Algèbre, équations et inéquations

Alternatives numériques

L'énoncé

Le présent exercice est constitué de six affirmations dont on dira si elles sont vraies ou fausses en entourant la réponse choisie. Chaque bonne réponse rapporte 0,5 points; une réponse incorrecte ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

	L'affirmation est...	
1. Le nombre $5{,}07$ appartient à l'ensemble $\mathbb{Q}$.	Vraie	Fausse
2. Le nombre -1 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$.	Vraie	Fausse
3. Le nombre $-\frac{7}{3}$ appartient à l'ensemble $\mathbb{Z}$.	Vraie	Fausse
4. Le nombre 0 appartient à l'ensemble $\mathbb{R}$.	Vraie	Fausse
5. Le nombre $-\sqrt{49}$ appartient à l'ensemble $\mathbb{Z}$.	Vraie	Fausse
6. Le nombre 10^{-2} appartient à l'ensemble $\mathbb{Z}$.	Vraie	Fausse

Le corrigé

Passons en revue les propositions :

1. Le décimal $5{,}07$ pouvant s'écrire comme étant le quotient de deux entiers $\frac{507}{100}$, il est rationnel et appartient à $\mathbb{Q}$.
2. $\mathbb{N}$ qui est l'ensemble des entiers naturels ne contient que des entiers positifs et 0. Par conséquent, -1 n'en fait pas partie.
3. Le nombre $-\frac{7}{3}$ n'étant pas entier, il ne peut appartenir à $\mathbb{Z}$.
4. Tous les nombres connus en seconde, dont 0, sont réels et appartiennent à $\mathbb{R}$.
5. Simplifié, nous avons : $-\sqrt{49}=-7$. C'est un entier négatif et appartient à $\mathbb{Z}$.
6. Simplifié, nous avons : $10^{-2}=0{,}01$. Ce nombre est au mieux un décimal et ne peut appartenir à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Petites histoires en x

L'énoncé

a. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$\begin{cases} a(x)=(5x-3)^2+30x \\ b(x)=12-3\times(x+2)^2 \\ c(x)=(7x+3)(7x-3)-9\times(x-1) \end{cases}$$

b. Résoudre dans ℝ les inéquations du premier degré suivantes. On conclura chacune d'entre elles en donnant son ensemble des solutions.

1. $-5x+7\geq -3$ ***2.*** $5\times(3x-2)+9>3x-7\times(3-2x)$

Le corrigé

a. Ces développements font largement appel aux identités remarquables.

$$a(x)=\overbrace{(5x-3)^2}^{(a-b)^2}+30x=\overbrace{(5x)^2-2\times5x\times3+3^2}^{a^2-2\times a\times b+b^2}+30x$$
$$=25x^2-\cancel{30x}+9+\cancel{30x}=\boxed{25x^2+9}$$

$$b(x)=12-3\times\overbrace{(x+2)^2}^{(a+b)^2}=12-3\times\overbrace{\left(x^2+2\times x\times2+2^2\right)}^{a^2+2\times a\times b+b^2}$$
$$=12-3\times\left(x^2+4x+4\right)=\cancel{12}-3x^2-12x-\cancel{12}=\boxed{-3x^2-12x}$$

$$c(x)=\overbrace{(7x+3)(7x-3)}^{(a+b)\times(a-b)}-9\times(x-1)=\overbrace{(7x)^2-3^2}^{a^2-b^2}-9x+9$$
$$=49x^2-\cancel{9}-9x+\cancel{9}=\boxed{49x^2-9x}$$

b.1. Résolvons cette première inéquation.

$$-5x+7\geq-3 \Leftrightarrow -5x\geq-3-7 \Leftrightarrow -5x\geq-10 \xrightarrow[\text{L'ordre change}]{\div(-5)} x\leq\frac{-10}{-5} \Leftrightarrow \boxed{x\leq2}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle :

$$\boxed{S=]-\infty;2]}$$

b. Résolvons cette seconde équation.

$$\underbrace{5\times(3x-2)}_{\text{On distribue }5}+9>3x\underbrace{-7\times(3-2x)}_{\text{On distribue }-7} \Leftrightarrow 15x-10+9>3x-21+14x$$
$$\Leftrightarrow 15x-1>17x-21$$
$$\Leftrightarrow 15x-17x>-21+1$$
$$\Leftrightarrow -2x>-20 \xrightarrow[\text{L'ordre change}]{\div(-2)} \boxed{x<\frac{-20}{-2}=10}$$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'équation est l'intervalle :

$$\boxed{S=]-\infty;10[}$$

L'inconnue s'appelle x

L'énoncé

a. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$\begin{cases} a(x)=(2x+5)^2+(3x+5)\times(3x-5) \\ b(x)=(3x-4)(x-8)-(2x-7)^2 \end{cases}$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2+14x-51=0$ **2.** $x^2=36x$ **3.** $(x+2)^2=(2x+1)^2$

Le corrigé

a. Ces développements font largement appel aux identités remarquables.

$$a(x)=\overbrace{(2x+5)^2}^{(a+b)^2}+\overbrace{(3x+5)(3x-5)}^{(a+b)\times(a-b)}=\overbrace{(2x)^2+2\times 2x\times 5+5^2}^{a^2+2\times a\times b+b^2}++\overbrace{(3x)^2-5^2}^{a^2-b^2}$$

$$=4x^2+20x+\cancel{25}+9x^2-\cancel{25}+=\boxed{13x^2+20x}$$

$$b(x)=(3x-4)(x-8)-\overbrace{(2x-7)^2}^{(a-b)^2}=3x^2-24x-4x+32-\overbrace{\left((2x)^2-2\times 2x\times 7+7^2\right)}^{a^2-2\times a\times b+b^2}$$

$$=3x^2-28x+32-\left(4x^2-28x+49\right)=3x^2-\cancel{28x}+32-4x^2+\cancel{28x}-49=\boxed{-x^2-17}$$

b.1. Les équations du second degré, c'est-à-dire comportant un terme en x^2, se résolvent en recherchant un produit nul...qui ne peut l'être si l'un de ses facteurs l'est. Pour ce faire, il faut factoriser par l'une des trois méthodes que nous connaissons.
Pour cette première équation, nous utiliserons la méthode de la forme canonique.

$$x^2+14x-51=0 \Leftrightarrow \overbrace{x^2+2\times x\times 7}^{\text{Début de cette identité...}}-51=0 \Leftrightarrow \overbrace{(x+7)^2-7^2}^{\text{...remarquable.}}-51=0$$

$$\Leftrightarrow (x+7)^2-49-51=0 \Leftrightarrow (x+7)^2-100=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x+7)^2-10^2}^{\text{Différence de...}}=0 \Leftrightarrow \overbrace{\left[(x+7)+10\right]\times\left[(x+7)-10\right]}^{\text{...deux carrés.}}=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x+17)\times(x-3)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x+17=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad x-3=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est !}}$$

$$x=\boxed{-17} \qquad x=\boxed{3}$$

<u>Conclusion :</u> cette première équation admet deux solutions :

$$S=\boxed{\{-17;3\}}$$

b.2. Pour cette deuxième équation, nous recourrons à la méthode du facteur commun.

$$x^2=36x \Leftrightarrow x^2-36x=0 \Leftrightarrow \overbrace{x\times\boxed{x}-36\times\boxed{x}}^{\text{Facteur...}}=0 \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x}\times(x-36)}^{\text{...commun}}=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{x\times(x-36)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x=\boxed{0} \quad \underline{\text{ou}} \quad x-36=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est !}}$$

$$x=\boxed{36}$$

<u>Conclusion :</u> cette deuxième équation admet aussi deux solutions :

$$S=\boxed{\{0;36\}}$$

b.3. Pour cette dernière équation, nous nous retrouverons directement devant une différence de deux carrés...après avoir tout ramener à gauche.

$$(x+2)^2=(2x+1)^2 \Leftrightarrow \overbrace{(x+2)^2-(2x+1)^2}^{\text{Différence de...}}=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\left[(x+2)+(2x+1)\right]\times\left[(x+2)-(2x+1)\right]}^{\text{...deux carrés}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[x+2+2x+1\right]\times\left[x+2-2x-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(3x+3)\times(-x+1)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{3x+3=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad -x+1=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est !}}$$

$$3x=-3 \qquad -x=-1$$

$$x=\boxed{-1} \qquad x=\boxed{1}$$

<u>Conclusion :</u> cette dernière équation admet également deux solutions :

$$S=\boxed{\{-1;1\}}$$

Des signes moi une solution !

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois inéquations suivantes. On conclura chacune d'elles en donnant l'ensemble des solutions :

a. $-3x\times(x-3)\times(9-3x)\le 0$ **b.** $-14x>2x^2$ **c.** $x^2+32\ge 18x$

Le corrigé

a. Résoudre la première inéquation, c'est savoir quand le produit $-3x\times(x-3)\times(9-3x)$ est négatif ou nul. Examinons les trois facteurs affines le constituant :

- Le facteur affine $-3x=\underbrace{-3}_{a}\times x+\underbrace{0}_{b}$ a pour coefficient directeur le négatif -3 et s'annule lorsque $-3x=0 \iff x=\dfrac{0}{-3}=0$.
- $x-3$ a pour coefficient directeur 1 et s'annule en $x-3=0 \iff x=3$
- Le facteur affine $-3x+9$ a pour coefficient directeur le négatif -3 et s'annule lorsque $-3x+9=0 \iff -3x=-9 \iff x=\dfrac{-9}{-3}=3$

Ce travail préalable ayant été fait, le tableau de signe du produit est le suivant :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-3x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-3x+9$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$+$	

Le produit est négatif ou nul avant 0...et en 3. Nous en concluons que l'ensemble des solutions est :

$$S=]-\infty;0]\cup\{3\}$$

b. Pour résoudre cette deuxième inéquation, nous allons chercher à pouvoir nous prononcer sur le signe d'un produit. Il nous faudra donc factoriser.

$$-14x>2x^2 \iff -14x-2x^2>0 \iff \overbrace{-14\times\boxed{x}-2x\times\boxed{x}}^{\text{Facteur...}}>0 \iff \overbrace{\boxed{x}\times(-14-2x)}^{\text{...commun}}>0$$

Examinons les facteurs affines composant le produit constituant le membre de gauche.

- Le facteur affine $x=\underbrace{1}_{a}\times x+\underbrace{0}_{b}$ a pour coefficient directeur 1 et s'annule en 0.
- Le facteur affine $-2x-14$ a pour coefficient directeur le négatif -2 et s'annule lorsque $-2x-14=0 \iff -2x=14 \iff x=\dfrac{14}{-2}=-7$

Nous en déduisons que le tableau de signe du produit de ces deux facteurs est :

x	$-\infty$		-7		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-2x-14$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit $x\times(-2x-14)$ est strictement positif entre -7 et 0 non compris. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=]-7;0[$$

c. Pour résoudre cette dernière inéquation, nous allons suivre la même stratégie que pour la précédente : factorisation et signe d'un produit.

$$x^2+32\ge 18x \iff \overbrace{x^2-2\times x\times 9}^{\text{Début de cette identité...}}+32\ge 0 \iff \overbrace{(x-9)^2-9^2}^{\text{...remarquable.}}+32\ge 0$$

$$\iff (x-9)^2-81+32\ge 0 \iff (x-9)^2-49\ge 0$$

$$\iff \overbrace{(x-9)^2-7^2}^{\text{Différence de...}}\ge 0 \iff \overbrace{[(x-9)+7]\times[(x-9)-7]}^{\text{...deux carrés.}}\ge 0$$

$$\iff (x-2)\times(x-16)\ge 0$$

Le tableau de signe de ce produit est le suivant :

x	$-\infty$		2		16		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-16$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est positif ou nul avant 2 et après 16. Donc, l'ensemble des solutions est :

$$S=]-\infty;2]\cup[16;+\infty[$$

Tonnerre sur les fractions !

Le corrigé

Résoudre dans ℝ les trois inéquations suivantes :

a. $\dfrac{(7-4x)\times(3x+6)}{-5x}\geq 0$ **b.** $\dfrac{9x}{3-x}\leq -7$ **c.** $\dfrac{4x-1}{x-1}<\dfrac{3}{x-2}$

Le corrigé

a. Résoudre cette inéquation, c'est savoir quand ce quotient est positif ou nul !
Déterminons où les trois facteurs affines composant le quotient s'annulent.

$-4x+7=0$ et $3x+6=0$ et $-5x=0$

$-4x=-7$ $\quad 3x=-6$ $\quad x=\dfrac{0}{-5}=0$

$x=\dfrac{-7}{-4}=1{,}75$ $\quad x=\dfrac{-6}{3}=-2$

Le tableau de signe de notre quotient est :

x	$-\infty$	-2		0		$1{,}75$	$+\infty$
$-4x+7$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$3x+6$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-5x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
Leur quotient	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$S=[-2;0[\cup[1{,}75;+\infty[$$

b. La résolution de cette deuxième inéquation suivra la stratégie habituelle : tout ramener à gauche; mise au même dénominateur; puis recherche du signe d'un quotient.

$$\frac{9x}{3-x}\leq -7 \Leftrightarrow \frac{9x}{3-x}+7\leq 0 \Leftrightarrow \frac{9x+7\times(3-x)}{3-x}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x+21-7x}{3-x}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+21}{3-x}\leq 0$$

Résoudre cette inéquation équivaut à savoir quand ce dernier quotient est négatif ou nul.
Déterminons les valeurs d'annulation de ses facteurs :

$2x+21=0 \Leftrightarrow 2x=-21$ et $3-x=0 \Leftrightarrow -x=-3$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-21}{2}=-10{,}5$ $\quad \Leftrightarrow x=3$

Le tableau de signe du quotient est celui ci-contre ⇨

x	$-\infty$	$-10{,}5$		3	$+\infty$
$2x+21$	$-$	0	$+$		$+$
$-x+3$	$+$		$+$	0	$-$
Leur quotient	$-$	0	$+$	‖	$-$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions est :

$$S=]-\infty;-10{,}5]\cup]3;+\infty[$$

c. La résolution de cette dernière inéquation suivra la même stratégie que la précédente.

$$\frac{4x-1}{x-1}<\frac{3}{x-2} \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x-1}-\frac{3}{x-2}<0 \Leftrightarrow \frac{(4x-1)\times(x-2)-3\times(x-1)}{(x-1)\times(x-2)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2-8x-x+2-3x+3}{(x-1)\times(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-12x+5}{(x-1)\times(x-2)}<0$$

Il faut factoriser le numérateur...avec la méthode de la forme canonique.

$$\Leftrightarrow \frac{\overbrace{(2x)^2-2\times 2x\times 3}^{\text{Début de cette...}}+5}{(x-1)\times(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{\overbrace{(2x-3)^2-9}^{\text{...identité remarquée.}}+5}{(x-1)\times(x-2)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)^2-4}{(x-1)\times(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)^2-2^2}{(x-1)\times(x-2)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(2x-3)+2]\times[(2x-3)-2]}{(x-1)\times(x-2)}<0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)\times(2x-5)}{(x-1)\times(x-2)}<0$$

Résoudre cette dernière inéquation revient donc à savoir quand ce dernier quotient est strictement négatif. Dressons son tableau de signe !

x	$-\infty$	$0{,}5$		1		2		$2{,}5$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$2x-5$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
Leur quotient	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=]0{,}5;1[\cup]2;2{,}5[$$

Sous le signe du poisson

L'énoncé

a. Résoudre dans ℝ l'inéquation $\dfrac{7-2x}{x+1} \geq 7$.

b. Le but de cette sous-partie est la résolution de l'inéquation $\dfrac{32}{3-x} \leq 9+\dfrac{1}{x}$.

1. Dresser le tableau de signe du quotient $Q(x)=\dfrac{(3x-1)(3x+3)}{3x-x^2}$.
   Indication : une petite factorisation préalable peut être nécessaire.
2. En utilisant la méthode de la forme canonique, factoriser la forme du second degré $N(x)=9x^2+6x-3$.
3. Résoudre dans ℝ l'inéquation $\dfrac{32}{3-x} \leq 9+\dfrac{1}{x}$.

Le corrigé

a. La résolution de cette première inéquation suivra la stratégie habituelle : tout ramener à gauche; mise au même dénominateur; puis recherche du signe d'un quotient.

$$\frac{7-2x}{x+1} \geq 7 \Leftrightarrow \frac{7-2x}{x+1} \geq 7 \Leftrightarrow \frac{7-2x-7\times(x+1)}{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7-2x-7-7x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-9x}{x+1} \geq 0$$

Résoudre cette inéquation équivaut à savoir quand ce dernier quotient est positif ou nul.
Déterminons les valeurs d'annulation de ses facteurs :

$$-9x=0 \Leftrightarrow x=\frac{0}{-9}=0 \qquad \text{et} \qquad x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Nous en déduisons que le tableau de signe de notre quotient est :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-9x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Leur quotient		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Le quotient est positif ou nul entre -1 non compris et 0 qui l'est. Donc l'ensemble des solutions de notre inéquation est :

$$S=\left]-1;0\right]$$

b.1. Factorisé, le quotient $Q(x)=\dfrac{(3x-1)(3x+3)}{3x-x^2}=\dfrac{(3x-1)(3x+3)}{3\times\boxed{x}-x\times\boxed{x}}=\dfrac{(3x-1)(3x+3)}{\boxed{x}\times(3-x)}$ se compose de quatre facteurs affines s'annulant en :

$$3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 3x+3=0 \Leftrightarrow 3x=-3 \Leftrightarrow x=-1 \quad \text{et} \quad x=0 \quad \text{et} \quad 3-x=0 \Leftrightarrow x=3$$

Le tableau de signe du quotient $Q(x)$ est celui ci-contre ⇨

x	$-\infty$		-1		0		$1/3$		3		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

b.2. Factorisons la forme $N(x)$ en utilisant la méthode de la forme canonique :

$$N(x)=9x^2+6x-3=\overbrace{(3x)^2+2\times 3x\times 1}^{\text{Début de cette identité...}}-3=\overbrace{(3x+1)^2}^{\text{...remarquable.}}-1^2-3$$

$$=(3x+1)^2-4=\overbrace{(3x+1)^2-2^2}^{\text{Différence de...}}=\overbrace{\left[(3x+1)+2\right]\times\left[(3x+1)-2\right]}^{\text{...deux carrés.}}$$

$$=(3x+3)\times(3x-1)$$

b.3. La résolution de cette dernière inéquation se fera suivant la recette habituelle : tout ramener à gauche; mise au même dénominateur et puis nous verrons...

$$\frac{32}{3-x} \leq 9+\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{32}{3-x}-9-\frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{32\times x-9\times x\times(3-x)-1\times(3-x)}{(3-x)\times x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{32x-27x+9x^2-3+x}{(3-x)\times x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\overbrace{\boxed{9x^2+6x-3}}^{N(x)}}{x(3-x)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-1)(3x+3)}{3x-x^2} \leq 0 \Leftrightarrow Q(x) \leq 0$$

Ainsi, résoudre cette inéquation revient-il à savoir quand le quotient $Q(x)$ est négatif ou nul. D'après son tableau de signe dressé à la question b.1, nous pouvons conclure :

$$S=\left]-\infty;-1\right] \cup \left]0;\frac{1}{3}\right] \cup \left]3;+\infty\right[$$

Le six t'aime...à la folie !

L'énoncé

a. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y :

$$(S_1)\begin{cases} 3x - y = 5 & \textbf{(1)} \\ 4x + 7y = 6 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire de trois équations à trois inconnues x, y et z :

$$(S_2)\begin{cases} 2x - y - 4z = 5 & \textbf{(1)} \\ 2x - z = 9 & \textbf{(2)} \\ 4x + 3y + 7z = 6 & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Le corrigé

a. Nous allons résoudre le système (S_1) par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour obtenir x, on vise l'élimination des y.

$$\begin{array}{lcr} \textbf{(1)} & \xrightarrow{\times 7} & 21x - 7y = 35 \\ \textbf{(2)} & \xrightarrow{} & 4x + 7y = 6 \\ \hline & & 25x = 41 \end{array} \quad \oplus$$

$$\boxed{x = \frac{41}{25} = 1{,}64}$$

Pour trouver y, on vise la suppression des x.

$$\begin{array}{lcr} \textbf{(1)} & \xrightarrow{\times 4} & 12x - 4y = 20 \\ \textbf{(2)} & \xrightarrow{\times 3} & 12x + 21y = 18 \\ \hline & & -25y = 2 \end{array} \quad \ominus$$

$$\boxed{y = -\frac{2}{25} = -0{,}08}$$

Conclusion : le système (S_1) a pour unique solution le couple $\underbrace{(1{,}64 \; ; \; -0{,}08)}_{x \quad y}$.

b. Vu la morphologie du système (S_2), on décide de constituer un système 2×2 avec les inconnues x et z. car nous disposons déjà d'une équation avec ces deux inconnues : la ***(2)***. Pour obtenir une seconde équation en x et z, nous allons combiner les équations ***(1)*** et ***(3)*** de façon à éliminer l'inconnue y.

$$\begin{array}{lcr} \textbf{(1)} & \xrightarrow{\times 3} & 6x - 3y - 12z = 15 \\ \textbf{(3)} & \xrightarrow{} & 4x + 3y + 7z = 6 \\ \hline & & 10x - 5z = 21 \quad \textbf{(13)} \end{array} \quad \oplus$$

A présent, nous devons résoudre le système 2×2 d'inconnue x et z qu'est :

$$\begin{cases} 2x - z = 9 & \textbf{(2)} \\ 10x - 5z = 21 & \textbf{(13)} \end{cases}$$

Pour ce faire, nous allons procéder par substitution. A partir de l'équation ***(2)***, on exprime z en fonction de x.

$$2x - z = 9 \iff 2x - 9 = z \iff \boxed{z = 2x - 9}$$

Puis, dans ***(13)***, on remplace z par ce qu'il vaut en x. Il vient alors :

$$10x - 5z = 21 \iff 10x - 5 \times (2x - 9) = 21 \iff \cancel{10x} - \cancel{10x} + 45 = 21 \iff \boxed{45 = 21}$$

Conclusion : comme 45 n'est jamais égal à 21, alors le système n'admet aucune solution.

Algorithmique

L'algue haut rythme !

L'énoncé

a. On considère le programme ou algorithme suivant :

```
n, p et s sont trois entiers naturels
n=0
s=0
Demander une valeur pour p à l'utilisateur
Tant que s<23 faire
        Si s<15 alors s=s+2×p
                sinon s=s+p
        n=n+1
Afficher "La valeur de n est",n
```

1. Exécuter l'algorithme précédent (on détaillera les étapes) dans le cas où l'utilisateur donne 4 pour valeur à la variable *p*.
2. Que se passe-t-il lorsque l'utilisateur donne 0 pour valeur à la variable *p* ?

b. On considère le programme ou algorithme suivant :

```
a, s et i sont trois entiers relatifs
s=0
a=2
Pour i=5 jusqu'à 7
        a=2×a+i
        Si a est divisible par 3 alors s=s+a
                                 sinon s=s-a
s=s+2
```

Exécuter l'algorithme précédent (on détaillera les étapes) et conclure en donnant la valeur finale de la variable *s*.

Le corrigé

a.1. Exécutons l'algorithme précédent dans le cas où $p = 4$.

Instruction et commentaire	***n***	***p***	***s***
n=0 s=0	0	?	0
L'utilisateur donne pour valeur 4 à p	0	4	0
Tant que : comme s<23, on boucle :	0	4	0
Comme s<15 alors s=s+2×p $= 0+8=8$	0	4	8
n=n+1 $= 0+1=1$	1	4	8
Tant que : comme s<23, on boucle :	1	4	8
Comme s<15 alors s=s+2×p $= 8+8=16$	1	4	16
n=n+1 $= 1+1=2$	2	4	16
Tant que : comme s<23, on boucle :	2	4	16
Comme ~~s<15~~ sinon s=s+p $= 16+4=20$	2	4	20
n=n+1 $= 1+2=3$	3	4	20
Tant que : comme s<23, on boucle :	3	4	20
Comme ~~s<15~~ sinon s=s+p $= 20+4=24$	3	4	24
n=n+1 $= 3+1=4$	4	4	24
Tant que : comme ~~s<23~~, on casse boucle	4	4	24
L'ordinateur affiche "La valeur de *n* est 4."			

a.2. Lorsque la variable p a pour valeur 0, la variable *s* ne progresse plus et demeure toujours égale à 0. Par conséquent, le programme précédent boucle indéfiniment.

b. Exécutons ce second algorithme.

Instruction et commentaire	***a***	***i***	***s***
s=0 a=2	2	?	0
Pour i=5 :	2	5	0
a=2×a+i $= 2\times 2+5=9$	9	5	0
Comme a est divisible par 3 alors s=s+a $= 0+9=9$	9	5	9
Pour i=6 :	9	6	9
a=2×a+i $= 2\times 9+6=24$	24	6	9
Comme s est divisible par 3 alors s=s-a $= 9+24=33$	24	6	33
Pour i=7 :	24	7	33
a=2×a+i $= 2\times 24+7=55$	55	7	33
Comme s n'est pas divisible par 3 sinon s=s-a $= 33-55=-22$	55	7	-22
s=s+2 $= -22+2=-20$	55	7	-20

A l'issue de l'algorithme, la variable *s* vaut -20.

Un pour-pour pour finir

L'énoncé

On considère le programme ou algorithme suivant :

```
i, j et s sont trois entiers naturels
s=0
Pour i=10 jusqu'à 11 faire
        s=s+i
        Pour j=i jusqu'à 12 faire s=s+j
s=s+9
```

Exécuter l'algorithme précédent et donner la valeur finale de la variable s.

Le corrigé

Exécutons l'algorithme proposé :

Instruction et commentaire	i	j	s
`s=0`	?	?	0
`Pour i=10` [jusqu'à 11] `on fait :`	10	?	0
`s=s+i` $=0+10=10$	10	?	10
`Pour j=i` $=10$ [jusqu'à 12] `on fait:`	10	10	10
`s=s+j=` $=10+10=20$	10	10	20
`Pour j=11 on fait :`	10	11	20
`s=s+j=` $=20+11=31$	10	11	31
`Pour j=12 on fait :`	10	12	31
`s=s+j=` $=31+12=43$	10	12	43
`Pour i=11 on fait :`	11	12	43
`s=s+i` $=43+11=54$	11	12	54
`Pour j=i` $=11$ [jusqu'à 12] `on fait:`	11	11	54
`s=s+j=` $=54+11=65$	11	11	65
`Pour j=12` [jusqu'à 12] `on fait:`	11	12	65
`s=s+j=` $=65+12=77$	11	12	77
`s=s+9`	11	12	86

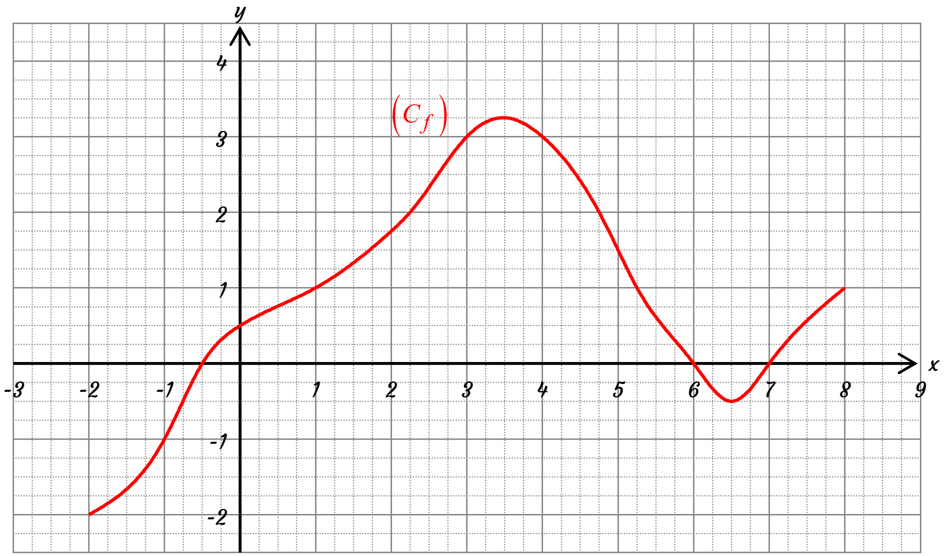
La valeur finale de la variable s est 86.

Fonctions

Une fonction par un graphique

L'énoncé

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\left(C_f\right)$ représentant la fonction *f* qui est définie sur l'intervalle $[-2;8]$.



A partir du graphique précédent, on répondra directement sur la présente feuille aux questions suivantes avec toute la précision permise par ce premier. Aucune justification n'est demandée.

a. Compléter ce qui suit :

1. L'(les) antécédent(s) de 2 par la fonction *f* est (sont)............................

2. Le minimum de *f* sur l'intervalle $[0;8]$ est......... Il est atteint en $x =$ ....

3. Le (les) image(s) de 2 par la fonction *f* est (sont)..............................

4. Le maximum de *f* sur l'intervalle $[-2;3]$ est......... Il est atteint en $x =$ ....

5. Le (les) image(s) de 4 par la fonction *f* est (sont)..............................

6. L'(les) antécédent(s) de 4 par la fonction *f* est (sont)..........................

7. La (les) solution(s) de l'équation $f(x)=0$ est (sont)...............................

8. $f(-2{,}25) =$ ....

b. Compléter le tableau de variation suivant résumant les variations de la fonction *f* sur son ensemble de définition :

x	
f	

c. Compléter le tableau de signe suivant résumant le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.

x	
$f(x)$	

d. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$f(x)>1$	$f(x)\le 3$
S = ...	S = ...
$f(x)\le -2$	$0\le f(x)<1$
S = ...	S = ...

Le corrigé

a. Avant toutes choses, rappelons que tous les points de la courbe (C_f) ont des coordonnées de la forme $\underbrace{(x;f(x))}_{\text{Un nombre et son image}}$.

1. Les antécédents de 2 sont les abscisses des points de la courbe (C_f) d'ordonnée 2.
   <u>Conclusion :</u> 2 a deux antécédents par *f* qui sont 2,25 et 4,75.
2. Le point le plus bas de la courbe sur l'intervalle $[0;8]$ a pour coordonnées $(6{,}5;-0{,}5)$.
   <u>Conclusion :</u> le minimum de *f* sur $[0;8]$ est $-0{,}5$ et est atteint en $x=-6{,}5$.
3. L'image de 2 est l'ordonnée du point de la courbe (C_f) qui a pour abscisse 2.
   <u>Conclusion :</u> l'image de 2 par la fonction *f* est 1,75. Ce qui se note $f(2)=1{,}75$
4. Sur l'intervalle $[-2;3]$, le point le haut de la courbe a pour coordonnées $(3;3)$.
   <u>Conclusion :</u> le maximum de *f* sur $[-2;3]$ est 3. Il est atteint en $x=3$.
5. L'image de 4 par *f* est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4.
   <u>Conclusion :</u> l'image de 4 par *f* est égale à 3. Ce que l'on résume par $f(4)=3$.
6. Les antécédents de 4 par *f* sont les abscisses des points de la courbe (C_f) dont les ordonnées sont égales à 4.
   Conclusion : aucun point de la courbe n'ayant une ordonnée égale à 4, 4 n'a pas d'antécédents par la fonction *f*.
7. Trois points de la courbe ont leurs ordonnées $f(x)$ égales à 0. Ils ont pour abscisses $-0{,}5$; 6 et 7. Ce sont les trois solutions de l'équation $f(x)=0$.
8. $-2{,}25$ se trouvant en dehors de l'ensemble de définition de la fonction *f*, il n'a d'image par cette fonction.

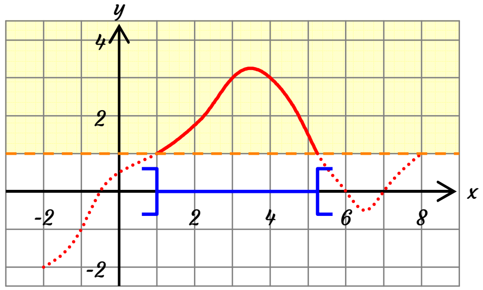
b. Le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[-2;8]$ est :

x	-2		$3{,}5$		$6{,}5$		0
f			$3{,}25$				1
		↗		↘		↗	
	-2				$-0{,}5$		

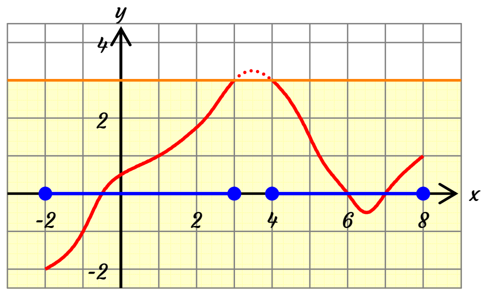
c. Le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-2;8]$ est :

x	-2		$-0{,}5$		6		7		8
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

d.1. Pour résoudre l'inéquation $f(x)>1$, nous devons déterminer les abscisses *x* de tous les points de la courbe (C_f) dont les ordonnées $f(x)$ sont strictement supérieures à 1. Ces abscisses *x* sont comprises entre 1 et 5,25 exclus.
L'ensemble des solutions de cette inéquation est :



$S=]1;5{,}25[$

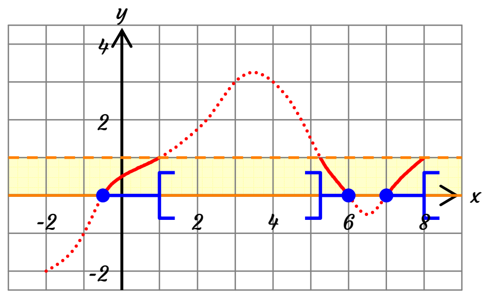


d.2. Les solutions de l'inéquation $f(x)\leq 3$ sont les abscisses *x* des points de la courbe (C_f) dont les ordonnées $f(x)$ sont inférieures ou égales à 3.
Par lecture graphique, nous obtenons :

$S=[-2;3]\cup[4;8]$

d.3. Un seul point de la courbe (C_f) a une ordonnée $f(x)$ inférieure ou égale à -2 : il s'agit de -2 . C'est la seule solution de l'inéquation $f(x)\leq -2$.

$S=\{-2\}$



d.4. Les solutions de l'inéquation $0\leq f(x)<1$ sont les abscisses des points de la courbe (C_f) dont les ordonnées sont comprises entre 0 compris et 1 exclu.
Nous en déduisons :

$S=[-0{,}5;1[\cup]5{,}25;6]\cup[7;8[$

Affinage fonctionnel

L'énoncé

a. Sur le graphique ci-contre, tracer les courbes (C_f) et (C_g) représentant les fonctions *f* et *g* définis pour tout réel *x* par :

$$f(x)=2x-5 \qquad \text{et} \qquad g(x)=-\frac{2}{3}\times x+3$$

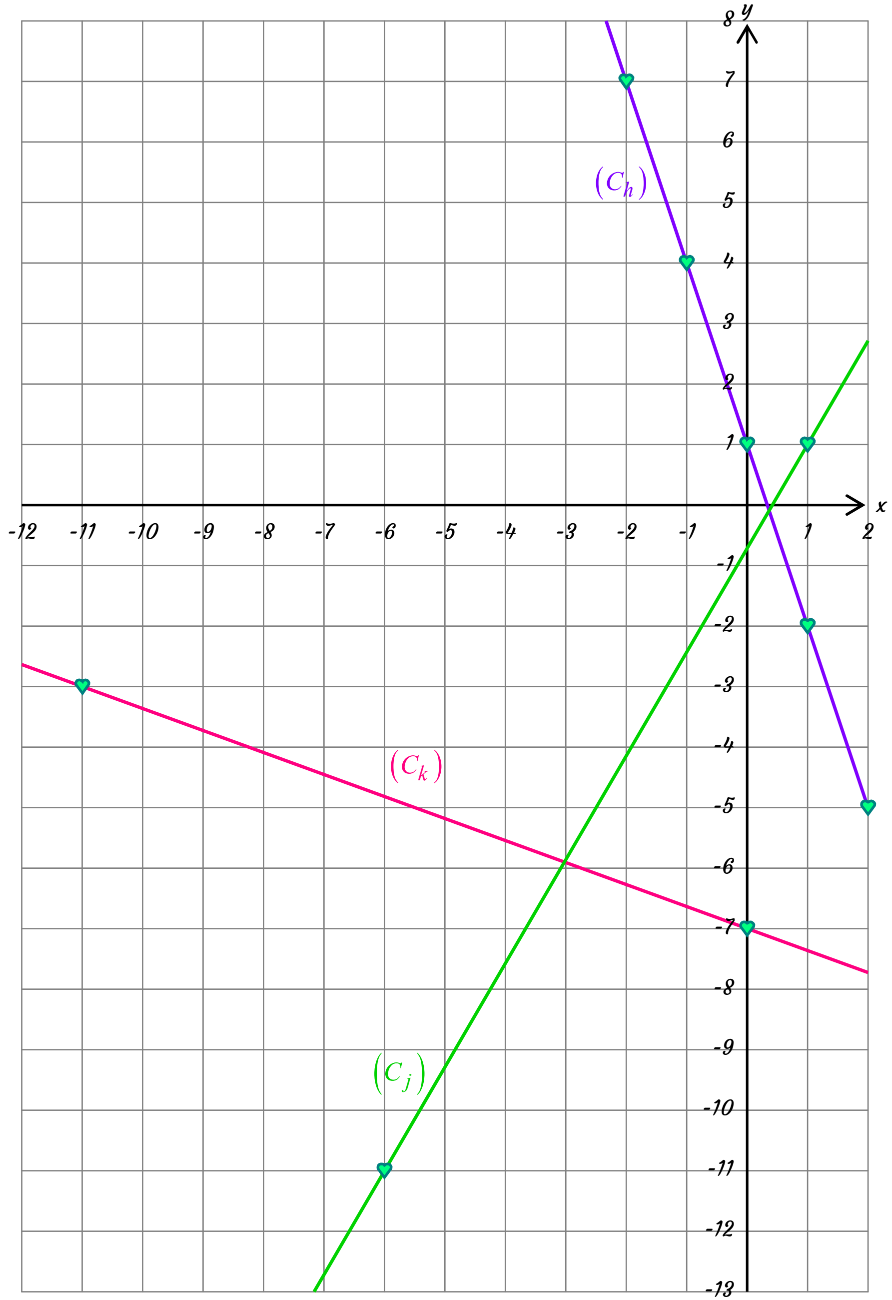
b. Sur le graphique ci-contre, on a tracé dans un repère orthonormé trois courbes (C_h), (C_j) et (C_k) représentant les fonctions affines *h*, *j* et *k*. On a également placé tous leurs points à coordonnées entières.
Déterminer des expressions des fonctions *h*, *j* et *k*.

c. La fonction *l* est définie pour tour réel *x* par :

$$l(x)=\frac{4-2x}{9}$$

On appelle (C_l) sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction *l* est une fonction affine. On précisera son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
2. Calculer l'image de -7 par la fonction *l*.
3. Déterminer le ou les antécédents de 0 par la fonction *l*.
4. Tracer la courbe (C_l) sur le graphique ci-contre.
5. Dresser le tableau de signe de $l(x)$ sur $\mathbb{R}$
6. On sait que α est un nombre strictement inférieur à -20. Des deux images $l(\alpha)$ et $l(-20)$, laquelle est la plus grande ? On justifiera sa réponse.



Le corrigé

a.1. La fonction *f* ayant une expression de la forme $ax+b$, sa courbe est une droite dont nous allons déterminer deux points en calculant deux images. C'est l'une des méthodes possibles. Par exemple, nous calculons les images :

$f(0)=2\times 0-5=0-5=\underline{-5} \Rightarrow (C_f)$ passe par le point de coordonnées $(0;-5)$.

$f(-2)=2\times(-2)-5=-4-5=\underline{-9} \Rightarrow (C_f)$ passe par le point $(-2;-9)$.

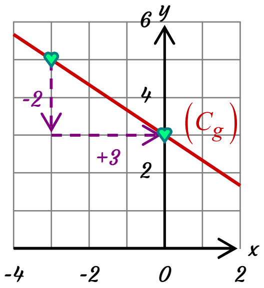
Pour note, le premier point correspond à l'ordonnée à l'origine. Nous aurions aussi pu obtenir le second point en recourant au coefficient directeur 2.

a.2. g étant affine d'ordonnée à l'origine 2, la droite $\left(C_g\right)$ coupe l'axe des ordonnées (Oy) au point de coordonnées $(0;2)$.

Ensuite, on obtient un second point de cette droite en interprétant le coefficient directeur de g :

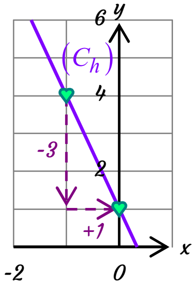
$$-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}\begin{array}{l}\leftarrow \text{Variation d'ordonnée } \Delta y\\ \leftarrow \text{Variation d'abscisse } \Delta x\end{array}$$

Partant vers la gauche (car on sort du graphique à droite) du point d'ordonnée à l'origine, on obtient un second point ayant pour coordonnées $(0-3;3-(-2))=(-3;-5)$.

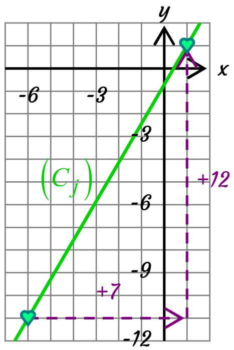


b. Les trois fonctions h, j et k étant affines, elles admettent une expression de la forme $ax+b$ et leurs courbes représentatives sont trois droites.

➲ La courbe $\left(C_h\right)$ coupant l'axe des ordonnées (Oy) au point de coordonnées $(0;1)$, l'ordonnée à l'origine b de h est égale à 1.



Ensuite, lorsque l'on progresse de 1 en abscisse sur la courbe $\left(C_h\right)$, on baisse de -3 en ordonnée. Donc le coefficient directeur a est égale à -3. Par conséquent : $\boxed{h(x)=-3x+1}$



➲ Le coefficient directeur de la fonction j est

$$a=\frac{+12}{+7}=\boxed{\frac{12}{7}}$$

Donc l'expression réduite de la fonction j est de la forme :

$$\boxed{j(x)=\frac{12}{7}x+b}$$

Mais il est difficile de lire directement l'ordonnée à l'origine b.

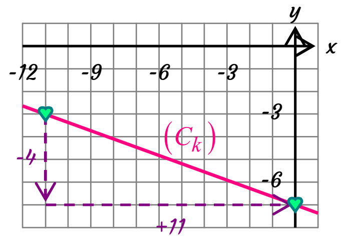
On détermine cette dernière en remarquant que, d'après le graphique :

$$j(1)=1 \iff \frac{12}{7}\times 1+b=1 \iff \frac{12}{7}+b=1 \iff b=1-\frac{12}{7}=\frac{1\times 7}{7}-\frac{12}{7}=\boxed{-\frac{5}{7}}$$

Nous en concluons qu'une expression de la fonction j est : $j(x)=\boxed{\frac{12}{7}x-\frac{5}{7}=\frac{12x-5}{7}}$

➲ Le coefficient directeur de la fonction affine k est :

$$a=\frac{\text{Variation d'ordonnée}}{\text{Variation d'abscisse}}=\frac{-4}{+11}=\boxed{-\frac{4}{11}}$$



La droite $\left(C_k\right)$ franchissant l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;-7)$, l'ordonnée à l'origine b vaut -7.

Nous en concluons : $k(x)=\boxed{-\frac{4}{11}x-7=\frac{-4x-77}{11}}$

c.1. Pour tout réel x, nous pouvons écrire : $l(x)=\frac{4-2x}{9}=\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\times x=\underbrace{-\frac{2}{9}}_{a}x+\underbrace{\frac{4}{9}}_{b}$

Donc l est affine; elle a pour coefficient directeur $-\frac{2}{9}$ et pour ordonnée à l'origine $\frac{4}{9}$.

c.2. Calculons l'image de -7 par la fonction l : $l(-7)=\frac{4-2\times(-7)}{9}=\frac{4+14}{9}=\frac{18}{9}=\boxed{2}$

Donc la courbe $\left(C_l\right)$ passe par le point de coordonnées $(-7;2)$.

c.3. Pour trouver le ou les antécédents de 0 par la fonction l, nous résolvons l'équation :

$$l(x)=0 \iff \frac{4-2x}{7}=0 \xrightarrow{\times 7} \frac{4-2x}{\cancel{7}}\times\cancel{7}=0\times 7 \iff 4-2x=0 \iff -2x=-4$$

$$\iff x=\frac{-4}{-2}=\boxed{2}$$

<u>Conclusion :</u> 0 a un seul antécédent par la fonction l qui est 2. La courbe $\left(C_l\right)$ passe par le point de coordonnées $(2;0)$

c.4. $\left(C_l\right)$ est une droite passant par les deux points de coordonnées $(-7;2)$ et $(2;0)$

c.5. Le tableau de signe de $l(x)$ dont le coefficient directeur est négatif est le suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$l(x)$		+	0	−	

c.6. Son coefficient directeur $-\frac{2}{9}$ étant négatif, la fonction l est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent : $\alpha<-20 \xrightarrow[l \text{ ordre change}]{l \text{ est décroissante}} \boxed{l(\alpha)>l(-20)}$.

Y'a carré fléchir !

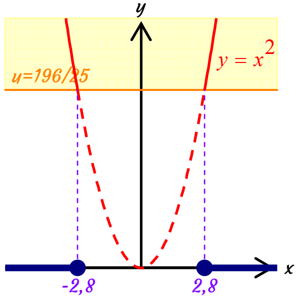
L'énoncé

Donner les ensembles de solutions dans ℝ des inéquations suivantes. Aucune justification n'est à priori requise...mais on pourra expliquer sa démarche au moyen d'un graphique.

a. $x^2 \geq \dfrac{196}{25}$ **b.** $2{,}89 \leq x^2 < 10$ **c.** $4 - x^2 > 5$

Le corrigé

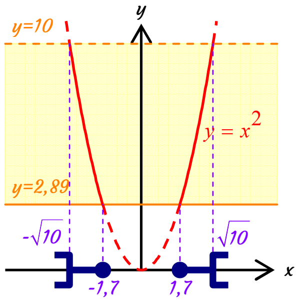
Les trois inéquations se résolvent en s'aidant de la courbe représentative de la fonction carré.



a. Les solutions de l'inéquation $x^2 \geq \dfrac{196}{25}$ sont les réels de la réunion d'intervalles $\left]-\infty;-\dfrac{14}{5}\right] \cup [2{,}8;+\infty[$.

Pour note $\dfrac{196}{25} = 7{,}84 = 2{,}8^2 = \left(\dfrac{14}{5}\right)^2$.

b. Les solutions de l'inéquation $2{,}89 \leq x^2 < 10$ sont les réels de la réunion d'intervalles $\left]-\sqrt{10};-1{,}7\right] \cup \left[1{,}7;\sqrt{10}\right[$.



c. La dernière inéquation doit être modifiée pour pouvoir être résolue.

$$4 - x^2 > 5 \xrightarrow{-4} -x^2 > 1 \xrightarrow[\text{L'ordre change}]{\times(-1)} x^2 < -1$$

Or, un carré n'est jamais négatif. Donc il n'est jamais inférieur strictement à -1.
Conclusion : cette inéquation n'admet pas de solution.

La bonne partie de la coucourbe

L'énoncé

a. Donner les tableaux de variation des quatre fonctions de référence carré, cube, inverse et racine.

b. Donner les ensembles de solutions dans ℝ des inéquations suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. $x^2 \geq 1764$ **2.** $\dfrac{1}{x} \geq 8$ **3.** $\sqrt{x} > 25$

4. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{5}{4}$ **5.** $-1 < x^3 \leq 8$ **6.** $x^2 \leq -1764$

Le corrigé

a. Les tableaux de variations demandés sont les suivants :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)=x^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)=x^3$	$-\infty$	↗	$+\infty$

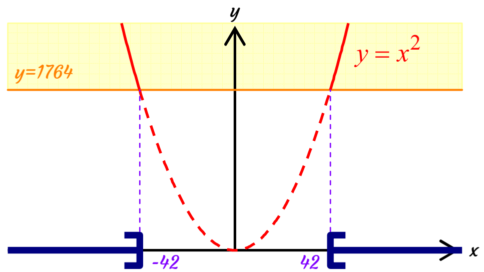
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	0^-	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0^+

x	0		$+\infty$
$f(x)=\sqrt{x}$	0	↗	$+\infty$

b. Nous allons résoudre les inéquations proposées en utilisant les courbes des fonctions de référence : carré, cube, inverse et racine.

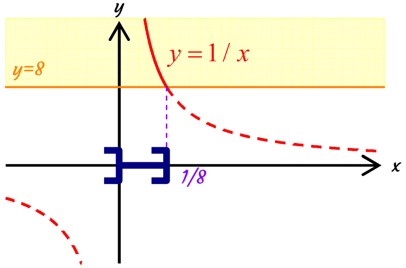
b.1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 \geq 1764 = 42^2$ est :

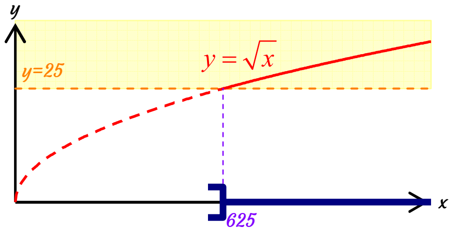
$$S =]-\infty;-42] \cup [42;+\infty[$$



b.2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} \geq 8$ est :

$$S = \left]0;0,125\right]$$



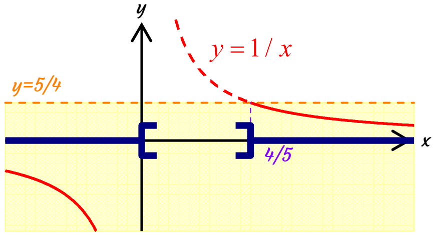


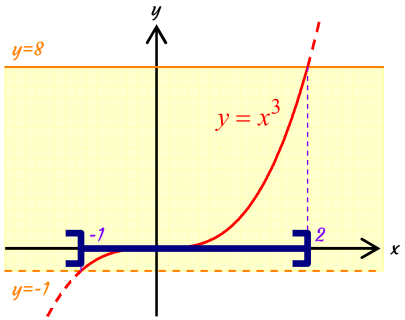
b.3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} > 25$ est :

$$S = \left]625;+\infty\right[$$

b.4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} < \frac{5}{4}$ est :

$$S = \left]-\infty;0\right[\cup \left]0,8;+\infty\right[$$





b.5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-1 < x^3 \leq 8$ est :

$$S = \left]-1;2\right]$$

b.6. Un carré n'étant jamais négatif, x^2 n'est jamais inférieur ou égal à -1764. Donc l'inéquation $x^2 \leq -1764$ n'a pas de solutions.

Baroud fonctionnel

L'énoncé

On considère les fonctions *f*, *g* et *h* qui sont définies par :

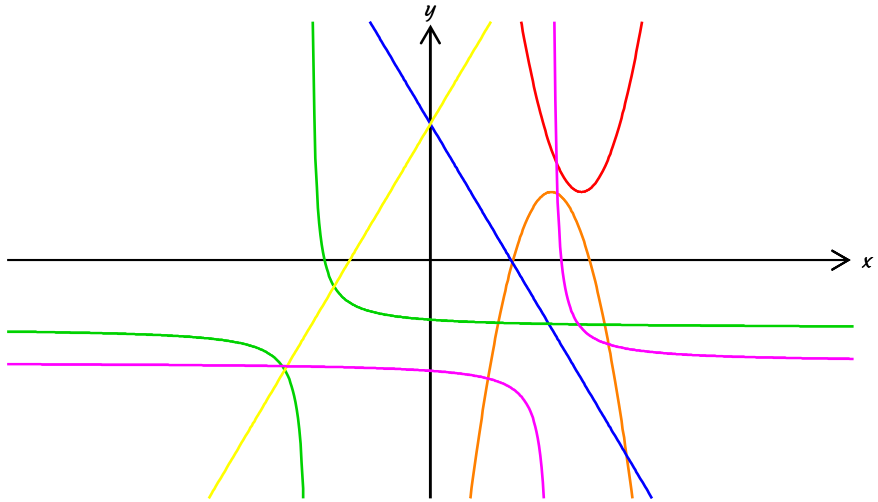
$$f(x) = -5x^2 + 20x - 18 \qquad g(x) = 4 - 3x \qquad h(x) = \frac{-4x-7}{2x+4}$$

a. Dresser les tableaux de variation des fonctions *f* et *g* sur leurs ensembles de définition. On calculera les valeurs des éventuels minima ou maxima.

b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction *h*. On justifiera sa réponse.

c. Ecrire la fonction $f(x)$ sous forme canonique.

d. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté six courbes de couleurs différentes dans un repère simplement orthogonal et non normé.
Par leurs couleurs, indiquer les courbes qui représentent les fonctions *f*, *g* et *h* ?



e. Résoudre dans ℝ les équations et inéquations suivantes :

1. $f(x) = -18$ **2.** $g(x) < 7$ **3.** $h(x) \geq 2$

Le corrigé

a. La fonction $f(x)$ est du second degré et de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = -5 \\ b = 20 \\ c = -18 \end{cases}$

Elle change de variation en : $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{20}{2\times(-5)}=\dfrac{-20}{-10}=2$

Son coefficient dominant $a=-5$ étant négatif, son tableau de variation est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Le maximum de la fonction *f* est : $f(2)=-5\times 2^2+20\times 2-18=-20+40+18=2$

➲ La fonction $g(x)=-3x+4$ est affine. Son coefficient directeur -3 étant négatif, le tableau de variation de la fonction *g* est le suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
Variation de g	$+\infty$	↘	$-\infty$

b. *h* est une fonction homographique, c'est-à-dire qu'elle est un quotient de deux fonctions affines définies sur ℝ. Par conséquent :

La fonction $h(x)$ existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $2x+4$ est non nul

$$\Leftrightarrow\quad 2x+4\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x\neq -4 \quad\Leftrightarrow\quad x\neq\frac{-4}{2}=-2$$

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction *h* est :

$$D_h=\mathbb{R}\setminus\{-2\}=\left]-\infty;-2\right[\cup\left]-2;+\infty\right[$$

c. Pour tout réel *x*, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\underbrace{-5x^2+20x}_{\text{On factorise...}}-18=-5\times\underbrace{\left[x^2-4x\right]}_{\text{...par }-5}-18$$

$$=-5\times\left[\overbrace{x^2-2\times x\times 2}^{\text{Début d'une...}}\right]-18=-5\times\left[\overbrace{(x-2)^2-2^2}^{\text{...identité remarquée}}\right]-18$$

$$=\overbrace{-5\times\left[(x-2)^2-4\right]}^{\text{On redistribue...}}-18=\overbrace{-5\times(x-2)^2+20}^{\text{...le facteur }-5}-18=-5\times(x-2)^2+2$$

d. Compte tenu de ce qui a été fait :

- La courbe de la fonction *f* est une parabole orientée vers le bas : courbe orange.
- La courbe de l'affine *g* est une droite descendante : courbe bleue.
- La courbe de la fonction *h* doit présenter une rupture en -2 : courbe verte.

e. Résolvons dans ℝ la première équation :

$$f(x)=-18 \quad\Leftrightarrow\quad -5x^2+20x\cancel{-18}=\cancel{-18} \quad\Leftrightarrow\quad -5x\times\boxed{x}+20\times\boxed{x}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \underbrace{\boxed{x}\times(-5x+20)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{x=0 \quad\text{ou}\quad -5x+20=0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

$$-5x=-20$$

$$x=\frac{-20}{-5}=4$$

Conclusion : l'équation $f(x)=-18$ admet deux solutions qui sont 0 et 4.

➲ Résolvons dans ℝ la deuxième inéquation qui est simplement du premier degré :

$$g(x)<7 \quad\Leftrightarrow\quad 4-3x<7 \quad\xrightarrow{-4}\quad -3x<3 \quad\xrightarrow[\text{L'ordre change}]{\div(-3)}\quad x>\frac{3}{-3}=-1$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions est : $S=\left]-1;+\infty\right[$

➲ Pour résoudre cette dernière inéquation, nous allons tout ramener à gauche, puis nous chercherons à tout mettre au même dénominateur; nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$h(x)\geq 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-4x-7}{2x+4}-2\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-4x-7-2\times(2x+4)}{2x+4}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{-4x-7-4x-8}{2x+4}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-8x-15}{2x+4}\geq 0$$

Si le dénominateur $2x+4$ s'annule en -2, qu'en est-il du numérateur ?

$$-8x-15=0 \quad\Leftrightarrow\quad -8x=15 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{15}{-8}=-1{,}875$$

Nous en déduisons que le tableau de signe de ce dernier quotient :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{15}{8}$		$+\infty$
$-8x-15$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$-$	‖	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=\left]-2;-\dfrac{15}{8}\right]$

Géométrie analytique

Place moi si tu peux !

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère simplement orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dans ce repère, on a placé le point A de coordonnées $(-2{,}3\ ;\ -4{,}7)$.

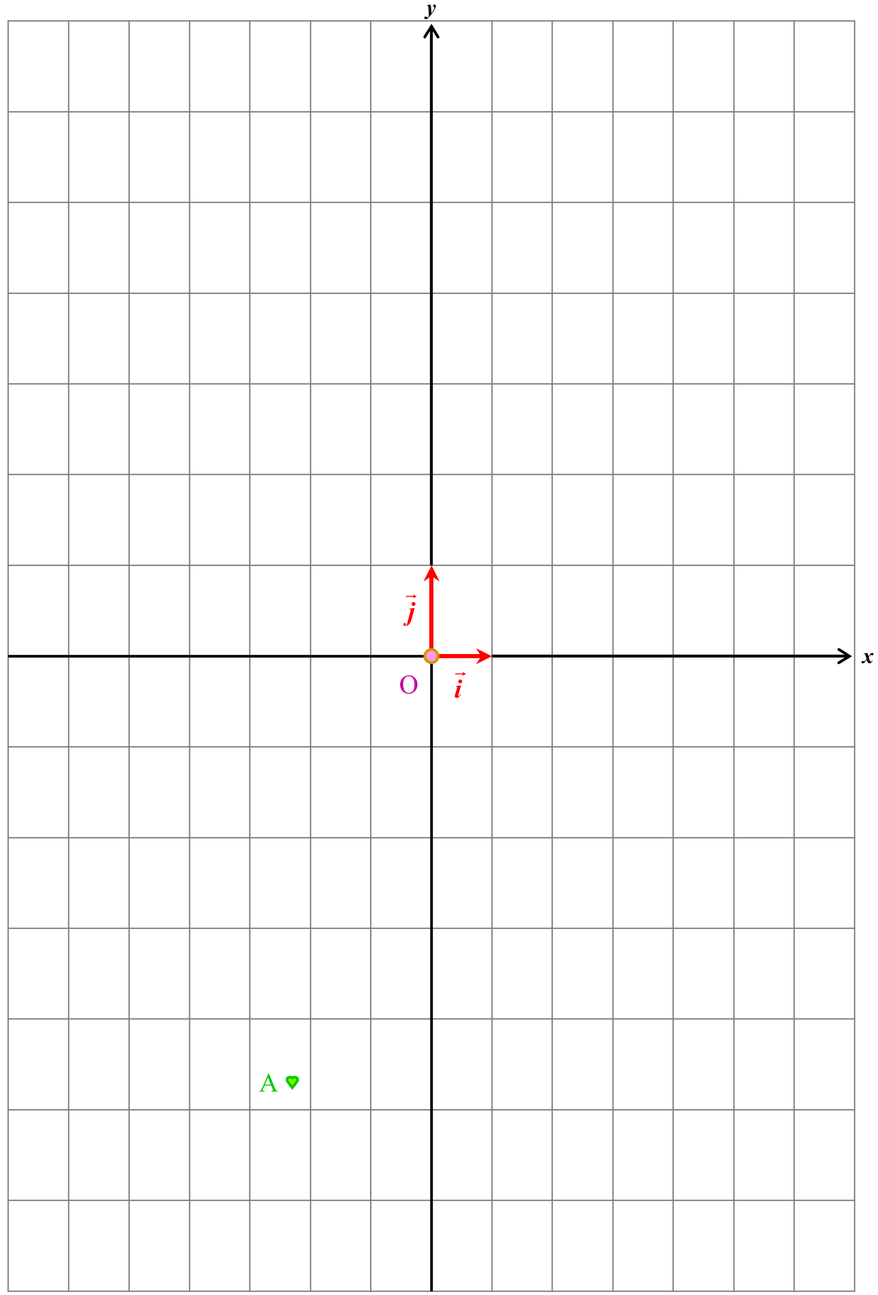
a. Sur le graphique ci-contre, placer le point B de coordonnées $(2\ ;\ -6)$ et le point C défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OC}=3\vec{j}-\vec{i}$.

b. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point D qui est le quatrième sommet du parallélogramme CBAD.
Construire ce point D au compas sur le graphique ci-contre.

c. Calculer les coordonnées du point I qui est le milieu du segment [CA].

d. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point E et F définis par les relations vectorielles : $\overrightarrow{EA}=-\frac{2}{3}\times\overrightarrow{BC}$ <u>et</u> $3\times\overrightarrow{OF}+7\times\overrightarrow{BF}=5\times\overrightarrow{BC}$

e. Le quadrilatère EFCD est-il un parallélogramme ? On justifiera se réponse.



Le corrigé

a. Les points B et C se placent avec leurs coordonnées qui sont autant de relations vectorielles implicites

$$B(2\ ;\ -6) \text{ dans } \left(O;\vec{i},\vec{j}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}=2\vec{i}-6\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OC}=3\vec{j}+(-1)\times\vec{i} \Leftrightarrow C(-1\ ;\ 3) \text{ dans } \left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$$

b. Le fait qu'un quadrilatère soit un parallélogramme se traduit par une égalité vectorielle.

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_D-(-1) \\ y_D-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-2{,}3)-2 \\ (-4{,}7)-(-6) \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}} \Leftrightarrow \overbrace{x_D+1=-4{,}3}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{y_D-3=1{,}3}^{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$x_D=-5{,}3 \qquad y_D=4{,}3$$

<u>Conclusion :</u> le point D a pour coordonnées $(-5{,}3\ ;\ 4{,}3)$. Il est placé sur la figure.

c. Les coordonnées du milieu I du segment [AC] sont données par la formule :

$$x_I=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2{,}3+(-1)}{2}=\frac{-3{,}3}{2}=-1{,}65 \qquad y_I=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-4{,}7+3}{2}=\frac{-1{,}7}{2}=-0{,}85$$

d. Le point E est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{EA} = -\frac{2}{3}\times\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2,3-x_E\\-4,7-y_E\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\times\begin{pmatrix}-1-2\\3-(-6)\end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\times\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}-2,3-x_E\\-4,7-y_E\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{-2,3-x_E = 2}^{\text{Abscisses égales}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{-4,7-y_E = -6}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$-x_E = 4,3 \qquad -y_E = -1,3,$$

$$x_E = -4,3 \qquad y_E = 1,3$$

Le point F est défini par la relation vectorielle :

$$3\times\overrightarrow{OF} + 7\times\overrightarrow{BF} = 5\times\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\times\begin{pmatrix}x_F-0\\y_F-0\end{pmatrix} + 7\times\begin{pmatrix}x_F-2\\y_F-(-6)\end{pmatrix} = 5\times\begin{pmatrix}-1-2\\3-(-6)\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 3\times\begin{pmatrix}x_F\\y_F\end{pmatrix} + 7\times\begin{pmatrix}x_F-2\\y_F+6\end{pmatrix} = 5\times\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3x_F\\3y_F\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7x_F-14\\7y_F+42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\45\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}10x_F-14\\10y_F+42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\45\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{10x_F-14=-15}^{\text{Abscisses égales}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{10y_F+42=45}^{\text{Ordonnées égales}}$$

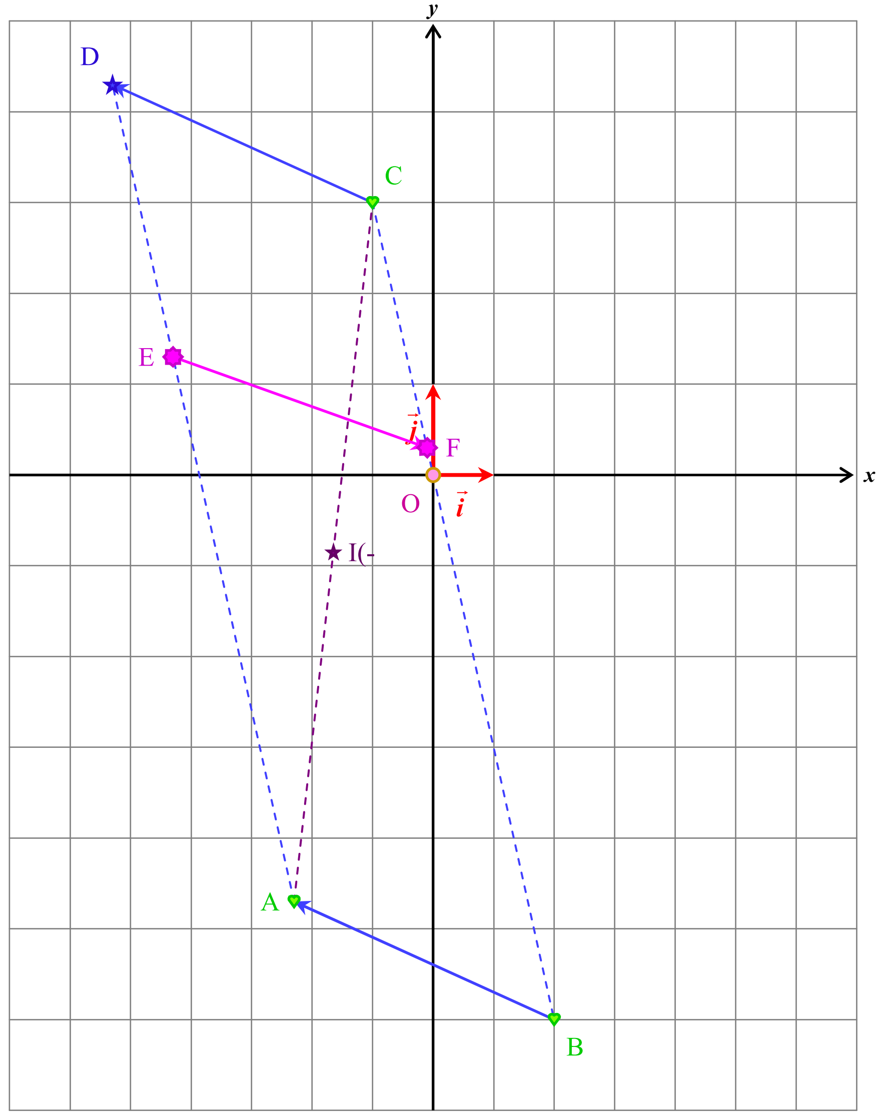
$$10x_F = -1 \qquad 10y_F = 3$$

$$x_F = \frac{-1}{10} = -0,1 \qquad y_F = \frac{3}{10} = 0,3$$

e. Calculons les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1-(-5,3)=4,3\\3-4,7=-1,3\end{pmatrix} \quad \underline{\text{et}} \quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-0,1-(-4,3)=4,2\\0,3-1,3=-1\end{pmatrix}$$

Leurs coordonnées n'étant pas égales, les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas égaux et le quadrilatère EFCD n'est pas un parallélogramme.
A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Des points, des vecteurs et des nombres

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants :

$A(1\,;\,2)$ $B(-6\,;\,-1)$ $C(-2\,;\,-3)$ $D(0{,}2\,;\,-4{,}1)$

Les normes de deux vecteurs de base sont égales à un centimètre.

a. Les points B, C et D sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.

b. On appelle E le quatrième sommet du parallélogramme DABE

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E.
2. Construire au compas le point E. On laissera les traits de construction apparents.

c. On appelle F le point d'intersection de la droite (AB) et de l'axe des abscisses (Ox).

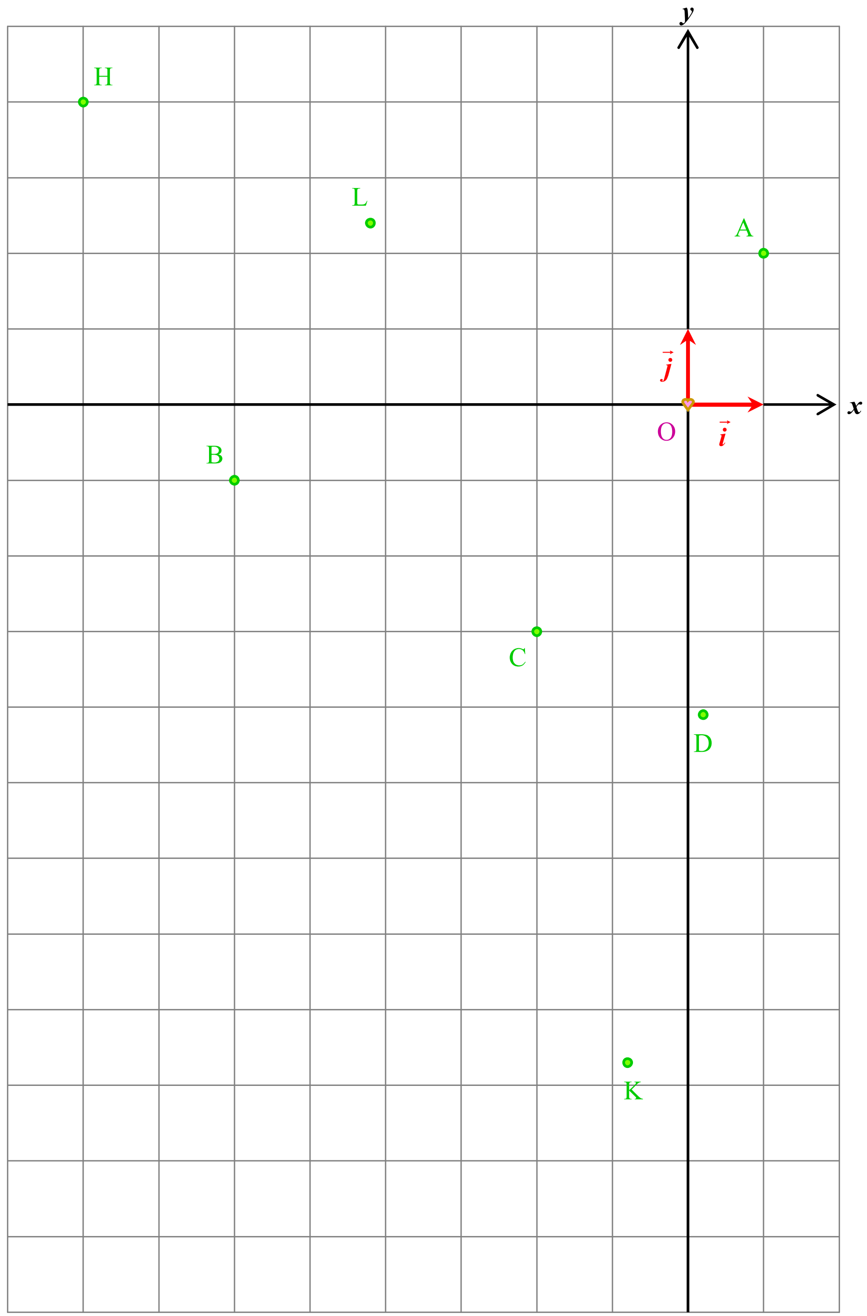
1. Placer le point F sur la figure.
2. Donner l'ordonnée du point F.
3. Déterminer par le calcul l'abscisse x_F du point F.
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG}+2\times\overrightarrow{BG}=\vec{0}$. Qu'observe-t-on ?

d. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre C passant par le point A.

1. Calculer la valeur exacte du rayon du cercle $\mathscr{C}$.
2. Le point K de coordonnées $(-0{,}8\,;\,-8{,}7)$ qui a été placé sur la figure ci-contre, appartient-il au cercle $\mathscr{C}$? On justifiera sa réponse.
3. Sur la figure ci-contre, on a construit le point L qui appartient au cercle $\mathscr{C}$ et dont l'ordonnée y_L est égale à 2,4.
   Déterminer la valeur exacte de son abscisse x_L .

e. On appelle Δ la médiatrice du segment [AC].

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du milieu I du segment [AC].
2. Prouver que le point H de coordonnées $(-8\,;\,4)$ appartient à la droite Δ.
3. On appelle N le point de la droite Δ dont l'abscisse x_N est égale à 1. Déterminer la valeur exacte de son ordonnée y_N .



Le corrigé

a. Autrement demandés, les vecteurs $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2-(-6)=4 \\ -3-(-1)=-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0,2-(-6)=6,2 \\ -4,1-(-1)=-3,1 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Pour le savoir, calculons leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)=\begin{vmatrix} 4 & 6,2 \\ -2 & -3,1 \end{vmatrix}=4\times(-3,1)-(-2)\times 6,2=-12,4+12,4=\underline{0}$$

Leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
<u>Conclusion :</u> les points B, C et D sont bien alignés.

b. Comme DABE est un parallélogramme, alors nous avons la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_E-(-6) \\ y_E-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2-1 \\ -4,1-2 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}} \Leftrightarrow \overbrace{x_E+6=-0,8}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{y_E+1=-6,1}^{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$x_E=\underline{-6,8} \qquad y_E=\underline{-7,1}$$

<u>Conclusion :</u> le point D a pour coordonnées $(-5,3\ ;\ 4,7)$. Il est placé sur le figure.

c.2. Le point F appartenant à l'axe des abscisses (Ox), son ordonnée y_F est nulle.

c.3. Les coordonnées du point F sont de la forme $(x_F\ ;\ 0)$.

Comme le point F appartient à la droite (AB), alors les vecteurs $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x_F-1 \\ 0-2=-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6-1=-7 \\ -1-2=-3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. Donc leur déterminant est nul.

Ainsi :

$$L\in(AB) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_F-1 & -7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x_F-1)\times(-3)-(-2)\times(-7)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x_F+3-14=0 \Leftrightarrow -3x_F=11 \Leftrightarrow x_F=\frac{11}{-3}=\underline{-\frac{11}{3}}$$

<u>Conclusion :</u> le point F a pour coordonnées $\left(-\frac{11}{3}\ ;\ 0\right)$.

c.4. Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AG}+2\times\overrightarrow{BF}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G-1 \\ y_G-2 \end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix} x_G-(-6) \\ y_G-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G-1 \\ y_G-2 \end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix} x_G+6 \\ y_G+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G-1 \\ y_G-2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2x_G+12 \\ 2y_G+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 3x_G+11 \\ 3y_G \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}} \Leftrightarrow \overbrace{3x_G+11=0}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{3y_G=0}^{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$3x_G=-11 \qquad y_G=\frac{0}{3}=\underline{0}$$

$$x_G=\underline{-\frac{11}{3}}$$

On observe que les coordonnées du point G sont aussi celles du point F. Donc ces deux points sont confondus.

d.1. Le rayon du cercle $\mathscr{C}$ de centre C passant par A est égal à la longueur CA.

$$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 1-(-2)=3 \\ 2-(-3)=5 \end{pmatrix} \Rightarrow CA=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{9+25}=\underline{\sqrt{34}\text{ cm}}$$

<u>Conclusion :</u> le rayon du cercle $\mathscr{C}$ est égal à $\sqrt{34}$ centimètres.

d.2. Pour savoir si le point $K(-0,8\ ;\ -8,7)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$, calculons la distance séparant ce point du centre C du cercle $\mathscr{C}$.

$$\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} -0,8-(-2)=1,2 \\ -8,7-(-3)=-5,7 \end{pmatrix} \Rightarrow CK=\sqrt{1,2^2+(-5,7)^2}=\sqrt{1,44+32,49}=\underline{\sqrt{33,93}\text{ cm}}$$

<u>Conclusion :</u> la longueur CK étant différente du rayon du cercle, le point K n'appartient pas au cercle $\mathscr{C}$.

d.3. D'abord, les coordonnées du point L sont de la forme $(x_L\ ;\ 2,4)$.

Ensuite, le point L appartenant au cercle $\mathscr{C}$, la longueur CL est égale au rayon $\sqrt{34}$ cm.
Puis, cette longueur CL est égale à :

$$\overrightarrow{CL}\begin{pmatrix} x_L-(-2)=x_L+2 \\ 2,4-(-3)=5,4 \end{pmatrix} \Rightarrow CL=\sqrt{(x_L+2)^2+5,4^2}=\sqrt{(x_L+2)^2+29,16}$$

Ayant précisé toutes ces choses, nous pouvons écrire :

$$L \in \mathcal{C} \Rightarrow CL = \sqrt{34}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_L+2)^2+29,16} = \sqrt{34} \xrightarrow{\text{Carré}} (x_L+2)^2+29,16=34$$

$$\Rightarrow (x_L+2)^2+29,16-34=0 \Rightarrow (x_L+2)^2-4,84=0$$

$$\Rightarrow \overbrace{(x_L+2)^2-2,2^2}^{a^2-b^2}=0 \Rightarrow \overbrace{\left[(x_L+2)+2,2\right]}^{(a+b)}\times\overbrace{\left[(x_L+2)-2,2\right]}^{(a-b)}=0$$

$$\Rightarrow \overbrace{(x_L+4,2)\times(x_L-0,2)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Rightarrow \overbrace{x_L+4,2=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad x_L-0,2=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$x_L = \boxed{-4,2} \qquad\qquad x_L = 0,2$$

<u>Conclusion :</u> vu la figure, l'abscisse du point L est négative. Donc les coordonnées du point L sont $(-4,2\ ;\ 2,4)$.

e.1. Les coordonnées du milieu I du segment [AC] sont données par :

$$x_I = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{1+(-2)}{2} = \frac{-2}{2} = -0,5 \quad \underline{\text{et}} \quad y_I = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{2+(-3)}{2} = \frac{-1}{2} = -0,5$$

e.2. La médiatrice Δ du segment [AC] est la perpendiculaire au segment [AC] passant par son milieu I.

Pour que le point H appartienne à la droite Δ, il faut et il suffit qu'il existe une orthogonalité entre les vecteurs $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}-8-(-0,5)=-7,5\\4-(-0,5)=4,5\end{pmatrix}$.

Utilisons le test prévu à cet effet !

$$\text{Test d'orthogonalité entre } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{IH} = \overbrace{-3\times(-7,5)+(-5)\times 4,5}^{\text{Somme des produits dans chaque coordonnée}} = 22,5-22,5=0$$

Leur test d'orthogonalité étant nul, les vecteur $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IH}$ sont orthogonaux.

<u>Conclusion :</u> le point I appartient bien à la médiatrice Δ.

Une autre méthode consistait à calculer les distances AH et CH qui, étant égales, faisaient que H était équidistant des extrémités A et C; donc H était sur la médiatrice Δ de [AC].

e.3. Cette question est la précédente mais envisagée dans l'autre sens.

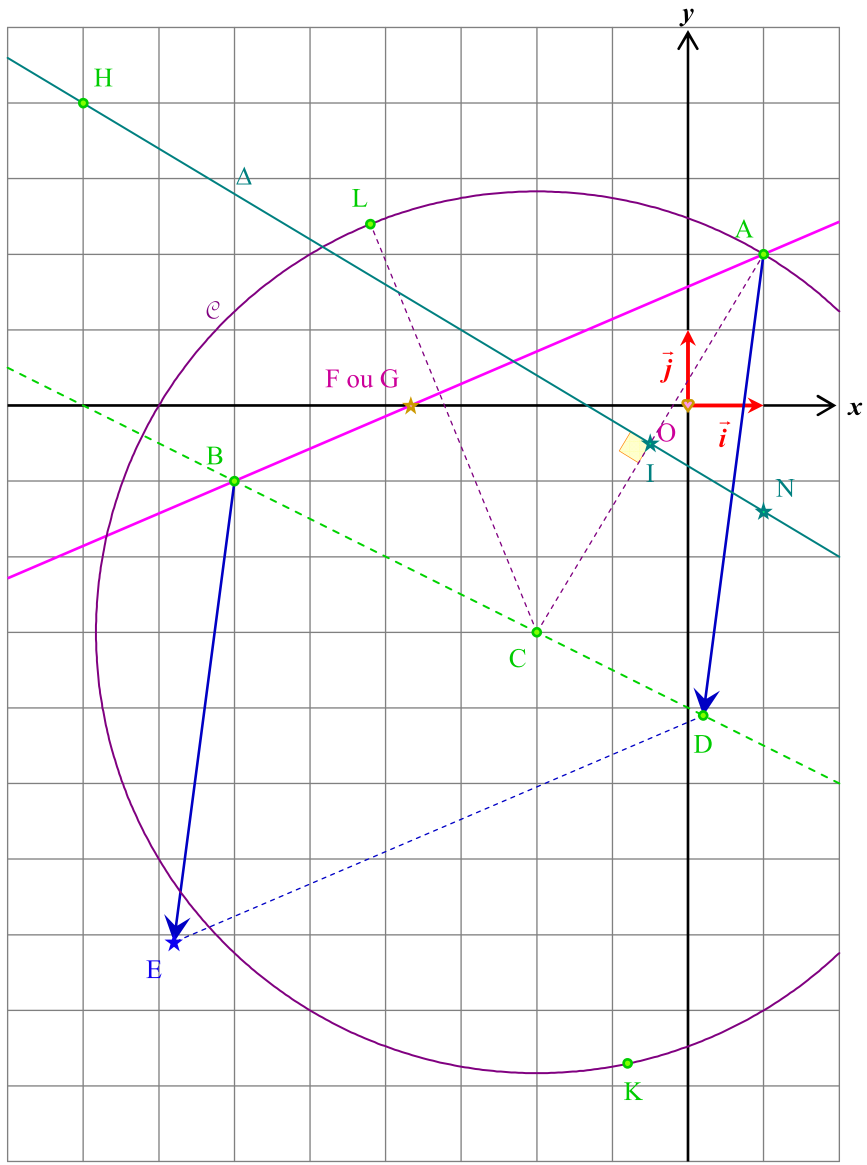
Les coordonnées du point N sont de la forme $(1; y_N)$.

Comme le point N appartient à la médiatrice Δ, alors les vecteurs $\overrightarrow{IN}\begin{pmatrix}1-(-0,5)=1,5\\y_N-(-0,5)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Donc leur test d'orthogonalité est nul !

$$\text{Test d'orthogonalité entre } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{IN}=0 \Leftrightarrow \overbrace{-3\times 1,5+(-5)\times(y_N+0,5)}^{\text{Somme des produits dans chaque coordonnée}}=0$$

$$\Leftrightarrow -4,5-5y_N-2,5=0 \Leftrightarrow -5y_N-7=0$$

$$\Leftrightarrow -5y_N=7 \Leftrightarrow y_N=\frac{7}{-5}=-1,4$$



Des droites et des nombres

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants :

$A(-3\ ;\ 7)$ $B(-5\ ;\ -2)$ $C(3\ ;\ 4)$ $D(3\ ;\ 8)$

Les normes de deux vecteurs de base sont égales à un centimètre.

a. On appelle *d* la droite d'équation $9x+4y-1=0$.

1. Les points O et A appartiennent-ils à la droite *d* ? On justifiera sa réponse.
2. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite *d*.
3. Tracer la droite *d* sur le graphique ci-contre.
4. On appelle L le point de la droite *d* dont l'ordonnée est égale à -4. Placer L sur la figure, puis déterminer son abscisse x_L.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire de deux équations à deux inconnues :

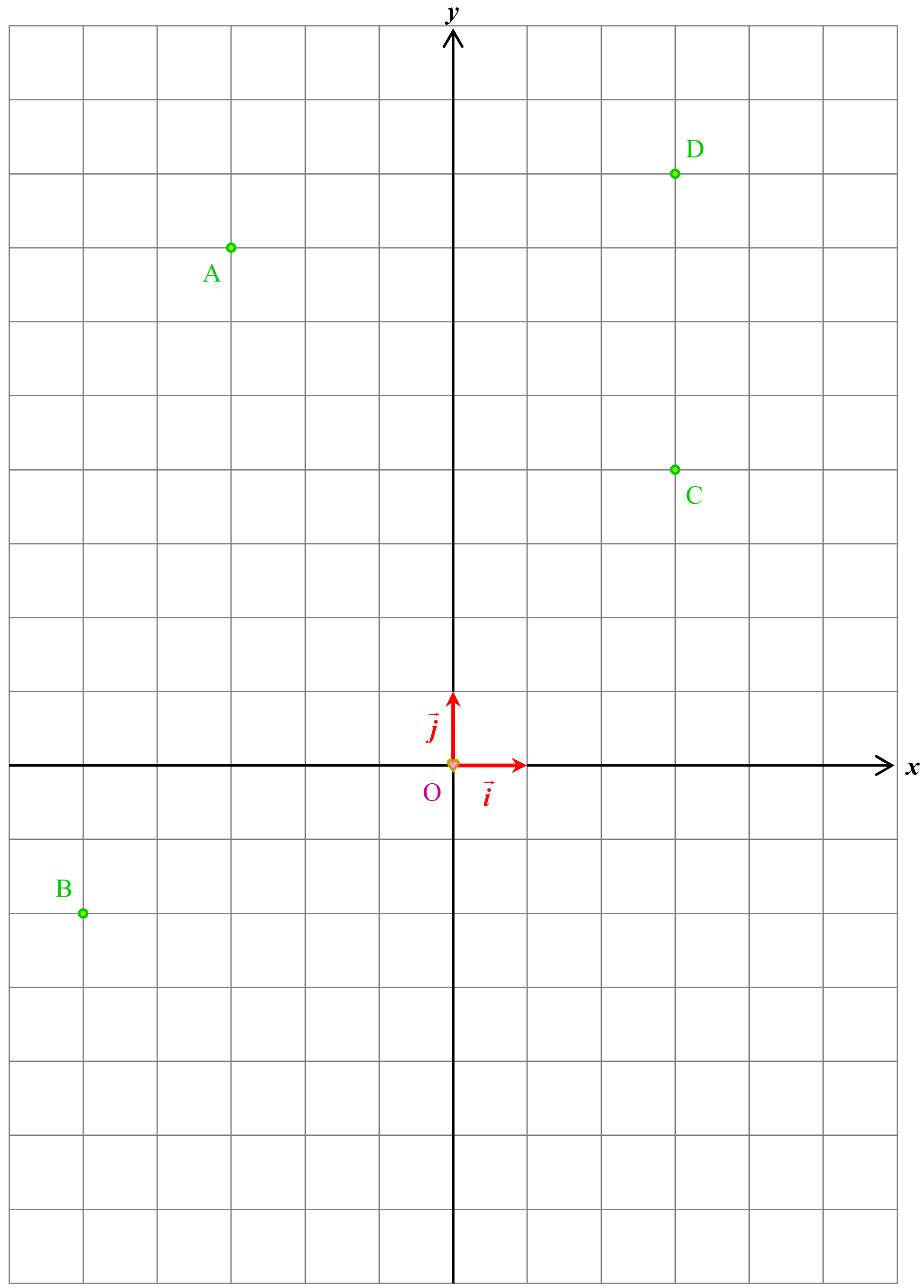
$$(S)\begin{cases}3x-4y+7=0 & \textbf{(1)}\\ 9x+4y-1=0 & \textbf{(2)}\end{cases}$$

c. On s'intéresse à la droite (BC).

3. Déterminer par le calcul une équation cartésienne de la droite (BC).
4. Démontrer que les droites (BC) et *d* ne peuvent pas être parallèles.
5. Les droites (BC) et *d* sont-elles perpendiculaires ? On justifiera sa réponse.
6. Déterminer les coordonnées du point K qui est l'intersection des droites *d* et (BC). On pourra s'aider du résultat de la question **b**. sous réserve de mettre en évidence le lien qu'il y a avec la dite question.

d. On appelle Δ_A et Δ_C les hauteurs du triangle ACD issues respectivement des sommets A et C.

1. Tracer les deux droites Δ_A et Δ_C sur le graphique ci-contre.
2. Sans justifications, donner une équation de la droite (CD), puis une équation de la droite Δ_A.
3. Déterminer par le calcul et en utilisant le test d'orthogonalité une équation cartésienne de la droite Δ_C.
4. En déduire les cordonnées de l'orthocentre H du triangle ACD.



Le corrigé

a.1. Les coordonnées des points A et O vérifient-ils l'équation définissant la droite d ?

Pour $A(-3;7)$: $9x_A+4y_A-1=9\times(-3)+4\times7-1=-27+28-1=0$ donc $A\in d$

Pour $O(0;0)$: $9x_O+4y_O-1=9\times0+4\times0-1=0+0-1=-1\neq0$ donc $O\notin d$

a.2. Un vecteur directeur de la droite d d'équation $\underbrace{\boxed{9}}_{a}x+\underbrace{\boxed{4}}_{b}y-1=0$ est le $\vec{u}\begin{pmatrix}-b=-4\\ a=9\end{pmatrix}$.

a.3. On trace la droite d en faisant arriver le vecteur $\vec{u}$ au point A. Le départ de ce vecteur est un point ayant pour coordonnées $(1;-2)$.

a.4. Les coordonnées du point L sont de la forme $(x_L;-4)$.
Comme le point L appartient à la droite d, alors ses coordonnées en vérifient l'équation.
Nous en déduisons :

$$9x_L+4\times(-4)-1=0 \iff 9x_L-16-1=0 \iff 9x_L=17 \iff x_L=\frac{17}{9}$$

Conclusion : les coordonnées du point L sont $(17/9;-4)$.

b. Nous allons résoudre le système $(S)\begin{cases}3x-4y+7=0 & \textit{(1)}\\ 9x+4y-1=0 & \textit{(2)}\end{cases}$ par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour trouver x, on élimine les y.	Pour obtenir y, on supprime les x.
(1) $\longrightarrow$ $3x-4y+7=0$	*(1)* $\xrightarrow{\times3}$ $9x-12y+21=0$
(2) $\longrightarrow$ $9x+4y-1=0$ $\oplus$	*(2)* $\longrightarrow$ $9x+4y-1=0$ $\ominus$
$12x+6=0$	$-16y+22=0$
$12x=-6$	$-16y=-22$
$x=-0{,}5$	$y=\frac{-22}{16}=\frac{11}{8}=1{,}375$

c.1. Déterminons une équation de la droite (BC).

$$M(x;y)\in(BC) \iff \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-(-5)\\ y-(-2)\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-(-5)\\ 4-(-2)\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}\right)=0 \iff \begin{vmatrix}x+5 & 8\\ y+2 & 6\end{vmatrix}=0$$

$$\iff (x+5)\times6-(y+2)\times8=0$$

$$\iff 6x+30-8y-16=0 \iff 6x-8y+14=0$$

c.2. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ directeurs pour les droites (BC) et d sont-ils colinéaires ? Pour le savoir, calculons leur déterminant !

$$\det\left(\overrightarrow{BC},\vec{u}\right)=\begin{vmatrix}8 & -4\\ 6 & 9\end{vmatrix}=8\times9-6\times(-4)=72+24=96\neq0$$

Conclusion : les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ n'étant pas colinéaires, les droites (BC) et d ne sont pas parallèles mais sécantes en un point que la question suivante note K.

c.3. Pour savoir si les droites (BC) et d sont perpendiculaires, nous allons regarder si leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux avec notre test d'orthogonalité.

Test d'orthogonalité sur $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}=8\times(-4)+6\times9=-32+54=22\neq0$

Conclusion : les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$ n'étant pas orthogonaux, les droites (BC) et d ne sont pas perpendiculaires; elles sont justes sécantes, sans plus.

c.4. Comme le point K appartient aux droites (BC) et d, alors les coordonnées du premier vérifient les deux équations des secondes.

$$K\in(BC) \iff 6x_K-8y_K+14=0 \xrightarrow{\div2} 3x_K-4y_K+7=0 \quad \textit{(1)}$$
$$K\in d \iff 9x_K+4y_K-1=0 \quad \textit{(2)}$$

Les coordonnées du point K vérifiant les deux équations du système (S) résolu à l'occasion de la question b, nous en concluons que :

$$K(-0{,}5;1{,}375)$$

d.2. Tous les points de la droite verticale (CD) partagent la même abscisse : celle de C ou de D qui est égale à 3. Par conséquent, une équation de la droite (CD) est $x=3$

La hauteur Δ_A est une droite horizontale passant par le point A d'ordonnée 7. Une de ses équations est $y=7$.

d.3. La droite Δ_C est la perpendiculaire à la droite (AD) passant par le point C. Ainsi :

$$M(x;y)\in\Delta_C \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-3\\y-4\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3-(-3)=6\\8-7=1\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}$$

$\Leftrightarrow$ Le test d'orthogonalité entre $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AD}$ est nul

$\Leftrightarrow (x-3)\times 6+(y-4)\times 1=0$

$\Leftrightarrow 6x-18+y-4=0 \Leftrightarrow 6x+y-22=0$

d.4. L'orthocentre H du triangle ACD est le point d'intersection des droites Δ_A et Δ_C. Donc les coordonnées du premier vérifient les équations des secondes.

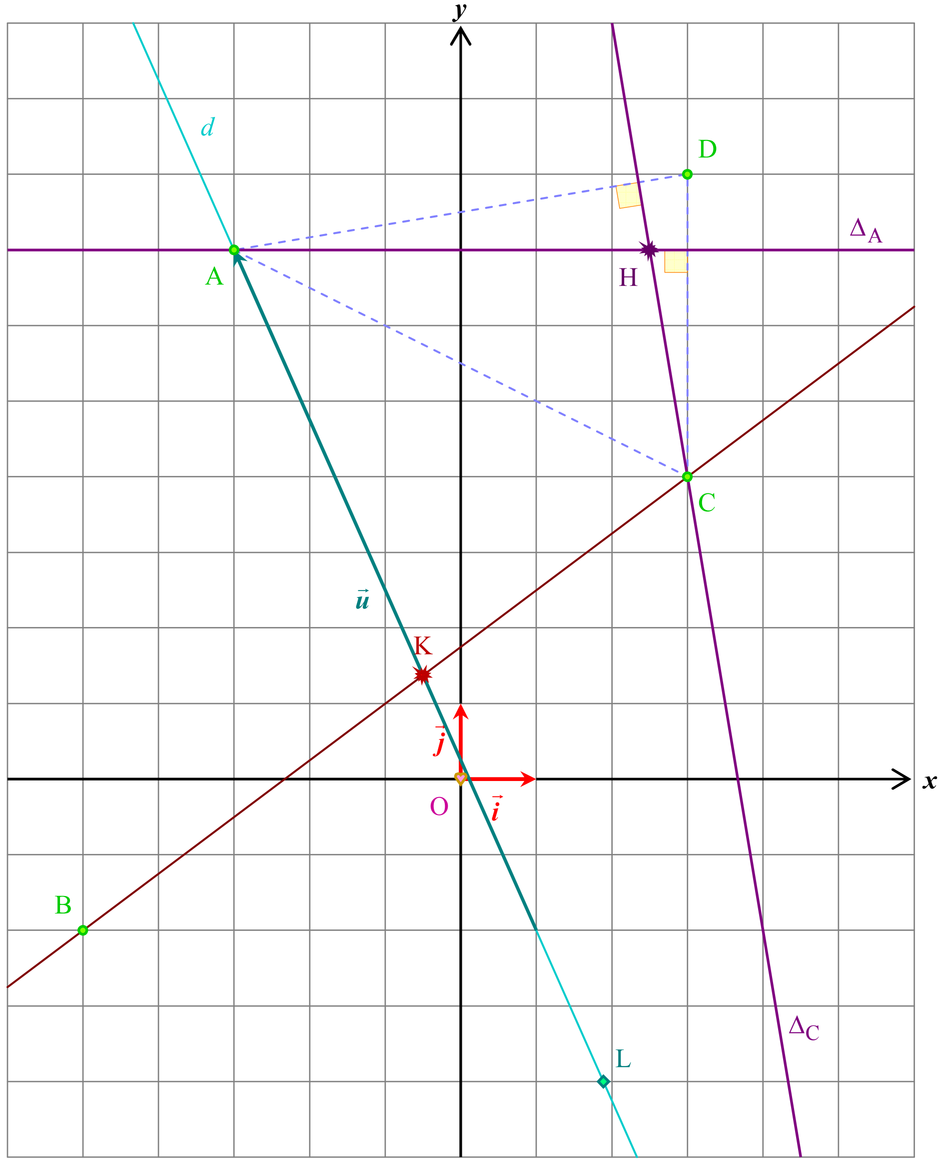
$H\in\Delta_A \Leftrightarrow y_H=7$

$H\in\Delta_C \Leftrightarrow 6x_H+y_H-22=0 \Leftrightarrow 6x_H+7-22=0$

$\Leftrightarrow 6x_H-15=0 \Leftrightarrow 6x_H=15 \Leftrightarrow x_H=\dfrac{15}{6}=2{,}5$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point H sont $(7;2{,}5)$.

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre ⇨



Géométrie classique

Le train-train vectoriel

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, SNCF est un parallélogramme de dimensions :

$SN = 8$ cm $\quad SF = 7$ cm $\quad SC = 10$ cm

Tous les côtés et une diagonale de ce parallélogramme ont été partagés en un certain nombre de parties égales.
Deux parallèles aux côtés ont été tracées en tirets dans la même couleur que ces côtés.

a. Recopier et compléter les égalités ci-dessous. Pour l'une d'entre elles, il faudra éventuellement faire un calcul impliquant l'usage de la relation de Chasles.

$\overrightarrow{SA} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{SC}$ $\quad \overrightarrow{SB} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{SN} + \ldots\ldots \times \overrightarrow{SF}$ $\quad \overrightarrow{CD} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{CN}$

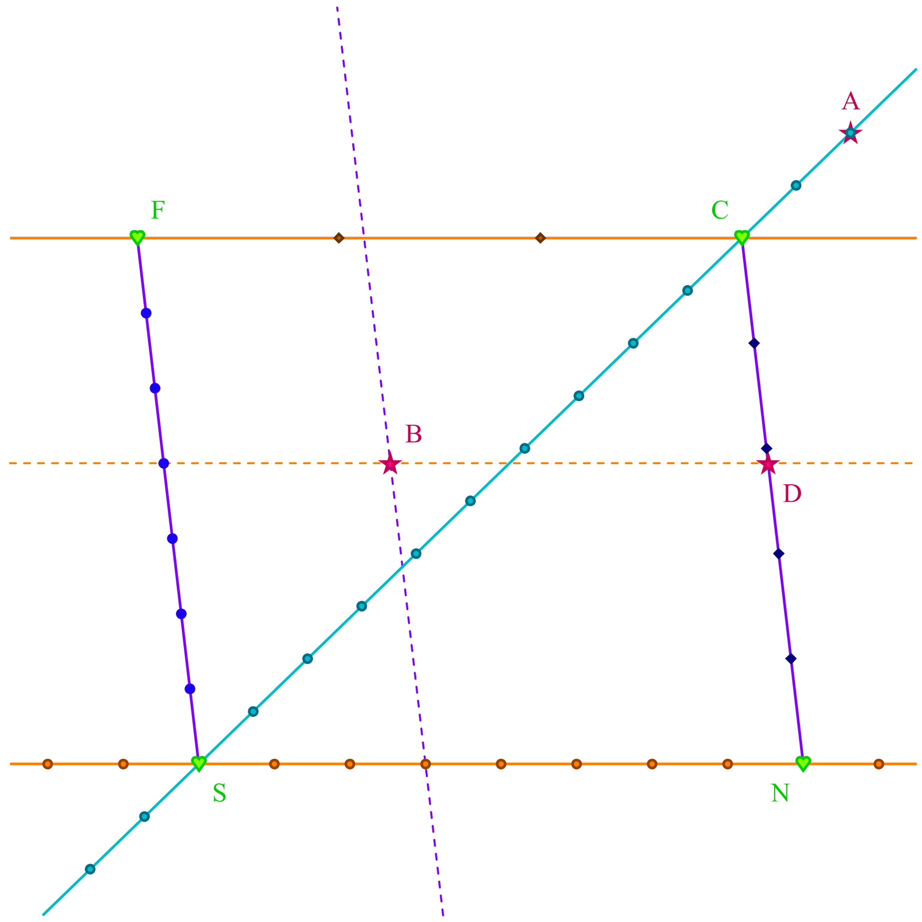
$\overrightarrow{CA} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{CS}$ $\quad \overrightarrow{SB} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{SN} + \ldots\ldots \times \overrightarrow{SC}$ $\quad \overrightarrow{FD} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{SN} + \ldots\ldots \times \overrightarrow{SF}$

b. Sur la figure ci-contre, placer les points suivants. Le cas échéant, la construction devra être faite à la règle et au compas. On laissera apparents les traits de construction.

1. Le point E défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{SE} = -\frac{2}{7} \times \overrightarrow{SF}$.
2. Le point G défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{NG} = \frac{3}{10} \times \overrightarrow{CS}$
3. Le point H défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{FH} = -\frac{2}{3} \times \overrightarrow{NS} + \frac{2}{5} \times \overrightarrow{NC}$

c. Le point L est défini par la relation vectorielle $2 \times \overrightarrow{FL} + 7 \times \overrightarrow{NL} = \vec{0}$.

1. Par un calcul vectoriel, exprimer le vecteur $\overrightarrow{NL}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{NF}$. C'est-à-dire que l'on souhaite aboutir à une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{NL} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{NF}$.
2. Placer le point L sur la figure ci-dessous.



Le corrigé

a. Les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$ ont même sens et même direction; mais le premier mesure 10 centimètres alors que le second en fait 12. Par conséquent : $\overrightarrow{SA} = \frac{12}{10} \times \overrightarrow{SC} = \boxed{\frac{6}{5} \times \overrightarrow{SC}}$

➲ Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CS}$ ont la même direction mais ils ont des sens opposés; le premier mesure 2 centimètres et le second 5. Par suite : $\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{10} \times \overrightarrow{CS} = \boxed{-\frac{1}{5} \times \overrightarrow{CS}}$

➲ En s'appuyant sur un certain parallélogramme de diagonale [SB] et dont deux des côtés sont portés par les droites (SN) et (SF), il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{SB} = \frac{3}{8} \times \overrightarrow{SN} + \frac{4}{7} \times \overrightarrow{SF}}$$

➲ Pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{SB}$ en fonction de $\overrightarrow{SN}$ et $\overrightarrow{SC}$, le mieux est encore de partir de la relation vectorielle précédente et de casser le vecteur $\overrightarrow{SF}$ en faisant une escale par le point C. C'est la relation de Chasles qui va s'appliquer !

$$\overrightarrow{SB}=\frac{3}{8}\times\overrightarrow{SN}+\frac{4}{7}\times\overrightarrow{SF}=\frac{3}{8}\times\overrightarrow{SN}+\frac{4}{7}\times\underbrace{\left(\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CF}\right)}_{\text{Chasles par C}}$$

$$=\frac{3}{8}\times\overrightarrow{SN}+\frac{4}{7}\times\overrightarrow{SC}+\frac{4}{7}\times\overrightarrow{CF}=\frac{3}{8}\times\overrightarrow{SN}+\frac{4}{7}\times\overrightarrow{SC}+\frac{4}{7}\times\left(-\overrightarrow{SN}\right)$$

$$=\frac{3}{8}\times\overrightarrow{SN}-\frac{4}{7}\times\overrightarrow{SN}+\frac{4}{7}\times\overrightarrow{SC}$$

$$=\frac{3\times7-4\times8}{8\times7}\times\overrightarrow{SN}+\frac{4}{7}\times\overrightarrow{SC}=\frac{21-32}{8\times7}\times\overrightarrow{SN}+\frac{4}{7}\times\overrightarrow{SC}=-\frac{11}{56}\times\overrightarrow{SN}+\frac{4}{7}\times\overrightarrow{SC}$$

➲ Cette avant-dernière égalité se complète en considérant la parallèle (BD) aux côtés (SN) et (FC) ainsi que le parallélogramme SNCF. Ces choses dites, il vient :

$$\overrightarrow{CD}=\frac{3}{7}\times\overrightarrow{FS}=\frac{3}{7}\times\overrightarrow{CN}$$

➲ Pour compléter cette dernière égalité, il suffit d'aller du point F au point D en suivant les directions des côtés du parallélogramme SNCF. Finalement, on aboutit à :

$$\overrightarrow{FD}=\frac{3}{7}\times\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{SN}=1\times\overrightarrow{SN}-\frac{3}{7}\times\overrightarrow{SF}$$

b.1. Le segment [SF] mesurant 7 centimètres, le point E se trouve à deux centimètres du point S, sur la droite (SF) mais à l'opposé de F.

b.2. Le point F se construit en reportant au compas le vecteur $\frac{3}{10}\overrightarrow{CS}$ au départ du point N. On trace alors un parallélogramme.

b.3. Pour placer le point H, on part du point F en reportant un vecteur $-\frac{2}{3}\overrightarrow{NS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FC}$.

A partir de ce point, on reporte au compas un vecteur $\frac{2}{5}\overrightarrow{NC}$. Le point H est à l'arrivée de ces deux translations.

c.1. Le point L est défini par la relation vectorielle $2\times\overrightarrow{FL}+7\times\overrightarrow{NL}=\vec{0}$ et l'on veut aboutir à une relation de la forme $\overrightarrow{NL}=\ldots\ldots\times\overrightarrow{NF}$. Clairement, le vecteur $\overrightarrow{FL}$ doit disparaître et le vecteur $\overrightarrow{NF}$ doit apparaître. Avec la relation de Chasles, bien sûr !

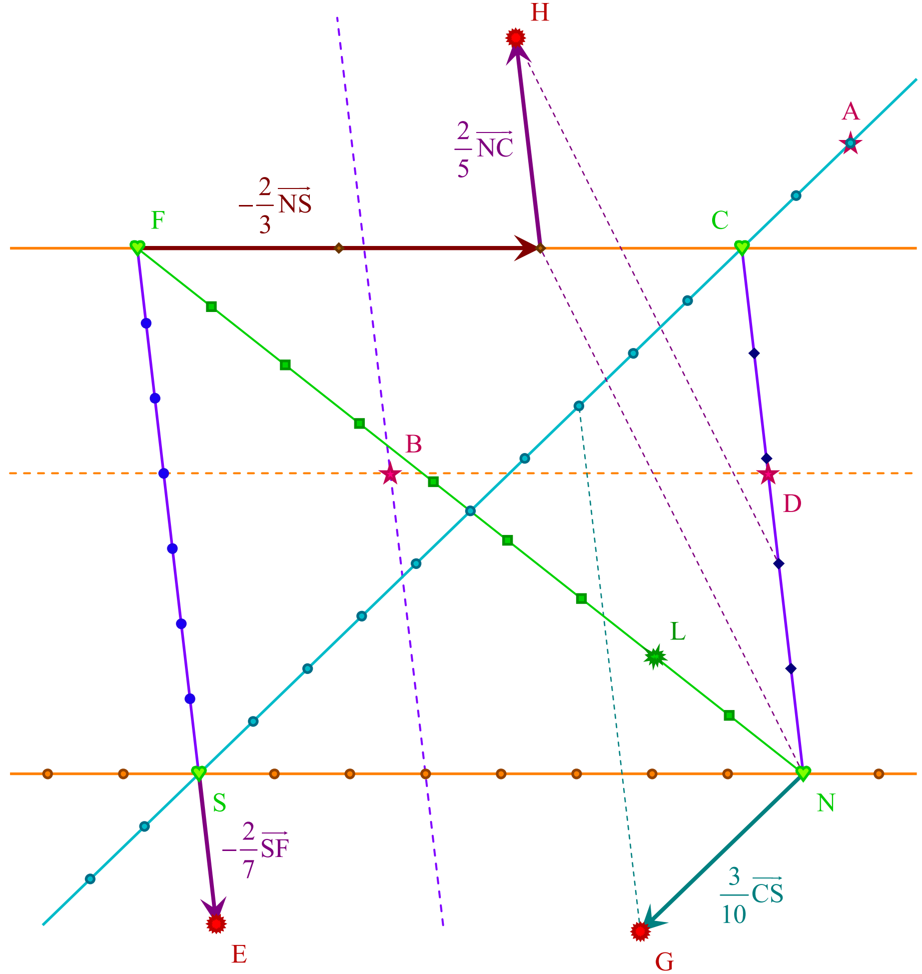
$$2\times\overrightarrow{FL}+7\times\overrightarrow{NL}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\times\underbrace{\left(\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{NL}\right)}_{\text{Chasles par N}}+7\times\overrightarrow{NL}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{FN}+2\times\overrightarrow{NL}+7\times\overrightarrow{NL}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{FN}+9\times\overrightarrow{NL}=\vec{0}\Leftrightarrow 9\times\overrightarrow{NL}=\vec{0}-2\times\overrightarrow{FN}$$

$$\Leftrightarrow 9\times\overrightarrow{NL}=2\times\overrightarrow{NF}\xrightarrow{\div 9}\overrightarrow{NL}=\frac{2}{9}\times\overrightarrow{NF}$$

c.2. Le point L se trouve aux deux neuvièmes du segment [NF] à partir de N. Ce dernier mesurant environ 11,2 centimètres, la distance entre N et L est égale à $\frac{2}{9}\times 11{,}2\approx 2{,}5$ cm

A l'issue de la construction, la figure est la suivante :



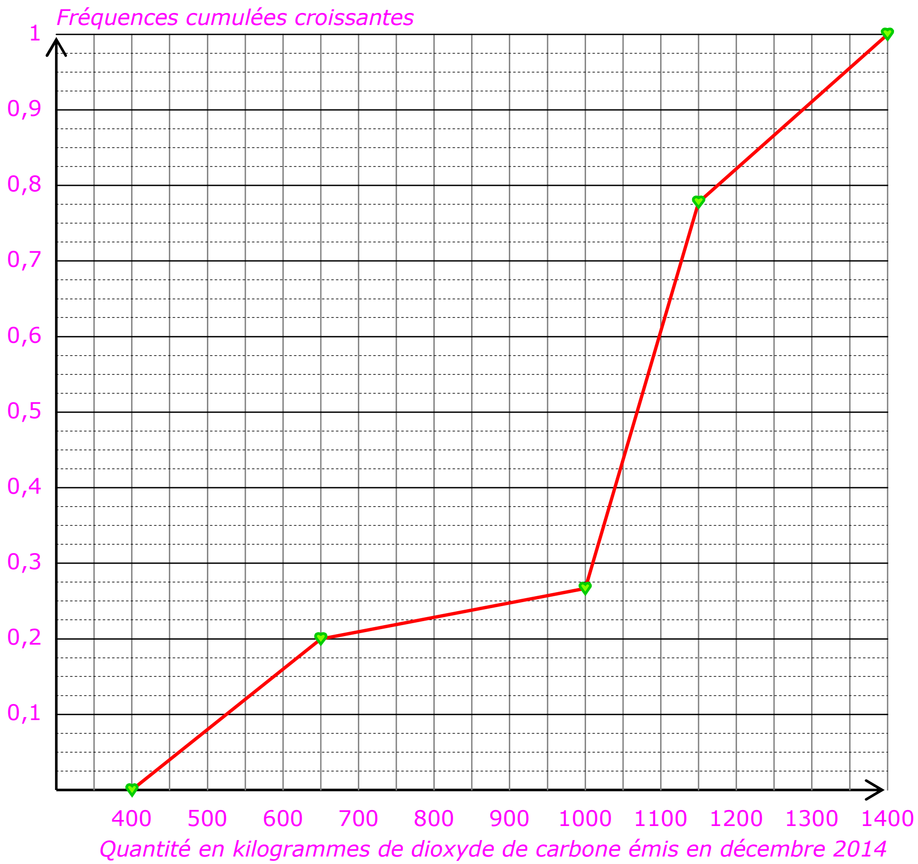
Statistiques et probabilités

Les stats, ça vous transporte !

L'énoncé

Le patron des *Transbahuteurs Blancois*, immense entreprise de transport routier, se préoccupe des émissions de dioxyde de carbone ou CO_2 engendrées par son activité.
Pour connaître l'impact environnemental de sa compagnie, chaque mois, il comptabilise les émissions de CO_2 de chacun de ses véhicules qui vont de la fourgonnette à l'imposant poids-lourd qui vous ralentit dans les montées.

a. A partir des statistiques d'émission de CO_2 de ses **450 véhicules** durant le mois de décembre 2014, il a tracé la courbe des fréquences cumulées croissantes suivante :



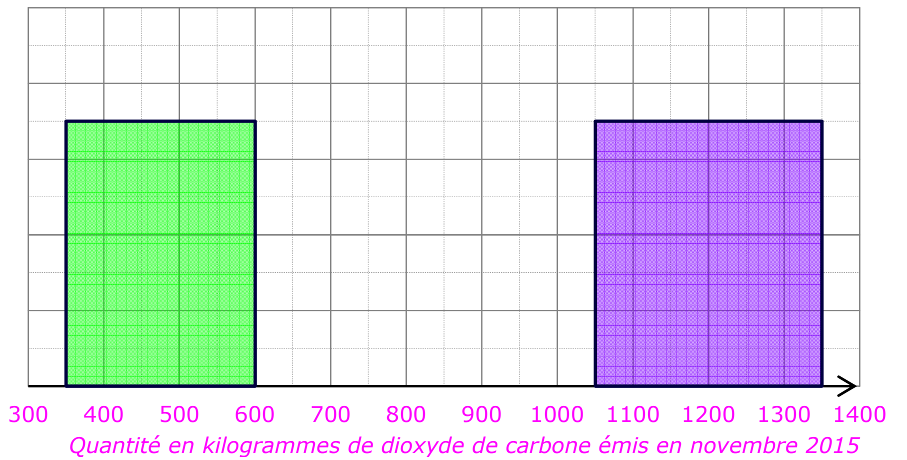
Avec toute la précision permise par le graphique précédent, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer la médiane M_e ainsi que les deux quartiles Q_1 et Q_3 de la série statistique «émissions de CO_2 des véhicules de la compagnie en décembre 2014».
2. Donner une estimation du nombre de véhicules de la compagnie ayant émis moins de 500 kilogrammes de CO_2 durant le mois de décembre 2014. On expliquera sa réponse.
3. Donner une estimation de la part (pourcentage) des véhicules de la compagnie ayant émis entre 1000 et 1150 kilogrammes de CO_2 en décembre 2014.
4. Pour sa prochaine interview donnée à la presse locale, le patron des *Transbahuteurs Blancois* souhaite pouvoir annoncer que seuls 10% de ses véhicules ont émis plus d'une «certaine masse» de CO_2 durant le mois de décembre 2014. Donner une estimation de cette «certaine masse»...qui doit être la plus basse possible sans être mensongère. On expliquera sa réponse.

b. Le patron des *Transbahuteurs Blancois* vient de recevoir les statistiques d'émission de CO_2 de ses véhicules pour le mois de novembre 2015.
Du fait de l'usure, des nouvelles acquisitions, de la réalité du marché et de toutes les nouvelles taxes, le nombre de ces véhicules a changé et n'est plus égal à 450.
Ces statistiques sont les suivantes :

Classe : quantité en kilogrammes de CO_2 émis en novembre 15		$[600;900[$	$[900;1050[$	
Effectif		216	72	

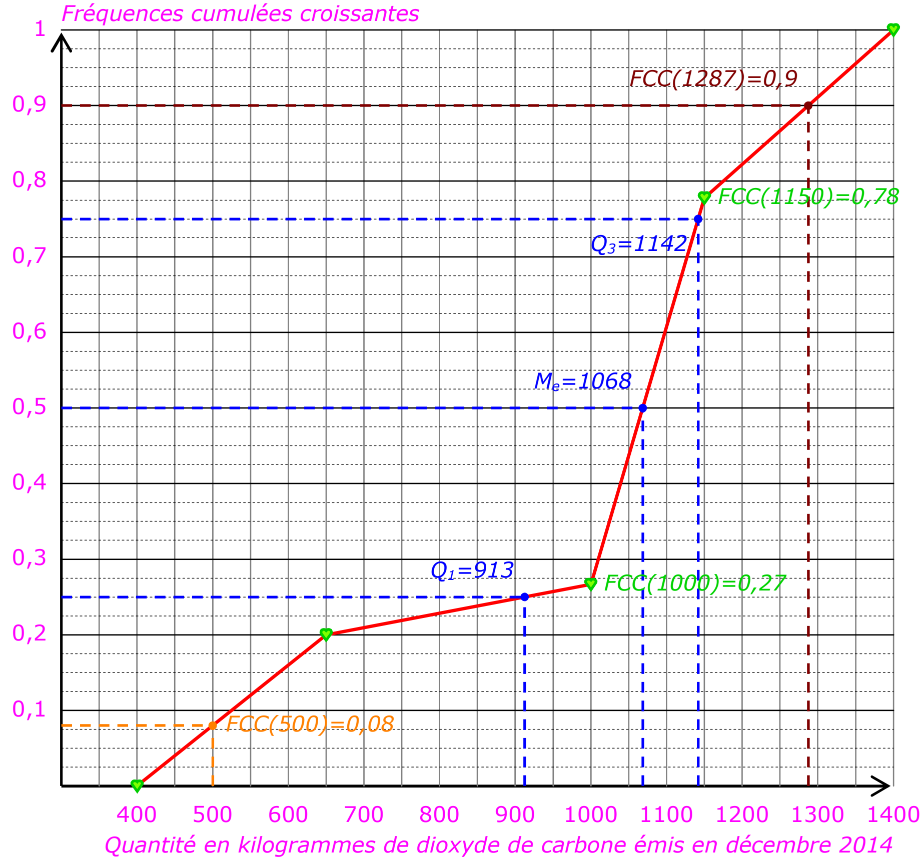
Ce tableau incomplet est fourni avec l'histogramme suivant qui est aussi incomplet et où un centimètre carré représente 16 véhicules.



1. Compléter le tableau et l'histogramme précédents.
2. Parmi les propositions précédentes, laquelle est égale au nombre de véhicules dont dispose la compagnie en novembre 2015 ?
   564 596 638 672
3. Calculer la quantité moyenne de dioxyde de carbone émis par un véhicule de l'entreprise durant le mois de novembre 2015.

Le corrigé

a. Complétés avec les traits de construction, le graphique de la courbe des fréquences cumulées croissantes est le suivant :



a.1. La médiane M_e est la modalité pour laquelle la fréquence cumulée croissante est égale à $50\% = 0{,}50$. Par lecture graphique, on trouve $M_e = \underline{1068 \text{ kg}}$.

Le premier quartile Q_1 est la modalité pour laquelle la fréquence cumulée croissante est égale à $25\% = 0{,}25$. Par lecture graphique, on obtient $Q_1 = \underline{913 \text{ kg}}$

Le troisième quartile Q_3 est la modalité pour laquelle la fréquence cumulée croissante est égale à $75\% = 0{,}75$. Par lecture graphique, on obtient $Q_3 = \underline{1142 \text{ kg}}$

a.2. Par lecture graphique, on trouve que la fréquence cumulée croissante correspondant à une modalité de 500 kilogrammes est égale à 0,08. Donc, environ 8% des 450 véhicules de la compagnie ont émis moins de 500 kilogrammes de dioxyde de carbone durant le mois de décembre 2014. Cela représente 8% de $450 = 0{,}08 \times 450 = \underline{36 \text{ véhicules}}$

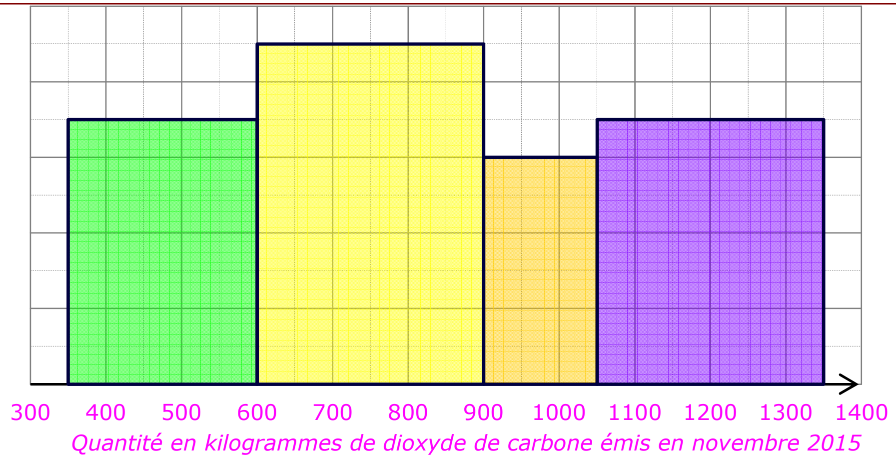
a.3. D'après le graphique, les fréquences cumulées croissantes correspondant aux modalités 1000 et 1150 kilogrammes sont respectivement 0,27 et 0,78.
Donc, environ $0{,}78 - 0{,}27 = 0{,}51 = 51\%$ des véhicules ont émis entre 1000 et 1150 kilogrammes de CO_2 durant le mois de décembre 2014.

a.4. La modalité correspondant à une fréquence cumulée croissante de $0{,}9 = 1 - 10\%$ est environ 1287 kilogrammes. C'est la «certaine masse», le seuil, que doit indiquer le patron de la compagnie dans son interview.

b.1. Le tableau se complète à partir de l'histogramme...

Classe : quantité en kilogrammes de CO_2 émis en novembre 15	$[350;600[$	$[600;900[$	$[900;1050[$	$[1050;1350[$
Effectif	140	216	72	168
Rectangle en cm² = base × hauteur	8,75 cm² $= 2{,}5 \times 3{,}5$ cm	13,5 cm² $= 3 \times 4{,}5$ cm	4,5 cm² $= 1{,}5 \times 3$ cm	10,5 cm² $= 3 \times 3{,}5$ cm

...et l'histogramme à partir du tableau.



b.2. Au total, en novembre, la compagnie compte $140+216+72+168=$ 596 véhicules

b.3. La quantité moyenne de dioxyde de carbone émis par un véhicule de la compagnie durant le mois de novembre 2015 est donnée par :

$$\text{Moyenne} = \frac{\text{Somme des effectif} \times \text{milieu de la classe}}{\text{Effectif total}}$$

$$= \frac{140\times 475+216\times 750+72\times 975+168\times 1200}{596} = \frac{500300}{596} \approx 839{,}4 \text{ kg}$$

Presque chanceuses !

L'énoncé

Cet exercice est constitué de trois sous-parties indépendantes.

a. Une enquête effectuée auprès des 250 élèves d'un lycée a montré que 77,6% d'entre eux possèdent un smartphone. De plus, exactement 130 de ces 250 élèves sont des filles. Enfin, 70% des garçons du lycée possèdent un smartphone.

1. En utilisant les renseignements précédents, compléter le tableau suivant :

Effectif	*Possède un smartphone*	*Ne possède pas un smartphone*	*Total*
Fille			
Garçon			
Total			250

2. On rencontre un des 250 élèves au hasard et on définit les événements suivants :

F = «l'élève rencontré est une fille»
S = «l'élève rencontré possède un smartphone»

Déterminer les probabilités des événements $\overline{S}$, $F\cap S$ et $\overline{F}\cup S$.

3. On rencontre au hasard un élève possédant un smartphone. Calculer la probabilité que cet élève soit une fille.

b. Pour le prochain cours, le prof a décidé de faire jouer à ses élèves une scène de la célèbre pièce de théâtre *La planète des profs*. Cette scène comporte trois rôles : celui de *Lili* qui ne peut être joué que par une fille, celui de *Mimi* qui ne peut être joué que par un garçon et le personnage dénommé *La Chose* qui peut être joué indifféremment par une fille ou un garçon.
Le prof a demandé aux 12 filles de la classe d'apprendre le texte de *Lili* et aux 10 garçons de la classe d'apprendre le texte de *Mimi*. En plus, tous les élèves de la classe doivent apprendre le texte de *La Chose*.
On fait l'hypothèse que chaque élève de la classe apprend scrupuleusement les deux rôles qui lui ont été attribués (*Lili* ou *Mimi* plus *La Chose*).
Constituer une distribution consiste à attribuer le rôle de *Lili* à une première élève fille, celui de *Mimi* à un deuxième élève garçon et celui de *La Chose* à un troisième élève sans condition de sexe.
Pour constituer sa distribution, le prof décide de procéder à un tirage au sort de trois élèves parmi les vingt-deux que compte la classe.

1. Montrer qu'il existe au total 2400 distributions possibles.

2. Combien existe-t-il de distributions dans lesquelles le rôle de *La Chose* est tenu par une fille ?
En déduire la probabilité que le rôle de *La Chose* soit tenu par une fille.

3. Adèle, Amélie et Abdel sont trois élèves de la classe. Pour éviter toute confusion, précisons que seul Abdel est un garçon.
Calculer les probabilités des événements suivants :

A = «aucun de ces trois élèves n'est dans la distribution»
B = «la distribution est composée d'Adèle, Amélie et Abdel»
C = «au moins l'un de ces trois élèves est dans la distribution»

c. Toto vient d'être élu président du lycée par les élèves de ce dernier.
Dans le lycée, il y a 35% d'élèves grands dont 40% ont voté pour Toto. Il y a aussi 44% d'élèves moyens; 25% des élèves moyens n'ont pas voté pour Toto. Enfin, tous les élèves petits (ceux qui ne sont ni grands, ni moyens) ont voté pour Toto.
Ce matin, Toto se promène dans l'établissement et il rencontre au hasard un élève.
On définit les événements suivants :

G = «l'élève rencontré est grand»
M = «l'élève rencontré est moyen»
P = «l'élève rencontré est petit»
T = «l'élève rencontré a voté pour Toto»

1. Construire un arbre pondéré décrivant la rencontre au hasard de Toto avec un élève.
2. Calculer la probabilité de l'événement T et montrer qu'elle est égale à 0,68.
3. Toto rencontre successivement trois élèves au hasard. Calculer la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ait voté pour Toto.

Le corrigé

a.1. Les renseignements fournis par l'énoncé permettent de remplir trois cases jaunies dans le tableau ci-dessous. Ensuite, c'est juste un jeu de complétion.

Effectif	Possède un smartphone	Ne possède pas un smartphone	Total
Fille	110 194–84	20 56–36 ou 130–110	130
Garçon	84 70% de 120=0,7×120	36 120–84	120 250–130
Total	194 77,6% de 250=0,776×250	56 250–196	250

a.2. Les probabilités des événements se calculent à partir des effectifs du tableau précédent.

$$P\left(\overline{S}\right)=P(\text{«l'élève rencontré ne possède pas de smartphone»})=\frac{56}{250}=\frac{28}{125}=0,224$$

$$P\left(F\cap S\right)=P(\text{«l'élève rencontré est une fille \underline{et} a un smartphone»})=\frac{110}{250}=\frac{11}{25}=0,44$$

$$P\left(\overline{F}\cup S\right)=P(\text{«l'élève rencontré est un garçon \underline{ou} a un smartphone»})$$
$$=\frac{110+84+36}{250}=\frac{230}{250}=\frac{23}{25}=0,92$$

a.3. Dans cette question, l'ensemble de référence a changé; il ne s'agit plus des 250 élèves mais des seuls 194 possesseurs d'un smartphone. La probabilité qu'il s'agisse d'une fille est donnée par $\frac{110}{194}=\frac{55}{97}\approx 0,567$

b.1. Le nombre total de distributions possibles est donné par :

Lili		Mimi		La Chose		
12 candidates	×	10 candidats	×	20 candidats restants	=	2400 distributions possibles

b.2. Le nombre de distributions où le rôle de *La Chose* est tenu par une fille est donné par :

Lili		Mimi		La Chose		
12 candidates	×	10 candidats	×	11 candidats restants	=	1320 distributions favorables

Nous en déduisons : $P(\text{«}\textit{La Chose}\text{ est une fille»})=\frac{1320}{2400}=\frac{\cancel{12}\times\cancel{10}\times 11}{\cancel{12}\times\cancel{10}\times 20}=\frac{11}{20}=0,55$

b.3. Le nombre de distribution favorables à l'événement A est donné par :

Lili		Mimi		La Chose		
10 candidats	×	9 candidats	×	17 candidats restants	=	1530 distributions favorables à A

Nous en déduisons que : $P(A)=\frac{1530}{2400}=\frac{51}{80}=0,6375$

➲ Le nombre de distributions favorables à l'événement B est donné par :

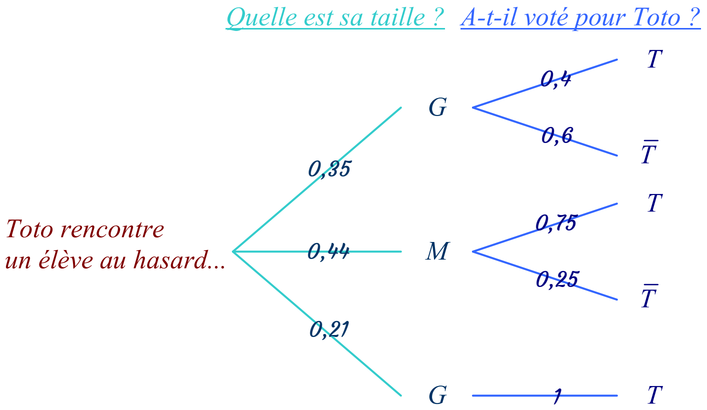
Lili		Mimi		La Chose		
2 candidates	×	1 candidat	×	1 candidate restante	=	2 distributions favorables à B

Il vient alors : $P(B)=\frac{2}{2400}=\frac{1}{1200}$.

➲ L'événement C libellé «au moins un des trois élèves» est le contraire de A libellé «aucun des trois élèves». Par conséquent :

$$P(C)=1-P(A)=1-0,6375=\frac{29}{80}=0,3623$$

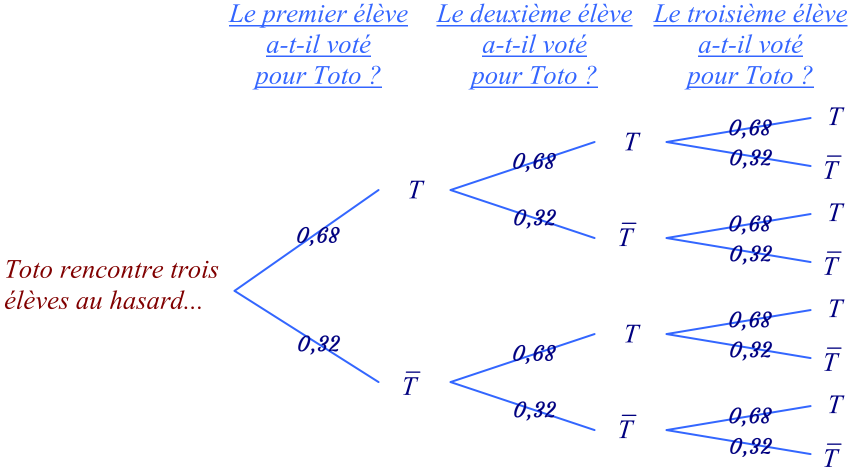
c.1. L'arbre pondéré est le suivant :



c.2. D'après l'arbre précédent, la probabilité de l'événement T est donnée par :

$$P(T) = P(G \cap T) + P(M \cap T) + P(P \cap T)$$
$$= 0,35 \times 0,4 + 0,44 \times 0,75 + 0,21 \times 1 = 0,12 + 0,33 + 0,21 = \underline{0,68}$$

c.3. La situation de ces trois élèves rencontrés successivement peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



Il existe sept branches comportant au moins une lettre T, c'est-à-dire au moins un élève ayant voté pour Toto. Mais il est plus intéressant de considérer la huitième branche $\overline{T}\overline{T}\overline{T}$, celle sur laquelle aucun des trois élèves rencontrés n'a voté pour Toto. C'est l'événement contraire de «au moins un des trois élèves a voté pour Toto». Par conséquent :

$$P(\text{«au moins un des trois élèves a voté pour Toto»}) = 1 - P\left(\overline{T}\overline{T}\overline{T}\right) = 1 - 0,32 \times 0,32 \times 0,32$$
$$= 1 - 0,0322768 = \underline{0,967232}$$

Presque...mais pas tout à fait !

L'énoncé

Les trois sous-parties de cet exercice sont indépendantes. Les bornes des intervalles demandés seront arrondies au centième près.

a. Combien un échantillon doit-il comporter d'individus pour qu'un intervalle de confiance au seuil de 95% calculé sur cet échantillon ait une longueur égale à 0,05 ?

b. *L'Eprouvette Blancoise*, célèbre laboratoire pharmaceutique, vient de mettre au point un médicament contre l'oisiveté dont il cherche à mesurer l'efficacité.
La compagnie constitue donc deux échantillons d'oisifs.

- Aux 450 oisifs du *groupe A*, il donne un placébo, c'est-à-dire un médicament inactif. A l'issue du traitement, 126 d'entre eux ne sont plus oisifs.
- Aux 315 oisifs du *groupe B*, il donne le vrai médicament. A l'issue du traitement, 126 d'entre eux ne sont plus oisifs.

1. Déterminer l'intervalle de confiance au seuil de 95% découlant du *groupe A* auquel appartient la proportion d'oisifs guéris sans avoir pris le médicament avec une probabilité au moins égale à 0,95.
2. Déterminer l'intervalle de confiance au seuil de 95% découlant du *groupe B* auquel appartient la proportion d'oisifs guéris en ayant pris le médicament avec une probabilité au moins égale à 0,95.
3. Ces intervalles de confiance permettent-ils, au niveau de confiance 0,95, de considérer que le médicament est efficace ? On justifiera sa réponse.

c. On estime que 57% des français sont oisifs. On se propose de vérifier cette hypothèse sur un échantillon de taille $n = 1024$ français.

1. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% auquel doit appartenir toute fréquence observée sur un échantillon de taille $n = 1024$ français avec une probabilité au moins égale à 0,95.
2. Sur les 1024 individus de l'échantillon, on observe que 527 d'entre eux sont oisifs. Que penser de l'estimation des 57% d'oisifs dans la population française ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a. La taille d'un intervalle de confiance au seuil de 95% calculé sur un échantillon de taille n est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}}$. On cherche la valeur de n pour laquelle :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,05 \xrightarrow[\text{en croix}]{\text{Produit}} \sqrt{n} = \frac{2}{0,05} = 40 \xrightarrow{\text{Carré}} n = 40^2 = \boxed{1600}$$

<u>Conclusion :</u> l'échantillon doit contenir 1600 individus.

b.1. Sur l'échantillon *groupe A* de taille $n_A = 450$ individus :

- La fréquence d'observée de gens guéris est $f_A = \frac{126}{450} = \boxed{0,28}$
- La proportion p_A d'oisifs guéris sans avoir pris le médicament appartient avec une probabilité au moins égale à 0,95% à l'intervalle de confiance $[0,23;0,33]$.

$$f_A - \frac{1}{\sqrt{n_A}} = 0,28 - \frac{1}{\sqrt{450}} \approx 0,23 \quad \leftarrow \text{On minore la borne inférieure.}$$
$$f_A + \frac{1}{\sqrt{n_A}} = 0,28 + \frac{1}{\sqrt{450}} \simeq 0,33 \quad \leftarrow \text{On majore la borne supérieure.}$$

b.2. Sur l'échantillon *groupe B* de taille $n_B = 360$ individus :

- La fréquence d'observée de gens guéris est $f_B = \frac{126}{315} = \boxed{0,40}$
- La proportion p_B d'oisifs guéris après avoir pris le médicament appartient avec une probabilité au moins égale à 95% à l'intervalle de confiance $[0,34;0,46]$.

$$f_B - \frac{1}{\sqrt{n_B}} = 0,4 - \frac{1}{\sqrt{315}} \approx 0,34 \quad \leftarrow \text{On minore la borne inférieure.}$$
$$f_B + \frac{1}{\sqrt{n_B}} = 0,4 + \frac{1}{\sqrt{315}} \simeq 0,46 \quad \leftarrow \text{On majore la borne supérieure.}$$

b.3. Au seuil de 95%, on sait que la proportion p_A d'oisifs guéris sans médicament est toujours inférieure à 0,33, alors que la proportion p_B d'oisifs guéris avec médicament est toujours supérieure à 0,34. Donc, on peut conclure que le médicament est efficace...au seuil de 95%.

c.1. La proportion p de français oisifs est égale à 0,57.
Toute fréquence f observée sur un échantillon de taille $n = 1024$ individus appartient avec une probabilité au moins égale à 0,95 à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% qu'est :

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,57 - \frac{1}{\sqrt{1024}}; 0,57 + \frac{1}{\sqrt{1024}}\right] \approx \boxed{[0,53;0,61]}$$

c.2. La fréquence observée sur l'échantillon est : $f = \frac{527}{1024} \approx \boxed{0,515}$

Comme celle-ci n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation découlant de l'estimation de 57%, alors on doit rejeter cette dernière au seuil de risque 5%.
<u>Conclusion :</u> l'estimation des 57% n'est pas fondée.

Le petit mot de l'auteur :

Cette saison encore, on m'a laissé commettre mes méfaits, on m'a laissé maltraité la jeunesse française, on m'a laissé enseigner et faire des tas de devoirs dont voici le recueil des exercices pour la classe de seconde.
En ce début d'été 2016, je dois bien en convenir : ça va mieux ! Mais je ne saurais dire pourquoi. Sans doute la réforme du collège où les élèves auront 16 heures de mathématiques en moins sur leurs quatre années de scolarité. 16 heures, c'est quatre semaines de 4 heures de cours. A la place, ils feront des EPI comme Enseignements Pratiques Interdisciplinaires. Bref, des matières nouvelles ! Plus les années passent, plus le temps du collégien est morcelé, voire émietté. Qui peut avoir de l'appétit pour des miettes ?
En un quart de siècle, le volume horaire consacré aux mathématiques sur une scolarité pour un élève faisant un cursus terminale S avec spécialité maths (ce qui correspond à l'ancien bac C) a diminué de 200 heures, soit une année et demie de cours. Pour les meilleurs, cette perte est compensée par leurs capacités ou éventuellement par le porte-monnaie de leurs parents. Ceux qui pâtissent le plus de cette ablation horaire sont les moyens car, plus on passe de temps à apprendre quelque chose, mieux on le maitrise. Pour chaque notion, chaque sujet, il y a toujours une durée minimale d'apprentissage et de maitrise qui varie suivant les individus et qui n'est pas toujours atteinte.
Enfin, certaines heures de cours ne durent qu'une demi-heure car la rue s'invite dans la classe au désespoir de mes courageux collègues. Après, on s'étonnera que le niveau global baisse...mais non, c'est faux car tout va mieux !

Jérôme Onillon

Au sommaire aussi, ça va mieux !