Algorithmique

C'est aux programmes !

L'énoncé

a. On considère l'algorithme suivant :

```
a, s et i sont trois entiers relatifs
s=0
a=0
Pour i=3 jusqu'à 5
        a=a+i
        Si a est divisible par 4 alors s=s+a
                                sinon s=a-s
s=s+1
```

Exécuter l'algorithme précédent (on détaillera les étapes) et conclure en donnant la valeur finale de la variable *s*.

b. On considère l'algorithme suivant :

```
n et s sont deux entiers naturels
n=1
s=1
Tant que s<50 faire
        n=n+1
        s=s+n²
s=s-4
```

Exécuter l'algorithme précédent (on détaillera les étapes) et conclure en donnant la valeur finale de la variable *s*.

Le corrigé

a. Exécutons l'algorithme proposé :

Instruction et commentaire	*a*	*i*	*s*
s=0 a=0	0	?	0
Pour i=3 :	0	3	0
a=a+i $=0+3=3$	3	3	0
Comme a n'est pas divisible par 4 sinon s=a-s $=3-0=3$	3	3	3
Pour i=4 :	3	4	3
a=a+i $=3+4=7$	7	4	3
Comme a n'est pas divisible par 4 sinon s=a-s $=7-3=4$	7	4	4
Pour i=5 :	7	5	4
a=a+i $=7+5=12$	12	5	4
Comme a est divisible par 4 alors s=s+a $=4+12=16$	12	5	16
s=s+1 $=16+1=17$	12	5	17

Conclusion : à l'issue de l'exécution de l'algorithme, la variable s vaut 17.

b. Exécutons l'algorithme proposé :

Instruction et commentaire	*n*	*s*
s=1 n=1	1	1
Tant que : comme s<50 on entre dans la boucle	1	1
n=n+1 $=2$	2	1
s=s+n² $=1+2^2=5$	2	5
Tant que : comme s<50 on entre dans la boucle	2	5
n=n+1 $=2+1=3$	3	5
s=s+n² $=5+3^2=14$	3	14
Tant que : comme s<50 on entre dans la boucle	3	14
n=n+1 $=3+1=4$	4	14
s=s+n² $=14+4^2=30$	4	30
Tant que : comme s<50 on entre dans la boucle	4	30
n=n+1 $=4+1=5$	5	30
s=s+n² $=30+5^2=55$	5	55
Tant que : comme s≥50 on casse et passe la boucle	5	55
s=s-4 $=55-4=51$	5	51

Conclusion : à l'issue de l'exécution de l'algorithme, la variable s vaut 51.

Calculs littéraux, équations et inéquations

On ne peut plus compter sur personne

L'énoncé

a. Résoudre dans ℝ l'inéquation du premier degré suivante. On conclura la résolution en donnant son ensemble des solutions.

$$10x-3\times(4x-1)\geq 7\times(x+2)-8$$

b. La fonction *f* est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=x^2-10x+5$$

Pour chacune des quatre questions suivantes, on détaillera les calculs. Un résultat seul ne sera pas accepté.

1. Calculer l'image de -3 par la fonction *f*.
2. Calculer $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$.
3. Déterminer le ou les antécédents de 5 par la fonction *f*.
4. Déterminer le ou les antécédents de -4 par la fonction *f*.

Le corrigé

a. Résolvons cette première équation qui est du premier degré.

$$10x\underbrace{-3\times(4x-1)}_{\text{On distribue }-3}\geq \underbrace{7\times(x+2)}_{\text{On distribue }7}-8 \Leftrightarrow 10x-12x+3\geq 7x+14-8$$

$$\Leftrightarrow -2x+3\geq 7x+6$$

$$\Leftrightarrow -2x-7x\geq 6-3$$

$$\Leftrightarrow -9x\geq 3 \xrightarrow[\text{L'ordre change}]{\div(-9)} x\leq\frac{3}{-9}=-\frac{1}{3}$$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inyéquation est l'intervalle :

$$S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$$

b.1. Calculons l'image de -3 par la fonction *f*.

$$f(-3)=(-3)^2-10\times(-3)+5=9+30+5=44$$

b.2. Calculons l'image de $2/3$ par la fonction *f*.

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2-10\times\left(\frac{2}{3}\right)+5=\frac{4}{9}-\frac{20}{3}+5=\frac{4}{9}-\frac{20\times 3}{3\times 3}+\frac{5\times 9}{9}=\frac{4-60+45}{9}=-\frac{11}{9}$$

b.3. Pour connaître les réels x dont l'image par la fonction *f* est égale à 5, nous devons résoudre dans ℝ l'équation du second degré :

$$f(x)=5 \Leftrightarrow x^2-10x+\cancel{5}=\cancel{5} \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x}\times x-10\times\boxed{x}}_{\text{Facteur...}}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x}\times(x-10)}_{\text{...commun }x}=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{x\times(x-10)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x=0 \quad \text{ou} \quad x-10=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

$$x=10$$

On factorise en utilisant la méthode du facteur commun.

Conclusion : 5 a deux antécédents par la fonction *f*; il s'agit de 0 et 10.

b.4. Pour déterminer les antécédents de -4 par la fonction *f*, nous devons résoudre l'équation du second degré :

$$f(x)=-4 \Leftrightarrow x^2-10x+5=-4 \Leftrightarrow x^2-10x+5+4=0 \Leftrightarrow x^2-10x+9=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2-2\times x\times 5}_{\text{Début d'une identité...}}+9=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-2\times x\times 5+5^2}_{\text{...remarquable}}-25+9=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-5)^2}-16=0$$

On factorise en utilisant la méthode de la forme canonique.

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x-5)^2-4^2}^{\text{Identité }a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \overbrace{[(x-5)+4]}^{(a+b)}\times\overbrace{[(x-5)-4]}^{(a-b)}=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x-1)\times(x-9)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x-1=0 \quad \text{ou} \quad x-9=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

$$x=1 \qquad x=9$$

Conclusion : -4 a deux antécédents par la fonction *f* qui sont 1 et 9 .

Une fonction comme avant

L'énoncé

La fonction h est définie pour tout réel x par :

$$h(x)=x^2+20x+20$$

On détaillera les calculs pour chacune des trois questions suivantes.

a. Calculer les images de -2 et de $\frac{2}{3}$ par la fonction h.

b. Déterminer le ou les antécédents de 1 par la fonction h.

c. Déterminer le ou les antécédents de 20 par la fonction h.

Le corrigé

a. Calculons les deux images demandées :

$$h(-2)=(-2)^2+20\times(-2)+20=4-40+20=\boxed{-16}$$

$$h\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+20\times\frac{2}{3}+20=\frac{4}{9}+\frac{40}{3}+20=\frac{4+40\times3+20\times9}{9}=\frac{4+120+180}{9}=\boxed{\frac{304}{9}}$$

b. Pour déterminer les antécédents de 1 par la fonction h, nous devons résoudre l'équation du second degré :

$$h(x)=1 \Leftrightarrow x^2+20x+20=1 \Leftrightarrow x^2+20x+20-1=0 \Leftrightarrow x^2+20x+19=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2+2\times x\times10}_{\text{Début d'une identité...}}+19=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2\times x\times10+10^2}_{\text{...remarquable}}-100+19=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+10)^2}-81=0$$

On factorise en utilisant la méthode de la forme canonique.

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x+10)^2-9^2}^{\text{Identité } a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \overbrace{\left[(x+10)+9\right]}^{(a+b)}\times\overbrace{\left[(x+10)-9\right]}^{(a-b)}=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x+19)\times(x+1)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x+19=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad x+1=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

$$x=\boxed{-19} \qquad x=\boxed{-1}$$

<u>Conclusion :</u> 1 a deux antécédents par la fonction h qui sont -19 et -1 .

c. Pour connaître les réels x dont l'image par la fonction h est égale à 20, nous devons résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation du second degré :

$$h(x)=20 \Leftrightarrow x^2+20x+\cancel{20}=\cancel{20} \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x}\times x+20\times\boxed{x}}_{\text{Facteur...}}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x}}_{\text{...commun } x}\times(x+20)=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{x\times(x+20)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x=\boxed{0} \quad \underline{\text{ou}} \quad x+20=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

$$x=\boxed{-20}$$

On factorise en utilisant la méthode du facteur commun.

<u>Conclusion :</u> 20 a deux antécédents par la fonction h; il s'agit de -20 et 0.

Langue de signes

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les quatre inéquations suivantes. On conclura chacune d'elles en donnant l'ensemble des solutions :

a. $-x\times(3x+9)\times(2-x)\leq 0$ **b.** $25>(5x-4)^2$

c. $6x\geq x^2$ **d.** $x^2<13-12x$

Le corrigé

a. Résoudre la première inéquation, c'est savoir quand le produit $-x\times(3x+9)\times(2-x)$ est négatif ou nul. Examinons les trois facteurs affines le constituant :

- Le facteur affine $-x=\underbrace{-1}_{a}\times x+\underbrace{0}_{b}$ a pour coefficient directeur le négatif -1 et s'annule lorsque $-x=0 \Leftrightarrow x=0$.
- $3x+9$ a pour coefficient directeur 3 qui est positif et s'annule lorsque $3x+9=0 \Leftrightarrow 3x=-9 \Leftrightarrow x=\frac{-9}{3}=-3$
- Le facteur affine $-x+2$ a pour coefficient directeur le négatif -1 et s'annule lorsque $-x+2=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$

Ce travail préalable ayant été fait, le tableau de signe du produit est le suivant :

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$3x+9$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est négatif ou nul avant -3, puis entre 0 et 2 inclus. Nous en concluons que l'ensemble des solutions est :

$$S=]-\infty;-3]\cup[0;2]$$

b. Pour résoudre cette deuxième inéquation, nous suivrons la stratégie suivante : tout ramener à gauche, puis factorisation pour avoir à se prononcer sur le signe d'un produit.

$$25>(5x-4)^2 \Leftrightarrow \overbrace{5^2-(5x-4)^2}^{a^2-b^2}>0 \Leftrightarrow \overbrace{[5+(5x-4)]}^{(a+b)}\times\overbrace{[5-(5x-4)]}^{(a-b)}>0$$

$$\Leftrightarrow [5+5x-4]\times[5-5x+4]>0 \Leftrightarrow [5x+1]\times[-5x+9]>0$$

Examinons les facteurs affines constituant le produit du membre de gauche.

- Le facteur affine $5x+1$ a pour coefficient directeur le positif 5 et s'annule lorsque $5x+1=0 \Leftrightarrow 5x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{5}=-0,2$.
- Le facteur affine $-5x+9$ a pour coefficient directeur le négatif -5 et s'annule lorsque $-5x+9=0 \Leftrightarrow -5x=-9 \Leftrightarrow x=\frac{-9}{-5}=1,8$.

Nous en déduisons que le tableau de signe du produit de ces deux facteurs est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$\frac{9}{5}$		$+\infty$
$5x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-5x+9$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions est :

$$S=]-0,2;1,8[$$

c. Pour résoudre cette troisième inéquation, nous procéderons comme pour la précédente.

$$6x\geq x^2 \Leftrightarrow 6x-x^2\geq 0 \Leftrightarrow \overbrace{6\times\boxed{x}-x\times\boxed{x}}^{\text{Facteur...}}\geq 0 \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x}}^{\text{...commun}}\times(6-x)\geq 0$$

Examinons les facteurs affines composant le produit constituant le membre de gauche.

- Le facteur affine $x=\underbrace{1}_{a}\times x+\underbrace{0}_{b}$ a pour coefficient directeur 1 et s'annule en 0.
- Le facteur affine $-x+6$ a pour coefficient directeur le négatif -1 et s'annule lorsque $-x+6=0 \Leftrightarrow -x=-6 \Leftrightarrow x=6$

Nous en déduisons que le tableau de signe du produit de ces deux facteurs est :

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+6$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous en concluons que l'ensemble des solutions est : $S=[0;6]$

d. Pour résoudre cette dernière inéquation, nous recommençons la stratégie précédente.

$$x^2+12x-13<0 \Leftrightarrow \overbrace{x^2+2\times x\times 6+6^2}^{\text{Identité...}}-6^2-13<0 \Leftrightarrow \overbrace{(x+6)^2}^{\text{...remarquable}}-36-13<0$$

$$\Leftrightarrow (x+6)^2-49<0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x+6)^2-7^2}^{\text{Différence de...}}<0 \Leftrightarrow \overbrace{[(x+6)+7]\times[(x+6)-7]}^{\text{...deux carrés.}}<0$$

$$\Leftrightarrow (x+13)\times(x-1)<0$$

Le tableau de signe de ce produit est le suivant :

x	$-\infty$		-13		1		$+\infty$
$x+13$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est négatif entre -13 et 1 exclus. Donc, l'ensemble des solutions est :

Effractions signées

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{3x-6}{4x\times(2-x)}\leq 0$ **b.** $\dfrac{3x+1}{x+5}\geq 5$ **c.** $\dfrac{x-11}{x-2}+\dfrac{20}{x-3}<0$

Le corrigé

a. Quand le quotient du membre de gauche est-il négatif ou nul ? C'est la question posée par la première inéquation.
Le tableau de signe du quotient est celui ci-contre ⇨
L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{S=]0;2[\cup]2;+\infty[}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x-6$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$4x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
Leur quotient		$+$	||	$-$	||	$-$	

b. Cette deuxième inéquation se résout en ramenant tout dans un seul membre, puis avec une mise au même dénominateur, on est amené à se prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{3x+1}{x+5}\geq 5 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x+5}-5\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1-5\times(x+5)}{x+5}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1-5x-25}{x+5}\geq 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{-2x-24}{x+5}\geq 0}$$

Le tableau de signe de ce dernier quotient est celui ci-contre ⇨
Le quotient est positif ou nul entre -12 inclus et -5 exclu.
Nous en concluons :

$$\boxed{S=[-12;-5[}$$

x	$-\infty$		-12		-5		$+\infty$
$-2x-24$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x+5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur quotient		$-$	0	$+$	||	$-$	

c. Cette troisième inéquation se résout comme la précédente...en un peu plus compliqué !

$$\frac{x-11}{x-2}+\frac{20}{x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-11)\times(x-3)+20\times(x-2)}{(x-2)\times(x-3)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x-11x+33+20x-40}{(x-2)\times(x-3)}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6x-7}{(x-2)(x-3)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\boxed{x^2+2\times x\times 3-7}}{(x-2)(x-3)}<0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)^2-9-7}{(x-2)(x-3)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2-16}{(x-2)(x-3)}<0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)^2-4^2}{(x-2)(x-3)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(x+3)+4]\times[(x+3)-4]}{(x-2)(x-3)}<0 \Leftrightarrow \frac{[x+7]\times[x-1]}{(x-2)(x-3)}<0$$

Le tableau de signe de cette inéquation est celui ci-dessous :

x	$-\infty$		-7		1		2		3		$+\infty$
$x+7$		–	0	+		+		+		+	
$x-1$		–		–	0	+		+		+	
$x-2$		–		–		–	0	+		+	
$x-3$		–		–		–		–	0	+	
Leur quotient		+	0	–	0	+	‖	–	‖	+	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions est :

$$S=[-7;1]\cup]2;3[$$

Candidat du système

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système de deux équations à deux inconnues x et y :

$$(S)\begin{cases} 7x-4y=13 & \textbf{(1)} \\ 6x+5y=28 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Indication : les solutions du système sont des entiers.

Le corrigé

Nous allons résoudre le système (S) par un double coup de combinaisons linéaires :

Pour obtenir x, on vise l'élimination des y.

$$\begin{aligned} \textbf{(1)} &\xrightarrow{\times 5} 35x-20y=65 \\ \textbf{(2)} &\xrightarrow{\times 4} 24x+20y=112 \quad \oplus \\ &\qquad 59x=177 \\ &\qquad x=\frac{177}{59}=3 \end{aligned}$$

Pour trouver y, on vise la suppression des x.

$$\begin{aligned} \textbf{(1)} &\xrightarrow{\times 6} 42x-24y=78 \\ \textbf{(2)} &\xrightarrow{\times 7} 42x+35y=196 \quad \ominus \\ &\qquad -59y=-118 \\ &\qquad y=\frac{-118}{-59}=2 \end{aligned}$$

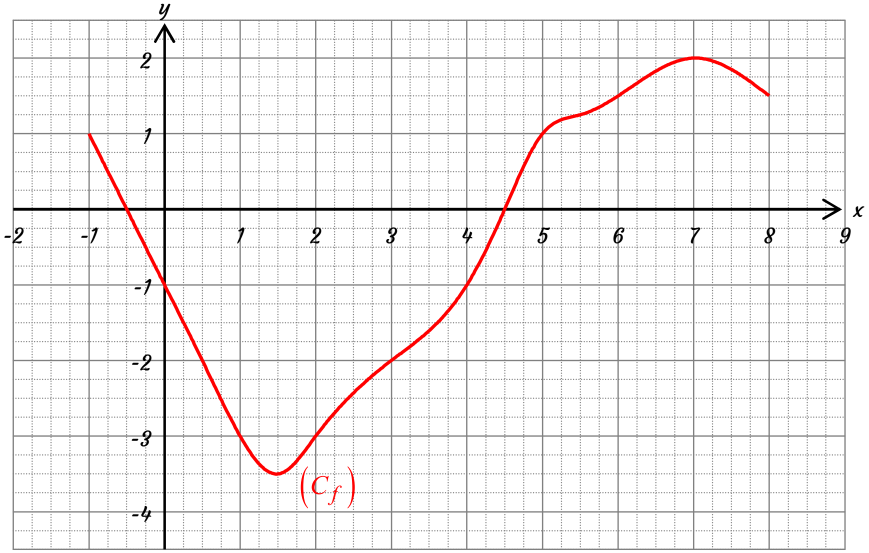
Conclusion : le système (S) a pour unique solution le couple $(\underbrace{3}_{x}\ ;\ \underbrace{2}_{y})$.

Fonctions

Une fonction par un graphique

L'énoncé

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe $\left(C_f\right)$ représentant la fonction f qui est définie sur l'intervalle $[-1;8]$.



A partir du graphique précédent, on répondra directement sur la présente feuille aux questions suivantes avec toute la précision permise par ce premier. Aucune justification n'est demandée.

a. Compléter ce qui suit :

1. L'(les) antécédent(s) de -2 par la fonction f est (sont)……………………

2. Le minimum de f sur l'intervalle $[-1;8]$ est……… Il est atteint en $x=$ ………

3. L'(les) image(s) de -2 par la fonction f est (sont)……………………

4. Le maximum de f sur l'intervalle $[-1;4]$ est……… Il est atteint en $x=$ ………

5. L'(les) image(s) de 0 par la fonction f est (sont)……………………

6. L'(les) antécédent(s) de -4 par la fonction f est (sont)……………………

7. La (les) solution(s) de l'équation $f(x)=1$ est (sont)……………………

8. $f(3,25)=$ ……………………

b. Compléter le tableau de variation suivant résumant les variations de la fonction f sur son ensemble de définition :

x	
f	

c. Compléter le tableau de signe suivant résumant le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.

x	
$f(x)$	

d. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$f(x)\leq -1$	$f(x)>1$
S = ……………………	S = ……………………
$f(x)>-4$	$-3\leq f(x)<-2$
S = ……………………	S = ……………………

Le corrigé

a. Avant toutes choses, rappelons que tous les points de la courbe $\left(C_f\right)$ ont des coordonnées de la forme $\underbrace{(x;f(x))}_{\text{Un nombre et son image}}$.

1. Les antécédents de -2 sont les abscisses des points de la courbe $\left(C_f\right)$ d'ordonnée -2. Par suite, -2 a deux antécédents qui sont $0,5$ et environ 3.
2. Le point le plus bas de la courbe sur l'intervalle $[-1;8]$ a pour coordonnées $(1,5;-3,5)$. Donc le minimum de *f* sur $[-1;8]$ est $-3,5$ et est atteint en $x=1,5$.
3. -2 n'appartenant pas à l'ensemble de définition $[-1;8]$, il n'a pas d'image par la fonction *f*.
4. Sur l'intervalle $[-1;4]$, le point le haut de la courbe a pour coordonnées $(-1;1)$. Ainsi, le maximum de *f* sur $[-1;4]$ est 1; il est atteint en $x=-1$.
5. L'image de 0 par *f* est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0.
Donc, l'image de 0 par *f* est égale à -1. Ce que l'on résume par $f(0)=\underline{-1}$.
6. Aucun point de la courbe $\left(C_f\right)$ n'a pour ordonnée -4. Ce dernier n'a pas d'antécédent par la fonction *f*.
7. Deux points de la courbe ont leurs ordonnées $f(x)$ égales à 1. Ils ont pour abscisses -1 et 5. Ce sont les deux solutions de l'équation $f(x)=1$.
8. L'ordonnée du point de la courbe $\left(C_f\right)$ d'abscisse $-3,25$ vaut environ $-1,8$.
Nous en déduisons : $f(-3,25)\approx\underline{-1,8}$

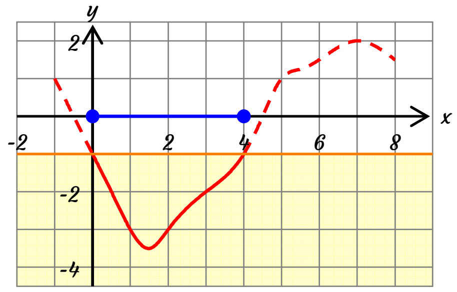
b. Le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[-1;8]$ est :

x	-1		$1,5$		7		8
f	1	↘	$-3,5$	↗	2	↘	$1,5$

c. Le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-1;8]$ est :

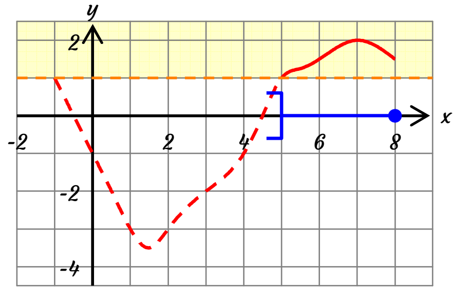
x	-1		$-0,5$		$4,5$		8
$f(x)$		+	0	–	0	+	

d.1. Pour résoudre l'inéquation $f(x)\leq -1$, nous devons considérer les abscisses *x* de tous les points de la courbe $\left(C_f\right)$ dont les ordonnées $f(x)$ sont inférieures ou égales à -1.
Ces abscisses *x* sont comprises entre 0 et 4 inclus. L'ensemble des solutions de cette inéquation est $[0;4]$.



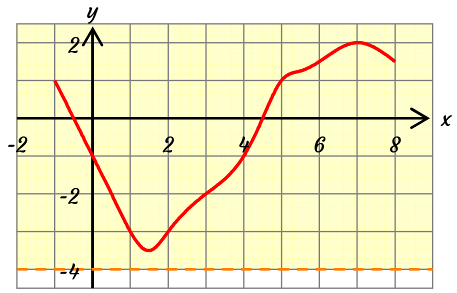
d.2. Les solutions de l'inéquation $f(x)>1$ sont les abscisses *x* des points de la courbe $\left(C_f\right)$ dont les ordonnées $f(x)$ sont strictement inférieures à 1.
Par lecture graphique, nous obtenons :

$$S=\underline{]5;8]}$$



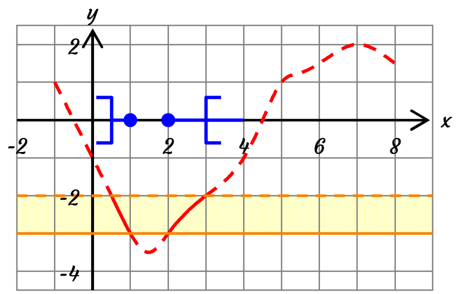
d.3. Tous les points de la courbe $\left(C_f\right)$ ayant une ordonnée $f(x)$ strictement plus grande que -4, tous les réels *x* de l'ensemble de définition de *f* sont solutions de l'inéquation.
Nous concluons :

$$S=\underline{[-1;8]}$$



d.4. Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe $\left(C_f\right)$ dont l'ordonnée $f(x)$ est située entre -3 inclus et -2 exclu.
Nous concluons que l'ensemble des solutions est :

$$S=\underline{]0,5;1]\cup[2;3[}$$



Les fonctions affines attaquent !

L'énoncé

a. La fonction affine *f* est définie pour tout réel x par :

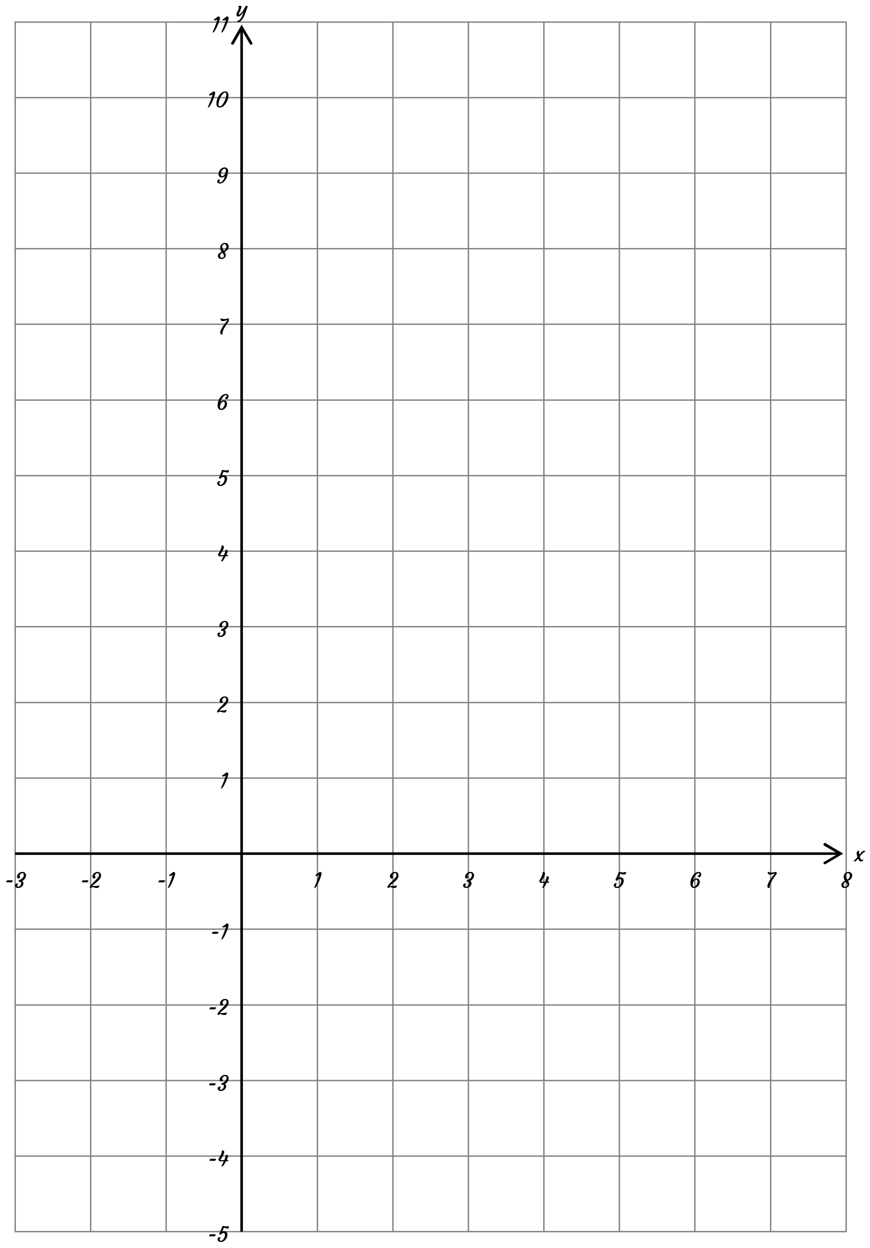
$$f(x) = \frac{5}{3} \times x - 2$$

1. Calculer les images $f(0)$ et $f(6)$.
2. Déterminer le ou les antécédents de 7 par la fonction *f*.
3. Tracer la courbe (C_f) représentant la fonction affine *f* sur le graphique ci-contre.

b. *g* est une fonction affine dont on ignore l'expression. Cependant, on sait d'elle que :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Le coefficient directeur de la fonction } g \text{ est égal à } -4 \\ g(1) = 5 \end{array} \right.$$

1. Tracer la courbe (C_g) représentant la fonction affine *g* sur le graphique ci-contre.
2. Sans justification, donner l'ordonnée à l'origine de la fonction affine *g*.
   En déduire l'expression de la fonction *g*.

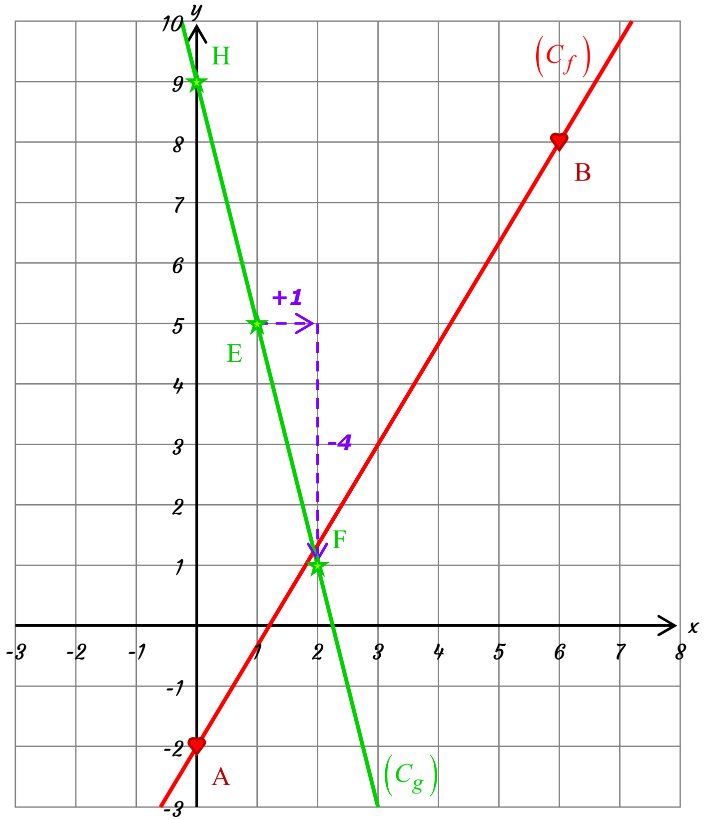


Le corrigé

a.1. Calculons les deux images demandées :

$f(0)=\frac{5}{3}\times 0-2=0-2=-2$ donc la courbe (C_f) passe par le point $A(0;-2)$

$f(6)=\frac{5}{3}\times 6-2=\frac{30}{3}-2=10-2=8$ donc (C_f) passe par le point $B(6;8)$



a.2. Pour déterminer le ou les antécédents de 7 par la fonction *f*, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x)=7 \Leftrightarrow \frac{5}{3}\times x-2=7 \Leftrightarrow \frac{5}{3}\times x=9 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5/3}\times 9=\frac{3}{5}\times 9=\frac{27}{5}=5,4$$

Conclusion : 7 a un seul antécédent par la fonction *f* qui est 5,4.

a.3. La courbe (C_f) de la fonction affine *f* est une droite passant par les points A et B de coordonnées $A(0;-2)$ et $B(6;8)$.

b.1. La courbe (C_g) est une droite passant par le point E de coordonnées $(1;5)$ car nous savons que $g(1)=5$.

On obtient un second point de la droite (C_g) en utilisant le coefficient directeur -4 : lorsque l'on progresse d'une unité en abscisse, on baisse de -4 en ordonnée; partant du point E, on aboutit au point F de coordonnées $(2;1)$. Il ne reste alors plus qu'à tracer la droite (C_g).

b.2. La droite (C_g) franchit l'axe des ordonnées (Oy) au point H d'ordonnée 9. C'est l'ordonnée à l'origine de la fonction affine *g* dont l'expression est donc :

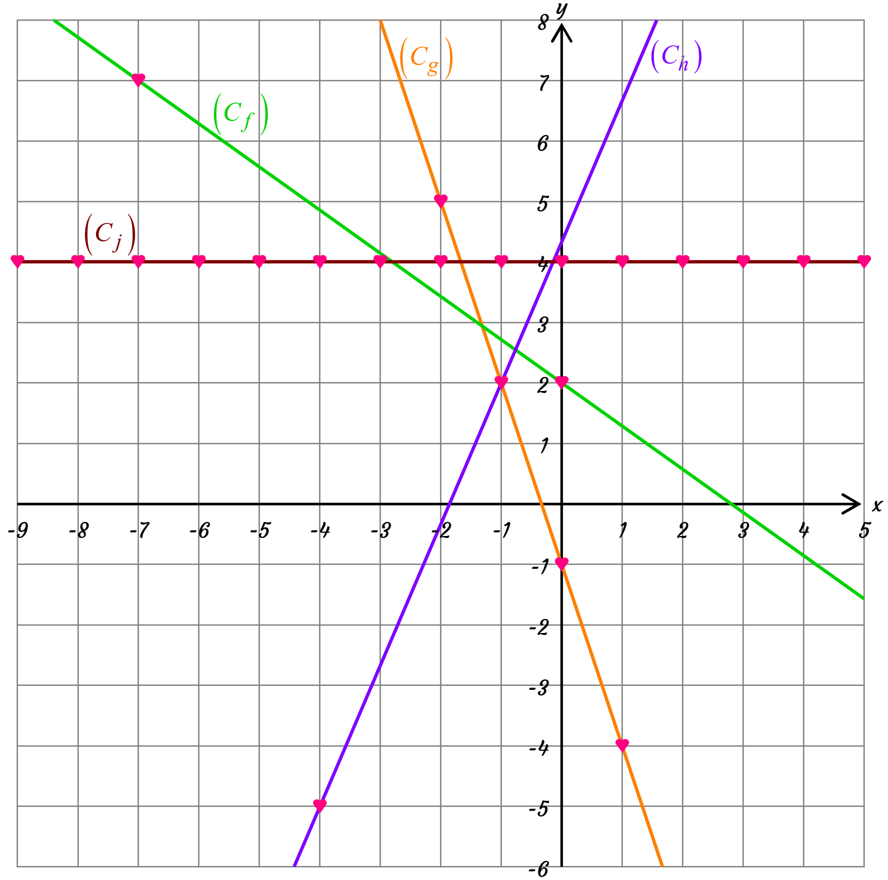
$$g(x)=-4x+9$$

Expressions droitières

L'énoncé

Déterminer les expressions des fonctions affines f, g, h et j dont les courbes représentatives nommées $\left(C_f\right)$, $\left(C_g\right)$, $\left(C_h\right)$ et $\left(C_j\right)$ ont été tracées sur le graphique ci-dessous.

On a aussi représenté par un coeur tous les points à coordonnées entières par lesquels passent ces quatre courbes.



Le corrigé

Toutes les fonctions étant affines, leurs courbes représentatives étant des droites, elles admettent toutes une expression de la forme $ax+b$ où a est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine. Passons en revue les quatre fonctions !

f. Sa courbe coupe l'axe des ordonnées (Oy) au point d'ordonnée 2. Donc $b=\boxed{2}$.

Lorsque l'on progresse de $+7$ en abscisse, on baisse de -5 en ordonnée.

Par conséquent, $a=\frac{-5}{+7}=\boxed{\frac{5}{7}}$. Nous en concluons : $f(x)=\boxed{-\frac{5}{7}x+2=\frac{14-5x}{7}}$

g. Progressant de $+1$ en abscisse, on baisse de -3 en ordonnée. Donc $a=\boxed{-3}$

L'ordonnée à l'origine étant égale à -1, nous en déduisons : $g(x)=\boxed{-3x-1}$

h. Le coefficient directeur de la fonction affine h est égal à $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{+7}{+3}=\boxed{\frac{7}{3}}$

Donc une expression de $h(x)$ est de la forme $h(x)=\frac{7}{3}x+b$.

Son ordonnée à l'origine b ne peut se lire directement mais se détermine sachant :

$$h(-1)=2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{7}{3}\times(-1)+b=2 \quad\Leftrightarrow\quad b=2+\frac{7}{3}=\frac{6}{3}+\frac{7}{3}=\boxed{\frac{13}{3}}$$

Nous en concluons : $h(x)=\boxed{\frac{7}{3}x+\frac{13}{3}=\frac{7x+13}{3}}$

j. La fonction j est une fonction constante, son coefficient directeur a est nul mais son ordonnée à l'origine b est égale à 4. Nous concluons : $j(x)=\boxed{4}$

Les fonctions font référence !

L'énoncé

a. Sur la copie, tracer rapidement des esquisses des courbes des quatre fonctions de référence carré, cube, inverse et racine carrée.

b. Donner les ensembles de solutions dans ℝ des inéquations suivantes. Aucune justification n'est demandée.

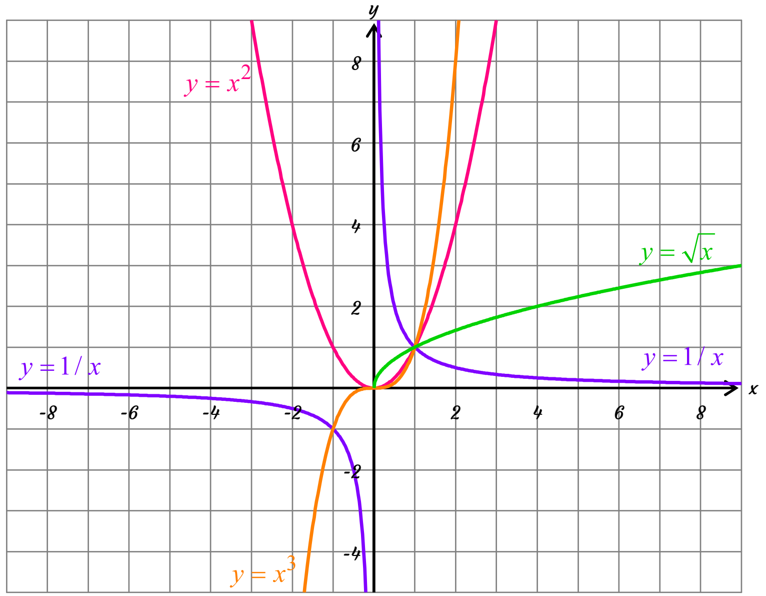
1. $x^3 > 0{,}001$	**2.** $\frac{1}{x} \leq -2$	**3.** $x^2 > 121$
4. $\frac{1}{x} \geq -0{,}25$	**5.** $1 < \sqrt{x} \leq 4$	**6.** $x^2 < 0$

c. A l'aide d'un montage et en s'appuyant sur les variations des fonctions de référence, établir le sens de variation de la fonction $f(x) = 2\times(x-5)^3 - 1$ sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

d. A l'aide d'un montage et en s'appuyant sur les variations des fonctions de référence, établir le sens de variation de la fonction $g(x) = \dfrac{7}{\sqrt{18-2x^2}}$ sur l'intervalle $]-3;0[$.

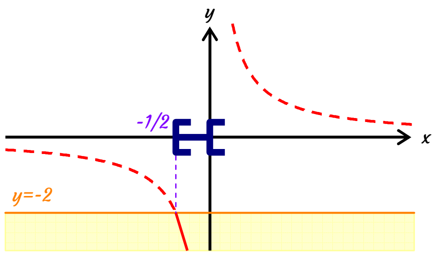
Le corrigé

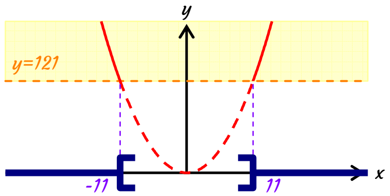
a. Les quatre courbes des fonctions de référence carré, cube, inverse et racine carrée ont été tracées sur le graphique ci-dessous :



b.1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^3 > 0{,}001$ est l'intervalle $]0{,}1;+\infty[$.

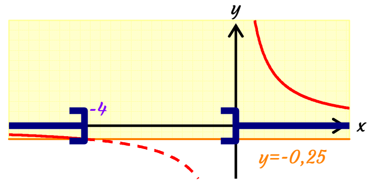
b.2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x} \leq -2$ est l'intervalle $[-0{,}5;0[$. ⇨



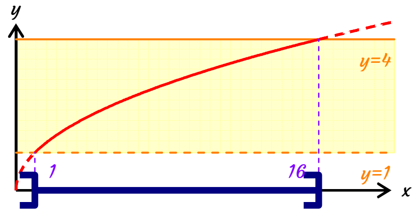


b.3. L'inéquation $x^2 > 121$ a pour ensemble des solutions $]-\infty;-11[\cup]11;+\infty[$.

b.4. L'inéquation $\frac{1}{x} \geq -0{,}25$ a pour ensemble des solutions $]-\infty;-4]\cup]0;+\infty[$.



b.5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $1 < \sqrt{x} \leq 4$ est l'intervalle $]1;16]$. ⇨



b.6. Aucun carré n'étant inférieur ou égal à 0, c'est-à-dire négatif, cette dernière inéquation n'admet pas de solution.

c. Sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$, la fonction *f* est le montage suivant :

$$\underset{\in\mathbb{R}}{x} \xrightarrow[\text{Croissante}]{-5} x-5 \xrightarrow[\text{Croissante sur }\mathbb{R}]{\text{Cube}} (x-5)^3 \xrightarrow[\text{Croissante}]{\times 2} 2\times(x-5)^2$$

$$\xrightarrow[\text{Croissante}]{-1} \underbrace{2\times(x-5)^3-1}_{f(x)}$$

<u>Conclusion :</u> étant la composée ou le montage de quatre fonctions toutes croissantes, la fonction *f* est croissante sur ℝ.

d. Sur l'intervalle $]-3;0[$, la fonction g est le montage ou la composée suivante :

$$\underset{\in]-3;0[}{x} \xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur }]-\infty;0[}]{\text{Carré}} x^2 \xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur } \mathbb{R}}]{\times(-2)} -2x^2 \xrightarrow[\text{Croissante}]{+18} 18-2x^2$$

$$\ldots \xrightarrow[\substack{\text{Croissante}\\ \text{sur }]0;+\infty[}]{\text{Racine carrée}} \sqrt{18-2x^2} \xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur }]0;+\infty[}]{\text{Inverse}} \frac{1}{\sqrt{18-2x^2}} \xrightarrow[\text{Croissante}]{\times 7} g(x)$$

<u>Conclusion :</u> étant la composée ou le montage de trois fonctions décroissantes et les autres étant croissantes, la fonction f est décroissante sur $]-3;0[$.

Géométrie analytique

Penchant analytique

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ non normé et non orthogonal dans lequel on a placé les points suivants :

$A(-2\ ;\ 5)$ $B(5\ ;\ 1)$ $C(-3,7\ ;\ -1)$ $D(-4\ ;\ -2)$

a. Les points A, C et D sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.

b. On appelle E qui est le quatrième sommet du parallélogramme CABE.

1. Construire au compas sur la figure ci-dessous le point E.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E.

c. Calculer les coordonnées du point F qui est le milieu du segment [BD].

d. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G qui est défini par la relation vectorielle

$$3\times\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AD}.$$

e. On appelle Δ la parallèle à la droite (AB) passant par le point D.
H est le point de la droite Δ dont l'abscisse x_H est égale à 1.

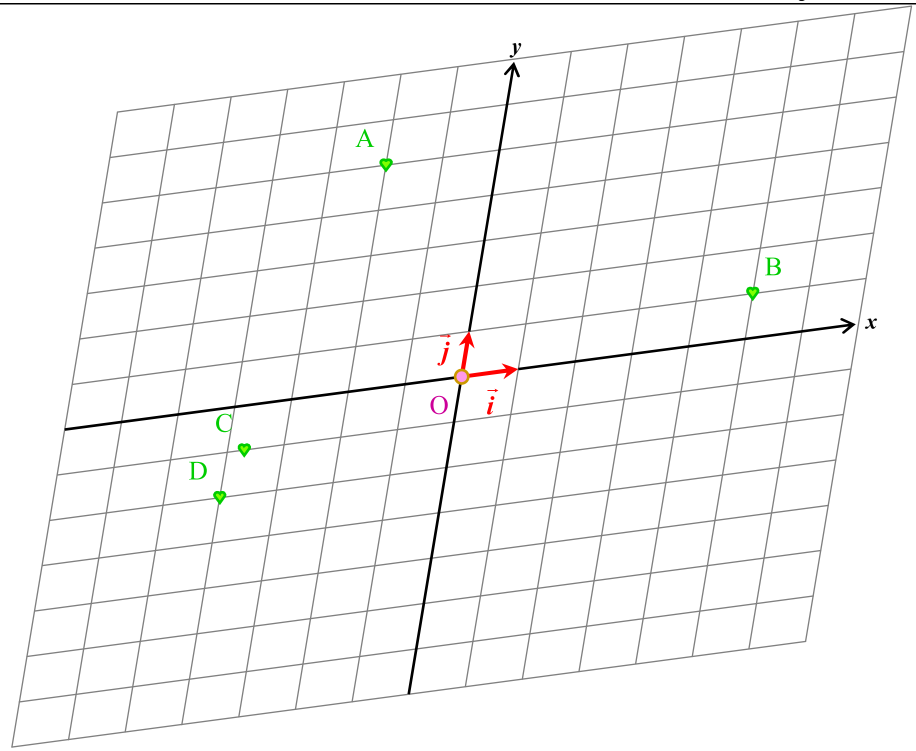
1. Construire la droite Δ, puis placer le point H.
2. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$?
3. Déterminer par le calcul l'ordonnée y_H du point H.

Le corrigé

a. Autrement posée : les vecteurs $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3,7-(-2)=-1,7\\-1-5=-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4-(-2)=-2\\-2-5=-7\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Pour le savoir, calculons leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-1,7 & -2\\-6 & -7\end{vmatrix}=-1,7\times(-7)-(-6)\times(-2)=11,9-12=\underline{-0,1\neq 0}$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
<u>Conclusion :</u> les points A, C et D ne sont pas alignés.



b. Le fait qu'un quadrilatère soit un parallélogramme se traduit par une égalité vectorielle.

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overbrace{\begin{pmatrix}x_E-(-3,7)\\y_E-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-(-2)\\1-5\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}}\Leftrightarrow\overbrace{\begin{matrix}x_E+3,7=7\\x_E=3,3\end{matrix}}^{\text{...abscisses égales,...}}\ \text{et}\ \overbrace{\begin{matrix}y_E+1=-4\\y_E=-5\end{matrix}}^{\text{...ordonnées égales.}}$$

<u>Conclusion :</u> le point E a pour coordonnées $(3,3\ ;\ -5)$. Il est placé sur la figure.

c. Les coordonnées du milieu F du segment [BD] sont données par :

$$x_F=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{5+(-4)}{2}=\frac{1}{2}=\underline{0,5}\quad\text{et}\quad y_F=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{1+(-2)}{2}=\frac{-1}{2}=\underline{-0,5}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du milieu F sont $(0,5\ ;\ -0,5)$.

d. Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$4\times\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\times\begin{pmatrix}x_G+2\\y_G-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_G-5\\y_G-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3x_G+6\\3y_G-15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_G-5\\y_G-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}4x_G+1\\4y_G-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-7\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{4x_G+1=-2}^{\text{...abscisses égales,...}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{4y_G-16=-7}^{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$4x_G=-3 \qquad 4y_G=9$$

$$x_G=\frac{-3}{4}=-0,75 \qquad y_G=\frac{9}{5}=2,25$$

Conclusion : le point G a pour coordonnées $(-0,75\ ;\ 2,25)$.

La question à laquelle vous avez échappé : prouver que les points A, G et F sont alignés; puis, placer le point G.

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-0,75-(-2)=1,25\\2,25-5=-2,75\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}0,5-(-2)=2,5\\-0,5-5=-5,5\end{pmatrix}$ sont colinéaires car les coordonnées du premier multipliées par 2 donnent celles du second.

Une autre méthode consiste à calculer le déterminant de ces deux vecteurs ainsi que cela a été fait lors de la question **a**.

Conclusion : les points A, G et F sont alignés.

Comme $\overrightarrow{AF}=2\times\overrightarrow{AG}$, alors le point G est le milieu du segment [AF]. C'est ainsi qu'on le place.

e. Les coordonnées du point H sont de la forme $(1;y_H)$.

Comme le point H appartient à la droite Δ, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont colinéaires. Donc leur déterminant est nul ! Il vient alors :

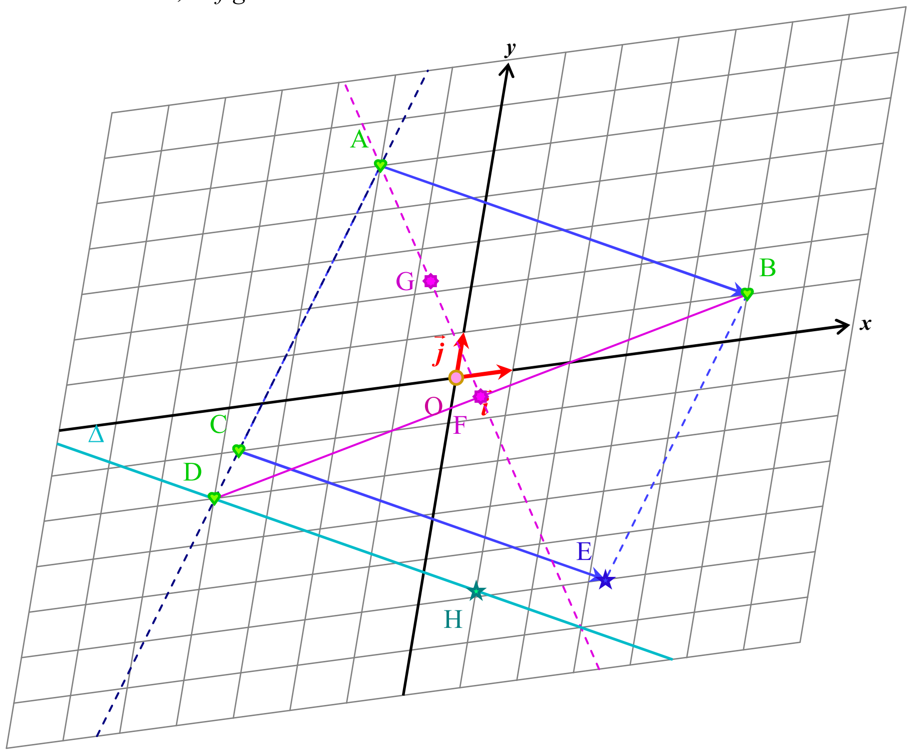
$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DH}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}7 & 5\\-4 & y_H+2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 7\times(y_H+2)-(-4)\times5=0 \Leftrightarrow 7y_H+14+20=0$$

$$\Leftrightarrow 7y_H+34=0 \Leftrightarrow 7y_H=-34 \Leftrightarrow y_H=-\frac{34}{7}$$

Conclusion : les coordonnées du point H sont $\left(1\ ;\ -\frac{34}{7}\right)$.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :

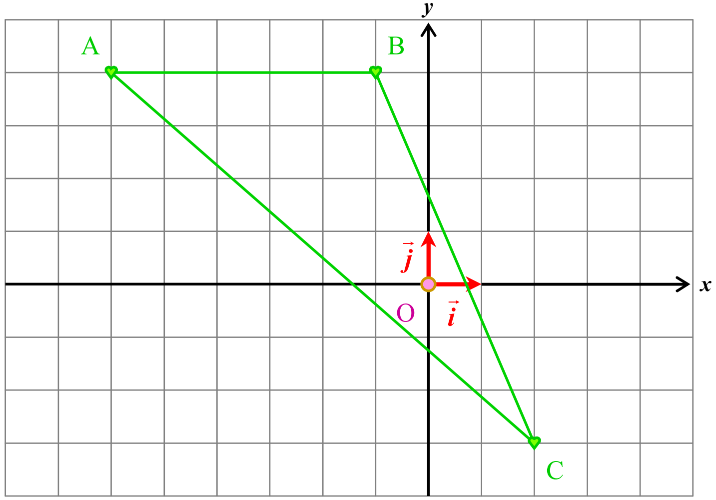


Alignement et parallélisme

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points suivants :

$$A(-6\ ;\ 4) \qquad B(-1\ ;\ 4) \qquad C(2\ ;\ -3)$$



a. Déterminer par le calcul les coordonnées du milieu D du segment [AC].

b. Déterminer par le calcul l'abscisse x_E du point E qui est le point de la droite (BC) dont l'ordonnée y_E est égale à 1.

c. Démontrer que les droites (BD) et (OE) sont parallèles.

Le corrigé

a. Les coordonnées du milieu D du segment [AC] sont données par les formules :

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-6+2}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4+(-3)}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du milieu D sont $(-2;0,5)$.

b. D'abord, les coordonnées du point E sont de la forme $(x_E;1)$.

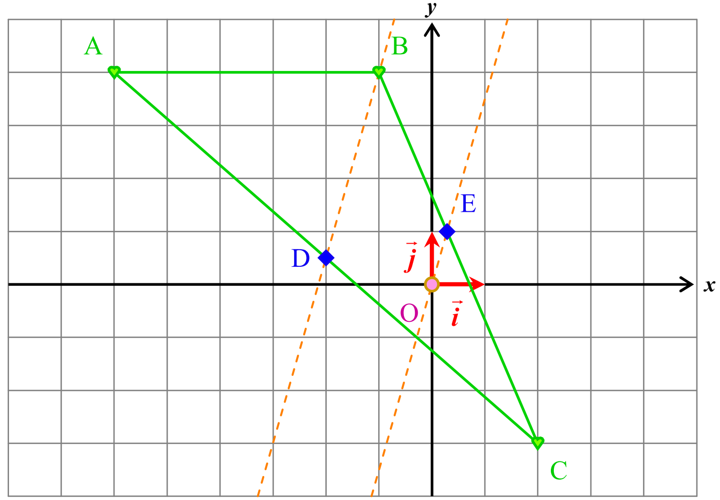
Ensuite, les points B, C et E étant alignés, les vecteurs $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2-(-1)\\-3-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x_E-(-1)\\1-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Donc leur déterminant est nul !

Par suite, nous pouvons écrire :

$$\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}3 & x_E+1\\-7 & -3\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 3\times(-3)-(-7)\times(x_E+1)=0 \Leftrightarrow -9+7x_E+7=0$$
$$\Leftrightarrow 7x_E-2=0 \Leftrightarrow 7x_E=2 \Leftrightarrow x_E=\frac{2}{7}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point E sont $\left(\frac{2}{7};1\right)$

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Gardez vos distances !

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité de longueur un centimètre dans lequel on a placé les points suivants :

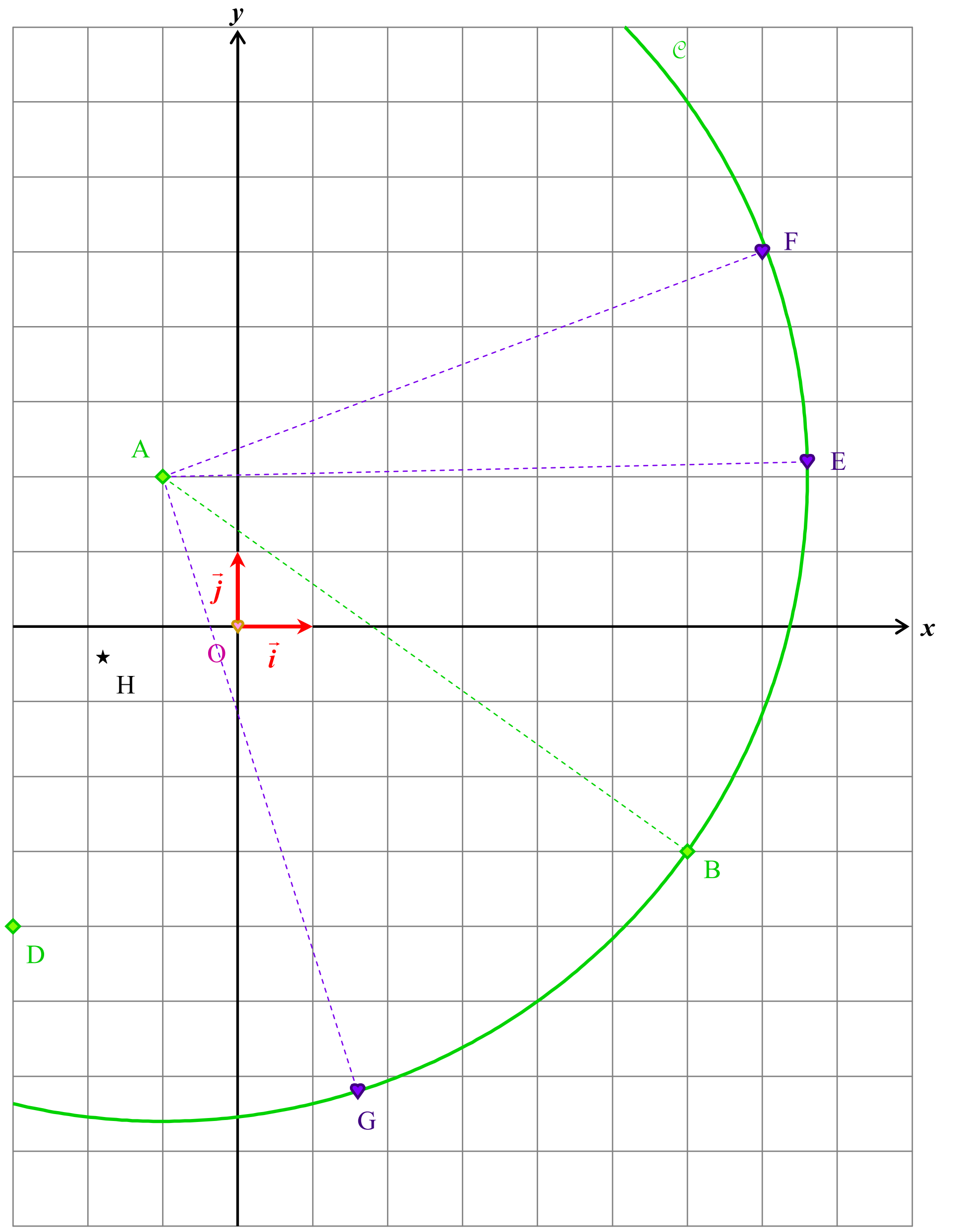
$$A(-1\ ;\ 2) \qquad B(6\ ;\ -3) \qquad D(-3\ ;\ -4)$$

a. On appelle $\mathcal{C}$ le cercle de centre A passant par le point B.

1. Calculer la valeur exacte du rayon du cercle $\mathcal{C}$.
2. Les points $E(7{,}6\ ;\ 2{,}2)$ et $F(7\ ;\ 5)$ appartiennent-ils au cercle $\mathcal{C}$? On justifiera ses réponses par des calculs.
3. Déterminer l'ordonnée y_G du point G qui est le point du cercle $\mathcal{C}$ dont l'abscisse est égale à 1,6 et dont l'ordonnée est négative.

b. On appelle H le point de coordonnées $(-1{,}8\ ;\ -0{,}4)$.

1. Démontrer que le point H appartient à la droite (AD).
2. Prouver que la droite (BH) est la hauteur du triangle ABD issue du sommet B.



Le corrigé

a.1. Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est égal à la distance AB.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-(-1)=7 \\ -3-2=-5 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{7^2+(-5)^2} = \sqrt{49+25} = \boxed{\sqrt{74}\ \text{cm}}$$

Conclusion : le rayon du cercle est de $\sqrt{74} \approx 8{,}6$ centimètres.

a.2. Calculons les distances séparant les points E et F du centre A du cercle $\mathcal{C}$.

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 7{,}6-(-1)=8{,}6 \\ 2{,}2-2=0{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow AE = \sqrt{8{,}6^2+0{,}2^2} = \sqrt{73{,}96+0{,}04} = \boxed{\sqrt{74}\ \text{cm} = \text{rayon}}$$

$$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 7-(-1)=8 \\ 5-2=3 \end{pmatrix} \Rightarrow AF = \sqrt{8^2+3^2} = \sqrt{64+9} = \boxed{\sqrt{73}\ \text{cm} \neq \text{rayon}}$$

Conclusion : le point E appartient au cercle $\mathcal{C}$ mais pas le point F.

a.3. Le point $G(1,6\ ;\ y_G)$ faisant partie du cercle $\mathscr{C}$, la distance AG est égale à $\sqrt{74}$ centimètres.

Cette distance AG peut aussi être exprimée en fonction de l'ordonnée y_G. En effet :

$$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1,6-(-1)=2,6\\ y_G-2\end{pmatrix} \Rightarrow \text{AG}=\sqrt{2,6^2+(y_G-2)^2}=\boxed{\sqrt{6,76+(y_G-2)^2}}$$

Ayant précisé toutes ces choses, nous pouvons écrire :

$$G\in\mathscr{C} \Rightarrow \text{AG}=\sqrt{74}$$
$$\Rightarrow \sqrt{6,76+(y_G-2)^2}=\sqrt{74} \xrightarrow{\text{Carré}} (y_G-2)^2+6,76=74$$
$$\Rightarrow (y_G-2)^2=74-6,76$$
$$\Rightarrow (y_G-2)^2=67,24 \Rightarrow y_G-2=-\sqrt{67,24} \quad \underline{\text{ou}} \quad y_G-2=\sqrt{67,24}$$
$$y_G=2-8,2 \qquad y_G=2+8,2$$
$$y_G=\boxed{-6,2} \qquad y_G=10,2$$

<u>Conclusion :</u> l'ordonnée y_G étant négative, la seule solution possible est $-6,2$. Ainsi les coordonnées du point G sont $(1,6\ ;\ -6,2)$.

b.1. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3-(-1)=-2\\ -4-2=-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1,8-(-1)=-0,8\\ -0,4-2=-2,4\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Pour le savoir, calculons leur déterminant !

$$\det\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AH}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -0,8\\ -6 & -2,4\end{vmatrix}=-2\times(-2,4)-(-6)\times(-0,8)=4,8-4,8=0$$

Leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.
<u>Conclusion :</u> le point H appartient bien à la droite (AD).

b.2. Pour que la droite (BH) soit la hauteur du triangle ABD issue de B, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire au côté opposé (AD).

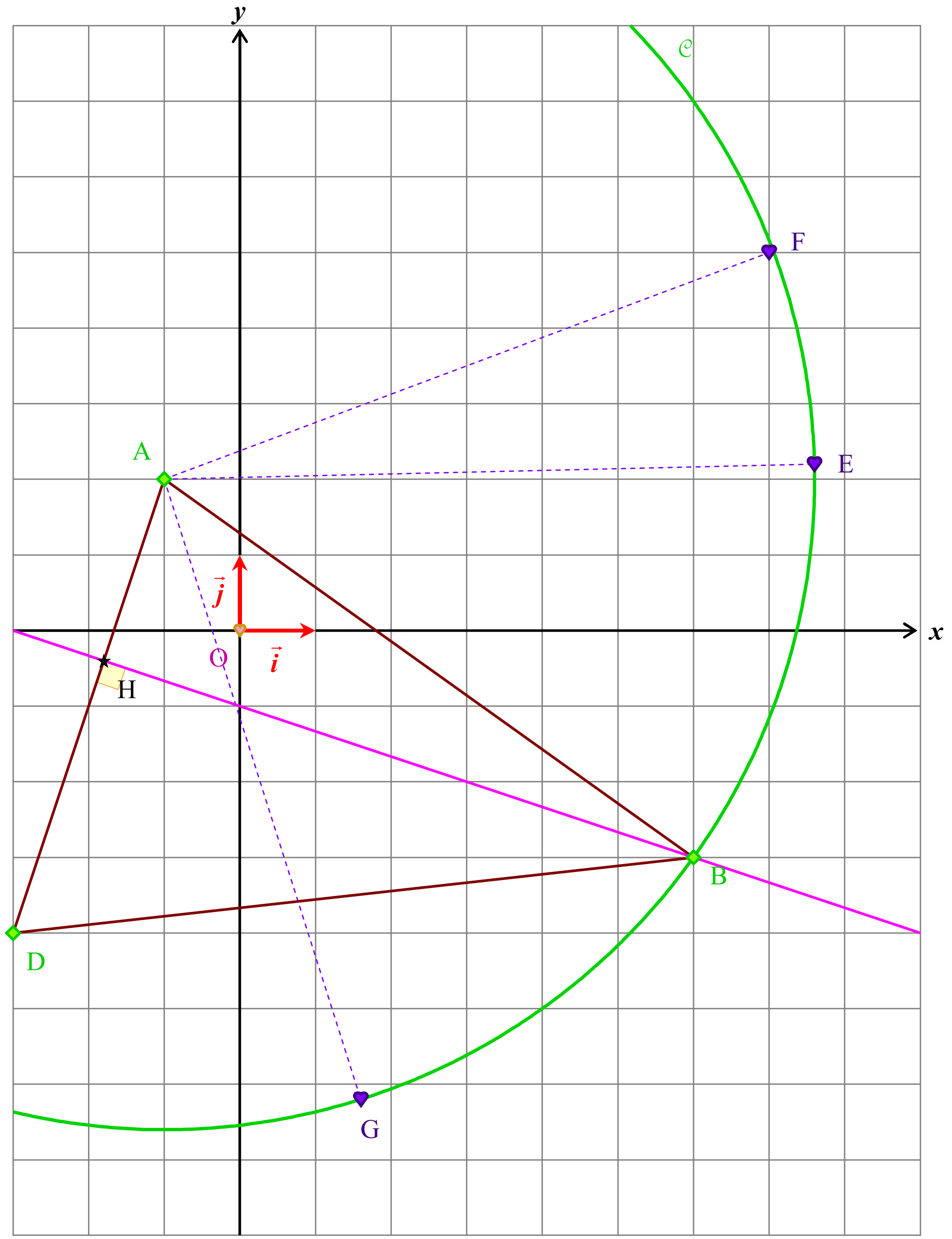
Autrement posé : les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\ -6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1,8-6=-7,8\\ -0,4-(-3)=2,6\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

Effectuons notre test d'orthogonalité !

$$\text{Test d'orthogonalité}\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BH}\right)=\underbrace{(-2)\times(-7,8)+(-6)\times 2,6}_{\text{La somme des produits dans chaque coordonnée.}}=15,6-15,6=0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux.
<u>Conclusion :</u> la droite (BH) étant perpendiculaire au côté [AD], cette première est la hauteur du triangle ABD issue de B.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Des droites en marche...mais vers quoi ?

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points suivants :

$$A(5\ ;\ -3) \qquad B(6\ ;\ 3) \qquad C(-1\ ;\ -1)$$

a. On appelle d la droite dont une équation cartésienne est $7x+4y-23=0$.

1. Prouver que le point A appartient à la droite d.
2. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
3. Tracer la droite d sur la figure ci-contre.
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point J qui est l'intersection de la droite d et de l'axe des ordonnées $\left(O;\vec{j}\right)$.

b. Sur la figure ci-contre, on a tracé la droite Δ.

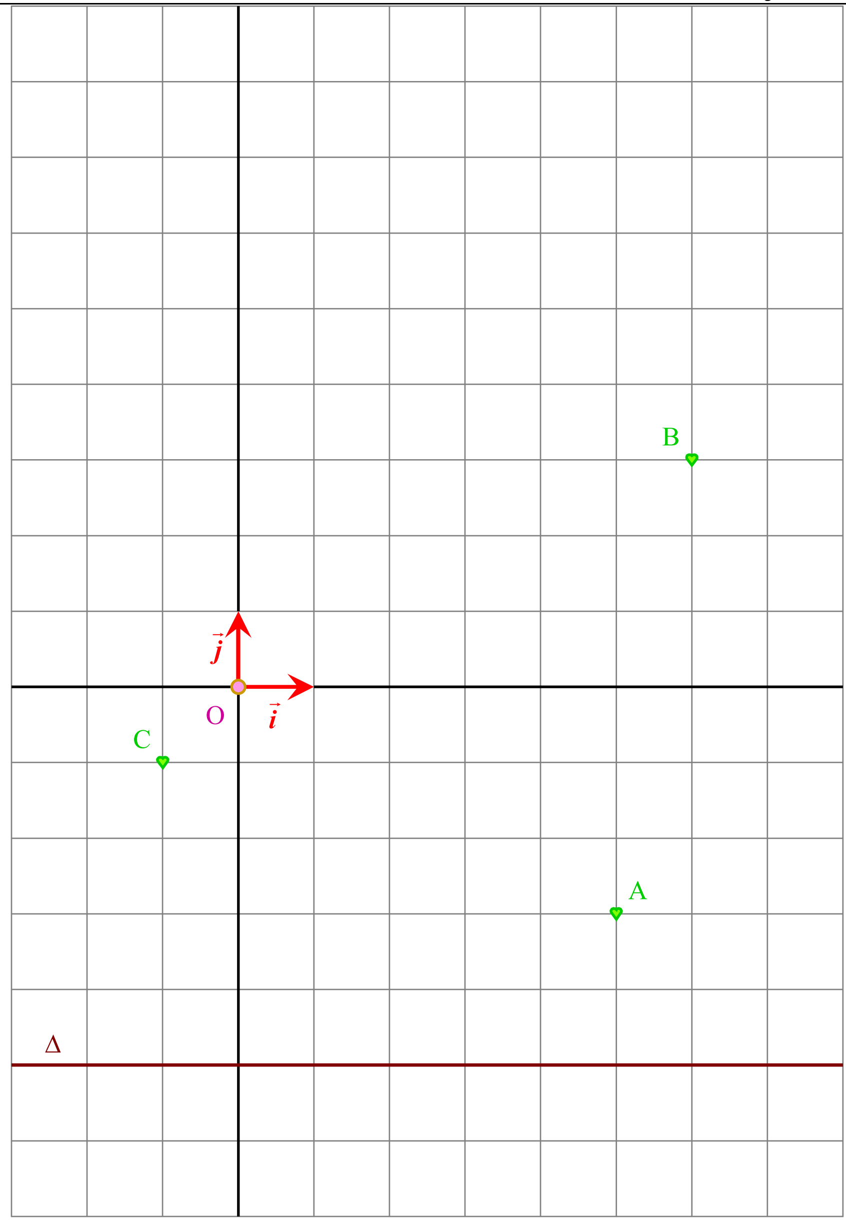
1. Sans justifications, donner une équation de la droite Δ ainsi que l'un de ses vecteurs directeurs.
2. Démontrer que les droites d et Δ sont nécessairement sécantes.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point F qui est l'intersection des droites d et Δ.

c. Dans cette question, on s'intéresse à la droite (BC).

3. Déterminer par le calcul une équation cartésienne de la droite (BC).
4. Démontrer que les droites (BC) et d sont perpendiculaires.
5. Déterminer les coordonnées du point G qui est l'intersection des droites (BC) et d.

d. On appelle Γ la droite d'équation $6x-15y+7=0$.

1. Déterminer par le calcul une équation de la droite Γ' qui est la parallèle à la droite Γ passant par le point B.
2. Tracer la droite Γ' sur la figure ci-contre.



Le corrigé

a.1. Regardons si les coordonnées du point A vérifient l'équation de la droite d.

$$7x_A+4y_A-23=7\times5+4\times(-3)-23=35-12-23=0$$

Conclusion : ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point A appartient à la droite d.

a.2. Un vecteur directeur de la droite d d'équation $\underbrace{\boxed{7}}_{a}x+\underbrace{\boxed{4}}_{b}y-23=0$ est le $\vec{u}\begin{pmatrix}-b=-4\\ a=7\end{pmatrix}$.

a.3. La droite se trace en plaçant le vecteur directeur $\vec{u}$ au départ du point A; on aboutit alors à un deuxième point de d qui a pour coordonnées $(1\ ;\ 4)$. Il ne reste plus alors qu'à prolonger.

a.4. Le point E appartenant à l'axe des ordonnées $(O;\vec{j})$, son abscisse x_E est nulle; ses coordonnées sont de la forme $(0\ ;\ y_E)$.
De plus, comme E fait aussi partie de la droite d, alors les coordonnées du premier vérifient l'équation de la seconde. Il vient alors :

$$7\times 0+4y_E-23=0 \Leftrightarrow 0+4y_E-23=0 \Leftrightarrow 4y_E=23 \Leftrightarrow y_E=\frac{23}{4}=5{,}75$$

Conclusion : les coordonnées du point E sont $(0\ ;\ 5{,}75)$.

b.1. Un des vecteurs directeurs de la droite Δ qui est parallèle à l'axe des abscisses est $\vec{i}$.
Tous les points de cette droite Δ ont en commun une même ordonnée : -5.
Par conséquent, une équation de la droite Δ est $y=-5$.

b.2. Regardons si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{i}$, directeurs pour les droites d et Δ, sont colinéaires.

$$\det(\vec{u},\vec{i})=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 7 & 0\end{vmatrix}=(-4)\times 0-7\times 1=0-7=-7\neq 0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{i}$ ne sont pas colinéaires.
Conclusion : les droites d et Δ ne sont pas parallèles mais sécantes.

b.3. Le point F appartenant aux droites d et Δ, ses coordonnées en vérifient les deux équations.

$$\begin{cases} F\in d \Leftrightarrow 7x_F+4y_F-23=0 & \textit{(1)}\\ F\in\Delta \Leftrightarrow y_F=-5 & \textit{(2)}\end{cases}$$

C'est un faux système linéaire 2×2 que nous devons résoudre vu que nous connaissons déjà l'ordonnée y_F.
Remplaçant cette dernière inconnue par sa valeur dans l'équation *(1)*, il vient :

$$7x_F+4y_F-23=0 \Leftrightarrow 7x_F-20-23=0 \Leftrightarrow 7x_F=43 \Leftrightarrow x_F=\frac{43}{7}$$

Conclusion : les coordonnées du point F sont $\left(\frac{43}{7}\ ;\ -5\right)$.

c.1. Déterminons une équation de la droite (BC).

$$M(x;y)\in(BC) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-6\\ y-3\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}(-1)-6\\ (-1)-3\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$
$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-6 & -7\\ y-3 & -4\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow [(x-6)\times(-4)]-[(y-3)\times(-7)]=0$$
$$\Leftrightarrow [-4x+24]-[-7y+21]=0$$
$$\Leftrightarrow -4x+24+7y-21=0 \Leftrightarrow -4x+7y+3=0$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite (BC) est $-4x+7y+3=0$.

c.2. Regardons si les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{u}$, directeurs pour les droites (BC) et d, sont orthogonaux. Pour ce faire, nous disposons d'un test !

$$\text{Test d'orthogonalité sur } \overrightarrow{BC} \text{ et } \vec{u}=-7\times(-4)+7\times(-4)=28-28=0$$

Conclusion : comme leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, alors les droites (BC) et d sont perpendiculaires. Donc elles sont aussi sécantes en un point G...

c.3. Le point G appartenant aux droites (BC) et d, ses coordonnées en vérifient les deux équations. Par suite :

$$\begin{cases} G\in(BC) \Leftrightarrow -4x_G+7y_G+3=0 & \textit{(1)}\\ G\in d \Leftrightarrow 7x_G+4y_G-23=0 & \textit{(2)}\end{cases}$$

Ce système linéaire 2×2 sera résolu par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour obtenir x_G, on élimine les y_G.	On supprime les x_G pour trouver y_G.
(1) $\xrightarrow{\times 4}$ $-16x_G+28y_G+12=0$ $\ominus$ *(2)* $\xrightarrow{\times 7}$ $49x_G+28y_G-161=0$ $-65x_G+173=0$ $-65x_G=-173$ $x=\frac{-173}{-65}=\frac{173}{65}$	*(1)* $\xrightarrow{\times 7}$ $-28x_G+49y_G+21=0$ $\oplus$ *(2)* $\xrightarrow{\times 4}$ $28x_G+16y_G-92=0$ $65y_G-71=0$ $65y_G=71$ $y_G=\frac{71}{65}$

Conclusion : les coordonnées du point G sont $\left(\frac{173}{65}\ ;\ \frac{71}{65}\right)$.

d.1. Une équation de la droite Γ étant $\boxed{6x-15y}+7=0$, une équation de sa parallèle Γ' est aussi de la forme $\boxed{6x-15y}+c=0$.
On détermine la constante c en se rappelant que la droite Γ' passe par le point B. Donc les coordonnées du second vérifient l'équation de la première. Il vient alors :

$$6x_B-15y_B+c=0 \Leftrightarrow 6\times 6-15\times 3+c=0 \Leftrightarrow 36-45+c=0 \Leftrightarrow c=9$$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne de la droite Γ' est

$$6x-15y+9=0 \xrightarrow{\div 3} \boxed{2x-5y+3=0}$$

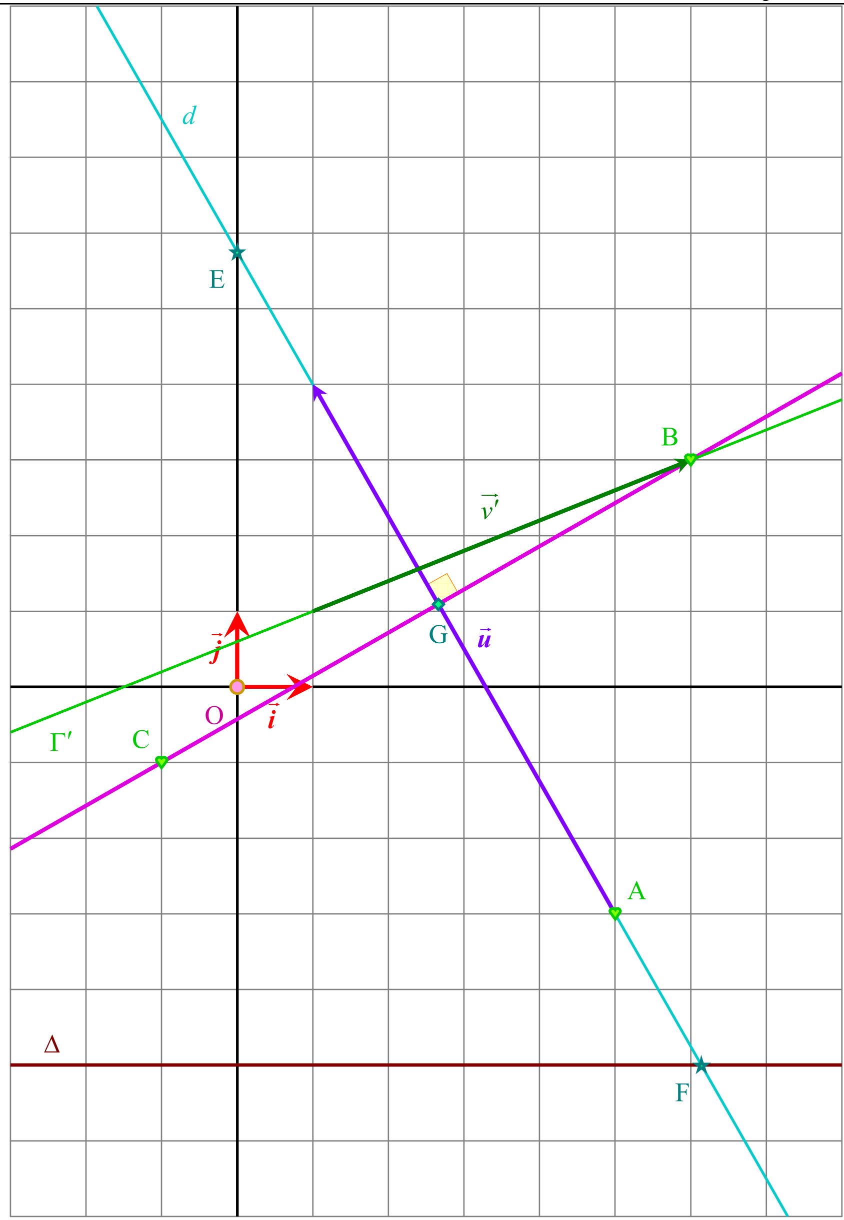
d.2. Pour tracer la droite Γ', il nous faut l'un de ses points : en l'occurrence B. Mais nous avons aussi besoin d'un vecteur directeur.

L'équation $\underset{a}{\boxed{6}}\,x+\underset{b}{\boxed{-15}}\,y+9=0$ nous donnerait le vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-b=-(-15)=15\\ a=6\end{pmatrix}$ qui n'est pas utilisable vu les dimensions du graphique.

Par contre, l'équation $\underset{a}{\boxed{2}}\,x+\underset{b}{\boxed{-5}}\,y+3=0$ nous conduit au directeur $\vec{v'}\begin{pmatrix}-b=-(-5)=5\\ a=2\end{pmatrix}$ qui est employable...à condition qu'il arrive au point B. On part alors du point $\mathrm{H}(1\;;\;1)$.

On notera que, vu leurs coordonnées, le directeur $\vec{v'}$ représente le tiers du vecteur $\vec{v}$.

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre ⇨



Géométrie classique non repérée

Les vecteurs en action

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, ATCG est un parallélogramme.
Tous les côtés et une diagonale de ce parallélogramme ont été partagés en un certain nombre de parties égales.
Trois parallèles aux côtés ont été tracées en tirets dans la même couleur que ces côtés.

a. Compléter les égalités ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

$\overrightarrow{AD} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AF} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{AT}$

$\overrightarrow{CE} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{CG} + \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{CT}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DC} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{DA}$

b. En effectuant un calcul vectoriel et en utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{CE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CT}$. C'est-à-dire que l'on recherche une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{CE} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{CA} + \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{CT}$

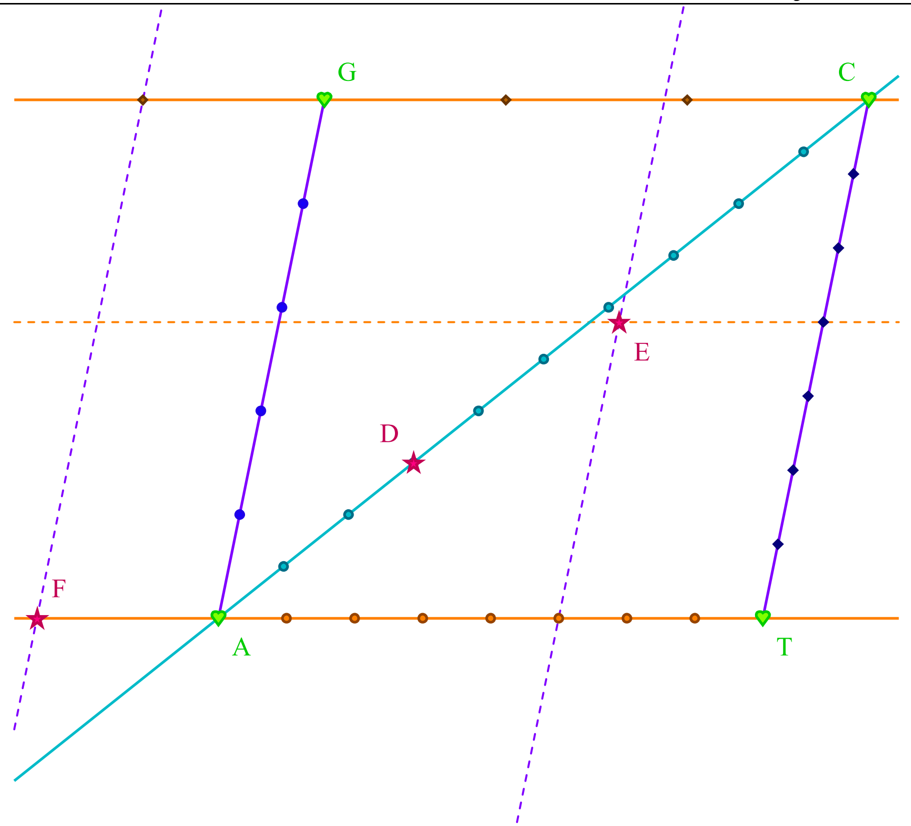
c. Sur la figure ci-contre, placer les points suivants. Le cas échéant, la construction devra être faite à la règle et au compas. On laissera apparents les traits de construction.

1. Le point I défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{CG}$.
2. Le point J défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{AJ} = -\dfrac{1}{4} \times \overrightarrow{AT}$
3. Le point K défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{DK} = \dfrac{4}{7} \times \overrightarrow{CT}$
4. Le point L défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{GL} = \dfrac{2}{3} \times \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{ET}$

d. Le point M est défini par la relation vectorielle $7 \times \overrightarrow{GM} + 2 \times \overrightarrow{TM} = \vec{0}$.

1. Par un calcul vectoriel, exprimer le vecteur $\overrightarrow{GM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{GT}$. C'est-à-dire que l'on souhaite aboutir à une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{GM} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{GT}$.
2. Placer le point M sur la figure ci-dessous.

e. Sur la figure ci-dessous, placer le point N défini par la relation $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{TN}$.



Le corrigé

a.1. Le point D se trouvant aux trois dixièmes de la diagonale [AC], on a :

$$\overrightarrow{AD} = \boxed{\frac{3}{10} \times \overrightarrow{AC}}$$

a.2. Utilisant la parallèle au segment [AG] passant par le point F, on a :

$$\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{3} \times \overrightarrow{GC} = \boxed{-\frac{1}{3} \times \overrightarrow{AT}}$$

a.3. Utilisant les deux parallèles aux côtés [CG] et [CT] passant par le point E, il vient :

$$\overrightarrow{CE} = \frac{3}{8} \times \overrightarrow{TA} + \frac{3}{7} \times \overrightarrow{CT} = \boxed{\frac{3}{8} \times \overrightarrow{CG} + \frac{3}{7} \times \overrightarrow{CT}}$$

a.4. Les segments [DC] et [DA] mesurant 7 et 3 graduations de la diagonale [AC], nous pouvons écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{DC} = -\frac{7}{3}\times\overrightarrow{DA}}$$

b. Partons la troisième égalité complétée lors de la question **a** !

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \frac{3}{8}\times\overrightarrow{CG}+\frac{3}{7}\times\overrightarrow{CT} = \frac{3}{8}\times\overbrace{\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}\right)}^{\text{Merci Chasles !}}+\frac{3}{7}\times\overrightarrow{CT}\\ &= \frac{3}{8}\times\overrightarrow{CA}+\frac{3}{8}\times\overrightarrow{AG}+\frac{3}{7}\times\overrightarrow{CT} = \frac{3}{8}\times\overrightarrow{CA}+\frac{3}{8}\times\left(-\overrightarrow{CT}\right)+\frac{3}{7}\times\overrightarrow{CT}\\ &= \frac{3}{8}\times\overrightarrow{CA}-\frac{3}{8}\times\overrightarrow{CT}+\frac{3}{7}\times\overrightarrow{CT}\\ &= \frac{3}{8}\times\overrightarrow{CA}+\frac{-3\times 7+3\times 8}{56}\times\overrightarrow{CT} = \frac{3}{8}\times\overrightarrow{CA}+\frac{-21+24}{56}\times\overrightarrow{CT} = \boxed{\frac{3}{8}\times\overrightarrow{CA}+\frac{3}{56}\times\overrightarrow{CT}}\end{aligned}$$

c.1. Ayant l'égalité vectorielle $\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{CG}$, le point I est le quatrième sommet du parallélogramme. C'est au compas qu'on le construit.

c.2. Le quart du côté [AT] correspond à deux graduations. Le point J se trouve à l'opposé du point T par rapport au point A.

c.3. Le point K se construit en positionnant un vecteur $\frac{4}{7}\times\overrightarrow{CT}$ au départ du point D. On trace alors de fait un parallélogramme.

c.4. L se construit en effectuant d'abord une translation de vecteur $\frac{2}{3}\times\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\times\overrightarrow{GC}$, suivie d'une autre de vecteur $\overrightarrow{ET}$. Là encore, on construit un parallélogramme.

d.1. Le point M est défini par la relation vectorielle $7\times\overrightarrow{GM}+2\times\overrightarrow{TM}=\vec{0}$ et l'on veut aboutir à une relation de la forme $\overrightarrow{GM}=\ldots\ldots\times\overrightarrow{GT}$. Clairement, le vecteur $\overrightarrow{TM}$ doit disparaître et le vecteur $\overrightarrow{GT}$ doit apparaître. Avec la relation de Chasles, bien sûr !

$$\begin{aligned}7\times\overrightarrow{GM}+2\times\overrightarrow{TM}=\vec{0} &\Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{GM}+2\times\underbrace{\left(\overrightarrow{TG}+\overrightarrow{GM}\right)}_{\text{Chasles par G}}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{GM}+2\times\overrightarrow{TG}+2\times\overrightarrow{GM}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow 9\times\overrightarrow{GM}+2\times\overrightarrow{TG}=\vec{0} \Leftrightarrow 9\times\overrightarrow{GM}=\vec{0}-2\times\overrightarrow{TG}\\ &\Leftrightarrow 9\times\overrightarrow{GM}=2\times\overrightarrow{GT} \xrightarrow{\div 9} \boxed{\overrightarrow{GM}=\frac{2}{9}\times\overrightarrow{GT}}\end{aligned}$$

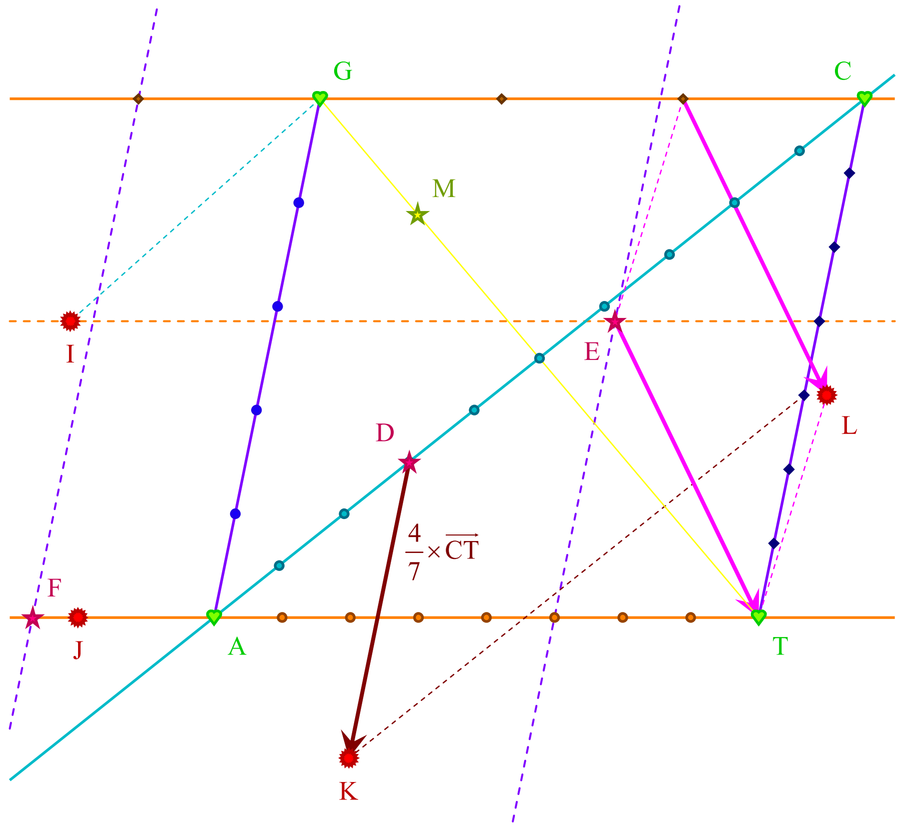
d.2. Le point M se trouve aux deux neuvièmes de la diagonale [GT] à partir du point N. Ce dernier mesurant environ 9 centimètres, la distance entre GM vaut $\boxed{2\text{ cm}}$

e. Pour placer le point N, nous devons modifier la relation vectorielle le définissant :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{TN} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{TN}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}+\overbrace{\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NT}}^{\text{Chasles s'applique !}}=\vec{0}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}+\overrightarrow{CT}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{CT}=\boxed{\overrightarrow{TC}}\end{aligned}$$

Autrement dit, le point N se trouve à la place du point G. En y réfléchissant un peu avant de se lancer dans ce calcul vectoriel, on pouvait le prévoir...en remarquant qu'il s'agit là de la règle du parallélogramme.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



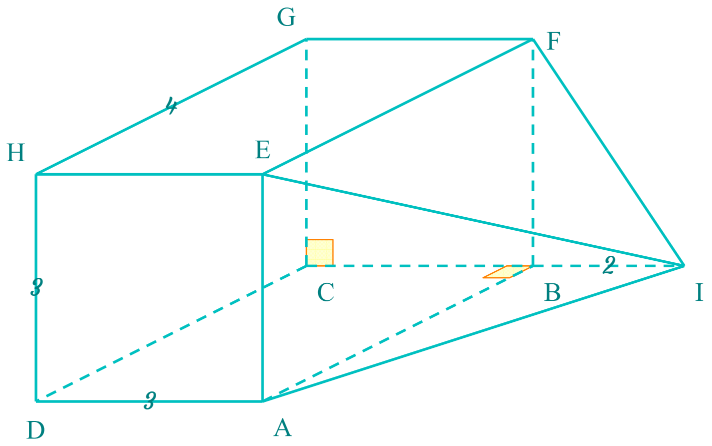
Pavé tétraédrique

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un pavé droit de dimensions :

AB = 4 centimètres AD = 3 centimètres AE = 3 centimètres

I est le point de la droite (BC) situé à 2 centimètres du point B mais à l'opposé du point C.



a. Calculer la longueur AI. En déduire l'aire du triangle AIE.

b. Calculer le volume du pavé droit ABCDEFGH, puis celui de la pyramide IABFE. En déduire le volume total du solide.

c. Cette sous-partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, trois propositions sont faites mais une seule est juste. Laquelle ? On entourera la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 0,75 points; une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

c.1. Les droites (EI) et (HD) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

c.2. Les plans (ADI) et (FGH) sont :

Sécants	parallèles distincts	Confondus

c.3. La droite (ID) et le plan (ABC) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse.	La droite est incluse dans le plan.

c.4. Les droites (AB) et (GH) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

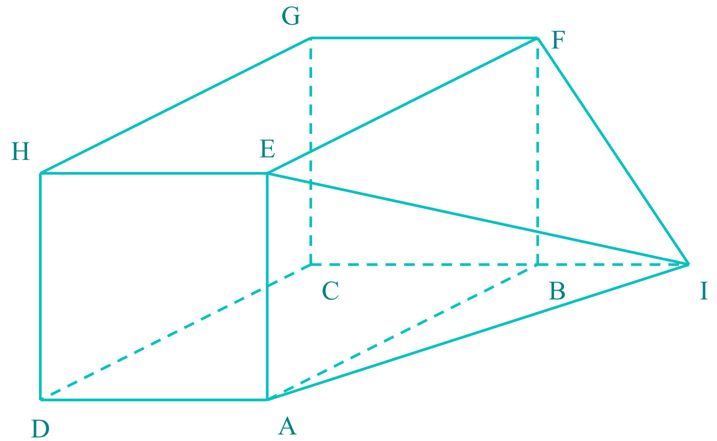
c.5. Les plans (CDI) et (ABC) sont :

Sécants	parallèles distincts	Confondus

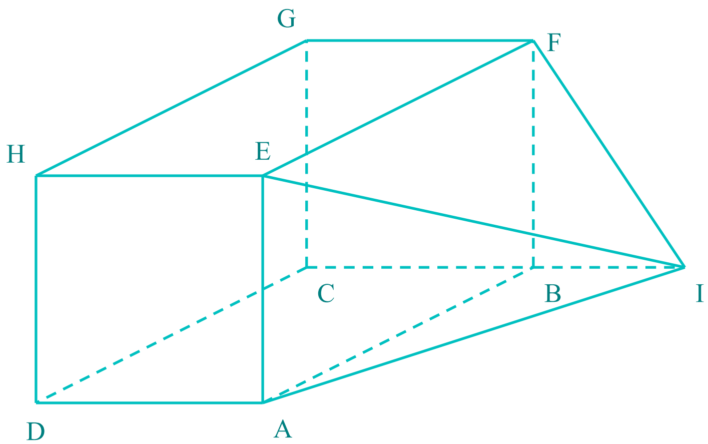
c.6. La droite (EF) et le plan (AGH) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse	La droite est incluse dans le plan

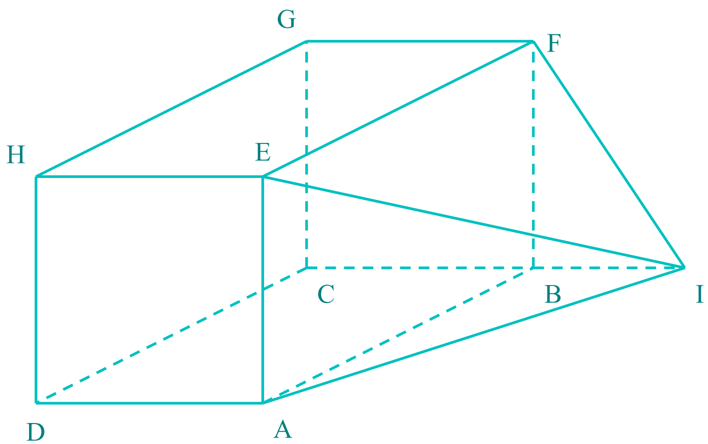
d. Sur la figure ci-dessous, construire l'intersection Δ des plans (IDE) et (IBG). On expliquera et justifiera sa construction. Une grande attention sera portée à la rédaction.



e. On appelle K le milieu de [CD]. Sur la figure ci-dessous, construire l'intersection Δ' des plans (FIK) et (ABE). On expliquera et justifiera sa construction Une grande attention sera portée à la rédaction.



f. On appelle J le milieu de [DH]. Sur la figure ci-dessous, construire l'intersection Δ" des plans (GIJ) et (ABE). On expliquera et justifiera sa construction. Une grande attention sera portée à la rédaction.



Le corrigé

a. Comme le triangle ABI est rectangle en B, alors, en application du théorème de Pythagore, nous pouvons écrire :

$$\mathrm{AI}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BI}^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{AI} = \sqrt{20} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$$

➲ L'aire du triangle AIE qui est rectangle en A est donnée par :

$$\text{Aire du triangle AIE} = \frac{\text{base AI} \times \text{hauteur AE}}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{5} \times 3}{\cancel{2}} = 3\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^2$$

b. Le volume du pavé droit ABCDEFGH est donné par :

$$\text{Volume de ABCDEFGH} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD} \times \mathrm{AE} = 4 \times 3 \times 3 = 36\ \mathrm{cm}^3$$

La pyramide IABFE a pour base le rectangle ABFE qui a pour aire $4 \times 3 = 12\ \mathrm{cm}^2$

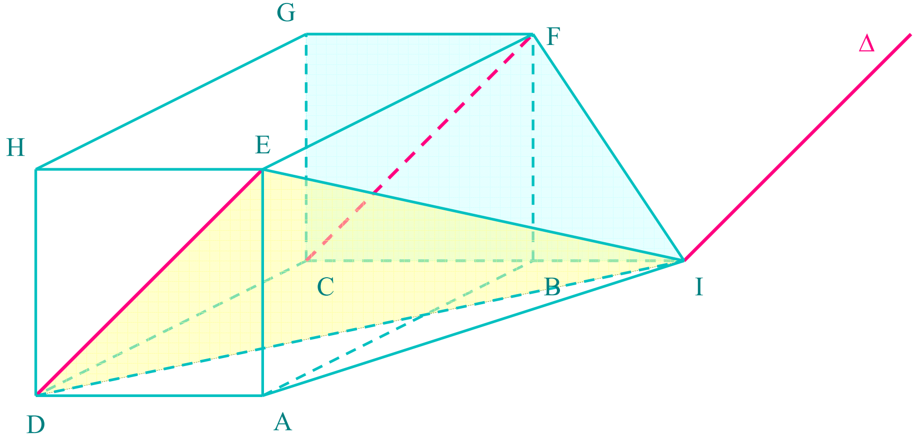
Son volume est donc égal à $\dfrac{\text{base ABFE} \times \text{hauteur BE}}{3} = \dfrac{12 \times 2}{3} = \dfrac{24}{3} = 8\ \mathrm{cm}^3$

Conclusion : le volume total du solide est de 44 centimètres cubes.

c. Passons en revue les diverses propositions.

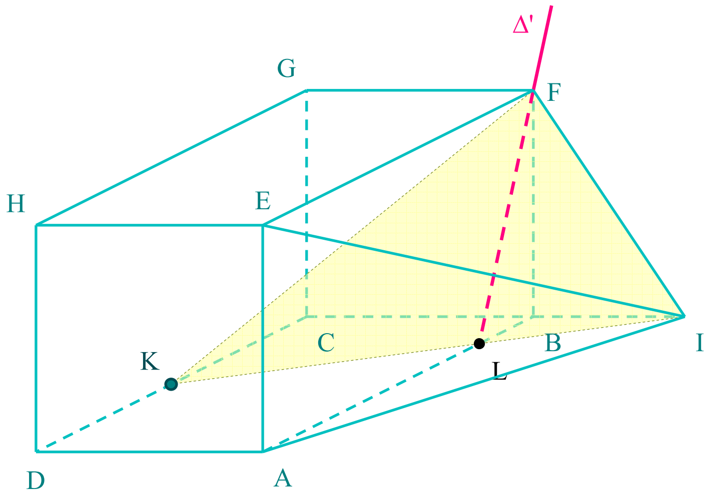
1. Les droites (EI) et (HD) sont non coplanaires car le point I n'appartient pas au plan de face (DEH).
2. Le plan du dessous (ADI) est parallèle et distinct au plan du dessus (FGH).
3. Comme les points D et I appartiennent au plan (ABC), alors la droite (ID) est incluse dans le plan (ABC).
4. Les droites (AB) et (GH) sont parallèles car le quadrilatère ABGH est un rectangle.
5. Les plans (CDI) et (ABC) sont confondus; les cinq points A, B, C, D et I sont coplanaires, ils appartiennent au plan du dessous.
6. La droite (EF) étant parallèle à la droite (HG) du plan (AGH), la droite (EF) est parallèle au plan (AGH) mais sans y être incluse. En effet, les points E et F n'appartiennent pas au plan (AGH).

d. D'abord, les plans (IDE) et (IBG) étant sécants, leur intersection Δ est une droite qui passe par le point I, ce dernier étant commun aux deux plans.
Ensuite, comme la droite (DE) du plan de (IDE) est parallèle à la droite (CF) du plan (IBG), alors, en application du théorème du toit, la droite d'intersection Δ est parallèle aux droites (DE) et (CF).
Conclusion : Δ est la parallèle aux droites (DE) et (CF) passant par le point I. C'est au compas qu'elle se construit.

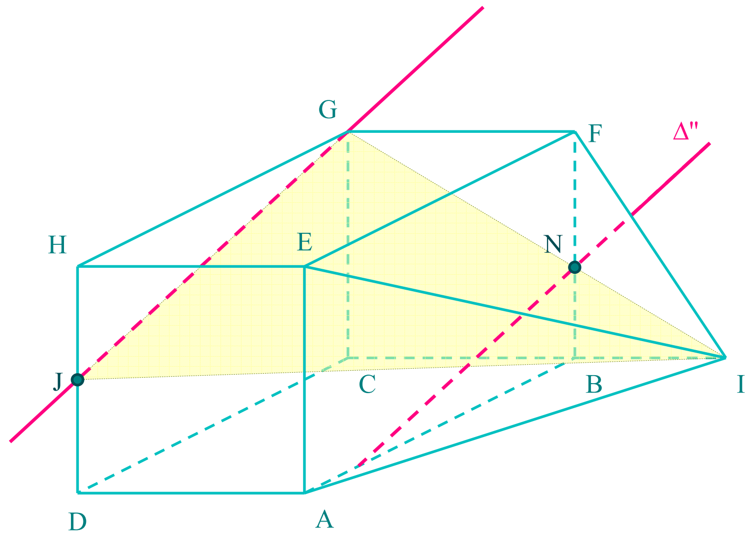


Pour prouver que l'intersection Δ est parallèle à la droite (DE), on peut aussi invoquer le théorème d'incidence. En effet, le plan (IDE) coupe les plans parallèles (ADE) et (IBG) suivant les droites parallèles (DE) et Δ.

e. La première chose à dire est que l'intersection Δ' des plans sécants (FIK) et (ABE) est une droite qui passe par le point F, celui-ci étant commun aux deux plans.
Ensuite, les droites (IK) et (AB) sont sécantes dans le plan du dessous (ABC) en un point que nous appellerons L. Ce point L appartenant aux deux plans (FIK) et (ABE) fait donc partie de leur intersection Δ'.
<u>Conclusion :</u> l'intersection Δ' est la droite (FL).



f. D'abord, l'intersection Δ'' des plans sécants (GIJ) et (ABE) est une droite.
Ensuite, les droites (GI) et (BF) sont sécantes dans le plan du fond (CFG) en un point que nous appellerons N. De manière évidente, N appartient aux deux plans (GIJ) et (ABE) donc à leur intersection Δ''.
Enfin, en vertu du théorème d'incidence, le plan (GIJ) coupe les plans parallèles (DCH) et (ABE) suivant deux droites parallèles (GJ) et Δ'.
<u>Conclusion :</u> l'intersection Δ' est la parallèle à (GJ) passant par le point K.



Statistiques et probabilités

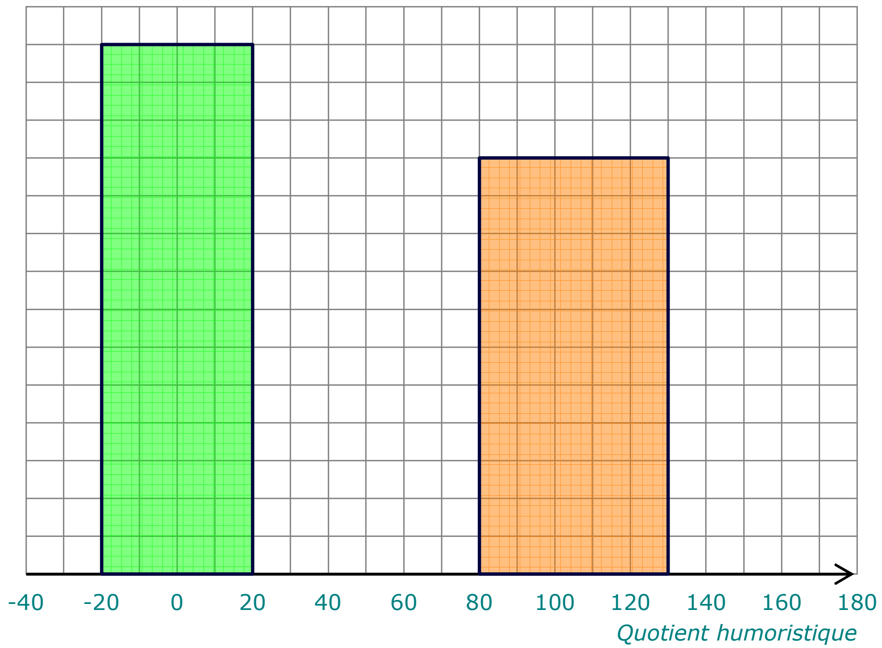
C'est une plaisanterie ?

L'énoncé

L'*Institut National de la Blague* a décidé de mener une étude sur le sens de l'humour de tous les habitants du village de Saipadraul. Pour mesurer le degré d'humour d'une personne, il a défini un indice : le quotient humoristique ou QH qui est à l'humour ce qu'est le quotient intellectuel est à l'intelligence. Le QH est un nombre compris entre -20 et 160.
A l'issue de son étude, il a recueilli les données parcellaires suivantes :

Classe : quotient humoristique	$[-20;20[$	$[20;80[$	$[80;130[$	$[130;160[$
Effectif		252		147

Ces données sont complétées par l'histogramme ci-dessous où un centimètre carré représente 28 individus.



a. Compléter le tableau et l'histogramme précédents.

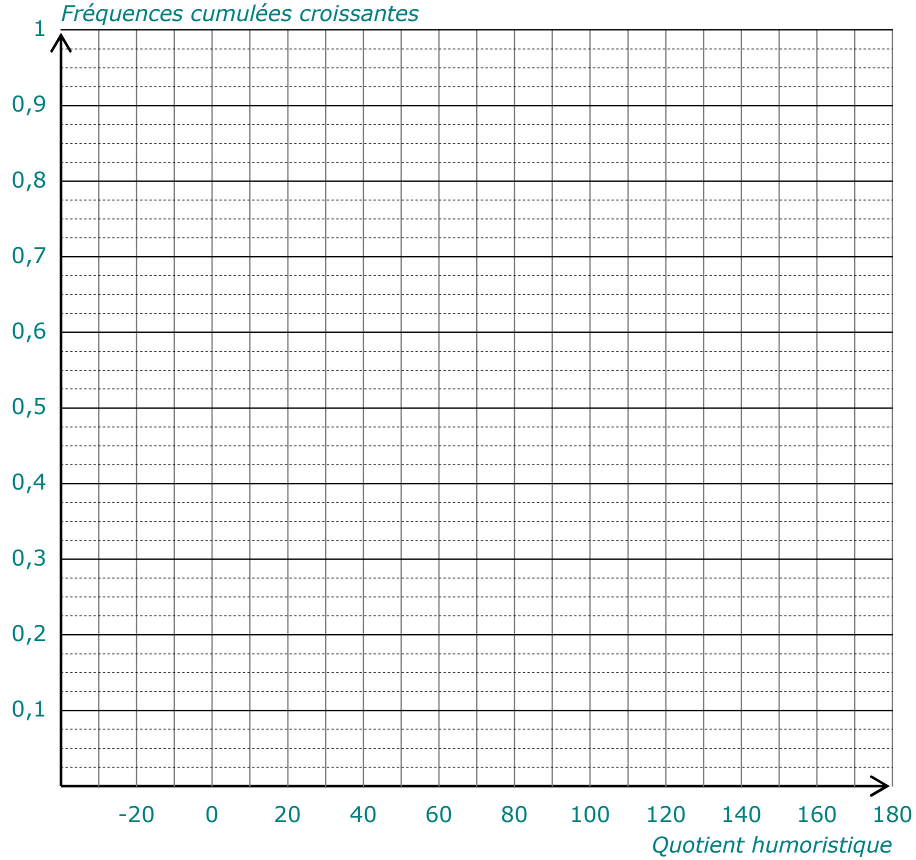
b. Parmi les propositions suivantes, laquelle est égale au nombre d'habitants du village de Saipadraul ? On entourera la réponse choisie.

876 976 1076 1176

c. Calculer le quotient humoristique moyen des habitants de Saipadraul. On arrondira le résultat au dixième près.

d. On s'intéresse aux fréquences cumulées croissantes.

1. Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe ou polygone des fréquences cumulées croissantes correspondant à la série statistique.



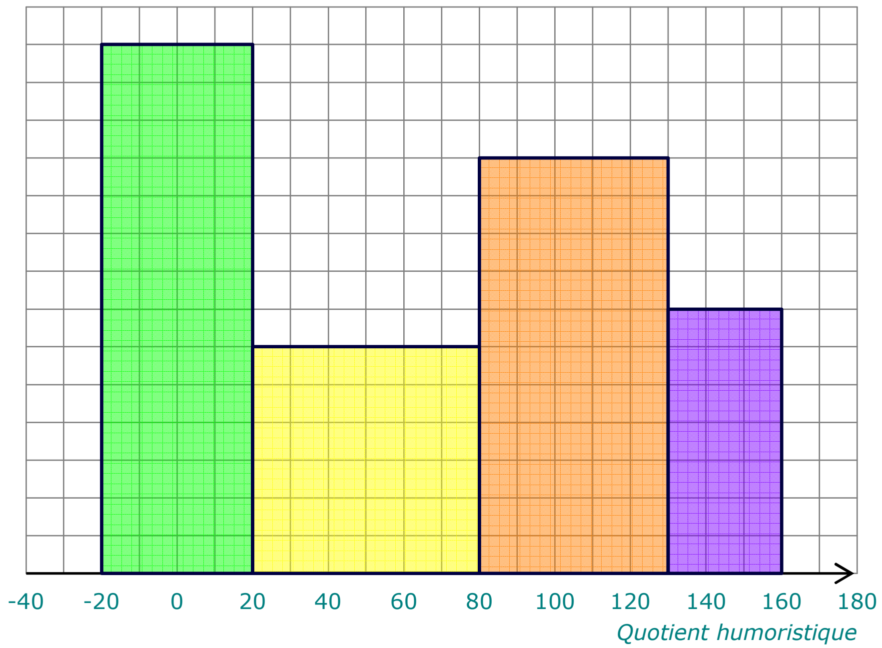
2. Par lecture graphique, déterminer la médiane M_e ainsi les quartiles Q_1 et Q_3 de la série statistique.
3. L'*Institut National de la Blague* considère qu'un village est drôle si plus des deux cinquièmes de ses habitants ont un quotient humoristique supérieur à 100.
Le village de Saipadraul est-il drôle ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a. Complété, le tableau est le suivant :

Classe : quotient humoristique	$[-20;20[$	$[20;80[$	$[80;130[$	$[130;160[$
Effectif	$\underbrace{392}_{14\times 28}$	$\underbrace{252}_{9\times 28}$	$\underbrace{385}_{13,75\times 28}$	$\underbrace{147}_{5,25\times 28}$
Rectangle *aire = base × hauteur* **en centimètres.**	$\underbrace{14}_{cm^2} = \underbrace{7\times 2}_{cm\times cm}$	$\underbrace{9}_{cm^2} = \underbrace{3\times 3}_{cm\times cm}$	$\underbrace{13,75}_{cm^2} = \underbrace{2,5\times 5,5}_{cm\times cm}$	$\underbrace{5,25}_{cm^2} = \underbrace{1,5\times 3,5}_{cm\times cm}$

Et l'histogramme est :



b. Au total, le village compte $392+252+385+147=\boxed{1176\text{ habitants}}$.

c. le quotient humoristique moyen des habitants de Saipadraul est donné par le calcul :

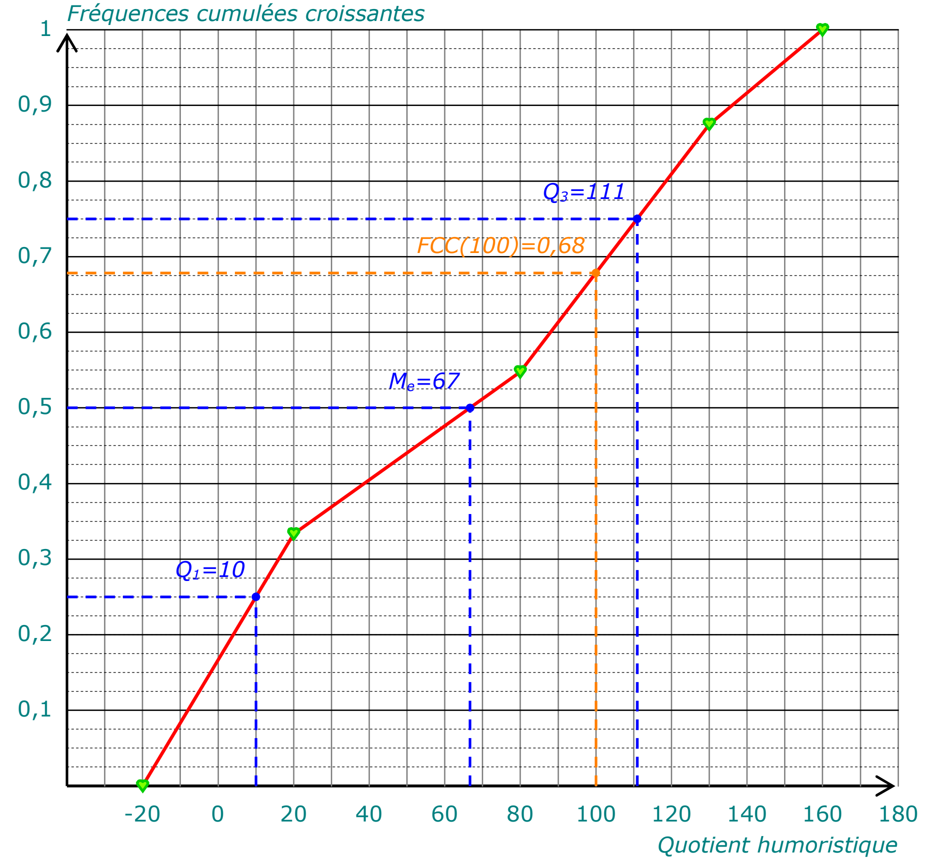
$$\text{Moyenne} = \frac{\overbrace{\sum \text{effectif}\times\text{Milieu}}^{\text{Pour chaque classe}}}{\text{Effectif total}} = \frac{392\times 0+252\times 50+385\times 105+147\times 145}{1176}$$

$$=\frac{74340}{1176}\approx \boxed{63,2}$$

d.1. Calculons les fréquences et fréquences cumulées croissantes de la série statistique précédente :

Classe : quotient humoristique	$[-20;20[$	$[20;80[$	$[80;130[$	$[130;160[$
Effectif	392	252	385	147
Fréquence	0,333	0,214	0,327	0,125
Fréquence cumulée croissante	0,333	0,547	0,874	1,000

Et le polygone des fréquences cumulées croissantes est :



d.2. Par lecture le graphique, il vient : $\underbrace{\overbrace{\boxed{Q_1=10}}^{\text{FCC}=0,25} \quad \overbrace{\boxed{M_e=67}}^{\text{FCC}=0,5} \quad \overbrace{\boxed{Q_1=111}}^{\text{FCC}=0,75}}_{\text{FCC comme Fréquence Cumulée Croissante}}$

d.3. La fréquence cumulée croissante correspondante à un quotient humoristique de 100 est égale à 0,68. Par conséquent, seulement 32% des habitants de Saipasdraul ont un QH supérieur à 100. C'est inférieur à 40% donc le village de Saipadraul n'est pas drôle !

L'eau et le feu (1ère époque)

L'énoncé

Le développement des alarmes-incendies intempestives déclenchées par des crétins décérébrés et impunis a conduit un certain nombre d'élèves d'un lycée à s'équiper d'un vêtement imperméable afin de pouvoir se protéger de la pluie.
On sait que 35% des 480 élèves du lycée sont en seconde; les deux tiers des élèves de seconde possèdent un vêtement imperméable.
De plus, 27,5% des 480 élèves du lycée ne sont pas en seconde et ne possèdent pas un vêtement imperméable.
On rencontre un élève au hasard et on définit les événements suivants :

S = «l'élève rencontré est en classe de seconde»
I = «l'élève possède un vêtement imperméable»

a. En utilisant les renseignements précédents, compléter le tableau suivant :

Effectif	*Possède un imperméable*	*Ne possède pas un imperméable*	*Total*
est en seconde			
n'est pas en seconde			
Total			480

b. Déterminer les probabilités des événements $\overline{S}$, $S\cup I$ et $\overline{S}\cap I$.

c. On rencontre un élève qui ne possède pas d'imperméable. Calculer la probabilité qu'il soit en classe de seconde.

Le corrigé

a. Complétons le tableau proposé :

Effectif	*Possède un imperméable*	*Ne possède pas un imperméable*	*Total*
est en seconde	112 =2/3*168	56 =168−112	168 =35% de 480 =0,35×480
n'est pas en seconde	180 =312−132	132 =27,5% de 480 =0,275×480	312 =480−168
Total	292 =112+180	188 =480−292=56+132	480

b. On détermine les probabilités demandées avec l'aide du tableau...ou pas.

$$p\left(\overline{S}\right)=p\left(\text{«l'élève n'est pas en seconde»}\right)=1-p(S)=1-0,35=0,65$$

$$p(S\cup I)=p\left(\text{«l'élève en seconde ou a un imperméable»}\right)=\frac{112+180+56}{480}=\overbrace{0,725}^{\text{Aussi } 1-27,5\%}$$

$$p\left(\overline{S}\cap I\right)=p\left(\text{«l'élève n'est pas en seconde et a un imperméable»}\right)=\frac{180}{480}=\frac{3}{8}=0,375$$

c. L'ensemble de référence a changé; il se restreint aux 292 élèves qui possèdent un vêtement imperméable.

$$p\left(\text{«l'élève est en seconde sachant qu'il a un imperméable»}\right)=\frac{56}{188}=\frac{14}{47}\approx 0,30$$

L'eau et le feu (2ème époque)

L'énoncé

Ce matin, Coco se fait très discret au lycée; il rase les murs. La veille, pour s'amuser, il a déclenché une alarme-incendie alors qu'une averse arrivait. Cette plaisanterie très douteuse n'a pas été appréciée par tous ses camarades; certains ont une furieuse envie de le boxer.
Lors de l'alerte-incendie, 20% des élèves ont réussi à s'abriter, 70% des élèves ont été mouillés et le reste a été trempé.
30% des élèves qui ont réussi à s'abriter ont une furieuse envie de boxer Coco. Ce sentiment est aussi partagé par 40% de ceux qui ont été mouillés.
Enfin, 9% des élèves ont été trempés et ont une furieuse envie de boxer Coco.

Coco rencontre l'un de ses camarades au hasard. On définit les événements suivants :

A = «le camarade rencontré était abrité»

M = «le camarade rencontré était mouillé»

T = «le camarade rencontré était trempé»

B = «le camarade rencontré a une furieuse envie de boxer Coco»

a. Donner les probabilités des événements T et $T\cap B$.

b. Construire un arbre pondéré décrivant la rencontre au hasard de Coco avec un élève.

c. Montrer que la probabilité que le camarade rencontré ait une furieuse envie de boxer Coco est égale à 0,43.

d. On rencontre un élève qui a été trempé lors de l'alarme incendie. Déterminer la probabilité qu'il ait envie de boxer Coco.

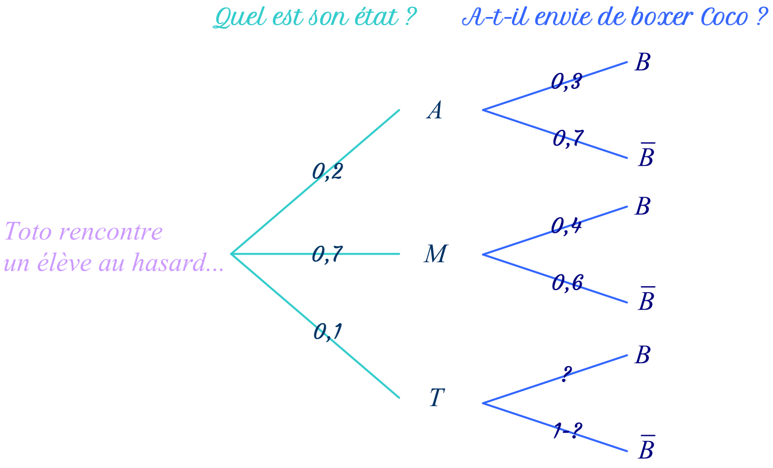
Le corrigé

a. 10% des élèves ont été trempés. Par conséquent : $p(T)=0,1$.

9% des élèves ayant été trempés et ayant une furieuse envie de boxer Coco, on a :

$$p(T\cap B)=0,09$$

b. La situation d'une rencontre de Coco avec l'un des élèves peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



c. D'après l'arbre précédent, la probabilité de l'événement B est donnée par :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(M \cap B) + P(T \cap B)$$
$$= 0,2 \times 0,3 + 0,7 \times 0,4 + 0,09 = 0,06 + 0,28 + 0,09 = 0,43$$

d. Il s'agit de trouver la probabilité du branchage «B sachant T». Elle est donnée par :

$$p(B \text{ sachant } T) = \frac{p(T \cap B)}{p(T)} = \frac{0,09}{0,1} = 0,9$$

Don't forget your secret code !

L'énoncé

Pour que la porte de la maison de Toto s'ouvre, il faut composer un code électronique secret de quatre caractères sur un clavier comportant les dix chiffres (de 0 à 9) et les cinq premières lettres de l'alphabet (A, B, C, D ou E).
Pour note, un caractère peut être un chiffre ou une lettre.
Le premier caractère du code secret est nécessairement l'une de cinq premières lettres de l'alphabet; les deuxième et troisième caractères sont deux chiffres; le dernier caractère peut être l'un des dix chiffres ou l'une des cinq premières lettres de l'alphabet. Mais les quatre caractères du code sont différents les uns des autres.
Toto est en train de changer son code mais il ne sait lequel choisir. Il décide d'en prendre un au hasard.

a. Montrer qu'il existe 5400 codes possibles.

b. Déterminer les probabilités des événements suivants. Les résultats seront fournis sous la forme d'une fraction réduite ou d'un nombre décimal s'il s'agit de la valeur exacte.

A = «le code secret ne comporte aucun chiffre 7»

C = «le premier caractère est une voyelle et tous les chiffres sont pairs(*)»

D = «le code secret comporte au moins un chiffre 7»

(*) Il existe cinq chiffres pairs dont 0.

Le corrigé

a. Un code secret, c'est :

1er caractère		2ème caractère		3ème caractère		4ème caractère		
5 lettres	×	10 chiffres	×	9 chiffres	×	12 chiffres ou lettres	=	5400 codes

Conclusion : au total, il existe 5400 codes possibles.

b. Déterminons le nombre de codes secrets ne comportant aucun chiffre 7.

1er caractère		2ème caractère		3ème caractère		4ème caractère		
5 lettres	×	9 chiffres	×	8 chiffres	×	11 chiffres ou lettres restantes	=	3960 codes A

Par conséquent, la probabilité de l'événement A est égale à :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de codes favorables à } A}{\text{Nombre total de codes}} = \frac{3960}{5400} = \frac{11}{15}$$

➲ Le nombre de codes secrets favorables à C est donné par :

1er caractère		2ème caractère		3ème caractère		4ème caractère		
2 voyelles	×	5 chiffres pairs	×	4 chiffres pairs	×	7 3 chiffres pairs ou 4 lettres restantes	=	280 codes C

Nous en déduisons que la probabilité de l'événement C est donnée par:

$$p(C)=\frac{\text{Nombre de codes favorables à } C}{\text{Nombre total de codes}}=\frac{280}{5400}=\frac{7}{135}$$

➲ L'événement D = «au moins un chiffre 7» est le contraire de A = «aucun chiffre 7». Par suite :

$$p(D)=1-p(A)=1-\frac{11}{15}=\frac{15-11}{15}=\frac{4}{15}$$

Au sommaire de ce recueil d'exercices :

Algorithmique 1
C'est aux programmes ! 1
Calculs littéraux, équations et inéquations 2
On ne peut plus compter sur personne 2
Une fonction comme avant 3
Langue de signes 4
Effractions signées 5
Candidat du système 6
Fonctions 7
Une fonction par un graphique 7
Les fonctions affines attaquent ! 9
Expressions droitières 11
Les fonctions font référence ! 12
Géométrie analytique 14
Penchant analytique 14
Alignement et parallélisme 16
Gardez vos distances ! 17
Des droites en marche...mais vers quoi ? 19
Géométrie classique non repérée 22
Les vecteurs en action 22
Pavé tétraédrique 24
Statistiques et probabilités 27
C'est une plaisanterie ? 27
L'eau et le feu (1ère époque) 29
L'eau et le feu (2ème époque) 30
Don't forget your secret code ! 31

Le mot de l'auteur

Chaque mois de juin voit le retour des abricots et de mes recueils d'exercices. Le rapport entre les deux ? Il n'y en a pas; c'est juste qu'aucune autre comparaison ne me venait à l'esprit. Car mes exercices ne poussent pas dans les arbres...ou alors ils auraient un aspect terrifiant.
Confirmant la tendance observée les rentrées précédentes, les collégiens arrivent en seconde avec de moins en moins de bagages. Certes, ils ont des connaissances mais elles demeurent ponctuelles; ils savent répondre à des questions courtes mais il n'y a aucune cohérence d'ensemble. Peu sont capables d'entreprendre des actions longues et structurées. La faute en revient à un programme de moins en moins exigeant, bien peu stimulant et à un horaire en baisse drastique. Quand il n'y a plus d'enjeu, presque rien à gagner, lorsqu'il n'y a pas d'adversité, à quoi sert-il de travailler, de se creuser les méninges et de passer du temps sur des obstacles afin de les surmonter ?
Comme d'habitude et comme chaque année, le Ministère de l'Education Nationale ne serait être tenu pour responsable du présent recueil et des exercices qui ne représentent que ma vision personnelle du programme officiel.

Jérôme ONILLON