Algèbre et analyse

Symphonies en x majeur

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les équations et inéquations suivantes :

a. $14x^2+3x=5$ **b.** $\dfrac{3}{2x+1}\geq 2$ **c.** $x^2-49\geq x(10x-42)$

d. $\dfrac{x^2+2x+3}{-6x^2-5x+25}\leq 0$ **e.** $\dfrac{3}{x+1}\geq\dfrac{2}{x-1}+1$

On prendra grand soin à réduire au maximum les éventuelles fractions.

Le corrigé

a. Pour résoudre cette première équation $14x^2+3x=5 \Leftrightarrow 14x^2+3x-5=0$ qui est du second degré, nous devons calculer son discriminant.

$$\Delta=3^2-4\times 14\times(-5)=9+280=289=17^2$$

Son discriminant étant positif, cette première équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-3-17}{2\times 14}=\frac{-20}{28}=-\frac{5}{7} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-3+17}{2\times 14}=\frac{14}{28}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

En conclusion, l'ensemble des solutions de la première équation est :

$$S=\left\{-\frac{5}{7};\frac{1}{2}\right\}$$

b. Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons tout ramener à gauche et tout mettre au même dénominateur. Nous nous prononcerons alors sur le signe d'un quotient.

$$\frac{3}{2x+1}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2x+1}-2\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-2\times(2x+1)}{2x+1}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-4x-2}{2x+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x+1}{2x+1}\geq 0$$

A présent, la question est de savoir quand ce dernier quotient est positif ou nul. Examinons les facteurs qui le constituent !

- Son numérateur $-4x+1$ est un facteur affine de coefficient directeur négatif -4 et s'annulant lorsque $-4x+1=0 \Leftrightarrow -4x=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{-4}=\dfrac{1}{4}=0{,}25$
- Le dénominateur $2x+1$ est aussi un facteur affine de coefficient directeur positif et s'annulant lorsque $2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{2}=-0{,}5$

Par conséquent, le tableau de signe de ce quotient est celui ci-contre ⇨

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-4x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=\left]-0{,}5;0{,}25\right]$$

c. Pour résoudre cette troisième inéquation, nous allons tout développer, puis tout ramener à gauche. Nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'une forme du second degré.

$$x^2-49\geq x(10x-42) \Leftrightarrow x^2-49\geq 10x^2-42x \Leftrightarrow x^2-49-10x^2+42x\geq 0$$
$$\Leftrightarrow -9x^2+42x-49\geq 0$$

Afin de connaître son signe, calculons le discriminant de la forme du second degré constituant le membre de gauche $g(x)=-9x^2+42x-49$.

$$\Delta_{g(x)}=42^2-4\times(-9)\times(-49)=1764-1764=0$$

Son discriminant étant nul, le trinôme $g(x)$ admet une unique racine :

$$x_1=-\frac{42}{2\times(-9)}=\frac{42}{18}=\frac{7}{3}$$

Son coefficient dominant -9 étant négatif, son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		$7/3$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	

La forme du second degré $g(x)$ n'est jamais positive mais il lui arrive d'être nulle. Nous en concluons que l'ensemble des solutions est :

$$S=\left\{\frac{7}{3}\right\}$$

d. Résoudre cette quatrième inéquation, c'est savoir quand le quotient $\dfrac{\overbrace{x^2+2x+3}^{n(x)}}{\underbrace{-6x^2-5x+25}_{d(x)}}$ est négatif ou nul. Pour le savoir, examinons les signes de ses haut et bas :

- Le numérateur $n(x)=x^2+2x+3$ est une forme du second degré. Discriminant !

$$\Delta_{n(x)}=2^2-4\times 1\times 3=4-12=-8$$

Son discriminant étant négatif, la forme du second degré $n(x)$ est toujours positive comme son coefficient dominant 1.

- Le dénominateur $d(x) = -6x^2 - 5x + 25$ est aussi du second degré. Re-belote !

$$\Delta_{d(x)} = (-5)^2 - 4\times(-6)\times 25 = 25 + 600 = \underline{625 = 25^2}$$

Son discriminant étant positif, $d(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-5)-25}{2\times(-6)} = \frac{-20}{-12} = \underline{\frac{5}{3}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-5)+25}{2\times(-6)} = \frac{30}{-12} = \underline{-\frac{5}{2} = -2{,}5}$$

Son coefficient dominant -6 étant négatif, la forme du second degré $d(x)$ est négative à l'extérieure de ses racines et positive entre.

Finalement le tableau de signe du quotient est celui ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$n(x)$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$d(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Leur quotient		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

Nous concluons que l'ensemble des solutions de cette quatrième inéquation est :

$$S = \left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{3};+\infty\right[$$

e. Pour résoudre cette dernière inéquation, nous allons procéder comme pour la **b.**

$$\frac{3}{x+1} \geq \frac{2}{x-1}+1 \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3\times(x-1)-2\times(x+1)-1\times(x^2-1)}{(x+1)\times(x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-3-2x-2-x^2+1}{(x+1)\times(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+x-4}{(x+1)\times(x-1)} \geq 0$$

A présent, tout le problème est savoir quand ce dernier quotient est positif ou nul.
Si les deux facteurs affines constituant le dénominateur ne posent guère de problèmes, il y a un peu de travail à faire sur le numérateur $n(x) = -x^2 + x - 4$ afin de connaître son signe. Il s'agit d'une forme du second degré. Calculons son discriminant.

$$\Delta_{n(x)} = 1^2 - 4\times(-1)\times(-4) = 1 - 16 = \underline{-15}$$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $n(x)$ est toujours du même signe. Il est toujours négatif comme son coefficient dominant -1.

Finalement, le tableau de signe de notre quotient est celui ci-contre ⇨

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-x^2+x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur quotient		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =]-1;1[$$

Classée x³

L'énoncé

Le but de cet exercice est la résolution dans ℝ de l'inéquation :

$$(E) \quad \frac{6x^3+x^2}{6x^3+x^2-26x-21} \geq 1$$

On appelle P le polynôme défini par :

$$P(x)=6x^3+x^2-26x-21$$

a. Démontrer que -1 est une racine du polynôme P.

b. Par la méthode de votre choix, déterminer trois entiers relatifs a, b et c tels que pour tout réel x, on ait :

$$P(x)=(x+1)\times\left(ax^2+bx+c\right)$$

c. Résoudre l'inéquation (E) dans ℝ.

Le corrigé

a. Calculons l'image de -1 par le polynôme P.

$$P(-1)=6\times(-1)^3+(-1)^2-26\times(-1)-21=6\times(-1)+1+26-21=-6+6=0$$

Conclusion : -1 annulant le polynôme P, il en est l'une des racines. Par suite, $P(x)$ est factorisable par le facteur $x-(-1)=x+1$.

b. Nous allons factoriser le polynôme $P(x)$ par le facteur $x+1$ en utilisant la méthode par identification des coefficients de même degré.

On veut écrire le polynôme P sous la forme :

$$P(x)=(x+1)\times\left(ax^2+bx+c\right)$$
$$=ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c$$
$$\boxed{6}x^3+\boxed{1}x^2+\boxed{(-26)}x+\boxed{(-21)}=\boxed{a}x^3+\boxed{(a+b)}x^2+\boxed{(b+c)}x+\boxed{c}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux :

En x^3	$6=a \Leftrightarrow a=6$	*D'un !*
En x^2	$1=a+b \Leftrightarrow 1=6+b \Leftrightarrow b=1-6=-5$	*De deux !*
En x	$-26=b+c \Leftrightarrow -26=-5+c \Leftrightarrow c=-26+5=-21$	*De trois !*
Constant	$-21=c$ Ca confirme !	*La vérif' !*

Une autre méthode : en extrayant le facteur de chacun des termes du polynôme.

$$P(x)=\overbrace{6x^3}^{\text{Combien de fois } x+1\text{ ?}}+x^2-26x-21=\overbrace{6x^2\times(x+1)-6x^2}^{\text{Au total } 6x^3}+x^2-26x-21$$

$$=6x^2\times(x+1)+\overbrace{\left(-5x^2\right)}^{\text{Combien de fois } x+1\text{ ?}}-26x-21$$

$$=6x^2\times(x+1)+\overbrace{(-5x)\times(x+1)+5x}^{\text{Au total } -5x^2}-26x-21$$

$$=6x^2\times(x+1)-5x\times(x+1)+\overbrace{(-21x)}^{\text{Combien de fois } x+1\text{ ?}}-21$$

$$=6x^2\times(x+1)-5x\times(x+1)+\overbrace{(-21)\times(x+1)+21}^{\text{Combien de fois } x+1\text{ ?}}-21$$

$$=6x^2\times\overbrace{\boxed{(x+1)}}^{\text{Facteur...}}-5x\times\overbrace{\boxed{(x+1)}}^{\text{...com...}}+(-21)\times\overbrace{\boxed{(x+1)}}^{\text{...mun.}}=\boxed{(x+1)}\times\left(6x^2-5x-21\right)$$

Conclusion : une écriture factorisée du polynôme P est : $P(x)=(x+1)\times\left(6x^2-5x-21\right)$

c. La première chose à faire est de tout ramener à gauche. Puis, nous mettrons tout au même dénominateur afin d'avoir à nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{6x^3+x^2}{6x^3+x^2-26x-21}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{6x^3+x^2}{6x^3+x^2-26x-21}-1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x^3+x^2-1\times\left(6x^3+x^2-26x-21\right)}{6x^3+x^2-26x-21}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{6x^3}+\cancel{x^2}-\cancel{6x^3}-\cancel{x^2}+26x+21}{6x^3+x^2-26x-21}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{26x+21}{(x+1)\times\left(6x^2-5x-21\right)}\geq 0$$

Examinons les signes des facteurs constituant ce quotient :

- Le facteur affine $26x+1$ a un coefficient directeur 26 positif et il s'annule en :

$$26x+21=0 \Leftrightarrow 26x=-21 \Leftrightarrow x=-\frac{21}{26}$$

Il est positif après cette racine et négatif avant.

- Le facteur affine $x+1$ a aussi un coefficient directeur 1 positif et s'annule en -1.

- Le facteur $n(x)=6x^2-5x+21$ est une forme du second degré dont nous calculons le discriminant :

$$\Delta_{n(x)}=(-5)^2-4\times6\times(-21)=25+504=529=\underline{23^2}$$

Son discriminant étant positif, la forme du second degré $n(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-(-5)-23}{2\times6}=-\frac{18}{12}=\underline{-1,5} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-(-5)+23}{2\times6}=\frac{28}{12}=\underline{\frac{7}{3}}$$

Son coefficient dominant 6 étant positif, $n(x)$ sera positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre.

Finalement, le tableau de signe de notre quotient est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		$-\frac{21}{26}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$26x+21$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$n(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Le quotient		$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation (E) est constitué de tous les réels x pour lesquels le quotient est positif ou nul. Il s'agit de :

$$S=\underline{\left]-\infty;-1,5\right[\cup\left]-1;-\frac{21}{26}\right]\cup\left]\frac{7}{3};+\infty\right[}$$

Voleurs à salut

L'énoncé

Dans cet exercice, on détaillera ses calculs. Un résultat seul ne sera pas pris en compte.

a. Simplifier l'écriture du nombre $A=\left|\sqrt{7}-\sqrt{15}\right|+\left|\sqrt{15}-\sqrt{13}\right|+\left|-\sqrt{7}-\sqrt{13}\right|$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\left|8x^2-30x+16,5\right|=\left|x^2+8,5\right|$ **2.** $|7x+3|\leq-1$

3. $\left|\sqrt{x}-3\right|\leq2$ **4.** $|3-2x|>1$

Le corrigé

a. D'après un résultat du cours concernant la valeur absolue : si a est positif, $|a|=a$; si a est négatif, $|a|=-a$

En conséquence, nous pouvons écrire :

$$A=\Big|\underbrace{\sqrt{7}-\sqrt{15}}_{\text{négatif}}\Big|+\Big|\underbrace{\sqrt{15}-\sqrt{13}}_{\text{positif}}\Big|+\Big|\underbrace{-\sqrt{7}-\sqrt{13}}_{\text{négatif}}\Big|$$

$$=\left[-\left(\sqrt{7}-\sqrt{15}\right)\right]+\left[\sqrt{15}-\sqrt{13}\right]+\left[-\left(-\sqrt{7}-\sqrt{13}\right)\right]$$

$$=-\cancel{\sqrt{7}}+\sqrt{15}+\sqrt{15}-\cancel{\sqrt{13}}+\cancel{\sqrt{7}}+\cancel{\sqrt{13}}=\underline{2\sqrt{15}}$$

b.1. Deux nombres ayant même valeur absolue sont égaux ou opposés. Cela étant dit, la première équation devient :

$$\underbrace{\left|8x^2-30x+16,5\right|=\left|x^2+8,5\right|}_{\text{Deux nombres ayant même valeur absolue...}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{8x^2-30x+16,5=x^2+8,5}^{\text{...sont égaux...}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \overbrace{8x^2-30x+16,5=-\left(x^2+8,5\right)}^{\text{...ou opposés.}}$$

$$8x^2-30x+16,5-x^2-8,5=0 \qquad 8x^2-30x+16,5=-x^2-8,5$$

$$\underbrace{7x^2-30x+8=0}_{\text{Une première sous-équation}} \qquad 8x^2-30x+16,5+x^2+8,5=0$$

$$\underbrace{9x^2-30x+25=0}_{\text{Une seconde sous-équation}}$$

Nous aboutissons à deux sous-équations du second degré à résoudre...avec le discriminant.

- Calculons le discriminant de la première sous équation $7x^2 - 30x + 8 = 0$.

$$\Delta_{(1)} = (-30)^2 - 4\times 7\times 8 = 900 - 224 = 676 = 26^2$$

Son discriminant étant positif, cette sous-équation admet deux solutions :

$$x = \frac{-(-30)-26}{2\times 7} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-(-30)+26}{2\times 7} = \frac{56}{14} = 4$$

- Calculons le discriminant de la seconde sous-équation $9x^2 - 30x + 25 = 0$.

$$\Delta_{(2)} = (-30)^2 - 4\times 9\times 25 = 900 - 900 = 0$$

Son discriminant étant nul, cette sous-équation admet une unique solution :

$$x = -\frac{-30}{2\times 9} = \frac{30}{18} = \frac{5\times \cancel{6}}{3\times \cancel{6}} = \frac{5}{3}$$

Conclusion : cette première équation admet trois solutions :

$$S = \left\{\frac{2}{7};\frac{5}{3};4\right\}$$

b.2. Une valeur absolue étant toujours positive ou nulle (car c'est une distance), la valeur absolue $|7x+1|$ n'est jamais inférieure ou égale à -1. Par conséquent, cette inéquation ne peut pas avoir de solutions. Nous concluons :

$$S = \varnothing$$

b.3. Les nombres ayant une valeur absolue inférieure à 2 sont ceux compris entre -2 et 2. Il vient alors :

$$\left|\sqrt{x}-3\right| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq \sqrt{x}-3 \leq 2 \xrightarrow{+3} 1 \leq \sqrt{x} \leq 5 \xrightarrow[\text{Croissante sur } [0;+\infty[]{\text{Carré}} 1 \leq x \leq 25$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions est :

$$S = [1;25]$$

b.4. Les nombres ayant une valeur absolue supérieure à 1 sont ceux situés avant -1 ainsi que ceux se trouvant après 1. Par conséquent :

$$|3-2x| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{3-2x < -1}^{\text{Avant } -1} \quad \text{ou} \quad \overbrace{3-2x > 1}^{\text{Après } 1}$$

$$-2x < -4 \qquad\qquad -2x > -2$$

$$x > \frac{-4}{-2} = 2 \qquad\qquad x < \frac{-2}{-2} = 1$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions est la réunion d'intervalles :

$$S =]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$$

Fonctions

Des unes vers les autres

L'énoncé

Les trois sous-parties de cet exercice sont indépendantes. Dans tous les tableaux de variation demandés, on indiquera les extrema ainsi que les éventuelles limites, c'est-à-dire ce qu'il advient des dites fonctions aux bornes de leurs ensembles de définition.

a. Donner le tableau de variation de la fonction $e(x)=5-\dfrac{3}{x}$.

b. Les fonctions *f* et *g* sont définies par :

$$f(x)=10x^2-19x-15 \qquad \text{et} \qquad g(x)=\sqrt{10x^2-19x-15}$$

1. Donner les tableaux de variation et de signe de la fonction *f* sur ℝ.
2. En déduire l'ensemble de définition de la fonction *g*. On expliquera brièvement sa réponse.
3. Conclure en donnant le tableau de variation de *g* sur son ensemble de définition.

c. Les fonctions *h* et *j* sont définies par :

$$h(x)=-5x^2+8x-7 \qquad \text{et} \qquad j(x)=\frac{1}{-5x^2+8x-7}$$

1. Donner les tableaux de variation et de signe de la fonction *h* sur ℝ.
2. En déduire l'ensemble de définition de la fonction *j*. On expliquera brièvement sa réponse.

Conclure en donnant le tableau de variation de *j* sur son ensemble de définition.

Le corrigé

a. Le tableau de variation de la fonction *e* se déduit de celui de la fonction inverse. On «multiplie» ce dernier par -3 [ce qui change les variations], puis auquel on «ajoute» 5 [ce qui conserve les variations]. Finalement, nous obtenons :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e(x)=5-\dfrac{3}{x}$	5	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	5

Cette fonction *e* a quatre limites à déterminer :

$$\lim_{x\to-\infty} e(x)=5-3\times 0^- =5-0=5 \qquad \lim_{x\to 0^-} e(x)=5-3\times(-\infty)=5-(-\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} e(x)=5-3\times 0^+ =5-0=5 \qquad \lim_{x\to 0^+} e(x)=5-3\times(+\infty)=5-(+\infty)=-\infty$$

b.1. La fonction du second degré $f(x)=10x^2-19x-15$ ayant un coefficient dominant 10 positif, son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		$19/20$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	$-24{,}025$	↗	$+\infty$

D'après un résultat du cours, *f* change de variation en :

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-19}{2\times 10}=\frac{19}{20}=0{,}95$$

De plus : $f(0{,}95)=-\dfrac{961}{40}$

➲ Pour connaître le signe de la forme du second degré $f(x)$, nous devons calculer son discriminant.

$$\Delta_{f(x)}=(-19)^2-4\times 10\times(-15)=361+600=961=31^2$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $f(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-(-19)-31}{2\times 10}=\frac{-12}{20}=-\frac{3}{5}=-0{,}6 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-(-19)+31}{2\times 10}=\frac{50}{20}=\frac{5}{2}=2{,}5$$

Son coefficient dominant 10 étant positif, son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		$-0{,}6$		$2{,}5$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

b.2. Concrètement, la fonction *g* est la racine de la fonction *f* qui est définie sur ℝ. Et seuls les nombres positifs ou nuls peuvent avoir une racine. Par conséquent :

$$\text{La racine } g(x)=\sqrt{f(x)} \text{ existe} \Leftrightarrow f(x) \text{ est positive ou nulle}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x\in\left]-\infty;-0{,}6\right]\cup\left[2{,}5;+\infty\right[}_{\text{D'après le tableau de signe de } f}$$

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction *g* est le suivant :

$$D_g=\left]-\infty;-0{,}6\right]\cup\left[2{,}5;+\infty\right[$$

b.3. D'après une règle du cours, les variations de $g = \sqrt{f}$ sont les mêmes que celles de la fonction *f*...à condition, toutefois, que ces deux fonctions existent alors. Par conséquent, le tableau de variation de la fonction *g* est :

x	$-\infty$		$-0{,}6$		$2{,}5$		$+\infty$
g	$+\infty$	↘	0	Non définie	0	↗	$+\infty$

A calculer pour compléter le tableau :

Deux images : $g(-0{,}6) = \sqrt{f(-0{,}6)} = \sqrt{0} = \underline{0}$ et $g(2{,}5) = \sqrt{f(2{,}5)} = \sqrt{0} = \underline{0}$

Deux limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{+\infty} = \underline{+\infty}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \sqrt{+\infty} = \underline{+\infty}$

c.1. Son coefficient dominant -5 étant négatif, les variations de la fonction *h* sont celles ci-contre ⇨

Elle atteint son apogée en :

$$x = -\frac{8}{2 \times (-5)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \underline{0{,}8}.$$

x	$-\infty$		$4/5$		$+\infty$
h	$-\infty$	↗	$-3{,}8 = -19/5$	↘	$-\infty$

La valeur de ce maximum est $h(0{,}8) = -5 \times 0{,}8^2 + 8 \times 0{,}8 - 7 = \underline{-3{,}8}$

Son maximum étant négatif, la forme du second degré $h(x) = -5x^2 + 8x - 7$ est toujours négative. Ce fait est confirmé si l'on calcule son discriminant :

$$\Delta_{h(x)} = 8^2 - 4 \times (-5) \times (-7) = 64 - 140 = \underline{-76}$$

Son discriminant étant négatif, $h(x)$ est toujours négatif comme son coefficient dominant.

c.2. La fonction *j* est l'inverse de la fonction *h* qui est définie sur ℝ. Et l'inverse d'une quantité n'existe que si et seulement si celle-ci est non nulle. Ainsi :

$$\text{L'inverse } j(x) = \frac{1}{h(x)} \text{ existe} \Leftrightarrow \underbrace{h(x) \text{ est non nul}}_{\text{Ce qui est toujours le cas car } h(x) \text{ est toujours négatif}}$$

<u>Conclusion :</u> il n'existe pas de contre-indication pour *j*. Elle est définie sur ℝ comme *h*.

c.3. Les variations de *j* sont les contraires de celles de *h*. Par suite, son tableau de variation est celui ci-contre ⇨

Le minimum de *j* est :

$$j(0{,}8) = \frac{1}{f(0{,}8)} = \frac{1}{-19/5} = \underline{-\frac{5}{19}}$$

x	$-\infty$		$0{,}8$		$+\infty$
j	0^-	↘	$-5/19$	↗	0^-

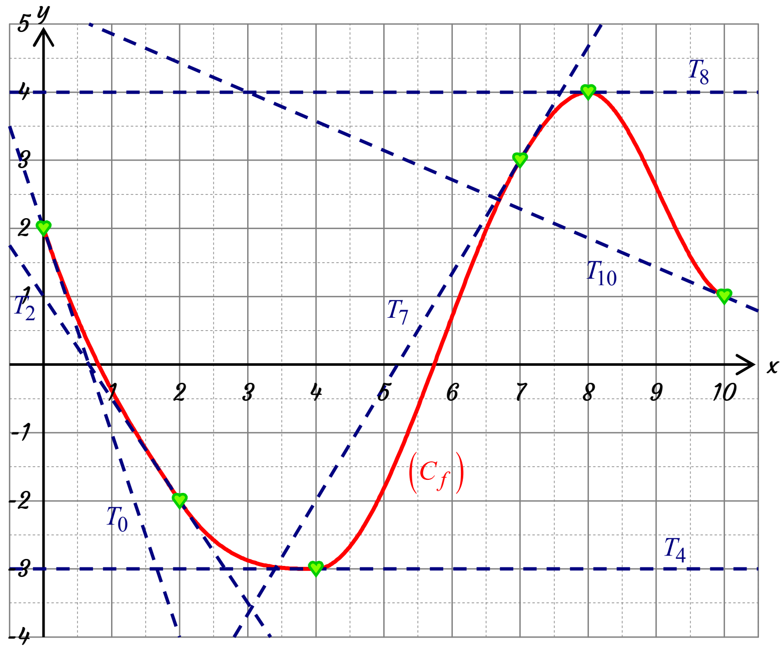
Deux limites à trouver : $\lim\limits_{x \to -\infty} j(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{-\infty} = \underline{0^-}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} j(x) = \frac{1}{-\infty} = \underline{0^-}$

Tangente story

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe (C_f) représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;10]$.

On a également construit les tangentes T_0, T_2, T_4, T_7, T_8 et T_{10} à la courbe (C_f) aux points d'abscisses respectives 0; 2; 4; 7; 8 et 10.



En utilisant le graphique ci-dessus, donner les valeurs des nombres suivants. Aucune justification n'est demandée.

$f(4) = \ldots\ldots$ $\quad f'(8) = \ldots\ldots$ $\quad f'(0) = \ldots\ldots$ $\quad f(2) = \ldots\ldots$

$f'(2) = \ldots\ldots$ $\quad f(10) = \ldots\ldots$ $\quad f'(7) = \ldots\ldots$ $\quad f'(10) = \ldots\ldots$

Le corrigé

Utilisant le graphique, nous pouvons écrire :

$f(4) =$ ordonnée du point de la courbe d'abscisse $4 = -3$

$f'(8) =$ coefficient directeur de la tangente horizontale $T_8 = 0$

$f'(0) =$ coefficient directeur de la tangente $T_0 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{+1} = -3$

$f(2) =$ ordonnée du point de la courbe d'abscisse $2 = -2$

$f'(2) =$ coefficient directeur de la tangente $T_2 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{+2} = -1{,}5$

$f(10) =$ ordonnée du point de la courbe d'abscisse $10 = 1$

$f'(7) =$ coefficient directeur de la tangente $T_7 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+5}{+3} = \dfrac{5}{3}$

$f'(10) =$ coefficient directeur de la tangente $T_{10} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{+7} = -\dfrac{3}{7}$

Dérivées story

L'énoncé

Cet exercice est constitué de trois sous-parties indépendantes.

a. La fonction *f* est définie pour tout réel x par :

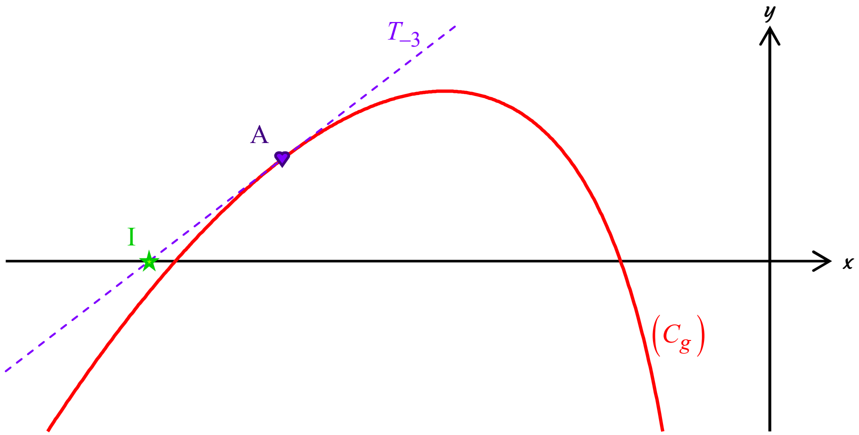
$$f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x + 11$$

1. Calculer les images de 7 et de 11 par la fonction *f*.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
4. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{R}$? On justifiera sa réponse.
   En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction g est définie pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty;0[$ par :

$$g(x) = -x^2 - x + \frac{12}{x} + 13$$

Sa courbe représentative (C_g) a été tracée sur le graphique ci-dessous dans un repère simplement orthogonal. On a également construit la tangente T_{-3} à la courbe (C_g) au point A d'abscisse -3. Enfin, le point I est l'intersection de la droite T_{-3} et de l'axe des abscisses (Ox).



1. Dériver la fonction g et prouver que, pour tout réel strictement négatif x, on a :
$$g'(x) = \frac{(x+2)\times(-2x^2+3x-6)}{x^2}$$
2. En déduire les variations de la fonction g sur son ensemble de définition $]-\infty;0[$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-3}.
   En déduire les coordonnées des points A et I.

c. La fonction j est définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$j(x) = x - 10\sqrt{x}$$

1. Dessiner à main levée la courbe de la fonction racine carrée et en déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} - 5 > 0$.
2. Pourquoi la fonction j est-elle seulement dérivable sur $]0;+\infty[$?
   En dérivant la fonction j, prouver que, pour tout réel strictement positif x, on a :
$$j'(x) = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}$$
3. Déduire de ce qui précède les variations de la fonction j sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Le corrigé

a.1. Calculons les deux images demandées :

$$f(7) = -7^3 + 9\times 7^2 + 21\times 7 + 11 = -343 + 441 + 147 + 11 = \underline{256}$$
$$f(11) = -11^3 + 9\times 11^2 + 21\times 11 + 11 = -1331 + 1089 + 231 + 11 = \underline{0}$$

a.2. Etant une combinaison linéaire de fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction polynômiale $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x + 11$ l'est elle aussi !

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = -3x^2 + 9\times 2x + 21 + 0 = \underline{-3x^2 + 18x + 21}$$

a.3. C'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *f*.

Cette première étant une forme du second degré, calculons son discriminant !

$$\Delta_{f'(x)} = 18^2 - 4\times(-3)\times 21 = 324 + 252 = \underline{576 = 24^2}$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $f'(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-18-24}{2\times(-3)} = \frac{-42}{-6} = \underline{7} \quad \underline{\text{et}} \quad x_2 = \frac{-18+24}{2\times(-3)} = \frac{6}{-6} = \underline{-1}$$

Remarquons, enfin, que son coefficient dominant -3 est négatif.
Nous en déduisons que le tableau de signe de $f'(x)$ et de variation de *f* est :

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	256	↘	$-\infty$

Pour compléter le tableau, il reste juste à calculer l'image de -1 par la fonction *f*.

$$f(-1)=-(-1)^3+9\times(-1)^2+21\times(-1)+11=1+9-21+11=0$$

a.3. D'après ce qui vient d'être fait, -1 et 7 sont deux solutions de l'équation $f(x)=0$ car leurs images par *f* sont égales à 0. Peut-être y en a-t-il d'autres ?
Sur l'intervalle $]-\infty;7[$, la fonction *f* a pour minimum 0; celui-ci est atteint en $x=-1$.
Compte-tenu des variations de *f*, l'équation $f(x)=0$ ne peut avoir d'autre solution sur cet intervalle que $x=-1$.
Sur l'intervalle $]7;+\infty[$, la fonction *f* est strictement décroissante. Par conséquent, elle passera au plus une fois par le niveau 0. Cette image est atteint lorsque $x=11$. A part ce réel, l'équation $f(x)=0$ ne peut avoir d'autre solution dans cet intervalle.
<u>Conclusion :</u> l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dans ℝ :

$$S=\{-1;11\}$$

➲ Tenant compte des variations de *f* sur ℝ et de ce qui vient d'être fait, nous en déduisons que le tableau de signe de $f(x)$ sur ce même ensemble est :

x	$-\infty$		-1		11		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

b.1. La fonction $g(x)=-x^2-x+12\times\frac{1}{x}+13$ est une combinaison linéaire des fonctions x^2 et *x* qui sont dérivables sur ℝ et de la fonction $\frac{1}{x}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Par conséquent, *g* est bien dérivable sur son intervalle de définition $]-\infty;0[$ et pour tout réel strictement négatif *x*, il vient :

$$g'(x)=-2x-1+12\times\frac{-1}{x^2}+0=\frac{-2x\times x^2-1\times x^2-12}{x^2}=\frac{-2x^3-x^2-12}{x^2}$$

Développons le numérateur auquel il faut parvenir :

$$(x+2)\times(-2x^2+3x-6)=-2x^3+3x^2-\cancel{6x}-4x^2+\cancel{6x}-12=\underbrace{-2x^3-x^2-12}_{\text{Le numérateur de } g'(x)}$$

Nous en concluons que, pour tout réel négatif *x*, nous avons :

$$g'(x)=\frac{-2x^3-x^2-12}{x^2}=\frac{(x+2)(-2x^2+3x-6)}{x^2}$$

b.2. C'est le signe de la dérivée $g'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *g*.
Dans ce quotient constituant cette première :

- Le facteur affine $x+2$ s'annule en -2 et a un coefficient directeur positif 1.
- Le facteur $N(x)=-2x^2+3x-6$ est une forme du second degré.

  Son discriminant est : $\Delta_{N(x)}=3^2-4\times(-2)\times(-6)=9-48=-39$

  Son discriminant étant négatif, $N(x)$ est toujours du signe du même signe, celui de son coefficient dominant -2, c'est-à-dire toujours négatif.
- Le carré x^2 est toujours positif sur $]-\infty;0[$.

Finalement, nous en déduisons que le tableau de signe de $g'(x)$ et de variation de *g* est :

x	$-\infty$		-2		0
$x+2$		$-$	0	$+$	
$N(x)=-2x^2+3x-6$		$-$		$-$	
x^2		$+$		$+$	
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de *g*	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

Pour que le tableau soit complet, il faut calculer le maximum atteint par g en $x=-2$.

$$g(-2)=-(-2)^2-(-2)+\frac{12}{-2}+13=-4+2-6+13=5$$

b.3. L'équation réduite de la tangente T_{-3} est de la forme :

$$y=g'(-3)\times(x-(-3))+g(-3)$$

avec :

$$g(-3)=-(-3)^2-(-3)+\frac{12}{-3}+13=-9+3-4+13=3$$

$$g'(-3)=\frac{-2\times(-3)^3-(-3)^2-12}{(-3)^2}=\frac{-2\times(-27)-9-12}{9}=\frac{54-21}{9}=\frac{33}{9}=\frac{11}{3}$$

Donc l'équation réduite de T_{-3} devient :

$$y=\frac{11}{3}\times(x+3)+3 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{11}{3}x+11+3 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{11}{3}x+14$$

➲ Le point A ayant pour abscisse -3 et appartenant à la courbe (C_g), ses coordonnées sont $(-3;g(-3))=(-3;3)$.

Le point I appartenant à l'axe des abscisses $(\mathrm{O}x)$, son ordonnée y_{I} est nulle.

Comme I fait aussi partie de la tangente T_{-3}, alors ses coordonnées vérifient l'équation de cette dernière. Il vient :

$$\underbrace{0}_{y_{\mathrm{I}}}=\frac{11}{3}x_{\mathrm{I}}+14 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{11}{3}x_{\mathrm{I}}=-14 \quad\xrightarrow{\div 11/3}\quad x_{\mathrm{I}}=-14\div\frac{11}{3}=-14\times\frac{3}{11}=-\frac{42}{11}$$

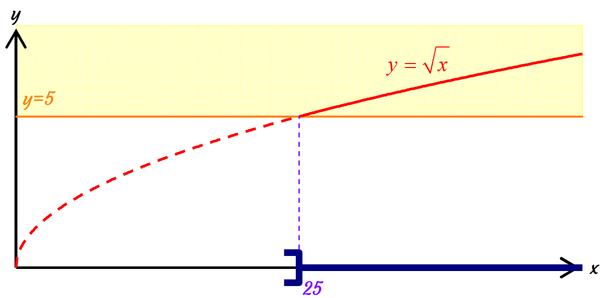
<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point I sont $\left(-\frac{42}{11};0\right)$.

c.1. Le but de la courbe demandée est la résolution de l'inéquation

$$\sqrt{x}-5 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}>5 \;.$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=]25;+\infty[$$



c.2. La fonction j est la somme des fonctions x qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sqrt{x}$ qui est définie sur $[0;+\infty[$ mais seulement dérivable sur $]0;+\infty[$. Cette restriction se transmet à j.

Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$j'(x)=\left(x-10\times\sqrt{x}\right)'=1-10\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=1-\frac{5}{\sqrt{x}}=\frac{1\times\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}$$

c.3. C'est le signe de la dérivée $j'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction j.

D'après la question **c.1**, le numérateur $\sqrt{x}-5$ est négatif avant en 25, nul en 25 et positif après. La racine au dénominateur est toujours positive sur $]0;+\infty[$.

Le tableau de signe de $j'(x)$ et de variation de j est le suivant :

x	0		25		$+\infty$
$\sqrt{x}-5$		$-$	0	$+$	
x		$+$			$+$	
Signe de $j'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de j	0	↘	-25	↗	$+\infty$

Deux images sont à calculer pour compléter le tableau :

$$j(0)=0-10\times\sqrt{0}=0-0=0 \qquad \text{et} \qquad j(25)=25-10\times\sqrt{25}=25-10\times5=-25$$

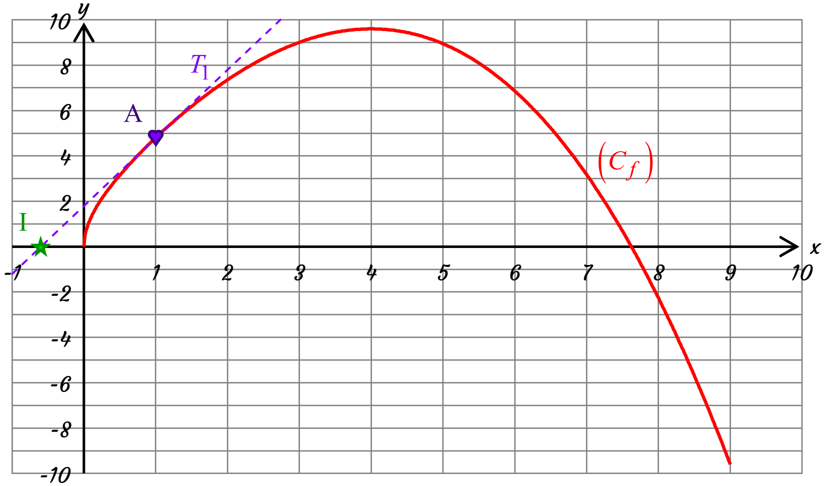
Racine, produit et tangentes

L'énoncé

La fonction *f* est définie sur l'intervalle $[0;9]$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}\times\left(-0,2x^2+x+4\right)$$

Sa courbe $\left(C_f\right)$ a été tracée dans le repère ci-dessous dans un repère juste orthogonal.



On a également construit la droite T_1 qui est la tangente à la courbe $\left(C_f\right)$ en son point A d'abscisse 1. Le point I est l'intersection de la droite T_1 avec l'axe des abscisses (Ox).

1. Calculer les images de 0 et 9 par la fonction *f*.
2. Donner l'ensemble de dérivabilité de la fonction *f*, puis dériver celle-ci et montrer que l'on a :
$$f'(x)=\frac{-x^2+3x+4}{2\sqrt{x}}$$
3. En déduire les variations de la fonction *f* sur son ensemble de définition.
4. Sur le graphique ci-dessus, tracer les droites T_0 et T_4 qui sont les tangentes à la courbe $\left(C_f\right)$ aux points d'abscisses respectives $x=0$ et $x=4$.
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1.
En déduire les coordonnées du point I.

Le corrigé

1. Calculons les deux images demandées :

$$f(0)=\sqrt{0}\times\left(-0,2\times0^2+0+4\right)=0\times(0+0+4)=\underline{0}$$

$$f(9)=\sqrt{9}\times\left(-0,2\times9^2+9+4\right)=3\times(-16,2+13)=3\times(-3,2)=\underline{-9,6}$$

2. La fonction *f* qui n'est définie que sur $[0;9]$ est le produit $u\times v$ des fonctions :

$u(x)=\sqrt{x}$	et	$v(x)=-0,2x^2+x+4$
$u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		$v'(x)=-0,2\times2x+1+0=-0,4x+1$
Dérivable sur $]0;+\infty[$		Dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction *f* est seulement dérivable sur l'intervalle $]0;9]$ et pour tout réel *x* de cet ensemble, nous avons :

$$f'(x)=u'\times v+v'\times u=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\left(-0,2x^2+x+4\right)+(-0,4x+1)\times\sqrt{x}$$

$$=\frac{1\times\left(-0,2x^2+x+4\right)+(-0,4x+1)\times\overbrace{\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}^{2x}}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-0,2x^2+x+4-0,8x^2+2x}{2\sqrt{x}}=\underline{\frac{-x^2+3x+4}{2\sqrt{x}}}$$

3. C'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *f*.

Cette dérivée est le quotient d'une forme du second degré $N(x)=-x^2+3x+4$ et d'un dénominateur $2\sqrt{x}$ $=\oplus\times\oplus$ qui est clairement positif sur l'intervalle $]0;9]$.

Calculons le discriminant du numérateur $N(x)$.

$$\Delta_{N(x)}=3^2-4\times(-1)\times4=9+16=\underline{25=5^2}$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $N(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-3-5}{2\times(-1)}=\frac{-8}{-2}=\underline{4} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-3+5}{2\times(-1)}=\frac{2}{-2}=\underline{-1}$$

Dans le tableau de signe de $N(x)$, seule la partie correspondant à l'intervalle $]0;9]$ nous intéresse.

Son coefficient dominant -1 étant négatif, le tableau de signe de $N(x)$ est :

0 9

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$N(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement, le tableau de variation de la fonction *f* est celui-ci après :

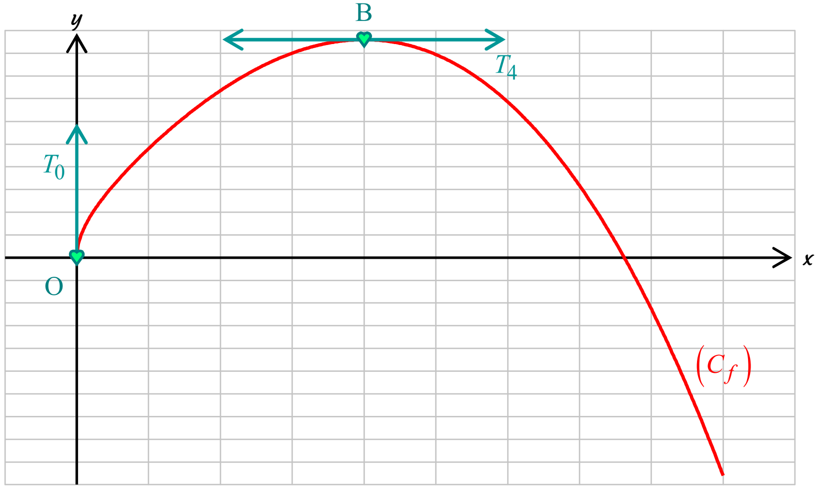
x	0		4		9
$N(x)$		$+$	0	$-$	
$2\sqrt{x}$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de *f*	0	$\nearrow$	$9{,}6$	$\searrow$	$-9{,}6$

Pour que le tableau soit complet, il faut calculer la valeur du maximum de *f* en $x=4$.

$$f(4)=\sqrt{4}\times\left(-0{,}2\times4^2+4+4\right)=2\times(-3{,}2+8)=2\times4{,}8=\underline{9{,}6}$$

4. Comme la dérivée $f'(x)$ s'annule en $x=4$, alors la tangente T_4 est horizontale.

Ensuite, la fonction *f* n'étant pas dérivable en 0 et vu la morphologie de la courbe, la tangente T_0 est verticale.



5. Une équation de la tangente T_1 est de la forme :

$$y=f'(1)\times(x-1)+f(1)$$

avec :

$$\left|\begin{aligned}&f(1)=\sqrt{1}\times\left(-0{,}2\times1^2+1+4\right)=1\times(-0{,}2+5)=1\times4{,}8=\underline{4{,}8}\\&f'(1)=\frac{-1^2+3\times1+4}{2\times\sqrt{1}}=\frac{-1+3+4}{2}=\frac{6}{2}=\underline{3}\end{aligned}\right.$$

Donc l'équation réduite de T_1 devient :

$$y=3\times(x-1)+4{,}8\iff y=3x-3+4{,}8\iff y=\underline{3x+1{,}8}$$

➲ Le point I appartenant à l'axe $(\mathrm{O}x)$, son ordonnée y_I est nulle.

Comme I fait aussi partie de la tangente T_1, alors ses coordonnées vérifient l'équation réduite de cette dernière. Il vient :

$$\underbrace{0}_{y_\mathrm{I}}=3x_\mathrm{I}+1{,}8\iff 3x_\mathrm{I}=-1{,}8\iff x_\mathrm{I}=\frac{-1{,}8}{3}=\underline{-0{,}6}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point I sont $(-0{,}6;0)$.

Résurrection fonctionnelle

L'énoncé

a. La fonction *f* est définie par :

$$f(x)=\frac{1}{5x-12}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction *f*. On expliquera sa réponse.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur son ensemble de définition.

b. La fonction *g* est définie par :

$$g(x)=\frac{-2x^2+9x-3}{x-5}$$

1. En dérivant la fonction *g*, prouver que $g'(x)=\frac{-2x^2+20x-42}{(x-5)^2}$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction *g* sur son ensemble de définition.

Le corrigé

a.1. La fonction *f* est l'inverse de la fonction $5x-12$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

L'inverse $f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $5x-12$ est non nul

$$\Leftrightarrow\ 5x-12\neq 0\ \Leftrightarrow\ 5x\neq 12\ \Leftrightarrow\ x\neq\frac{12}{5}=2{,}4$$

Conclusion : à l'exception de 2,4, tous les réels ont une image par la fonction *f*. Par conséquent, l'ensemble de définition de cette dernière est :

$$D_f=\mathbb{R}\backslash\{2{,}4\}=\left]-\infty;2{,}4\right[\cup\left]2{,}4;+\infty\right[$$

a.2. La fonction *f* est de la forme $\frac{1}{u}$ où $\begin{cases} u(x)=5x-12 \\ u'(x)=5 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et non nulle sur } \mathbb{R}\backslash\{2{,}4\}\end{cases}$

Donc la fonction *f* est dérivable là où elle est définie, soit sur $\mathbb{R}\backslash\{2{,}4\}$. Pour tout réel de cet ensemble, nous avons :

$$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}=-\frac{5}{(5x-12)^2}=\frac{-5}{(5x-12)^2}$$

a.3. Le signe de la dérivée $f'(x)$ va nous donner les variations de la fonction *f*.

Les limites s'obtiennent avec la courbe tracée à la calculatrice.

x	$-\infty$		2,4		$+\infty$
-5		$-$	|	$-$	
$(5x-12)^2$		$+$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	||	$-$	
Variation de *f*	0^-	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0^+

b.1. La fonction *g* est un quotient $\frac{u}{v}$ où :

$\begin{cases} u(x)=-2\times x^2+9x-3 \\ u'(x)=-2\times 2x+9=-4x+9 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R}\end{cases}$ et $\begin{cases} v(x)=x-5 \\ v'(x)=1 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et non nulle sur } \mathbb{R}\backslash\{5\}\end{cases}$

Donc la fonction *g* est définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{5\}=\left]-\infty;5\right[\cup\left]5;+\infty\right[$ et :

$$g'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{(-4x+9)\times(x-5)-1\times\left(-2x^2+9x-3\right)}{(x-5)^2}$$

$$=\frac{-4x^2+20x+9x-45+2x^2-9x+3}{(x-5)^2}=\frac{-2x^2+20x-42}{(x-5)^2}$$

b.2. Encore une fois, c'est le signe de la dérivée $g'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *g*.

Le carré $(x-5)^2$ est toujours positif sauf lorsqu'il est nul en $x=5$.

Pour connaître celui du numérateur $N(x)=-2x^2+20x-42$ qui est une forme du second degré, calculons son discriminant :

$$\Delta=20^2-4\times(-2)\times(-42)=400-336=64=8^2$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $N(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-20-8}{2\times(-2)}=\frac{-28}{-4}=7 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-20+8}{2\times(-2)}=\frac{-12}{-4}=3$$

Son coefficient dominant -2 étant négatif, son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$N(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement, le tableau de signe de $g'(x)$ et de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		3		5		7		$+\infty$
$N(x)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$(x-5)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
Variation de g	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-19	$\searrow$	$-\infty$

Deux images sont à calculer :

$$g(3)=\frac{-2\times 3^2+9\times 3-3}{3-5}=\frac{-18+27-3}{-2}=\frac{6}{-2}=\underline{-3}$$

$$g(7)=\frac{-2\times 7^2+9\times 7-3}{7-5}=\frac{-98+63-3}{-2}=\frac{-38}{2}=\underline{-19}$$

Une fois encore, les limites sont déduites de la courbe de la fonction g tracée avec la calculatrice.

Géométrie analytique

Nombres vs. points

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants :

$$A(5;5) \qquad B(-2;3) \qquad C(1;-4) \qquad D(3;-8,7)$$

Les normes de deux vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont égales à un centimètre.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y :

$$(S)\begin{cases} 9x-4y=25 \\ 4x+9y=19 \end{cases}$$

b. Le point D appartient-il à la droite (BC) ? On justifiera sa réponse.

c. On appelle E le quatrième sommet du parallélogramme ABDE.

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E.
2. Construire au compas le point E sur la figure ci-contre.

d. On appelle F le milieu du segment [AC].

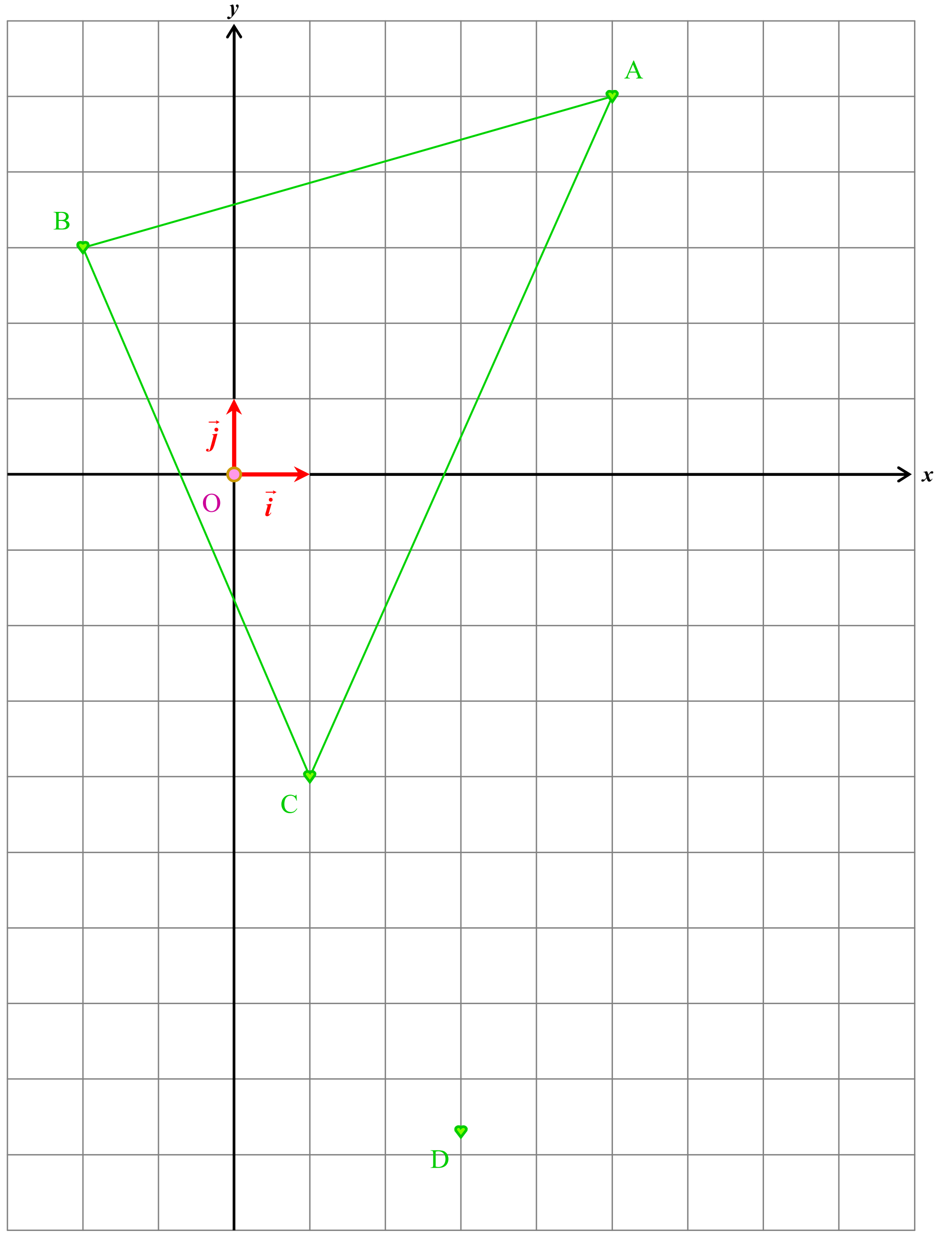
1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point F.
2. Placer le point F sur la figure.
3. Le triangle BAF est-il rectangle en F ? On justifiera sa réponse.

e. On appelle Δ la hauteur du triangle ABC issue du sommet B.

1. Déterminer une équation cartésienne de cette hauteur Δ.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC).
3. En déduire les coordonnées du pied P de la hauteur Δ, c'est-à-dire les coordonnées du point d'intersection des droites (AC) et Δ. On pourra s'aider de la question **a**.

f. On appelle d la droite d'équation $5x+3y-27=0$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
2. Tracer la droite d sur le graphique ci-contre.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G défini par la relation vectorielle :
$$7\times\overrightarrow{AG}+3\times\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}$$
4. Le point G appartient-il à la droite d ? On justifiera sa réponse.



g. On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient l'égalité :

$$x^2+y^2-2x+8y-41=0$$

1. Calculer la distance BC.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ).

Le corrigé

a. Nous allons résoudre le système $(S)\begin{cases}9x-4y=25\\4x+9y=19\end{cases}$ par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour trouver x, on élimine les y.	Pour obtenir y, on pulvérise les x.
(1) $\xrightarrow{\times 9}$ $81x-36y=225$ $\oplus$	*(1)* $\xrightarrow{\times 4}$ $36x-16y=100$ $\ominus$
(2) $\xrightarrow{\times 4}$ $16x+36y=76$	*(2)* $\xrightarrow{\times 9}$ $36x+81y=171$
$97x=301$	$-97y=-71$
$x=\dfrac{301}{97}$	$y=\dfrac{-71}{-97}=\dfrac{71}{97}$

Conclusion : le système (S) n'admet pour seule solution que le couple $\left(\dfrac{301}{97};\dfrac{71}{97}\right)$.

b. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-(-2)=3\\-4-3=-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3-(-2)=5\\-8,7-3=-11,7\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Pour le savoir, calculons leur déterminant !

$$\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)=\begin{vmatrix}3 & 5\\-7 & -11,7\end{vmatrix}=3\times(-11,7)-(-7)\times 5=-35,1+35=-0,1\neq 0$$

Conclusion : leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires. Donc le point D n'appartient pas à la droite (BC).

c.1. Comme ABDE est un parallélogramme, alors nous avons la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}x_E-3\\y_E-(-8,7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-(-2)\\5-3\end{pmatrix}}_{\text{Vecteurs égaux,...}}\Leftrightarrow\underbrace{x_E-3=7}_{\text{...abscisses égales,...}}\text{ et }\underbrace{y_E+8,7=2}_{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$x_E=10 \qquad y_E=-6,7$$

Conclusion : les coordonnées du point E sont $(10;-6,7)$.

d.1. Les coordonnées du milieu F du segment [AC] sont données par la formule :

$$x_F=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad \text{et} \quad y_F=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{5+(-4)}{2}=0,5$$

d.3. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{FA}\begin{pmatrix}5-3=2\\5-0,5=4,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}-2-3=-5\\3-0,5=2,5\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ? Pour répondre à cette interrogation, calculons leur produit scalaire:

$$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=\begin{pmatrix}2\\4,5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\2,5\end{pmatrix}=2\times(-5)+4,5\times 2,5=-10+11,25=1,25\neq 0$$

Conclusion : leur produit scalaire étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FB}$ ne sont pas orthogonaux. Donc le triangle BAF n'est pas rectangle en F.

e.1. La hauteur Δ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par B; c'est aussi l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

$$\begin{aligned}M(x;y)\in\Delta &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-9\end{pmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow (x+2)\times(-4)+(y-3)\times(-9)=0 \Leftrightarrow -4x-8-9y+27=0\\
&\Leftrightarrow -4x-9y+19=0 \xrightarrow{\times(-1)} 4x+9y-19=0\end{aligned}$$

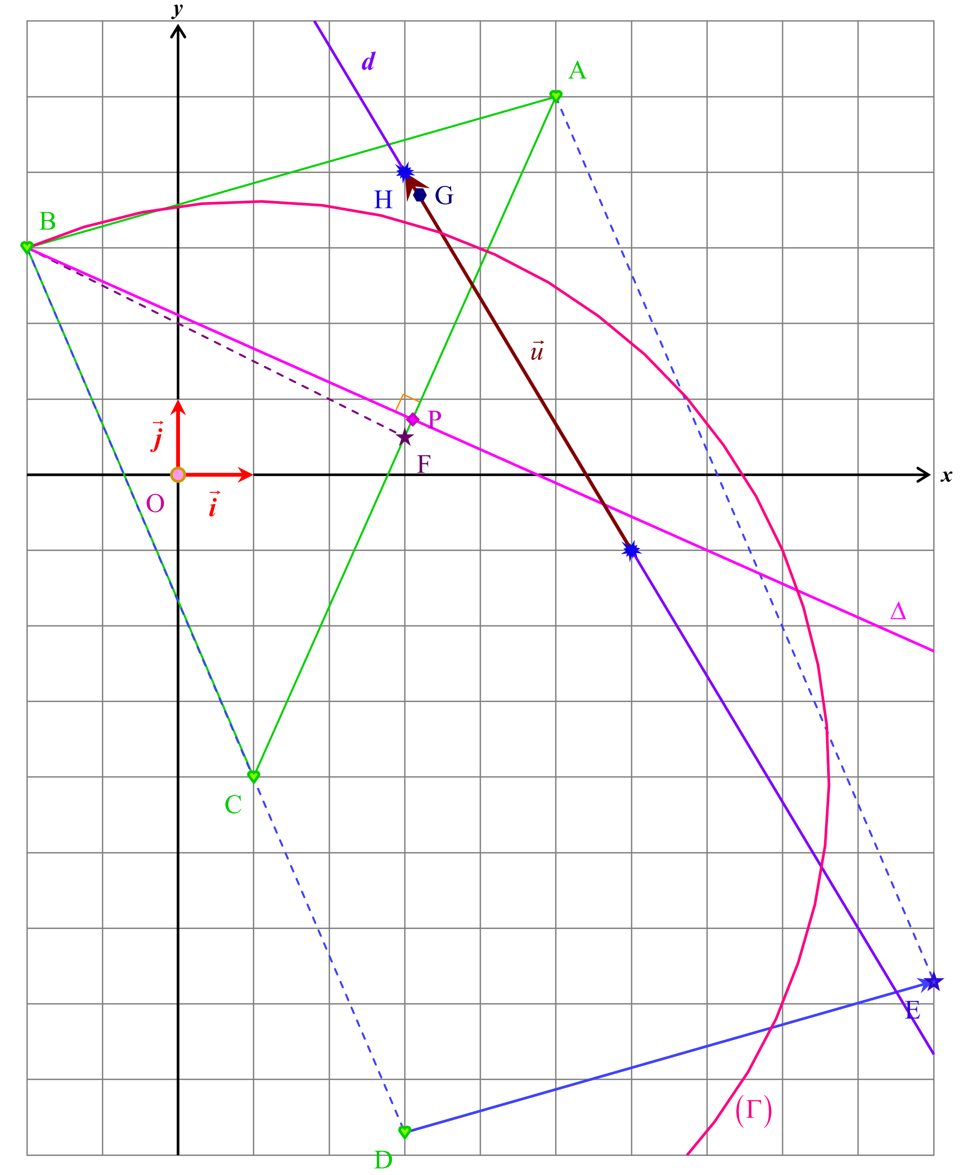
e.2. La droite (AC) peut être vue comme l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Ainsi :

$$\begin{aligned}M(x;y)\in(AC) &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-5 & -4\\y-5 & -9\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow (x-5)\times(-9)-(y-5)\times(-4)=0 \Leftrightarrow -9x+45+4y-20=0\\
&\Leftrightarrow -9x+4y+25=0 \xrightarrow{\times(-1)} 9x-4y-25=0\end{aligned}$$

e.3. Comme le point P appartient aux droites Δ et (AC), alors ses coordonnées $(x_P;y_P)$ en vérifient les deux équations cartésiennes. Autrement dit :

$$\left.\begin{aligned}P\in(AC) &\Leftrightarrow 9x_P-4y_P-25=0 \Leftrightarrow 9x_P-4y_P=25\\
P\in\Delta &\Leftrightarrow 4x_P+9y_P-19=0 \Leftrightarrow 4x_P+9y_P=19\end{aligned}\right\}(S)$$

D'après la question **a**, la solution de ce système est le couple $\left(\dfrac{301}{97};\dfrac{71}{97}\right)$. Ce sont les coordonnées du pied de la hauteur P.



f.1. Un vecteur directeur de la droite $d : \boxed{5}x + \boxed{3}y - 27 = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -\boxed{3} \\ \boxed{5} \end{pmatrix}$.

f.2. Pour tracer une droite, il faut deux points et une règle. En tâtonnant un peu, on remarque que la droite d passe par le point H de coordonnées $(3;4)$. En effet :

$$\underbrace{5x_H + 3y_H - 27 = 5\times 3 + 3\times 4 - 27 = 15 + 12 - 27 = 0}_{\text{Bref, les coordonnées de H vérifient l'équation de } d.}$$

En faisant arriver le vecteur directeur $\vec{u}$ H, on obtient un second point qui permet de tracer la droite d.

f.3. Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$7\times\overrightarrow{AG} + 3\times\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 7\times\begin{pmatrix} x_G - 5 \\ y_G - 5 \end{pmatrix} + 3\times\begin{pmatrix} x_G + 2 \\ y_G - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7x_G - 35 \\ 7y_G - 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_G + 6 \\ 3y_G - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 10x_G - 29 \\ 10y_G - 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{10x_G - 29 = 3}^{\text{Abscisses égales}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{10y_G - 44 = -7}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$10x_G = 32 \qquad 10y_G = 37$$

$$x_G = \frac{32}{10} = 3,2 \qquad y_G = \frac{37}{10} = 3,7$$

f.4. Regardons si les coordonnées du point G vérifient l'équation de la droite d.

$$\underbrace{5x_G + 3y_G - 27 = 5\times 3,2 + 3\times 3,7 - 27 = 16 + 11,1 - 27 = 0,1 \neq 0}_{\text{Bref, les coordonnées de G ne vérifient pas l'équation de } d.} \Rightarrow G \notin d$$

g.1. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ ayant pour coordonnées $(3;-7)$, la distance BC est donnée par :

$$BC = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$$

g.2. Tripatouillons l'égalité définissant l'ensemble (Γ)

$$M(x;y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+8y-41=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2-2\times x\times 1}_{\text{Début d'une...}}+\underbrace{y^2+2\times x\times 4}_{\text{Autre début...}}-41=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2-1^2}_{\text{...identité remarquable.}}+\underbrace{(y+4)^2-4^2}_{\text{...d'une identité.}}-41=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-(-4))^2-58=0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_C)^2+(y-y_C)^2=58 \Leftrightarrow CM^2=BC^2$$

$$\Leftrightarrow \text{M} \in \text{cercle de centre C et passant par B ou de rayon } \sqrt{58}$$

Conclusion : (Γ) est le cercle de centre C passant par B.

Analytique story

L'énoncé

Sur la figure ci-après, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants :

$$A(-3;-2) \qquad B(1;3) \qquad C(4;-5)$$

Les normes de deux vecteurs de base sont égales à un centimètre.

a. On appelle Δ la médiatrice du segment [AC]. d est la droite dont une équation cartésienne est $3x+2y=2$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ.
2. Le point C appartient-il à la droite d ? On justifiera sa réponse.
   Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
   Tracer la droite d sur la figure ci-contre.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des droites d et Δ.

b. On appelle $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'égalité :

$$\left\|3\times\overrightarrow{AM}+2\times\overrightarrow{BM}\right\|=7$$

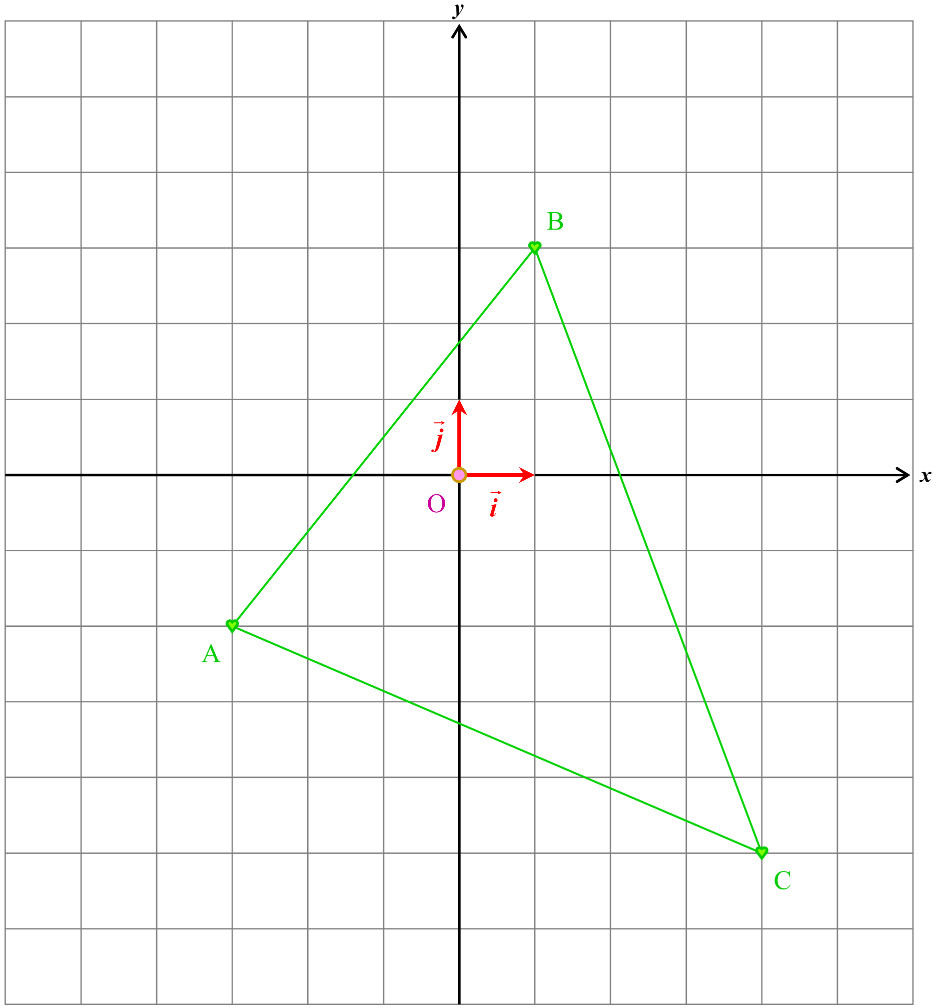
1. Etablir qu'une équation cartésienne de $(\mathcal{E})$ est $x^2+y^2+2{,}8x=0$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $(\mathcal{E})$.

Le corrigé

a.1. La médiatrice Δ est la perpendiculaire à la droite (AC) passant par le milieu I du segment éponyme. En d'autres termes, la droite Δ est définie par :

Δ passe par le milieu I de coordonnées
$$x_I=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}=0{,}5$$
$$y_I=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-2+(-5)}{2}=\frac{-7}{2}=-3{,}5$$

a pour vecteur normal $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-(-3)=7\\-5-(-2)=-3\end{pmatrix}$



Par conséquent :

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in\Delta &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{IM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0,5 \\ y-(-3,5)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -3\end{pmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow (x-0,5)\times 7+(y+3,5)\times(-3)=0 \Leftrightarrow 7x-3,5-3y-10,5=0\\
&\Leftrightarrow 7x-3y-14=0
\end{aligned}$$

Conclusion : une équation de la médiatrice Δ est $7x-3y=14$.

a.2. Les coordonnées du point C vérifient-elles l'équation de la droite d ?

$$3x_C+2y_C=3\times 4+2\times(-5)=12-10=2$$

Conclusion : ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point C appartient à la droite d.

➲ Un vecteur directeur de la droite d d'équation $\boxed{3}x+\boxed{2}y-2=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -\boxed{2} \\ \boxed{3}\end{pmatrix}$.

La droite d se trace en positionnant le vecteur directeur $\vec{u}$ au départ de C. On obtient alors un second point de la droite qui a pour coordonnées $(2;-2)$.

a.3. K étant le point d'intersection des deux droites d et Δ, il en vérifie les deux équations :

$$\left.\begin{array}{lll} K\in d & \Leftrightarrow & 3x_K+2y_K=2 \quad \textit{(1)} \\ K\in\Delta & \Leftrightarrow & 7x_K-3y_K=14 \quad \textit{(2)}\end{array}\right\}(S)$$

Pour résoudre ce système, nous allons procéder par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour obtenir x_K, on anéantit les y_K.	Pour trouver y_K, on pulvérise les x_K.
(1) $\xrightarrow{\times 3}$ $9x_K-6y_K=6$ $\oplus$ *(2)* $\xrightarrow{\times 2}$ $14x_K+6y_K=28$ $23x_K=34$ $x_K=\dfrac{34}{23}$	*(1)* $\xrightarrow{\times 7}$ $21x_K+14y_K=14$ $\ominus$ *(2)* $\xrightarrow{\times 3}$ $21x_K-9y_K=42$ $23y_K=-28$ $y_K=\dfrac{-28}{23}=-\dfrac{28}{23}$

Conclusion : le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{34}{23};-\dfrac{28}{23}\right)$.

b.1. Les coordonnées du vecteur $3\times\overrightarrow{AM}+2\times\overrightarrow{BL}$ sont :

$$3\times\begin{pmatrix} x+3 \\ y+2\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+9 \\ 3y+6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x+7 \\ 5y\end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in(\mathcal{E}) &\Leftrightarrow \left\|3\times\overrightarrow{AM}+2\times\overrightarrow{BM}\right\|=7 \xrightarrow{\text{Carré}} \left\|3\times\overrightarrow{AM}+2\times\overrightarrow{BM}\right\|^2=7^2\\
&\Leftrightarrow (5x+7)^2+(5y)^2=49\\
&\Leftrightarrow 25x^2+70x+\cancel{49}+25y^2-\cancel{49}=0\\
&\Leftrightarrow 25x^2+25y^2+70x=0 \xrightarrow{\div 25} x^2+y^2+2,8x=0
\end{aligned}$$

b.2. Poursuivons le raisonnement par équivalence précédent :

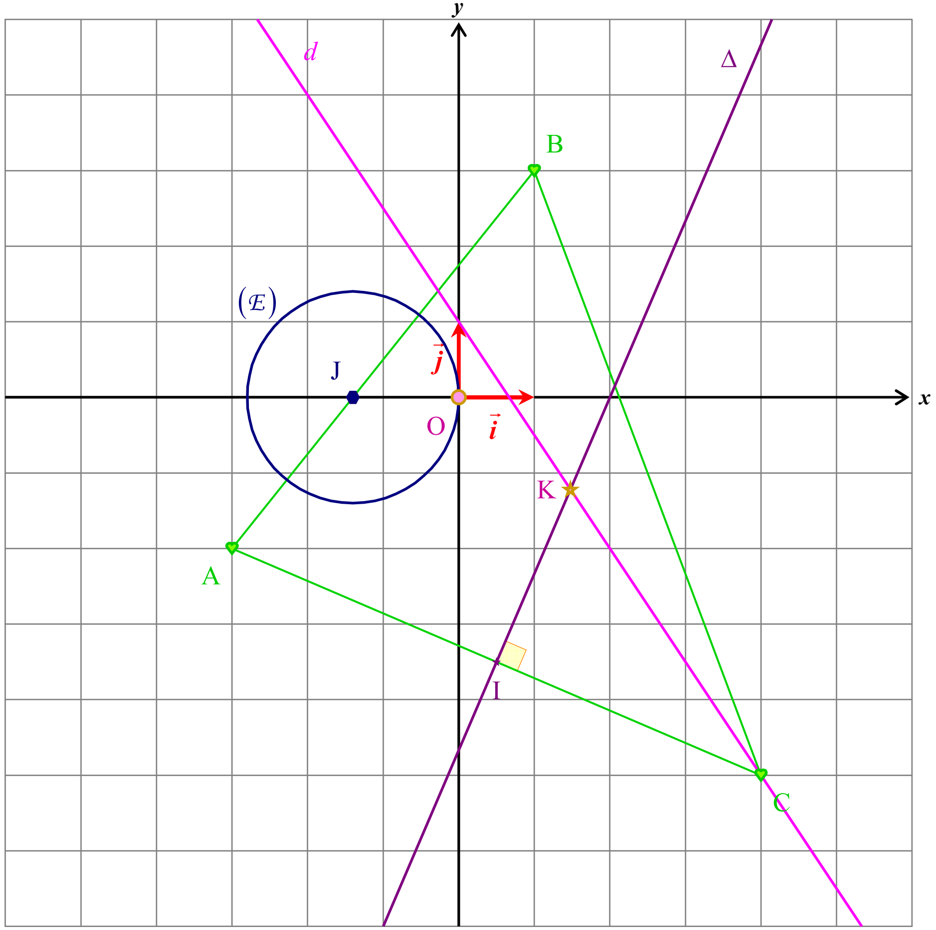
$$\mathrm{M}(x;y)\in(\mathcal{E}) \Leftrightarrow x^2+2{,}8x+y^2=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2+2\times x\times 1{,}4}_{\text{Début d'une...}}+y^2=0 \Leftrightarrow \underbrace{(x+1{,}4)^2-1{,}4^2}_{\text{...identité remarquable.}}+(y-0)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-(-1{,}4))^2+(y-0)^2=1{,}4^2}$$

Conclusion : l'ensemble $(\mathcal{E})$ est le cercle de centre $\mathrm{J}(-1{,}4;0)$ et de rayon 1,4, donc passant par l'origine O.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Géométrie classique

Tortillard vectoriel

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, SNCF est un parallélogramme de dimensions :

$\text{SN} = 7 \text{ cm} \qquad \text{SF} = 8 \text{ cm} \qquad \text{SC} = 10 \text{ cm}$

Tous les côtés et une diagonale de ce parallélogramme ont été partagés en un certain nombre de parties égales.
Trois parallèles aux côtés ont été tracées en tirets dans la même couleur que ces côtés.

a. Compléter les égalités ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

$\overrightarrow{SA} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{SC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{AS}$

$\overrightarrow{SB} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{SN} + \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{SF}$ $\qquad$ $\overrightarrow{SD} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{SN}$

b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{SN}$ et $\overrightarrow{SF}$. C'est-à-dire que l'on recherche une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{SN} + \ldots\ldots \times \overrightarrow{SF}$

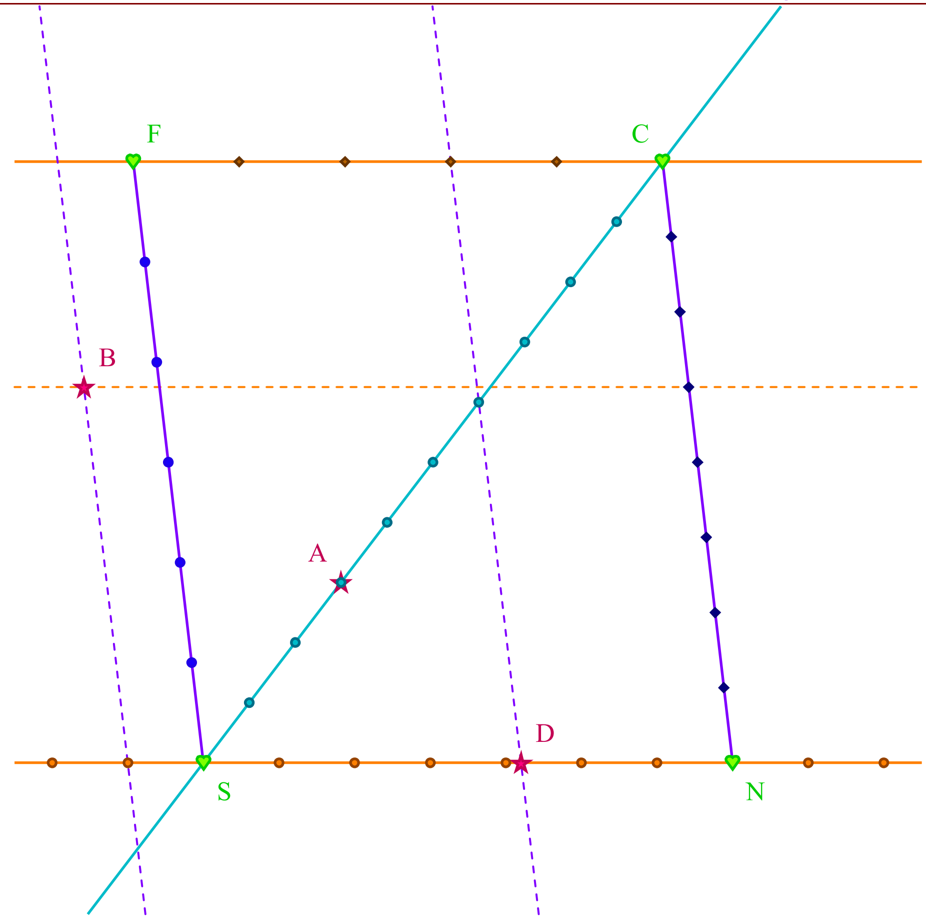
c. Sur la figure ci-contre, placer les points suivants. Le cas échéant, la construction devra être faite à la règle et au compas. On laissera apparents les traits de construction.

1. Le point E défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{SE} = -\dfrac{1}{3} \times \overrightarrow{SF}$.
2. Le point G défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{8} \times \overrightarrow{NC}$
3. Le point H défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{BH} = \dfrac{1}{2} \times \overrightarrow{SF} + \dfrac{3}{7} \times \overrightarrow{SN}$

d. Le point L est défini par la relation vectorielle $4 \times \overrightarrow{FL} + 7 \times \overrightarrow{NL} = \overrightarrow{0}$.

1. Par un calcul vectoriel, exprimer le vecteur $\overrightarrow{NL}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{NF}$. C'est-à-dire que l'on souhaite aboutir à une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{NL} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{NF}$.
2. Placer le point L sur la figure ci-dessous.

e. Démontrer que le point K défini par la relation $\overrightarrow{SK} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CK}$ est une chimère, c'est-à-dire qu'il n'existe pas.



Le corrigé

a. Les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$ ont même direction et même sens; mais le premier mesure 3 centimètres alors que le second en fait 10. Par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{SA} = \dfrac{3}{10} \times \overrightarrow{SC} = 0,3 \times \overrightarrow{SC}}$

➲ Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$ ont la même direction mais ils ont des sens opposés; le premier mesure 7 centimètres et le second 3. Par suite : $\boxed{\overrightarrow{AC} = -\dfrac{7}{3} \times \overrightarrow{AS}}$

➲ En s'appuyant sur un certain parallélogramme de diagonale [SB] et dont deux des côtés sont portés par les droites (SN) et (SF), nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{SB} = -\frac{1}{7} \times \overrightarrow{SN} + \frac{5}{8} \times \overrightarrow{NC} = \boxed{-\frac{1}{7} \times \overrightarrow{SN} + \frac{5}{8} \times \overrightarrow{SF}}$$

➲ En s'appuyant sur la parallèle à la droite (SF) passant par D, il vient :

$$\overrightarrow{SD} = \frac{3}{5}\times\overrightarrow{FC} = \boxed{\frac{3}{5}\times\overrightarrow{SN}}$$

b. En s'appuyant sur la figure, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}\\
&= -\frac{3}{10}\times\overrightarrow{SC}-\frac{1}{7}\times\overrightarrow{SN}+\frac{5}{8}\times\overrightarrow{SF}\\
&= -\frac{3}{10}\times\underbrace{\left(\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{NC}\right)}_{\text{Chasles par N}}-\frac{1}{7}\times\overrightarrow{SN}+\frac{5}{8}\times\overrightarrow{SF}\\
&= -\frac{3}{10}\times\overrightarrow{SN}-\frac{3}{10}\times\underbrace{\overrightarrow{NC}}_{\text{Ega...}}-\frac{1}{7}\times\overrightarrow{SN}+\frac{5}{8}\times\underbrace{\overrightarrow{SF}}_{\text{...ux}}\\
&= \left(-\frac{3}{10}-\frac{1}{7}\right)\times\overrightarrow{SN}+\left(-\frac{3}{10}+\frac{5}{8}\right)\times\overrightarrow{SF} = \frac{-3\times7-1\times10}{70}\times\overrightarrow{SN}+\frac{-3\times4+5\times5}{40}\times\overrightarrow{SF}\\
&= \boxed{-\frac{31}{70}\times\overrightarrow{SN}+\frac{13}{40}\times\overrightarrow{SF}}
\end{aligned}$$

c. Les points E, G et H se placent au compas en construisant des parallélogrammes pour les deux derniers ainsi que cela est fait sur la figure ci-contre ⇨

d.1. Le point L est défini par la relation vectorielle $4\times\overrightarrow{FL}+7\times\overrightarrow{NL}=\vec{0}$ et l'on veut aboutir à une relation de la forme $\overrightarrow{NL}=\ldots\ldots\times\overrightarrow{NF}$. Clairement, le vecteur $\overrightarrow{FL}$ doit disparaître et le vecteur $\overrightarrow{NF}$ doit apparaître. Avec la relation de Chasles, bien sûr !

$$4\times\overrightarrow{FL}+7\times\overrightarrow{NL}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\times\underbrace{\left(\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{NL}\right)}_{\text{Chasles par N}}+7\times\overrightarrow{NL}=\vec{0} \Leftrightarrow 4\times\overrightarrow{FN}+4\times\overrightarrow{NL}+7\times\overrightarrow{NL}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\times\overrightarrow{FN}+11\times\overrightarrow{NL}=\vec{0} \Leftrightarrow 11\times\overrightarrow{NL}=\vec{0}-4\times\overrightarrow{FN}$$

$$\Leftrightarrow 11\times\overrightarrow{NL}=4\times\overrightarrow{NF} \xrightarrow{\div 11} \boxed{\overrightarrow{NL}=\frac{4}{11}\times\overrightarrow{NF}}$$

d.2. Le point L se trouve aux quatre onzièmes du segment [NF] à partir de N. Ce dernier mesurant environ 11,2 centimètres, la distance entre N et L est égale à $\frac{4}{11}\times 11{,}2\approx\boxed{4{,}1\text{ cm}}$

e. S'il existe, le point K est défini par la relation vectorielle :

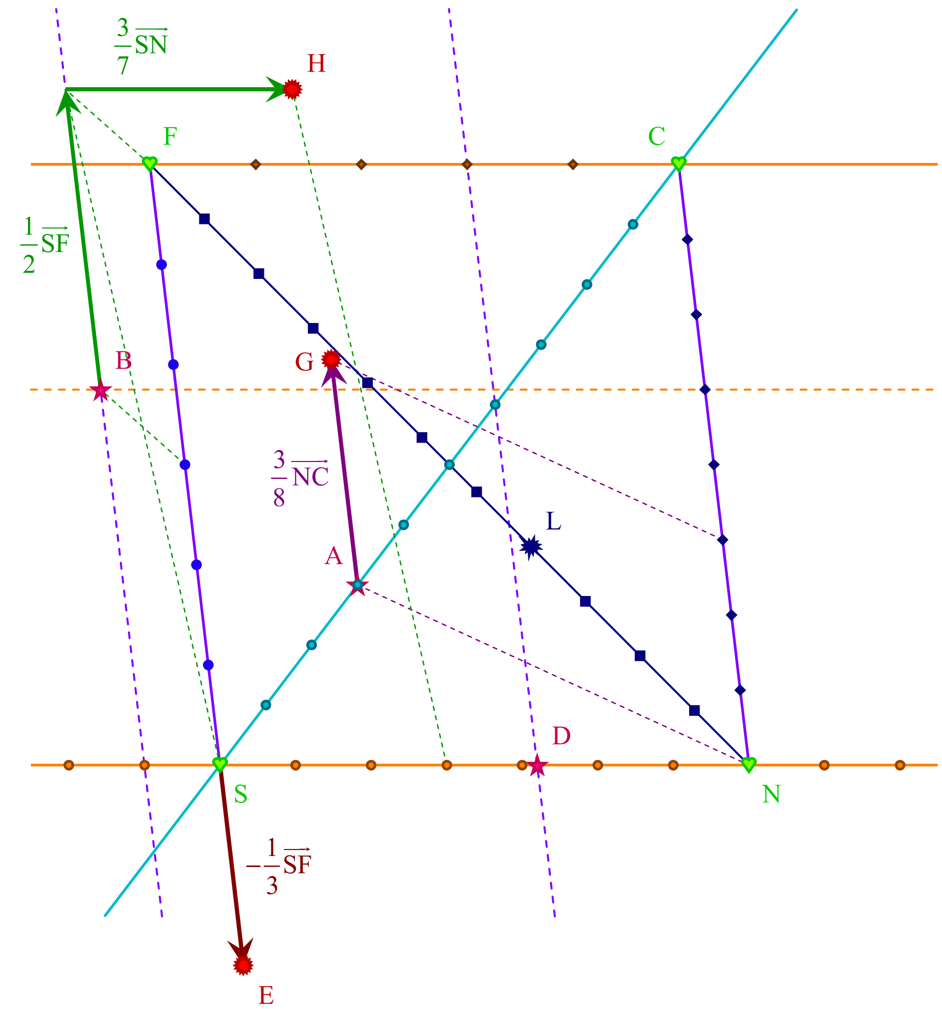
$$\overrightarrow{SK}+\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CK} \Leftrightarrow \overrightarrow{SK}+\overrightarrow{NK}-\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{CK}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{SK}+\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\overrightarrow{SK}+\overrightarrow{KF}}+\underline{\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{KC}}=\vec{0} \Leftrightarrow \underline{\overrightarrow{SF}}+\underline{\overrightarrow{NC}}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{SF}=\vec{0} \xrightarrow{\div 2} \overrightarrow{SF}=\vec{0}$$

Or le vecteur $\overrightarrow{SF}$ n'est pas nul ! Par conséquent, le point K n'existe pas car la relation vectorielle le définissant est fausse.

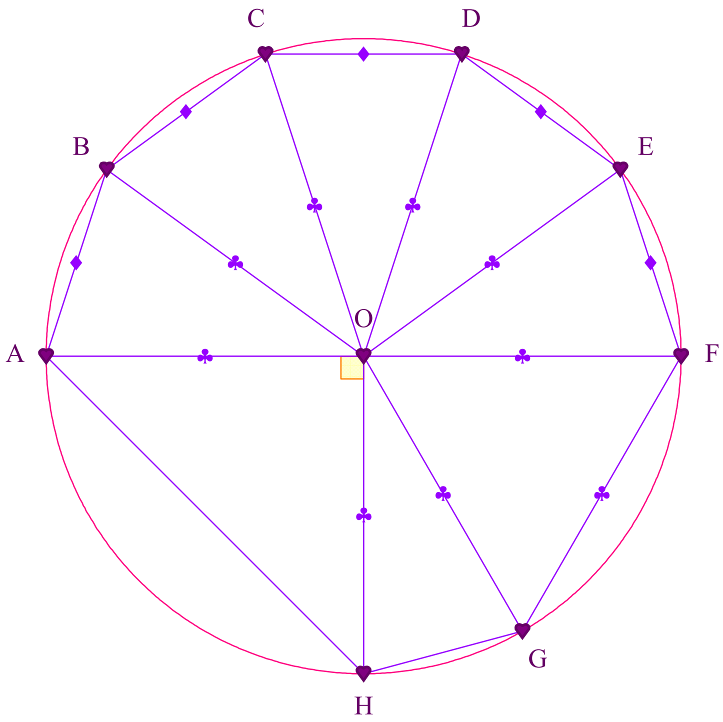
A l'issue de la construction, la figure est la suivante :



Combattre les angles dans l'octogone

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, les points A, B, C, D, E, F, G et H appartiennent tous au même cercle de centre O. Ensuite, le quadrilatère ABCDEF est la moitié d'un décagone régulier. Puis, le triangle OFG est équilatéral. Enfin, le triangle AOH est rectangle et isocèle en O.



Déterminer les mesures principales exactes exprimées en radians des angles orientés suivants.

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DE}\right)=\ldots\ldots$

$\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{OB}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{FG}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{FG}\right)=\ldots\ldots$

Le corrigé

➲ Le triangle OAH étant rectangle en O, nous avons : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OH}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π

➲ Le demi-décagone ABCDEF partage l'angle plat $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}\right)=\pi$ modulo 2π en cinq parties égales. Par conséquent : $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)=-\dfrac{\pi}{5}$ modulo 2π

➲ Le triangle OFG étant équilatéral, chacun des ses angles au sommet mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

Par conséquent, l'angle géométrique $\widehat{GOH}$ mesure $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi\times 3}{6}-\dfrac{\pi\times 2}{6}=\dfrac{\pi}{6}$.

Nous en concluons : $\left(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$ modulo 2π

➲ Le triangle ODE est isocèle en O et l'angle géométrique en ce sommet mesure $\dfrac{\pi}{5}$ radians.

Donc, les deux autres angles aux sommets D et E doivent se partager équitablement le restant sur $\pi=180°$.

L'angle géométrique au sommet E mesure : $\dfrac{1}{2}\times\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5\pi-\pi}{5}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{2\pi}{5}$

Nous en concluons : $\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DE}\right)=\dfrac{2\pi}{5}$ modulo 2π

➲ Utilisant la relation de Chasles pour les angles orientés, nous pouvons écrire :

$$\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG}\right)=\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FO}\right)+\left(\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FG}\right)=\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi\times 3}{15}+\frac{\pi\times 5}{15}=\frac{6\pi+5\pi}{15}=\frac{11\pi}{15}\text{ modulo }2\pi$$

➲ Employant certaines propriétés des angles orientés :

$$\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{OB}\right)=\left(-\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)+\pi$$
$$=\frac{2\pi}{5}+\pi=\frac{2\pi+\pi\times 5}{5}=\frac{7\pi}{5}=-\frac{3\pi}{5}\text{ modulo }2\pi$$

➲ Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{OF}$ étant colinéaires et de même sens, ils définissent la même demi-direction. En conséquence, nous pouvons écrire :

$$\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{FG}\right)=\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{FG}\right)=\left(-\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FG}\right)=\left(\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FG}\right)+\pi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}\text{ modulo }2\pi$$

➲ Utilisant la relation de Chasles pour les angles orientés, nous pouvons écrire :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{FG}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)+\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{FG}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)+\left(-\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FG}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)+\left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FG}\right)+\pi$$
$$=\frac{-2\pi}{5}+\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{-2\pi\times 3+\pi\times 5+\pi\times 15}{15}=\frac{-6\pi+20\pi}{15}=\frac{14\pi}{15}\text{ modulo }2\pi$$

Crucifixion circulaire

L'énoncé

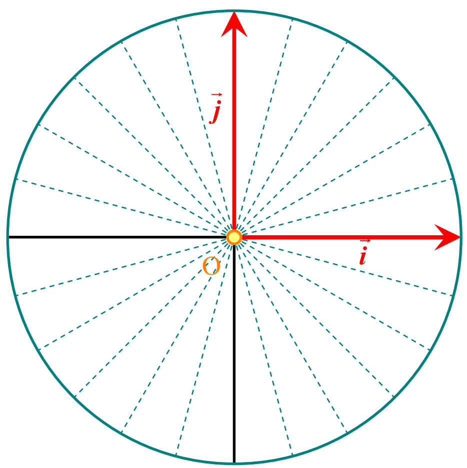
a. α est un réel quelconque. Exprimer les cosinus et sinus suivants en fonction de $\cos(\alpha)$ ou de $\sin(\alpha)$. Aucune justification n'est demandée.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad\sin(\pi-\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos(2\pi-\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad\sin(\alpha-2\pi) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b. Résoudre dans ℝ l'équation d'inconnue t qu'est : $2\times\cos(3t)+\sqrt{2}=0$.

Puis, donner toutes les solutions se trouvant dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ et les représenter sur le cercle trigonométrique ci-dessous qui a été partagé en 24 parties égales.



Le corrigé

a. Les propriétés complétées sont les suivantes.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\alpha) \qquad \sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\alpha) \qquad \cos(2\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\left[-\sin(\alpha)\right]=\sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha-2\pi)=\sin(\alpha)$$

b. Résolvons l'équation proposée d'abord dans ℝ :

$$2\times\cos(3t)+\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \cos(3t)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(3t)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{3t=\frac{3\pi}{4}+k\times2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad 3t=-\frac{3\pi}{4}+l\times2\pi}^{\text{où } k \text{ et } l \text{ sont deux entiers relatifs}}$$

$$t=\frac{\pi}{4}+k\times\frac{2\pi}{3} \qquad t=-\frac{\pi}{4}+l\times\frac{2\pi}{3}$$

Les solutions se trouvant sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ sont :

Solutions de la forme $\frac{\pi}{4}+k\times\frac{2\pi}{3}$

$k=0 \quad : \quad \frac{\pi}{4}+0\times\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$

$k=1 \quad : \quad \frac{\pi}{4}+1\times\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{12}+\frac{8\pi}{12}=\frac{11\pi}{12}$

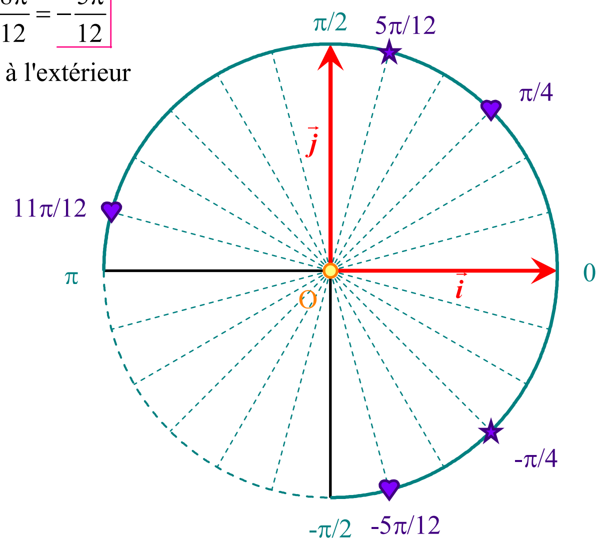
$k=-1 \quad : \quad \frac{\pi}{4}+(-1)\times\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{12}-\frac{8\pi}{12}=-\frac{5\pi}{12}$

Solutions de la forme $-\frac{\pi}{4}+l\times\frac{2\pi}{3}$

$l=0 \quad : \quad -\frac{\pi}{4}+0\times\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}$

$l=1 \quad : \quad -\frac{\pi}{4}+1\times\frac{2\pi}{3}=-\frac{3\pi}{12}+\frac{8\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$

Toutes les autres solutions vues sont à l'extérieur de l'intervalle.
Ces cinq solutions ont été représentées sur le cercle trigonométrique ci-contre.



Il est bon le coscos !

L'énoncé

t étant un réel quelconque, exprimer en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ l'expression :

$$A(t)=\cos\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$$

Le corrigé

Utilisant les formules d'addition des cosinus et sinus, nous pouvons écrire :

$$A(t)=\cos\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos(t)\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin(t)\times\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(t)\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\cos(t)$$

$$=\cos(t)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cancel{-\sin(t)\times\frac{\sqrt{3}}{2}}\cancel{+\sin(t)\times\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{2}\times\cos(t)=\boxed{-\cos(t)}$$

Imbroglio scalaire

L'énoncé

Sur la figure ci-contre :

- ABCD est un parallélogramme tel que $AB=7$ cm $AC=6$ cm $AD=4$ cm
- ADEF est un losange de centre I; les points E, A et B sont alignés.
- ABG est un triangle équilatéral; les points D, A et G ne sont pas alignés.

a. Donner les valeurs exactes des trois produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{BA}=\ldots\ldots$ $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\ldots\ldots$ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=\ldots\ldots$

b. Prouver que le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ est égal à $-\frac{29}{2}$.

c. Déduire de la question **b.** une valeur approchée au centième de degré près de l'angle géométrique $\widehat{BAD}$.

d. Le but de cette question est le calcul de la longueur AI.

1. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$ en fonction des longueurs AI et AB. On justifiera brièvement sa réponse.
2. Montrer que $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$
3. En déduire que $AI=\frac{29}{14}$

e. Calculer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{BE}$.

Le corrigé

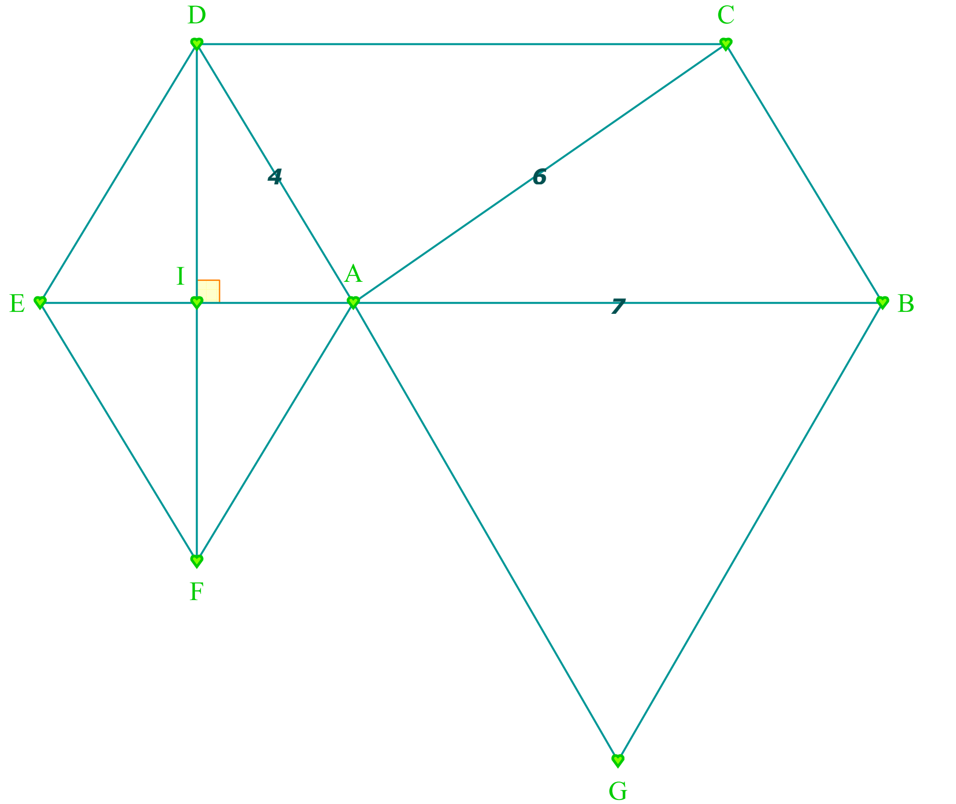
a. Les vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{BA}$ étant orthogonaux, leur produit scalaire $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{BA}$ est nul.

Ensuite, le triangle ABG étant équilatéral de côté 7, l'angle au sommet $\widehat{AGB}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ radians et :

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=GA\times GB\times\cos\left(\widehat{AGB}\right)=7\times7\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=49\times\frac{1}{2}=\boxed{24{,}5}.$$

Enfin, ABCD étant un parallélogramme, les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux et :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}^2=BA^2=7^2=\boxed{49}$$



b. Comme ABCD est un parallélogramme, alors, en application de la règle éponyme, nous avons :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}_{\text{Chasles s'applique}}=\overrightarrow{AC}$$

Utilisant l'expression du produit scalaire en fonction des normes, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\times\left[\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right]=\frac{1}{2}\times\left[\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-AB^2-AD^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[AC^2-AB^2-AD^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[6^2-7^2-4^2\right]=\frac{1}{2}\times[36-49-16]=\frac{1}{2}\times(-29)=-14{,}5$$

c. Une autre expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ est :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos\left(\widehat{BAD}\right)\Leftrightarrow -14{,}5=7\times4\times\cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

$$\Leftrightarrow -14{,}5=28\times\cos\left(\widehat{BAD}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{BAD}\right)=\frac{-14{,}5}{28}\Leftrightarrow \widehat{BAD}=\arccos\left(-\frac{29}{56}\right)$$

$$\approx 121{,}19°$$

d.1. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires mais de sens opposés, alors nous avons :

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=-AI\times AB$$

d.2. Introduisant le point D dans le vecteur $\overrightarrow{AI}$, nous pouvons écrire en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\underbrace{\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AB}}_{\text{Ces deux vecteurs sont orthogonaux}}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+0=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$

d.3. Combinant les résultats des deux questions précédentes, il vient :

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow -AI\times AB=-14{,}5\Leftrightarrow AI\times7=14{,}5\Leftrightarrow AI=\frac{14{,}5}{7}=\frac{29}{7}$$

e. On appelle J le milieu du segment [AB].
Comme le triangle ABG est équilatéral, alors le point J est aussi le pied de la hauteur du triangle ABG issue de G. Autrement dit, les droites (AB) et (JG) sont perpendiculaires.

Décomposons le vecteur $\overrightarrow{DG}$ en passant par les points I et J, puis nous développerons.

$$\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JG}\right)\cdot\overrightarrow{BE}$$

$$=\underbrace{\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{BE}}_{\text{Vecteurs orthogonaux}}+\underbrace{\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{BE}}_{\text{Colinéaires de sens opposés}}+\underbrace{\overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{BE}}_{\text{Vecteurs orthogonaux}}=0+(-IJ\times BE)+0=-IJ\times BE$$

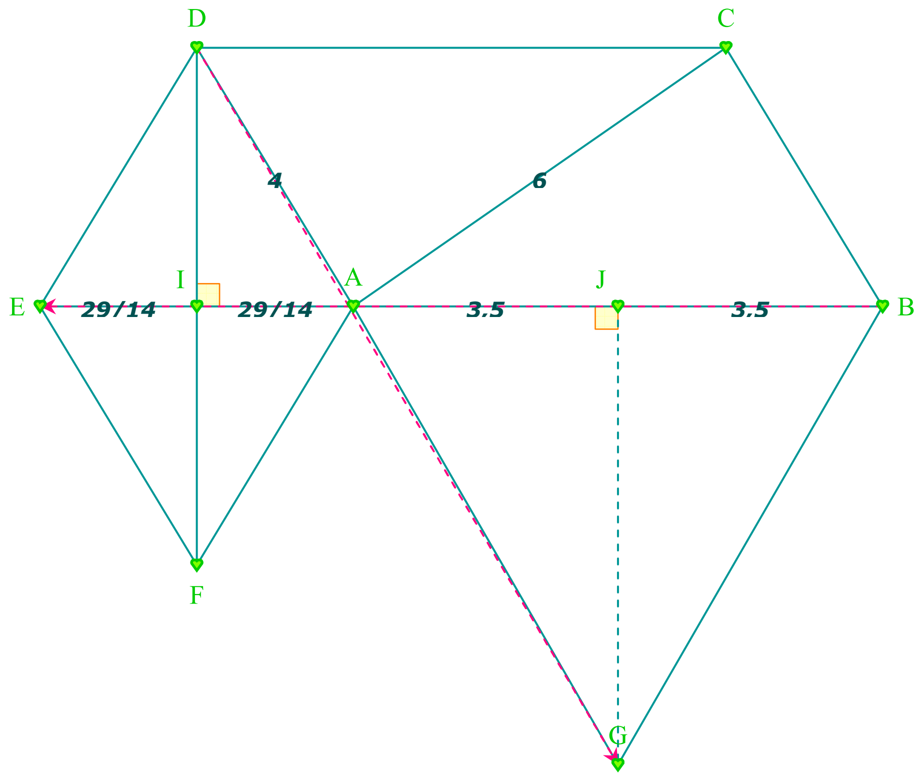
Il nous reste à déterminer les valeurs de ces deux dernières longueurs. Compte tenu de la figure :

$$IJ=\frac{29}{14}+\frac{7}{2}=\frac{29}{14}+\frac{49}{14}=\frac{78}{14}=\frac{39}{7}$$

$$BE=7+2\times\frac{29}{14}=7+\frac{29}{7}=\frac{49}{7}+\frac{29}{7}=\frac{78}{7}$$

Nous en concluons :

$$\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{BE} = -IJ\times BE = -\frac{39}{7}\times\frac{78}{7} = \underline{-\frac{3042}{49}}$$



Quand scalaire rime avec enfer

L'énoncé

Sur la figure ci-après :

- ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 7$ cm $AC = 8$ cm $AD = 5$ cm
- ABE est un triangle tel que $\widehat{EAB} = 60°$ et $\widehat{EBA} = 45°$.
- Le point F est le symétrique du point A par rapport à D.

a. Calculer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$, puis en déduire une valeur approchée au centième de degré près de l'angle géométrique $\widehat{BCD}$.

b. Déterminer une mesure au centième de degré près de l'angle géométrique $\widehat{CAD}$.

c. Calculer une valeur approchée au dixième de millimètre près des longueurs AE et BE.

d. Une version du théorème de la médiane appliquée dans le triangle CAF permet d'écrire une égalité commençant par :

$$CA^2 + CF^2 = \ldots\ldots$$

4. Compléter l'égalité précédente.
5. En utilisant le produit scalaire et le milieu D du segment [AF], démontrer l'égalité précédente ainsi que cela a été fait en cours.
6. En déduire la longueur du côté [CF].

e. Déterminer la nature et les attributs des ensembles de points suivants. Le cas échéant, il faudra introduire des points que l'on définira et placera sur la figure.

1. L'ensemble $(\mathcal{E}_1)$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -6$.
2. L'ensemble $(\mathcal{E}_2)$ des points M du plan tels que $MB^2 - ME^2 = 0$.
3. L'ensemble $(\mathcal{E}_3)$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CM} = -5$.

Le corrigé

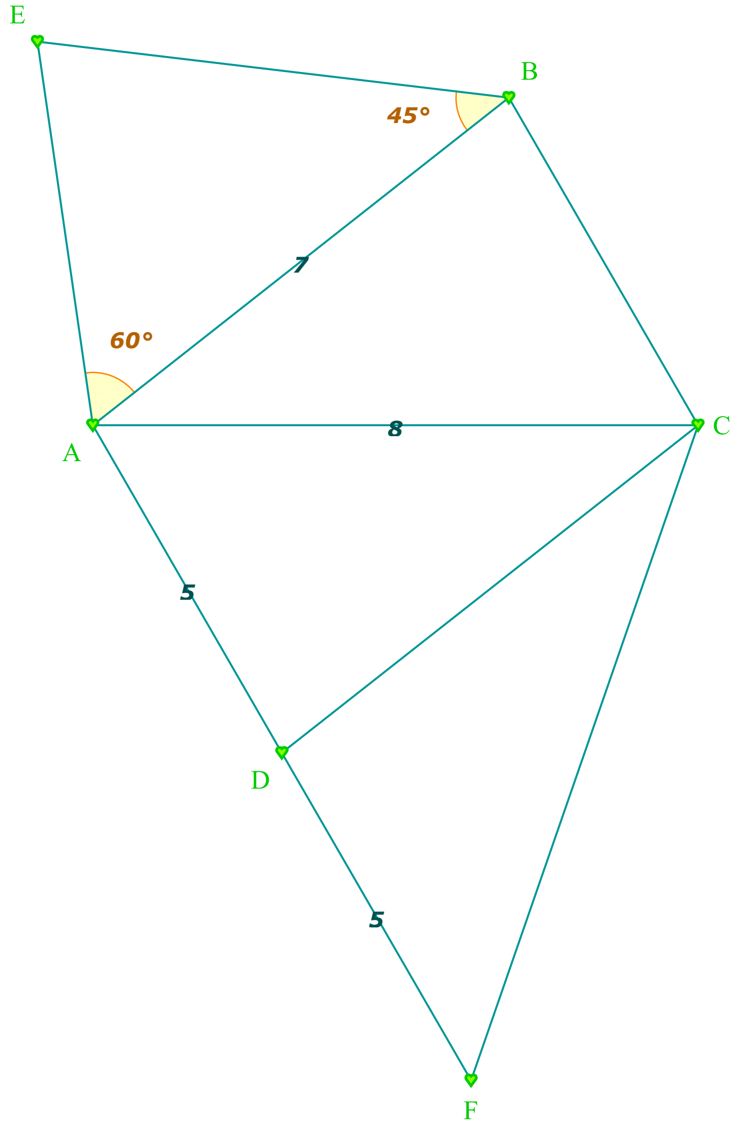
a. Comme ABCD est un parallélogramme,en application de la règle éponyme, nous avons :

$$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD} = \underbrace{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}}_{\text{Chasles s'applique}} = \underline{\overrightarrow{CA}}$$

Utilisant l'expression du produit scalaire en fonction des normes, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\times\left[\left\|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2\right] = \frac{1}{2}\times\left[CA^2 - CB^2 - CD^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times\left[8^2 - 5^2 - 7^2\right] = \frac{1}{2}\times\left[64 - 25 - 49\right] = \frac{1}{2}\times(-10) = \underline{-5}$$



➲ Une autre expression du produit scalaire $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$ est :

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = CB\times CD\times\cos\left(\widehat{BCD}\right) \Leftrightarrow -5 = 7\times 5\times\cos\left(\widehat{BCD}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{BCD}\right) = -\frac{5}{35} \Leftrightarrow \widehat{BAD} = \arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$\approx 98{,}21°$$

b. Appliquant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ACD, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{CD^2}_{\text{L'opposé à A}} = \underbrace{AC^2 + AD^2 - 2\times AC\times AD\times\cos\left(\widehat{CAD}\right)}_{\text{Les adjacents à A}}$$

$$\Leftrightarrow 7^2 = 8^2 + 5^2 - 2\times 8\times 5\times\cos\left(\widehat{CAD}\right) \Leftrightarrow 49 = 89 - 80\times\cos\left(\widehat{CAD}\right)$$

$$\Leftrightarrow -40 = -80\times\cos\left(\widehat{CAD}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{CAD}\right) = \frac{-40}{-80} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{CAD} = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 60°$$

c. La somme des trois angles du triangle ABE mesurant 180°, il y a $180° - 60° - 45° = 75°$ au sommet E.
Appliquant la loi des sinus dans le triangle ABE, nous pouvons écrire :

$$\frac{BE}{\sin\left(\hat{A}\right)} = \frac{AE}{\sin\left(\hat{B}\right)} = \frac{AB}{\sin\left(\hat{E}\right)} \Leftrightarrow \frac{BE}{\sin(60°)} = \frac{AE}{\sin(45°)} = \frac{7}{\sin(75°)}$$

Considérant juste les égalités qui nous intéressent dans la précédente double-égalité, nous pouvons écrire :

$$\frac{AE}{\sin(45°)} = \frac{7}{\sin(75°)} \Leftrightarrow AE = \frac{7}{\sin(75°)}\times\sin(45°) = 7\times\frac{\sin(45°)}{\sin(75°)} = \underbrace{7\sqrt{3}-7}_{\approx 5{,}12}$$

$$\frac{BE}{\sin(60°)} = \frac{7}{\sin(75°)} \Leftrightarrow AE = \frac{7}{\sin(75°)}\times\sin(60°) = 7\times\frac{\sin(60°)}{\sin(75°)} = \underbrace{\frac{21\sqrt{2}-7\sqrt{6}}{2}}_{\approx 6{,}28}$$

d.1. Comme D est le milieu du segment [AF], alors, en application d'une variante du théorème de la médiane, nous pouvons écrire :

$$CA^2 + CF^2 = 2\times CD^2 + \frac{AF^2}{2} = 2\times CD^2 + \frac{10^2}{2} = 2\times CD^2 + \frac{100}{2} = 2\times CD^2 + 50$$

d.2. D'abord, le point D étant le milieu du segment [AF], les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont opposés et leur somme est nulle.

Ensuite, le carré d'une norme étant égal à un carré scalaire, nous pouvons écrire :

$$CA^2+CF^2=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CF}^2=\underbrace{\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)^2}_{\text{Première...}}+\underbrace{\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}\right)^2}_{\text{Seconde...}}$$

$$=\underbrace{\overrightarrow{CD}^2+2\times\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}^2}_{\text{...identité remarquable}}+\underbrace{\overrightarrow{CD}^2+2\times\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{DF}^2}_{\text{...identité remarquable}}$$

$$=2\times CD^2+DA^2+DF^2+\boxed{2\times\overrightarrow{CD}}\cdot\overrightarrow{DA}+\boxed{2\times\overrightarrow{CD}}\cdot\overrightarrow{DF}$$

$$=2\times CD^2+5^2+5^2+\boxed{2\times\overrightarrow{CD}}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DF}\right)}_{=\vec{0}}=2\times CD^2+25+25+0$$

$$=2\times CD^2+50$$

d.3. Connaissant les longueurs CA et CD respectivement égales à 8 et 7, l'égalité précédente devient :

$$CA^2+CF^2=2\times CD^2+50 \Leftrightarrow 8^2+CF^2=2\times 7^2+50$$
$$\Leftrightarrow CF^2=2\times 49+50-64=84$$
$$\Leftrightarrow CF=\sqrt{84}\approx 9{,}17\text{ cm}$$

e.1. On appelle I le milieu du segment [AB]. Ce dernier mesurant 7 centimètres, la longueur IA est égale à 3,5.
Utilisant une variante du théorème de la médiane, nous pouvons écrire :

$$M\in\left(\mathscr{E}_1\right) \Leftrightarrow \overbrace{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-6 \Leftrightarrow MI^2-IA^2=-6}^{\text{Un spécial merci au théorème de la médiane !}}$$
$$\Leftrightarrow MI^2-3{,}5^2=-6 \Leftrightarrow MI^2=-6+12{,}25$$
$$\Leftrightarrow MI^2=6{,}25 \Leftrightarrow MI=\sqrt{6{,}25} \Leftrightarrow MI=2{,}5$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\left(\mathscr{E}_1\right)$ est le cercle de centre I et de rayon 2,5.

e.2. Ce deuxième ensemble peut se déterminer avec une variante du théorème de la médiane...ou sans.

- Avec une variante du théorème de la médiane, on appelle J le milieu de [BE].
  Il vient alors :

$$M\in\left(\mathscr{E}_2\right) \Leftrightarrow \overbrace{MB^2-ME^2=0 \Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{EB}=0}^{\text{Un big merci au théorème de la médiane !}} \xrightarrow{\div 2} \overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{EB}=0$$
$$\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{MJ} \text{ et } \overrightarrow{EB} \text{ orthogonaux}$$
$$\Leftrightarrow \text{M appartient à la perpendiculaire à la droite (EB) passant par J}$$

- Sans le théorème de la médiane :

$$M\in\left(\mathscr{E}_2\right) \Leftrightarrow MB^2-ME^2=0 \Leftrightarrow MB^2=ME^2 \xrightarrow{\text{Racine}} MB=ME$$
$$\Leftrightarrow \text{M est équidistant des points E et B}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\left(\mathscr{E}_2\right)$ est la médiatrice du segment [BE].

e.3. Le produit scalaire définissant l'ensemble $\left(\mathscr{E}_3\right)$ n'est pas sans rappeler $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$ calculé lors de la question **a** et qui valait... -5.

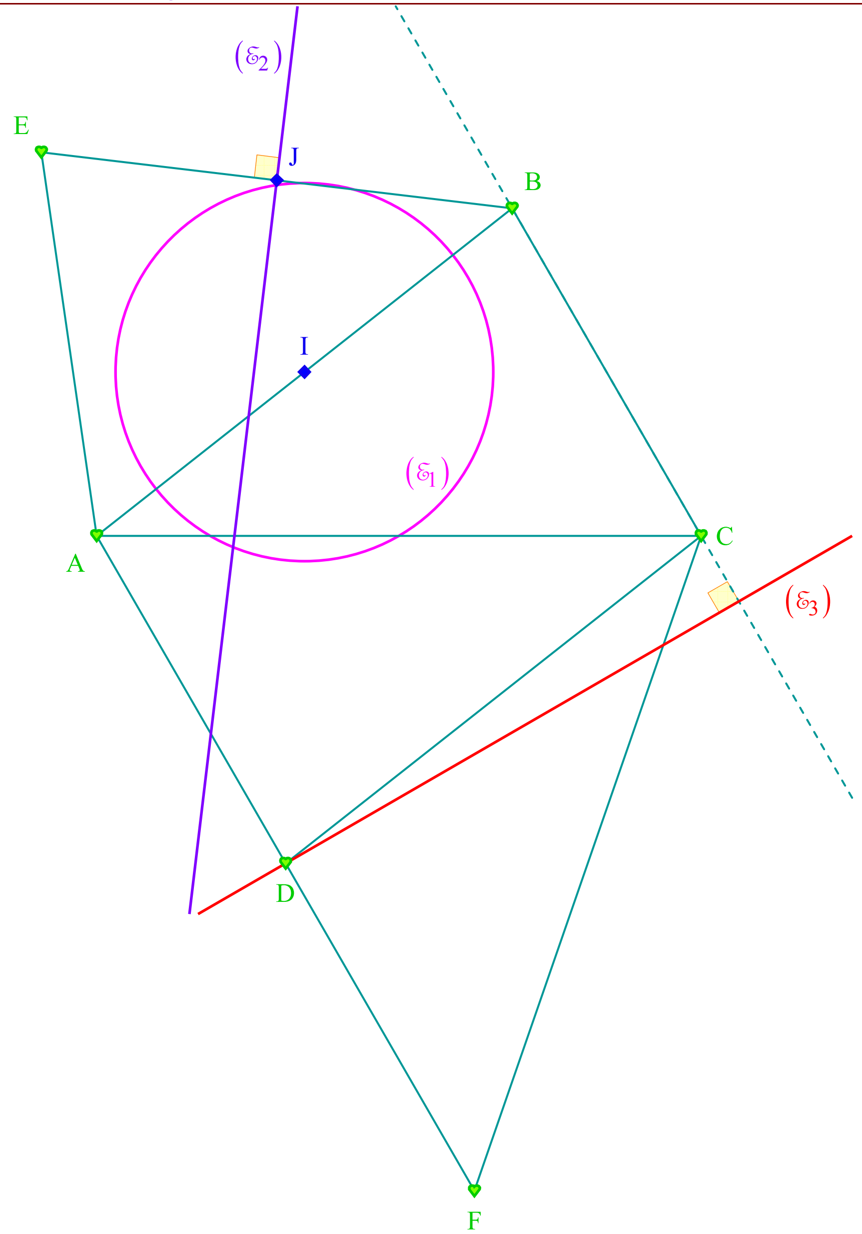
$$M\in\left(\mathscr{E}_3\right) \Leftrightarrow \overbrace{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CM}=-5 \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DM}\right)=-5}^{\text{On introduit le point D}}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DM}=-5 \Leftrightarrow \cancel{-5}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DM}=\cancel{-5}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DM}=0 \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{DM} \text{ sont orthogonaux}$$

On peut aussi présenter les choses de la manière suivante :

$$M\in\left(\mathscr{E}_3\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CM}=-5 \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{\boxed{\overrightarrow{CB}}\cdot\overrightarrow{CM}-\boxed{\overrightarrow{CB}}\cdot\overrightarrow{CD}=0 \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{CB}}\cdot\left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CD}\right)=0}^{\text{On factorise par le vecteur commun } \overrightarrow{CB}}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\cdot\overbrace{\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CM}\right)}^{\text{Chasles}}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DM}=0$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\left(\mathscr{E}_3\right)$ est la perpendiculaire à la droite (BC) passant par D.

Les trois ensembles $\left(\mathscr{E}_1\right)$, $\left(\mathscr{E}_1\right)$ et $\left(\mathscr{E}_1\right)$ ont été représentés ci-contre ⬀



$(\mathscr{E}_2)$
E
J
B
I
$(\mathscr{E}_1)$
A
C
$(\mathscr{E}_3)$
D
F

Probabilités

Comme une envie de tout plaquer

L'énoncé

Bientôt se disputera le match annuel de *rugby à sept* opposant l'équipe des *premières ES* à celle des *premières S*. Comme le nom l'indique, une équipe de *rugby à sept* est constituée de 7 joueurs ou joueuses. Car ce sport est mixte !
Pour que le match demeure indécis, l'administration impose que l'équipe des *premières S* soit tirée au hasard. Le coach de l'équipe inscrit les noms de 29 élèves de *première S* sur 29 petits papiers indiscernables les uns des autres; puis, il les mélange et il en saisit 7 simultanément. Les 7 élèves dont les noms ont été tirés au sort constitueront l'équipe des *premières S*.
Sauf que sur les 20 filles de *premières S*, seules 13 savent jouer au *rugby à sept*. Chez les garçons, c'est pire ! Seuls 4 d'entre eux savent jouer au *rugby à sept*.

1. Montrer qu'il existe un peu plus d'un million et demi d'équipes possibles. Seulement pour cette question, on écrira le produit qui permet de calculer ce résultat.
2. Combien existe-t-il d'équipes formées d'élèves sachant jouer au *rugby à sept* ? Vérifier que la probabilité que l'équipe soit constituée d'élèves sachant jouer au *rugby à sept* est voisine de 1%.
3. Combien existe-t-il d'équipes formées de 4 filles et 3 garçons (sans distinction de niveau) ?
4. Combien existe-t-il d'équipes contenant exactement 2 garçons qui ne savent pas jouer au *rugby à sept* ?
5. Combien existe-t-il d'équipes formées d'au moins un garçon ?

Le corrigé

1. Le tirage des sept noms étant simultané et aucune condition d'ordre n'étant précisée, chaque équipe est une combinaison d'élèves.

Au total, il existe $\overbrace{\binom{29}{7}}^{\text{7 élèves à choisir parmi 25}} = \frac{29}{7}\times\frac{28}{6}\times\frac{27}{5}\times\frac{26}{4}\times\frac{25}{3}\times\frac{24}{2}\times\frac{23}{1} = \underline{1560780}$ équipes possibles.

2. Au total, exactement $4+13=17$ joueurs ou joueuses savent jouer au *rugby à sept*.

Il existe donc $\overbrace{\binom{17}{7}}^{\text{7 élèves sachant jouer à choisir parmi 17}} = \underline{19448}$ équipes formées d'élèves sachant jouer.

Nous en déduisons :

$$P(\text{«Tous les élèves savent jouer»}) = \frac{\text{Nombre d'équipes favorables}}{\text{Nombre total d'équipes}} = \frac{19448}{1560780} \approx \underline{0{,}012}$$

3. Il existe $\overbrace{\binom{20}{4}}^{\text{4 filles à choisir parmi 20}} \times \overbrace{\binom{9}{3}}^{\text{3 garçons à choisir parmi 9}} = 4845\times 84 = \underline{406980}$ équipes formées de 4 filles et 3 garçons.

4. Dans la classe de *première S*, exactement 5 garçons ne savent pas jouer au *rugby à sept*. Donc, les «autres élèves» sont au nombre de 24.

Il existe $\overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{2 garçons ne sachant pas jouer à choisir parmi 5}} \times \overbrace{\binom{24}{5}}^{\text{5 autres élèves à choisir parmi 24}} = 10\times 42504 = \underline{425040}$ équipes contenant exactement trois garçons ne sachant pas jouer.

5. Le contraire de l'événement «au moins un garçon dans l'équipe» est «aucun garçon dans l'équipe», c'est-à-dire «que des filles dans l'équipe».

Il existe $\overbrace{\binom{20}{7}}^{\text{7 filles à choisir parmi 20}} = 77520$ équipes exclusivement féminines.

Donc, il y a exactement $1560780 - 77520 = \underline{1483260}$ équipes comportant au moins un garçon.

Plus tu mises, plus qu'il perd

L'énoncé

L'inénarrable et prolifique Toto vient d'inventer un nouveau jeu : le *Totokaré*. Son principe est le suivant :

- D'abord, le joueur paie une mise de m euros pour pouvoir jouer une partie.
- Ensuite, dans une urne se trouvent 25 boules toutes indiscernables au toucher.
  Le joueur tire au hasard l'une de ces 25 boules. Les gains du joueur que nous allons évoquer sont des gains bruts, c'est-à-dire que la mise de m euros n'est pas déduite.
  Si le joueur tire la boule verte, alors il gagne le carré de sa mise soit m^2 euros.
  S'il tire l'une de quatre boules bleues, alors il gagne quatre fois sa mise soit $4m$ euros.
  S'il tire l'une des sept boules oranges, alors il gagne 2 euros.
  Enfin, s'il tire l'une des treize boules blanches, alors il a perdu.

On appelle X la variable aléatoire égale au gain brut du joueur exprimé en euros.

a. Dans un premier temps, Toto décide de fixer la mise à $m = 5€$.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ ainsi que l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X. On écrira les formules permettant le calcul de ces deux indicateurs et on précisera leurs unités respectives. Le cas échéant, on arrondira les valeurs fournies au centième près.
3. Lorsque la mise m est fixée à 5 euros, le jeu est-il favorable au joueur, à Toto ou alors est-il équitable ?

b. Toto veut connaître les valeurs de m pour lesquelles il gagnerait de l'argent. Dans cette sous-partie, m est donc un réel positif.

1. Montrer que l'espérance mathématique $E(X)$ est alors donnée par :
$$E(X) = 0,04 \times m^2 + 0,64 \times m + 0,56 \text{ euros}$$
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le jeu est favorable à Toto.

Le corrigé

a.1. La variable aléatoire X peut prendre comme valeurs :

$$m^2 = 25€ \qquad 4m = 20€ \qquad 2€ \qquad 0€ .$$

Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeur de X	25€ *(1 boule verte)*	20€ *(4 boules bleues)*	2€ *(7 boules oranges)*	0€ *(13 boules blanches)*
Probabilité	$\frac{1}{25} = 0,04$	$\frac{4}{25} = 0,16$	$\frac{7}{25} = 0,28$	$\frac{13}{25} = 0,52$

On vérifie que la somme des probabilités du tableau est égale à 1.

a.2. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est donnée par la formule :

$$E(X) = \sum \text{probabilité} \times \text{valeur} = 0,04 \times 25 + 0,16 \times 20 + 0,28 \times 2 + 0,52 \times 0 = \underline{4,76€}$$

➲ La variance de la variable aléatoire X est donnée par la formule :

$$V(X) = \sum \text{probabilité} \times \text{valeur}^2 - \text{espérance}^2$$
$$= 0,04 \times 25^2 + 0,16 \times 20^2 + 0,28 \times 2^2 + 0,52 \times 0^2 - 4,76^2$$
$$= 90,12 - 22,6576 = \underline{67,4624}$$

Nous en déduisons que l'écart-type de la variable aléatoire X est égal à :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{67,4624} \approx \underline{8,21€}$$

a.3. Comme l'espérance mathématique $E(X)$ du gain brut du joueur est inférieure de 24 centimes à la mise m de 5 euros, alors le jeu est favorable à Toto. En moyenne, il gagne 24 centimes sur chaque partie jouée.

b.1. De manière générale, la loi de probabilité de X est donnée par :

Valeur de X	m^2 euros	$4m$ euros	2€	0€
Probabilité	0,04	0,16	0,28	0,52

L'espérance mathématique $E(X)$ devient alors :

$$E(X) = \sum \text{probabilité} \times \text{valeur}$$
$$= 0,04 \times m^2 + 0,16 \times 4m + 0,28 \times 2 + 0,52 \times 0$$
$$= \underline{0,04m^2 + 0,64m + 0,56 \text{ euros}}$$

b.2. Toto fait des bénéfices lorsque l'espérance mathématique $E(X)$ de gain brut du joueur est inférieure à sa mise m. Aussi, nous devons résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation :

$$E(X) < m \iff 0,04m^2 + 0,64m + 0,56 < m \iff 0,04m^2 + 0,64m + 0,56 - m < 0$$
$$\iff \overbrace{0,04m^2 - 0,36m + 0,56}^{N(m)} < 0$$

Pour résoudre cette dernière inéquation, nous devons connaître le signe de la forme du second degré $N(m) = 0,04m^2 - 0,36m + 0,56$. Calculons son discriminant :

$$\Delta_{N(m)} = (-0,36)^2 - 4 \times 0,04 \times 0,56 = \underline{0,04 = 0,2^2}$$

Son discriminant étant positif, la forme du second degré $N(m)$ admet deux racines distinctes :

$$m_1 = \frac{-(-0{,}36)-0{,}2}{2\times 0{,}04} = \frac{0{,}16}{0{,}08} = 2 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-(-0{,}36)+0{,}2}{2\times 0{,}04} = \frac{0{,}56}{0{,}08} = 7$$

Son coefficient dominant 0,04 étant positif, le signe de la forme du second degré $N(m)$ est :

m	0		2		7		$+\infty$
$N(m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =]2;7[$$

<u>Conclusion :</u> le jeu est favorable à Toto lorsque la mise m est comprise strictement entre 2 et 7 euros.

Le dé à Toto

L'énoncé

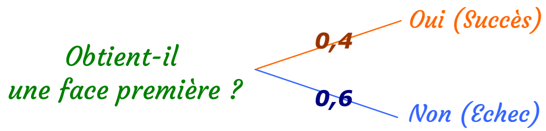
Toto vient d'inventer un nouveau jeu : *Les 11 premiers*. Une partie de ce jeu consiste à lancer 11 fois de suite un dé décaèdrique parfaitement équilibré dont les 10 faces sont numérotées de ***1*** à ***10***; on s'intéresse alors au nombre de fois où le joueur obtient une face sur laquelle est inscrit un nombre premier.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de faces premières (faces où est inscrit un nombre premier) obtenues au cours des 11 lancers de la partie.
Au cours de l'exercice, les probabilités seront données au millième près.

1. Donner les quatre nombres premiers se trouvant sur les faces du dé décaèdrique. Pour note, ***1*** n'est pas un nombre premier.
2. Montrer que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ ainsi que l'écart-type σ_X. Le cas échéant, on arrondira les résultats au centième près.
   Quelle est la signification de l'espérance $E(X)$?
4. Calculer la probabilité que le joueur obtienne exactement 6 faces premières sur les 11 lancers. On écrira la formule permettant le calcul de cette probabilité.
5. Toto doit déterminer les conditions dans lesquelles le joueur gagne la partie ou la perd.
   Du point de vue de Toto, que vaut-il mieux ? Que le joueur gagne s'il obtient au plus deux faces premières au cours des 11 lancers ou bien que le joueur gagne s'il obtient au moins sept faces premières au cours des 11 lancers ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

1. Les quatre entiers premiers se trouvant entre 1 et 10 sont 2; 3; 5 et 7.

2. Chaque lancer est pour le joueur est une épreuve de Bernoulli :



Le dé étant parfaitement équilibré, les 11 lancers sont indépendants et forment un schéma de Bernoulli. Par conséquent, la variable aléatoire X qui compte le nombre de faces premières obtenues, c'est-à-dire le nombre de succès suit la loi binomiale $B(11;0{,}4)$.

3. La variable aléatoire X suivant la loi binomiale $B(11;0,4)$:

- Son espérance est donnée par : $E(X) = 11 \times 0,4 = \boxed{4,4 \text{ faces premières}}$

  S'il joue un très grand nombre de parties des *11 premiers*, le joueur obtiendra en moyenne 4,4 faces premières par partie.
- Son écart-type est donné par $\sigma_X = \sqrt{11 \times 0,4 \times 0,6} \approx \boxed{1,62}$

4. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$P(X=6) = \binom{11}{6} \times 0,4^6 \times 0,6^5 = 462 \times 0,4^6 \times 0,6^5 \approx \boxed{0,147}$$

5. Deux options sont à l'étude pour savoir quand le joueur gagne une partie. Calculons les probabilités de chacune d'entre elles :

$$\overbrace{P(X \leq 2) \approx \boxed{0,119}}^{\text{Option 1}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \overbrace{P(X \geq 7) = 1 - P(X < 7) = 1 - P(X \leq 7) \approx 1 - 0,901 = \boxed{0,099}}^{\text{Option 2}}$$

<u>Conclusion :</u> moins le joeur a de chance de gagner, plus Toto en a. Toto doit donc choisir la seconde option : le joueur gagne s'il obtient au moins sept faces premières sur les 11 lancers.

Suites

Comptes en suites

L'énoncé

a. La suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3\times u_n - n + 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Calculer le terme u_2.

b. La suite (v_n) est définie par :

$$\begin{cases} v_1 = 2 \quad v_2 = 3 \\ v_{n+2} = 5\times v_{n+1} - 4\times v_n \quad \text{pour tout entier positif } n \end{cases}$$

Calculer le terme v_4.

c. La suite (w_n) est géométrique. On sait que $w_2 = 216$ <u>et</u> $w_5 = 729$.

1. Déterminer la raison q de la suite (w_n).
2. Calculer w_0.
3. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

d. La suite (t_n) est arithmétique. On sait que $t_2 = 216$ <u>et</u> $t_5 = 729$.

1. Déterminer la raison r de la suite (t_n).
2. Calculer t_0.
3. En déduire l'expression de t_n en fonction de n.

e. Déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes. On détaillera ses raisonnements.

$$a_n = \left(1-3^n\right)\times\left(\frac{2}{n}-1\right) \qquad b_n = \frac{0{,}3^n - 1}{1+n^2} \qquad c_n = 2^n + 3^n - 5^n$$

Le corrigé

a. La suite (u_n) étant définie par récurrence, pour obtenir un terme, nous devons calculer tous les termes qui le précédent.

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = u_{\boxed{0}+1} = 3\times u_{\boxed{0}} - \boxed{0} + 1 = 3\times 2 - 0 + 1 = \underline{7} \\ u_2 = u_{\boxed{1}+1} = 3\times u_{\boxed{1}} - \boxed{1} + 1 = 3\times 7 - 1 + 1 = \underline{21} \end{cases}$$

b. La suite (v_n) étant aussi définie par récurrence, l'obtention du terme v_4 suppose, au préalable, le calcul du terme précédent v_3.

$$\begin{cases} v_3 = v_{\boxed{1}+2} = 5\times v_{\boxed{1}+1} - 4\times v_{\boxed{1}} = 5\times v_2 - 4\times v_1 = 5\times 3 - 4\times 2 = 15 - 8 = \underline{7} \\ v_4 = v_{\boxed{2}+2} = 5\times v_{\boxed{2}+1} - 4\times v_{\boxed{2}} = 5\times v_3 - 4\times v_2 = 5\times 7 - 4\times 3 = 35 - 12 = \underline{23} \end{cases}$$

c.1. La raison q de la suite géométrique (w_n) vérifie :

$$w_5 = w_2\times q^{5-2} \iff 729 = 216\times q^3$$
$$\iff q^3 = \frac{719}{216} = 3{,}375 \xrightarrow[\text{cubique}]{\text{Racine}} q = \sqrt[3]{3{,}375} = 3{,}375^{1/3} = \underline{1{,}5}$$

<u>Conclusion :</u> la raison q de la suite géométrique (w_n) est égale à 1,5.

c.2. Calculons le premier terme de la suite : $w_0 = w_2\times q^{0-2} = 216\times 1{,}5^{-2} = \underline{96}$

c.3. Nous en déduisons que pour tout entier naturel n :

$$w_n = w_0\times q^n = \underline{96\times 1{,}5^n}$$

d.1. La raison r de la suite arithmétique (t_n) vérifie :

$$t_5 = t_2 + (5-2)\times r \iff 729 = 216 + 3\times r \iff 3r = 513 \iff r = \frac{513}{3} = \underline{171}$$

<u>Conclusion :</u> la raison r de la suite arithmétique (t_n) est égale à 171.

d.2. Calculons le premier terme de la suite : $t_0 = t_2 + (0-2)\times r = 216 - 2\times 171 = \underline{-126}$

d.3. Nous en déduisons que pour tout entier naturel n :

$$t_n = t_0 + n\times r = -126 + n\times 171 = \underline{171\times n - 126}$$

e. Avant toutes choses, rappelons que la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la puissance q^n dépend de la position du réel positif q vis-à-vis de 1.

➲ Déterminons la limite de la suite (a_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\boxed{3^n}\right)\times\left(\frac{2}{n}-1\right) = \left(1-\boxed{(+\infty)}\right)\times\left(0^+-1\right) = (-\infty)\times(-1) = \underline{+\infty}$$

➲ Déterminons la limite de la suite (b_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\boxed{0,3^n}-1}{1+n^2} = \frac{0^+-1}{1+(+\infty)} = \frac{-1}{+\infty} = \underline{0^-}$$

➲ Enfin, intéressons-nous à la limite de la suite (c_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n+3^n-5^n = (+\infty)+(+\infty)-(+\infty) = \textit{Forme indéterminée}$$

Afin de lever l'indétermination, nous allons factoriser c_n par le terme nous paraissant le plus fort : 5^n.

Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$c_n = 2^n\times\frac{\boxed{5^n}}{5^n}+3^n\times\frac{\boxed{5^n}}{5^n}-\boxed{5^n}\times 1 = \boxed{5^n}\times\left[\frac{2^n}{5^n}+\frac{3^n}{5^n}-1\right]$$

$$= 5^n\times\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} (+\infty)\times\left[0^++0^+-1\right] = (+\infty)\times(-1) = \underline{-\infty}$$

Même pas froid aux yeux !

L'énoncé

Trouvant les hivers trop froids, Alain et Sandy ont décidé durant ce mois de décembre de contribuer au réchauffement climatique en émettant autant de dioxyde de carbone que possible.
Le premier jour du mois de décembre, Alain émet 550 kilogrammes de CO_2. Puis, chacun des jours suivants, il augmente la quantité émise quotidiennement de 2,5% par rapport au jour précédent.
Le premier jour du mois de décembre, Sandy émet 486 kilogrammes de CO_2. Puis, chacun des jours suivants, elle augmente la quantité émise quotidiennement de 22 kilogrammes par rapport au jour précédent.

a. On appelle a_n la quantité de CO_2 exprimée en kilogrammes émise par Alain durant le n-ième jour de décembre. Ainsi a_3 est la quantité de CO_2 émise par Alain durant la journée du 3 décembre.

1. Donner a_1, puis calculer les termes a_2 et a_3.
2. Quelle est la nature de la suite (a_n) ? On précisera ses attributs.
3. Exprimer a_n en fonction de n.
4. Calculer la quantité de CO_2 émise par Alain le jour de Noël.

b. On note s_n la quantité de CO_2 exprimée en kilogrammes émise par Sandy durant le n-ième jour de décembre. Ainsi s_2 est la quantité de CO_2 émise par Sandy durant la journée du 2 décembre.

1. Donner s_1, puis calculer les termes s_2 et s_3.
2. Quelle est la nature de la suite (s_n) ? On précisera ses attributs.
3. Exprimer s_n en fonction de n.
4. Calculer la quantité de CO_2 émise par Sandy le jour de Noël.

c. Qui de Alain ou de Sandy aura émis le plus de CO_2 sur la totalité du mois de décembre ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a.1. Déterminons les trois premiers termes de la suite (a_n).

$a_1 = \text{Quantité émise par Alain le 1er dec.} = \underline{550\text{ kg}}$

$a_2 = \text{Quantité émise par Alain le 2 dec.} = a_1 + 2{,}5\%\text{ de } a_1$

$= a_1 + 0{,}025\times a_1 = (1+0{,}025)\times a_1 = 1{,}025\times a_1 = \underline{563{,}75\text{ kg}}$

$a_3 = \text{Quantité émise le 3 dec.} = a_2 + 2{,}5\%\text{ de } a_2 = 1{,}025\times a_2 \approx \underline{577{,}84\text{ kg}}$

a.2. Le phénomène d'une augmentation quotidienne de 2,5% se répétant durant tout le mois de décembre, nous en concluons que la suite (a_n) est géométrique de premier terme $a_1 = 550$ et de raison $q = 1{,}025$.

a.3. D'après une formule vue en cours, nous pouvons écrire que :

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = \boxed{550 \times 1{,}025^{n-1}}$$

a.4. Le 25 décembre, Alain émet $a_{25} = 550 \times 1{,}025^{25-1} = 550 \times 1{,}025^{24} \approx \boxed{994{,}80 \text{ kg}}$

b.1. Déterminons les trois premiers termes de la suite (s_n).

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{Quantité émise par Sandy le 1er dec.} = \boxed{486 \text{ kg}} \\ s_2 &= \text{Quantité émise par Sandy le 2 dec.} = s_1 + 22 = \boxed{508 \text{ kg}} \\ s_3 &= \text{Quantité émise par Sandy le 3 dec.} = s_2 + 22 = \boxed{530 \text{ kg}} \end{aligned}$$

b.2. Le phénomène d'une augmentation quotidienne constante de 22 kg se répétant durant tout le mois de décembre, nous en concluons que la suite (s_n) est arithmétique de premier terme $s_1 = 486$ et de raison $r = 22$.

b.3. D'après une formule vue en cours, nous pouvons écrire que :

$$s_n = s_1 + (n-1) \times r = 486 + (n-1) \times 22 = 486 + 22 \times n - 22 = \boxed{464 - 22n}$$

b.4. Le 25 décembre, Alain émet $s_{25} = 464 + 22 \times 25 = \boxed{1014 \text{ kg}}$

c. Sur les 31 jours du mois de décembre, Alain émet :

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{31}}_{\substack{\text{Somme de 31 termes consécutifs} \\ \text{d'une suite géométrique} \\ \text{de raison } q=1{,}025}} = a_1 \times \frac{1-q^{\boxed{31}}}{1-q} = 550 \times \frac{1-1{,}025^{31}}{1-1{,}025} \approx \boxed{25300{,}19 \text{ kg}}$$

Quant à Sandy, elle émet sur les 31 jours du mois de décembre :

$$\underbrace{s_1 + s_2 + \ldots + s_{31}}_{\substack{\text{Somme des 31 termes consécutifs} \\ \text{d'une suite arithmétique}}} = \boxed{31} \times \frac{s_1 + s_{31}}{2} = 31 \times \frac{486 + 1146}{2} = \boxed{25296 \text{ kg}}$$

Le calcul du trente-et-unième terme de la suite est $s_{31} = 464 + 22 \times 31 = \boxed{1146}$

<u>Conclusion :</u> une fois encore, c'est le meilleur qui est le pire...

Le petit mot de l'auteur :

Depuis des années, l'institution se mobilise contre cet insupportable déterminisme qui voit les filles préférer la voie littéraire à l'autoroute scientifique.
Sur ce sujet, on a tout entendu et surtout que les profs de maths favorisaient le passage des garçons en S. Alors que je n'y suis pour rien ! Cette sélection est surtout le fait d'un conditionnement social et familial bien antérieur à mon action néfaste.
Mais après des siècles d'oppression masculine, ça va mieux !
Et moi, j'aurais plutôt le problème inverse : en section scientifique, cette année, il y avait plus de 70% de filles. Et l'année prochaine, ça s'annonce pire...ou mieux. Quel est le bon point de vue pour être taxé de misogyne ?
Il y a quelques années, les garçons roulaient des mécaniques et dominaient les classes de toute leur suffisance; aujourd'hui, ils s'écrasent littéralement devant les filles qui cancanent toujours autant. Ils en sont presque décevants. Où sont passées ces stupides remarques sexistes qu'assenaient les taurillons et autres jeunes bœufs à une gente féminine interloquée devant une telle audace intellectuelle ?
Aujourd'hui, le constat est clair : en première S, les jeunes mâles se la sont faites. Ils sont désormais menacés par une terrible maladie : la féminisation.

Jérôme Onillon.

Au sommaire aussi, ça va mieux !