Analyse

Exponentielle, primitive et logarithme

L'énoncé

a. La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=(2x-5)\times e^{-2x}$$

1. Calculer la dérivée $f'(x)$ et prouver que $f'(x)=(12-4x)\times e^{-2x}$.
2. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la primitive G sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction $g(x)=21x^2-7+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}$ vérifiant la condition $G(1)=2$.

c. Ecrire les deux nombres A et B sous la forme d'un seul logarithme $\ln(C)$ où C est réel positif. La valeur de C est différente pour les nombres A et B.

$$A=\ln\left(\frac{4}{15}\right)+\ln(120) \qquad B=3\times\ln(5)-\frac{1}{2}\times\ln(16)$$

d. La fonction h est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$h(x)=9x-x^2-7\times\ln(x)-8$$

1. Calculer la valeur exacte de $h(1)$. On indiquera le détail des calculs.
   Donner une valeur approchée au centième-près de $h(7)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction h et montrer que $h'(x)=\frac{-2x^2+9x-7}{x}$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On donnera les valeurs des extrema, arrondies au centième-près le cas échéant.
4. Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3{,}5;7]$. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée au dix-millième-près de cette solution α.
5. Au total, combien l'équation $h(x)=0$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$? On justifiera sa réponse.
6. Conclure en donnant le tableau de signe de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Le corrigé

a.1. f est le produit des fonctions
$u(x)=2x-5$
$u'(x)=2$
Dérivable sur $\mathbb{R}$
et
$v(x)=e^{-2x}=e^{u}$
$v'(x)=u'\times e^{u}=-2\times e^{-2x}$
Dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $f=u\times v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, nous avons :

$$\begin{aligned}f'(x)&=u'\times v+v'\times u\\&=2\times\boxed{e^{-2x}}+(-2)\times\boxed{e^{-2x}}\times(2x-5)=\boxed{e^{-2x}}\times\left[2+(-2)\times(2x-5)\right]\\&=e^{-2x}\times[2-4x+10]=e^{-2x}\times(12-4x)\end{aligned}$$

a.2. C'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction f.
Examinons les facteurs la constituant :

- L'exponentielle e^{-2x} est toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$.
- Le facteur affine $-4x+12$ a un coefficient directeur -4 négatif et il s'annule lorsque $-4x+12=0 \Leftrightarrow -4x=-12 \Leftrightarrow x=\frac{-12}{-4}=3$

Nous en déduisons que le tableau de variation de f est ⇨

x	$-\infty$		3		$+\infty$
e^{-2x}		$+$		$+$	
$-4x+12$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	e^{-6}	↘	0^{+}

Calculons la valeur du maximum

$$\begin{aligned}f(3)&=(2\times3-5)\times e^{-2\times3}\\&=(6-5)\times e^{-6}\\&=e^{-6}\approx0{,}0025\end{aligned}$$

b. La primitive G sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction $g(x)=21\times x^2-7+3\times\frac{1}{x}+5\times\frac{1}{x^2}$ est la fonction $G(x)=21\times\frac{1}{3}x^3-7x+3\times\ln(x)+5\times\frac{-1}{x}+Cste$.

$$=7x^3-7x+3\times\ln(x)-\frac{5}{x}+Cste$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

On détermine la constante *Cste* en sachant que :

$$G(1)=2 \iff 7\times 1^3-7\times 1+3\times\ln(1)-\frac{5}{1}+Cste=2$$

$$\iff \cancel{7}-\cancel{7}+3\times 0-5+Cste=2 \iff Cste=2+5=7$$

<u>Conclusion :</u> une expression de la primitive G recherchée est :

$$G(x)=7x^3-7x+3\times\ln(x)-\frac{5}{x}+7$$

c. Employant les propriétés algébriques du logarithme népérien, nous pouvons écrire :

$$A=\ln\left(\frac{4}{15}\right)+\ln(120)=\ln\left(\frac{4}{15}\times 120\right)=\ln\left(\frac{480}{15}\right)=\ln(32)$$

$$B=3\times\ln(5)-\frac{1}{2}\times\ln(16)=\ln\left(5^3\right)-\ln\left(\sqrt{16}\right)=\ln(125)-\ln(4)=\ln\left(\frac{125}{4}\right)=\ln(31{,}25)$$

d.1. Calculons les images demandées :

$$h(1)=9\times 1-1^2-7\times\ln(1)-8=9-1-7\times 0-8=0$$

$$h(7)=9\times 7-7^2-7\times\ln(7)-8=63-49-7\times\ln(7)-8=6-7\times\ln(7)\approx -7{,}62$$

d.2. La fonction h étant une somme de fonctions toutes dérivables sur $]0;+\infty[$, elle l'est elle-aussi. Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$h'(x)=9-2x-7\times\frac{1}{x}+0=\frac{9\times x-2x\times x-7}{x}=\frac{9x-2x^2-7}{x}=\frac{-2x^2+9x-7}{x}$$

d.3. Le signe du dénominateur x ne pose guère de problème sur $]0;+\infty[$: il est positif.

Quant au numérateur $N(x)=-2x^2+9x-7$, il s'agit d'une forme du second degré.

Calculons son discriminant :

$$\Delta_{N(x)}=9^2-4\times(-2)\times(-7)=81-56=25=5^2$$

Son discriminant étant positif, la trinôme $N(x)$ admet deux racines :

$$x_1=\frac{-9-5}{2\times(-2)}=\frac{-14}{-4}=3{,}5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-9+5}{2\times(-2)}=\frac{-4}{-4}=1$$

Son coefficient dominant étant négatif, la forme du second degré $N(x)$ est négative à l'extérieur des racines et positive entre.

Nous en déduisons que le tableau de variation de h est :

x	0		1		3,5		$+\infty$
$N(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x		$+$	|	$+$	|	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
h		↘	0	↗	2,48	↘	

Une valeur approchée du maximum atteint par h en $x=3{,}5$ est :

$$h(3{,}5)=9\times 3{,}5-3{,}5^2-7\times\ln(3{,}5)-8=11{,}25-7\times\ln(3{,}5)\approx 2{,}48$$

d.4. Sur l'intervalle $[3{,}5;7]$,
- h est continue car elle y est dérivable.
- h est strictement décroissante
- L'intervalle image est $f([3{,}5;7])\approx[-7{,}62;2{,}48]$
- 0 appartient à l'intervalle image $[-7{,}62;2{,}48]$

Donc, en application de la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.

D'après la calculatrice, une valeur approchée de cette solution est $\alpha\approx 5{,}2780$

d.5. D'après le tableau de variation de h, l'équation $h(x)=0$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0;3{,}5[$ qui est 1.

Par contre, cette même équation n'a pas de solution sur l'intervalle $]7;+\infty[$ car le maximum $h(7)\approx -7{,}62$ est négatif.

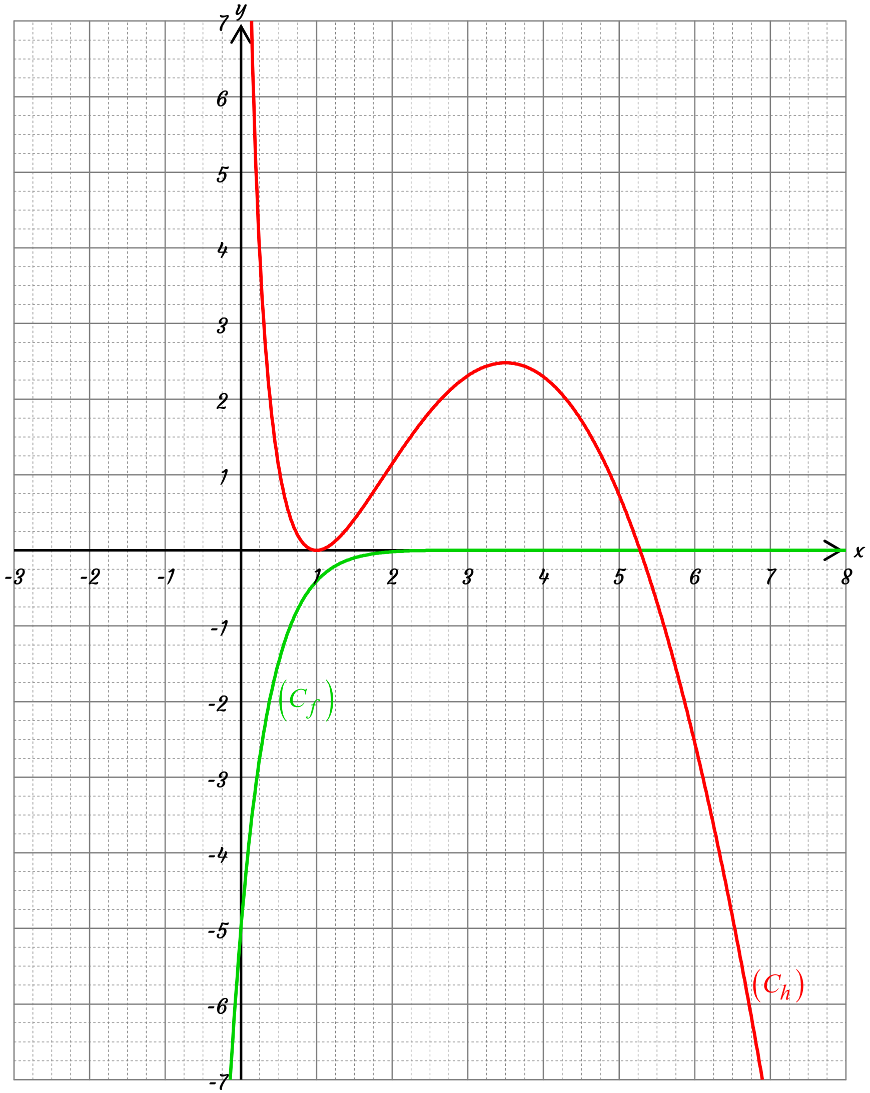
<u>Conclusion :</u> sur l'intervalle $]0;+\infty[=]0;3{,}5[\cup[3{,}5;7]\cup]7;+\infty[$, l'équation $h(x)=0$ admet exactement deux solutions : 1 et α.

d.6. D'après ce qui précède, le tableau de signe de $h(x)$ est :

x	0		1		α		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Pour information, les courbes des fonctions f et h sont les suivantes :

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

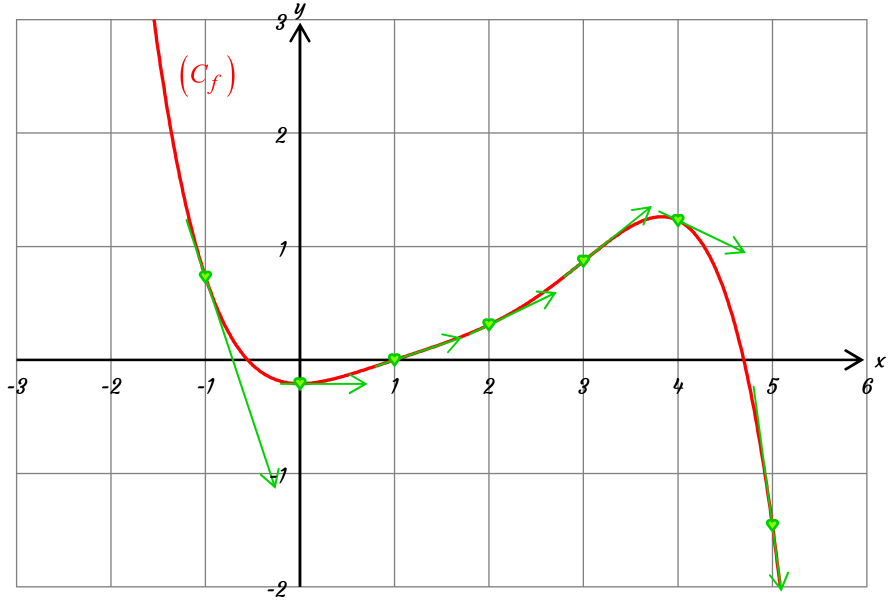


Formes et méformes : convexité

L'énoncé

Cet exercice est formé de trois sous-parties indépendantes les unes des autres.

a. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\left(C_f\right)$ représentant la fonction f qui est définie sur $\mathbb{R}$. On a également tracé toutes les tangentes à la courbe aux points d'abscisses entières.



En utilisant le graphique, donner les intervalles où f est convexe ou concave; préciser les éventuels points d'inflexion.

b. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^3 + 9x^2 + 4x - 1$$

Déterminer les intervalles où g est concave ainsi que ceux où elle est convexe; préciser les éventuels points d'inflexion.

c. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2e^{-x} - 3x^2 - x + 1$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2e^{-x} - 6 > 0$.
2. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où la fonction h est convexe.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

Le corrigé

a. Vu sa courbe $\left(C_f\right)$:

- La fonction f est convexe sur l'intervalle $\left]-\infty;3\right[$ car la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes sur cet ensemble.
- Le point d'abscisse 3 de la courbe $\left(C_f\right)$ est un point d'inflexion car la tangente en ce point traverse la courbe.
- La fonction f est concave sur l'intervalle $\left]3;+\infty\right[$ car $\left(C_f\right)$ est au-dessous de ses tangentes sur cet intervalle.

b. La fonction g est au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme. C'est le signe de sa dérivée seconde $g''(x)$ qui va nous donner les intervalles de concavité ou de convexité.

$$g(x) = -x^3 + 9\times x^2 + 4x - 1$$
$$g'(x) = -3x^2 + 9\times 2x + 4 - 0 = -3x^2 + 18x + 4$$
$$g''(x) = -3\times 2x + 18x + 0 = -6x + 18$$

La dérivée seconde $g''(x) = -6x + 18$ est une forme affine de coefficient directeur négatif -6 et s'annulant lorsque $-3x + 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x = -18 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-18}{-3} = 6$.

Son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $g''(x) = -6x + 18$		+	0	−	
Concavité ou convexité de g		g est convexe	⋮	g est concave	

<u>Conclusion :</u> g est convexe sur l'intervalle $\left]-\infty;3\right[$, concave sur $\left]3;+\infty\right[$ et admet un point d'inflexion en $x = 3$.

c.1. Nous pouvons écrire :

$$2e^{-x} - 6 > 0 \xrightarrow{+6} 2e^{-x} > 6 \xrightarrow{\div 2} e^{-x} > 3 \xrightarrow[\text{Croissante}]{\text{Ln}} -x > \ln(3)$$
$$\xrightarrow{\div(-1)} x < -\ln(3)$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle :

$$S = \boxed{\left]-\infty;-\ln(3)\right[}$$

c.2. Encore une fois, c'est le signe de la dérivée seconde qui va nous donner les intervalles où h est convexe. Calculons-la en ayant remarquer que la fonction h est un assortiment de fonctions toutes plusieurs fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$h(x) = 2\times \overbrace{e^{-x}}^{e^{ax}} - 3\times x^2 - x + 1$$
$$h'(x) = 2\times \overbrace{(-1)\times e^{-x}}^{a\times e^{ax}} - 3\times 2x - 1 + 0 = -2e^{-x} - 6x - 1$$
$$h''(x) = -2\times(-1)\times e^{-x} - 6 - 0 = 2e^{-x} - 6$$

<u>Conclusion :</u> d'après la question **c.1**, la dérivée $h''(x) = 2e^{-x} - 6$ est positive sur l'intervalle $\left]-\infty;-\ln(3)\right[$. C'est là que la fonction h est convexe.

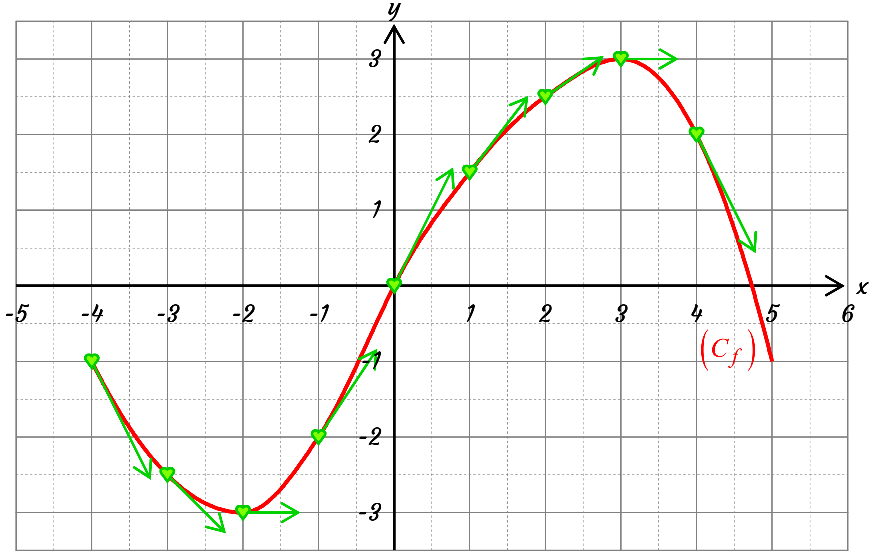
Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

Reformes et déformes : reconvexité

L'énoncé

Cet exercice est formé de deux sous-parties indépendantes l'une de l'autre.

a. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe (C_f) représentant la fonction *f* qui est définie sur $[-4;5]$ dans un repère orthonormé d'unité de longueur centimétrique.
On a également tracé certaines tangentes à la courbe.



1. En utilisant le graphique ci-dessus, donner les intervalles où *f* est convexe ou concave; préciser les éventuels points d'inflexion de la courbe (C_f).
2. Sur le graphique ci-dessus, dessiner ce que représente géométriquement l'intégrale $I = \int_{-4}^{-1} f(x)dx$.
3. A l'aide du graphique ci-dessus, parmi les six propositions suivantes, entourer celle qui est une valeur approchée au centième près de cette intégrale *I*. Aucune justification n'est demandée.

   $-9,29$ $-7,29$ $-5,29$ $5,29$ $7,29$ $9,29$

b. La fonction *g* est définie sur ℝ par :

$$g(x) = -x^4 + 2x^3 + 36x^2 + x + 3$$

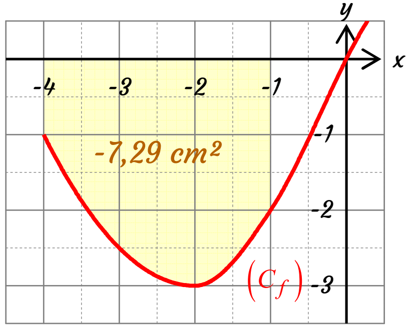
Déterminer les intervalles où *g* est concave ainsi que ceux où elle est convexe. Donner les coordonnées (abscisses et ordonnées) des éventuels points d'inflexion de sa courbe représentative (C_g).

Le corrigé

a.1. Vu sa courbe (C_f) :

- La fonction *f* est convexe sur l'intervalle $[-4;0[$ car sa courbe est toujours au-dessus de ses tangentes sur cet ensemble.
- Le point d'abscisse 0 de la courbe (C_f) est un point d'inflexion car la tangente en ce point traverse la courbe.
- La fonction *f* est concave sur l'intervalle $]0;5]$ car (C_f) est au-dessous de ses tangentes sur cet intervalle.

a.2. L'intégrale $I = \int_{-4}^{-1} f(x)dx$ est l'aire en unités d'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites verticales d'équation $x = -4$ et $x = -1$



a.3. D'abord, la fonction *f* étant négative sur l'intervalle $[-4;-1]$, l'intégrale *I* est négative.
Ensuite, le domaine entre la courbe (C_g) et l'axe des abscisses contient au moins six carreaux ou centimètres carrés mais en a moins de 9.
Par conséquent, la seule réponse possible est $-7,29$.

b. La fonction polynomiale $g(x) = -x^4 + 2x^3 + 36x^2 + x + 3$ est au moins deux fois dérivables sur ℝ car c'est un somme de fonctions qui le sont.
C'est le signe de sa dérivée seconde $g''(x)$ qui va nous donner les intervalles de concavité ou de convexité de *g*. Calculons-la !

$$g(x) = -x^4 + 2 \times x^3 + 36 \times x^2 + x + 3$$
$$g'(x) = -4x^3 + 2 \times 3x^2 + 36 \times 2x + 1 + 0 = -4x^3 + 6x^2 + 72x + 1$$
$$g''(x) = -4 \times 3x^2 + 6 \times 2x + 72 + 0 = \underline{-12x^2 + 12x + 72}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

La dérivée seconde $g''(x) = -12x^2 + 12x + 72$ étant une forme du second degré, nous calculons son discriminant :

$$\Delta_{g''(x)} = 12^2 - 4\times(-12)\times 72 = 144 + 3456 = 3600 = 60^2$$

Son discriminant étant positif, $g''(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-12-60}{2\times(-12)} = \frac{-72}{-24} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-12+60}{2\times(-12)} = \frac{48}{-24} = -2$$

Son coefficient dominant -12 étant négatif, le tableau de signe de cette dérivée seconde est le suivant :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Signe de $g''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Concavité ou convexité de g		g est concave		g est convexe		g est concave	

Conclusion : la fonction g est concave sur les intervalles $]-\infty;-2[$ et $]3;+\infty[$; elle est convexe sur l'intervalle $]-2;3[$; sa courbe représentative (C_g) admet deux points d'inflexion qui ont pour abscisses $x=-2$ et $x=3$.

Tous les points de la courbe (C_g) ayant des coordonnées de la forme $(x;g(x))$, calculons les images des abscisses -2 et 3 :

$$g(-2) = -(-2)^4 + 2\times(-2)^3 + 36\times(-2)^2 + (-2) + 3 = -16 - 16 + 144 - 2 + 3 = 113$$

$$g(3) = -3^4 + 2\times 3^3 + 36\times 3^2 + 3 + 3 = -81 + 54 + 324 + 6 = 303$$

Les coordonnées des deux points d'inflexion sont $(-2;113)$ et $(3;303)$.

Nouvelles aires

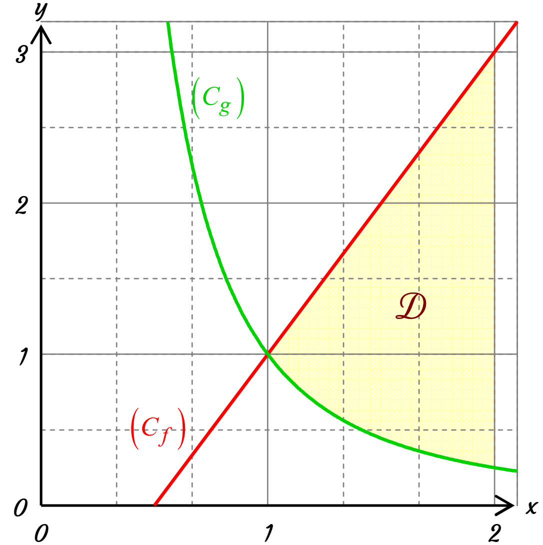
L'énoncé

Dans cet exercice, on précisera la primitive employée pour chaque calcul d'intégrale.

a. Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_1^2 \left(6x^2 + 2 + \frac{3}{x}\right)dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^2 e^{0,5x-1}dx$$

b. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ représenté ci-dessous.



Ce domaine $\mathcal{D}$ est la partie du plan comprise entre les courbes (C_f) et (C_g) représentant les fonctions $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$, et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

On donnera d'abord une valeur de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en unités d'aire, puis une valeur en centimètres carrés. Sur le graphique ci-dessus, une unité de longueur en abscisse vaut 3 centimètres, alors qu'elle en vaut 2 en ordonnée.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

c. La fonction j est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$j(x)=e^x+\frac{5}{\sqrt{x}}$$

1. Calculer la valeur moyenne V_m de la fonction j sur l'intervalle $[1;9]$. On donnera d'abord la valeur exacte de V_m, puis une valeur approchée au centième près.
2. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au dixième près de réel c de l'intervalle $[1;9]$ dont l'image par j est égale à la valeur moyenne V_m, c'est-à-dire tel que $j(c)=V_m$.

Le corrigé

a.1. Une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction $f(x)=6\times x^2+2+3\times\frac{1}{x}$ est la fonction $F(x)=6\times\frac{1}{3}x^3+2x+3\times\ln(x)=\boxed{2x^3+2x+3\ln(x)}$

Il vient alors :

$$I=\int_1^2\left(6x^2+2+\frac{3}{x}\right)dx$$
$$=F(2)-F(1)=\left(2\times2^3+2\times2+3\times\ln(2)\right)-\left(2\times1^3+2\times1+3\ln(1)\right)$$
$$=\left(16+4+3\ln(2)\right)-(2+2+3\times0)$$
$$=20+3\ln(2)-4=\boxed{16+3\ln(2)\approx18{,}08}$$

a.2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x)=e^{0,5x-1}=e^{ax+b}$ est la fonction :

$$F(x)=\frac{1}{a}\times e^{ax+b}=\frac{1}{0,5}\times e^{0,5x-1}=\boxed{2\times e^{0,5x-1}}$$

Il vient alors pour le calcul de l'intégrale J.

$$J=\int_0^2 e^{0,5x-1}dx$$
$$=F(2)-F(0)=\left(2\times e^{0,5\times2-1}\right)-\left(2\times e^{0,5\times0-1}\right)$$
$$=\left(2\times e^{0-1}\right)-\left(2\times e^{0-1}\right)$$
$$=2e^0-2e^{-1}=2\times1-2\times\frac{1}{e}=\boxed{2-\frac{2}{e}\approx1{,}26}$$

b. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ en unités d'aire est la valeur de l'intégrale $\int_1^2\left(f(x)-g(x)\right)dx$.

Une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f(x)-g(x)=2x-1-\frac{1}{x^2}$ est la fonction

$$\Phi(x)=x^2-x-\frac{-1}{x}=\boxed{x^2-x+\frac{1}{x}}$$

Il vient alors : $\int_1^2\left(f(x)-g(x)\right)dx=\Phi(2)-\Phi(1)$

$$=\left(2^2-2+\frac{1}{2}\right)-\left(1^2-1+\frac{1}{1}\right)=2{,}5-1=\boxed{1{,}5}$$

Conclusion : l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale à 1,5 unités d'aire soit $1{,}5\times6=9$ centimètres carrés. Pour note, une unité d'aire est l'aire d'un rectangle de 3 centimètres en abscisse sur 2 en ordonnée.

c.1. Par définition, la valeur moyenne de la fonction j sur l'intervalle $[1;9]$ est donnée par la formule :

$$V_m=\frac{1}{9-1}\times\int_1^9 j(x)dx$$

D'abord, nous allons calculer l'intégrale. Une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction $j(x)=e^x+5\times\frac{1}{\sqrt{x}}$ est la fonction $J(x)=e^x+5\times2\sqrt{x}=\boxed{e^x+10\sqrt{x}}$.

Il vient alors :

$$\int_1^9 j(x)dx=J(9)-J(1)$$
$$=\left(e^9+10\times\sqrt{9}\right)-\left(e^1+10\times\sqrt{1}\right)=\left(e^9+10\times3\right)-\left(e^1+10\times\sqrt{1}\right)$$
$$=\left(e^9+30\right)-(e+10)=e^9+30-e-10=\boxed{e^9+e+20\approx8120{,}37}$$

Nous en déduisons que la valeur moyenne de j sur l'intervalle $[1;9]$ est :

$$\boxed{V_m=\frac{1}{8}\times\left(e^9+e+20\right)\approx1015{,}05}$$

c.2. A l'aide de la calculatrice, on cherche dans l'intervalle $[1;9]$ la solution c de l'équation

$$j(x)=V_m\quad\Leftrightarrow\quad j(x)-V_m=0\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{e^x+10\sqrt{x}-1015{,}05\approx0}$$

D'après celle-ci, une valeur approchée de c au dixième près est 6,9.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

Probabilités et échantillonnage

En voiture Simone !

L'énoncé

Chaque jour, des hordes d'automobilistes déferlent sur la bonne ville du Blanc. Des études ont montré que 60% de ces automobilistes étaient des femmes. 25% de ces femmes roulent à l'essence.
Chez les hommes, 55% roulent au gasoil, 40% à l'essence et le reste utilisent un autre carburant.
Enfin, on sait que 61% des automobilistes (hommes et femmes) roulent au gasoil.

a. On rencontre un automobiliste au hasard et on définit les événements suivants :

F = «l'automobiliste rencontré est une femme»
H = «l'automobiliste rencontré est un homme»
E = «l'automobiliste rencontré roule à l'essence»
G = «l'automobiliste rencontré roule au gasoil»
A = «l'automobiliste rencontré roule avec un autre carburant que le gasoil ou l'essence»

Les probabilités demandées seront, le cas échéant, arrondies au dix-millième-près.

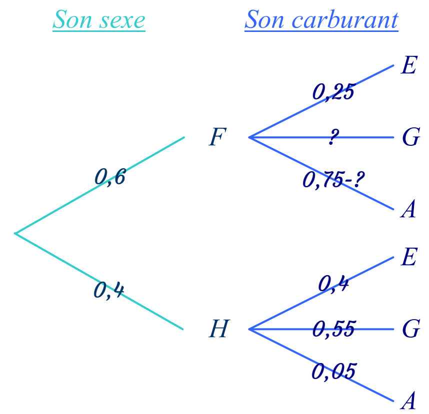
1. Construire un arbre pondéré décrivant la rencontre d'un automobiliste au hasard.
2. Calculer la probabilité de l'événement E.
3. On sait que l'automobiliste rencontré roule au gasoil. Calculer la probabilité que cet automobiliste soit un homme.
4. On sait que l'automobiliste rencontré est une femme. Calculer la probabilité qu'elle roule au gasoil.

b. Ce matin, les agents de *Patrouille Routière Blancoise* ont réalisé 19 contrôles sur des automobilistes pris au hasard dans la circulation. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de ces 19 automobilistes roulant au diesel.
Les probabilités demandées seront, le cas échéant, arrondies au dix-millième-près.

1. Préciser toutes les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.
   Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité qu'exactement 10 des 19 automobilistes contrôlés roulent au diesel.
4. Calculer la probabilité qu'au moins 13 des 19 automobilistes contrôlés roulent au diesel.

Le corrigé

a.1. La problématique d'une rencontre au hasard d'un conducteur peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



a.2. Les événements F et H formant une partition de l'univers des possibles, il vient, en application de la formule des probabilités totales, que :

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap H) = 0,6 \times 0,25 + 0,4 \times 0,4 = 0,31$$

a.3. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle «une homme sachant que l'automobiliste roule au gasoil».

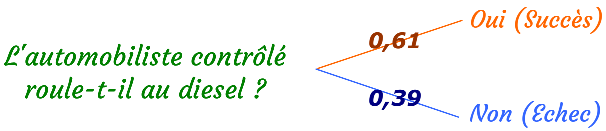
$$P_G(H) = \frac{P(G \cap H)}{P(G)} = \frac{0,4 \times 0,55}{0,61} = \frac{0,22}{0,61} = \frac{22}{61} \approx 0,3607$$

a.4. Les événements F et H formant une partition de l'univers des possibles, il vient, en application de la formule des probabilités totales, que :

$$\begin{aligned} P(G) = P(G \cap F) + P(G \cap H) \quad &\Leftrightarrow \quad 0,61 = 0,6 \times \overbrace{P_F(G)}^{?} + 0,4 \times 0,55 \\ &\Leftrightarrow \quad 0,61 = 0,6 \times P_F(G) + 0,22 \\ &\Leftrightarrow \quad 0,6 \times P_F(G) = 0,61 - 0,22 \\ &\Leftrightarrow \quad 0,6 \times P_F(G) = 0,39 \quad \Leftrightarrow \quad P_F(G) = \frac{0,39}{0,6} = 0,65 \end{aligned}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

b.1. La variable aléatoire X peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 19.
Chaque automobiliste contrôlé est une épreuve de Bernoulli.



Les 19 automobilistes contrôlés pris au hasard, donc indépendants les uns des autres, forment un schéma de Bernoulli.
Par conséquent, la variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(19;0,61)$.

b.2. Sa loi de probabilité étant une loi binomiale, l'espérance de la variable aléatoire X est donnée par :

$$E(X) = 19 \times 0,61 = \underline{11,59 \text{ automobilistes roulent au diesel}}$$

b.3. La probabilité qu'exactement 10 des 19 automobilistes contrôlés roulent au diesel est donnée par :

$$P(X=10) \approx \underline{0,1375}$$

...en utilisant la fonction «binomial particulier» de la calculatrice.

b.4. La probabilité qu'au moins 13 des 19 automobilistes contrôlés roulent au diesel est donnée par :

$$p(X \geq 13) = 1 - p(X < 13) = 1 - p(X \leq 12) \approx 1 - 0,6597 = \underline{0,3403}$$

...en utilisant l'événement contraire et la fonction «cumul binomial» de la calculatrice.

Prof improbables : la vie continue...ou pas !

L'énoncé

Dans le souci de faire travailler tous les élèves afin qu'ils décrochent leurs bacs, le lycée a décidé d'acheter 22 *Hiprofs*. Le *Hiprof* est un robot qui contrairement aux humains qu'il remplace ne baisse jamais les bras devant la paresse et la mauvaise fois des apprenants.
Cependant, comme toute technologie, il a des petits défauts.

a. Le *Hiprof* a le défaut de tomber souvent en panne. On appelle T la durée exprimée en années entre deux pannes d'un *Hiprof*.
L'expérience a montré que la variable aléatoire continue T était toujours comprise entre 1 et 3 années et qu'elle avait pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -0,3x^2 + 1,5x - 1,2$$

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la forme du second degré $f(x)$.
2. Donner une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

   En utilisant la fonction F, calculer l'intégrale $I = \int_1^3 f(x)\,dx$.
3. Démontrer que la fonction f est bien une densité de probabilité sur l'intervalle $[1;3]$.
4. Calculer la probabilité que la durée T entre deux pannes se situe entre 1 et 2 années.
5. Donner une valeur approchée au centième près de la durée moyenne entre deux pannes d'un *Hiprof*. On indiquera ce qui a été calculé et on pourra utiliser les fonctions de la machine pour le calcul.

b. Les *Hiprofs* souffrent d'un énorme défaut : ils confondent les lois uniformes et les lois normales. Une étude menée sur les chaines de montage a montré qu'en moyenne 17% des *Hiprofs* produits présentaient ce défaut.
On appelle N la variable aléatoire égale au nombre de *Hiprofs* présentant le défaut sur les 22 achetés par l'établissement. On fait l'hypothèse que ces 22 *Hiprofs* achetés ont été pris au hasard dans le stock de l'entreprise qui les a produits.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire N ?
   Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire N ?
2. Calculer le nombre moyen de machines défectueuses sur le lot de 22 achetées.
3. Calcule la probabilité qu'exactement cinq *Hiprofs* présentent le défaut sur les 22 achetés. On donnera une valeur approchée au millième près.
4. Calculer la probabilité qu'au moins trois *Hiprofs* présentent le défaut sur les 22 achetés. On donnera une valeur approchée au millième près.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

c. Comme toute machine, les *Hiprofs* ont un coût de fonctionnement qui diffère selon les exemplaires.
On appelle C la variable aléatoire égale au coût horaire exprimé en euros d'un *Hiprof*.
Des études ont montré que ce coût horaire C suivait la loi normale de paramètres d'espérance $\mu = 27$ euros et d'écart-type $\sigma = 2{,}9$.
On choisit au hasard un *Hiprof* sur la chaine de production. Les probabilités demandées seront arrondies au millième près.

1. Quelle est la probabilité que son coût horaire C soit compris entre 26 et 29 euros ? Sur votre copie, tracer une esquisse de la densité de probabilité de la loi de probabilité de C, puis représenter la probabilité qui vient d'être calculée.
2. Quelle est la probabilité que son coût horaire C dépasse les 30 euros ?
3. Le constructeur des *Hiprofs* souhaite communiquer sur le coût réduit de ses machines. Pour ce faire, il souhaite indiquer que les trois quarts de ses machines ont un coût horaire C inférieur à une certaine somme s. Quelle est la plus basse somme s qui vous puissiez lui conseiller ? On arrondira cette somme au centime près.

d. Le *Hiprof* est doté d'une batterie électrique qui leur assure une autonomie comprise entre 27 et 43 heures de fonctionnement selon les phénomènes auxquels il est confronté.
On appelle A la variable aléatoire continue égale à l'autonomie exprimée en heures d'un *Hiprof*. Des études ont montré que cette variable aléatoire continue A était uniformément distribuée sur l'intervalle $[27;43]$.

1. Dessiner une esquisse de la densité de probabilité de la loi de probabilité de la variable aléatoire A.
   On précisera les valeurs prises par cette densité.
2. On choisit au hasard un *Hiprof* sur la chaine de production.
   Déterminer la probabilité que son autonomie soit comprise entre 32 et 36 heures.
   Déterminer la probabilité que son autonomie soit supérieure à 40 heures.
3. Calculer l'autonomie moyenne d'un *Hiprof*.

Le corrigé

a.1. Pour connaître le signe de la forme du second degré $f(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}5x - 1{,}2$, calculons son discriminant :

$$\Delta_{f(x)} = 1{,}5^2 - 4 \times (-0{,}3) \times (-1{,}2) = 2{,}25 - 1{,}44 = 0{,}81 = 0{,}9^2$$

Son discriminant étant positif, $f(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-1{,}5 - 0{,}9}{2 \times (-0{,}3)} = \frac{-2{,}4}{-0{,}6} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1{,}5 + 0{,}9}{2 \times (-0{,}3)} = \frac{-0{,}6}{-0{,}6} = 1$$

Son coefficient dominant $-0{,}3$ étant négatif, le tableau de signe de cette dérivée seconde est le suivant :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

a.2. Une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = -0{,}3 \times x^2 + 1{,}5 \times x - 1{,}2$ est la fonction $F(x) = -0{,}3 \times \frac{1}{3} x^3 + 1{,}5 \times \frac{1}{2} x^2 - 1{,}2x = -0{,}1x^3 + 0{,}75x^2 - 1{,}2x$.

Connaissant une primitive de la fonction f, le calcul de l'intégrale I se fait facilement :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 f(x)\,dx \\ &= F(3) - F(1) \\ &= \left(-0{,}1 \times 3^3 + 0{,}75 \times 3^2 - 1{,}2 \times 3\right) - \left(-0{,}1 \times 1^3 + 0{,}75 \times 1^2 - 1{,}2 \times 1\right) \\ &= (-2{,}7 + 6{,}75 - 3{,}6) - (-0{,}3 + 0{,}75 - 1{,}2) = 0{,}45 - (-0{,}55) = 1 \end{aligned}$$

a.3. Trois conditions sont nécessaires pour que la fonction f puisse être une densité de probabilité sur l'intervalle $[1;3]$.

- D'abord, la fonction f est définie et continue sur $[1;3]$ car c'est une fonction du second degré. Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui implique la continuité.
- Ensuite, d'après son tableau de signe établi lors de la question **a.1**, la fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[1;3]$.
- Enfin, l'intégrale $I = \int_{[0;1]} f(x)\,dx$ est égale à 1.

C'est pour cela que la fonction f est bien une densité de probabilité sur l'intervalle $[1;3]$.

a.4. La probabilité que la durée T entre deux pannes soit comprise entre un et deux ans est donnée par l'intégrale :

$$\begin{aligned} P(T \in [1;2]) &= \int_1^2 f(x)\,dx \\ &= F(2) - F(1) \\ &= \left(-0{,}1 \times 2^3 + 0{,}75 \times 2^2 - 1{,}2 \times 2\right) - \left(-0{,}1 \times 1^3 + 0{,}75 \times 1^2 - 1{,}2 \times 1\right) \\ &= (-0{,}8 + 3 - 2{,}4) - (-0{,}55) = -0{,}2 - (-0{,}55) = 0{,}35 \end{aligned}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

a.5. La durée moyenne entre deux pannes d'un *Hiprof* est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire *T*. Celle-ci se calcule par l'intégrale :

$$E(T)=\int_{[1;3]} x\times f(x)\,dx$$

Une primitive de $g(x)=x\times\left(-0{,}3x^2+1{,}5x-1{,}2\right)=-0{,}3\times x^3+1{,}5\times x^2-1{,}2\times x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $G(x)=-0{,}3\times\frac{1}{4}x^4+1{,}5\times\frac{1}{3}x^3-1{,}2\times\frac{1}{2}x^2=\underline{-0{,}075x^4+0{,}5x^3-0{,}6x^2}$

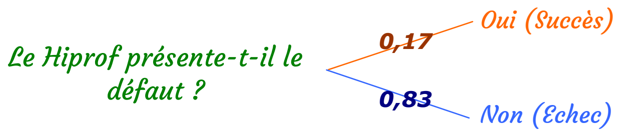
Il vient alors :

$$\begin{aligned}E(T)&=\int_1^3 g(x)\,dx\\&=G(3)-G(1)\\&=\left(-0{,}075\times3^4+0{,}5\times3^3-0{,}6\times3^2\right)-\left(-0{,}075\times1^4+0{,}5\times1^3-0{,}6\times1^2\right)\\&=(-6{,}075+13{,}5-5{,}4)-(-0{,}075+0{,}5-0{,}6)=2{,}025-(-1{,}175)=\underline{2{,}2\text{ années}}\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> la durée moyenne entre deux pannes d'un *Hiprof* est égale à 2,2 années.

b.1. La variable aléatoire *N* comptant un nombre de machines peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 22.

➲ Chaque *Hiprof* est une épreuve de Bernoulli :



Les 22 *Hiprofs* achetés étant à priori indépendants les uns des autres, forment un schéma de Bernoulli.
Par conséquent, la variable aléatoire *N* suit la loi binomiale $B(22;0{,}17)$.

b.2. Le nombre moyen de machines défectueuses est égal à l'espérance mathématique de la variable aléatoire *N*. Cette dernière suivant une loi binomiale, cette espérance est donnée par :

$$E(N)=22\times0{,}17=\underline{3{,}74\ \textit{Hiprofs}\text{ présentent le défaut}}$$

b.3. La probabilité qu'exactement 5 des 22 *Hiprofs* achetés présentent le défaut est donnée par :

$$P(N=5)\approx\underline{0{,}158}$$

...en utilisant la fonction «distribution binomiale particulière» de la calculatrice.

b.4. La probabilité qu'au moins 3 des 22 *Hiprofs* achetés présentent le défaut est donnée par :

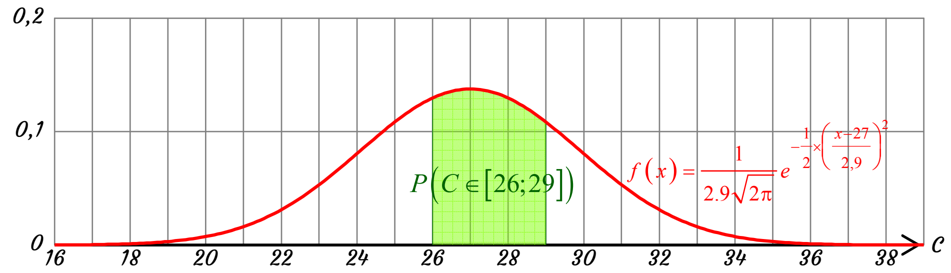
$$P(N\geq3)=1-P(N<3)=1-P(N\leq2)\approx1-0{,}252=\underline{0{,}748}$$

...en utilisant l'événement contraire et la fonction «cumul binomial» de la calculatrice.

c.1. Pour répondre à cette question et à celles qui suivent, on utilise les fonctions «lois normales» de la calculatrice.
Dans cette question, il s'agit de calculer la probabilité :

$$P\left(C\in[26;29]\right)\approx\underline{0{,}390}$$

➲ La représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire *C* est une courbe en cloche symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x=\mu=27$.
La probabilité qui vient d'être calculée correspond à l'aire sous la courbe de cette densité prise sur l'intervalle $[26;29]$ ainsi que cela a été fait sur le graphique ci-dessous :



c.2. Dans cette question, il faut calculer la probabilité :

$$P\left(C\in[30;+\infty[\right)\approx\underline{0{,}151}$$

c.3. Cette plus basse somme *s* vérifie l'équation :

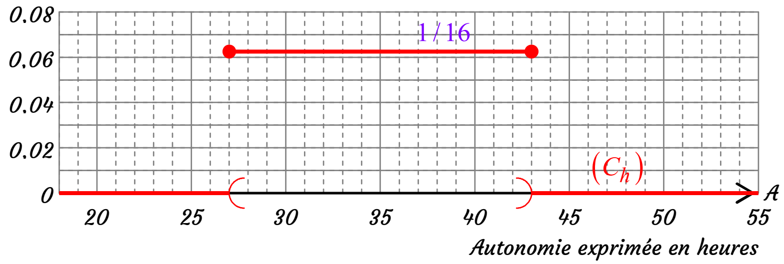
$$P(C\leq s)=0{,}75\ \xrightarrow[\text{de paramètres }\mu=27\text{ et }\sigma=2{,}9.]{\text{Inversion de la loi normale}}\ s\approx\underline{28{,}96\text{ euros}}$$

d.1. La densité de probabilité de la loi uniformément distribuée sur l'intervalle $[27;43]$ que suit la variable aléatoire *A* est la fonction *h* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases}h(x)=\dfrac{1}{43-27}=\dfrac{1}{16}=0{,}0625 & \text{sur l'intervalle }[27;43]\\ h(x)=0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

Sa courbe est celle ci-dessous :



d.2. Les deux probabilités demandées sont :

$$P(A \in [32;36]) = \frac{36-32}{43-27} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$P(A \geq 40) = P(A \in [40;43]) + P(A \in]43;+\infty[) = \frac{43-40}{43-27} + 0 = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$

d.3. L'autonomie moyenne d'un *Hiprof* est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire *A*. Cette dernière suivant une loi uniformément distribuée sur $[27;43]$, nous avons :

$$E(A) = \frac{27+43}{2} = \frac{70}{2} = 35 \text{ heures}$$

Conclusion : l'autonomie moyenne d'un *Hiprof* est de 35 heures...eux aussi y sont !

Probabilités et échantillonnages selon Toto

L'énoncé

a. Toto a une migraine. Pour la soulager, il décide de prendre un comprimé d'ibucétamol. Sur la boite, il est marqué que chaque comprimé contient 580 milligrammes d'ibucétamol. Mais cette mention est approximative. Si on appelle M la masse exprimée en milligramme d'ibucétamol contenu dans un comprimé, alors cette variable aléatoire continue suit une loi normale d'espérance 580 et d'écart-type 27.
Les probabilités demandées seront retournées au millième près.

1. Calculer la probabilité que le comprimé pris par Toto contienne entre 570 et 585 milligrammes d'ibucétamol.
2. Il faut que le comprimé contienne au moins 590 milligrammes d'ibucétamol pour que la migraine de Toto soit soulagée. Calculer la probabilité que Toto ait toujours mal à la tête après la prise du comprimé.
   Sur votre copie, tracer une esquisse de la densité de probabilité de la loi de probabilité de M, puis représenter la probabilité qui vient d'être calculée.
3. Déterminer un réel α tel que la probabilité que la masse M soit comprise entre $580-\alpha$ et $580+\alpha$ milligrammes soit égale à 0,95.

b. Toto est perturbé. Il vient de lire que 41% des français auraient une haleine repoussante. Sceptique, il décide de vérifier cette information sur un échantillon de 320 français choisis au hasard. Au terme de son étude, il a dénombré qu'exactement 116 des 320 français de son échantillon avait une haleine repoussante.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence observée sur cet échantillon. On arrondira les bornes au millième près. On justifiera aussi la pertinence de cet intervalle de fluctuation asymptotique.
2. Calculer la fréquence d'haleines repoussantes observée sur l'échantillon.
   Que peut en conclure Toto ?

c. Toto est un grand blagueur et sa blague préférée en ce moment est : "Hé ! Ton lacet est défait !". Il la fait à tous les gens qu'il rencontre au hasard quand il déambule dans la ville. Sauf que les gens sont excédés par les blagues de Toto. Une étude a montré que lorsque Toto fait une blague à une personne rencontrée au hasard, il y a 58% de chance que celle-ci lui retourne un soufflet.
Ce mardi, Toto rencontre 16 personnes au hasard à qui il fait la blague. On appelle X le nombre de soufflets que se prend Toto ce mardi.
Les probabilités demandées seront arrondies au millième près.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?
   Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? On justifiera sa réponse.
2. Calculer la probabilité que Toto se prenne exactement 10 soufflets ce mardi.
3. Calculer la probabilité que Toto se prenne au plus 5 soufflets ce mardi.
4. Calculer le nombre moyen de soufflets que se prend Toto ce mardi.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

d. Toto, grand bienfaiteur de l'Humanité, vient de concevoir un remède contre la paresse dont il va tester l'efficacité. Ne pouvant le faire sur toute l'Humanité, il décide de se restreindre à une petite partie d'entre elle.
D'abord, il réalise une première étude sur un *échantillon A*. A tous les individus de ce groupe, il donne un placébo (médicament non actif). A l'issue du test, il leur demande s'ils se sentent paresseux.
Selon ses résultats, la proportion p_A des gens se sentant paresseux en ayant pris un placébo appartient à l'intervalle de confiance au seuil de confiance 95% qu'est $[0{,}63;0{,}71]$. Cet intervalle de confiance a été calculé sur l'*échantillon A*.
Puis, il constitue un *échantillon B* de 720 individus à qui il fait prendre son remède. A l'issue du test, 432 individus déclarent se sentir paresseux.
Dans ce qui suit, les valeurs retournées seront arrondies au centième près.

1. Calculer la fréquence f_B observée sur l'*échantillon B* de gens se sentant paresseux. En déduire l'intervalle de confiance au seuil de confiance 95% calculé sur l'*échantillon B* auquel appartient la proportion p_B d'individus déclarant se sentir paresseux après avoir pris le remède. On justifiera la pertinence de cet intervalle de confiance
2. Au seuil de confiance de 95%, peut-on dire que le remède est efficace ? On justifiera sa réponse.
3. A partir de l'intervalle de confiance au seuil de confiance 95% calculé sur l'*échantillon A* qu'est $[0{,}63;0{,}71]$, déterminer la fréquence f_A de gens se sentant paresseux ainsi que la taille n_A de l'*échantillon A*.

Le corrigé

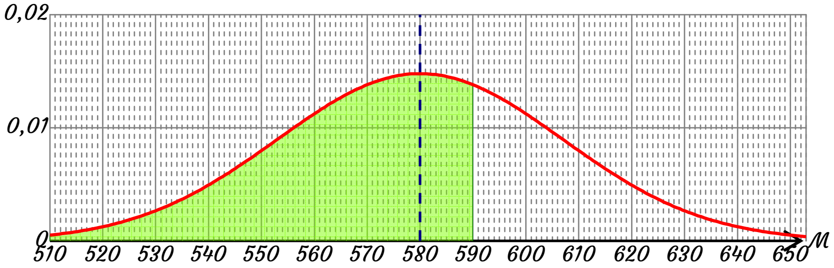
a.1. En utilisant les fonctions «lois normales» de la calculatrice, nous calculons la probabilité :

$$P\left(M\in[570;585]\right)\approx 0{,}218$$

a.2. La migraine de Toto sera soulagée si la masse M d'ibucétamol exprimée en milligrammes appartient à l'intervalle $[590;+\infty[$. Mais avec le mauvais esprit qui nous caractérise, c'est la probabilité de l'événement contraire qui nous intéresse :

$$P\left(M\in]-\infty;590[\right)\approx 0{,}644$$

➲ La représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire M est une courbe en cloche symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x=\mu=580$.
La probabilité qui vient d'être calculée correspond à l'aire sous la courbe de cette densité prise sur l'intervalle $]-\infty;590[$ ainsi que cela a été fait sur le graphique ci-dessous :



a.3. D'après un réel résultat du cours, comme la variable aléatoire M suit la loi normale d'espérance $\mu=580$ et d'écart-type $\sigma=27$, alors il y a 95% de chance que M appartienne à l'intervalle $[\mu-1{,}96\times\sigma;\mu+1{,}96\times\sigma]$.
Par conséquent, le réel α est égal à :

$$\alpha=1{,}96\times\sigma=1{,}96\times 27=52{,}92$$

b.1. La proportion de la population française ayant une haleine repoussante est $p=0{,}41$
La taille de l'échantillon que constitue Toto est égal à $n=320$
Il est pertinent de parler d'intervalle de fluctuation asymptotique dans la présente situation car les trois conditions sont remplies :

$$\begin{cases} n=320\geq 30 & \boxed{Ok!} \\ n\times p=320\times 0{,}41=131{,}2\geq 5 & \boxed{Ok!} \\ n\times(1-p)=320\times 0{,}59=188{,}8\geq 5 & \boxed{Ok!} \end{cases}$$

Les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% sont données par :

$$\begin{cases} \text{Borne inférieure}=p-1{,}96\times\sqrt{\dfrac{p\times(1-p)}{n}}=0{,}41-1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}41\times 0{,}59}{320}}\approx 0{,}356 \\ \text{Borne supérieure}=p+1{,}96\times\sqrt{\dfrac{p\times(1-p)}{n}}=0{,}41+1{,}96\times\sqrt{\dfrac{0{,}41\times 0{,}59}{320}}\approx 0{,}464 \end{cases}$$

Conclusion : l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de l'échantillon est :

$$I=[0{,}356;0{,}464]$$

b.2. La fréquence f d'haleines repoussantes observée sur l'échantillon est égale à :

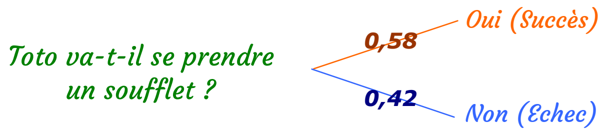
$$f=\frac{116}{320}=0{,}3625$$

➲ Comme la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation $[0{,}356;0{,}464]$, alors Toto peut en déduire avec une probabilité d'au moins 95% que la proportion d'haleines repoussantes de 41% dans la population française est fondée.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

c.1. La variable aléatoire X comptant un nombre de soufflets peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 16.

➲ Chaque rencontre avec un habitant de la ville est une épreuve de Bernoulli :



Les 16 rencontres faites par Toto au hasard sont indépendantes les unes des autres; par suite, elles forment un schéma de Bernoulli.
Par conséquent, la variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(16;0,58)$.

c.2. La probabilité que Toto se prenne exactement 10 soufflets ce mardi est donnée par :

$$P(N=10)\approx 0,189$$

...en utilisant la fonction «binomial particulier» de la calculatrice.

c.3. La probabilité que Toto se prenne au plus 5 soufflets ce mardi est donnée par :

$$P(X\leq 5)=0,028$$

...en utilisant la fonction «cumul binomial» de la calculatrice.

c.4. Le nombre moyen de soufflets que se prend Toto ce mardi est égal à l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Cette dernière suit une loi binomiale. Par suite :

$$E(X)=16\times 0,58=9,28 \text{ soufflets}$$

d.1. La fréquence observée de gens se sentant paresseux dans l'*échantillon B* est égale à :

$$f_B=\frac{432}{720}=0,6$$

Parler d'intervalle confiance à propos de l'*échantillon B* a un sens car les trois conditions sont vérifiées :

$$\begin{cases} n_B=720\geq 30 & \boxed{Ok!} \\ n_B\times f_B=720\times 0,6=432\geq 5 & \boxed{Ok!} \\ n_B\times(1-f_B)=720\times 0,6=288\geq 5 & \boxed{Ok!} \end{cases}$$

Nous en déduisons que la proportion p_B appartient avec une probabilité d'au moins 95% à l'intervalle de confiance dont les bornes sont :

$$\begin{cases} \text{Borne inférieure}=p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0,6-\dfrac{1}{\sqrt{720}}\approx 0,56 \\ \text{Borne supérieure}=p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0,6+\dfrac{1}{\sqrt{720}}\approx 0,64 \end{cases}$$

d.2. La proportion p_B de gens déclarant se sentir paresseux après avoir pris le remède appartient avec une probabilité d'au moins 95% à l'intervalle $[0,56;0,64]$.
De même, la proportion p_A de gens déclarant se sentir paresseux en ayant pris le placébo appartient avec une probabilité d'au moins 95% à l'intervalle $[0,63;0,71]$.
Ces deux intervalles se chevauchant, on peut exclure au seuil de confiance de 95% que la proportion p_A soit inférieure à la proportion p_B.
<u>Conclusion :</u> au seuil de confiance de 95%, on ne peut pas conclure que le remède de Toto est efficace.

d.3. L'intervalle de confiance a été calculé à partir de la formule $\left[f_A-\dfrac{1}{\sqrt{n_A}};f_A+\dfrac{1}{\sqrt{n_A}}\right]$.

La fréquence f_A est le milieu de l'intervalle $[0,63;0,71]$. Par conséquent :

$$f_A=\frac{0,63+0,71}{2}=\frac{1,34}{2}=0,67$$

L'amplitude de l'intervalle de confiance est toujours donnée par $\dfrac{2}{\sqrt{n_A}}$.

Dans le cas présent, elle est égale à $0,71-0,63=0,08$. Nous en déduisons l'équation :

$$\frac{2}{\sqrt{n_A}}=0,08 \quad\Leftrightarrow\quad 2=0,08\sqrt{n_A} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{n_A}=\frac{2}{0,08}=25 \xrightarrow{\text{Carré}} n_A=25^2=625$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

Suites

Histoires courtes de suites

L'énoncé

Les quatre sous-parties de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

a. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}5$ telle que $u_2 = 45$.

1. Calculer le terme u_0.
2. Donner la valeur exacte de la somme $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$.

b. (v_n) est une suite arithmétique telle que $v_9 = 11$ et $v_{14} = 2{,}5$.

1. Déterminer la raison r de la suite arithmétique (v_n).
2. En déduire le terme v_0.
3. Donner l'expression du terme v_n en fonction de l'entier n.
4. Calculer la valeur exacte de la somme $\underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{14}}_{\text{Somme de tous les termes de la suite } (v_n) \text{ entre les rangs 0 et 14}}$.

c. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $w_n = \left(1 - 2^n\right) \times \left(\dfrac{1}{1 + 0{,}2^n} - 2\right)$.

d. Que fait l'algorithme suivant et qu'affiche-t-il à l'issue de son exécution ?

```
n est un entier naturel et u un réel
n prend la valeur 0
u prend la valeur 100
Tant que u < 200
    n prend la valeur n + 1
    u prend la valeur 1,1 × u + 10
Fin du Tant que
En sortie, afficher la valeur de n
```

Le corrigé

a.1. Utilisant une formule du cours, les premier et troisième termes de la suite géométrique (u_n) sont liés par la formule :

$$u_0 = u_2 \times q^{0-2} = 45 \times 1{,}5^{-2} = 20$$

a.2. Dans cette question, il s'agit de calculer la somme des huit premiers termes de la suite géométrique (u_n). Pour cela aussi, nous disposons d'une formule :

$$\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7}_{\text{Somme des 8 premiers termes de la suite géométrique } (u_n)} = u_0 \times \frac{1 - q^{\boxed{8}}}{1 - q} = 20 \times \frac{1 - 1{,}5^8}{1 - 1{,}5} = 985{,}15625$$

b.1. Les dixième et quinzième termes de la suite arithmétique (v_n) sont liés par la formule :

$$v_{14} = v_9 + (14 - 9) \times r \Leftrightarrow 2{,}5 = 11 + 5 \times r \Leftrightarrow 5 \times r = 2{,}5 - 11$$

$$\Leftrightarrow 5 \times r = -8{,}5 \Leftrightarrow r = \frac{-8{,}5}{5} = -1{,}7$$

<u>Conclusion :</u> la raison r de la suite arithmétique (v_n) est égale à $-1{,}7$.

b.2. Le premier terme de la suite se calcule à partir d'un de ceux de l'énoncé :

$$v_0 = v_9 + (0 - 9) \times r = 11 - 9 \times (-1{,}7) = 11 + 15{,}3 = 26{,}3$$

b.3. D'après une formule du cours, nous pouvons écrire que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_n = u_0 + n \times r = 26{,}3 + n \times (-1{,}7) = 26{,}3 - 1{,}7 \times n$$

b.4. La somme des 15 premiers termes de la suite arithmétique (v_n) est donnée par la formule :

$$\underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{14}}_{\text{Somme des 15 premiers termes de la suite arithmétique } (v_n)} = \boxed{15} \times \frac{v_0 + v_{14}}{2} = 15 \times \frac{26{,}3 + 2{,}5}{2} = 15 \times \frac{28{,}8}{2} = 216$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

c. La limite de la suite $\left(q^n\right)$ dépend de la position de la raison q vis-à-vis de 1.

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\boxed{2^n}\right)\times\left(\frac{1}{1+\boxed{0,2^n}}-2\right)=\left(1-\boxed{(+\infty)}\right)\times\left(\frac{1}{1+\boxed{0^+}}-2\right)$$

$$=(-\infty)\times\left(\frac{1}{1}-2\right)=(-\infty)\times(1-2)=(-\infty)\times(-1)=\underline{+\infty}$$

d. A l'image des algorithmes vus en cours, cet algorithme calcule successivement tous les termes d'une suite (u_n) jusqu'à ce que ceux-ci deviennent supérieurs ou égaux à 200.

Observant l'algorithme, cette suite (u_n) est définie par récurrence par la formule :

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 1,1\times u_n + 10 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

En calculant successivement les termes à la calculatrice, on observe que ceux-ci deviennent supérieurs ou égaux à 200 à partir du rang 5 car $\begin{cases} u_4 = 192,82 \\ u_5 = 222,102 \end{cases}$.

Conclusion : l'algorithme retourne pour valeur 5.

Placement et position

L'énoncé

Mon banquier vient de me proposer le placement suivant : d'abord, il me demande de lui confier un capital initial de 400€ qui sera mis sur un compte; puis, au début de chaque semaine, il me prélèvera 7% du capital présent sur ce compte; enfin, au milieu de chaque semaine, il rajoutera 42€ au capital présent sur ce compte.

On appelle c_n le capital exprimé en euros présent sur le compte à l'issue de la n-ième semaine du placement.

Le capital initial étant de 400€, nous avons donc $c_0 = 400€$.

a. Calculer c_1 et c_2. On vérifiera que le capital présent sur le compte à l'issue de la deuxième semaine est voisin de 427 euros.

b. Compléter l'égalité ci-dessous en justifiant brièvement :

Pour tour entier naturel n, $c_{n+1} = \ldots\ldots\times c_n + \ldots\ldots$

c. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$a_n = c_n - 600$$

Calculer le terme a_0.

Démontrer que la suite (a_n) est géométrique. On précisera ses attributs.

En déduire l'expression de a_n, puis celle de c_n en fonction de n.

d. Déterminer la limite de la suite (c_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Que peut-on en déduire quant à mon capital ?

e. Mon banquier vient de m'appeler pour me dire que si je doublais mon capital initial, je pourrais doubler mes gains à terme ! Que penser de cette affirmation ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a. Calculons les deux premiers termes de la suite :

$$c_1 = \underbrace{c_0 - 7\% \text{ de } c_0}_{\text{Prélèvement de 7\%}} + \underbrace{42}_{\text{Rajout}} = \boxed{c_0} - 0,07\times\boxed{c_0} + 42 = \boxed{c_0}\times(1-0,07)+42$$

$$= 0,93\times c_0 + 42 = 0,93\times 400 + 42 = \underline{414€}$$

$$c_2 = \underbrace{c_1 - 7\% \text{ de } c_1}_{\text{Prélèvement de 7\%}} + \underbrace{42}_{\text{Rajout}} = 0,93\times c_1 + 42 = 0,93\times 414 + 42 = \underline{427,02€}$$

b. Le phénomène observé sur les deux premières semaines se poursuit les semaines suivantes. Par conséquent, entre la semaine n et la suivante $n+1$, nous avons :

$$c_{n+1} = \underbrace{c_n - 7\% \text{ de } c_n}_{\text{Prélèvement de 7\%}} + \underbrace{42}_{\text{Rajout}} = \boxed{c_n} - 0,07\times\boxed{c_n} + 42 = \boxed{c_n}\times(1-0,07)+42$$

$$= \underline{0,93\times c_n + 42}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

c. Le premier terme de la suite annexe (a_n) est donné par :

$$a_0 = c_0 - 600 = 400 - 600 = -200$$

➲ Démontrons que la suite (a_n) est géométrique.
Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \underbrace{c_{n+1}} - 600 \\ &= \underbrace{0{,}93 \times c_n + 42}_{v_{n+1}} - 600 \\ &= 0{,}93 \times \underbrace{c_n} - 558 \\ &= 0{,}93 \times \underbrace{(a_n + 600)}_{c_n} - 558 = 0{,}93 \times a_n + \cancel{558} - \cancel{558} = 0{,}93 \times a_n \end{aligned}$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q = 0{,}93$ et de premier terme $a_0 = -200$.

➲ Nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_n = a_0 \times q^n = -200 \times 0{,}93^n \quad \Rightarrow \quad c_n = a_n + 600 = -200 \times 0{,}93^n + 600$$

d. Déterminons la limite de la suite (c_n).

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} 600 - 200 \times \boxed{0{,}93^n} = 600 - 200 \times 0 = 600 - 0 = 600$$

<u>Conclusion :</u> plus le nombre de semaines sera grand, plus mon capital sera proche de 600€.

e. Si j'acceptais la proposition de mon banquier, mon capital initial serait de $c_0 = 800€$.
Ensuite, l'évolution restant la même d'une semaine sur l'autre, nous aurions toujours :

$$c_{n+1} = 0{,}93 \times c_n + 42$$

Par suite, la suite annexe (a_n) définie précédemment serait toujours géométrique de raison $q = 0{,}93$ mais de premier terme $a_0 = 800 - 600 = 200$

Les expressions des suites (a_n) et (c_n) en seraient alors modifiées :

$$a_n = a_0 \times q^n = 200 \times 0{,}93^n \quad \Rightarrow \quad c_n = a_n + 600 = 200 \times 0{,}93^n + 600$$

Par contre, la limite de la suite (c_n) resterait la même ! En effet :

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} 600 + 200 \times \boxed{0{,}93^n} = 600 + 200 \times 0 = 600 - 0 = 600$$

<u>Conclusion :</u> en doublant la mise initiale, mon capital baisserait de 200 euros.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

Spécialité

Systèmes m...

L'énoncé

a. On considère le système de trois équations à trois inconnues :

$$(S)\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ 4x+2y+7z=31 \\ 5x+2y+8z=32 \end{cases}$$

1. Ecrire le système précédent sous la forme d'une égalité matricielle $A\times X=B$ où A est une matrice carrée dont on précisera les dimensions, X est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et B est un vecteur colonne.
2. En déduire les solutions du système (S).

b. Déterminer l'expression de la fonction du second degré $f(x)=ax^2+bx+c$ telle que :

$$\begin{cases} \text{L'image de } -1 \text{ par la fonction } f \text{ est égale } -9 \\ \text{Sa courbe } (C_f) \text{ passe par le point de coordonnées } (2;3) \\ f(0)=1 \end{cases}$$

On détaillera son raisonnement.

c. La fonction $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ est un polynôme du troisième degré.

1. Calculer la dérivée $g'(x)$ en fonction des coefficients a, b, c ou d ainsi que de la variable x.
2. Déterminer l'expression de la fonction g sachant qu'elle vérifie les conditions suivantes :

   $g(1)=3$ $\quad g'(1)=-2$ $\quad g(2)=-1$ $\quad g'(2)=-7$

   On détaillera son raisonnement.

Le corrigé

a. Sous forme matricielle, le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 2x-y+3z \\ 4x+2y+7z \\ 5x+2y+8z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 31 \\ 32 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}}^{A}\times\overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}^{X}=\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 31 \\ 32 \end{pmatrix}}^{B}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 31 \\ 32 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Conclusion : le triplet solution du système (S) est $\underbrace{(-4;6;5)}_{(x;y;z)}$.

b. Exploitons les renseignements définissant la fonction f fournis par l'énoncé :

$$\begin{cases} f(-1)=-9 \Leftrightarrow a\times(-1)^2+b\times(-1)+c=-9 \Leftrightarrow a-b+c=-9 \quad \textbf{(1)} \\ f(2)=3 \Leftrightarrow a\times 2^2+b\times 2+c=3 \Leftrightarrow 4a+2b+c=3 \quad \textbf{(2)} \\ f(0)=1 \Leftrightarrow a\times 0^2+b\times 0+c=1 \Leftrightarrow 0+0+c=1 \Leftrightarrow c=1 \quad \textbf{(3)} \end{cases}$$

Nous pensions arriver à un système linéaire 3×3, finalement, nous aboutissons à un 2×2 d'inconnues a et b. Remplaçant c par sa valeur 1, les équations ***(1)*** et ***(2)*** deviennent :

$$\begin{matrix} a-b+1=-9 \Leftrightarrow a-b=-10 \\ 4a+2b+1=3 \Leftrightarrow 4a+2b=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Conclusion : l'expression de la fonction du second degré f est $f(x)=-3x^2+7x+1$

c.1. La dérivée de la fonction $g(x)=a\times x^3+b\times x^2+cx+d$ a pour expression :

$$g'(x)=a\times 3x^2+b\times 2x+c+0=3ax^2+2bx+c$$

c.2. Exploitons les renseignements fournis par l'énoncé :

$$\begin{cases} g(1)=3 \Leftrightarrow a\times1^3+b\times1^2+c\times1+d=3 \Leftrightarrow a+b+c+d=3 \quad \textbf{(1)} \\ g'(1)=-2 \Leftrightarrow 3a\times1^2+2b\times1+c=-2 \Leftrightarrow 3a+2b+c=-2 \quad \textbf{(2)} \\ g(2)=-1 \Leftrightarrow a\times2^3+b\times2^2+c\times2+d=-1 \Leftrightarrow 8a+4b+2c+d=-1 \quad \textbf{(3)} \\ g'(2)=-7 \Leftrightarrow 3a\times2^2+2b\times2+c=-7 \Leftrightarrow 12a+4b+c=-7 \quad \textbf{(4)} \end{cases}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

Le système linéaire 4×4 précédent peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction g recherchée a pour expression $g(x) = \boxed{-x^3 + 2x^2 - 3x + 5}$

Etat improbable

L'énoncé

Toto, élève de terminale, est un objet aléatoire qui oscille chaque jour de classe entre un état de travail T et un état de bavardage B. Des nombreuses études menées sur cet étrange personnage ont établi les faits suivants :

- S'il travaille un jour donné, alors il y a 65% de chance que Toto travaille le jour suivant. Sinon il bavarde.
- Si Toto bavarde un jour donné, alors il y a 71% de chance qu'il bavarde le jour suivant. Sinon il travaille.

C'est le jour de la rentrée, Toto arrive au lycée avec la ferme volonté de travailler. Donc il y a 90% de chance qu'il travaille et le reste qu'il bavarde ce premier jour de classe.

On appelle t_n la probabilité que Toto travaille le $n+1$-ième jour de classe et b_n la probabilité qu'il bavarde.

Le vecteur ligne $P_n = \begin{pmatrix} t_n & b_n \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste le jour $n+1$ de classe : Toto travaille-t-il ou bien bavarde-t-il ?

a. Représenter la situation précédente par un graphe probabiliste de sommet T représentant l'état «Toto travaille» et de sommet B représentant l'état «Toto bavarde»

b. On appelle M la matrice carrée d'ordre 2 vérifiant l'égalité $P_{n+1} = P_n \times M$.

1. Exprimer le terme t_{n+1} en fonction des termes t_n et b_n.
   Exprimer le terme b_{n+1} en fonction des termes t_n et b_n.
2. En déduire la matrice de transition M.
3. Compléter le vecteur ligne suivant $P_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & \ldots \end{pmatrix}$.
4. Quelle est la probabilité que Toto travaille le deuxième jour de classe ?
5. Déterminer la probabilité que Toto bavarde le dixième jour de classe. On donnera une valeur approchée au millième près.

c. Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} t & b \end{pmatrix}$ du graphe probabiliste précédent. On donnera le résultat sous la forme d'un couple de fractions irréductibles. On expliquera sa démarche. Interpréter ce résultat.

d. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$a_n = t_n - 0{,}453125$$

1. Pour tout entier naturel n, compléter les égalités :
   $$t_n + b_n = \ldots\ldots \Leftrightarrow b_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
   En déduire que l'on a :
   $$t_{n+1} = 0{,}36 \times t_n + 0{,}29$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

2. Démontrer que la suite (a_n) est géométrique de raison $q = 0,36$.

Calculer son premier terme a_0.

3. En déduire que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$t_n = 0,446875 \times 0,36^n + 0,453125$$

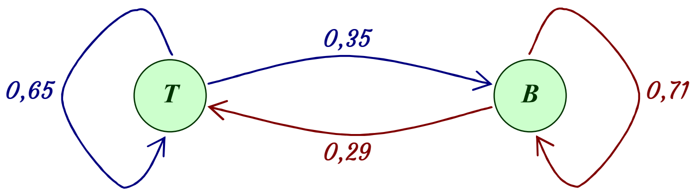
4. Déterminer la limite de la suite (t_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Quel est le rapport de ce résultat avec celui de la question **c.5** ?

5. Déterminer le jour de classe à partir duquel la probabilité que Toto travaille devient inférieure à 0,46.

Le corrigé

a. Le graphe probabiliste représentant la situation décrite par l'énoncé est le suivant :



b.1. D'après le graphe probabiliste précédent, nous pouvons écrire que, pour tout entier naturel n :

$$\left|\begin{array}{l} t_{n+1} = \text{probabilité que Toto travaille le jour } n+2 \\ \quad = \underbrace{65\% \text{ de } t_n}_{\text{Il travaillait le jour } n+1} + \underbrace{29\% \text{ de } b_n}_{\text{Il bavardait le jour } n+1} = 0,65 \times t_n + 0,29 \times b_n \\ b_{n+1} = \text{probabilité que Toto bavarde le jour } n+2 \\ \quad = \underbrace{35\% \text{ de } t_n}_{\text{Il travaillait le jour } n+1} + \underbrace{71\% \text{ de } b_n}_{\text{Il bavardait le jour } n+1} = 0,35 \times t_n + 0,71 \times b_n \end{array}\right.$$

b.2. Nous en déduisons :

$$P_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,65 \times t_n + 0,29 \times b_n & 0,35 \times t_n + 0,71 \times b_n \end{pmatrix}}_{(t_{n+1} \quad b_{n+1})} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_n & b_n \end{pmatrix}}_{P_n} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,29 & 0,71 \end{pmatrix}}_{M}$$

b.3. Le premier jour, la probabilité que Toto travaille est de 0,9 et celle qu'il bavarde est égale à 0,1. Par conséquent :

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$$

b.4. La probabilité t_1 que Toto travaille le deuxième jour va nous être donnée par :

$$P_1 = \begin{pmatrix} t_1 & b_1 \end{pmatrix} = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,29 & 0,71 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0,614} & 0,386 \end{pmatrix}$$

<u>Conclusion :</u> il y a 61,4 % de chance que Toto travaille le deuxième jour.

b.5. La suite (P_n) est géométrique à droite de raison M. Par conséquent, la probabilité b_9 que Toto bavarde le dixième jour de classe nous est donnée par :

$$P_9 = \begin{pmatrix} t_9 & b_9 \end{pmatrix} = P_0 \times M^9 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,29 & 0,71 \end{pmatrix}^9 \approx \begin{pmatrix} 0,453 & \boxed{0,547} \end{pmatrix}$$

<u>Conclusion :</u> il y a environ 54,7% de chance que Toto bavarde le dixième jour de classe.

c. La matrice de transition M ne comportant aucun coefficient nul, la suite d'états (P_n) converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} t & b \end{pmatrix}$ qui vérifie l'égalité :

$$\begin{aligned} P = P \times M \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,29 & 0,71 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 \times t + 0,29 \times b & 0,35 \times t + 0,71 \times b \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} t = 0,65 \times t + 0,29 \times b \quad \Leftrightarrow \quad t - 0,65 \times t - 0,29 \times b = 0 \\ b = 0,35 \times t + 0,71 \times b \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0,35 \times t + 0,71 \times b - b \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on aboutit à la même équation : $0,35 \times t - 0,29 \times b = 0$

Cette première équation est complétée par une seconde découlant du fait que les états «Toto travaille» et «Toto bavarde» étant les seuls possibles, la somme des probabilités t et b est égale à 1.

En définitive, les coefficients t et b sont les solutions du système linéaire 2×2 qu'est :

$$\begin{cases} 0,35 \times t - 0,29 \times b = 0 & \textbf{\textit{(1)}} \\ t + b = 1 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système par substitution.

A partir de l'équation ***(2)***, on exprime l'inconnue b en fonction de t.

$$t + b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 - t$$

Puis, on remplace dans l'équation ***(1)*** l'inconnue b par ce qu'elle vaut en t.

$$0,35 \times t - 0,29 \times \underbrace{(1 - t)}_{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0,35 \times t - 0,29 + 0,29 \times t = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0,64 \times t = 0,29 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{0,29}{0,64} = \frac{29}{64}$$

Il vient alors :

$$b = 1 - \frac{29}{64} = \frac{64}{64} - \frac{29}{64} = \frac{35}{64}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

Conclusion : l'état stable du graphe est $P=\begin{pmatrix}\frac{29}{64} & \frac{35}{64}\end{pmatrix}$. Plus les jours vont passer, plus la probabilité que Toto travaille sera proche de $\frac{29}{64}=0{,}453125$

d.1. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$t_n+b_n=\boxed{1} \Leftrightarrow b_n=1-t_n$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}t_{n+1}&=0{,}65\times t_n+0{,}29\times b_n\\&=0{,}65\times t_n+0{,}29\times(1-t_n)=0{,}65\times t_n+0{,}29-0{,}29\times t_n=0{,}36\times t_n+0{,}29\end{aligned}$$

d.2. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=t_{n+1}-0{,}453125\\&=\underbrace{0{,}36\times t_n+0{,}29}_{t_{n+1}}-0{,}453125=0{,}36\times t_n-0{,}163125\\&=0{,}36\times\underbrace{(a_n+0{,}453125)}_{t_n}-0{,}163125\\&=0{,}36\times a_n+\cancel{0{,}163125}-\cancel{0{,}163125}=0{,}36\times a_n\end{aligned}$$

Donc la suite annexe (a_n) est géométrique de raison $q=0{,}36$ et de premier terme :

$$a_0=t_0-0{,}453125=0{,}9-0{,}453125=0{,}446875$$

d.3. Comme la suite (a_n) est géométrique, alors, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_n=a_0\times q^n=0{,}446875\times 0{,}36^n$$

Il vient alors :

$$t_n=a_n+0{,}453125=0{,}446875\times 0{,}36^n+0{,}453125$$

d.4. La limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite (t_n) est donnée par :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} t_n&=\lim_{n\to+\infty} 0{,}446875\times\boxed{0{,}36^n}+0{,}453125\\&=0{,}446875\times 0^+ +0{,}453125=0^+ +0{,}453125=0{,}453125=\frac{29}{64}\end{aligned}$$

Ce résultat est égal au coefficient t de l'état stable P. Logique ! Dans les deux cas, nous avons cherché ce qu'il adviendrait de la suite (t_n) à lorsque n s'en allait vers l'infini.

d.5. On cherche les valeurs de n pour lesquelles :

$$\begin{aligned}t_n<0{,}46 &\Leftrightarrow 0{,}446875\times 0{,}36^n+0{,}453125<0{,}46\\&\Leftrightarrow 0{,}446875\times 0{,}36^n<0{,}006875 \Leftrightarrow 0{,}36^n<\frac{0{,}006875}{0{,}446875}\approx 0{,}01539\\&\Leftrightarrow \ln\left(0{,}36^n\right)<\ln(0{,}01539) \Leftrightarrow n\times\ln(0{,}36)<\ln(0{,}01539)\\&\Leftrightarrow n>\frac{\ln(0{,}01539)}{\ln(0{,}36)}\approx 4{,}086\end{aligned}$$

Conclusion : la probabilité t_n devient inférieure à 0,46 lorsque n est supérieur ou égal à 5, c'est-à-dire à partir du sixième jour de classe.

Et l'année prochaine, ce sera vachement plus pire !

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du jeudi 14 juillet 2016.

Le petit mot de l'auteur :

Cette année, ça va mieux...pour les résultats du bac car ils n'ont jamais été aussi bons. Preuve que la politique de Madame LA Ministre porte ses fruits. Avec sa réforme des collèges, les taux de réussite seront encore meilleurs.
Cette année encore, j'ai eu l'immense honneur d'être réquisitionné pour le bac mais en section ES. Une immense joie aussi !
Contrairement aux sessions précédentes, le sujet de mathématiques de cette année était en relative adéquation avec le programme de la série et le niveau des élèves; point d'exercice venu d'ailleurs ou plutôt de nulle part.
Après que les élèves eurent composé, il a fallu corriger leurs copies. Exactement, cinquante-et-une copies...à avaler en quatre jours et demi. Autant dire qu'il ne fallait pas être trop regardant sur la rédaction des réponses. Le barème concocté par nos grands ayatollahs était d'ailleurs dans cet esprit.
Cette année, il était interdit de laisser la moindre trace de correction, la moindre notation sur les productions des candidats car l'institution tient à se prémunir contre les recours. Cela étant, les correcteurs corrigeant dans «l'intérêt des élèves» c'est-à-dire contre l'exigence et la qualité, ceux-ci sont finalement rarement perdants.
J'ai enfin compris à quoi servait le bac : à produire des bacheliers qui font ensuite des statistiques dont se gargarisent de grands esprits qui ont renoncé à enseigner mais qui nous disent comment le faire.
L'épilogue de cette sinistre farce se déroulera des mois plus tard quand, loin des caméras, les nouveaux bacheliers quitteront l'université parce qu'ils avaient un niveau insuffisant en y entrant.

Jérôme Onillon

Au sommaire aussi, ça va mieux !

Analyse 1
Exponentielle, primitive et logarithme 1
Formes et méformes : convexité 3
Reformes et déformes : reconvexité 5
Nouvelles aires 6
Probabilités et échantillonnage 8
En voiture Simone ! 8
Prof improbables : la vie continue...ou pas ! 9
Probabilités et échantillonnages selon Toto 12
Suites 15
Histoires courtes de suites 15
Placement et position 16
Spécialité 18
Systèmes m... 18
Etat improbable 19

Tous les exercices présents dans ce recueil, énoncés et corrigés, ont été conçus ou mis en forme par Jérôme Onillon, prof de maths à ce qu'il paraît.
L'auteur ne saurait garantir la conformité du programme de mathématiques de terminale ES à ses exercices.
Aucune exploitation commerciale n'est autorisée.