Complexes et géométrie dans l'espace

Même les affines sont complexes

L'énoncé

La fonction affine f est définie pour tour nombre complexe z par :

$$f(z)=(4+2\boldsymbol{i})\times z-7$$

a. Calculer les images $f(\boldsymbol{i})$ et $f\left(\dfrac{1}{1-3\boldsymbol{i}}\right)$.

b. Déterminer le ou les antécédents de $3-2\boldsymbol{i}$ par la fonction f dans $\mathbb{C}$.

Le corrigé

a. Calculons les deux images demandées :

$$f(\boldsymbol{i})=(4+2\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{i}-7=4\boldsymbol{i}+2\times\boldsymbol{i}^2-7=4\boldsymbol{i}+2\times(-1)-7=\underline{4\boldsymbol{i}-9}$$

$$f\left(\frac{1}{1-3\boldsymbol{i}}\right)=(4+2\boldsymbol{i})\times\frac{1}{1-3\boldsymbol{i}}-7=\frac{(4+2\boldsymbol{i})\times(1+3\boldsymbol{i})}{(1-3\boldsymbol{i})\times(1+3\boldsymbol{i})}-7=\frac{4+12\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{i}^2}{1^2-(3\boldsymbol{i})^2}-7$$

$$=\frac{4+14\boldsymbol{i}-6}{1-(-9)}-7=\frac{14\boldsymbol{i}-2}{10}-7=1,4\boldsymbol{i}-0,2-7=\underline{1,4\boldsymbol{i}-7,2}$$

b. Les antécédents de $3-2\boldsymbol{i}$ par la fonction affine f sont les nombres complexes z vérifiant :

$$f(z)=3-2\boldsymbol{i}\iff(4+2\boldsymbol{i})\times z-7=3-2\boldsymbol{i}\iff(4+2\boldsymbol{i})\times z=10-2\boldsymbol{i}$$

$$\iff z=\frac{10-2\boldsymbol{i}}{4+2\boldsymbol{i}}=\frac{(10-2\boldsymbol{i})\times(4-2\boldsymbol{i})}{(4+2\boldsymbol{i})\times(4-2\boldsymbol{i})}=\frac{40-20\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{i}^2}{4^2-(2\boldsymbol{i})^2}$$

$$=\frac{40-28\boldsymbol{i}-4}{16-(-4)}=\frac{36-28\boldsymbol{i}}{20}=\underline{1,8-1,4\boldsymbol{i}}$$

<u>Conclusion :</u> $3-2\boldsymbol{i}$ a un seul antécédent par la fonction f qui est $\dfrac{9}{5}-\dfrac{7}{5}\boldsymbol{i}$.

Complexes polynômiaux

L'énoncé

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations du second degré suivantes d'inconnue z :

1. $z^2+4z+11=0$ **2.** $2z^2-4z+1=0$

b. Le polynôme Q est défini par tout nombre complexe z par :

$$Q(z)=2z^4+4z^3+7z^2-40z+11$$

1. Calculer l'image $Q(\boldsymbol{i})$.
2. En utilisant la méthode par identification des coefficients de même degré, déterminer quatre entiers a, b, c et d tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
$$Q(z)=\left(az^2+bz+1\right)\times\left(z^2+cz+d\right)$$
3. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Q(z)=0$.

Le corrigé

a.1. Pour résoudre la première équation $z^2+4z+11=0$, calculons son discriminant :

$$\Delta=4^2-4\times1\times11=16-44=\underline{-28=-4\times7=\left(2\boldsymbol{i}\times\sqrt{7}\right)^2}$$

Son discriminant étant négatif, l'équation admet deux solutions complexes, non réelles et conjuguées :

$$z=\frac{-4-2\boldsymbol{i}\sqrt{7}}{2\times1}=\frac{\cancel{2}\times\left(-2-\boldsymbol{i}\sqrt{7}\right)}{\cancel{2}}=\underline{-2-\boldsymbol{i}\sqrt{7}}\quad\underline{\text{ou}}\quad z=\frac{-4+2\boldsymbol{i}\sqrt{7}}{2\times1}=\underline{-2+\boldsymbol{i}\sqrt{7}}$$

a.2. Pour résoudre la seconde équation $2z^2-4z+1=0$, calculons aussi son discriminant :

$$\Delta=(-4)^2-4\times2\times1=16-8=\underline{8=4\times2=\left(2\times\sqrt{2}\right)^2}$$

Son discriminant étant positif, cette équation admet deux solutions réelles :

$$z=\frac{-(-4)-2\sqrt{2}}{2\times2}=\frac{4-2\sqrt{2}}{4}=\underline{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\quad\underline{\text{ou}}\quad z=\frac{-(-4)+2\sqrt{2}}{2\times2}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4}=\underline{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

b.1. Calculons l'image de $\boldsymbol{i}$ par le polynôme Q.

$$Q(\boldsymbol{i})=2\times\boldsymbol{i}^4+4\times\boldsymbol{i}^3+7\times\boldsymbol{i}^2-40\times\boldsymbol{i}+11$$

$$=2\times1+4\times(-\boldsymbol{i})+7\times(-1)-40\times\boldsymbol{i}+11=2-4\boldsymbol{i}-7-40\boldsymbol{i}+11=\underline{6-44\boldsymbol{i}}$$

b.2. On veut écrire le polynôme Q sous la forme :

$$Q(z) = \left(az^2 + bz + 1\right) \times \left(z^2 + cz + d\right)$$
$$= az^4 + acz^3 + adz^2 + bz^3 + bcz^2 + bdz + z^2 + cz + d$$

$$\boxed{2}z^4 + \boxed{4}z^3 + \boxed{7}z^2 + \boxed{(-40)}z + \boxed{11} = \boxed{a}z^4 + \boxed{(ac+b)}z^3 + \boxed{(ad+bc+1)}z^2 + \boxed{(bd+c)}z + \boxed{d}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux :

En z^4	$2 = a \Leftrightarrow \underline{a = 2}$	*D'un !*
En z^3	$4 = ac + b \Leftrightarrow 4 = 2c + b$ soit $\underline{b + 2c = 4}$	*A voir !*
En z	$7 = ad + bc + 1 \Leftrightarrow 6 = 2d + bc$ soit $\underline{bc + 2d = 6}$	*A voir !*
En z	$-40 = bd + c$ soit $\underline{bd + c = -40}$	*A voir !*
Constant	$11 = d \Leftrightarrow d = \underline{11}$	*De deux !*

La quatrième équation $11b + c = -40$ et la deuxième $b + 2c = 4$ forment un petit système de deux équations à deux inconnues b et c. Résolvons-le par substitution !

A partir de la deuxième équation, on exprime l'inconnue b en fonction de c.

$$b + 2c = 4 \Leftrightarrow b = \underline{4 - 2c}$$

Puis, dans la quatrième équation, on remplace b par ce qu'il vaut en c.

$$11\underbrace{(4-2c)}_{b} + c = -40 \Leftrightarrow 44 - 22c + c = -40 \Leftrightarrow -21c = -84 \Leftrightarrow c = \frac{-84}{-21} = \underline{4}$$

Il vient alors pour l'inconnue b :

$$b = 4 - 2c = 4 - 2 \times 4 = 4 - 8 = \underline{-4}$$

Enfin, la troisième équation va nous permettre de confirmer que les valeurs trouvées sont les bonnes :

$$bc + 2d = -4 \times 4 + 2 \times 11 = -16 + 22 = \underline{6}$$ C'est bon !

<u>Conclusion :</u> une écriture factorisée du polynôme Q est :

$$Q(z) = \underline{\left(2z^2 - 4z + 1\right) \times \left(z^2 + 4z + 11\right)}$$

b.3. Le polynôme Q ayant été cassé, la résolution de l'équation $Q(z)$ ne pose guère de problèmes. D'autant que tout a déjà était fait à l'occasion de la question **a**.

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{\left(2z^2 - 4z + 1\right) \times \left(z^2 + 4z + 11\right) = 0}^{\text{Un produit est nul...}}$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{\underbrace{2z^2 - 4z + 1 = 0}_{\text{Déjà résolue !}} \text{ ou } \underbrace{z^2 + 4z + 11 = 0}_{\text{Elle aussi !}}}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est !}}$$

Nous concluons que l'ensemble des solutions de l'équation $Q(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ est :

$$S = \left\{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} ; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} ; -2 - \boldsymbol{i}\sqrt{7} ; -2 + \boldsymbol{i}\sqrt{7}\right\}$$

Bon plan complexe !

L'énoncé

Dans cette question, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Dans ce dernier, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 7 + \boldsymbol{i} \qquad z_B = 6 - 6\boldsymbol{i} \qquad z_C = 2 + 6\boldsymbol{i}$$

Dans cet exercice, on utilisera seulement et exclusivement les outils fournis par la géométrie complexe.

a. Calculer le module $|z_C - z_A|$.
Prouver que le point A est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

b. Déterminer par le calcul l'affixe z_E du point E qui est le troisième sommet du parallélogramme OBEC.
Démontrer que les points A, C et E sont alignés.

c. Calculer l'affixe z_I du milieu I du segment [BC].

d. Déterminer l'affixe z_F du point F qui est défini par la relation vectorielle :

$$3 \times \overrightarrow{AF} + 2 \times \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC}$$

e. Simplifier le quotient $\dfrac{z_F - z_A}{z_I - z_A}$.
Que peut-on en déduire quant aux points A, I et F ?

Le corrigé

a. Autrement écrit, nous devons calculer la distance AC.

$$AC = |z_C - z_A| = |(2+6\boldsymbol{i}) - (7+\boldsymbol{i})| = |-5+5\boldsymbol{i}| = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Donc le point C appartient au cercle de centre A et de rayon $5\sqrt{2}$.

➲ Mais est-ce aussi le cas des points O et B ? Calculons leurs distances vis-à-vis de A :

$$AO = |z_O - z_A| = |0 - (7+\boldsymbol{i})| = |-7-\boldsymbol{i}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

$$AB = |z_B - z_A| = |(6-6\boldsymbol{i}) - (7+\boldsymbol{i})| = |-1-7\boldsymbol{i}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

Conclusion : comme les O, B et C sont équidistants du point A, alors A est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

b. Dire que le OBEC est un parallélogramme signifie que :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{CE}} = z_{\overrightarrow{OB}} \Leftrightarrow z_E - z_C = z_B - z_O$$
$$\Leftrightarrow z_E = z_B + z_C - z_O = (6-6\boldsymbol{i}) + (2+6\boldsymbol{i}) - 0 = 8$$

➲ Calculons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.

$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -5+5\boldsymbol{i}$$
$$z_{\overrightarrow{AE}} = z_E - z_A = 8 - (7+\boldsymbol{i}) = 1 - \boldsymbol{i}$$

Nous observons :

$$z_{\overrightarrow{AC}} = -5+5\boldsymbol{i} = -5 \times (1-\boldsymbol{i}) = -5 \times z_{\overrightarrow{AE}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -5 \times \overrightarrow{AE}$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ étant colinéaires, les points A, C et E sont alignés.

c. L'affixe z_I du milieu I du segment [BC] est donnée par la formule :

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{(6-6\boldsymbol{i}) + (2+6\boldsymbol{i})}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

d. La relation vectorielle définissant le point F se traduit sous forme complexe par :

$$3 \times \overrightarrow{AF} + 2 \times \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3 \times (z_F - z_A) + 2 \times (z_F - z_B) = z_C - z_B$$
$$\Leftrightarrow 3z_F - 3z_A + 2z_F - 2z_B = z_C - z_B$$
$$\Leftrightarrow 5z_F = z_C - z_B + 3z_A + 2z_B = 3z_A + z_B + z_C$$
$$\Leftrightarrow z_F = \frac{3z_A + z_B + z_C}{5}$$

Remplaçons les affixes connues par leurs valeurs !

$$z_F = \frac{3z_A + z_B + z_C}{5} = \frac{3 \times (7+\boldsymbol{i}) + (6-6\boldsymbol{i}) + (2+6\boldsymbol{i})}{5} = \frac{21+3\boldsymbol{i}+8}{5} = \frac{29+3\boldsymbol{i}}{5} = 5{,}8 + 0{,}6\boldsymbol{i}$$

e. Simplifions le quotient proposé !

$$\frac{z_F - z_A}{z_I - z_A} = \frac{(5{,}8+0{,}6\boldsymbol{i}) - (7+\boldsymbol{i})}{4 - (7+\boldsymbol{i})} = \frac{-1{,}2-0{,}4\boldsymbol{i}}{-3-\boldsymbol{i}}$$
$$= \frac{(-1{,}2-0{,}4\boldsymbol{i}) \times (-3+\boldsymbol{i})}{(-3-\boldsymbol{i}) \times (-3+\boldsymbol{i})} = \frac{3{,}6 - \cancel{1{,}2\boldsymbol{i}} + \cancel{1{,}2\boldsymbol{i}} + 0{,}4}{(-3)^2 - \boldsymbol{i}^2} = \frac{4}{9-(-1)} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

➲ Ce quotient est celui des affixes des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AI}$. Ainsi :

$$\frac{z_{\overrightarrow{AF}}}{z_{\overrightarrow{AI}}} = 0{,}4 \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AF}} = 0{,}4 \times z_{\overrightarrow{AI}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = 0{,}4 \times \overrightarrow{AI}$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires; donc les points A, I et F sont alignés.

Des complexes de (presque) bacheliers

L'énoncé

On considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z)=z^3+(14-\boldsymbol{i})\times z^2+(74-14\boldsymbol{i})\times z-74\boldsymbol{i}$$

a. Calculer l'image $P(\boldsymbol{i})$.

b. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z)=(z-\boldsymbol{i})\times(z^2+az+b)$$

c. Résoudre dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Dans ce repère, on considère les points A, B et I d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}}=-7+5\boldsymbol{i} \qquad z_{\text{B}}=-7-5\boldsymbol{i} \qquad z_{\text{I}}=\boldsymbol{i}\sqrt{2}$$

a. Déterminer l'affixe z_{J} du point J défini par : $z_{\text{J}}=z_{\text{I}}\times e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}$.

b. On note C le point d'affixe $z_{\text{C}}=1+\boldsymbol{i}$.
Prouver que le triangle OCI est isocèle mais qu'il n'est pas équilatéral.

c. Déterminer l'affixe z_{N} du point N tel que ABCN soit un parallélogramme.

d. On appelle D le point d'affixe $z_{\text{D}}=1+11\boldsymbol{i}$.

Calculer $Z=\dfrac{z_{\text{A}}-z_{\text{C}}}{z_{\text{D}}-z_{\text{B}}}$ sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Interpréter géométriquement le quotient Z, puis en déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Le corrigé

1.a. Calculons l'image de $\boldsymbol{i}$ par le polynôme P.

$$P(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}^3+(14-\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{i}^2+(74-14\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{i}-74\boldsymbol{i}=\cancel{\boldsymbol{i}^3}+\cancel{14\boldsymbol{i}^2}-\cancel{\boldsymbol{i}^3}+\cancel{74\boldsymbol{i}}-\cancel{14\boldsymbol{i}^2}-\cancel{74\boldsymbol{i}}=\underline{0}$$

Conclusion : comme son image par le polynôme $P(z)$ est nulle, alors le complexe $\boldsymbol{i}$ estl'une de ses racines. Par conséquent, le polynôme $P(z)$ est factorisable par $z-\boldsymbol{i}$.

1.b. Procédons avec la méthode par identification des coefficients de même degré.
On veut écrire le polynôme $P(z)$ sous la forme :

$$\begin{aligned}P(z)&=(z-\boldsymbol{i})\times(z^2+a\times z+b)\\&=z^3+a\times z^2+b\times z-\boldsymbol{i}\times z^2-\boldsymbol{i}a\times z-\boldsymbol{i}b\end{aligned}$$

$$z^3+\boxed{(14-\boldsymbol{i})}\times z^2+\boxed{(74-14\boldsymbol{i})}\times z+\boxed{(-74\boldsymbol{i})}=z^3+\boxed{(a-\boldsymbol{i})}\times z^2+\boxed{(b-\boldsymbol{i}a)}\times z+\boxed{(-\boldsymbol{i}b)}$$

Or deux polynômes égaux ont leurs coefficients de même degré égaux. Par conséquent :

Egalité en z^3 : $1=1$ On s'en serait douté !

Egalité en z^2 : $14-\cancel{\boldsymbol{i}}=a-\cancel{\boldsymbol{i}} \Rightarrow a=\underline{14}$

Egalité en z : $74-\cancel{14\boldsymbol{i}}=b-\cancel{\boldsymbol{i}a} \Rightarrow b=\underline{74}$

Egalité en z^0 : $-74\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}b \Rightarrow b=\underline{74}$ Vérification !

1.c. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$ ...mais sans recourir au discriminant !

$$\begin{aligned}P(z)=0 &\Leftrightarrow (z-\boldsymbol{i})\times\overbrace{(z^2+14\times z+74)}^{\text{Factorisons cette forme du second degré avec la méthode de la forme canonique}}=0\\
&\Leftrightarrow (z-\boldsymbol{i})\times\left[z^2+2\times z\times 7+74\right]=0\\
&\Leftrightarrow (z-\boldsymbol{i})\times\left[(z+7)^2-49+74\right]=0 \Leftrightarrow (z-\boldsymbol{i})\times\left[(z+7)^2+25\right]=0\\
&\Leftrightarrow (z-\boldsymbol{i})\times\left[(z+7)^2-(-25)\right]=0 \Leftrightarrow (z-\boldsymbol{i})\times\left[(z+7)^2-(5\boldsymbol{i})^2\right]=0\\
&\Leftrightarrow \overbrace{(z-\boldsymbol{i})\times\left[(z+7)+5\boldsymbol{i}\right]\times\left[(z+7)-5\boldsymbol{i}\right]}^{\text{Ce produit est nul...}}=0\\
&\Leftrightarrow \overbrace{z-\boldsymbol{i}=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad z+7+5\boldsymbol{i}=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad z+7+5\boldsymbol{i}=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est !}}\\
&\qquad z=\underline{\boldsymbol{i}} \qquad\qquad z=\underline{-7-5\boldsymbol{i}} \qquad\qquad z=\underline{-7+5\boldsymbol{i}}\end{aligned}$$

2.a. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}z_J=z_I\times e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}&=\boldsymbol{i}\sqrt{2}\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&=\boldsymbol{i}\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}\times\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}\times\boldsymbol{i}^2=\frac{2}{2}\times\boldsymbol{i}-\frac{2}{2}\times(-1)=\underline{\boldsymbol{i}+1}\end{aligned}$$

Et comme par hasard, le point J correspond à C.

2.b. Calculons les longueurs des trois côtés du triangle OCI.

$$\text{OC}=|z_{\text{C}}-z_{\text{O}}|=|(1+\boldsymbol{i})-0|=|1+\boldsymbol{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\underline{\sqrt{2}}$$

$$\text{OI}=|z_{\text{I}}-z_{\text{O}}|=|\boldsymbol{i}\sqrt{2}-0|=|\boldsymbol{i}\sqrt{2}|=\sqrt{0^2+\sqrt{2}^2}=\underline{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\text{CI}&=|z_{\text{I}}-z_{\text{C}}|=|\boldsymbol{i}\sqrt{2}-(1+\boldsymbol{i})|=|-1+\boldsymbol{i}(\sqrt{2}-1)|\\&=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{1+2-2\times\sqrt{2}\times1+1}=\sqrt{4-2\sqrt{2}}\neq\underline{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Conclusion : le triangle OCI est seulement isocèle en O.

2.c. Les points A et B se placent à l'aide du quadrillage car leurs coordonnées sont entières. I est l'un des deux points d'intersection du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$; ce cercle passe par le point C d'affixe $z_C = 1+\boldsymbol{i}$.

2.d. Comme ABCN est un parallélogramme, alors nous avons la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{CN}} = z_{\overrightarrow{BA}} \Leftrightarrow z_N - z_C = z_A - z_B$$

$$\Leftrightarrow z_N = z_A - z_B + z_C$$

$$= (-7+5\boldsymbol{i}) - (-7-5\boldsymbol{i}) + (1+\boldsymbol{i}) = -7+5\boldsymbol{i}+7+5\boldsymbol{i}+1+\boldsymbol{i} = \underline{1+11\boldsymbol{i}}$$

Et comme les choses sont bien faîtes, N est confondu avec D.

2.e. Simplifions le quotient complexe qui nous est proposé :

$$Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \frac{(-7+5\boldsymbol{i}) - (1+\boldsymbol{i})}{(1+11\boldsymbol{i}) - (-7-5\boldsymbol{i})} = \frac{-8+4\boldsymbol{i}}{8+16\boldsymbol{i}}$$

$$= \frac{(-8+4\boldsymbol{i}) \times (8-16\boldsymbol{i})}{(8+16\boldsymbol{i}) \times (8-16\boldsymbol{i})} = \frac{-64+128\boldsymbol{i}+32\boldsymbol{i}+64}{(8)^2 - (16\boldsymbol{i})^2} = \frac{160\boldsymbol{i}}{64-(-256)}$$

$$= \frac{160\boldsymbol{i}}{320} = \overbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{i}}^{\text{Forme algébrique}} = \overbrace{\frac{1}{2} \times e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}}^{\text{Forme exponentielle}}$$

Interprétons géométriquement ce quotient :

- Sous l'angle de son module

$$|Z| = \frac{CA}{BD} = \left|\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}\right| = \left|\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow CA = \frac{BD}{2}$$

- Sous l'angle de ses arguments :

$$\arg(Z) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}\right) = \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi$$

Conclusion : comme les diagonales [AC] et [BD] du parallélogramme ABCD se coupent perpendiculairement, alors ce quadrilatère est un losange. Mais ce n'est pas un rectangle (donc pas un carré) car ses deux diagonales ne sont pas de même longueur.

Espace nickel !

L'énoncé

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ dans lequel se trouvent les points de coordonnées :

$$A(0;2;2) \qquad B(3;0;1) \qquad C(4;-3;-1) \qquad D(4;-13;24)$$

a. Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. On appelle E le quatrième sommet du parallélogramme ABCE.

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E.
2. Prouver que le triangle ABC est isocèle en B.
   Que peut-on en déduire quant au quadrilatère ABCE ?
3. Déterminer une mesure en degrés au dixième de degré près de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$.
4. Calculer les coordonnées du milieu I du segment [AC].
5. Démontrer que l'aire du quadrilatère ABCE est égale à $5\sqrt{3}$ unités d'aire.

c. On appelle $\mathcal{P}$ le plan défini par les points A, B et C.

1. Prouver que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\-7\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
3. Prouver que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

d. On appelle Δ la droite perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ passant par le point D.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
2. Vérifier que le point I n'appartient pas à la droite Δ.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point H qui est l'intersection de la droite Δ et du plan $\mathcal{P}$.

e. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$$\frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Calculer le volume exprimé en unités de volume de la pyramide ABCED.

Le corrigé

a. Pour définir un plan, il faut et il suffit que les points A, B et C ne soient pas alignés. Autrement dit, que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne soient pas colinéaires. Regardons leurs coordonnées !

	$\overrightarrow{AB}$		$\overrightarrow{AC}$
Abscisses	3	$\xrightarrow{\times 4/3}$	4
Ordonnées	-2	$\xrightarrow{\times 2,5}$	-5
Cotes	-1	$\xrightarrow{\times 3}$	-3

<u>Conclusion :</u> leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés; ils définissent un plan qui sera appelé $\mathcal{P}$ dans les questions **c**.

b.1. Comme ABCE est un parallélogramme, alors ces quatre points vérifient l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_E \\ y_E-2 \\ z_E-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{Deux vecteurs égaux...}} \Leftrightarrow \underbrace{x_E=1 \quad \text{et} \quad y_E-2=-3 \quad \text{et} \quad z_E-2=-2}_{\text{...ont des coordonnées égales}}$$

$$y_E=-1 \qquad z_E=0$$

<u>Conclusion :</u> le point E a pour coordonnées $(1;-1;0)$.

b.2. Calculons les longueurs des deux côtés issus du sommet B.

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow BA=\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow BC=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$$

<u>Conclusion :</u> les côtés [BA] et [BC] ayant des longueurs égales, le triangle ABC est isocèle en B. Quant au parallélogramme ABCE, deux côtés consécutifs égaux font de lui un losange...dont les diagonales se coupent à angle droit.

b.3. Pour déterminer une mesure approchée de l'angle $\widehat{ABC}$, nous allons utiliser une caractérisation du produit scalaire $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ que nous commençons par calculer :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}=-3\times 1+2\times(-3)+1\times(-2)=-3-6-2=-11$$

Mais ce produit scalaire est aussi égal à :

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC}=\frac{-11}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{ABC}=\arccos\left(-\frac{11}{14}\right)\approx 141,8°$$

b.4. Les coordonnées du milieu I de la diagonale [AC] sont données par les formules :

$$x_I=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{0+4}{2}=2$$

$$y_I=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{2+(-3)}{2}=-0,5$$

$$z_I=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{2+(-1)}{2}=0,5$$

b.5. Le losange ABCE est constitué de quatre triangles ABI rectangle en I.

L'aire du triangle ABI est égale à $\dfrac{\text{base AI}\times\text{hauteur BI}}{2}$. Calculons ces deux longueurs :

$$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix} -2 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow IA=\sqrt{(-2)^2+2,5^2+1,5^2}=\sqrt{4+6,25+2,25}=\sqrt{12,5}$$

$$\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow BC=\sqrt{1^2+0,5^2+0,5^2}=\sqrt{1+0,25+0,25}=\sqrt{1,5}$$

Nous en déduisons :

$$\text{Aire de ABCE}=4\times\frac{\sqrt{12,5}\times\sqrt{1,5}}{2}$$

$$=2\times\sqrt{12,5\times 1,5}=2\times\sqrt{\frac{75}{4}}=\cancel{2}\times\frac{\sqrt{25}\times\sqrt{3}}{\cancel{2}}=5\sqrt{3}\text{ unités d'aire}$$

c.1. Vérifions si $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont directeurs pour le plan $\mathcal{P}$.

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}=1\times 3+5\times(-2)+(-7)\times(-1)=3-10+7=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}=1\times 4+5\times(-5)+(-7)\times(-3)=4-25+21=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\overrightarrow{AC}$$

Comme le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont non colinéaires et directeurs pour le plan $\mathcal{P}$, alors $\vec{u}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

c.2. Le plan $\mathcal{P}$ est parfaitement défini par son vecteur normal $\vec{u}$ et l'un de ses points, par exemple C. Par conséquent :

$$M(x;y;z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+3 \\ z+1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x-4)\times 1 + (y+3)\times 5 + (z+1)\times(-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-4+5y+15-7z-7=0 \Leftrightarrow x+5y-7z+4=0$$

Conclusion : une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $x+5y-7z+4=0$.

c.3. Les coordonnées du point D vérifient-elles l'équation du plan $\mathcal{P}$ auquel A, B et C appartiennent ?

$$x_D + 5y_D - 7z_D + 4 = 4 + 5\times(-13) - 7\times 24 + 4 = 4 - 65 - 168 + 4 = -225 \neq 0$$

Conclusion : le point D n'appartient pas au plan défini par les points A, B et C.

d.1. La perpendiculaire Δ passe par le point D et a pour vecteur directeur $\vec{u}$. Par suite :

$$M(x;y;z) \in \Delta \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{DM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe un réel } t \text{ tel que } \overrightarrow{DM} = t\times\vec{u} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x-4 = t\times 1 \\ y-(-13) = t\times 5 \\ z-24 = t\times(-7) \end{cases}$$

Conclusion : une représentation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = 4+t \\ y = -13+5t \\ z = 24-7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

d.2. Existe-t-il un réel t tel que les coordonnées du point I vérifient la représentation paramétrique de Δ ? C'est-à-dire tel que :

$x_I = 4+t$	et	$y_I = -13+5t$	et	$z_I = 24-7t$
$2 = 4+t$		$-0,5 = -13+5t$		$0,5 = 24-7t$
$t = -2$		$12,5 = 5t$		$-23,5 = -7t$
		$t = 2,5$		$t = \dfrac{23,5}{7}$

Clairement, la réponse est non ! Donc le point I n'appartient pas à la droite Δ. Ce n'est donc pas l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite Δ !

d.3. Le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite Δ est appelée H.

D'abord, H appartenant à la droite Δ, alors il existe un réel t_H tel que $\begin{cases} x_H = 4+t_H \\ y_H = 5t_H - 13 \\ z_H = 24-7t_H \end{cases}$

Ensuite, F faisant partie du plan $\mathcal{P}$, ses coordonnées en vérifient l'équation :

$$x_H + 5y_H - 7z_H + 4 = 0 \Leftrightarrow (4+t_H) + 5\times(5t_F - 13) - 7\times(24-7t_F) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + t_H + 25t_H - 65 - 168 + 49t_H + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 75t_H - 225 = 0 \Leftrightarrow 75t_H = 225 \Leftrightarrow t_H = 3$$

Nous en concluons :

$$x_H = 4+3 = 7 \qquad y_H = 5\times 3 - 13 = 2 \qquad z_H = 24 - 7\times 3 = 3$$

e. Dans la pyramide ABCED, la hauteur relative à la base ABCE est le segment [HD]. Calculons la longueur de ce dernier :

$$\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} -3 \\ -15 \\ 21 \end{pmatrix} \Rightarrow HD = \sqrt{(-3)^2 + (-15)^2 + 21^2} = \sqrt{9+225+441} = \sqrt{675}$$

Il vient alors :

$$\text{Volume de ABCED} = \frac{\text{Aire de ABCE} \times \text{HD}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{675}\times 5\sqrt{3}}{3} = \frac{5\times\sqrt{2025}}{3} = \frac{5\times 45}{3} = 75 \text{ unités de volume}$$

Droite contre plan : une histoire paramétrique

L'énoncé

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On définit les points :

$$A(3;0;0) \qquad B(2;2;1) \qquad C(2;4;4)$$

Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = 2t+7 \\ y = 2t-4 \\ z = 7t-2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Sans justifications, donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ directeur pour la droite d.
2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils coplanaires ? On justifiera sa réponse.
3. Donner une représentation paramétrique du plan (ABC).
4. Conclure quant à la position relative de la droite d et du plan (ABC).

Le corrigé

1. Vu sa représentation paramétrique, un vecteur directeur de la droite d est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}$.

2. Existe-t-il deux réels α et β tels que

$$\vec{u} = \alpha\times\overrightarrow{AB}+\beta\times\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix} = \alpha\times\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\times\begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -\alpha-\beta & \textbf{(1)} \\ 2 = 2\alpha+4\beta & \textbf{(2)} \\ 7 = \alpha+4\beta & \textbf{(3)} \end{cases} ?$$

Procédons par substitution ! A partir de l'équation ***(1)***, nous exprimons α en fonction de β.

$$-\alpha-\beta = 2 \Leftrightarrow \alpha = \underline{-2-\beta}$$

Puis, nous remplaçons α par ce qu'il vaut en β dans les équations ***(2)*** et ***(3)***.

$$\textbf{(2)} : 2\times(-2-\beta)+4\beta = 2 \Leftrightarrow -4-2\beta+4\beta = 2 \Leftrightarrow 2\beta = 6 \Leftrightarrow \beta = \underline{3}$$
$$\textbf{(3)} : (-2-\beta)+4\beta = 7 \Leftrightarrow -2-\beta+4\beta = 7 \Leftrightarrow 3\beta = 9 \Leftrightarrow \beta = \underline{3}$$

Les deux équations nous conduisant à la même valeur de β, c'est donc que le système linéaire 3×2 admet un unique couple solution. Il ne nous reste plus qu'à calculer α.

$$\alpha = -2-\beta = -2-3 = \underline{-5}$$

<u>Conclusion :</u> comme $\vec{u} = 3\times\overrightarrow{AC}-5\times\overrightarrow{AB}$, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Ce qui implique que la droite d qui est dirigé par $\vec{u}$ est parallèle au plan (ABC) qui est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Reste à savoir s'il s'agit d'un parallélisme strict ou inclus.

3. Le plan (ABC) est défini par le point A et les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont non colinéaires. Par suite :

$$M(x;y;z) \in \text{plan}(ABC) \Leftrightarrow \text{il existe deux réels } \mu \text{ et } \nu \text{ tels que } \overrightarrow{AM} = \mu\times\overrightarrow{AB}+\nu\times\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-3\\y\\z\end{pmatrix} = \mu\times\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\nu\times\begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = -\mu-\nu \\ y = 2\mu+4\nu \\ z = \mu+4\nu \end{cases}$$

<u>Conclusion :</u> une représentation paramétrique du plan ABC est :

$$\begin{cases} x = 3-\mu-\nu \\ y = 2\mu+4\nu \\ z = \mu+4\nu \end{cases} \text{ avec } \mu \text{ et } \nu \text{ qui sont deux réels}$$

4. Comme le vecteur $\vec{u}$ directeur pour d est coplanaire avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont directeurs pour le plan (ABC), alors la droite d est parallèle au plan (ABC).
Reste à savoir s'il s'agit d'un parallélisme strict ou d'une inclusion.
D'après sa représentation paramétrique, un point de la droite d est $E(7;-4;-2)$.
Ce point E appartient-il aussi au plan (ABC) ? Autrement dit, existe-t-il deux réels μ et ν tels que :

$$\begin{cases} x_E = 3-\mu-\nu \\ y_E = 2\mu+4\nu \\ z_E = \mu+4\nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 3-\mu-\nu \\ -4 = 2\mu+4\nu \\ -2 = \mu+4\nu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\mu-\nu = 4 & \textbf{(1)} \\ 2\mu+4\nu = -4 & \textbf{(2)} \\ \mu+4\nu = -2 & \textbf{(3)} \end{cases} ?$$

Pour résoudre ce système linéaire 3×2, procédons par substitution ! A partir de ***(1)***, on exprime μ en fonction de ν :

$$-\mu-\nu = 4 \Leftrightarrow \mu = \underline{-4-\nu}$$

Puis, on remplace μ par ce qu'il vaut en ν dans l'équation ***(2)*** :

$$2\times(-4-\nu)+4\nu = -4 \Leftrightarrow -8-2\nu+4\nu = -4 \Leftrightarrow 2\nu = 4 \Leftrightarrow \nu = \underline{2}$$

Il vient alors pour l'inconnue μ :

$$\mu = -4-2 = \underline{-6}$$

Pour que le couple $(\mu = -6; \nu = 2)$ soit solution du système 3×2, encore faut-il qu'il vérifie l'équation ***(3)***.

$$\mu+4\nu = -6+4\times2 = -6+8 = \underline{2} \Rightarrow (-6;2) \text{ est aussi solution de } \textbf{(3)}$$

<u>Conclusion :</u> le système 3×2 admet pour unique solution $(-6;2)$, le point E appartient au plan (ABC) car les coordonnées du premier vérifient la représentation paramétrique du second.
La droite d ayant un point dans le plan (ABC), nous en déduisons qu'elle est entièrement incluse dans ce plan (ABC).

Section et compagnie !

L'énoncé

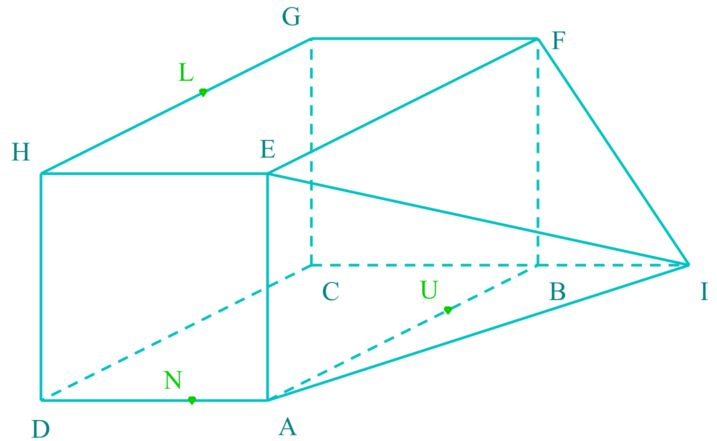
Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un pavé droit de dimensions :

AB = 4 centimètres AD = 3 centimètres AE = 3 centimètres

I est le point de la droite (BC) situé à 2 centimètres du point B mais à l'opposé du point C.
De plus, on a placé les points L, N et U définis par les relations vectorielles :

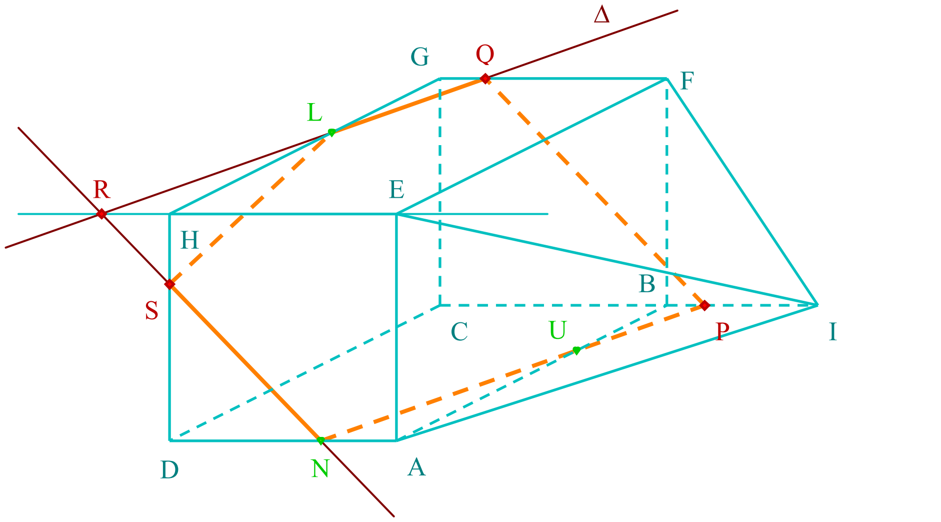
$$\overrightarrow{GL}=\frac{2}{5}\overrightarrow{GH} \qquad \overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{BU}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

Sur la figure ci-dessous, construire la section du plan (NUL) sur le solide AICDEFGH. La construction sera expliquée et justifiée avec des arguments géométriques.



Le corrigé

D'abord, l'intersection du plan (NUL) avec le plan de dessous (ABC) est évidemment la droite (NU). Cette dernière coupe la droite (BI) en un point que nous nommerons P.
<u>Ainsi, l'intersection du plan (NUL) avec la face AICD est le segment [NP].</u>
Ensuite, en application du théorème d'incidence, le plan (NUL) coupe les plans parallèles (ABC) et (EFG) suivant deux droites parallèles (NU) et Δ.
Cette droite Δ qui est l'intersection des plus (NUL) et (EFG) est donc la parallèle à la droite (NU) passant par L, point commun à ces deux plans.
Situées dans le plan de dessus (EFG), la droite Δ coupe les droites (FG) et (EH) en deux points que nous nommerons Q et R. Ce dernier point est extérieur au solide.
<u>Les intersections du plan (NUL) avec les faces EFGH et CIFG sont respectivement les segments [LQ] et [QP].</u>
Enfin, coincées dans le plan de devant (ADE), les droites (RN) et (DH) sont sécantes en un point S.
Les intersections du plan (NUL) avec les faces AEHD et CDHG sont respectivement les segments [SN] et [LS].
<u>Conclusion :</u> la section du plan (NUL) avec le solide AICDEFGH est le pentagone NPQLS.



<u>Note :</u> nous aurions pu obtenir le point S en appliquant le théorème d'incidence et en remarquant que le plan (NUL) coupait les plans parallèles (BCF) et (ADE) suivant les droites parallèles (PQ) et (NS).

Fonctions et analyse

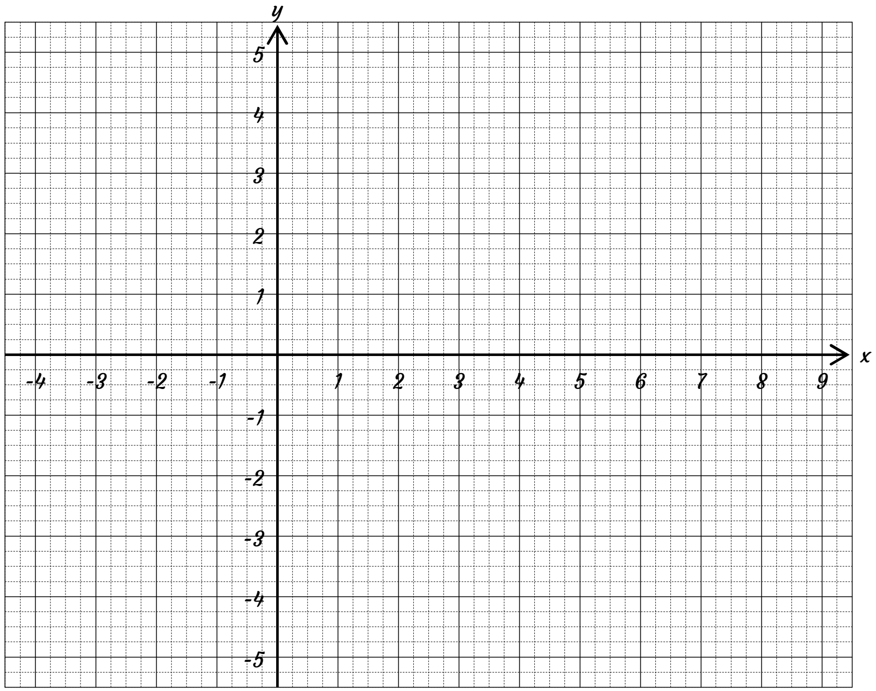
C'est quoi cette courbe ?

L'énoncé

Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe $\left(C_f\right)$ d'une fonction f qui vérifie toutes les conditions suivantes :

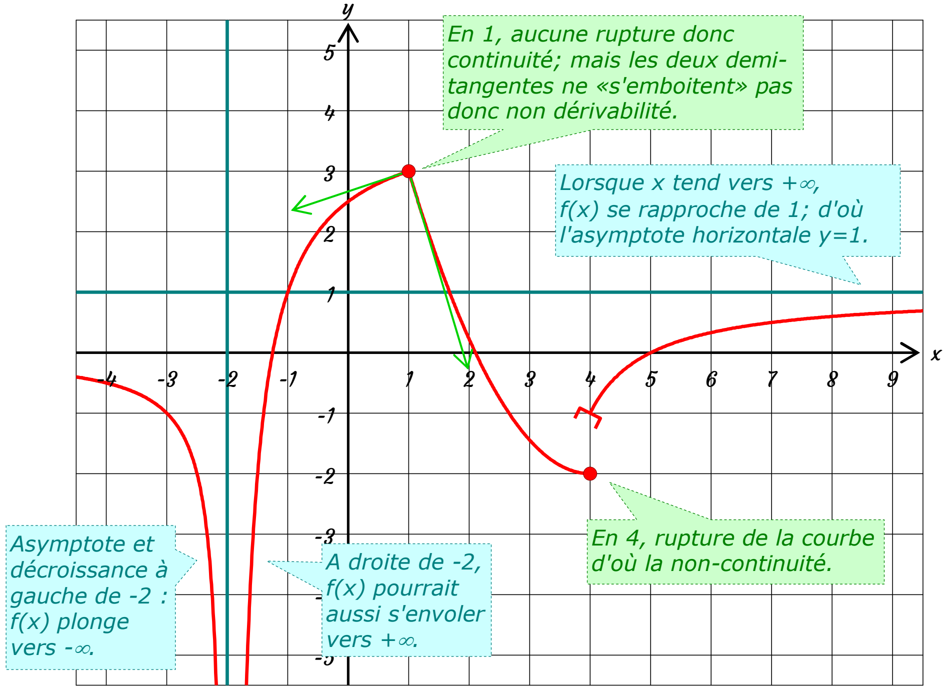
- La droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à $\left(C_f\right)$.
- La droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$.
- La fonction f est continue en $x=1$ et $f(1)$ est égal 3; par contre, la fonction f n'est pas dérivable en ce point.
- La fonction f n'est pas continue en $x=4$; cependant $f(4)=-2$.
- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$.

Hormis les cinq contraintes précédentes, la fonction f est toujours dérivable.



Le corrigé

Tenant compte de toutes les contraintes imposées, une courbe possible peut être :



La fonction qui en cachait une autre

L'énoncé

Les résultats de la sous-partie **a** de cet exercice sont utilisés dans la sous-partie **b**.

a. On appelle g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = -x^3 + 27x - 68$$

1. Calculer les images $g(-3)$ et $g(3)$.
2. Déterminer les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.
3. Calculer la dérivée $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au millième près.
5. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction f est définie par :

$$f(x) = \frac{-x^3 + 3x^2 + 7}{x^2 - 9}$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

1. Expliquer brièvement pourquoi l'ensemble de définition D_f de la fonction f est la réunion d'intervalles $]-\infty;-3[\cup]-3;3[\cup]3;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.
   Peut-on déduire de ces résultats l'existence d'une quelconque asymptote ? Si oui, on précisera son équation.
3. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers -3 par la gauche, puis par la droite.
   Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 3 par la gauche, puis par la droite.
   Ces résultats impliquent-ils l'existence d'asymptotes ? Si oui, on donnera leurs équations.
4. Démontrer que, pour tout réel x de l'ensemble de définition D_f, on a :
   $$f'(x) = \frac{x \times g(x)}{\left(x^2 - 9\right)^2}$$
5. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur D_f.

Le corrigé

a.1. Calculons les images de -3 et 3 par la fonction g.

$$g(-3) = -(-3)^3 + 27 \times (-3) - 68 = -(-27) - 81 - 68 = \boxed{-122}$$
$$g(3) = -3^3 + 27 \times 3 - 68 = -27 + 81 - 68 = \boxed{-14}$$

a.2. Intéressons-nous à la limite de g en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} -x^3 + 27x - 68 = -(-\infty) + (-\infty) - 68 = \underbrace{(+\infty) + (-\infty)}_{\text{Forme indéterminée}} - 68$$

Pour lever cette forme indéterminée, nous allons factoriser le polynôme $g(x)$ par son terme non semblant le plus fort : x^3.

$$g(x) = x^3 \times \left(-1 + 27 \times \frac{x}{x^3} - \frac{68}{x^3}\right) = \boxed{x^3 \times \left(-1 + \frac{27}{x^2} - \frac{68}{x^3}\right)}$$

Avec cette dernière écriture, il vient :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = (-\infty) \times \left(-1 + \frac{27}{+\infty} - \frac{68}{-\infty}\right) = (-\infty) \times \left(-1 + 0^+ - 0^-\right) = (-\infty) \times (-1) = \boxed{+\infty}$$

De la même manière, en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = (+\infty) \times \left(-1 + \frac{27}{+\infty} - \frac{68}{+\infty}\right) = (+\infty) \times \left(-1 + 0^+ - 0^+\right) = (+\infty) \times (-1) = \boxed{-\infty}$$

a.3. Le polynôme g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, nous avons :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -3x^2 + 27 \\ &= -3 \times \left(x^2 - 9\right) \\ &= -3 \times \left(x^2 - 3^2\right) \\ &= \boxed{-3 \times (x-3) \times (x+3)} \end{aligned}$$

Le signe de la dérivée $g'(x)$ donne les variations de la fonction g ⇨

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	↘	-122	↗	-14	↘	$-\infty$

a.4. D'abord, remarquons que, l'intervalle $]-3;+\infty[$, le maximum de la fonction g étant égal à -14, l'équation $g(x) = 0$ ne peut avoir de solution dans cet intervalle.

Mais sur l'intervalle $]-\infty;-3]$: la fonction g est continue car c'est un polynôme
la fonction g est strictement décroissante
0 appartient à l'intervalle image $g(]-\infty;-3]) = [-122;+\infty[$

Donc, en application du théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution appelée α et dont une valeur approchée au millième près est $-6{,}167$.

a.5. Vu les résultats des questions **a.3** et **a.4**, le tableau de signe de $g(x)$ est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

b.1. Les numérateur et dénominateur de la fonction rationnelle $f(x)$ sont des polynômes définis et dérivables sur $\mathbb{R}$. Seule la nullité du bas peut faire que le quotient n'existe pas.

Le quotient $f(x)$ n'existe pas $\Leftrightarrow$ Son dénominateur est nul

$\Leftrightarrow\ x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=3$

Nous en concluons que l'ensemble de définition de la fonction f est :

$$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3;3\} =]-\infty;-3[\cup]-3;3[\cup]3;+\infty[$$

b.2. Déterminons la limite de la fonction f en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3+3x^2+7}{x^2-9} = \frac{-(-\infty)+3\times(+\infty)+7}{(+\infty)-9} = \frac{+\infty}{+\infty} = \boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

Pour lever l'indétermination, nous allons factoriser numérateur et dénominateur de la fonction rationnelle par leurs termes nous paraissant les plus forts.

$$f(x) = \frac{-x^3+3x^2+7}{x^2-9} = \frac{x^3}{x^2}\times\frac{-1+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{1-\frac{9}{x^2}} = x\times\frac{-1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^3}}{1-\frac{9}{x^2}}$$

Usant de cette écriture, il vient alors :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)\times\frac{-1+0^-+\frac{7}{-\infty}}{1-\frac{9}{+\infty}} = (-\infty)\times\frac{-1+0^-+0^-}{1-0^+} = (-\infty)\times\frac{-1}{1} = +\infty$$

Employant cette même écriture, nous en déduisons qu'en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\times\frac{-1+0^++\frac{7}{+\infty}}{1-\frac{9}{+\infty}} = (+\infty)\times\frac{-1+0^++0^+}{1-0^+} = (+\infty)\times\frac{-1}{1} = -\infty$$

Conséquence : ces deux limites infinies aux infinis indiquent que la courbe (C_f) n'a aucune asymptote horizontale aux voisinages des infinis.

b.3. Lorsque x tend vers -3 par la gauche :

Le numérateur $-x^3+3x^2+7$ tend vers $-(-3)^3+3\times(-3)^2+7 = -(-27)+27+7 = 61$

Le dénominateur x^2-9 tend vers $(-3)^2-9 = 9-9 = 0$

Reste à connaître quel est alors le signe du dénominateur x^2-9. C'est l'objet du tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par suite :

A gauche de -3	A droite de -3
$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = \frac{61}{0^+} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = \frac{61}{0^-} = -\infty$

Conséquence : ces deux limites infinies indiquent que la droite d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

➲ De même, lorsque x tend vers 3 par la gauche :

Le numérateur $-x^3+3x^2+7$ tend vers $-3^3+3\times3^2+7 = -27+27+7 = 7$

Le dénominateur x^2-9 tend vers $3^2-9 = 9-9 = 0$

Utilisant le tableau de signe du dénominateur x^2-9, il vient :

A gauche de 3	A droite de 3
$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \frac{7}{0^-} = -\infty$	$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \frac{7}{0^+} = +\infty$

Conséquence : ces deux limites infinies indiquent que la droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

b.4. f est le quotient des fonctions

$u(x) = -x^3+3x^2+7$
$u'(x) = -3x^2+3\times2x+0$
$= -3x^2+6x$
Dérivable sur $\mathbb{R}$

et

$v(x) = x^2-9$
$v'(x) = 2x$
Dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}\backslash\{-3;3\}$.

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-3;3\}$.

Pour tout x de cet intervalle, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}$$

$$=\frac{\left(-3x^2+6x\right)\times\left(x^2-9\right)-2x\times\left(-x^3+3x^2+7\right)}{\left(x^2-9\right)^2}$$

$$=\frac{-3x^4+27x^2+\cancel{6x^3}-54x+2x^4-\cancel{6x^3}-14x}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{-x^4+27x^2-68x}{\left(x^2-9\right)^2}$$

$$=\frac{-x^3\times\boxed{x}+27x\times\boxed{x}-68\times\boxed{x}}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{\boxed{x}\times\left(-x^3+27x-68\right)}{\left(x^2-9\right)^2}=\boxed{\frac{x\times g(x)}{\left(x^2-9\right)^2}}$$

x	$-\infty$		α		-3		0		3		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$\left(x^2-9\right)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
f	$+\infty$	↘	$\approx 12{,}25$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$7/9$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$

Ignobles primitives

L'énoncé

a. Déterminer la primitive G définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction $g(x)=21x^6-12x+3+\frac{1}{x^2}-\frac{7}{\sqrt{x}}$ vérifiant $G(1)=-10$.

b. Déterminer la primitive H définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h(x)=\frac{20x}{\left(5x^2+1\right)^3}+\frac{20x}{\sqrt{5x^2+1}}$ vérifiant $H(0)=5$.

Le corrigé

a. La primitive G de la fonction $g(x)=21\times x^6-12\times x+3+\frac{1}{x^2}-7\times\frac{1}{\sqrt{x}}$ est de la forme :

$$G(x)=21\times\frac{1}{7}x^7-12\times\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{x}-7\times 2\sqrt{x}+Cste$$

$$=\boxed{3x^7-6x^2+3x-\frac{1}{x}-14\sqrt{x}+Cste}$$

On détermine la constante $Cste$ en sachant que :

$$G(1)=-10 \Leftrightarrow 3\times 1^7-6\times 1^2+3\times 1-\frac{1}{1}-14\times\sqrt{1}+Cste=-10$$

$$\Leftrightarrow 3-6+3-1-14+Cste=-10 \Leftrightarrow Cste=-10+15=\boxed{5}$$

<u>Conclusion :</u> une expression de la primitive G est :

$$\boxed{G(x)=3x^7-6x^2+3x-\frac{1}{x}-14\sqrt{x}+5}$$

b. La fonction h est constituée de deux termes :

- Le terme $\frac{20x}{\left(5x^2+1\right)^3}$ est presque de la forme $\frac{u'}{u^n}$ avec $\begin{cases}u(x)=5x^2+1\\ u'(x)=10x\\ n=3\end{cases}$

  En effet : $\frac{20x}{\left(5x^2+1\right)^3}=\frac{2\times 10x}{\left(5x^2+1\right)^3}=\boxed{2\times\frac{u'}{u^n}}$

  Une de ses primitives est $2\times\frac{-1}{n-1}\times\frac{1}{u^{n-1}}=\cancel{2}\times\frac{-1}{\cancel{2}}\times\frac{1}{\left(5x^2+1\right)^2}=\boxed{-\frac{1}{\left(5x^2+1\right)^2}}$

Le terme $\frac{20x}{\sqrt{5x^2+1}}$ est presque de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $\begin{array}{|l} u(x)=5x^2+1 \\ u'(x)=10x \end{array}$

En effet : $\frac{20x}{\sqrt{5x^2+1}}=\frac{2\times 10x}{\sqrt{5x^2+1}}=2\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$

Une de ses primitives est $2\times 2\sqrt{u}=4\times\sqrt{5x^2+1}$

Donc une expression de la primitive H est :

$$H(x)=-\frac{1}{\left(5x^2+1\right)^2}+4\sqrt{5x^2+1}+Cste$$

On détermine la constante $Cste$ en remarquant :

$$H(0)=5 \Leftrightarrow -\frac{1}{\left(5\times 0^2+1\right)^2}+4\times\sqrt{5\times 0^2+1}+Cste=5$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{1^2}+4\times\sqrt{1}+Cste=5 \Leftrightarrow -1+4+Cste=5 \Leftrightarrow Cste=2$$

<u>Conclusion :</u> une expression de la primitive H est :

$$H(x)=-\frac{1}{\left(5x^2+1\right)^2}+4\sqrt{5x^2+1}+2$$

Indifférence logarithmique

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]3;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-3}{x^2+7}\right)$$

a. Exprimer $f(7)$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(7)$.

b. Déterminer les limites de la fonction f à droite de 3, puis en $+\infty$.
On indiquera les éventuelles conséquences asymptotiques de ces deux limites.

c. Démontrer que, pour tout réel $x\in]3;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{-x^2+6x+7}{(x-3)\times\left(x^2+7\right)}$$

d. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]3;+\infty[$.

Le corrigé

a. Calculons l'image de 7 par la fonction f :

$$f(7)=\ln\left(\frac{7-3}{7^2+7}\right)=\ln\left(\frac{4}{49+7}\right)=\ln\left(\frac{4}{56}\right)=\ln\left(\frac{1}{14}\right)$$
$$=-\ln(14)=-\ln(2\times 7)=-\ln(2)-\ln(7)$$

b. Quand x tend vers 3 par la droite, $\begin{array}{|l} x-3 \text{ tend vers } 0^+ \\ x^2+7 \text{ tend vers } 3^2+7=16 \end{array}$

Donc $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x-3}{x^2+7}=\frac{0^+}{16}=0^+$ et par conséquent : $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\overbrace{\ln\left(0^+\right)}^{\text{Pas bien !}}=-\infty$.

La conséquence de cette limite infinie en un point est que la droite d'équation $x=3$ est une asymptote verticale à la courbe $\left(C_f\right)$.

➲ Quand x tend vers $+\infty$, $\begin{array}{|l} x-3 \text{ tend vers } +\infty \\ x^2+7 \text{ tend vers } (+\infty)+7=+\infty \end{array}$

Donc le quotient $\frac{x-3}{x^2+7}$ est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$ en $+\infty$.

Nous allons lever cette dernière en factorisant les numérateur et dénominateur par les termes nous semblant les plus forts : x et x^2.

Pour tout réel $x > 3$, nous avons :

$$\frac{x-3}{x^2+7} = \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} \times \frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{7}{x^2}} = \frac{1}{x} \times \frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{7}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+ \times \frac{1-0^+}{1+0^+} = 0^+ \times 1 = 0^+$$

Par suite :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \overbrace{\ln\left(0^+\right)}^{\text{Toujours pas bien !}} = -\infty$$

Cette limite n'a aucune conséquence asymptotique, ni verticale, ni horizontale !

c. Le logarithme du quotient étant égal à la différence des logarithmes, nous pouvons écrire que, pour tout réel x de l'intervalle $]3;+\infty[$, nous avons :

$$f(x) = \overbrace{\ln\left(\frac{x-3}{x^2+7}\right) = \ln(x-3) - \ln\left(x^2+7\right)}^{\text{Sur }]3;+\infty[\text{, les quantités } x-3 \text{ et } x^2+7 \text{ sont positives; donc leurs logarithmes existent.}}$$

Examinons les deux termes de cette dernière différence :

- $\ln(x-3) = \ln(u)$ avec $u(x) = x-3 \Rightarrow u'(x) = 1$
  Dérivable et positive sur $]3;+\infty[$

  Sa dérivée est $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{1}{x-3}$.

- $\ln\left(x^2+7\right) = \ln(u)$ avec $u(x) = x^2+7 \Rightarrow u'(x) = 2x$
  Dérivable et positive sur $\mathbb{R}$

  Sa dérivée est $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{2x}{x^2+7}$.

Nous en concluons que la fonction f est bien dérivable sur $]3;+\infty[$ et que pour tout réel x de cet intervalle, nous avons :

$$f'(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2x}{x^2+7}$$
$$= \frac{1\times\left(x^2+7\right) - 2x\times(x-3)}{(x-3)\times\left(x^2+7\right)} = \frac{x^2+7-2x^2+6x}{(x-3)\times\left(x^2+7\right)} = \frac{-x^2+6x+7}{(x-3)\times\left(x^2+7\right)}$$

Les deux facteurs du dénominateur sont positifs sur l'intervalle $]3;+\infty[$.

Pour connaître le signe du numérateur $N(x) = -x^2+6x+7$ qui est une forme du second degré, calculons son discriminant :

$$\Delta_{N(x)} = 6^2 - 4\times(-1)\times 7 = 36+28 = 64 = 8^2$$

Son discriminant étant positif, le numérateur $N(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-6-8}{2\times(-1)} = \frac{-14}{-2} = 7$$

et

$$x_2 = \frac{-6+8}{2\times(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

Et son coefficient dominant -1 est négatif.

Le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et de variation de la fonction f est celui ci-contre ⇨

x	3		7		$+\infty$
$N(x)$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$+$	|	$+$	
x^2+7		$+$	|	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	$-\infty$	↗	$-\ln(2)-\ln(7)$	↘	$-\infty$

Second degré logarithmique

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 - 12x + \left(4x - 2x^2\right) \times \ln(x)$$

On appelle $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative.

a. Recopier et compléter les égalités suivantes. On indiquera les limites établies en cours, les autres devront être justifiées.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \ldots\ldots \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \ldots\ldots$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \times \ln(x) = \ldots\ldots \qquad \lim_{x \to +\infty} x^2 \times \ln(x) = \ldots\ldots$$

b. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par la droite.

Quelle est la conséquence graphique de cette limite sur la courbe $\left(C_f\right)$?

c. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Quelle est la conséquence graphique de cette limite sur la courbe $\left(C_f\right)$?

d. Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $2 - \ln(x) > 0$. On conclura cette résolution en donnant l'ensemble des solutions.

e. Démontrer que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = (4x - 4) \times \left(2 - \ln(x)\right)$$

f. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Le cas échéant, on pourra donner des valeurs approchées des extrema.

g. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$? On justifiera sa réponse. On donnera des valeurs approchées au centième de ces éventuelles solutions.

Conclure en donnant le tableau de signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

h. On appelle F la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right) \times \ln(x) + \frac{17}{9}x^3 - 7x^2 + 1$$

Comment peut-on prouver que la fonction F est une primitive de la fonction f ? On demande juste d'indiquer la démarche et non de l'effectuer.

En déduire les variations de la fonction F sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Le corrigé

a. Complétons les limites demandées :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \ln(x) \times \frac{1}{x^2} = (-\infty) \times \frac{1}{0^+} = (-\infty) \times (+\infty) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \boxed{0^+} \quad \leftarrow \text{C'est une limite établie en cours.}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \times \ln(x) = \boxed{0^-} \quad \leftarrow \text{C'est une limite établie en cours.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \times \ln(x) = (+\infty) \times (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

b. De prime abord :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 5x^2 - 12x + \left(4x - 2x^2\right) \times \ln(x)$$

$$= 0^+ - 0^+ + \left(0^+ - 0^+\right) \times (-\infty) = 0 + \underbrace{0 \times (-\infty)}_{\text{Forme indéterminée}}$$

Mais il s'agit là d'une petite forme indéterminée car il suffit juste de distribuer $\ln(x)$, puis d'appliquer certains résultats du cours évoqués lors de la question précédente :

$$f(x) = 5x^2 - 12x + 4 \times \underbrace{x \ln(x)}_{\text{Cours !}} - 2 \times \underbrace{x^2 \ln(x)}_{\text{Cours !}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0^+ - 0^+ + 4 \times 0^- - 2 \times 0^- = \boxed{0}$$

La conséquence de cette limite n'est pas asymptotique mais que la courbe $\left(C_f\right)$ converge vers l'origine lorsque x tend vers 0. Ce faisant, même si la fonction f n'est pas définie en 0, on peut l'y prolonger par continuité en posant $f(0) = \boxed{0}$

c. De prime abord :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 5x^2 - 12x + \left(4x - 2x^2\right) \times \ln(x)$$

$$= \underbrace{(+\infty) - (+\infty)}_{\text{Forme indéterminée}} + \underbrace{\left[(+\infty) - (+\infty)\right]}_{\text{Re-forme indéterminée}} \times (+\infty)$$

Cette double forme indéterminée se lève en factorisant par le terme nous semblant le plus fort : x^2.

$$f(x) = \overbrace{\boxed{x^2} \times \left[5 - 12 \times \frac{x}{x^2}\right]}^{\text{On factorise par } x^2} + \overbrace{\boxed{x^2} \times \left(4 \times \frac{x}{x^2} - 2\right)}^{\text{On factorise par } x^2} \times \ln(x) = \boxed{x^2} \times \left[5 - \frac{12}{x} + \left(\frac{4}{x} - 2\right) \times \ln(x)\right]$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \overbrace{x^2\times\left[5-\frac{12}{x}+\left(\frac{4}{x}-2\right)\times\ln(x)\right]}^{f(x)}=(+\infty)\times\left[5-0^++\left(0^+-2\right)\times(+\infty)\right]$$
$$=(+\infty)\times\left[5-2\times(+\infty)\right]=(+\infty)\times(-\infty)=\underline{-\infty}$$

La conséquence graphique de cette limite est que la courbe (C_f) n'a pas d'asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

d. Résolvons dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation proposée :

$$2-\ln(x)>0 \Leftrightarrow -\ln(x)>-2 \Leftrightarrow \ln(x)<\ln\left(e^2\right) \Leftrightarrow \underline{x<e^2}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $\underline{]0;e^2[}$.

e. La fonction $f(x)=5x^2-12x+u\times v$ est une somme avec un produit dont les facteurs sont :

$u(x)=4x-2x^2$	et	$v(x)=\ln(x)$
$u'(x)=4-2\times 2x=4-4x$		$v'(x)=1/x$
Dérivable sur $\mathbb{R}$		Dérivable sur $]0;+\infty[$

Par conséquent, la fonction f est bien dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et :

$$f'(x)=5\times 2x-12+u'\times v+v'\times u$$
$$=10x-12+(4-4x)\times\ln(x)+\frac{1}{x}\times\left(4x-2x^2\right)$$
$$=10x-12+(4-4x)\times\ln(x)+4-2x$$
$$=\underline{8x-8+4\ln(x)-4x\ln(x)}$$

Peu courageux, nous n'irons pas plus loin. Développons la forme à laquelle nous devons aboutir :

$$(4x-4)\times(2-\ln(x))=8x-4x\ln(x)-8+4\ln(x)=\underline{f'(x)}$$

Nous avons répondu à la question !

f. C'est le signe de sa dérivée qui va nous donner les variations de la fonction f.
$f'(x)$ est le produit du facteur affine $4x-4$ et de $2-\ln(x)$ qui a fait l'objet de la question précédente.

$$4x-4 \text{ s'annule lorsque } 4x=4 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{4}{4}=\underline{1}$$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$4x-4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-\ln(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0^-	↘	-7	↗	$e^4-4e^2\approx 25{,}04$	↘	$-\infty$

Deux extrema sont à calculer :

$$f(1)=5\times 1^2-12\times 1+\left(4\times 1-2\times 1^2\right)\times\ln(1)=5-12+(4-2)\times 0=-7+0=\underline{-7}$$
$$f\left(e^2\right)=5\times\left(e^2\right)^2-12\times e^2+\left(4\times e^2-2\times\left(e^2\right)^2\right)\times\ln\left(e^2\right)$$
$$=5e^4-12e^2+\left(4e^2-2e^4\right)\times 2=5e^4-12e^2+8e^2-4e^4=\underline{e^4-4e^2}$$

g. D'abord, l'équation $f(x)=0$ n'a aucune solution sur l'intervalle $]0;1[$ car f est toujours strictement inférieure à 0 sur cet ensemble.

Ensuite, sur l'intervalle $\left[1;e^2\right]$:

- la fonction f est continue car elle est dérivable
- la fonction f est strictement croissante
- 0 appartient à l'intervalle image $f\left(\left[1;e^2\right]\right)=\left[-7;\underbrace{e^4-4e^2}_{\text{Positif}}\right]$

Donc, en application du théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[1;e^2\right]$ que nous appellerons α. Une de ses valeurs approchées au centième est $\alpha\approx\underline{2{,}66}$.

Enfin, sur l'intervalle $\left]e^2;+\infty\right[$:

- la fonction f est toujours continue
- la fonction f est strictement décroissante
- 0 appartient à l'intervalle image $f\left(\left]e^2;+\infty\right[\right)=\left]-\infty;e^4-4e^2\right[$

Donc, toujours en application du théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $\left]e^2;+\infty\right[$; une de ses valeurs approchées est $\beta \approx 10,89$

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ a, au total, deux solutions dans l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$. Nous en déduisons que le tableau de signe de *f* sur cet ensemble est :

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

h. On est toujours une primitive de sa dérivée. Par conséquent, on prouve que *F* est une primitive *f* en dérivant la fonction *F* et en établissant que la dérivée F' est égale à la fonction *f*.
Ensuite, c'est le signe de la dérivée $F'(x)=f(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *F*. Ainsi, la fonction *F* est-elle décroissante sur les intervalles $\left]0;\alpha\right[$ et $\left]\beta;+\infty\right[$, et elle est croissante sur l'intervalle $\left]\alpha;\beta\right[$.

Quotient ln vs carré

L'énoncé

La fonction *f* est définie pour tour réel *x* de l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{2-\ln(x)}{x^2}$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

a. Dans cette sous-partie, on étudie le comportement de la fonction *f* aux bornes de $\left]0;+\infty\right[$.

1. Déterminer la limite de la fonction *f* en 0.
   Cette limite implique-t-elle l'existence d'une asymptote pour la courbe (C_f) ? Si oui, on précisera son équation.
2. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction *f* en $+\infty$.
   Cette limite implique-t-elle l'existence d'une asymptote pour la courbe (C_f) ? Si oui, on précisera son équation.

b. Dans cette sous-partie, on étudie les variations de la fonction *f* sur $\left]0;+\infty\right[$.

1. Montrer que, pour toute réel strictement positif *x*, on a : $f'(x)=\frac{2\ln(x)-5}{x^3}$
2. Résoudre dans l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ l'inéquation $2\ln(x)-5>0$.
3. En déduire le signe de la dérivée $f'(x)$ et les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$. On pourra donner des valeurs approchées des extrema.

c. Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$.
On donnera une valeur approchée au centième près de cette unique solution α.

d. On appelle *F* la fonction définie sur l'intervalle $\left[1;+\infty\right[$ par :

$$F(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}$$

On appelle (u_n) la suite définie pour tout entier positif *n* par :

$$u_n=F(n)-F(1)$$

1. Prouver que la fonction *F* est une primitive de la fonction *f* sur $\left[1;+\infty\right[$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque *n* tend vers $+\infty$.

Le corrigé

a.1. Examinons le comportement de la fonction *f* à droite de 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2-\ln(x)}{x^2} = \frac{2-(-\infty)}{0^+} = (+\infty)\times\frac{1}{0^+} = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$$

Donc l'axe des ordonnées (Oy) est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

a.2. D'après un résultat du cours : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$. Par suite :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\times\frac{\ln(x)}{x} = 0^+ - 0^+\times 0^+ = 0$$

Donc l'axe des abscisses (Ox) est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b.1. *f* est le quotient $\frac{u}{v}$ des fonctions $u(x) = 2-\ln(x)$, $u'(x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$, Dérivable sur $]0;+\infty[$ et $v(x) = x^2$, $v'(x) = 2x$, Dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Par conséquent, la fonction *f* est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = \frac{u'\times v - v'\times u}{v^2} = \frac{-\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times(2-\ln(x))}{(x^2)^2} = \frac{-x-4x+2x\ln(x)}{x^4}$$

$$= \frac{2\boxed{x}\ln(x) - 5\boxed{x}}{x^4} = \frac{\cancel{x}\times(2\ln(x)-5)}{\cancel{x}\times x^3} = \frac{2\ln(x)-5}{x^3}$$

b.2. Résolvons dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation demandée :

$$2\ln(x) - 5 > 0 \iff 2\ln(x) > 5 \iff \ln(x) > 2,5 = \ln\left(e^{2,5}\right) \iff x > e^{2,5}$$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = \left]e^{2,5};+\infty\right[$$

Mais aussi que le numérateur de $f'(x)$ est positif sur cet intervalle, qu'il est nul en $e^{2,5}$ et enfin négatif entre 0 et cette valeur d'annulation.

b.3. Encore une fois, c'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *f*.

Calculons la valeur du minimum.

$$f\left(e^{2,5}\right) = \frac{2-\ln\left(e^{2,5}\right)}{\left(e^{2,5}\right)^2} = \frac{2-2,5}{e^{2\times 2,5}}$$

$$= \frac{-0,5}{e^5} = -\frac{e^{-5}}{2} \approx -0,0034$$

x	0		$e^{2,5}$		$+\infty$
$2\ln(x)-5$		$-$	0	$+$	
x^3		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	↘	$-e^{-5}/2$	↗	0

c. Sur l'intervalle $\left]0;e^{2,5}\right[$:

la fonction *f* est toujours continue
la fonction *f* est strictement décroissante
1 appartient à l'intervalle image $f\left(\left]0;e^{2,5}\right[\right) = \left]-e^{-5}/2;+\infty\right[$

Par conséquent, en application du théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]0;e^{2,5}\right[$. Avec la calculatrice, on détermine qu'une valeur approchée au centième de α est 1,31.

Sur l'intervalle $\left[e^{2,5};+\infty\right[$, l'équation $f(x) = 1$ n'a aucune solution car f est toujours négative sur cet ensemble.

Ainsi, l'équation $f(x) = 1$ admet une seule solution dans $]0;+\infty[= \left]0;e^{2,5}\right[\cup \left[e^{2,5};+\infty\right[$.

d.1. Pour prouver que $F(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{u}{v}$ est une primitive de *f*, il faut dériver cette première fonction et établir que sa dérivée est égale à la seconde.

Pour tout réel strictement positif *x*, nous pouvons écrire :

$$F'(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)' + \left(\frac{u}{v}\right)' = 0 - \frac{-1}{x^2} + \frac{u'\times v - v'\times u}{v^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1-\ln(x)}{x^2} = \frac{2-\ln(x)}{x^2} = f(x)$$

Conclusion : la fonction *F* est bien une primitive de *f* sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

d.2. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_n = F(n) - F(1)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{1} + \frac{\ln(1)}{1}\right) = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} - \overbrace{\left(1 - 1 + \frac{0}{1}\right)}^{=0} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

Il vient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} = 1 - 0^+ + 0^+ = 1$$

L'exponentielle vs carré et identité

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x différent de 1 par :

$$f(x) = \frac{e^x - 2x^2}{x - 1}$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

a. On appelle g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^x - 2x$$

1. Calculer la dérivée $g'(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - 2 > 0$.
3. En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. On calculera les extrema mais les limites ne sont pas demandées.
4. Justifier que $g(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
On indiquera les éventuelles conséquences asymptotiques de ces deux limites.

c. Déterminer les limites de la fonction f à gauche, puis à droite de 1.
On indiquera les éventuelles conséquences asymptotiques de ces deux limites.

d. Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-2)\times(e^x - 2x)}{(x-1)^2}$$

En déduire les variation de la fonction f sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Le corrigé

a.1. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$g'(x) = e^x - 2$$

a.2. Dans cette question, il s'agit de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$g'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > 2 \quad \xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Ln}} \quad x > \ln(2)$$

Conclusion : la dérivée $g'(x)$ est positive sur $]\ln(2);+\infty[$, nulle en $\ln(2)$ et négative avant.

a.3. Encore une fois, c'est le signe de la dérivée $g'(x)$ qui nous donne les variations de g.

Calculons le minimum de g qui est atteint en $x=\ln(2)$:

$$g(\ln(2)) = e^{\ln(2)} - 2\times\ln(2)$$
$$= \underline{2 - 2\times\ln(x) \approx 0{,}61}$$

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)=e^x-2$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$2-2\ln(2)$	$\nearrow$	

a.4. Son minimum $2-2\ln(2)$ est positif, la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

b. Commençons par la limite de f en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{0^+ - 2\times(+\infty)}{(-\infty)-1} = \frac{-\infty}{-\infty} = \boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

Cette indétermination se lève en factorisant les numérateur et dénominateur de $f(x)$ par leurs termes nous semblant les plus forts.

$$f(x) = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} \times \frac{\frac{e^x}{x^2}-2}{1-\frac{1}{x}} = x \times \frac{\frac{e^x}{x^2}-2}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} (-\infty)\times\frac{\frac{0^+}{+\infty}-2}{1-0^-} = (-\infty)\times\frac{0^+-2}{1}$$
$$= (-\infty)\times(-2) = \underline{+\infty}$$

Cette limite infinie n'a aucune conséquence asymptotique.

➲ De prime abord, en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{(+\infty)-2\times(+\infty)}{(+\infty)-1} = \frac{\boxed{\text{Forme indéterminée}}}{+\infty}$$

Encore une fois, nous allons factoriser haut et bas par leurs caïds.

$$f(x) = \underbrace{\boxed{\frac{e^x}{x}}}_{\text{Cours !}} \times \frac{1-\underbrace{\boxed{\frac{x^2}{e^x}}}_{\text{Recours !}}}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} (+\infty)\times\frac{1-\frac{1}{+\infty}}{1-0^+} = (+\infty)\times\frac{1-0^+}{1}$$
$$= (+\infty)\times 1 = \underline{+\infty}$$

Cette limite infinie à l'infini n'a pas de conséquence asymptotique.

c. Quand x tend vers 1, le numérateur e^x-2x^2 s'en va vers $e^1-2\times1^2=e-2$ qui est un réel positif. Quant au dénominateur $x-1$, il tend vers 0. Reste à savoir si c'est 0^+ ou 0^-.

Le tableau de signe de ce dénominateur est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{\overset{\oplus}{e-2}}{0^-} = \underline{-\infty} \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{\overset{\oplus}{e-2}}{0^+} = \underline{+\infty}$$

La conséquence de ces deux limites infinies en un point est que la droite d'équation $x=1$ est une asymptote à la courbe (C_f).

d. f est le quotient $\frac{u}{v}$ des fonctions

$u(x)=e^x-2x^2$
$u'(x)=e^x-2\times2x$
$=e^x-4x$
Dérivable sur $\mathbb{R}$

et

$v(x)=x-1$
$v'(x)=1$
Dérivable sur $\mathbb{R}$
et non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et pour tout réel x de cet ensemble :

$$f'(x) = \frac{u'\times v - v'\times u}{v^2}$$
$$= \frac{(e^x-4x)\times(x-1)-1\times(e^x-2x^2)}{(x-1)^2} = \frac{xe^x-e^x-4x^2+4x-e^x+2x^2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{x\boxed{e^x}-2\boxed{e^x}-2x^2+4x}{(x-1)^2} = \frac{\boxed{e^x}\times(x-2)-\boxed{2x}\times x-\boxed{2x}\times(-2)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{e^x\times\boxed{(x-2)}-\boxed{2x}\times\boxed{(x-2)}}{(x-1)^2} = \frac{\boxed{(x-2)}\times(e^x-2x)}{(x-1)^2}$$

Nous en déduisons que le tableau de variation de la fonction f est :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
e^x-2x		$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	e^2-8	↗	$+\infty$

Calculons l'image du minimum atteint par f en $x=2$.

$$f(2)=\frac{e^2-2\times 2^2}{2-1}=\frac{e^2-8}{1}=e^2-8\approx -0,61$$

Prime à l'exponentielle

L'énoncé

a. Déterminer la primitive F définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x)=\dfrac{e^{4x-1}\times\sqrt{e^{5x+8}}}{\left(e^{2x+1}\right)^3}$ qui vérifie $F(0)=3$.

b. Déterminer une primitive G définie sur $]0;+\infty[$ de la fonction $g(x)=1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3e^x}{e^x+4}$.

c. On appelle f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x)=\ln\left(e^x+5\right)-x$$

1. Montrer que, pour tout réel x, on a : $f(x)=\ln\left(1+5e^{-x}\right)$.
2. En déduire les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

Le corrigé

a. Avant toutes choses, simplifions l'expression de la fonction f en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle. Pour tout réel x, nous avons :

$$f(x)=\frac{e^{4x-1}\times\boxed{\sqrt{e^{5x+8}}}}{\boxed{\left(e^{2x+1}\right)^3}}=\frac{e^{4x-1}\times\boxed{e^{\frac{5x+8}{2}}}}{\boxed{e^{3\times(2x+1)}}}$$

$$=\frac{\boxed{e^{4x-1}\times e^{2,5x+4}}}{e^{6x+3}}=\frac{\boxed{e^{(4x-1)+(2,5x+4)}}}{e^{6x+3}}=\frac{e^{6,5x+3}}{e^{6x+3}}=e^{(6,5x+3)-(6x+3)}=e^{0,5x}$$

Donc la primitive F de la fonction $f(x)=e^{ax}$ est de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{a}\times e^{ax}+Cste=\frac{1}{0,5}e^{0,5x}+Cste=2\times e^{0,5x}+Cste$$

On détermine la constante $Cste$ en sachant que :

$$F(0)=3 \Leftrightarrow 2\times e^{0,5\times 0}+Cste=3 \Leftrightarrow 2\times e^{0}+Cste=3 \Leftrightarrow Cste=3-2\times 1=1$$

<u>Conclusion :</u> une expression de la primitive F qui est définie sur $\mathbb{R}$ est :

$$F(x)=2\times\sqrt{e^x}+1$$

b. Une primitive de la somme $1+2\times\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est $1+2\times\ln(x)$.

Ensuite, le quotient $\dfrac{e^x}{e^x+4}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=e^x+4$; $u'(x)=e^x+0=e^x$; Dérivable et positive sur $\mathbb{R}$

L'une de ses primitives est donc $\ln(u)=\ln\left(e^x+1\right)$.

<u>Conclusion :</u> toute primitive G définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction g a une expression de la forme :

$$G(x)=x+2\times\ln(x)+3\times\ln\left(e^x+4\right)+Cste$$

c.1. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\ln\left(e^x+5\right)-x$$

$$=\ln\left(e^x+5\right)-\ln\left(e^x\right)=\ln\left(\frac{e^x+5}{e^x}\right)=\ln\left(\frac{e^x}{e^x}+\frac{5}{e^x}\right)=\ln\left(1+5\times e^{-x}\right)$$

c.2. Pour déterminer les deux limites, nous allons utiliser la seconde écriture de $f(x)$.

Pas bien !

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{\ln\left(1+5\times e^{-(-\infty)}\right)=\ln\left(1+5\times e^{+\infty}\right)=\ln\left(1+5\times(+\infty)\right)=\ln(+\infty)}=+\infty$$

Toujours pas bien !

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{\ln\left(1+5\times e^{-(+\infty)}\right)=\ln\left(1+5\times e^{-\infty}\right)=\ln\left(1+5\times 0^+\right)=\ln(1)}=0^+$$

L'exponentielle prend le quart

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=\left(7x-x^2-8\right)\times e^{\frac{x}{4}}$$

On appelle $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de cette fonction.

a. On appelle t le réel défini par $t=\dfrac{x}{4}$.

1. Compléter les deux égalités suivantes :

$$x\times e^{\frac{x}{4}}=\ldots\ldots\times t\times e^t \qquad \underline{\text{et}} \qquad x^2\times e^{\frac{x}{4}}=\ldots\ldots\times t^2\times e^t$$

2. En déduire les limites de $x\times e^{\frac{x}{4}}$ et de $x^2\times e^{\frac{x}{4}}$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b. Déterminer les limite de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
On indiquera les éventuelles conséquences asymptotiques de ces deux limites.

c. Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'(x)=\left(-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}+5\right)\times e^{\frac{x}{4}}$$

d. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On indiquera les valeurs exactes, puis des valeurs approchées au centième des extrema.

e. Combien l'équation $f(x)=7$ admet-elle de solutions dans $]-\infty;+\infty[$? On justifiera sa réponse et on donnera des valeurs approchées au centième de ces éventuelles solutions.

Le corrigé

a. Comme $t=\dfrac{x}{4}$, alors nous avons $x=4t$. Il vient alors :

$$x\times e^{\frac{x}{4}}=4t\times e^t=4\times t\times e^t \qquad \underline{\text{et}} \qquad x^2\times e^{\frac{x}{4}}=(4t)^2\times e^t=16\times t^2\times e^t$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, la quantité $t=\dfrac{x}{4}$ tend vers $\dfrac{-\infty}{4}=-\infty$

Et, quand x tend vers $+\infty$, t s'en va aussi vers $+\infty$.

Nous en déduisons :

$$\lim_{x\to-\infty} x\times e^{\frac{x}{4}} = \lim_{t\to-\infty} 4\times \underbrace{\boxed{t\times e^{t}}}_{\text{Cours}} = 4\times 0^- = 0^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\times e^{\frac{x}{4}} = \lim_{t\to-\infty} 16\times \underbrace{\boxed{t^2\times e^{t}}}_{\text{Cours toujours !}} = 16\times 0^+ = 0^+$$

b. De prime abord, en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(7x-x^2-8\right)\times e^{\frac{x}{4}}$$

$$=\left[(-\infty)-(+\infty)-8\right]\times e^{\frac{-\infty}{4}} = (-\infty)\times e^{-\infty} = (-\infty)\times 0^+ = \boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

Mais il s'agit là d'une petite forme indéterminée qui se lève en développant $f(x)$ et en appliquant les limites établies dans la question **a**.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = 7\times \underbrace{\boxed{xe^{\frac{x}{4}}}}_{\text{Vues...}} - \underbrace{\boxed{x^2e^{\frac{x}{4}}}}_{\text{...au a.}} - 8\times e^{\frac{x}{4}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 7\times 0^- - 0^+ - 8\times 0^+ = 0^-$$

La conséquence graphique de cette limite est que l'axe des abscisses, c'est-à-dire la droite d'équation $y=0$, est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

➲ De prime abord, en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(7x-x^2-8\right)\times e^{\frac{x}{4}}$$

$$=\left[(+\infty)-(+\infty)-8\right]\times e^{\frac{+\infty}{4}} = \boxed{\text{Forme indéterminée}}\times e^{+\infty}$$

L'indétermination se passant entre $7x$ et x^2, il est inutile de distribuer $e^{\frac{x}{4}}$ pour espérer la lever. Nous allons simplement factoriser la forme du second degré par son terme nous semblant le plus fort : x^2.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = x^2\times\left(\frac{7}{x}-1-\frac{8}{x^2}\right)\times e^{\frac{x}{4}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} (+\infty)\times\left(0^+-1-0^+\right)\times e^{+\infty}$$

$$=(+\infty)\times(-1)\times(+\infty) = -\infty$$

Cette limite infinie n'a aucune conséquence asymptotique.

c. f est le produit $u\times v$ des fonctions $u(x) = 7x-x^2-8$, $u'(x)=7-2x$, Dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v(x) = e^{\frac{1}{4}x} = e^{ax}$, $v'(x) = a\times e^{ax} = \frac{1}{4}\times e^{\frac{x}{4}}$, Dérivable sur $\mathbb{R}$

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = u'\times v + v'\times u$$

$$=(7-2x)\times \boxed{e^{\frac{x}{4}}} + \frac{1}{4}\times \boxed{e^{\frac{x}{4}}}\times\left(7x-x^2-8\right)$$

$$=\boxed{e^{\frac{x}{4}}}\times\left[(7-2x)+\frac{1}{4}\times\left(7x-x^2-8\right)\right]$$

$$=e^{\frac{x}{4}}\times\left[7-2x+\frac{7}{4}x-\frac{1}{4}x^2-2\right] = e^{\frac{x}{4}}\times\left[-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+5\right]$$

d. C'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction f. Cette première est le produit de l'exponentielle $e^{\frac{x}{4}}$ qui est toujours positive et de la forme du second degré $N(x) = -\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+5$ dont nous allons calculer le discriminant.

$$\Delta_{N(x)} = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times 5 = \frac{1}{16}+5 = \frac{1+5\times 16}{16} = \frac{81}{16} = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = (2,25)^2$$

Comme son discriminant est positif, alors le trinôme $N(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-0,25)-2,25}{2\times(-0,25)} = \frac{-2}{-0,5} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-0,25)+2,25}{2\times(-0,25)} = \frac{2,5}{-0,5} = -5$$

Somme son coefficient dominant $-\frac{1}{4}$ étant négatif, la forme du second degré $N(x)$ sera négative à l'extérieur de ses racines et positive entre.

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$e^{x/4}$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$N(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0^-	$\searrow$	$-68\times e^{-5/4}$	$\nearrow$	$4e$	$\searrow$	$-\infty$

Calculons les images de -5 et 4 par la fonction f :

$$f(-5)=\left(7\times(-5)-(-5)^2-8\right)\times e^{\frac{-5}{4}}=(-35-25-8)\times e^{-1,25}=\underline{-68\times e^{-1,25}\approx-19,48}$$

$$f(4)=\left(7\times4-4^2-8\right)\times e^{\frac{4}{4}}=(28-16-8)\times e^{1}=\underline{4\times e\approx10,87}$$

e. Sur l'intervalle $]-\infty;-5[$, l'équation $f(x)=7$ n'admet pas de solution car $f(x)$ est négative.

Par contre, sur l'intervalle $[-5;4]$:

la fonction f est continue car elle est dérivable
la fonction f est strictement croissante
7 appartient à l'intervalle image $f([-5;4])=\left[-68e^{-1,25};4e\right]$

Donc, en application du théorème de la bijection, l'équation $f(x)=7$ admet dans cet intervalle une solution notée α dont une valeur approchée est 2,68.

Enfin, sur l'intervalle $]4;+\infty[$:

la fonction f est toujours continue
la fonction f est strictement décroissante
7 appartient à l'intervalle image $f(]4;+\infty[)=]-\infty;4e[$

Par suite, toujours en application du théorème de la bijection, l'équation $f(x)=7$ admet dans $]4;+\infty[$ une seconde solution appelée β dont une valeur approchée est $5\approx4,998$.

<u>Conclusion :</u> l'équation $f(x)=7$ a exactement deux solutions dans ℝ.

On the aires

L'énoncé

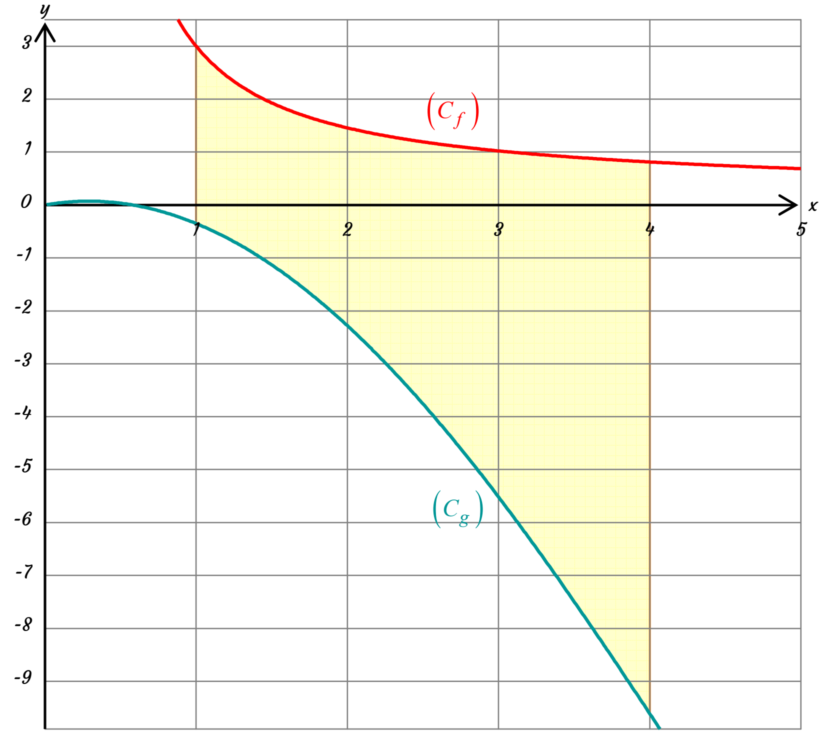
Les deux sous-parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

a. Les fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $]0;5]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \underline{\text{et}} \qquad g(x)=e^{0,5x}-x^2-1$$

Leurs courbes (C_f) et (C_g) ont été tracées sur le graphique ci-après où une unité d'abscisse mesure 2 centimètres et une unité d'ordonnée 0,7 centimètres.

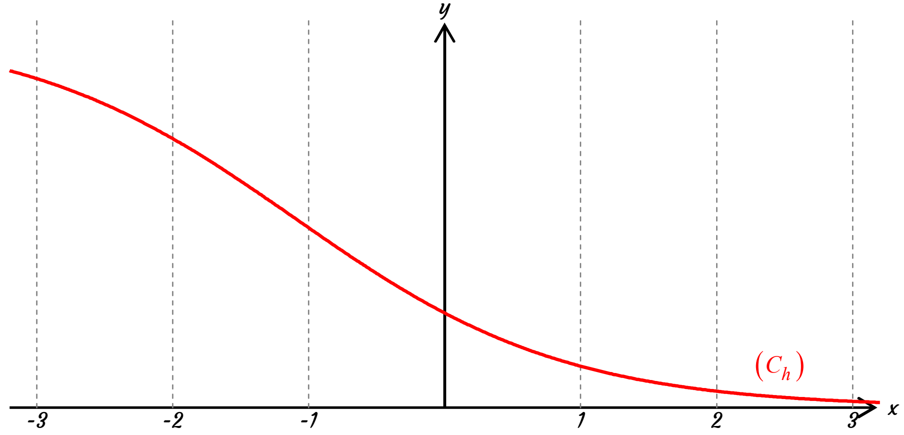
1. Calculer les valeurs exactes des intégrales $I=\int_1^4 f(x)\,dx$ et $J=\int_1^4 g(x)\,dx$. On n'oubliera pas de donner des primitives des fonctions f et g.
2. Déterminer une valeur approchée au millimètre carré près de l'aire exprimée en centimètres carrés du domaine jaune représenté sur le graphique ci-après, se trouvant entre les courbes des fonctions (C_g) et (C_f) et, les droites verticales d'équation $x=1$ et $x=4$.



b. La fonction h est définie sur ℝ par :

$$h(x)=\frac{4}{1+3e^{x}}$$

Sa courbe (C_h) a été tracée sur le graphique ci-dessous dans un repère simplement orthogonal.



1. Déterminer les limites de la fonction h en $-\infty$, puis en $+\infty$.
   En déduire que la courbe (C_h) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
2. Résoudre dans ℝ l'équation $h(x)=2$. On donnera les valeurs exactes des éventuelles solutions.
3. Prouver que la fonction $H(x)=-4\times\ln\left(3+e^{-x}\right)$ est une primitive sur ℝ de la fonction h.
4. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $K=\int_{\ln(1/3)}^{0} h(x)\,dx$.
   Sur le graphique précédent, représenter l'intégrale K.

Le corrigé

a.1. Une primitive de la fonction $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $F(x)=\ln(x)+\frac{-1}{x}+2\sqrt{x}$

Il vient alors :

$$I=\int_1^4 f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_1^4=\left(\ln(4)-\frac{1}{4}+2\times\sqrt{4}\right)-\left(\ln(1)-\frac{1}{1}+2\times\sqrt{1}\right)$$
$$=(\ln(4)-0,25+4)-(0-1+2)=\ln(4)+3,75-1=\ln(4)+2,75$$

➲ Une primitive de la fonction $g(x)=e^{ax}-x^2-1$ est $G(x)=\frac{1}{a}e^{ax}-\frac{1}{3}x^3-x$
$$=2e^{0,5x}-\frac{x^3}{3}-x$$

Nous pouvons écrire :

$$J=\int_1^4 g(x)\,dx=\left[G(x)\right]_1^4$$
$$=\left(2e^{0,5\times 4}-\frac{4^3}{3}-4\right)-\left(2e^{0,5\times 1}-\frac{1^3}{3}-1\right)$$
$$=\left(2e^2-\frac{64}{3}-\frac{12}{3}\right)-\left(2e^{0,5}-\frac{1}{3}-1\right)$$
$$=2e^2-\frac{76}{3}-2\sqrt{e}+\frac{4}{3}=2e^2-2\sqrt{e}-\frac{72}{3}=2e^2-2\sqrt{e}-24$$

a.2. D'abord, remarquons que la superficie occupée par une unité d'aire équivaut à $2\times 0,7=1,4$ centimètres carrés.
Ensuite, le domaine jaune peut être partagé en deux :

- la partie se trouvant au-dessus de l'axe des abscisses et en dessous de (C_f) dont l'aire est égale à l'intégrale I;
- la partie située sous l'axe des abscisses mais au-dessus de la courbe (C_g) dont l'aire est égale à l'opposé de l'intégrale J. En effet, la fonction g étant négative sur l'intervalle $[1;4]$, l'aire calculée par J est comptée négativement.

Par suite, l'aire du domaine jaune est la somme des valeurs absolues des deux intégrales :

$$Aire(\text{Domaine jaune})=I+(-J)$$
$$=\left[\ln(4)+2,75\right]+\left[-2e^2+2\sqrt{e}+24\right]$$
$$=\ln(4)+2\sqrt{e}-2e^2+26,75 \text{ unités d'aire}$$
$$\approx 16,6556 \text{ u.a} \approx 23,32 \text{ cm}^2$$

b.1. Déterminons les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\frac{4}{1+3\times e^{-\infty}}=\frac{4}{1+3\times 0^+}=\frac{4}{1}=4$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\frac{4}{1+3\times e^{+\infty}}=\frac{4}{1+3\times(+\infty)}=\frac{4}{+\infty}=0^+$$

Nous déduisons de ces deux limites finies que les deux droites d'équation $y=4$ et $y=0$ sont deux asymptotes horizontales aux voisinages respectivement de $-\infty$ et de $+\infty$.

b.2. Résolvons dans ℝ l'équation...

$$h(x)=2 \iff \frac{4}{1+3e^x}=2 \iff 4=2\times\left(1+3e^x\right) \iff 4=2+6e^x$$

$$\iff 6e^x=2 \iff e^x=\frac{1}{3} \iff x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

<u>Conclusion :</u> 2 a un seul antécédent par la fonction h qui est $-\ln(3)$.

b.3. Calculons la dérivée de $H(x)=-4\times\ln(u)$ avec
$v(x)=3+e^{ax}$
$v'(x)=0+a\times e^{ax}=(-1)\times e^{-x}$
Dérivable et positive sur ℝ

Donc la fonction H est dérivable sur ℝ et pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$H'(x)=-4\times\frac{u'}{u}=-4\times\frac{-e^{-x}}{3+e^{-x}}$$

$$=\frac{4e^{-x}\times e^x}{\left(3+e^{-x}\right)\times e^x}=\frac{4\times e^0}{3e^x+e^0}=\frac{4\times 1}{3e^x+1}=h(x)$$

<u>Conclusion :</u> la dérivée de la fonction H étant la fonction h, cette première est donc une primitive de cette seconde.

b.4. La fonction H étant une primitive de la fonction h, l'intégrale K devient :

$$K=\int_{\ln(1/3)}^{0} h(x)\,dx=\left[H(x)\right]_{\ln(1/3)}^{0}$$

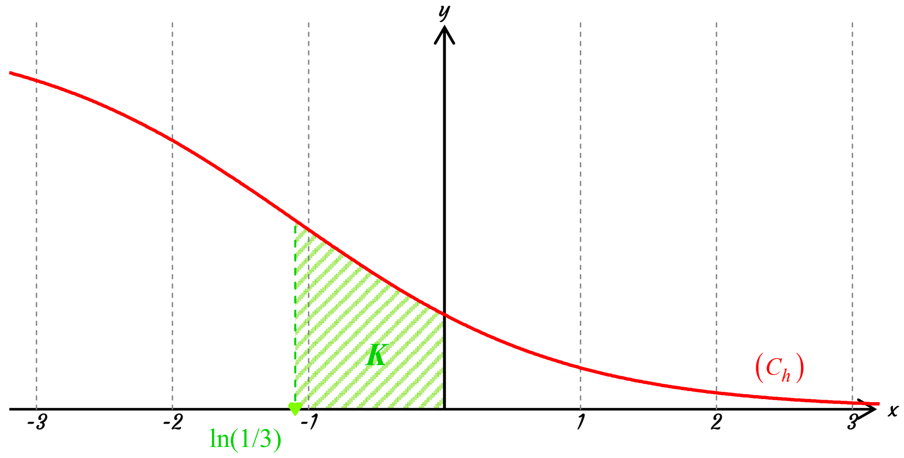
$$=H(0)-H(\ln(1/3))$$

$$=\left(-4\times\ln\left(3+e^{-0}\right)\right)-\left(-4\times\ln\left(3+e^{-\ln(1/3)}\right)\right)$$

$$=-4\times\ln(3+1)+4\times\ln\left(3+e^{\ln(3)}\right)=-\boxed{4}\times\ln(4)+\boxed{4}\times\ln(3+3)$$

$$=\boxed{4}\times\left[-\ln(4)+\ln(6)\right]=4\times\ln\left(\frac{6}{4}\right)=4\times\ln(1{,}5)$$

L'intégrale K représente l'aire du domaine se situant au-dessus de l'axe des abscisses, en dessous de la courbe (C_h) et, entre la droite d'équation $x=-\ln(3)$ et l'axe des ordonnées.



Probabilités

Pizza stories

L'énoncé

a. Giovanni, le plus célèbre pizzaïolo des Indres Occidentales, se préoccupe de la quantité de sel que contiennent les pizzas qu'il confectionne pour ses clients. On appelle S la masse exprimée en grammes de sel contenu dans une pizza. Cette variable aléatoire continue S suit la loi normale d'espérance $\mu = 4$ grammes et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

On choisit au hasard une pizza fabriquée par Giovanni. On arrondira les probabilités demandées au millième près.

1. Quelle est la probabilité que cette pizza contienne moins de 3 grammes de sel ?
2. Déterminer la probabilité que cette pizza contienne entre 3,5 et 5 grammes de sel.
3. On sait que cette pizza contient plus de 3,5 grammes de sel. Calculer la probabilité qu'elle contienne moins de 4,5 grammes de sel.
4. Giovanni souhaite indiquer sur ses emballages la mention suivante : «plus de deux tiers de mes pizzas contiennent moins d'une certaine masse m de sel». Déterminer la masse minimale m qu'il peut mentionner sans mentir à ses clients. On exprimera cette masse minimale au centième de grammes près.

b. Pour 36% de ses pizzas, Giovanni utilise le coulis de tomate *Mêdinebairy*. Un client vient de passer une commande de 13 pizzas. On suppose que, pour chaque pizza, Giovanni utilise un même coulis de tomate pris au hasard.
On appelle N le nombre de pizzas faites avec le coulis de Tomate *Mêdinebairy* parmi les 13 commandées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire N ? On justifiera sa réponse et on précisera les paramètres éventuels de la loi.
2. Calculer la probabilité qu'exactement 4 pizzas sur les 13 commandées aient été faites avec le coulis *Mêdinebairy*.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 5 pizzas sur les 13 aient été confectionnées avec le coulis *Mêdinebairy*.
4. Dans cette question, on suppose que le client achète n pizzas où n est un entier positif.
   On appelle p_n la probabilité qu'au moins une pizza parmi les n ait été fabriquée avec le coulis *Mêdinebairy*.
   ➲ Prouver que $p_n = 1 - 0,64^n$.
   ➲ Déterminer les valeurs de n pour lesquelles cette probabilité p_n est supérieure ou égale à 0,999.

c. Pour que ses pizzas cuisent correctement, la température du four de Giovanni doit être d'environ 220°C. Mais cette dernière est sujette à quelques variations.

On appelle T la température exprimée en degrés Celsius du four de Giovanni lorsqu'il fonctionne. Cette variable aléatoire continue T suit une loi normale d'espérance $\mu = 220°C$ mais dont on ignore l'écart-type σ. On sait juste que la probabilité que cette température T soit supérieure à 216°C est égale à 0,71.

1. Déterminer les probabilités $p(T \geq 220)$, puis $p(216 \leq T \leq 224)$.
2. On appelle Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{T-220}{\sigma}$.
   ➲ Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire Z ?
   ➲ Etablir que $p(T < 216) = p\left(Z < -\dfrac{4}{\sigma}\right)$.
   ➲ En déduire une valeur approchée au centième près de l'écart-type σ.

d. Sur ses pizzas, Giovanni met des champignons qu'il achète à trois fournisseurs : Abdoul, Mamadou et Isoruku. A ce propos :

- D'abord, Giovanni achète 70% de ses champignons chez Abdoul. 60% des champignons vendus par Abdoul sont produits localement.
- Ensuite, Giovanni achète 10% de ses champignons chez Isoruku et ils sont tous produits localement.
- Puis, les champignons achetés chez Mamadou peuvent être produits localement ou non.
- Enfin, précisons que 65% de tous les champignons utilisés par Giovanni sont produits localement.

Pour confectionner une pizza, Giovanni prend au hasard un champignon dans son stock. On définit les événements suivants :

A = «le champignon provient de chez Abdoul»
M = «le champignon provient de chez Mamadou»
I = «le champignon provient de chez Isoruku»
L = «le champignon a été produit localement»

Les probabilités seront retournées sous la forme d'une fraction irréductible ou bien d'une valeur décimale exacte.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation d'un champignon pris au hasard dans le stock.
2. On sait que le champignon pris au hasard provient de chez Mamadou. Calculer la probabilité qu'il ait été produit localement.
3. Les événements $A \cup I$ et L sont-ils indépendants ? On justifiera sa réponse.
4. On sait que le champignon pris au hasard a été produit localement. Calculer la probabilité qu'il provienne de chez Isoruku.

e. Il est 22 heures et Giovanni aimerait bien fermer boutique. Mais un client lui a commandé une pizza qu'il passera chercher entre 22 heures et 22 heures 40.
On note A le temps d'attente exprimé en minutes de Giovanni. On suppose que la variable aléatoire A suit la loi uniformément distribuée sur l'intervalle $[0;40]$.

1. Représenter la densité de probabilité de la variable aléatoire A. On précisera les valeurs prises par cette dernière.
2. Calculer la probabilité que le client arrive entre 22 heures 25 et 22 heures 35.
3. Il est 22 heures 15. Calculer la probabilité que le client arrive avant 22 heures 30.
4. Calculer $E(A)$. Que représente cette grandeur ?

f. Giovanni s'interroge sur la durée de vie de son four électrique *Krahmtoo*. D'après une étude d'un organisme professionnel, 33% des fours *Krahmtoo* ont une durée de vie inférieure à deux ans et demi.
On appelle D la durée de vie exprimée en années d'un four *Krahmtoo*. On suppose que la variable aléatoire D suit une loi exponentielle de paramètre λ que l'on cherche à déterminer.

1. Déterminer par une résolution d'équation une valeur approchée au dix-millième près du paramètre λ.
2. Dans les questions suivantes, nous prendrons $\lambda = 0{,}16$.
   ➲ Calculer la probabilité que le four de Giovanni ait une durée de vie supérieure ou égale à 7 ans. On arrondira la probabilité donnée au millième près.
   ➲ Cela fait déjà 4 ans et demi que le four *Krahmtoo* de Givanni fonctionne. Sans calculs avec la machine, en utilisant seulement vos connaissances et les données fournies par l'énoncé, donner la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure ou égale à 7 ans. On justifiera sa réponse.
   ➲ Calculer la durée de vie moyenne d'un four *Krahmtoo*.

Le corrigé

a. Les diverses probabilités demandées se calculent à l'aide des fonctions dédiées de la calculatrice.

1. $p(S<3) \approx 0{,}202$
2. $p(S \in [3{,}5;5]) \approx 0{,}459$
3. $$p(S<4{,}5 \text{ sachant } S>3{,}5) = \frac{p(S>4{,}5 \text{ et } S<3{,}5)}{p(S>3{,}5)} = \frac{p(S \in]3{,}5;4{,}5[)}{p(S>3{,}5)} \approx \frac{0{,}32308}{0{,}66153} \approx 0{,}488$$
4. On cherche le réel m tel que $p(S \le m) = \dfrac{2}{3}$.
   En inversant la loi normale, on obtient que $m \approx 4{,}52$ grammes
   Sur ces emballages, Giovanni peut indiquer que deux tiers de ses pizzas contiennent moins de 4,52 grammes de sel.

b.1. Chaque pizza est une épreuve de Bernoulli :

A-t-elle été fabriquée avec le coulis Mêdinebairy ?
0,36 → Oui (Succès)
0,64 → Non (Echec)

Les 13 pizzas étant indépendantes les unes des autres, le choix du coulis pour chacune d'elles se faisant au hasard, elles forment un schéma de Bernoulli.
Par suite, le variable aléatoire N qui compte le nombre de succès parmi les 13 pizzas suit la loi binomiale $B(13;0{,}36)$.

b.2. Avec la fonction dédiée de la machine, il s'agit de calculer la probabilité :
$$p(N=4) \approx 0{,}216$$

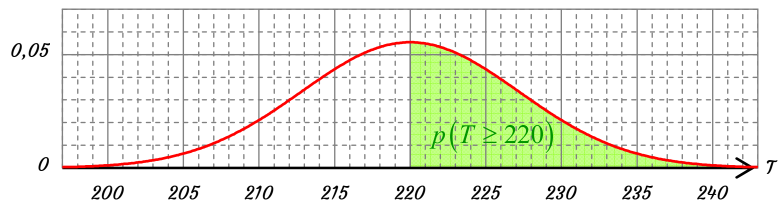
b.3. Avec la fonction dédiée de la machine, il s'agit de calculer la probabilité :
$$p(N \ge 5) = 1 - p(N<5) = 1 - p(N \le 4) \approx 1 - 0{,}470 \approx 0{,}530$$

b.4. Le nombre d'épreuves n'est plus égal à 13 mais à n. Les autres conditions demeurant, la variable aléatoire N qui compte le nombre de pizzas faites avec le coulis *Mêdinebairy* sur les n produites suit la loi binomiale $B(n;0{,}36)$. Nous avons alors :
$$p_n = p(N \ge 1) = 1 - p(N=0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}36^0 \times 0{,}64^n = 1 - 1 \times 1 \times 0{,}64^n = 1 - 0{,}64^n$$

➲ On souhaite connaître les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles :
$$p_n > 0{,}999 \Leftrightarrow 1 - 0{,}64^n > 0{,}999 \Leftrightarrow -0{,}64^n > -0{,}001$$
$$\Leftrightarrow 0{,}64^n < 0{,}001 \xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Ln}} \ln(0{,}64^n) < \ln(0{,}001)$$
$$\Leftrightarrow n \times \ln(0{,}64) < \ln(0{,}001) \xrightarrow[\text{qui est négatif}]{\div \ln(0{,}64)} n > \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}64)} \approx 15{,}47$$

Conclusion : la probabilité p_n est supérieure à 0,999 lorsque et seulement lorsque le nombre n de pizzas produites est supérieur ou égal à 16.

c.1. La courbe de la densité de probabilité de la variable aléatoire T est la suivante :



Cette courbe étant symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \underbrace{220}_{\text{Espérance}}$, la probabilité que T soit supérieure au égale à 220°C est égale à 0,5.

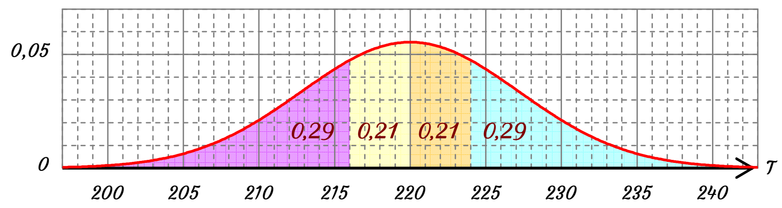
Ensuite, on sait que :

$$p\left(T \in [216;220]\right) = p(T \geq 216) - p(T \geq 220) = 0,71 - 0,5 = 0,21 = 0,71 - 0,5 = 0,21$$

Du fait de la symétrie de la courbe de la densité, nous pouvons écrire :

$$p\left(T \in [216;224]\right) = 2 \times p\left(T \in [216;220]\right) = 2 \times 0,21 = 0,42$$

Car, graphiquement, la situation est la suivante :



c.2. Z est la variable aléatoire centrée réduire associée T. Par définition, elle suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

➲ Caractérisons l'événement $T < 216$ avec la variable aléatoire centrée réduite Z.

$$T < 216 \xrightarrow{-220} T - 220 < -4 \xrightarrow[\text{qui est positif}]{\div\sigma} Z = \frac{T-220}{\sigma} < -\frac{4}{\sigma}$$

Donc une autre caractérisation de l'événement $T < 216$ est $Z < -\dfrac{4}{\sigma}$.

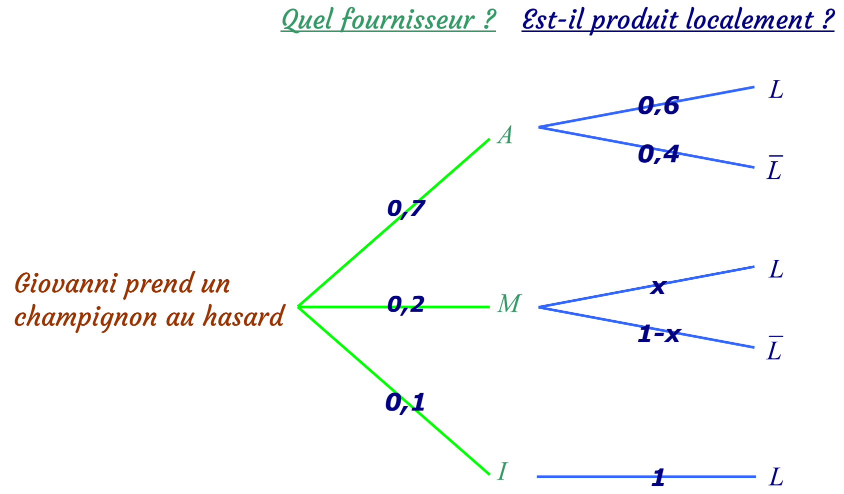
Partant de là nous pouvons écrire :

$$p(T < 216) = 0,29 \Leftrightarrow p\left(Z < -\frac{4}{\sigma}\right) = 0,29 \xrightarrow[\text{...normale } \mathcal{N}(0;1)]{\text{Inversion de la loi...}} -\frac{4}{\sigma} \approx -0,5534$$

Nous en concluons :

$$\sigma \approx \frac{4}{0,5534} \approx 7,23$$

d.1. La situation d'un champignon pris au hasard peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



d.2. Il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement «L sachant M»; c'est celle qui, dans l'arbre, est notée x.

Les événements A, M et I formant une partition de l'univers possibles, nous pouvons écrire en application de la formule des probabilités totales que :

$$p(L) = p(A \cap L) + p(M \cap L) + p(I \cap L) \Leftrightarrow 0,65 = 0,7 \times 0,6 + 0,2 \times x + 0,1 \times 1$$

$$\Leftrightarrow 0,65 = 0,42 + 0,2x + 0,1$$

$$\Leftrightarrow 0,2x = 0,13 \Leftrightarrow x = \frac{0,13}{0,2} = 0,65$$

<u>Conclusion :</u> lorsqu'un champignon provient de chez Mamadou, il y a 65% de chance qu'il ait été produit localement.

d.3. D'après la question précédente, nous savons :

$$p(L) = p(L \text{ sachant } M).$$

Ainsi, que l'événement M ait été réalisé ou pas, l'événement L a toujours la même probabilité de se produire. Autrement dit, les événements M et L sont indépendants.

D'après un résultat du cours, il en va alors de même pour les événements $\overline{M} = A \cup I$ et L.

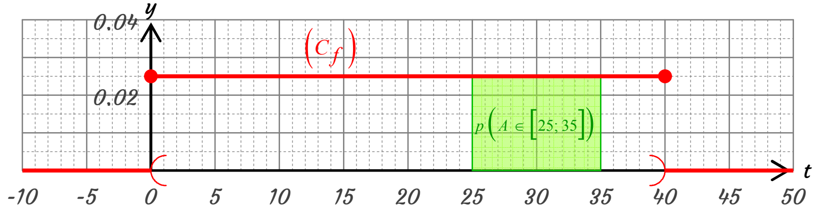
d.4. Dans cette question, il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(I \text{ sachant } L) = \frac{p(I \cap L)}{p(L)} = \frac{0,1}{0,65} = \frac{10}{65} = \frac{2}{13}$$

e.1. La densité de probabilité de A est la fonction constante par morceaux f définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{40-0} = \dfrac{1}{40} = 0,025 & \text{si } t \in [0;40] \\ f(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Sa courbe représentative (C_f) est la suivante :



e.2. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(A \in [25;35]) = \frac{35-25}{40-0} = \frac{10}{40} = \boxed{\frac{1}{4} = 0,25}$$

e.3. Dans cette question, nous devons calculer la probabilité conditionnelle :

$$p(A \le 30 \text{ \underline{sachant} } A \ge 15) = \frac{p(15 \le A \le 30)}{p(A \ge 15)} = \frac{\frac{30-15}{40}}{\frac{40-15}{40}} = \frac{15}{\cancel{40}} \times \frac{\cancel{40}}{25} = \boxed{\frac{3}{5} = 0,6}$$

<u>Conclusion :</u> à 22 heures 15, il y a 60% de chance que le client arrive avant 22 heures 30.

e.4. L'espérance mathématique de la variable aléatoire A est donnée par la formule :

$$E(A) = \frac{0+40}{2} = \boxed{20 \text{ minutes}}$$

<u>Conclusion :</u> le temps moyen d'attente de Giovanni est de 20 minutes.

f.1. D'après l'énoncé et en appliquant un résultat du cours, nous avons :

$$p(D \in [0;2,5]) = 0,33 \iff 1 - e^{-\lambda \times 2,5} = 0,33 \iff -e^{-2,5\lambda} = -0,67$$

$$\iff e^{-2,5\lambda} = 0,67 \xrightarrow{\text{Ln}} -2,5\lambda = \ln(0,67)$$

$$\iff \lambda = \boxed{\frac{\ln(0,67)}{-2,5} \approx 0,1602}$$

f.2. Dans cette première question, il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(D \ge 7) = e^{-\lambda \times 7} = \boxed{e^{-1,12} \approx 0,326}$$

➲ La loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement. Par conséquent :

$$p(D \ge 7 \text{ sachant } D \ge 4,5) = \underbrace{p(D \ge 4,5+2,5 \text{ sachant } D \ge 4,5) = p(D \ge 2,5)}_{\text{Loi de durée de vie sans vieillissement}}$$

Or, d'après l'énoncé :

$$p(D < 2,5) = 0,33 \iff p(D \ge 2,5) = 1 - 0,33 = \boxed{0,67}$$

<u>Conclusion :</u> la probabilité que le four fonctionne plus de 7 ans sachant qu'il en a déjà 4,5 est égale à 0,67.

➲ L'espérance mathématique de la variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle est donnée par :

$$E(D) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,16} = \boxed{6,25 \text{ années}}$$

<u>Conclusion :</u> la durée de vie moyenne d'un four *Krahmtoo* est de six années et un trimestre.

Cours stories

L'énoncé

a. La fonction f est définie sur l'intervalle $[1;3]$ par :

$$f(x)=0,1x+0,2+\frac{0,3}{x^2}$$

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1;3]$.
2. Etablir que la fonction f est une densité de probabilité sur $[1;3]$.
3. On note M une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'intervalle $[1;3]$ et dont la densité de probabilité est la fonction f.
Sans justifications et en utilisant la calculatrice, déterminer des valeurs approchées au millième près des deux quantités $p(M>2)$ et $E(M)$.

b. La variable aléatoire continue X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0;+\infty[$ et suit la loi d'exponentielle de paramètre $\lambda=0,2$.

1. x et y sont deux réels tels que $y=0,2x$. Recopier et compléter les égalités suivantes :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{0,2x}}{x}=\lim_{y\to\ldots}\ldots\ldots\times\frac{e^y}{y}=\ldots\ldots$$
2. Donner l'expression de la densité de probabilité $f(t)$ de la variable aléatoire X.
3. Démontrer que la fonction $G(t)=(-t-5)\times e^{-0,2t}$ est une primitive de la fonction $g(t)=t\times f(t)$ sur $[0;+\infty[$.
4. Soit x un réel positif. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^x t\times f(t)\,dt$.
5. En déduire la valeur exacte de l'espérance $E(X)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\times f(t)\,dt$.

Le corrigé

a.1. Une primitive de la fonction $f(x)=0,1x+0,2+0,3\times\frac{1}{x^2}$ sur $[1;3]$ est la fonction :

$$F(x)=0,1\times\frac{1}{2}x^2+0,2\times x+0,3\times\frac{-1}{x}=\boxed{0,05x^2+0,2x-\frac{0,3}{x}}$$

a.2. La fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[1;3]$ car :

f est positive (somme de termes positifs) sur l'intervalle $[1;3]$.
f est continue (car dérivable) sur l'intervalle $[1;3]$.

$$\int_{[1;3]}f(x)\,dx=\overbrace{\left(0,05\times3^2+0,2\times3-\frac{0,3}{3}\right)}^{F(3)}-\overbrace{\left(0,05\times1^2+0,2\times1-\frac{0,3}{1}\right)}^{F(1)}$$
$$=(0,45+0,6-0,1)-(0,05+0,2-0,3)=0,95-(-0,05)=\boxed{1}$$

a.3. Les deux quantités demandées peuvent s'évaluer avec la fonction dédiée au calcul numérique d'intégrales de la calculatrice...ou alors il faut calculer ces intégrales à la main.

- $p(M>2)=p(M\in[2;3])=\int_2^3 f(x)\,dx$
$$=\overbrace{\left(0,05\times3^2+0,2\times3-\frac{0,3}{3}\right)}^{F(3)}-\overbrace{\left(0,05\times2^2+0,2\times2-\frac{0,3}{2}\right)}^{F(2)}$$
$$=0,95-(0,2+0,4-0,15)=0,95-0,45=\boxed{0,5}$$

- $E(M)=\int_1^3 x\times f(x)\,dx=\int_1^3\left(0,1x^2+0,2x+\frac{0,3}{x}\right)dx=\left[\frac{0,1}{3}x^3+0,1x^2+0,3\ln(x)\right]_1^3$
$$=\left(\frac{0,1}{3}\times3^3+0,1\times3^2+0,3\ln(3)\right)-\left(\frac{0,1}{3}\times1^3+0,1\times1^2+0,3\ln(1)\right)$$
$$=(0,9+0,9+0,3\ln(3))-\left(\frac{0,1}{3}+0,1+0\right)$$
$$=1,7-\frac{0,1}{3}+0,3\ln(3)=\frac{5,1-0,1}{3}+0,3\ln(3)=\boxed{\frac{5}{3}+0,3\ln(3)\approx1,996}$$

b.1. D'abord, remarquons que comme $y=0,2x$ alors $x=\frac{1}{0,2}y=5y$. Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{0,2x}}{x}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{5y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{5}\times\overbrace{\boxed{\frac{e^y}{y}}}^{\text{Limite...}}=0,2\times\overbrace{\boxed{+\infty}}^{\text{...du cours}}=\boxed{+\infty}$$

b.2. La densité de probabilité de la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,2$ a pour expression :

$$f(t)=\lambda\times e^{-\lambda t}=0,2\times e^{-0,2t}\quad\text{pour tout réel } t\in[0;+\infty[$$

b.3. Calculons la dérivée de la fonction $G(t)=(-t-5)\times e^{-0,2t}=u\times v$ avec :

$$\begin{cases} u(t)=-t-5 \\ u'(t)=-1 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad \underline{\text{et}} \quad \begin{cases} v(t)=e^{-0,2t}=e^{at} \\ v'(t)=a\times e^{ax}=-0,2\times e^{-0,2t} \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction G est dérivable sur $[0;+\infty[$ et, pour tout réel positif ou nul t :

$$\begin{aligned} G'(t) &= u'\times v+v'\times u \\ &= (-1)\times \boxed{e^{-0,2t}}+(-0,2)\times \boxed{e^{-0,2t}}\times(-t-5) \\ &= \boxed{e^{-0,2t}}\times[-1+(-0,2)\times(-t-5)] \\ &= e^{-0,2t}\times[-1+0,2t+1]=\underbrace{e^{-0,2t}\times 0,2}_{f(t)}\times t=f(t)\times t \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction G est une primitive de la fonction $g(t)=t\times f(t)$.

b.4. Pour tout réel positif x, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^x t\times f(t)\,dt &= \int_0^x g(t)\,dt \\ &= [G(t)]_0^x=\overbrace{(-x-5)\times e^{-0,2x}}^{G(x)}-\overbrace{(-0-5)\times e^{-0,2\times 0}}^{G(x)} \\ &= (-x-5)e^{-0,2x}+5\times e^0 \\ &= 5-(x+5)\times e^{-0,2x} \end{aligned}$$

b.5. L'espérance $E(X)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\times f(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} 5-(x+5)\times e^{-0,2x}=\lim_{x\to+\infty} 5-xe^{-0,2x}-5e^{-0,2x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} 5-\frac{x}{e^{0,2x}}-5e^{-0,2x}=5-\frac{1}{+\infty}-5\times \overset{\text{Pas bien !}}{\boxed{e^{-\infty}}}=5-0^+-5\times 0^+=5 \end{aligned}$$

Attention, ça tourne !

L'énoncé

a. Edmond Akouartse est importateur de montres. Il vient de recevoir un container entier de montres en provenance du fabricant chinois *Chbong Ping*.
Sur le site internet de ce dernier, Edmond a lu que 17% des montres fonctionnaient encore après avoir fait une chute de 7,31 mètres sur une dalle de béton armé de 26 centimètres d'épaisseur.
Souhaitant vérifié cette affirmation, il prélève 320 montres prises au hasard dans le container et effectue le test. A la fin de l'expérience, il observe que 44 montres fonctionnent encore. On appelle f la fréquence observée sur l'échantillon de 320 montres.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence f. On écrira les formules adéquates et on arrondira ses bornes au millième près.
2. Au regard de ce résultat, peut-on considérer, au seuil de 95%, que l'affirmation du fabricant est infondée ?

b. Edmond souhaite mesurer la précision des montres qu'il vient de recevoir. Aussi, il prélève dans son container 450 montres prises au hasard, les met toutes à l'heure et au bout d'une semaine, dénombre celles qui sont imprécises : soit trop en avance, soit trop en retard. Il en compte 63.

1. Déterminer pour cet échantillon un intervalle de confiance au seuil de 95% de la proportion de montres imprécises dans le container. Les bornes seront arrondies au millième près.
2. Edmond souhaite obtenir un intervalle de confiance au seuil de 95% dont la longueur serait inférieure à 0,03. Combien l'échantillon constitué doit-il alors compter de montres ?

Le corrigé

a.1. D'abord, les conditions pour parler d'intervalle de fluctuation sont remplies :

$$\begin{cases} n=320\geq 30 \\ n\times p=320\times 0,17=54,4\geq 5 \\ n\times(1-p)=320\times 0,83=265,6\geq 5 \end{cases}$$

Ensuite, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% auquel appartent la fréquence f a pour bornes :

$$\begin{cases} \text{Borne inférieure } = p-1,96\times\sqrt{\dfrac{p\times(1-p)}{n}}=0,17-1,96\times\sqrt{\dfrac{0,17\times 0,83}{320}}\approx \overset{\text{Par défaut...}}{0,128} \\ \text{Borne supérieure } = p+1,96\times\sqrt{\dfrac{p\times(1-p)}{n}}=0,17+1,96\times\sqrt{\dfrac{0,17\times 0,83}{320}}\approx \overset{\text{Par excès...}}{0,212} \end{cases}$$

<u>Conclusion :</u> l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est $[0,128;0,212]$.

a.2. La fréquence f observée sur l'échantillon est égale à $f=\dfrac{44}{320}=\boxed{0{,}1375}$.

Cette dernière faisant partie de l'intervalle de fluctuation asymptotique précédent, on ne peut pas rejeter l'affirmation du fabricant chinois au seuil de risque 5%.

b.1. La fréquence de montres imprécises sur l'échantillon est : $f_{obs}=\dfrac{63}{450}=\boxed{0{,}14}$

Les conditions pour parler d'intervalle de confiance au seuil de 95% sont remplies car :

$$\left|\begin{array}{l} n=450\geq 30 \\ n\times f_{obs}=450\times 0{,}14=63\geq 5 \\ n\times(1-f_{obs})=450\times 0{,}86=387\geq 5 \end{array}\right.$$

La proportion p de montres imprécises du container appartient avec une probabilité d'au moins 95% à l'intervalle de confiance $\left[f_{obs}-\dfrac{1}{\sqrt{450}};f_{obs}+\dfrac{1}{\sqrt{450}}\right]=\underbrace{\boxed{[0{,}092;0{,}188]}}_{\text{Par défaut et par excès...}}$.

b.2. Un intervalle de confiance au seuil de 95% a une longueur égale $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. On cherche les tailles d'échantillon n pour lesquelles :

$$\frac{2}{\sqrt{n}}\leq 0{,}03 \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]0;+\infty[]{\text{Inverse}} \frac{\sqrt{n}}{2}\geq\frac{1}{0{,}03} \xrightarrow{\times 2} \sqrt{n}\geq\frac{2}{0{,}03} \xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Carré}} n\geq\boxed{4444{,}4}$$

Co<u>nclusion :</u> l'échantillon doit compte au moins 4445 montres pour que la longueur de l'intervalle de confiance soit inférieure à 0,03.

Suites

Une suite s'est échappée

L'énoncé

La suite (u_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{7} \times u_n - 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

a. Sur le graphique ci-contre, construire sur l'axe des abscisses $(\mathrm{O}x)$ à la seule règle et sans calculs les quatre premiers termes $u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3$ de la suite (u_n).

b. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$P_n \quad : \quad u_{n+1} < u_n$$

Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?

c. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

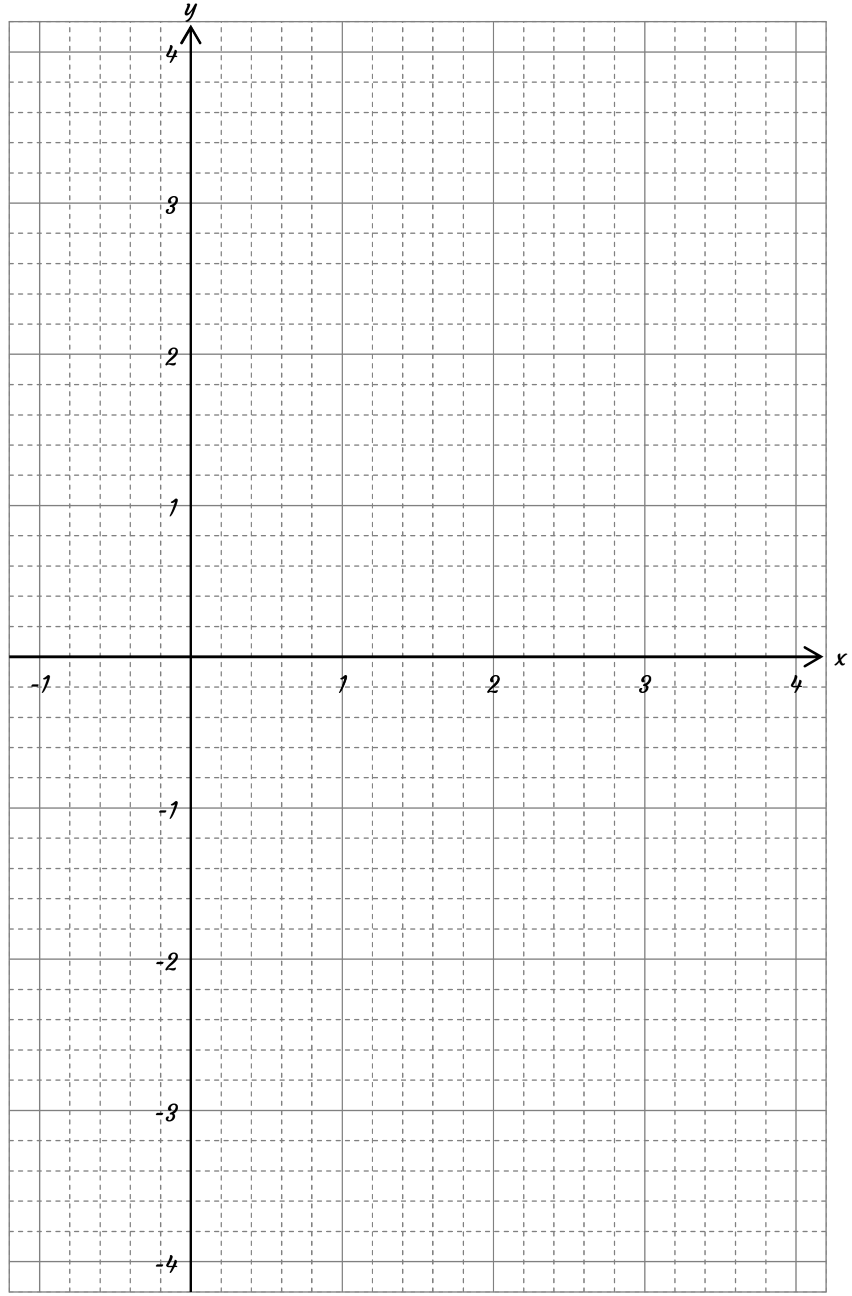
$$a_n = u_n - 3{,}5$$

1. Calculer le terme a_0.
2. Démontrer que la suite (a_n) est géométrique de raison $\dfrac{9}{7}$.
3. En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. On considère l'algorithme suivant :

```
L'entier n vaut 0 et le réel u est égal à 2
Tant que u>-100
        n prend la valeur n+1
        u prend la valeur 9/7×u-1
En sortie, afficher la valeur de n
```

Que permet de faire cet algorithme ? Quelle est la valeur de n affichée à son issue ?



Le corrigé

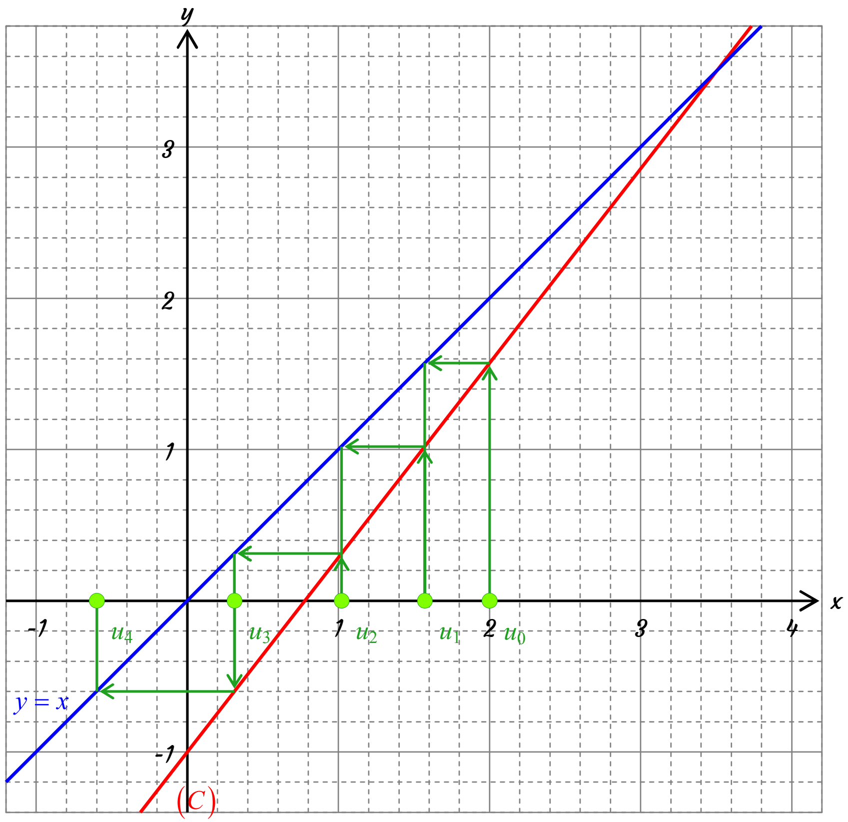
a. On passe d'un terme de la suite au suivant en appliquant la fonction $f(x) = \frac{9}{7}x - 1$.

$$u_0 \xrightarrow{f} u_1 = f(u_0) \xrightarrow{f} u_2 \quad \ldots \quad u_n \xrightarrow{f} u_{n+1} = \frac{9}{7}u_n - 1 = f(u_n) \quad \ldots$$

Afin d'effectuer la construction, on trace préalablement deux droites : la première est la courbe (C) représentant la fonction *f*; la seconde qui est la première bissectrice du plan a pour équation $y = x$.

On place u_0 sur l'axe des abscisses. Se projetant verticalement sur la courbe (C), le point rencontré a pour coordonnées $(u_0; f(u_0) = u_1)$. On ramène cette ordonnée u_1 sur l'axe des abscisses en se projetant horizontalement sur la première bissectrice du plan. On aboutit alors au point de coordonnées $(u_1; u_1)$.

Pour obtenir u_2, on recommence le processus à repartant de u_1.



b. Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$P_n \quad : \quad u_{n+1} < u_n .$$

- Initialisation : au premier rang, pour $n = 0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

  Nous avons $u_0 = 2$

  $$u_1 = \frac{9}{7} \times u_0 - 1 = \frac{9}{7} \times 2 - 1 = \frac{18}{7} - \frac{7}{7} = \frac{11}{7}$$

  Ayant $u_1 < u_0$, la propriété P_0 est donc vraie.

- Hérédité ou principe de récurrence

  Supposons que la propriété P_k soit vraie jusqu'à un certain entier n.

  La propriété P_{n+1} est-elle alors vraie ?

  Comme la propriété P_n est (supposée) vraie, alors nous pouvons écrire :

  $$u_{n+1} < u_n \xrightarrow{\times \frac{9}{7}} \frac{9}{7} \times u_{n+1} < \frac{9}{7} \times u_n \xrightarrow{-1} \underbrace{\frac{9}{7} \times u_{n+1} - 1}_{u_{n+2}} < \underbrace{\frac{9}{7} \times u_n - 1}_{u_{n+1}}$$

  Finalement, si on suppose que la propriété P_n est vraie, alors $u_{n+2} < u_{n+1}$.

  Donc la propriété P_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence est établi.

Conclusion : ayant prouvé que, pour tout entier naturel n, $u_n > u_{n+1}$, nous concluons que la suite (u_n) est strictement décroissante.

c.1. Nous avons : $a_0 = u_0 - 3,5 = 2 - 3,5 = -1,5$

c.2. Avant d'aller plus loin, remarquons que :

$$a_n = u_n - 3,5 \quad \Leftrightarrow \quad a_n + 3,5 = u_n$$

Ensuite, pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$a_{n+1} = u_{n+1} - 3,5$$

$$= \overbrace{\frac{9}{7} \times u_n - 1}^{u_{n+1}} - 3,5 = \frac{9}{7} \times u_n - 4,5$$

$$= \frac{9}{7} \times \overbrace{\left(a_n + \frac{7}{2}\right)}^{u_n} - 4,5 = \frac{9}{7} \times a_n - \frac{9}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{2} - 4,5 = \frac{9}{7} \times a_n + \cancel{\frac{9}{2}} - \cancel{4,5} = \frac{9}{7} \times a_n$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q = \frac{9}{7}$ et de premier terme $a_0 = -1,5$.

c.3. Par conséquent, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_n = a_0 \times q^n = -1{,}5 \times \left(\frac{9}{7}\right)^n$$

Et par suite :

$$u_n = a_n + 3{,}5 = -1{,}5 \times \left(\frac{9}{7}\right)^n + 3{,}5$$

c.4. Ayant son expression en fonction de n, la limite de la suite (u_n) ne pose guère de difficultés :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} -1{,}5 \times \underbrace{\boxed{\left(\frac{9}{7}\right)^n}}_{q>1} + 3{,}5 = -1{,}5 \times \boxed{(+\infty)} + 3{,}5 = -\infty + 3{,}5 = -\infty$$

d. L'algorithme proposé calcule successivement tous les termes de la suite (u_n) tant qu'ils sont strictement supérieurs à -100 ; la boucle s'arrête au premier terme qui est inférieur ou égal à -100.
En utilisant la calculatrice (tableau de valeurs de la suite ou calcul successif de tous ses termes), on détermine que la variable u qui est aussi le terme u_n devient inférieur ou égal à -100 à partir du rang $n = 17$. La variable u vaut environ $-104{,}03$.
La valeur de n retournée par le programme est 17.

Cest quoi cette limite ?!?

L'énoncé

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite (u_n) qui est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (-5)^n + 4^n + (-0{,}3)^n + 0{,}2^n$$

Le corrigé

De prime abord :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-5)^n + 4^n + (-0{,}3)^n + 0{,}2^n = \underbrace{???+(+\infty)}_{\text{Forme indéterminée}} + 0 + 0^+$$

car $(-5)^n$ tend vers $+\infty$ si n est pair et vers $-\infty$ si n est impair.

Pour lever l'indétermination, factorisons par le terme à priori le plus fort : $(-5)^n$.

$$u_n = (-5)^n \times \left(1 + \frac{4^n}{(-5)^n} + \frac{(-0{,}3)^n}{(-5)^n} + \frac{0{,}2^n}{(-5)^n}\right)$$

$$= (-5)^n \times \left(1 + \left(\frac{4}{-5}\right)^n + \left(\frac{-0{,}3}{-5}\right)^n + \left(\frac{0{,}2}{-5}\right)^n\right) = (-5)^n + \left(1 + (-0{,}8)^n + 0{,}06^n + (-0{,}04)^n\right)$$

Là, nous devons envisager deux cas suivant la parité de l'entier n :

Si n est pair alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (+\infty)\times\left(1+0^+ + 0^+ + 0^+\right) = (+\infty)\times 1 = +\infty$

Si n est impair alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (-\infty)\times\left(1+0^- + 0^+ + 0^-\right) = (-\infty)\times 1 = -\infty$

<u>Conclusion :</u> la sous-suite des termes de rang pair tend vers $+\infty$ et celle des termes de rang impair vers $-\infty$; par conséquent, la suite (u_n) n'a pas de limite.

Homographie et suite

L'énoncé

a. La fonction *f* est définie sur l'intervalle $\left]-3;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{5x}{3+x}$$

1. Déterminer les limites de la fonction *f* en -3 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-3;+\infty\right[$.

b. La suite (u_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=f(u_n)=\dfrac{5u_n}{3+u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer la valeur exacte du terme u_1.
2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :
   $$P_n \quad : \quad 2<u_{n+1}<u_n$$
   Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?
3. On appelle (a_n) la suite définie, pour tout entier naturel n par :
   $$a_n=\frac{u_n}{2-u_n}.$$
   Calculer le terme a_0.

   Démontrer que la suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{5}{3}$.

   En déduire l'expression de a_n en fonction de *n*, puis que, pour tout entier naturel *n*, on a :
   $$u_n=\frac{4\times\left(\frac{5}{3}\right)^n}{2\times\left(\frac{5}{3}\right)^n-1}$$
4. Conclure en déterminant la limite de la suite (u_n).

Le corrigé

a.1. Déterminons les limites de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x\to-3^+} f(x)=\lim_{x\to-3^+}\frac{5x}{3+x}=\frac{-15}{0^+}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\times 5}{\cancel{x}\times\left(\frac{3}{x}+1\right)}}_{\text{On évite la Forme indéterminée.}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\frac{3}{x}+1}=\frac{5}{0^++1}=\boxed{5}$$

a.2. *f* est le quotient $\frac{u}{v}$ des fonctions

$u(x)=5x$
$u'(x)=5$
Dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$

et

$v(x)=x+3$
$v'(x)=1$
Dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

Donc la fonction *f* est dérivable sur $\left]-3;+\infty\right[$ et pour tout réel *x* de cet ensemble, on a :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{5\times(x+3)-1\times 5x}{(x+3)^2}$$
$$=\frac{\cancel{5x}+15-\cancel{5x}}{(x+3)^2}=\boxed{\frac{15}{(x+3)^2}}$$

$f'(x)$ est le quotient de deux quantités strictement positives.
Le tableau de variation de la fonction f est celui ci-contre ⇨

x	-3 $\quad\quad$ $+\infty$
15	$+$
$(x+3)^2$	$+$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variation de *f*	$-\infty$ ↗ 5

b.1. Calculons le deuxième terme de la suite : $u_1=\frac{5u_0}{3+u_0}=\frac{5\times 4}{3+4}=\boxed{\frac{20}{7}}$

b.2. Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété : $P_n \quad : \quad 2<u_{n+1}<u_n$.

- Initialisation : au premier rang, pour $n=0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

  Nous avons $u_0=4$ <u>et</u> $u_1=\frac{20}{7}$

  Ayant $2<u_1<u_0$, la propriété P_0 est donc vraie.

- Hérédité ou principe de récurrence

  Supposons que la propriété P_k soit vraie jusqu'à un certain entier *n*.

  La propriété P_{n+1} est-elle alors vraie ?

Comme la propriété P_n est (supposée) vraie, alors nous pouvons écrire :

$$2 < u_{n+1} < u_n \xrightarrow[\substack{\text{Croissante sur }]-3;+\infty[\\ f \text{ conserve l'ordre}}]{f} \underbrace{f(2)}_{=\frac{5\times2}{3+2}=2} < \underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}} < \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}}$$

Finalement, si on suppose que la propriété P_n est vraie, alors $u_{n+2} < u_{n+1}$.

Donc la propriété P_{n+1} est vraie. Le principe de récurrence est établi.

Conclusion : nous avons établi deux choses :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1} \Rightarrow (u_n) \text{ est strictement décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2 \Rightarrow (u_n) \text{ est minorée par } 2 \end{cases}$$

Etant décroissante et minorée, la suite (u_n) est minorée.

b.3. Le premier terme de la suite (a_n) est donné par :

$$a_0 = \frac{u_0}{2-u_0} = \frac{4}{2-4} = \frac{4}{-2} = -2$$

➲ Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2-u_{n+1}} = \frac{\frac{5u_n}{3+u_n}}{2-\frac{5u_n}{3+u_n}} = \frac{\frac{5u_n}{3+u_n}}{\frac{2\times(3+u_n)-5u_n}{3+u_n}} = \frac{\frac{5u_n}{3+u_n}}{\frac{6+2u_n-5u_n}{3+u_n}} = \frac{\frac{5u_n}{3+u_n}}{\frac{6-3u_n}{3+u_n}}$$

$$= \frac{5u_n}{\cancel{3+u_n}} \times \frac{\cancel{3+u_n}}{6-3u_n} = \frac{5\times u_n}{3\times(2-u_n)} = \frac{5}{3}\times\frac{u_n}{2-u_n} = \frac{5}{3}\times a_n$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q = \frac{5}{3}$ et de premier terme $a_0 = -2$.

Par conséquent, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_n = a_0 \times q^n = -2\times\left(\frac{5}{3}\right)^n$$

De plus, nous savons :

$$a_n = \frac{u_n}{2-u_n} \Leftrightarrow a_n\times(2-u_n) = u_n \Leftrightarrow 2a_n - a_n u_n = u_n$$

$$\Leftrightarrow -u_n - a_n u_n = -2a_n \Leftrightarrow u_n(-1-a_n) = -2a_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-2a_n}{-1-a_n} = \frac{-2\times(-2)\times\left(\frac{5}{3}\right)^n}{-1-(-2)\times\left(\frac{5}{3}\right)^n} = \frac{4\times\left(\frac{5}{3}\right)^n}{-1+2\times\left(\frac{5}{3}\right)^n}$$

b.4. De prime abord :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4\times(5/3)^n}{2\times(5/3)^n-1} = \frac{4\times(+\infty)}{2\times(+\infty)-1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

Cette petite indétermination se lève en factorisant numérateur et dénominateur par leurs termes nous semblant les plus forts. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_n = \frac{\cancel{(5/3)^n}}{\cancel{(5/3)^n}} \times \frac{4}{2-\frac{1}{(5/3)^n}} = \frac{4}{2-\frac{1}{(5/3)^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{2-\frac{1}{+\infty}} = \frac{4}{2-0^+} = 2$$

Homographiphobia

L'énoncé

Les questions de cet exercice sont dépendantes les unes des autres; les suites et fonctions qui y sont définies le sont pour tout l'exercice.

a. Ces questions sont des questions de cours où q est un réel strictement supérieur à 1 et a est un réel strictement positif tel que $q = 1 + a$.

1. Démontrer par récurrence sur l'entier positif n la propriété

$$C_n \quad : \quad (1+a)^n \geq 1 + a \times n .$$

2. En déduire que la limite de la suite $\left(q^n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$ est $+\infty$.

b. On appelle (u_n) la suite définie par :

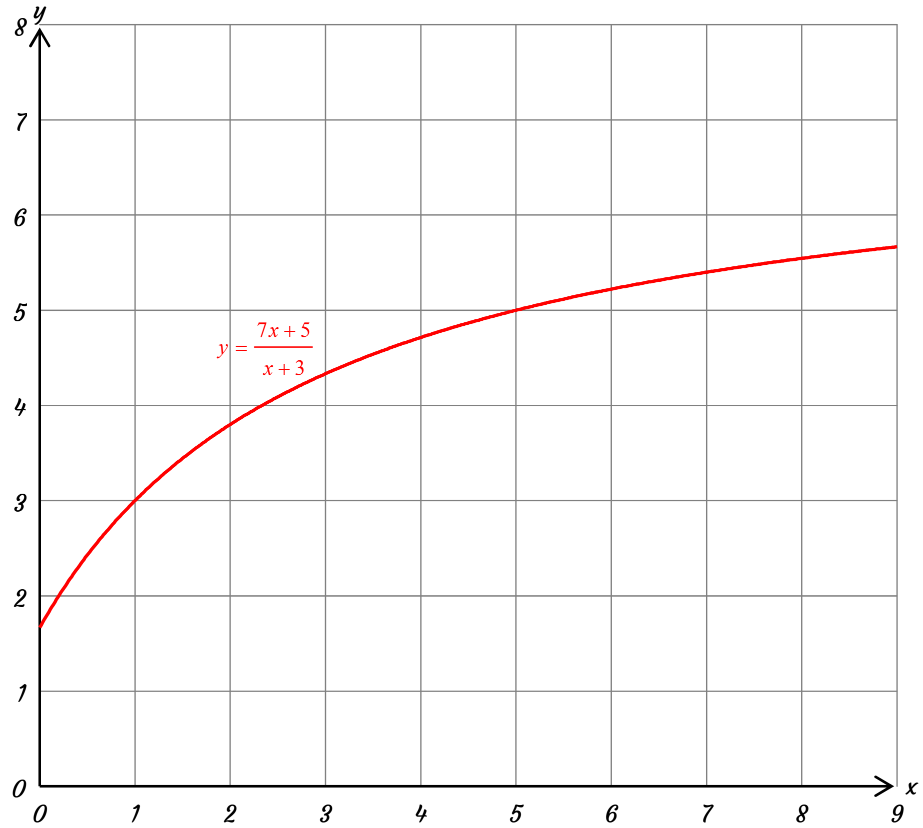
$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 5}{u_n + 3} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Sur le graphique ci-contre, construire sur l'axe des abscisses (Ox) à la seule règle et sans calculs les trois premiers termes $u_0 \quad u_1 \quad u_2$ de la suite (u_n).
   Comment la suite (u_n) semble-t-elle se comporter ?
2. Prouver que, pour tout réel $x \in \left]-3;+\infty\right[$, on a : $7 - \dfrac{16}{x+3} = \dfrac{7x+5}{x+3}$
3. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété
   $P_n \quad : \quad 1 < u_{n+1} < u_n < 9$
4. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est convergente.

c. On appelle (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 5}$$

1. Calculer le terme v_0.
2. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4.
3. Exprimer v_n en fonction de n, puis établir que $u_n = \dfrac{15 \times 4^n + 1}{3 \times 4^n - 1}$
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.



d. On appelle (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$t_n = \frac{15 \times 4^n}{3 \times 4^n + \sin(n)}$$

1. Démontrer que, pour tout entier positif n, on a :

$$\frac{15}{3 + 0,25^n} \leq t_n \leq u_n$$

2. En déduire la limite de la suite (t_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Le corrigé

a.1. Prouvons par récurrence sur l'entier positif n la propriété $C_n \quad : \quad (1+a)^n \geq 1+a\times n$

- Initialisation : au premier rang, pour $n=1$, la propriété C_1 est-elle vraie ?

Nous avons : A gauche : $(1+a)^1 = \boxed{1+a}$

A droite : $1+a\times 1 = \boxed{1+a}$

Comme $(1+a)^1 \geq 1+a\times 1$, la propriété C_1 est vraie.

- Hérédité ou principe de récurrence

Supposons que la propriété C_k soit vraie jusqu'à un certain entier n.

La propriété C_{n+1} est-elle alors vraie ?

Ayant supposé C_n vraie, nous pouvons écrire :

$$(1+a)^n \geq 1+a\times n \xrightarrow[\text{qui est } \oplus]{\times(1+a)} (1+a)^{n+1} \geq (1+a)\times(1+na) = 1+na+a+na^2$$

Le produit na^2 étant positif, nous avons : $1+(n+1)\times a+na^2 \geq 1+(n+1)\times a$

Aboutissant à $(1+a)^{n+1} \geq 1+a\times(n+1)$, la propriété C_{n+1} est donc vraie.

a.2. Comme pour tout entier positif n, $q^n = (1+a)^n \geq 1+a\times n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \boxed{+\infty}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+a\times n = 1+a\times(+\infty) = 1+(+\infty) = \boxed{+\infty}$

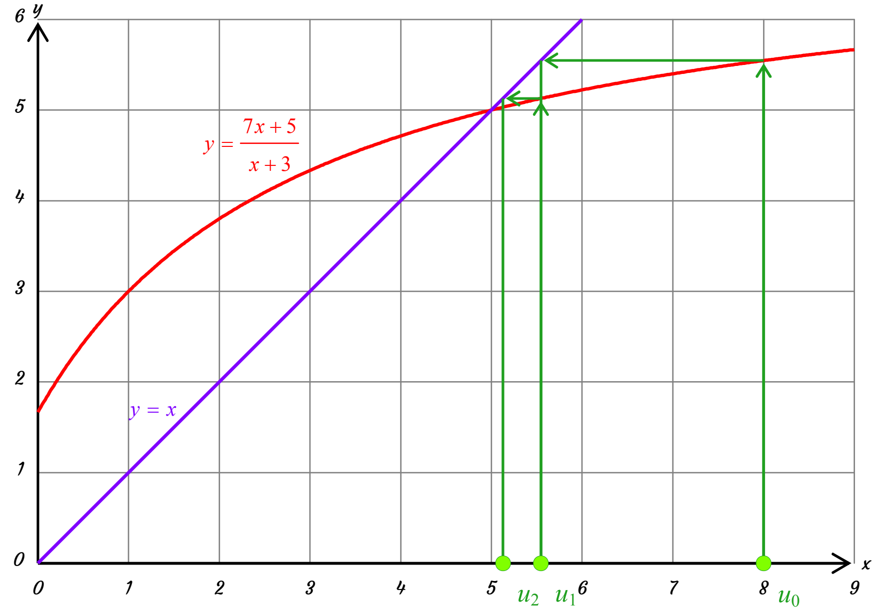
b.1. C'est la traditionnelle construction qui est demandée. On positionne u_0 sur l'axe des abscisses; l'ordonnée du point d'abscisse u_0 de la courbe a pour ordonnée $u_1 = \dfrac{7u_0+5}{u_0+3}$; on ramène cette ordonnée sur l'axe des abscisses en se rétablissant sur la première bissectrice du plan, qui est la droite d'équation $y=x$ et qui a été préalablement tracée. Puis, on recommence le processus pour obtenir u_2.

La construction est faite sur le graphique ci-après.

➲ Vu ses trois premiers termes, la suite (u_n) semble être décroissante et convergente vers 5.

b.2. Pour tout réel $x \in]-3;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$7-\frac{16}{x+3} = \frac{7\times(x+3)-16}{x+3} = \frac{7x+21-16}{x+3} = \boxed{\frac{7x+5}{x+3}}$$



b.3. Etablissons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété $P_n \quad : \quad 1 < u_{n+1} < u_n < 9$.

- Initialisation : au premier rang, pour $n=0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

Nous avons $u_0 = 8$ et $u_1 = \dfrac{7\times 8+5}{8+3} = \dfrac{61}{11} \leq 6$

Comme $1 < u_1 < u_0 < 9$, la propriété P_0 est vraie.

- Hérédité ou principe de récurrence

Supposons que la propriété P_k soit vraie jusqu'à un certain entier n.

La propriété P_{n+1} est-elle alors vraie ?

Comme la propriété P_n est supposée vraie, alors nous pouvons écrire :

$$1 < u_{n+1} < u_n < 9 \xrightarrow{+3} 4 < u_{n+1}+3 < u_n+3 < 12$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{Décroissante sur }]0;+\infty[\\ \text{L'ordre change !}}]{\text{Inverse}} \frac{1}{4} > \frac{1}{u_{n+1}+3} > \frac{1}{u_n+3} > \frac{1}{12}$$

$$\xrightarrow[\text{L'ordre change encore !}]{\times(-16)} -4 < \frac{-16}{u_{n+1}+3} < \frac{-16}{u_n+3} < -\frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{+7} 3 < \underbrace{7-\frac{16}{u_{n+1}+3}}_{u_{n+2}} < \underbrace{7-\frac{16}{u_n+3}}_{u_{n+1}} < \frac{17}{3}$$

$\Rightarrow \quad 1 < u_{n+2} < u_{n+1} < 9$ $\boxed{\text{La propriété } P_n \text{ est vraie !}}$

Le principe de récurrence est établi.

b.4. Lors de la question précédente, nous avons prouvé deux choses :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1} & \Rightarrow \quad (u_n) \text{ est strictement décroissante} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1 & \Rightarrow \quad (u_n) \text{ est minorée par 1} \end{cases}$$

Etant décroissante et minorée, la suite (u_n) est convergente. Sa limite va être déterminée dans les questions à venir.

c.1. Le premier terme de la suite annexe (v_n) est donné par :

$$v_0 = \frac{u_0+1}{u_0-5} = \frac{8+1}{8-5} = \frac{9}{3} = 3$$

c.2. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-5} = \frac{\dfrac{7u_n+5}{u_n+3}+1}{\dfrac{7u_n+5}{u_n+3}-5} = \frac{\dfrac{7u_n+5+1\times(u_n+3)}{u_n+3}}{\dfrac{7u_n+5-5\times(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{\dfrac{7u_n+5+u_n+3}{u_n+3}}{\dfrac{7u_n+5-5u_n-15}{u_n+3}}$$

$$= \frac{\dfrac{8u_n+8}{u_n+3}}{\dfrac{2u_n-10}{u_n+3}} = \frac{8u_n+8}{\cancel{u_n+3}} \times \frac{\cancel{u_n+3}}{2u_n-10} = \frac{8\times(u_n+1)}{2\times(u_n-5)} = \frac{8}{2}\times\frac{u_n+1}{u_n-5} = 4\times v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=4$ et de premier terme $v_0 = 3$.

c.3. Nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$v_n = v_0 \times q^n = 3\times 4^n$$

➲ Pour connaître l'expression du terme u_n en fonction n, nous devons préalablement l'exprimer en fonction de v_n. Nous savons :

$$v_n = \frac{u_n+1}{u_n-5} \Leftrightarrow v_n\times(u_n-5) = u_n+1 \Leftrightarrow v_n\times u_n - 5v_n = u_n+1$$

$$\Leftrightarrow v_n \times \boxed{u_n} - \boxed{u_n} = 1+5v_n \Leftrightarrow \boxed{u_n}\times(v_n-1) = 1+5v_n$$

$$\Leftrightarrow v_n = \frac{1+5v_n}{v_n-1} = \frac{1+5\times3\times4^n}{3\times4^n-1} = \frac{1+15\times4^n}{3\times4^n-1}$$

c.4. Sous sa dernière écriture, la suite (u_n) est une incroyable forme indéterminée...

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{15\times4^n+1}{3\times4^n-1} = \frac{15\times(+\infty)+1}{3\times(+\infty)-1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

..qui se lève en factorisant numérateur et dénominateur par leurs termes nous semblant les plus forts. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_n = \frac{\cancel{4^n}}{\cancel{4^n}} \times \frac{15+\dfrac{1}{4^n}}{3-\dfrac{1}{4^n}} = \frac{15+\dfrac{1}{4^n}}{3-\dfrac{1}{4^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{15+\dfrac{1}{+\infty}}{3-\dfrac{1}{+\infty}} = \frac{15+0^+}{3-0^+} = \frac{15}{3} = 5$$

d.1. Pour tout entier strictement positif n, nous pouvons écrire :

$$-1 \le \sin(n) \le 1 \xrightarrow{+3\times4^n} 3\times4^n - 1 \le 3\times4^n+\sin(n) \le 3\times4^n+1$$

$$\xrightarrow[\text{Décroissante sur }]0;+\infty[]{\text{Inverse}} \frac{1}{3\times4^n-1} \ge \frac{1}{3\times4^n+\sin(n)} \ge \frac{1}{3\times4^n+1}$$

$$\xrightarrow[\text{qui est positif}]{\times(15\times4^n)} \frac{15\times4^n}{3\times4^n-1} \ge \frac{15\times4^n}{3\times4^n+\sin(n)} \ge \frac{15\times4^n}{3\times4^n+1}$$

Or :

- A gauche : $15\times4^n+1 \ge 15\times4^n \xrightarrow[\text{qui est positif}]{\div(3\times4^n-1)} u_n \ge \dfrac{15\times4^n}{3\times4^n-1}$.
- A droite : $\dfrac{15\times4^n}{3\times4^n+1} = \dfrac{\cancel{4^n}}{\cancel{4^n}}\times\dfrac{15}{3+\dfrac{1}{4^n}} = \dfrac{15}{3+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n} = \dfrac{15}{3+0,25^n}$

Nous en concluons que, pour tout entier strictement positif n, nous avons :

$$u_n \ge t_n \ge \frac{15}{3+0,25^n}$$

d.2. Comme

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{15}{3+0,25^n} = \dfrac{15}{3+0^+} = \dfrac{15}{3} = 5 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5 \\ \text{Pour tout entier positif } n,\ \dfrac{15}{3+0,25^n} \le t_n \le u_n \end{cases},$$

alors, en application du théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 5$$

Spécialité

Fonction systémique

L'énoncé

La fonction $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ est un polynôme du troisième degré vérifiant :

$$f(-1)=-12 \qquad f(1)=8 \qquad f'(1)=12 \qquad f(2)=39$$

où a, b, c et d sont quatre coefficients réels que nous allons déterminer.

a. Montrer que les coefficients a, b, c et d sont les solutions du système :

$$(S)\begin{cases} a+b+c+d=8 \\ 8a+4b+2c+d=39 \\ -a+b-c+d=-12 \\ 3a+2b+c=12 \end{cases}$$

b. Résoudre le système (S) en utilisant le calcul matriciel et en déduire l'expression de la fonction polynomiale $f(x)$.

Le corrigé

a. D'abord, la dérivée de la fonction $f(x)=a\times x^3+b\times x^2+cx+d$ a pour expression :

$$f'(x)=a\times 3x^2+b\times 2x+c+0=\boxed{3ax^2+2bx+c}$$

Ensuite, exploitons les renseignements fournis par l'énoncé :

$$f(-1)=-12 \Leftrightarrow a\times(-1)^3+b\times(-1)^2+c\times(-1)+d=-12 \Leftrightarrow \underbrace{-a+b-c+d=-12}_{\text{Troisième équation}}$$

$$f(1)=8 \Leftrightarrow a\times 1^3+b\times 1^2+c\times 1+d=8 \Leftrightarrow \underbrace{a+b+c+d=8}_{\text{Première équation}}$$

$$f'(1)=12 \Leftrightarrow 3a\times 1^2+2b\times 1+c=12 \Leftrightarrow \underbrace{3a+2b+c=12}_{\text{Quatrième équation}}$$

$$f(2)=39 \Leftrightarrow a\times 2^3+b\times 2^2+c\times 2+d=39 \Leftrightarrow \underbrace{8a+4b+2c+d=39}_{\text{Deuxième équation}}$$

Ainsi, les quatre coefficients a, b, c et d vérifient les quatre équations du système (S).

b. Le système linéaire 4×4 précédent (S) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a+b+c+d \\ 8a+4b+2c+d \\ -a+b-c+d \\ 3a+2b+c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 39 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 39 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix} 8 \\ 39 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Conclusion : la fonction f recherchée a pour expression $f(x)=\boxed{6x^3-5x^2+4x+3}$

A bas la tyrannie du cadeau !

L'énoncé

L'opinion est hyper changeante en ce moment; en particulier, sur le fait de savoir s'il faut abolir Noël ou pas. Des enquêtes ont montré que, d'un jour sur l'autre :

- Si une personne est pour l'abolition un jour donné, alors il y a 30% de chance que cette personne reste pour l'abolition le jour suivant. Sinon, elle devient contre.
- Si une personne est contre l'abolition un jour donné, alors il y a 80% de chance que cette personne devienne favorable à l'abolition le jour suivant; sinon elle reste contre.

On étudie l'évolution de l'opinion d'une personne prise au hasard sur l'abolition de Noël.
Le premier jour de l'étude, on sait que 25% de la population est pour l'abolition de Noël; les autres sont contre.
On rencontre une personne au hasard. On appelle a_n la probabilité qu'elle soit favorable à l'abolition de Noël le $n+1$ -ième jour de l'étude et c_n la probabilité qu'elle soit contre l'abolition.

a. Représenter la situation précédente par un graphe de sommet *A* représentant l'état «la personne est pour l'abolition» et de sommet *C* représentant l'état «la personne est contre l'abolition».

b. Le vecteur colonne $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste d'une personne prise au hasard : est-elle pour ou contre l'abolition de Noël ?

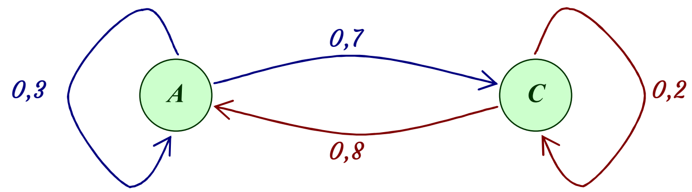
1. Donner le vecteur colonne P_0 .
2. Sans justifications, compléter les deux égalités ci-dessous :
$$\begin{cases} a_{n+1} = \ldots\ldots \times a_n + \ldots\ldots \times c_n \\ c_{n+1} = \ldots\ldots \times a_n + \ldots\ldots \times c_n \end{cases}$$
En déduire une matrice *M* carrée d'ordre 2 telle que : $P_{n+1} = M \times P_n$.
3. Donner l'expression de P_n en fonction de la matrice carrée *M* et du vecteur colonne P_0 .
4. Quelle est la probabilité que la personne prise au hasard soit contre l'abolition le cinquième jour de l'étude ? On arrondira cette probabilité au millième près.
5. A long terme, comment semble évoluer la probabilité que la personne rencontrée au hasard soit favorable à l'abolition de Noël ?

c. On appelle (u_n) la suite définie pour tour entier naturel *n* par :
$$u_n = a_n - \frac{8}{15}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $a_{n+1} = -0,5 \times a_n + 0,8$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, la suite (u_n) est géométrique. On précisera sa raison et on donnera son premier terme u_0 .
3. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a :
$$a_n = \frac{8}{15} - \frac{17}{60} \times (-0,5)^n$$
4. Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque *n* tend vers $+\infty$. Ce résultat corrobore-t-il celui d'une question précédente ? Si oui, laquelle ?

Le corrigé

a. Le graphe probabiliste demandé est le suivant :



b.1. Le premier jour, 25% de la population étant pour l'abolition de Noël, on peut considéré que la probabilité a_0 est égale à 0,25 et la probabilité c_0 à 0,75.

Par conséquent, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix}$

b.2. Compte-tenu de l'évolution quotidienne de l'opinion d'une personne, nous pouvons écrire :

$$a_{n+1} = \text{probabilité que la personne soit pour l'abolition le jour } n+2$$
$$= \underbrace{30\% \text{ de } a_n}_{\text{Il était pour le jour } n+1} + \underbrace{80\% \text{ de } c_n}_{\text{Il était contre le jour } n+1} \quad = 0,3 \times a_n + 0,8 \times c_n$$
$$c_{n+1} = \text{probabilité que la personne soit contre l'abolition le jour } n+2$$
$$= \underbrace{70\% \text{ de } a_n}_{\text{Il était pour le jour } n+1} + \underbrace{20\% \text{ de } c_n}_{\text{Il était contre le jour } n+1} \quad = 0,7 \times a_n + 0,2 \times c_n$$

Matriciellement, nous en déduisons :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \times a_n + 0,8 \times c_n \\ 0,7 \times a_n + 0,2 \times c_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}}^{M} \times \overbrace{\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}}^{P_n}$$

b.3. Comme, pour tout entier naturel *n*, on a :
$$P_{n+1} = M \times P_n$$
alors, la suite de vecteurs-colonnes (P_n) est géométrique à gauche de raison la matrice *M*.

Par conséquent :

$$P_n = M^n \times P_0 = \boxed{\begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix}}$$

b.4. En particulier, le cinquième jour, c'est-à-dire celui pour lequel où $n = 4$, nous avons :

$$P_4 = \begin{pmatrix} a_4 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}^n \times \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,75 \end{pmatrix} \approx \boxed{\begin{pmatrix} 0,516 \\ 0,484 \end{pmatrix}}$$

Conclusion : la probabilité qu'une personne soit contre l'abolition le cinquième jour de l'étude est d'environ 48,4%.

b.5. Calculons des valeurs du vecteur-colonne P_n pour de grandes valeurs de n :

$$P_{50} \approx \begin{pmatrix} 0,533 \\ 0,466 \end{pmatrix} \qquad P_{100} \approx \begin{pmatrix} 0,533 \\ 0,466 \end{pmatrix} \qquad P_{1000} \approx \begin{pmatrix} 0,533 \\ 0,466 \end{pmatrix}$$

Conclusion : plus n devient grand, plus la probabilité a_n semble devoir être proche de 0,553.
C'est ce que va nous confirmer la sous-partie **c**.

c.1. Depuis la question **b.2**, nous savons :

$$a_{n+1} = 0,3 \times a_n + 0,8 \times c_n$$

Or, les états A et C étant les seuls possibles, la somme de leurs probabilités est égale à 1. Par suite :

$$a_n + c_n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c_n = 1 - a_n}$$

Nous en déduisons :

$$a_{n+1} = 0,3 \times a_n + 0,8 \times \underbrace{(1 - a_n)}_{c_n} = 0,3 \times a_n + 0,8 - 0,8 \times a_n = \boxed{-0,5 \times a_n + 0,8}$$

c.2. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \underbrace{a_{n+1}}_{} - \frac{8}{15} \\ &= \underbrace{-0,5 \times a_n + 0,8}_{a_{n+1}} - \frac{8}{15} = -0,5 \times a_n + \frac{12}{15} - \frac{8}{15} = -0,5 \times \underbrace{a_n}_{} + \frac{4}{15} \\ &= -0,5 \times \underbrace{\left(u_n + \frac{8}{15}\right)}_{c_n} - 558 = -0,5 \times u_n + \cancel{\frac{-4}{15}} + \cancel{\frac{4}{15}} = \boxed{-0,5 \times u_n} \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = -0,5$ et de premier terme :

$$u_0 = a_0 - \frac{8}{15} = \frac{1}{4} - \frac{8}{15} = \frac{15}{60} - \frac{32}{60} = \boxed{-\frac{17}{60}}$$

c.3. Nous déduisons de la question précédente :

$$u_n = u_0 \times q^n = \boxed{-\frac{17}{60} \times (-0,5)^n}$$

Il vient alors :

$$a_n = u_n + \frac{8}{15} = \boxed{-\frac{17}{60} \times (-0,5)^n + \frac{8}{15}}$$

c.4. Déterminons la limite de la suite (a_n).

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} -\frac{17}{60} \times \boxed{(-0,5)^n} + \frac{8}{15} = -\frac{17}{60} \times 0 + \frac{8}{15} = 0 + \frac{8}{15} = \boxed{\frac{8}{15}}$$

Conclusion : plus n est grand, plus la probabilité a_n est proche de $\frac{8}{15}$ dont une valeur approchée est 0,533. Cette question corrobore ce qui avait été constaté lors de la question.

Classiques arithmétiques

L'énoncé

a. Ces questions constituent une restitution organisée des connaissances.

1. Rappeler le théorème de l'identité de Bézout.
2. En utilisant ce qui précède, démontrer le théorème de Gauss :
   «a, b et c sont trois entiers relatifs non nuls.
   Si $\left|\begin{array}{l} a \text{ divise le produit } b\times c \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux}\end{array}\right.$ alors a divise c.»

b. On considère les équations diophantiennes d'inconnues les entiers relatifs x et y :

$$(E_1) \quad 42x+56y=3 \qquad\qquad (E_2) \quad 13x-11y=4$$

1. Expliquer pourquoi l'équation (E_1) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
2. Après avoir vérifié que le couple $(2;2)$ en est solution, résoudre l'équation diophantienne (E_2) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Le corrigé

a.1. Le théorème de l'Identité de Bézout précise que si a et b sont deux entiers relatifs non nuls de plus grand diviseur commun δ, alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$a\times u+b\times v=\delta$$

a.2. Exploitons les deux conditions fixées par le théorème :
D'abord, a divisant le produit $b\times c$, il existe un entier relatif k tel que $b\times c=k\times a$
Ensuite, comme a et b sont premiers entre eux, alors il existe deux entiers relatifs u et v tels

que $a\times u+b\times v=1 \xrightarrow{\times c} a\times c\times u+\overbrace{b\times c}^{k\times a}\times v=c \Leftrightarrow a\times\underbrace{(c\times u+k\times v)}_{\text{Un entier relatif}}=c$

Conclusion : a divise le second facteur c.

b.1. Comme 42 et 56 sont divisibles par 2 et 7, alors toute combinaison linéaire $42x+56y$ est aussi divisible par 2 et 7...à condition que x et y soient deux entiers relatifs.
Donc, aucune combinaison linéaire $42x+56y$ ne peut être égale à 3.
Conclusion : l'équation diophantienne $42x+56y=3$ n'a pas de solution.

b.2. D'abord, le couple $(2;2)$ est solution de l'équation (E_2) car :

$$13\times 2-11\times 2=26-22=4$$

Ensuite, de quelle forme sont les solutions $(u;v)$ de cette seconde équation ?

Si $(u;v)$ est solution de cette seconde équation alors :

$$13\times u-11\times v=4=13\times 2-11\times 2 \Leftrightarrow \boxed{13}\times u-\boxed{13}\times 2=\boxed{11}\times v-\boxed{11}\times 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{13}\times(u-2)=\boxed{11}\times(v-2)$$

Comme $\left|\begin{array}{l} 13 \text{ divise le produit } 11\times(v-2) \\ 13 \text{ est premier avec le premier facteur } 11\end{array}\right.$, alors, en application du théorème de Gauss,

13 divise le second facteur $v-2$. C'est-à-dire qu'il existe un entier relatif λ tel que

$$v-2=13\times\lambda \Leftrightarrow v=2+13\times\lambda$$

Il vient alors pour l'entier u :

$$13\times(u-2)=11\times(v-2) \Leftrightarrow \cancel{13}\times(u-2)=11\times\cancel{13}\times\lambda \Leftrightarrow u=2+11\times\lambda$$

Ainsi, les solutions de la seconde équation sont des couples de la forme $(2+11\lambda;2+13\lambda)$ où λ est un entier relatif.
Réciproquement, tout couple de la forme $(2+11\lambda;2+13\lambda)$ est-il solution de cette seconde équation ? Regardons !

$$13\times(2+11\lambda)-11\times(2+13\lambda)=26+\cancel{143\lambda}-22-\cancel{143\lambda}=4$$

La réponse est affirmative !
Conclusion : les solutions de (E_2) sont les couples de la forme $(2+11\lambda;2+13\lambda)$ où λ est un entier relatif.

Classiques matriciels

L'énoncé

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad \text{et} \quad v_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 3\times v_n - u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2,5\times v_n - u_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on note X_n le vecteur-ligne $X_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer X_1.
2. Donner la matrice A carrée d'ordre 2 qui vérifie, pour tout entier naturel n :
$$X_{n+1} = X_n \times A$$
Sans justifications, recopier et compléter, pour tout entier naturel n, l'égalité :
$$X_n = X_0 \times \ldots\ldots$$
3. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que $P\times D\times P^{-1} = A$ où D est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que $A^n = P\times D^n \times P^{-1}$.
6. Donner D^n où n est un entier naturel.
7. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
$$A^n = \begin{pmatrix} 4\times 0,5^n - 3 & 2\times 0,5^n - 2 \\ 6 - 6\times 0,5^n & 4 - 3\times 0,5^n \end{pmatrix}$$
Déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
En déduire les limites de ces deux suites.

Le corrigé

1. Calculons les deuxièmes termes des deux suites :

$$\begin{cases} u_1 = 3\times v_0 - u_0 = 3\times 1 - 0 = \boxed{3} \\ v_1 = 2,5\times v_0 - u_0 = 2,5\times 1 - 0 = \boxed{2,5} \end{cases}$$

Nous en déduisons que :

$$X_1 = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2,5 \end{pmatrix}}$$

2. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \underbrace{(-1)\times u_n + 3\times v_n}_{u_{n+1}} & \underbrace{(-1)\times u_n + 2,5\times v_n}_{v_{n+1}} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}}^{X_n} \times \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2,5 \end{pmatrix}}^{A}$$

Donc la suite de vecteurs-lignes (X_n) est géométrique à droite de raison A. Par suite, nous pouvons écrire :

$$X_n = X_{n-1}\times A = X_{n-2}\times A\times A = X_{n-3}\times A\times A\times A = \ldots = \boxed{X_0 \times A^n}$$

3. On effectue le produit :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}^{P} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2+(-1)\times 3 & 2\times 1+(-1)\times 2 \\ -3\times 2+3\times 2 & -3\times 1+2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{I_2}$$

<u>Conclusion :</u> les deux matrices dont nous avons faits le produit sont inverses l'une de l'autre.

4. Effectuons le produit :

$$P\times D\times P^{-1} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{D'abord ce produit !}} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1,5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 1-2 \\ -3+6 & -1,5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2,5 \end{pmatrix} = \boxed{A}$$

5. Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$Q_n \quad : \quad A^n = P\times D^n \times P^{-1}$$

- Initialisation : au premier rang, pour $n = 0$, la propriété Q_0 est-elle vraie ?

Nous avons :
$$\begin{cases} \text{A gauche :} \quad A^0 = \boxed{I_2} \\ \text{A droite :} \quad P\times D^0 \times P^{-1} = \underline{P\times I_2 \times P^{-1}} = P\times P^{-1} = \boxed{I_2} \end{cases}$$

Comme $A^0 = P\times D^0 \times P^{-1}$, alors la propriété Q_0 est vraie.

- Hérédité ou principe de récurrence

Supposons que la propriété Q_k soit vraie jusqu'à un certain entier n.
La propriété Q_{n+1} est-elle alors vraie ?
Nous pouvons écrire :

$$A^{n+1} = A\times A^n = \overbrace{P\times D\times P^{-1}}^{\text{D'après 4.}} \times \overbrace{P\times D^n \times P^{-1}}^{Q_n \text{ supposée vraie}}$$

$$= P\times D\times \underline{P^{-1}\times P} \times D^n \times P^{-1} = P\times D\times \underline{I_2} \times D^n \times P^{-1}$$

$$= P\times \underline{D\times D^n} \times P^{-1} = \boxed{P\times D^{n+1}\times P^{-1}}$$

Donc la propriété Q_{n+1} est vraie; l'hérédité est établie.

6. Comme la matrice D est diagonale alors : $D^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. D'abord, établissons ce qui est admis pour tout entier naturel n :

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1}$$

$$= \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{D'abord ce produit !}} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times 0,5^n & -1 \\ -3\times 0,5^n & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 0,5^n - 3 & 2\times 0,5^n - 2 \\ -6\times 0,5^n + 6 & -3\times 0,5^n + 4 \end{pmatrix}$$

Il vient alors :

$$\begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix} = X_n = X_0 \times A^n$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4\times 0,5^n - 3 & 2\times 0,5^n - 2 \\ 6 - 6\times 0,5^n & 4 - 3\times 0,5^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0\times\left[4\times 0,5^n - 3\right] + 1\times\left[6 - 6\times 0,5^n\right] & 0\times\left[2\times 0,5^n - 2\right] + 1\times\left[4 - 3\times 0,5^n\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{6 - 6\times 0,5^n}_{u_n} & \underbrace{4 - 3\times 0,5^n}_{v_n} \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 6 - 6\times 0,5^n = 6 - 6\times 0^+ = 6 - 0 = 6$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 4 - 3\times 0,5^n = 4 - 3\times 0^+ = 4 - 0 = 4$$

Au sommaire de ce recueil d'exercices :

Complexes et géométrie dans l'espace 1
- Même les affines sont complexes 1
- Complexes polynômiaux 1
- Bon plan complexe ! 3
- Des complexes de (presque) bacheliers 4
- Espace nickel ! 5
- Droite contre plan : une histoire paramétriqe 8
- Section et compagnie ! 9

Fonctions et analyse 10
- C'est quoi cette courbe ? 10
- La fonction qui en cachait une autre 11
- Ignobles primitives 13
- Indifférence logarithmique 14
- Second degré logarithmique 16
- Quotient ln vs carré 18
- L'exponentielle vs carré et identité 20
- Prime à l'exponentielle 22
- L'exponentielle prend le quart 23
- On the aires 25

Probabilités 28
- Pizza stories 28
- Cours stories 32
- Attention, ça tourne ! 33

Suites 35
- Une suite s'est échappée 35
- C'est quoi cette limite ?!? 37
- Homographie et suite 38
- Homographiphobia 40

Spécialité 43
- Fonction systémique 43
- A bas la tyrannie du cadeau ! 44
- Classiques arithmétiques 46
- Classiques matriciels 47

Le mot de l'auteur

L'été se pointant, je publie les recueils des exercices que j'ai donnés en devoirs durant l'année qui s'achève. Voici celui de terminale S avec la spécialité incluse.

La grande tendance actuelle des exercices de bac est la modélisation à outrance et même, à tort et à travers. Ce ne sont plus des exercices de mathématiques mais plutôt des énoncés jargonnant où la principale difficulté est de comprendre la situation ou bien ce qu'a bien voulu dire l'auteur.

Dans ce recueil, rien de tout cela ! Rien que des maths à l'ancienne : pures et dures !

Comme d'habitude et comme chaque année, le Ministère de l'Education Nationale ne serait être tenu pour responsable du présent recueil et des exercices qui ne représentent que ma vision personnelle du programme officiel.

Jérôme ONILLON