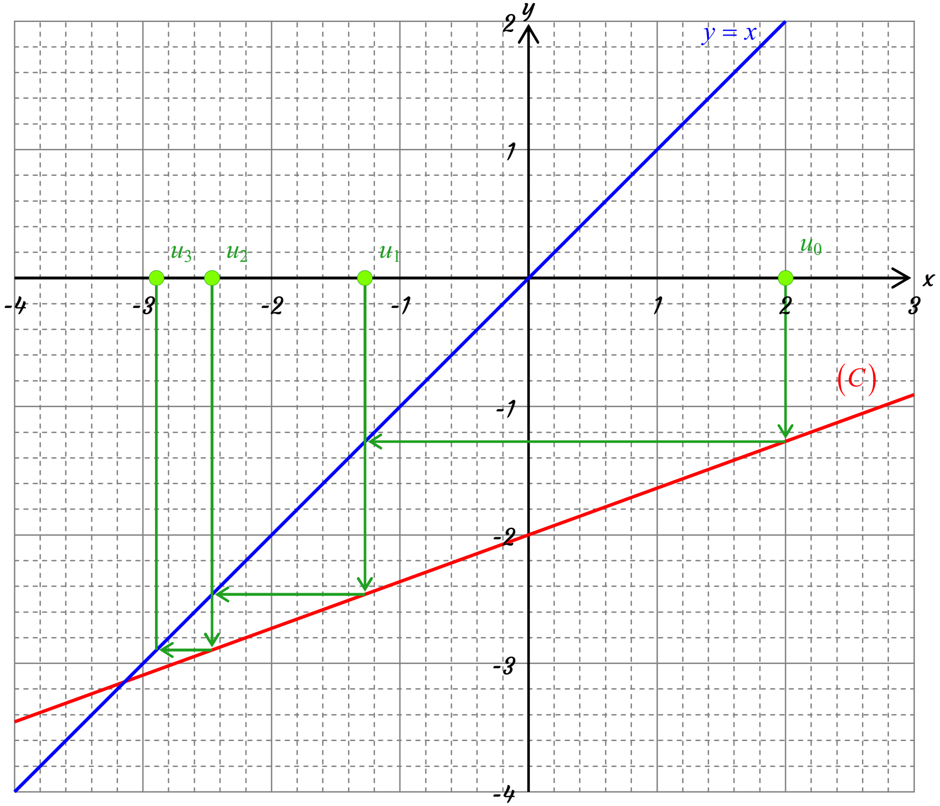
a. On passe d'un terme de la suite au suivant en appliquant la fonction $f(x)=\dfrac{4}{11}x-2$.

$$u_0 \xrightarrow{f} u_1=f(u_0) \xrightarrow{f} u_2 \quad \ldots \quad u_n \xrightarrow{f} u_{n+1}=\frac{4}{11}u_n-2=f(u_n) \quad \ldots$$

Afin d'effectuer la construction, on trace préalablement deux droites : la première est la courbe (C) représentant la fonction *f*; la seconde qui est la première bissectrice du plan a pour équation $y=x$.

On place u_0 sur l'axe des abscisses. Se projetant verticalement sur la courbe (C), le point rencontré a pour coordonnées $(u_0; f(u_0)=u_1)$. On ramène cette ordonnée u_1 sur l'axe des abscisses en se projetant horizontalement sur la première bissectrice du plan. On aboutit alors au point de coordonnées $(u_1;u_1)$.

Pour obtenir u_2, on recommence le processus à repartant de u_1.



b. Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$P_n \quad : \quad -4 \le u_{n+1} < u_n \le 3.$$

- Au premier rang pour $n=0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

Nous avons $\boxed{u_0=2}$

$$u_1=\frac{4}{11}u_n-2=\frac{4}{11}\times 2-2=\frac{8}{11}-\frac{22}{11}=\boxed{-\frac{14}{11}}$$

Ayant bien $-4 \le u_1 < u_0 \le 3$, la propriété P_0 est donc vraie.

- Le principe de récurrence ou de propagation ou, hérédité

Supposons que la propriété P_k soit vraie jusqu'à un certain entier n.

La propriété P_{n+1} est-elle alors vraie ?

Comme la propriété P_n est (supposée) vraie, alors nous pouvons écrire :

$$-4 \le u_{n+1} < u_n \le 3 \xrightarrow{\times\frac{4}{11}} -\frac{16}{11} \le \frac{4}{11}\times u_{n+1} < \frac{4}{11}\times u_n \le \frac{12}{11}$$

$$\xrightarrow{-2} -\frac{38}{11} \le \underbrace{\frac{4}{11}\times u_{n+1}-2}_{u_{n+2}} < \underbrace{\frac{4}{11}\times u_n-2}_{u_{n+1}} \le -\frac{10}{11}$$

Comme $-\dfrac{38}{11} > \dfrac{-44}{11}=-4$ et $-\dfrac{10}{11}<3$, alors finalement $-4 \le u_{n+2} < u_{n+1} \le 3$.

Donc la propriété P_{n+1} est alors vraie. Le principe de récurrence est établi.

➲ La propriété qui vient d'être établie a deux conséquences :

Pour tout entier n, $u_n > u_{n+1} \Rightarrow (u_n)$ est strictement décroissante.

Pour tout entier n, $u_n \ge -4 \Rightarrow (u_n)$ est minorée par -4

Conclusion : la suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.

c.1/2. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$a_{n+1}=u_{n+1}+\frac{22}{7}$$

$$=\underbrace{\frac{4}{11}\times u_n-2}_{u_{n+1}}+\frac{22}{7}=\frac{4}{11}\times u_n-\frac{14}{7}+\frac{22}{7}=\frac{4}{11}\times u_n+\frac{8}{7}$$

$$=\frac{4}{11}\times\Big(\underbrace{a_n-\frac{22}{7}}_{u_n}\Big)+\frac{8}{7}=\frac{4}{11}\times a_n-\frac{4}{\cancel{11}}\times\frac{2\times\cancel{11}}{7}+\frac{8}{7}=\frac{4}{11}\times a_n-\frac{8}{7}+\frac{8}{7}=\boxed{\frac{4}{11}\times a_n}$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q=\frac{4}{11}$ et de premier terme :

$$a_0=u_0+\frac{22}{7}=2+\frac{22}{7}=\frac{14}{7}+\frac{22}{7}=\frac{36}{7}$$

Par conséquent, le terme général de la suite annexe (a_n) est donnée par :

$$a_n=a_0\times q^n=\frac{36}{7}\times\left(\frac{4}{11}\right)^n$$

Nous en déduisons :

$$a_n=u_n+\frac{22}{7}\quad\Leftrightarrow\quad u_n=a_n-\frac{22}{7}=\frac{36}{7}\times\left(\frac{4}{11}\right)^n-\frac{22}{7}$$

c.3. Nous pouvons écrire :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{36}{7}\times\underbrace{\boxed{\left(\frac{4}{11}\right)^n}}_{q\in]0;1[}-\frac{22}{7}=\frac{36}{7}\times0^+-\frac{22}{7}=0^+-\frac{22}{7}=-\frac{22}{7}$$

d. L'algorithme proposé calcule successivement tous les termes de la suite (u_n) jusqu'à ce qu'ils deviennent inférieurs ou égaux à $-3{,}14$.
En utilisant la calculatrice (tableau de valeurs de la suite ou calcul successif de tous ses termes), on détermine que la variable U qui est aussi le terme u_n devient inférieure ou égale à $-3{,}14$ à partir de $n=8$.

Tiercé gagnant...ou pas

L'énoncé

Cet exercice est constitué de trois sous-parties indépendantes.

a. La suite (u_n) est arithmétique et est telle que $\begin{cases}u_{100}=37\\u_{250}=59\end{cases}$

Calculer la somme de termes consécutifs $S=\underbrace{u_{100}+u_{101}+u_{102}+\ldots+u_{1000}}_{\text{Somme de tous les termes de la suite }(u_n)\text{ entre les rangs 100 et 1000}}$

b. Déterminer la limite de suite (u_n) définie pour entier strictement positif n par :

$$u_n=\frac{(-3)^n}{5^n-2^n}$$

c. La suite (u_n) est définie pour tout entier strictement positif n par :

$$u_n=\frac{1-e^{\sin(n)}}{1+\ln(n)}$$

1. Démontrer que, pour tout entier strictement positif n, on a :

$$\frac{1-e}{1+\ln(n)}\leq u_n\leq\frac{1-\frac{1}{e}}{1+\ln(n)}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Le corrigé

a. La somme des 901 termes consécutifs de la suite arithmétique (u_n) est donnée par la formule :

$$S=\underbrace{u_{100}+u_{101}+u_{102}+\ldots+u_{1000}}_{\text{Somme de 901 termes consécutifs}}=901\times\frac{u_{100}+u_{1000}}{2}$$

L'obtention de la valeur du terme u_{1000} passe par la connaissance de la raison r de la suite.
Cette dernière vérifie l'égalité :

$$u_{250}=u_{100}+(250-100)\times r\quad\Leftrightarrow\quad 59=37+150\times r\quad\Leftrightarrow\quad 150\times r=22$$
$$\Leftrightarrow\quad r=\frac{22}{150}=\frac{11}{75}$$

Le terme u_{1000} est alors donné par l'égalité :

$$u_{1000} = u_{100} + (1000-100)\times r = 37 + 900\times\frac{11}{75} = 37+132 = \boxed{169}$$

Finalement, nous en concluons à propos de la somme S :

$$S = 901\times\frac{u_{100}+u_{1000}}{2} = 901\times\frac{37+169}{2} = 901\times\frac{206}{2} = \boxed{92803}$$

b. De prime abord, nous pouvons écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-3)^n}{5^n-2^n} = \frac{\boxed{\text{no limite}}}{(+\infty)-(+\infty)} = \boxed{\frac{\boxed{???}}{\boxed{\text{Forme indéterminée}}}}$$

Pour lever cette indétermination, nous allons juste factoriser le dénominateur par son terme nous semblant plus fort : 5^n .

Pour tout entier strictement positif n, nous avons :

$$u_n = \frac{(-3)^n}{5^n-2^n} = \frac{(-3)^n}{5^n}\times\frac{1}{1-\frac{2^n}{5^n}} = \left(-\frac{3}{5}\right)^n\times\frac{1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\times\frac{1}{1-0^+} = \boxed{0}$$

c.1. Pour tout entier strictement positif n, nous pouvons écrire :

$$-1\le\sin(n)\le 1 \xrightarrow[\substack{\text{Croissante}\\ \text{sur } \mathbb{R}}]{\text{Exponentielle}} e^{-1}\le e^{\sin(n)}\le e^1 \xrightarrow[\substack{\text{qui est}\\ \text{négatif}}]{\times(-1)} -\frac{1}{e}\ge -e^{\sin(n)}\ge -e$$

$$\xrightarrow{+1} 1-e\le 1-e^{\sin(n)}\le 1+\frac{1}{e}$$

$$\xrightarrow[\text{qui est positif}]{\div(1+\ln(n))} \boxed{\frac{1-e}{1+\ln(n)}\le u_n\le\frac{1-\frac{1}{e}}{1+\ln(n)}}$$

c.2. Déterminons les limites des suites constituant les membres de gauche et de droite de notre encadrement.

A gauche : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-e}{1+\ln(n)} = \frac{\text{réel négatif}}{1+(+\infty)} = \frac{\text{réel négatif}}{+\infty} = \boxed{0^-}$

A droite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e}}{1+\ln(n)} = \frac{\text{réel positif}}{1+(+\infty)} = \frac{\text{réel positif}}{+\infty} = \boxed{0^+}$

Etant encadré par deux suites tendant vers 0, la suite (u_n) tend elle aussi vers 0 en application du «théorème des gendarmes».

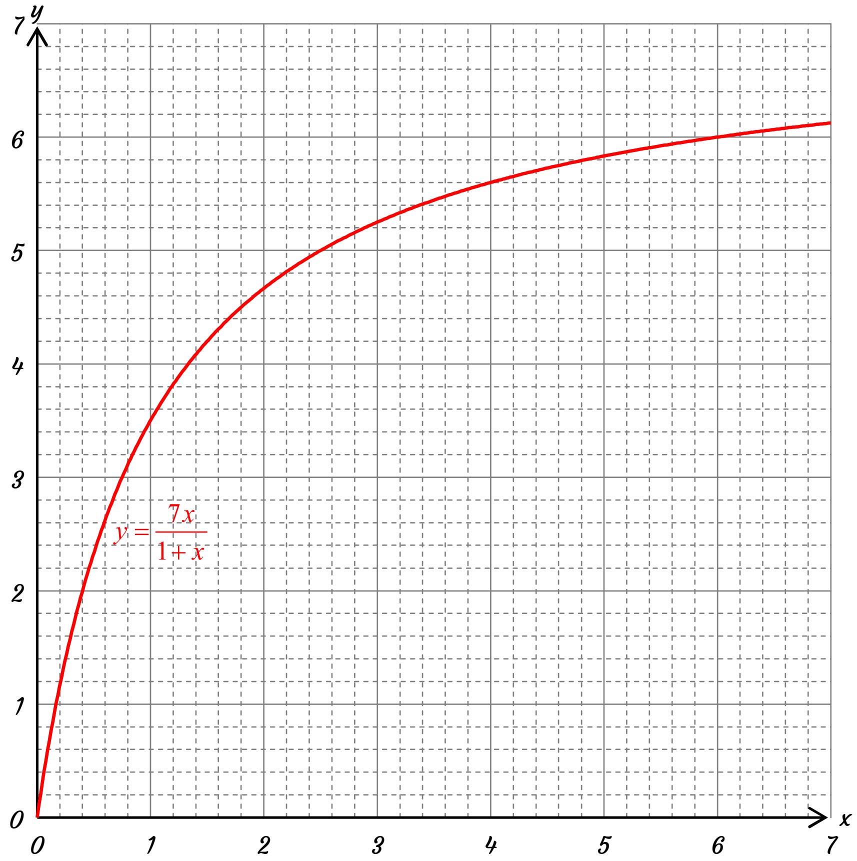
Massacre à la suiteçonneuse

L'énoncé

La suite (u_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n}{1+u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

a. Sur le graphique ci-dessous où l'on a tracé en rouge la courbe d'équation $y=\dfrac{7x}{1+x}$, construire à la seule règle sur l'axe des abscisses (Ox) les quatre premiers termes u_0 u_1 u_2 u_3 de la suite (u_n) .



b. Dans les trois algorithmes suivants, les variables i et n sont deux entiers naturels alors que la variable u est un réel.
Dans ces trois algorithmes, on demande à l'utilisateur de donner une valeur à l'entier n en entrée. Mais seulement deux de ces trois algorithmes calculent et affichent en sortie d'exécution la valeur du terme u_n.

Algorithme premier

```
Demander n
i=0
u=2
Tant que i<n
        i=i+1
        u=7u/(1+u)
Afficher u
```

Algorithme deuxième

```
Demander n
u=2
Pour i=0 jusqu'à n
        u=7u/(1+u)
Afficher u
```

Algorithme troisième

```
Demander n
u=2
Pour i=1 jusqu'à n
        u=7u/(1+u)
Afficher u
```

Parmi les trois algorithmes précédents, lequel ne calcule pas et n'affiche pas en sortie d'exécution la valeur du terme u_n ? On expliquera son choix.

c. Dans ces questions, on s'intéresse à l'éventuelle convergence de la suite (u_n).

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $x \neq -1$, on ait :
$$\frac{7x}{1+x} = a + \frac{b}{1+x}$$
2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :
$$P_n \quad : \quad 0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 7$$
3. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

d. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
$$a_n = \frac{2u_n}{6-u_n}$$

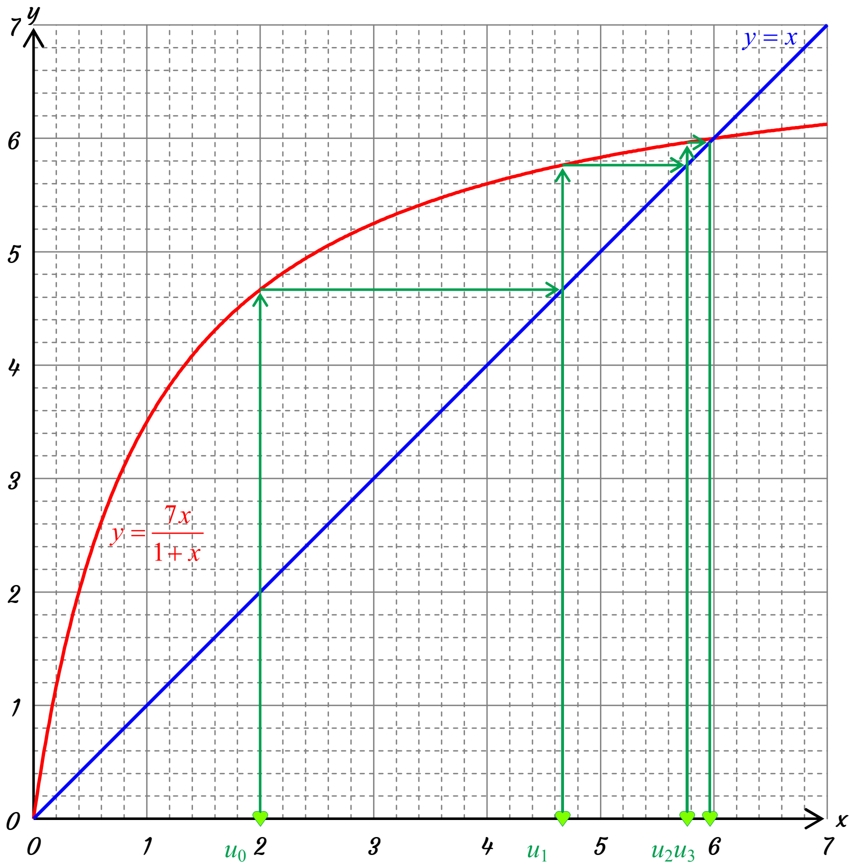
4. Calculer a_0.
5. Démontrer que la suite (a_n) est géométrique de raison 7.
6. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{6 \times 7^n}{7^n + 2}$
7. En déduire la limite de la suite (u_n).

Le corrigé

a. On passe d'un terme de la suite au suivant en appliquant la fonction $f(x) = \dfrac{7x}{1+x}$.

$$u_0 \xrightarrow{f} u_1 = f(u_0) \xrightarrow{f} u_2 \quad \ldots \quad u_n \xrightarrow{f} u_{n+1} = \frac{7u_n}{1+u_n} = f(u_n) \quad \ldots$$

Afin d'effectuer la construction, on trace préalablement la première bissectrice du plan qui est la droite ayant pour équation $y = x$.
On place u_0 sur l'axe des abscisses. Se projetant verticalement sur la courbe (C), le point rencontré a pour coordonnées $(u_0 ; f(u_0) = u_1)$. On ramène cette ordonnée u_1 sur l'axe des abscisses en se projetant horizontalement sur la première bissectrice du plan. On aboutit alors au point de coordonnées $(u_1 ; u_1)$. Une projection verticale de ce dernier point sur l'axe des abscisses permet de construire le terme u_1 sur ce dernier axe.



b. Pour calculer le terme de rang n partant du terme de rang 0, il faut itérer n fois la formule de récurrence $u_{n+1}=\frac{7u_n}{1+u_n}$.

Dans le premier algorithme, la variable i prend successivement toutes les valeurs entières entre 0 et $n-1$ car i progresse d'une unité à chaque boucle `Tant que` et doit demeurer strictement inférieur à n. La formule de récurrence est appliquée à n reprises. Cet algorithme calcule le terme de rang n de la suite

Dans le deuxième algorithme, la variable i doit prendre toutes valeurs entières entre 0 et n.

Donc la boucle `Pour` effectue $n+1$ itérations de la formule de récurrence $u_{n+1}=\frac{7u_n}{1+u_n}$.

Une de trop ! Ce deuxième algorithme calcule la valeur du terme de rang $n+1$.

A contrario, dans le troisième algorithme, la variable i prend bien n valeurs de 1 à i. Celui-ci calcule donc bien le terme de rang n de la suite

Une autre façon de voir ce qui foire : pour mieux se rendre compte de qui fait quoi, on peut aussi exécuter les algorithmes en prenant une petite valeur de n comme 1 ou 2.

Prenons $n=2$. Un bon algorithme doit retourner $u_2=98/17$

Algorithme premier	*Algorithme deuxième*	*Algorithme troisième*
`n=2  i=0  u=2` $=u_0$	`n=2  u=2` $=u_0$	`n=2  u=2` $=u_0$
`TQ: comme i<2, boucle`	`Pour i=0` jusqu'à 2	`Pour i=1` jusqu'à 2
`i=i+1` $=1$	`u=7u/(1+u)` $=u_1$	`u=7u/(1+u)` $=u_1$
`u=7u/(1+u)` $=u_1$	`Pour i=1`	`Pour i=2`
`TQ: comme i<2, boucle`	`u=7u/(1+u)` $=u_2$	`u=7u/(1+u)` $=u_2$
`i=i+1` $=2$	`Pour i=2`	La valeur finale de u est bien égale à u_2
`u=7u/(1+u)` $=u_2$	`u=7u/(1+u)` $=u_3$	
`TQ: comme i=2, break!`	La valeur finale de u est égale à u_3	
La valeur finale de u est bien égale à u_2		

Le mauvais algorithme est bien le deuxième : il effectue une boucle en trop.

c.1. Pour tout réel $x\neq-1$, nous pouvons écrire :

$$\frac{7x}{1+x}=\frac{\overbrace{7\times(1+x)-7}^{7x}}{1+x}=\frac{7\times\cancel{(1+x)}}{\cancel{1+x}}+\frac{-7}{1+x}=\boxed{7-\frac{7}{1+x}}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, nous avons : $\boxed{u_{n+1}=7-\frac{7}{1+u_n}}$

c.2. Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété P_n : $0\leq u_n<u_{n+1}\leq 7$

- Au premier rang pour $n=0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

  Nous avons $u_0=2$
  $u_1=\frac{7u_0}{1+u_0}=\frac{7\times2}{1+2}=\frac{14}{3}<\frac{21}{3}$

  Comme nous avons $0\leq u_0<u_1\leq 7$, alors la propriété P_0 est donc vraie.

- Le principe de récurrence ou de propagation ou hérédité

  Supposons que la propriété P_k soit vraie jusqu'à un certain entier n.

  La propriété P_{n+1} est-elle alors vraie ?

  Comme la propriété P_n est (supposée) vraie, alors nous pouvons écrire :

$$0\leq u_n<u_{n+1}\leq 7\xrightarrow{+1}1\leq 1+u_n<1+u_{n+1}\leq 8$$
$$\xrightarrow[\text{sur }]0;+\infty[]{\text{Inverse Décroissante}}\frac{1}{1}\geq\frac{1}{1+u_n}>\frac{1}{1+u_{n+1}}\geq\frac{1}{8}$$
$$\xrightarrow{\times(-7)}-7\leq\frac{-7}{1+u_n}<\frac{-7}{1+u_{n+1}}\leq-\frac{7}{8}$$
$$\xrightarrow{+7}0\leq\underbrace{7-\frac{7}{1+u_n}}_{u_{n+1}}<\underbrace{7-\frac{7}{1+u_{n+1}}}_{u_{n+1}}\leq-\frac{7}{8}+7\leq 7$$

  Donc la propriété P_{n+1} est alors vraie. Le principe de récurrence est établi.

c.3. D'après ce qui précède :

Pour tout entier n, $u_n<u_{n+1}\Rightarrow(u_n)$ est strictement croissante.
Pour tout entier n, $u_n\leq 7\Rightarrow(u_n)$ est majorée par 7

<u>Conclusion :</u> la suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

d.1. Calculons $a_0=\frac{2\times u_0}{6-u_0}=\frac{2\times2}{6-2}=\frac{4}{4}=1$

d.2. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$a_{n+1}=\frac{2u_{n+1}}{6-u_{n+1}}=\frac{2\times\frac{7u_n}{1+u_n}}{6-\frac{7u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{14u_n}{1+u_n}}{\frac{6\times(1+u_n)-7u_n}{1+u_n}}=\frac{\frac{14u_n}{\cancel{1+u_n}}}{\frac{6-u_n}{\cancel{1+u_n}}}$$

$$=\frac{14u_n}{6-u_n}=\frac{7\times 2u_n}{6-u_n}=7\times\frac{2u_n}{6-u_n}=7\times a_n$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q=7$ et de premier terme $a_0=1$.

Par conséquent, pour tout entier naturel n, il vient :

$$a_n=a_0\times q^n=1\times 7^n=7^n$$

d.3. Connaissant l'expression de a_n en fonction de n, nous allons pouvoir déterminer celle du u_n. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$a_n=\frac{2u_n}{6-u_n} \Leftrightarrow 7^n\times(6-u_n)=2u_n \Leftrightarrow 6\times 7^n-7^n\times u_n=2u_n$$

$$\Leftrightarrow 2\times\boxed{u_n}+7^n\times\boxed{u_n}=6\times 7^n \Leftrightarrow \boxed{u_n}\times\left(2+7^n\right)=6\times 7^n$$

$$\Leftrightarrow u_n=\frac{6\times 7^n}{7^n+2}$$

d.4. Ayant son expression, nous pouvons désormais déterminer la limite de la suite (u_n).

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{6\times 7^n}{7^n+2}=\frac{6\times(+\infty)}{(+\infty)+2}=\frac{+\infty}{+\infty}=\boxed{\textit{Forme indéterminée}}$$

Mais il s'agit là d'une petite indétermination qui se lève en factorisant numérateur et dénominateur par le facteur 7^n. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_n=\frac{6\times 7^n}{7^n+2}=\frac{\cancel{7^n}}{\cancel{7^n}}\times\frac{6}{1+\frac{2}{7^n}}=\frac{6}{1+\frac{2}{7^n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{6}{1+\frac{2}{+\infty}}=\frac{6}{1+0^+}=6$$

En vrac

Des questions d'analyse bien complexes

L'énoncé

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des dix questions, quatre propositions sont faites mais une seule est exacte. Une bonne réponse rapporte 0,5 points; une absence ou une mauvaise réponse n'enlève ni ne rapporte de points.

1. Une primitive définie sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f(x)=12x^2-8x+1-\dfrac{2}{x^2}$ est :

a. $F(x)=3x^3-4x^2+x+\dfrac{2}{x}$ **b.** $F(x)=4x^3-8x^2+x+\dfrac{2}{x}$

c. $F(x)=4x^3-4x^2+x+\dfrac{2}{x}$ **d.** $F(x)=4x^3-4x^2+x-\dfrac{2}{x}$

2. Une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$ est :

a. $F(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{8}$ **b.** $F(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{4}$

c. $F(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{2}$ **d.** $F(x)=2\sqrt{4x^2+1}$

3. Une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}$ est :

a. $F(x)=-\dfrac{2}{e^{2x}}$ **b.** $F(x)=-\dfrac{1}{2e^{2x}}$ **c.** $F(x)=\dfrac{1}{2e^{2x}}$ **d.** $F(x)=\dfrac{2}{e^{2x}}$

4. Une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x)=\dfrac{e^{8x}\times\sqrt{e^{12x}}}{\left(e^{2x}\right)^7}$ est :

a. $F(x)=\dfrac{1}{6}e^{6x}$ **b.** $F(x)=\dfrac{1}{3}e^{3x}$ **c.** $F(x)=0$ **d.** $F(x)=x+1$

5. Parmi les quatre limites suivantes, une seule est fausse. Laquelle ?

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=0$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x=+\infty$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^x}=+\infty$ **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x}=+\infty$

6. Un argument du nombre complexe $z=\left(1-i\sqrt{3}\right)^{2015}$ est :

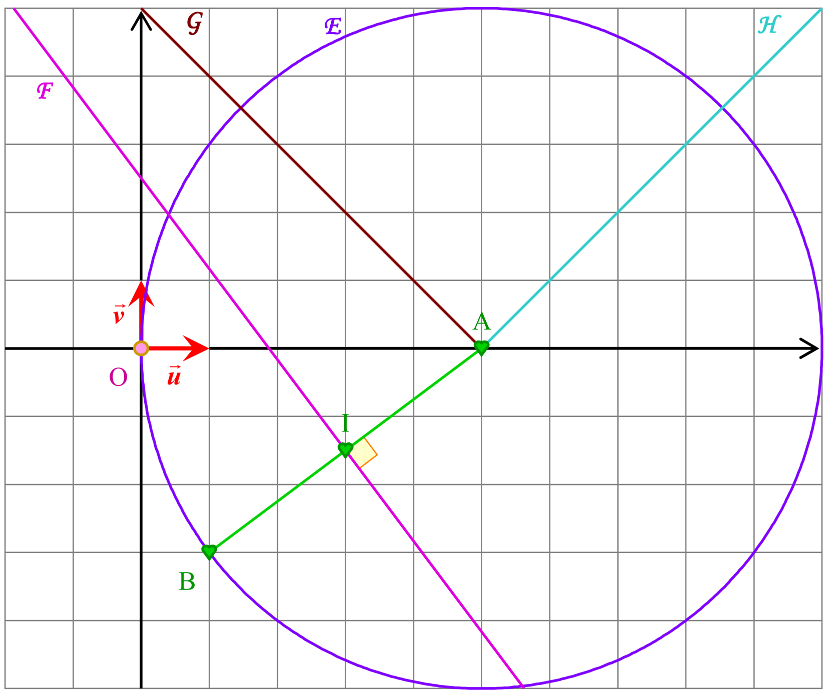
a. $-\dfrac{2\pi}{3}$ **b.** $-\dfrac{\pi}{3}$ **c.** $\dfrac{\pi}{3}$ **d.** $\dfrac{2\pi}{3}$

Sur la figure ci-dessous qui sera utilisée dans les questions **7**, **8** et **9**, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Les points A, B et I sont pour affixes respectives:

$$z_A=5 \qquad z_B=1-3i \qquad z_I=3-\frac{3i}{2}$$

On a également tracé les quatre ensembles $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$.



7. $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant :

a. $\arg(z-5)=-\dfrac{5\pi}{4}\,(2\pi)$ **b.** $\arg(z-5)=\dfrac{9\pi}{4}\,(2\pi)$

c. $|z-5|=|z+3\boldsymbol{i}-1|$ **d.** $|z-5|=5$

8. $\mathcal{F}$ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant :

a. $\arg(z-5)=-\dfrac{5\pi}{4}\,(2\pi)$ **b.** $\arg(z-5)=\dfrac{9\pi}{4}\,(2\pi)$

c. $|z-5|=|z+3\boldsymbol{i}-1|$ **d.** $|z-5|=5$

9. $\mathcal{G}$ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant :

a. $\arg(z-5)=-\dfrac{5\pi}{4}\,(2\pi)$ **b.** $\arg(z-5)=\dfrac{9\pi}{4}\,(2\pi)$

c. $|z-5|=|z+3\boldsymbol{i}-1|$ **d.** $|z-5|=5$

10. Dans cette question, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$.
Dans celui-ci, on a construit le triangle ABC qui présente deux caractéristiques :

- Le côté [BC] mesure la moitié du côté [AB].
- L'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right)$ mesure $-\dfrac{\pi}{2}$ radians.

On appelle z_A, z_B et z_C les affixes des points A, B et C.
Parmi les propositions suivantes, une seule égalité est vraie. Laquelle ?

a. $\dfrac{z_\mathrm{A}-z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{B}}=-2\boldsymbol{i}$ **b.** $\dfrac{z_\mathrm{A}-z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{B}}=-\dfrac{\boldsymbol{i}}{2}$

c. $\dfrac{z_\mathrm{A}-z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{B}}=\dfrac{\boldsymbol{i}}{2}$ **d.** $\dfrac{z_\mathrm{A}-z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{C}-z_\mathrm{B}}=2\boldsymbol{i}$

Le corrigé

1. Toute primitive F de la fonction $f(x)=12\times x^2-8\times x+1-2\times\dfrac{1}{x^2}$ est de la forme :

$$F(x)=12\times\frac{1}{3}x^3-8\times\frac{1}{2}x^2+x-2\times\frac{-1}{x}+Cste=4x^3-4x^2+x+\frac{2}{x}+Cste$$

La réponse correcte est la **c.**

2. La fonction $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}$ est presque de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec
$u(x)=4x^2+1$
$u'(x)=4\times2x=8x$
Dérivable et ⊕ sur ℝ

En effet : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{8x}{\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Donc toute primitive F de la fonction f est de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{8}\times2\sqrt{u}+Cste=\frac{1}{4}\times\sqrt{4x^2+1}+Cste$$

La proposition correcte est la **b.**

3. La fonction $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}=e^{-2x}$ est presque de la forme $u'\times e^u$ avec
$u(x)=-2x$
$u'(x)=-2$
Dérivable sur ℝ

En effet : $f(x)=e^{-2x}=\dfrac{1}{-2}\times(-2)\times e^{-2x}=-\dfrac{1}{2}\times u'\times e^u$

Donc toute primitive F de la fonction f est de la forme :

$$F(x)=-\frac{1}{2}\times e^u+Cste=-\frac{1}{2}\times e^{-2x}+Cste=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{e^{2x}}+Cste=-\frac{1}{2e^{2x}}+Cste$$

La réponse correcte est la **b.**

4. D'abord, simplifions l'écriture de cette fonction f en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$f(x)=\frac{e^{8x}\times\boxed{\sqrt{e^{12x}}}}{\boxed{\left(e^{2x}\right)^7}}=\frac{e^{8x}\times\boxed{e^{\frac{1}{2}\times12x}}}{\boxed{e^{7\times2x}}}=\frac{\boxed{e^{8x}\times e^{6x}}}{e^{14x}}=\frac{\boxed{e^{8x+6x}}}{e^{14x}}=\frac{\cancel{e^{14x}}}{\cancel{e^{14x}}}=1$$

Par conséquent, nous en déduisons que toutes les primitives F de la fonction f sont de la forme :

$$F(x)=x+Cste$$

La proposition correcte est la **d.**

5. Passons les quatre propositions en revue :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ ← C'est une limite du cours

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^x=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\dfrac{+\infty}{0^+}=(+\infty)\times\dfrac{1}{0^+}=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$

d. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\dfrac{1}{+\infty}=0^+$

La proposition correcte (c'est-à-dire fausse) est la **d.**

6. D'abord, déterminons un argument du nombre complexe $a = 1 - i\sqrt{3}$. Pour ce faire, nous devons d'abord calculer son module :

$$|a| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Ensuite, les arguments de a sont les réels θ vérifiant les deux égalités :

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{3} \text{ modulo } 2\pi$$

Il vient alors :

$$\arg(z) = \arg\left(a^{2015}\right) = 2015 \times \arg(a) = 2015 \times \frac{-\pi}{3} = -\frac{2015\pi}{3} \text{ modulo } 2\pi$$

Un tour correspondant à $2\pi = 6 \times \frac{\pi}{3}$, procédons à la division euclidienne de 2015 par 6 !

$$2015 = 335 \times 6 + 5 \quad \xrightarrow{\times\frac{\pi}{3}} \quad \frac{2015\pi}{3} = 335 \times \frac{6\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 335 \text{ tours} + \frac{5\pi}{3}$$

Nous en concluons :

$$\arg(z) = \frac{-2015\pi}{3} = -355 \times \overbrace{2\pi}^{\text{Tour}} - \frac{5\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ modulo } 2\pi$$

La réponse correcte est la **c.**

7. $\mathcal{E}$ étant le cercle de centre A passant par B, il est l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AB} \Leftrightarrow |z - z_A| = |z_B - z_A| \Leftrightarrow |z-5| = |1 - 3i - 5| = |-4-3i|$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

La proposition correcte est la **d.**

8. L'ensemble $\mathcal{F}$ étant la médiatrice du segment [AB], il est l'ensemble des points M d'affixe z équidistants de A et B, c'est-à-dire ceux tels que :

$$\mathrm{AM} = \mathrm{BM} \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow |z-5| = |z - (1-3i)|$$
$$\Leftrightarrow |z-5| = |z - 1 + 3i|$$

La proposition correcte est la **c.**

9. La demi-droite $\mathcal{G}$ est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

$$\overbrace{\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \arg(z - z_A) = \frac{3\pi}{4} - \underbrace{\frac{8\pi}{4}}_{1\text{ tour}} \Leftrightarrow \arg(z-5) = -\frac{5\pi}{4}}^{\text{Modulo } 2\pi \text{ bien sûr !}}$$

La proposition correcte est la **a.**

10. Le côté [BC] mesurant la moitié du côté [AB], nous pouvons écrire :

$$\mathrm{BC} = \frac{1}{2} \times \mathrm{BA} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}} = 2$$

Interprétons le quotient $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ selon deux critères :

- Son module : $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}} = 2$
- Ses arguments : $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ modulo 2π

Il vient alors :

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = 2 \times e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2 \times (-i) = -2i$$

La proposition correcte est la **a.**

Et l'année prochaine, ce sera vachement plus pire !

Le mot de l'auteur : le bac, c'est génial ! Mais je sais pas pourquoi

Jusqu'à fin juin 2015, je pensais encore que le baccalauréat sanctionnait un niveau d'étude. Mais je dois bien avouer que mes quelques doutes se sont évaporés. Sans doute la conséquence des grosses chaleurs du début d'été 2015.
Certes, le sujet donné cette année en S était plus abordable (ou moins inaccessible) que celui de l'an passé. Cela étant, j'ai été déconcerté par la manière dont certaines questions étaient posées. Leur difficulté principale résidait dans leur compréhension; de grands maquis verbeux ne cachaient que de petites choses faciles.
Ensuite, il y a eu la piste de skate-board du quatrième exercice dont la seule justification était de montrer que les maths sont une discipline sexy utile dans la vie de tous les jours. Sauf qu'on n'a toujours pas trouvé le rider inconscient qui se risquerait sur une piste aussi dangereuse !
Puis, vint le barème dont je ne puis vous parler vu qu'il est confidentiel. Sa principale qualité est qu'il m'a bien fait rire ! Dans ma conception des choses, le nombre de points attribués à une question a toujours été fonction de sa difficulté ou de sa longueur. Pas au bac ! Et puis, pour une même question traitée, le candidat qui rédige bien, qui détaille tout, n'aura pas nécessairement plus que celui qui expédie le truc parce qu'il s'en fout !
Enfin, il y eut les ahurissantes interrogations à propos du barème entendues chez certains collègues le jour de la remise des copies. Ca aussi, je ne peux pas vous en parler mais c'était très drôle ! Le problème des gens intelligents est qu'ils se posent trop de questions. Moi, avec mon intelligence très limitée, j'avais juste compris que la cinquantaine de copies que l'on m'avait attribuée était le seul obstacle qui me séparait de mes vacances. Alors j'ai appliqué bêtement un barème inepte sur un sujet insipide. Et vous savez quoi ? J'ai fini par être en vacances !

Jérôme Onillon

Au sommaire du rodéo :