

Le mot de l'auteur

Les temps changent et les programmes officiels scolaires aussi ! Mais pas nécessairement en bien...

Cette année, un nouveau programme de mathématiques est entré en vigueur en première S. Par rapport au précédent, nous dirons qu'il était plus...léger. A l'instar de l'horaire attribué à la discipline passé de 5 à 4 heures. Enfin, à condition de ne pas transformer une heure d'accompagnement personnalisé (une bien belle innovation pédagogique dont on se demande le contenu) en une heure de cours. C'est le drame de notre école : on ne prend plus le temps d'apprendre, c'est-à-dire le temps de corriger ses erreurs.

Factuellement, la plupart des points de l'ancien programme jugés «superflus» (comprenez trop exigeants) ont été repoussés à l'année de terminale S qui se retrouve de facto très chargée.

A plus tard les limites et les asymptotes, la géométrie dans l'espace. Adieu les barycentres et la géométrie plane. Mais salut à l'échantillonnage et à la loi binomiale...mais sans avoir parlé au préalable de dénombrement, de combinaisons ou des « p parmi n ». Car les coefficients binomiaux doivent être vus comme une conséquence de la calculatrice. Peu importe que la loi binomiale puisse être construite assez facilement en partant des tirages avec ordre, puis simultanés pour définir les combinaisons et aboutir aux les schémas de Bernoulli. C'est trop dur ! Contrairement à l'échantillonnage qui n'a aucun intérêt du point de vue des élèves. Mais pourquoi apprendre quand il n'y a rien à savoir ?

Voici donc le recueil des exercices que j'ai donnés en devoirs en première S cette saison. J'y ai conservé les limites et parlé des combinaisons. Ce n'est pas bien mais j'assume ! Car les mathématiques sont une discipline de manœuvre et non de seules connaissances. Parfois, il faut savoir aller un théorème trop loin.

es exercices de ce volume sont classés par catégories :

Analyse et algèbre	2
Dérivation et limites	8
Géométrie.....	14
Probabilités et statistiques	22
Produit scalaire	32
Suites	41
Trigonométrie et angles orientés	47

La taverne de l'Irlandais

[\[http://www.tanopah.com\]](http://www.tanopah.com)

présente



Tous les exercices du présent document ont été conçus et réalisés par Jérôme ONILLON, professeur (dés)agrégé de mathématiques.
Tous droits réservés.

Edition du samedi 30 juin 2012

Analyse et algèbre

Les inégalités, ça croasse !

Le contexte

Dans cet exercice, il s'agit de résoudre des équations ou inéquations classiques : second degré, quotient et avec valeur absolue. Il se termine par une inéquation du troisième degré nécessitant une factorisation par $x - \alpha$ qui doit être hors programme....

L'énoncé

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. On conclura chacune d'elles en donnant l'ensemble des solutions.

$$3x^2 \geq 8 - 10x \quad \frac{1}{x-2} \geq 3 \quad 2x+1 \leq \frac{10}{3-x}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et les deux inéquations suivantes. On conclura chacune d'elles en donnant l'ensemble des solutions :

$$|x^2 - 17| = 8 \quad |4x+1| > 5 \quad |7-2x| \leq 3$$

c) Le but de cette question est la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation :

$$4x^3 - 4x^2 - 3x - 10 > 0$$

On appelle $P(x)$ le polynôme du troisième degré :

$$P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 3x - 10$$

- Calculer $P(2)$. Que peut-on en déduire ?
- Déterminer par la méthode de votre choix trois coefficients entiers a , b et c tels que pour tout réel x , on ait :

$$P(x) = (x-2) \times (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4x^3 - 4x^2 - 3x - 10 > 0$.

Le corrigé

a.1) Pour résoudre cette inéquation du second degré, nous allons tout ramener dans le membre de gauche et nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'un trinôme.

$$3x^2 \geq 8 - 10x \Leftrightarrow \underbrace{3x^2 + 10x - 8}_{N(x)} \geq 0 \quad \text{Quand } N(x) \text{ est-il positif ou nul ?}$$

Pour connaître le signe de la forme du second degré $N(x)$, calculons son discriminant.

$$\Delta_{N(x)} = 10^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 100 + 96 = 196 = 14^2$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $N(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-10-14}{2 \times 3} = \frac{-24}{6} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10+14}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Nous en déduisons que le tableau de signe de $N(x)$ est :

x	$-\infty$	-4	$2/3$	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

Signe du coefficient dominant 3 à l'extérieur des racines, signe contraire à l'intérieur...

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S =]-\infty; -4] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$$

a.2) Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons tout ramener dans le membre de gauche puis mettre tout ce petit monde au même dénominateur.

$$\frac{1}{x-2} \geq 3 \quad \frac{1}{x-2} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-3 \times (x-2)}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-3x+6}{x-2} \geq 0$$

Quand ce quotient est-il positif ou nul ?

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+7}{x-2} \geq 0$$

Ce quotient est formé de deux facteurs affines. Son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	2	$7/3$	$+\infty$	
$-3x+7$		+	0	-	
$x-2$		-	0	+	
Quotient		-	+	0	-

Un facteur affine $ax+b$ est du signe de son coefficient directeur a après sa racine, du signe contraire avant.

Nous en concluons que l'ensemble des solutions est :

$$S = \left]2; \frac{7}{3}\right[$$

a.3) Pour résoudre cette dernière inéquation, nous allons procéder comme précédemment : tout ramener à gauche, mise au même dénominateur et signe d'un quotient.

$$2x+1 \leq \frac{10}{3-x} \Leftrightarrow 2x+1 - \frac{10}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1) \times (3-x) - 10}{3-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x - 2x^2 + 3 - x - 10}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 5x - 7}{-x+3} \leq 0$$

Le dénominateur $-x+3$ étant affine, son signe ne pose guère de problèmes.

Par contre, pour connaître celui du numérateur $N(x) = -2x^2 + 5x - 7$ qui est une forme du second degré, nous allons devoir calculer son discriminant :

$$\Delta_{N(x)} = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-7) = 25 - 56 = -31$$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $N(x)$ n'a pas de racine et, surtout, il est toujours du signe de son coefficient dominant -2 , c'est-à-dire toujours négatif. Nous en déduisons que le tableau de signe de notre quotient est :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$N(x)$	-	-	-
$-x+3$	+	0	-
Quotient	-		+

La conclusion de cette résolution est que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S =]-\infty; 3[$$

b.1) La valeur absolue d'un nombre est égale à la distance qui le sépare de 0. Résolvons dans $\mathbb{R}$ la première équation proposée.

Deux nombres pour valeur absolue 8 : -8 et 8

$$|x^2 - 17| = 8 \Leftrightarrow x^2 - 17 = -8 \quad \text{ou} \quad x^2 - 17 = 8$$

$$x^2 = 9 \quad \text{ou} \quad x^2 = 25$$

La racine et son opposée ont le même carré.

$$x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -5 \quad \text{ou} \quad x = 5$$

Cette équation a quatre solutions :

$$S = \{-5; -3; 3; 5\}$$

b.2) Les réels dont la valeur est plus grande que 5 sont ceux situés avant -5 et ceux se trouvant après 5. Cela étant dit, il vient :

$$|4x+1| > 5 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Avant } -5 \\ 4x+1 < -5 \\ 4x < -6 \\ x < -1,5 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} \text{Après } 5 \\ 4x+1 > 5 \\ 4x > 4 \\ x > 1 \end{array}$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est la réunion :

$$S =]-\infty; -1,5[\cup]1; +\infty[$$

b.3) Les réels dont la valeur absolue est inférieure à 3 sont ceux situés entre -3 et 3 .

$$|7-2x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 7-2x \leq 3 \xrightarrow{-7} -10 \leq -2x \leq -4 \xrightarrow{+(-2)} 5 \geq x \geq 2$$

qui est négatif.

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S = [2; 5]$$

c.1) Calculons l'image de 2 par le polynôme P .

$$P(2) = 4 \times 2^3 - 4 \times 2^2 - 3 \times 2 - 10 = 32 - 16 - 6 - 10 = 0$$

Son image étant nulle, 2 est une racine du polynôme $P(x)$. Par conséquent, ce dernier est factorisable par le facteur $x-2$. C'est d'ailleurs l'objet de la question suivante...

c.2) Nous allons déterminer les coefficients a , b et c en utilisant la méthode par identification. On veut écrire le polynôme $P(x)$ sous la forme :

$$P(x) = (x-2) \times (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$

$$= a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x - 2a \cdot x^2 - 2b \cdot x - 2c$$

$$4 \cdot x^3 + (-4) \cdot x^2 + (-3) \cdot x + (-10) = a \cdot x^3 + (b-2a) \cdot x^2 + (c-2b) \cdot x + (-2c)$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux. Identifions-les !

En x^3	$4 = a$ soit $a = 4$	Et d'un !
En x^2	$-4 = b - 2a \Leftrightarrow -4 = b - 8 \Leftrightarrow b = 4$	Et de deux !
En x	$-3 = c - 2b \Leftrightarrow -3 = c - 8 \Leftrightarrow c = 5$	Et de trois !
Constant	$-10 = -2c \Leftrightarrow 5 = c$	Ca confirme !

Nous en concluons que la forme factorisée du polynôme P est :

$$P(x) = (x-2) \times (4x^2 + 4x + 5)$$

Une autre méthode pour factoriser le polynôme par $x-2$ consiste à extraire successivement le facteur $x-2$ de chacun des termes du polynôme P .

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \overbrace{4x^3}^{\text{Combien de fois } x-2 ?} - 4x^2 - 3x - 10 = \overbrace{4x^2 \times (x-2)}^{\text{Au total } 4x^3} + 8x^2 - 4x^2 - 3x - 10 \\
 &= 4x^2 \times (x-2) + \overbrace{4x^2}^{\text{Combien de fois } x-2 ?} - 3x - 10 = 4x^2 \times (x-2) + \overbrace{4x \times (x-2)}^{\text{Au total } 4x^2} + 8x - 3x - 10 \\
 &= 4x^2 \times (x-2) + 4x \times (x-2) + 5x - 10 \\
 &= 4x^2 \times \boxed{(x-2)} + 4x \times \boxed{(x-2)} + 5 \times \boxed{(x-2)} = \boxed{(x-2)} \times \boxed{(4x^2 + 4x + 5)}
 \end{aligned}$$

c.3) Le polynôme P ayant été factorisé, l'inéquation devient :

$$4x^3 - 4x^2 - 3x - 10 > 0 \Leftrightarrow (x-2) \times \underbrace{(4x^2 + 4x + 5)}_{N(x)} > 0$$

Dans ce produit, seul le signe du trinôme $N(x) = 4x^2 + 4x + 5$ requiert un petit travail complémentaire et exploratoire. Calculons son discriminant :

$$\Delta_{N(x)} = 4^2 - 4 \times 4 \times 5 = 16 - 80 = -64$$

Son discriminant étant négatif, la forme du second degré $N(x)$ n'admet aucune racine et est toujours positive comme son coefficient dominant 4.

Pour connaître le signe de $N(x)$, nous aurions aussi pu utiliser sa forme canonique.

$$N(x) = \overbrace{(2x)^2}^{\text{Début de cette...}} + 2 \times 2x \times 1 + 5 = \overbrace{(2x+1)^2}^{\text{...identité}} - 4 + 5 = \overbrace{(2x+1)^2 + 1}^{\text{Positif car somme de deux positifs}}$$

Nous en déduisons que le tableau de signe du quotient est :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
$N(x)$	+		+
$P(x)$	-	0	+

En conclusion, nous disons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =]2; +\infty[$$

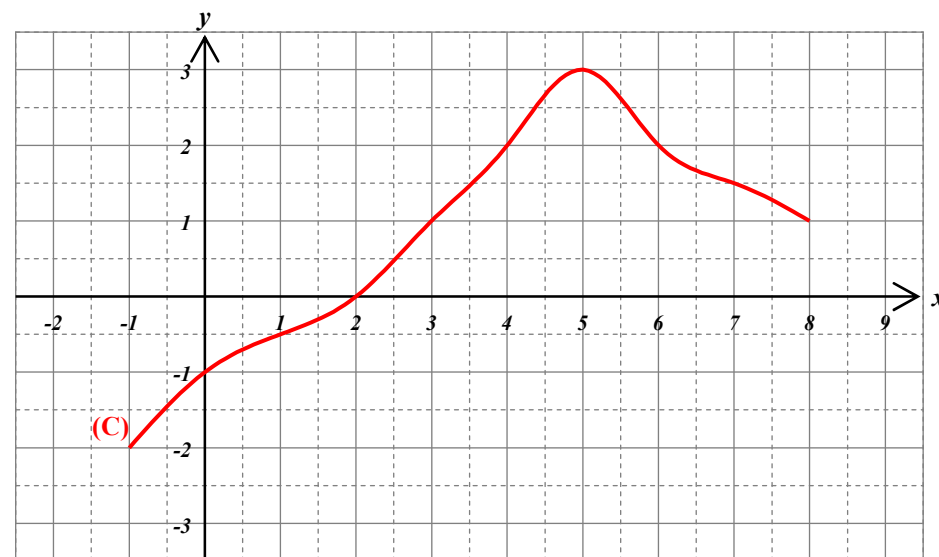
Les composées graphiques

Le contexte

Dans cet exercice, il est question de lectures graphiques, d'images, d'antécédents, de variation et de signe, puis de compositions (sans en prononcer le mot) avec les fonctions valeur absolue, inverse et racine carrée.

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-1; 8]$. Sa courbe représentative (C) est tracée sur le graphique ci-dessus.



a) En utilisant le graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

- Déterminer les images de -2 ; 0 et 5 par la fonction f .
- Déterminer les antécédents de -2 et 4 par la fonction f .
- Dresser le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.
- Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

b) On appelle g la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[-1; 8]$ par :

$$g(x) = |f(x)|$$

- Déterminer les valeurs des images $g(0)$; $g(2)$ et $g(5)$.
- Etablir les variations de la fonction g sur $[-1; 8]$. On justifiera ses réponses.

c) On appelle h la fonction définie par :

$$h(x) = \sqrt{f(x)}$$

- Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h .
- Etablir les variations de la fonction h sur son ensemble de définition D_h . On justifiera ses réponses.

d) On appelle j la fonction définie par :

$$j(x) = \frac{1}{f(x)}$$

- Déterminer l'ensemble de définition D_j de la fonction j .
- Etablir les variations de la fonction j sur son ensemble de définition D_j . On justifiera ses réponses.

Le corrigé

a.1) -2 n'appartenant pas à l'ensemble de définition de f , il n'a pas d'image par cette fonction.

➤ Le point de la courbe (C) dont l'abscisse est égale à 0 a pour ordonnée -1 . Ainsi :

$$f(0) = -1$$

➤ Le point de la courbe (C) dont l'abscisse est égale à 5 a pour ordonnée 3. Donc :

$$f(5) = 3$$

a.2) Un seul point de la courbe (C) a pour ordonnée -2 . Son abscisse est égale -1 . Par conséquent, -2 a un seul antécédent par la fonction f qui est -1 .

➤ Aucun point de la courbe (C) n'a pour ordonnée 4. Donc 4 n'a pas d'antécédent par f .

a.3) Vu la courbe (C), le tableau de variation de la fonction f est :

x	-1	5	8
		3	
f			
		↗	↘
	-2		1

a.4) Toujours d'après la courbe (C), le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	-1	2	8
$f(x)$	-	0	+

b.1) La fonction g est la valeur absolue de la fonction f . En utilisant la courbe (C), nous pouvons écrire :

$$g(0) = |f(0)| = |-1| = 1 \quad g(2) = |f(2)| = |0| = 0 \quad g(5) = |f(5)| = |3| = 3$$

b.2) La fonction g est la composée de la fonction f suivie de la fonction valeur absolue. La fonction valeur absolue est décroissante si elle s'applique à des réels négatifs et croissante si elle concerne des réels positifs.

Compte-tenu des variations et du signe de la fonction f sur l'intervalle $[-1; 8]$, trois cas correspondant à trois intervalles sont à envisager.

☛ Sur l'intervalle $]-1; 2[$, la fonction g est la composée suivante :

$$x \in]-1; 2[\xrightarrow[\text{Croissante sur }]-1; 2[]{f} f(x) \in]-2; 0[\xrightarrow[\text{Décroissante sur }]-2; 0[]{\text{Valeur absolue}} |f(x)| = g(x)$$

Donc la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]-1; 2[$.

☛ Sur l'intervalle $]2; 5[$, la fonction g est la composée suivante :

$$x \in]2; 5[\xrightarrow[\text{Croissante sur }]2; 5[]{f} f(x) \in]0; 3[\xrightarrow[\text{Croissante sur }]0; +\infty[]{\text{Valeur absolue}} |f(x)| = g(x)$$

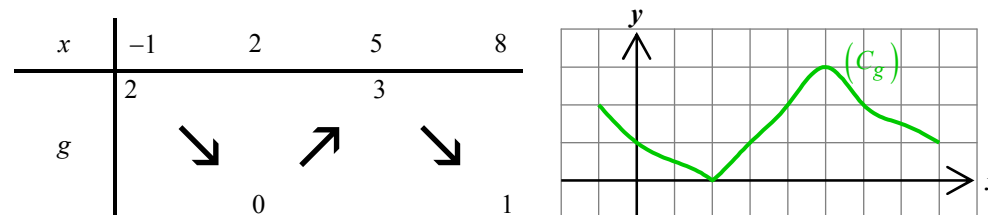
Donc la fonction g est croissante sur l'intervalle $]2; 5[$.

☛ Sur l'intervalle $]5; 8[$, la fonction g est la composée suivante :

$$x \in]5; 8[\xrightarrow[\text{Décroissante sur }]5; 8[]{f} f(x) \in]1; 3[\xrightarrow[\text{Croissante sur }]0; +\infty[]{\text{Valeur absolue}} |f(x)| = g(x)$$

Donc la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]5; 8[$.

En conclusion, à gauche le tableau de variation de g et à droite sa courbe représentative...



c.1) La fonction h est la racine carrée de la fonction f .

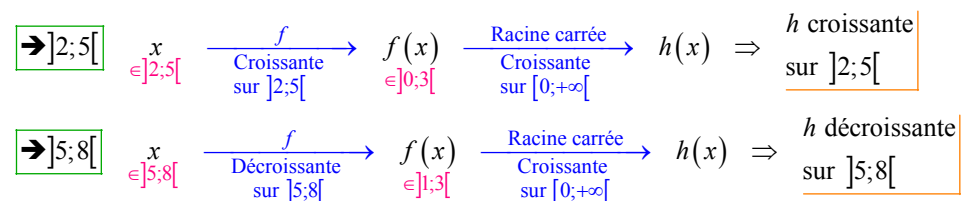
La fonction racine carrée n'est définie que sur $[0; +\infty[$, c'est-à-dire que pour les réels positifs ou nuls. Par conséquent :

$$h(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \text{La racine carrée de } f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2; 8]$$

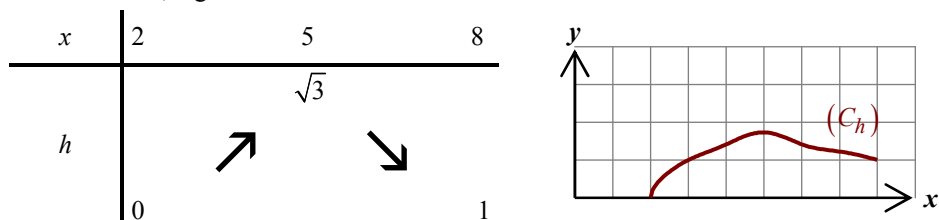
Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction h est : $D_h = [2; 8]$

c.2) La fonction h est la composée de la fonction f suivie de la fonction racine carrée. La fonction racine carrée est strictement croissante là où elle est définie.

Compte tenu de ce que sont les variations de f sur $[2;8]$, deux cas sont à envisager :



En conclusion, à gauche le tableau de variation de la fonction h et à droite sa courbe...



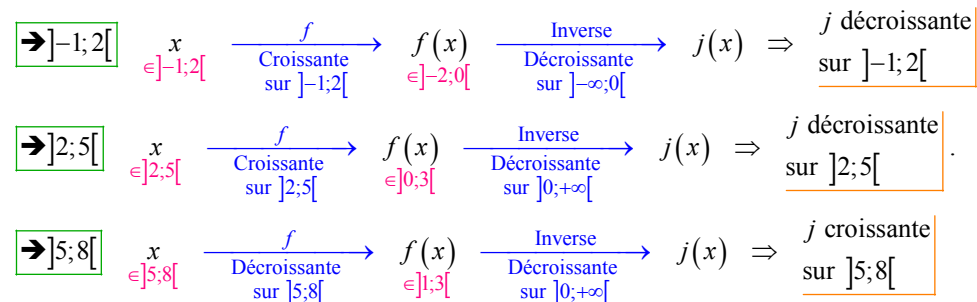
d.1) Seuls les réels non nuls peuvent être inversés. En conséquence :

$$j(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \text{L'inverse de } f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 2[\cup]2; 8]$$

Nous en déduisons que l'ensemble de définition de la fonction j est :

$$D_j = [-1; 2[\cup]2; 8]$$

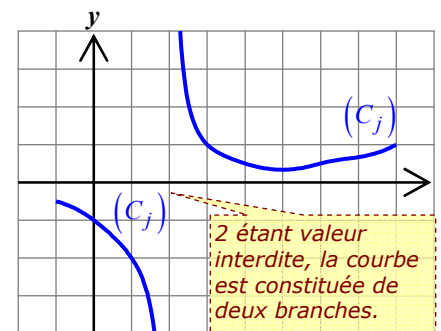
d.2) Compte tenu des variations de la fonction f , trois cas sont à envisager pour connaître celles de la fonction j .



En conclusion, le tableau de variation de la fonction j est :

x	-1	2	5	8
j	-0,5	$+\infty$	$-\infty$	1
		$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Et sa courbe représentative est :



Intermède systèmes

Le contexte

Cet exercice consiste en deux résolutions classiques de deux systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues x et y suivants :

$$(S_1) \begin{cases} 8x - 7y = 15 & (1) \\ 7y - 8x = 16 & (2) \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 91x + 78y = 52 & (1) \\ 119x + 102y = 68 & (2) \end{cases}$$

Le corrigé

➡ La somme $8x - 7y$ ne pouvant être égale à la fois à 15 et à -16 , le système (S_1) n'a pas de solutions.

➡ Examinons les rapports des coefficients du système (S_2) .

$$\text{Rapport en } x = \frac{91}{119} = \frac{7 \times 13}{7 \times 17} \quad \text{Rapport en } y = \frac{78}{102} = \frac{6 \times 13}{6 \times 17} \quad \text{Rapport cst} = \frac{52}{68} = \frac{4 \times 13}{4 \times 17}$$

Comme les trois rapports des coefficients sont égaux, alors les équations (1) et (2) sont proportionnelles, c'est-à-dire qu'il s'agit de la même équation.

Conclusion : le système (S_2) admet une infinité de solutions.

Dérivation et limites

Prenez la tangente !

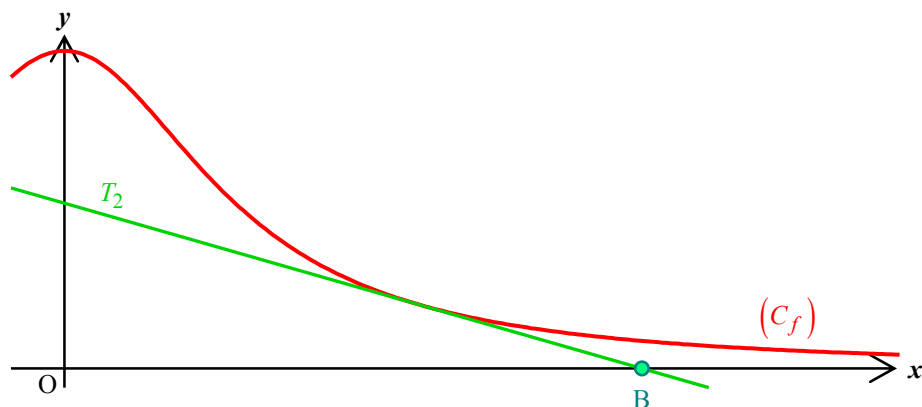
Le contexte

Dans cet exercice, il s'agit de déterminer le nombre dérivé d'une fonction inverse en un point en utilisant la définition de cette notion.

L'énoncé

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe (C_f) représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 1}$$



On a également tracé la tangente T_2 à la courbe (C_f) en son point d'abscisse 2.

Cette tangente T_2 coupe l'axe des abscisses (Ox) au point B.

a. Etablir que pour tout réel non nul h , on a :

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-h-4}{h^2 + 4h + 5}$$

b. En déduire le nombre dérivé $f'(2)$.

c. Déterminer les coordonnées du point B.

Le corrigé

a) Pour tout réel non nul h , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{\frac{5}{(2+h)^2 + 1} - \frac{5}{2^2 + 1}}{h} = \frac{\frac{5}{4+4h+h^2+1} - \frac{5}{5}}{h} \\ &= \frac{\frac{5}{h^2 + 4h + 5} - 1}{h} = \frac{\frac{5 - 1 \times (h^2 + 4h + 5)}{h^2 + 4h + 5}}{h} = \frac{\cancel{5} - h^2 - 4h - \cancel{5}}{h(h^2 + 4h + 5)} \\ &= \frac{\cancel{h^2} \times (-h-4)}{(\cancel{h^2} + 4h + 5) \times \cancel{h}} = \frac{-h-4}{h^2 + 4h + 5} \end{aligned}$$

b) Comme :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h-4}{h^2 + 4h + 5} = \frac{-0-4}{0+0+5} = \underline{-\frac{4}{5}}$$

alors, la fonction f est dérivable en 2 et le nombre dérivé de f en 2 vaut $f'(2) = \underline{-\frac{4}{5}}$.

c) Le coefficient directeur de la tangente T_2 étant égal à $f'(2)$, son équation réduite est de la forme $y = -\frac{4}{5}x + p$.

Nous allons déterminer l'ordonnée à l'origine p en usant du fait que le point $A(2;1)$ appartient à la tangente T_2 :

$$A \in T_2 \Leftrightarrow y_A = -\frac{4}{5}x_A + p \Leftrightarrow p = y_A + \frac{4}{5}x_A = 1 + \frac{4}{5} \times 2 = \underline{\frac{13}{5}}$$

Donc l'équation réduite de la tangente T_2 est $y = \underline{-\frac{4}{5}x + \frac{13}{5}}$

B appartenant à l'axe (Ox), son ordonnée y_B est nulle.

De plus, B appartient à T_2 .

$$B \in T_2 \Leftrightarrow 0 = -\frac{4}{5}x_B + \frac{13}{5} \Leftrightarrow \cancel{\frac{4}{5}} \times x_B = \frac{13}{\cancel{5}} \Leftrightarrow x_B = \underline{\frac{13}{4}}$$

Conclusion : le point B a pour coordonnées $(\frac{13}{4}; 0)$.

Ta tangente par la racine (remix)

Le contexte

Autre exercice où il s'agit (encore) de déterminer le nombre dérivé d'une fonction racine.

L'énoncé

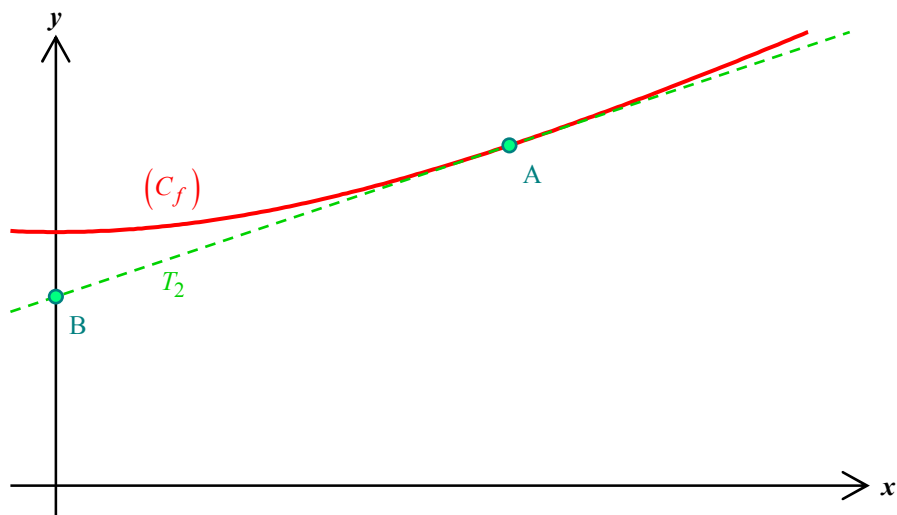
La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$

a) Calculer l'image de 2 par la fonction f .

b) Démontrer que pour tout réel h , on a : $\frac{f(2+h)-3}{h} = \frac{4+h}{\sqrt{h^2+4h+9}+3}$

c) Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe (C_f) représentant la fonction f ainsi que la tangente T_2 à cette même courbe en son point A d'abscisse 2.



- Déterminer le nombre dérivé $f'(2)$.
- En déduire les coordonnées du point B qui est l'intersection de la tangente T_2 et de l'axe des ordonnées (Oy) .

Le corrigé

a) $f(2) = \sqrt{2^2 + 5} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$

b) Pour tout réel non nul h , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h)-3}{h} &= \frac{\sqrt{(2+h)^2 + 5} - 3}{h} = \frac{\left(\sqrt{(2+h)^2 + 5} - 3\right) \times \left(\sqrt{(2+h)^2 + 5} + 3\right)}{h \times \left(\sqrt{(2+h)^2 + 5} + 3\right)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{(2+h)^2 + 5}\right)^2 - 3^2}{h \times \left(\sqrt{(2+h)^2 + 5} + 3\right)} = \frac{4 + 4h + h^2 + 5 - 9}{h \times \left(\sqrt{4 + 4h + h^2 + 5} + 3\right)} \\ &= \frac{4h + h^2}{h \times \left(\sqrt{h^2 + 4h + 9} + 3\right)} = \frac{\cancel{h} \times (4 + h)}{\cancel{h} \times \left(\sqrt{h^2 + 4h + 9} + 3\right)} = \frac{4 + h}{\sqrt{h^2 + 4h + 9} + 3} \end{aligned}$$

c.1) Le nombre dérivé $f'(2)$ est la limite du quotient $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h}{\sqrt{h^2+4h+9}+3} = \frac{4+0}{\sqrt{0^2+4 \times 0+9}+3} = \frac{4}{\sqrt{9}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

c.2) Le nombre dérivé $f'(2)$ est aussi le coefficient directeur de la tangente T_2 .

Par conséquent, son équation réduite est de la forme $y = \frac{2}{3}x + p$.

L'ordonnée à l'origine p se trouve en utilisant le point A(2;3) appartient à la tangente T_2 :

$$A \in T_2 \Leftrightarrow y_A = \frac{2}{3} \times x_A + p \Leftrightarrow p = y_A - \frac{2}{3} \times x_A = 3 - \frac{2}{3} \times 2 = \frac{9}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

Donc l'équation réduite de la tangente T_2 est $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

Le point B appartenant à l'axe (Oy) , son abscisse est égale à 0.

B appartenant aussi à la tangente T_2 , son ordonnée est égale à l'ordonnée à l'origine $5/3$.

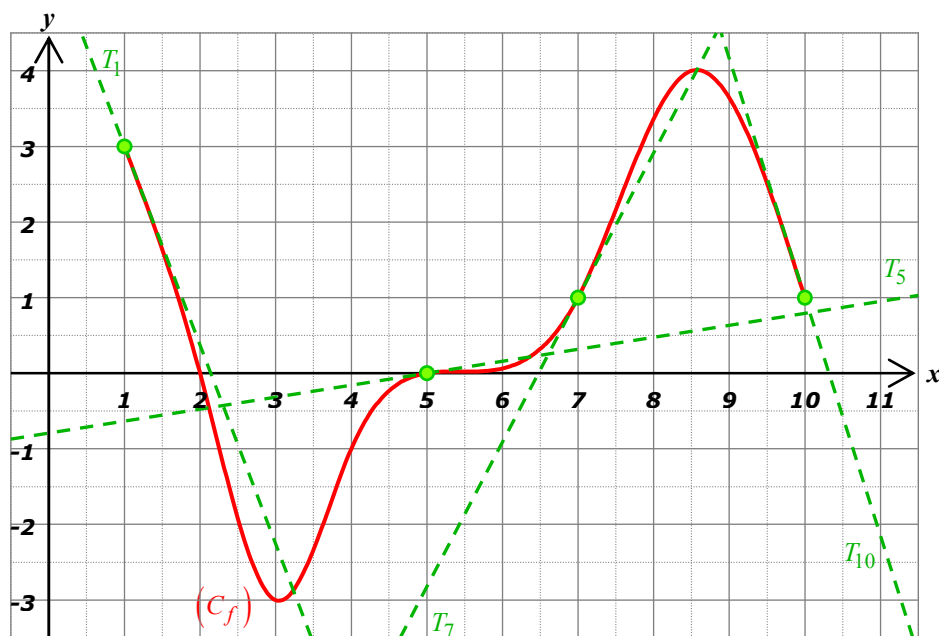
La courbe et ses tangentes

Le contexte

Un exercice de lecture graphique sur les images et antécédents, les tangentes à une courbe et la dérivation.

L'énoncé

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[1;10]$ dont la courbe (C_f) a été tracée sur le graphique ci-dessous :



On a également tracé les tangentes T_1 , T_5 , T_7 et T_{10} à la courbe (C_f) .

On répondra aux questions posées à partir du graphique avec toute la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

a) Donner les valeurs des nombres suivants :

$$f(1) = \quad f'(5) = \quad f(7) =$$

$$f(5) = \quad f'(10) = \quad f'(7) =$$

b) Résoudre les équations suivantes :

$$f(x) = 0$$

$$f'(x) = 0$$

c) La fonction g est l'inverse de la fonction f . Nous avons donc $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

Donner les valeurs de $g(1)$ et $g'(1)$.

Le corrigé

a) $f(1)$ est l'ordonnée du point de la courbe (C_f) d'abscisse 1. Donc $f(1) = 3$

$f'(5)$ est le coefficient directeur de la tangente T_5 . Donc $f'(5) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{+1}{+6} = \frac{1}{6}$

$f(7)$ est l'ordonnée du point de la courbe (C_f) d'abscisse 7. Ainsi $f(7) = 1$.

$f(5)$ est l'ordonnée du point de la courbe (C_f) d'abscisse 5. Par conséquent, $f(5) = 0$

$f'(10)$ est le coefficient directeur de la tangente T_{10} . Ainsi $f'(10) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{-3}{+1} = -3$

$f'(7)$ est le coefficient directeur de la tangente T_7 . D'où $f'(7) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{+2}{+1} = 2$

b) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses (Ox). Ainsi :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 5$$

Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont les abscisses des points de la courbe (C_f) où les tangentes sont horizontales. Ainsi :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 3 \text{ ou } x \approx 8,5 \text{ ou } x \approx 5,3$$

Eventuellement...

Formule de dérivation de $1/u$.

c) La fonction g étant l'inverse de la fonction f , nous pouvons écrire :

$$g(1) = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{3} \quad g'(1) = -\frac{f'(1)}{[f(1)]^2} \approx -\frac{-2,5}{3^2} = \frac{2,5}{9} = \frac{5}{18}$$

Nos très chères études

Le contexte

Ce problème constitué de trois sous-parties indépendantes consiste en trois études (limites, dérivée, variations) de trois fonctions polynomiale, rationnelle et produit affine/racine.

L'énoncé

Cet exercice est composé de trois sous parties indépendantes.

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x + 3$$

- Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.
- Calculer la dérivée $f'(x)$.
- Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Calculer l'image $f(1)$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

b) La fonction g est définie sur l'ensemble $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{4x^2 - x + 6}{x - 1}$$

- Pourquoi la fonction g n'est-elle pas définie sur $\mathbb{R}$?
- En calculant ces images, vérifier que $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -5$ et $g\left(\frac{5}{2}\right) = 19$.
- Déterminer les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, puis lorsque x tend vers $+\infty$.
- Déterminer les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers 1 par gauche, puis lorsque x tend vers 1 par la droite.
- En dérivant la fonction g , montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a :

$$g'(x) = \frac{(2x+1) \times (2x-5)}{(x-1)^2}$$

- En déduire le tableau de variation de la fonction g .
- Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'équation $g(x) = 0$.

c) La fonction h est définie sur l'ensemble $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = (6 - 2x) \times \sqrt{x}$$

- Pourquoi la fonction h n'est-elle pas définie sur $\mathbb{R}$?
 - Calculer les images $h(0)$ et $h(1)$.
 - Déterminer la limite de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - En dérivant la fonction h , montrer que pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, on a :
- $$h'(x) = \frac{-3x+3}{\sqrt{x}}$$
- En déduire le tableau de variation de la fonction h .
 - m étant un réel quelconque, combien l'équation $h(x) = m$ admet-elle de solutions dans l'ensemble $[0; +\infty[$? On pourra envisager plusieurs cas suivant la valeur de m .

Le corrigé

a.1) Aux infinis, le polynôme $f(x)$ se comporte comme son terme dominant $-x^3$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = -(-\infty) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

a.2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme tout polynôme) et pour tout réel x , nous avons :

$$f'(x) = (-x^3 + 3x^2 - 5x + 3)' = -3x^2 + 3 \times 2x - 5 \times 1 + 0 = -3x^2 + 6x - 5$$

a.3) Le signe de la dérivée $f'(x)$ va nous donner les variations de la fonction f .

Or cette dérivée $f'(x)$ est une forme du second degré. Calculons son discriminant :

$$\Delta_{f'(x)} = 6^2 - 4 \times (-3) \times (-5) = 36 - 60 = -24$$

Comme son discriminant est négatif, alors la dérivée $f'(x) = -3x^2 + 6x - 5$ est toujours du signe de son coefficient dominant -3 , donc toujours négative.

Conclusion : la dérivée $f'(x)$ étant toujours négative sur $\mathbb{R}$, la fonction f est strictement décroissante sur ce même ensemble.

a.4) Calculons l'image de 1 par la fonction f .

$$f(1) = -1^3 + 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 3 = -1 + 3 - 5 + 3 = 0$$

a.5) D'après la question précédente, 1 est une des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Comme la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; +\infty[$, alors elle ne passe (au mieux) qu'une seule fois par le niveau 0.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{R}$ qui est 1.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	
f	$+\infty$	0	$-\infty$

b.1) La fonction g est un quotient de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ mais qui ne peut exister que si son dénominateur $x-1$ est non nul, c'est-à-dire que si $x \neq 1$.

C'est pour cela que la fonction g n'est définie que sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b.1) Calculons les images demandées :

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 6}{\left(-\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{4 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6}{-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{15}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{15}{-3} = -5$$

$$g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right) + 6}{\left(\frac{5}{2}\right) - 1} = \frac{4 \times \frac{25}{4} - \frac{5}{2} + 6}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{57}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{57}{3} = 19$$

b.2) Aux infinis, la fonction rationnelle $g(x) = \frac{4x^2 - x + 6}{x-1}$ se comporte comme le

quotient de ses termes dominants $\frac{4x^2}{x} = \frac{4x \times x}{x} = 4x$. Il vient alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x = 4 \times (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x = 4 \times (+\infty) = +\infty$$

b.3) Quand x tend vers 1, le numérateur $4x^2 - x + 6$ tend vers $4 \times 1^2 - 1 + 6 = 4 - 1 + 6 = 9$

Quant au dénominateur, son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	$\xrightarrow{\text{Gauche}}$	1	$\xleftarrow{\text{Droite}}$	$+\infty$
$x-1$		-	0	+	

Nous en déduisons :

Limite à gauche de 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

Limite à droite de 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

b.4) La fonction g est le quotient des fonctions :

$$u(x) = 4x^2 - x + 6$$

$$u'(x) = 4 \times 2x - 1 + 0 = 8x - 1$$

Dérivable sur $\mathbb{R}$

$$v(x) = x - 1$$

$$v'(x) = 1$$

Dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Donc la fonction $g = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout réel x de cet ensemble :

$$g'(x) = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2} = \frac{(8x-1) \times (x-1) - 1 \times (4x^2 - x + 6)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 8x - x + 1 - 4x^2 + x - 6}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 5}{(x-1)^2}$$

A factoriser

$$= \frac{4x^2 - 8x - 5}{(x-1)^2}$$

Début d'une identité... remarquable

$$= \frac{(2x)^2 - 2 \times 2x \times 2 - 5}{(x-1)^2} = \frac{(2x-2)^2 - 4 - 5}{(x-1)^2} = \frac{(2x-2)^2 - 9}{(x-1)^2}$$

On peut aussi calculer le discriminant du numérateur ou développer $(2x+1)(2x-5)$

$$= \frac{(2x-2)^2 - 3^2}{(x-1)^2} = \frac{[(2x-2)-3] \times [(2x-2)+3]}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-5) \times (2x+1)}{(x-1)^2}$$

b.5) Le signe de la dérivée $g'(x)$ nous donne les variations de la fonction g .

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$2x-5$		$-$		$-$	0
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0
		$+$	0	$-$	$+$
g		$-\infty$	-5	19	$+\infty$

b.6) D'après le tableau de variations précédent, 0 n'a aucun antécédent par la fonction g dans l'intervalle $]-\infty; 1[$ où le maximum est -5 , ni aucun antécédent dans $]1; +\infty[$ où le minimum est 19 .

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Une autre méthode : en résolvant de manière effective l'équation

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - x + 6}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\text{Numérateur nul}}{\text{Dénominateur non nul}} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - x + 6 = 0 \quad \text{et} \quad x-1 \neq 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 \times 6 = -95 \text{ négatif}$$

Aucune solution !

c.1) La fonction h est le produit de la fonction affine $6-2x$ qui est définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction racine carrée $\sqrt{x}$ qui n'est définie que sur $[0; +\infty[$.

C'est pour cela que h n'est définie que pour les réels positifs ou nuls.

c.2) Calculons l'image de 0 par la fonction h .

$$h(0) = (6-2 \times 0) \times \sqrt{0} = 6 \times 0 = 0$$

$$h(1) = (6-2 \times 1) \times \sqrt{1} = 4 \times 1 = 4$$

c.3) Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction racine $\sqrt{x}$ tend aussi vers $+\infty$...à son rythme ! Il vient alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (6-2x) \times \sqrt{x} = (6-2 \times (+\infty)) \times (+\infty) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$$

c.4) La fonction h est le produit des fonctions :

$$u(x) = 6-2x$$

$$u'(x) = -2$$

Dérivable sur $\mathbb{R}$

$$v(x) = \sqrt{x}$$

$$v'(x) = 1/(2\sqrt{x})$$

Dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc h est (seulement) dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, on a :

$$h'(x) = u' \times v + v' \times u$$

$$= (-2) \times \sqrt{x} + \frac{1}{2 \times \sqrt{x}} \times (6-2x) = \frac{-2x}{\sqrt{x}} + \frac{3-x}{\sqrt{x}} = \frac{3-3x}{\sqrt{x}}$$

c.5) Le numérateur $-3x+3$ est un facteur affine qui s'annule en 1 et dont le coefficient directeur -3 est négatif.

La racine $\sqrt{x}$ est positive quand elle n'est pas nulle en 0

Encore une fois, c'est le signe de la dérivée $h'(x)$ qui nous donne les variations de la fonction h .

x	0	1	$+\infty$
$-3x+3$		$+$	0
$\sqrt{x}$		$+$	$+$
$g'(x)$		$+$	0
		$+$	$-$
g		0	4
		0	$-\infty$

c.6) Vu le tableau de variation de h , nous pouvons en déduire :

Si $m > 5$ alors l'équation $h(x) = m$ n'a aucune solution.

Si $m = 5$ alors l'équation $h(x) = 5$ a une solution qui est 1.

Si $0 \leq m < 5$ alors l'équation $h(x) = m$ a deux solutions situées dans $[0; 3]$.

Si $m < 0$ alors l'équation $h(x) = m$ a une seule solution située dans $]3; +\infty[$.

Géométrie

Réminiscences barycentriques

Le contexte

Cet exercice de calcul vectoriel de début d'année peut être traité en seconde. En arrière-plan et sans le dire, il est question de barycentre, notion aujourd'hui disparue.

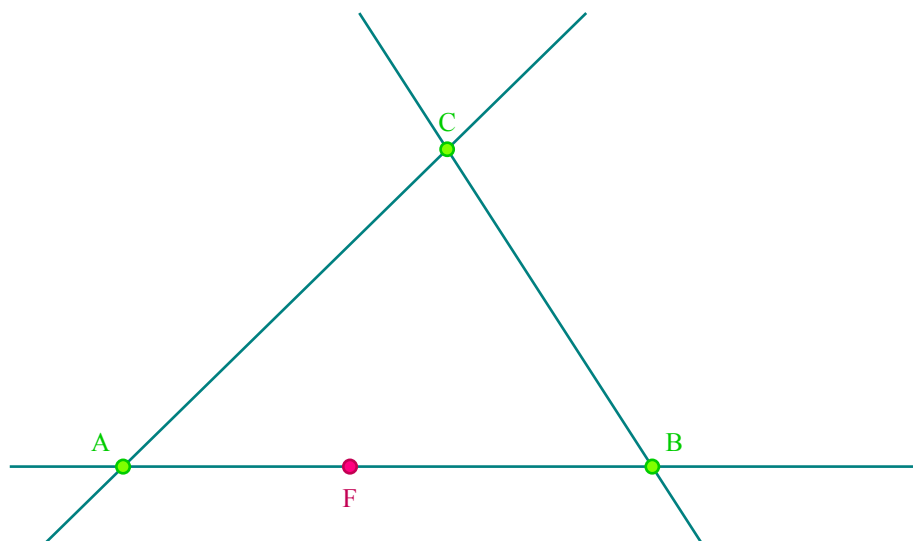
L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle tel que :

AB = 7cm

AC = 6cm

BC = 5cm



Le point E est défini par la relation vectorielle :

$$3 \times \overrightarrow{BE} + 2 \times \overrightarrow{CE} = \vec{0}$$

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Placer le point E sur la figure.

Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$4 \times \overrightarrow{AG} + 3 \times \overrightarrow{BG} + 2 \times \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

b) Démontrer que $4 \times \overrightarrow{AG} + 5 \times \overrightarrow{EG} = \vec{0}$.

En déduire que le point G appartient à la droite (AE).

F est le point du segment [AB] situé à trois centimètres de A.

c) Démontrer que le point G appartient à la droite (CF).

Construire le point G sur la figure ci-dessus.

Le corrigé

a) Tout ce que nous savons du point E, c'est qu'il vérifie l'égalité vectorielle :

$$3 \times \overrightarrow{BE} + 2 \times \overrightarrow{CE} = \vec{0} \Leftrightarrow 3 \times \overrightarrow{BE} + \underbrace{2 \times \overrightarrow{CB} + 2 \times \overrightarrow{BE}}_{2 \times \overrightarrow{CE}} = \vec{0} \Leftrightarrow 5 \times \overrightarrow{BE} = 2 \times \overrightarrow{BC}$$

C'est la relation de Chasles dans le sens décomposition...

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{2}{5} \times \overrightarrow{BC}$$

Conclusion : le point E se trouve aux deux cinquièmes du segment [BC] à partir de B.

b) Pour obtenir la relation en question, nous allons faire émerger le point E dans la relation vectorielle définissant le point G.

$$4 \times \overrightarrow{AG} + 3 \times \overrightarrow{BG} + 2 \times \overrightarrow{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow 4 \times \overrightarrow{AG} + \underbrace{3 \times \overrightarrow{BE} + 2 \times \overrightarrow{EG}}_{3 \times \overrightarrow{BG}} + \underbrace{2 \times \overrightarrow{CE} + 2 \times \overrightarrow{EG}}_{2 \times \overrightarrow{CG}} = \vec{0}$$

Encore Chasles dans le sens décomposition...

$$\Leftrightarrow 4 \times \overrightarrow{AG} + 5 \times \overrightarrow{EG} + \underbrace{3 \times \overrightarrow{BE} + 2 \times \overrightarrow{CE}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

d'après ce qui précède

Voilà la relation recherchée. Allons un peu plus loin !

$$\Leftrightarrow 4 \times \overrightarrow{AG} + 5 \times \overrightarrow{EG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = -\frac{5}{4} \times \overrightarrow{EG}$$

Conclusion : comme les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, alors les points A, E et G sont alignés. Autrement dit, le point G se situe la droite (AE).

c) Le point F vérifie les relations vectorielles : $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{7} \times \overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{7} \times \overrightarrow{BA}$

Introduisons le point F dans la relation définissant le point G.

$$4 \times \overrightarrow{AG} + 3 \times \overrightarrow{BG} + 2 \times \overrightarrow{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{4 \times \overrightarrow{AF} + 4 \times \overrightarrow{FG}}_{4 \times \overrightarrow{AG}} + \underbrace{3 \times \overrightarrow{BF} + 3 \times \overrightarrow{FG}}_{3 \times \overrightarrow{BG}} + 2 \times \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4 \times \overrightarrow{AF} + 3 \times \overrightarrow{BF} + 7 \times \overrightarrow{FG} + 2 \times \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \times 3}{7} \times \overrightarrow{AB} + \frac{3 \times 4}{7} \times \overrightarrow{BA} + 7 \times \overrightarrow{FG} + 2 \times \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FG} = -\frac{2}{7} \times \overrightarrow{CG}$$

Une autre égalité définissant F est :

$$4 \times \overrightarrow{AF} + 3 \times \overrightarrow{BF} = \vec{0}$$

D'ailleurs, on la retrouve dans le raisonnement.

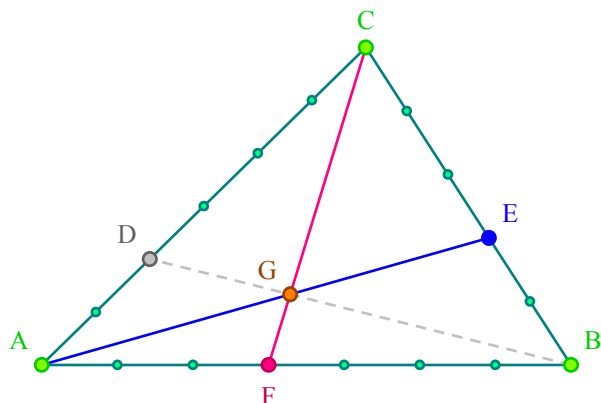
Conclusion : comme les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires, alors les points G appartient aussi à la droite (CF).

On construit le point G comme étant l'intersection des droites (AE) et (CF).

De la même façon, on prouve que G appartient à la droite (BD).

En fait, tout cela est une affaire de barycentres...

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Classiques triangulaires

Le contexte

Ce problème de géométrie analytique de début d'année fait appel à tous les outils classiques du chapitre : calcul vectoriel sur les coordonnées, déterminant, produit scalaire, équations de droite.

En arrière-fond, il est question de droite d'Euler d'un triangle et de symétriques de l'orthocentre qui appartiennent au cercle circonscrit...

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on a placé les points :

$$A(-2; 4) \quad B(-1; -1) \quad C(5; 1) \quad H\left(-\frac{5}{8}; -\frac{1}{8}\right)$$

a) On appelle G le point défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

1. Sans utiliser de coordonnées de vecteurs ou de points, démontrer à l'aide d'un calcul vectoriel que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires.
2. Déterminer les coordonnées du point G, puis celle du milieu I.
3. Démontrer que les points C, G et I sont alignés.
4. Conclure en disant ce qu'est le point G pour le triangle ABC.

b) On appelle d la droite dont une équation est $7x - 3y = 3$.

1. Démontrer que la droite d est la médiatrice du segment [AC].
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ qui est la médiatrice du segment [BC].
3. Justifier que les droites d et Δ sont sécantes.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection Ω des droites d et Δ .
5. Conclure en disant ce qu'est le point Ω pour le triangle ABC.

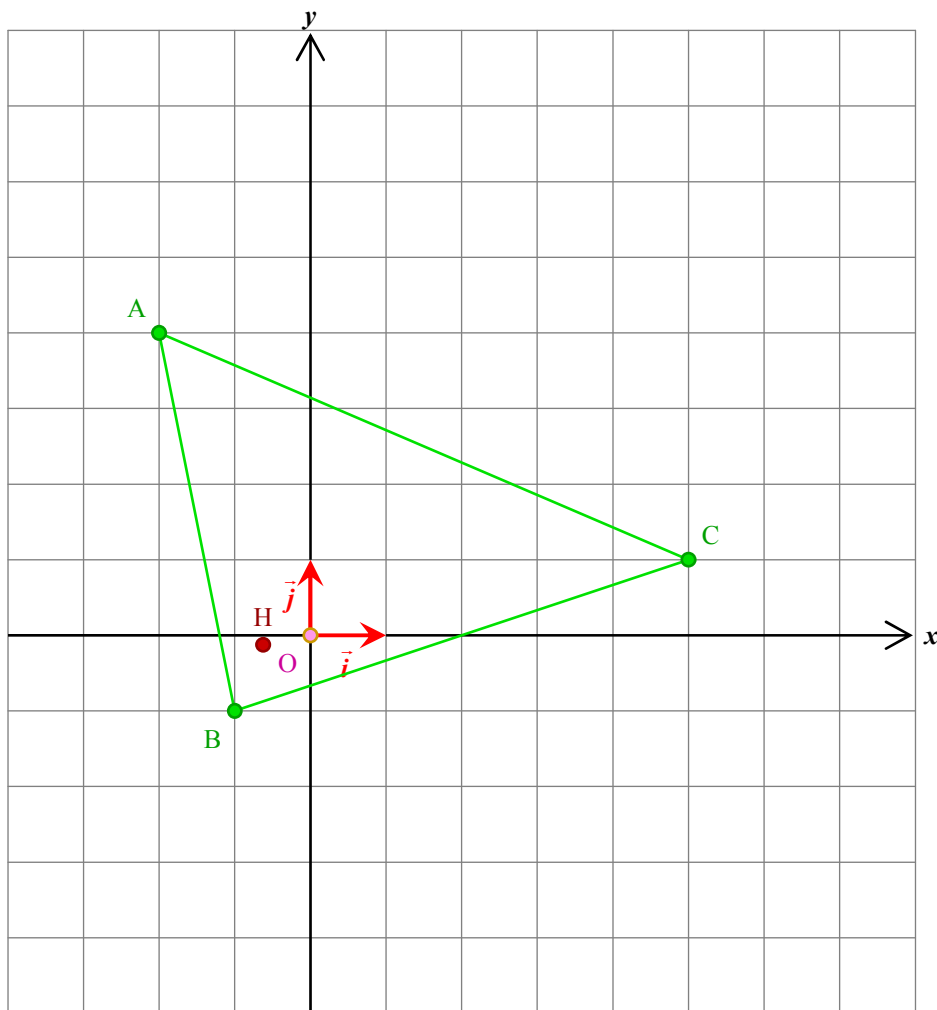
c) On appelle d' la droite parallèle à la droite d passant par le point B.

1. Les droites (AB) et (CH) sont-elles perpendiculaires ? On justifiera sa réponse.
2. Déterminer une équation de la droite d' .
3. Le point H appartient-il à la droite d' ? On justifiera sa réponse.
4. Conclure en disant ce qu'est le point H pour le triangle ABC.

d) Démontrer que les points G, Ω et H sont alignés.

On appelle L le symétrique orthogonal du point H par rapport à l'axe (BC).

- Déterminer les coordonnées du point N qui est l'intersection de la droite (AH) et de la droite (BC).
- En déduire les coordonnées du point L.
- Le point L appartient-il à la droite d ? On justifiera sa réponse.
- Le point L appartient-il au cercle circonscrit au triangle ABC ? On justifiera sa réponse.



a.1) Le point J étant le milieu du segment [BC], les vecteurs $\overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{JC}$ sont opposés. Par conséquent, la somme de leurs opposés $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ}$ est nulle

Intéressons-nous à la relation vectorielle définissant G en y introduisant le milieu J .

$$\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AG} + \underbrace{\overline{BJ} + \overline{JG}}_{\overline{BG}} + \underbrace{\overline{CJ} + \overline{JG}}_{\overline{CG}} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AG} + 2 \times \overline{JG} + \underbrace{\overline{BJ} + \overline{CJ}}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

*Gràcies,
senyor Chasles !*

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + 2 \times \overrightarrow{JG} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = -2 \times \overrightarrow{JG}$$

Conclusion : comme les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires, alors le point G appartient à la médiane (AJ).

a.2) Déterminons les coordonnées du point G. Ce dernier est défini par la relation :

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G + 2 \\ y_G - 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G + 1 \\ y_G + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G - 5 \\ y_G - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remplace les vecteurs par leurs coordonnées...

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{Vecteurs égaux} \\ \left(\begin{array}{c} 3x_G - 2 \\ 3y_G - 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{Abscisses} \\ \text{égales} \\ 3x_G - 2 = 0 \\ x_G = \frac{2}{3} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \text{Ordonnées} \\ \text{égales} \\ 3y_G - 4 = 0 \\ y_G = \frac{4}{3} \end{array}$$

➤ Le point I étant le milieu du segment [AB], ses coordonnées sont données par la formule :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{(-2) + (-1)}{2} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + (-1)}{2} = \frac{3}{2}$$

a.3) Les vecteurs $\overrightarrow{\text{CG}} \begin{pmatrix} 2/3-5=-13/3 \\ 4/3-1=1/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{CI}} \begin{pmatrix} -3/2-5=-13/2 \\ 3/2-1=1/2 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Pour le savoir, calculons leur déterminant.

$$\det(\overline{\text{CG}}, \overline{\text{CI}}) = \begin{vmatrix} -13/3 & -13/2 \\ 1/3 & 1/2 \end{vmatrix} = -\frac{13}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{13}{2}\right) = -\frac{13}{6} + \frac{13}{6} = \underline{0}$$

Conclusion : leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires. Par conséquent, les points C, G et I sont alignés. Ainsi, le point G appartient-il aussi à la médiane (CI).

a.4) Le point G appartenant à deux des trois médianes du triangle ABC, il en est le centre de gravité.

b.1) La médiatrice du côté [AC] est la droite qui coupe le segment [AC] en son milieu K. Deux choses sont à établir quant à la droite d :

☛ La droite d est-elle perpendiculaire au segment [AC] ?

D'après son équation $7x - 3y - 3 = 0$, un vecteur normal de d est $\vec{n} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Et comme par bonheur, il s'agit du vecteur $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 - (-2) = 7 \\ 1 - 4 = -3 \end{pmatrix}$.

Sous-conclusion : $\overrightarrow{AC}$ étant un vecteur normal de d , la droite d est perpendiculaire à la droite (AC).

☛ La droite d coupe-t-elle le segment [AC] en son milieu K.

Les coordonnées du milieu K du segment [AC] sont données par la formule :

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{(-2) + 5}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

A présent, regardons si les coordonnées de K vérifient l'équation de la droite d .

$$7x_K - 3y_K = 7 \times \frac{3}{2} - 3 \times \frac{5}{2} = 10,5 - 7,5 = 3$$

Donc le point K appartient à la droite d .

Conclusion : la droite d est la médiatrice du segment [AC].

b.2) La médiatrice Δ passe par le milieu J(2;0) et a pour vecteur normal $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{JM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2) \times 6 + y \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 12 + 2y = 0 \xrightarrow{+12} \Leftrightarrow 3x + y - 6 = 0$$

Conclusion : une équation de la droite Δ est $3x + y = 6$.

b.3) Leurs vecteurs normaux $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ n'étant pas colinéaires, les droites d et Δ ne sont pas parallèles mais sécantes en un point qui va être baptisé Ω .

b.4) Les coordonnées du point d'intersection Ω sont les solutions du système.

$$\Omega \in d \Leftrightarrow 7x_\Omega - 3y_\Omega = 3 \quad (I)$$

$$\Omega \in \Delta \Leftrightarrow 3x_\Omega + y_\Omega = 6 \quad (2)$$

Ce système peut se résoudre par combinaisons linéaires mais nous optons pour la substitution.

A partir de l'équation (2), on exprime y_Ω en fonction de x_Ω .

$$(2) \quad 3x_\Omega + y_\Omega = 6 \Leftrightarrow y_\Omega = 6 - 3x_\Omega$$

Puis, on remplace y_Ω par ce qu'il vaut en x_Ω dans l'équation (I).

$$7x_\Omega - 3y_\Omega = 3 \Leftrightarrow 7x_\Omega - 3 \times (6 - 3x_\Omega) = 3 \Leftrightarrow 7x_\Omega - 18 + 9x_\Omega = 3$$

$$\Leftrightarrow 16x_\Omega = 21 \Leftrightarrow x_\Omega = \frac{21}{16} = 1,3125$$

Nous en déduisons pour l'ordonnée de Ω :

$$y_\Omega = 6 - 3x_\Omega = 6 - 3 \times \frac{21}{16} = \frac{96}{16} - \frac{63}{16} = \frac{33}{16} = 2,0625$$

Conclusion : le point Ω a pour coordonnées $\left(\frac{21}{16}, \frac{33}{16}\right)$.

b.4) Ω étant le point d'intersection de deux des trois médiatrices du triangle ABC, il est le centre du cercle qui y est circonscrit.

c.1) Calculons le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} -5/8 - 5 = -45/8 \\ -1/8 - 1 = -9/8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{-45}{8} \times 1 + \frac{-9}{8} \times (-5) = -\frac{45}{8} + \frac{45}{8} = 0$$

Leur produit scalaire étant nul, les vecteurs directeurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Conclusion : les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires. Par conséquent, la droite (CH) est la hauteur du triangle ABC issue de C.

c.2) Une équation de la droite d étant $7x - 3y = 3$,

Même vecteur normal $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

une équation de sa parallèle d' est de la forme $7x - 3y = Cste$.

Reste à déterminer la constante $Cste$. Comme le point B appartient à la droite d' , alors les coordonnées du premier vérifient l'équation de la seconde. Il vient :

$$7x_B - 3y_B = Cste \Leftrightarrow 7 \times (-1) - 3 \times (-1) = Cste \Leftrightarrow Cste = -7 + 3 = -4$$

Conclusion : une équation de la parallèle d' est $7x - 3y + 4 = 0$.

La droite d' étant parallèle à la médiatrice d , elle est de fait perpendiculaire au côté [AC]. Donc la droite d' est la hauteur du triangle ABC issue de B.

c.3) Les coordonnées du point H vérifient-elles notre équation de d' ?

$$7x_H - 3y_H + 4 = 7 \times \left(-\frac{5}{8}\right) - 3 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + 4 = -\frac{35}{8} + \frac{3}{8} + 4 = -\frac{32}{8} + 4 = -4 + 4 = 0$$

Conclusion : le point H appartient à la droite d' .

c.4) Etant le point d'intersection de deux des trois hauteurs du triangle ABC, H est l'orthocentre de ce dernier.

d) Calculons les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{GH} \begin{cases} x_{\overrightarrow{GH}} = -\frac{5}{8} - \frac{2}{3} = -\frac{15}{24} - \frac{16}{24} = -\frac{31}{24} \\ y_{\overrightarrow{GH}} = -\frac{1}{8} - \frac{4}{3} = -\frac{3}{24} - \frac{32}{24} = -\frac{35}{24} \end{cases} \quad \overrightarrow{G\Omega} \begin{cases} x_{\overrightarrow{G\Omega}} = \frac{21}{16} - \frac{2}{3} = \frac{63}{48} - \frac{32}{48} = \frac{31}{48} \\ y_{\overrightarrow{G\Omega}} = \frac{33}{16} - \frac{4}{3} = \frac{99}{48} - \frac{64}{48} = \frac{35}{48} \end{cases}$$

Nous pourrions calculer le déterminant de ces deux vecteurs mais leurs coordonnées nous permettent d'affirmer :

$$-\frac{1}{2} \times \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{G\Omega}$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{G\Omega}$ étant colinéaires, nous en déduisons que le centre de gravité G, l'orthocentre H et le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler. Quelque soit le triangle, il en est toujours ainsi !

e.1) Le point N l'intersection de la hauteur (AH) et de la droite (BC).

Comme N appartient à la hauteur (AH), alors les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_N + 2 \\ y_N - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x_N + 2) \times 6 + (y_N - 4) \times 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x_N + 2y_N + 4 = 0 \Leftrightarrow \underline{3x_N + y_N + 2 = 0} \quad (1) \end{aligned}$$

Ensuite, N appartenant à la droite (BC), les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BC}) = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_N + 1 & 6 \\ y_N + 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x_N + 1) \times 2 - (y_N + 1) \times 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x_N - 6y_N - 4 = 0 \Leftrightarrow \underline{x_N - 3y_N - 2 = 0} \quad (2) \end{aligned}$$

Nous aboutissons à un système 2×2 que nous résolvons par combinaisons linéaires.

Pour trouver x_N , multiplions l'équation (1) par 3, puis nous l'additionnerons à (2) afin d'éliminer y_N .

$$\begin{array}{rcl} (1) & \xrightarrow{\times 3} & 9x_N + 3y_N + 6 = 0 \\ (2) & \longrightarrow & x_N - 3y_N - 2 = 0 \\ \hline & & 10x_N + 4 = 0 \\ & & x_N = \underline{-0,4} \end{array} \oplus$$

Pour déterminer y_N , on multiplie l'équation (2) par 3, puis on la soustrait à l'équation (1) de façon à éliminer x_N .

$$\begin{array}{rcl} (1) & \longrightarrow & 3x_N + y_N + 2 = 0 \\ (2) & \xrightarrow{\times 3} & 3x_N - 9y_N - 6 = 0 \\ \hline & & 10y_N + 8 = 0 \\ & & y_N = \underline{-0,8} \end{array} \ominus$$

e.2) Le point L est aussi le symétrique du point H par rapport à N. Donc tout ce petit monde vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{LH} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_L + 0,4 \\ y_L + 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 + 0,625 \\ -0,8 + 0,125 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{Abscisses égales} \\ x_L = \underline{-0,175} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} \text{Ordonnées égales} \\ y_L = \underline{-1,475} \end{matrix}$$

e.3) Les coordonnées du point L vérifient-elle l'équation de la droite d ?

$$7x_L - 3y_L = 7 \times (-0,175) - 3 \times (-1,475) = 3,2 \neq 3$$

Ses coordonnées n'en vérifiant pas l'équation, le point L n'appartient pas à la droite d.

e.4) Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre $\Omega(1,3125; 2,0625)$ et passe par le point A(-2; 4). Son rayon est donc donné par :

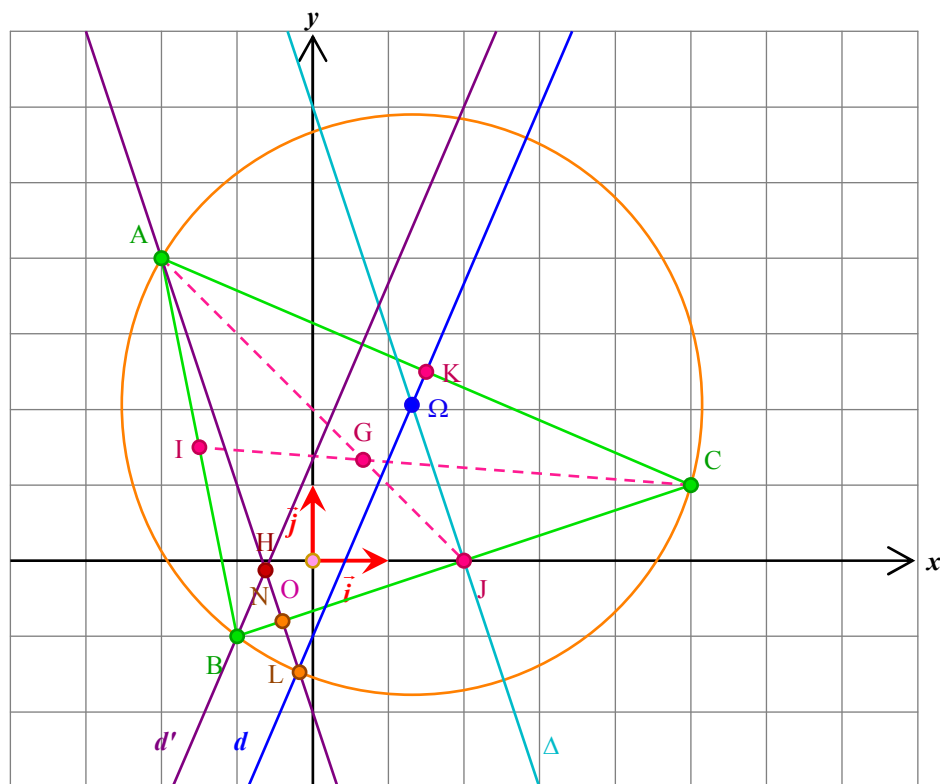
$$\text{rayon} = \Omega A = \sqrt{(-2 - 1,3125)^2 + (4 - 2,0625)^2} = \sqrt{14,7265625}$$

Calculons la distance ΩL .

$$\Omega L = \sqrt{(-0,175 - 1,3125)^2 + (-1,475 - 2,0625)^2} = \sqrt{14,7265625} = \text{rayon}$$

Conclusion : le point L appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. En fait, il en va de même pour chacun des symétriques de l'orthocentre H par rapport aux trois côtés du triangle.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



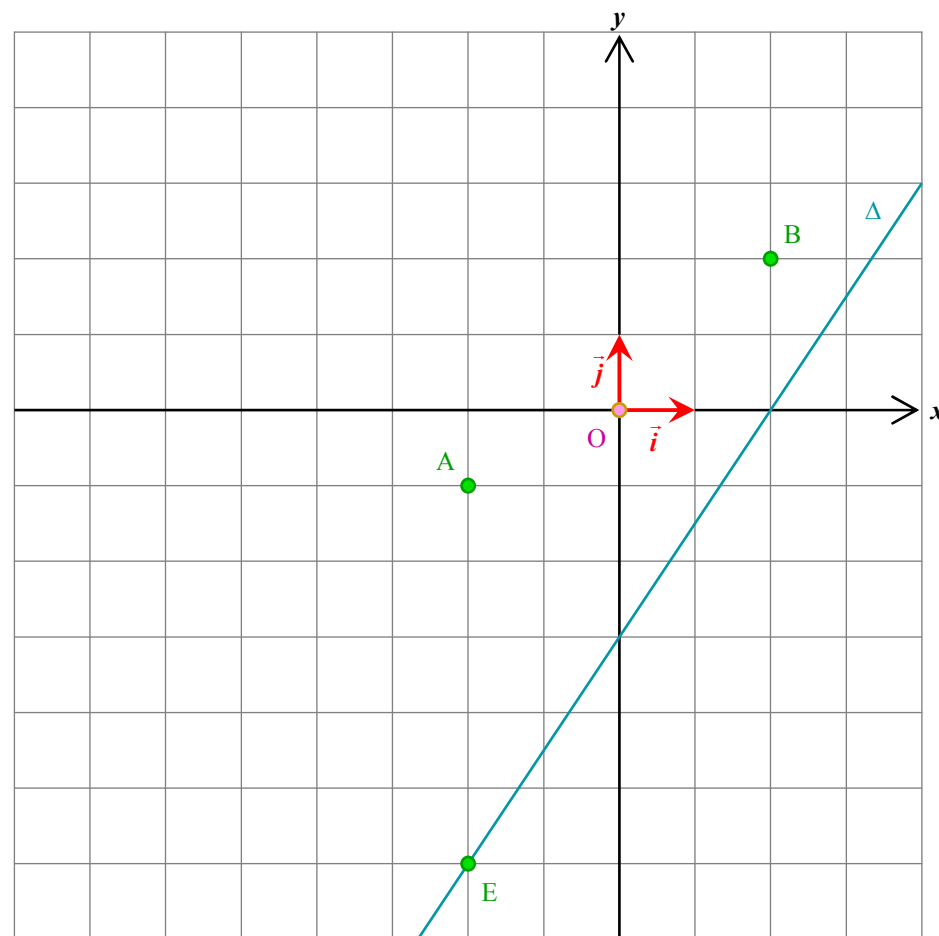
Les équations tournent en rond

Le contexte

Cet exercice de géométrie analytique aborde les équations de droites et de cercles.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où ont été placés les points A, B et E. On a également tracé la droite Δ .



a) On appelle (C) le cercle de centre A passant par E.

- Déterminer une équation du cercle (C) .
- Le point B appartient-il au cercle (C) ? On justifiera sa réponse.
- Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ .
- Déterminer les coordonnées du point F qui est le second point (après E) d'intersection du cercle (C) et de la droite Δ .

b) On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation :

$$2 \times AM^2 + 3 \times EM^2 = 75$$

- En appelant $(x; y)$ les coordonnées du point M, établir la relation :

$$2 \times AM^2 + 3 \times EM^2 = 5x^2 + 5y^2 + 20x + 40y + 130$$

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) .

Le corrigé

a.1) La première chose à faire est de calculer le rayon de ce cercle (C) de centre A et

passant par le point E. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AE}$ étant $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, il vient :

$$\text{rayon du cercle } (C) = AE = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Le cercle (C) est l'ensemble des points M du plan dont la distance à A est égale à 5. Ainsi

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow AM = 5$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = 25 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 25$$

$$\text{car } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 25 = 0 \quad \text{Une équation de } (C).$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0 \quad \text{Une autre équation de } (C).$$

a.2) Regardons si les coordonnées de B vérifient l'une des deux équations de (C) .

$$(x_B + 2)^2 + (y_B + 1)^2 = (2+2)^2 + (2+1)^2 = 4^2 + 3^2 = 16+9 = 25$$

Conclusion : ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point B appartient au cercle (C) .

a.3) La droite Δ passe par le point $E(-2; -6)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{EM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{EM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 2 \\ y+6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \times 3 - (y+6) \times 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 6 = 0$$

a.4) Un des deux points d'intersection du cercle (C) et de la droite Δ est $E(-2; -6)$.

On appelle $F(x_F; y_F)$ l'autre point d'intersection.

$$\text{Comme } F \in \Delta, \text{ alors } 3x_F - 2y_F - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x_F - 6 = 2y_F \Leftrightarrow y_F = 1,5 \times x_F - 3$$

Ensuite, comme F fait aussi partie du cercle (C) , alors ses coordonnées vérifient :

$$(x_F + 2)^2 + (y_F + 1)^2 = 25 \Rightarrow (x_F + 2)^2 + (1,5 \times x_F - 3 + 1)^2 = 25$$

$$\Rightarrow x_F^2 + 4x_F + 4 + 2,25 \times x_F^2 - 6x_F + 4 = 25$$

$$\Rightarrow 3,25 \times x_F^2 - 2x_F - 17 = 0$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation qui est du second degré.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3,25 \times 17 = 225 = 15^2$$

Comme son discriminant est positif, alors cette équation a deux solutions distinctes :

$$x_F = \frac{-(-2) - 15}{2 \times 3,25} = \frac{-13}{6,5} = -2 \quad \text{et} \quad x_F = \frac{-(-2) + 15}{2 \times 3,25} = \frac{17}{6,5} = \frac{34}{13}$$

$$\text{d'où } y_F = 1,5 \times (-2) - 3 = -6$$

C'est le point E

$$\text{d'où } y_F = 1,5 \times \frac{34}{13} - 3 = \frac{12}{13}$$

Voilà le point F !

b.1) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EM}$ ayant pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x+2 \\ y+6 \end{pmatrix}$,

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} 2 \times AM^2 + 3 \times EM^2 &= 2 \times [(x+2)^2 + (y+1)^2] + 3 \times [(x+2)^2 + (y+6)^2] \\ &= 2 \times [x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1] + 3 \times [x^2 + 4x + 4 + y^2 + 12y + 36] \\ &= 2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 + 4y + 2 + 3x^2 + 12x + 12 + 3y^2 + 36y + 108 \\ &= 5x^2 + 5y^2 + 20x + 40y + 130 \end{aligned}$$

b.2) En utilisant ce qui vient d'être fait, la relation définissant l'ensemble (Γ) devient :

$$2 \times AM^2 + 3 \times EM^2 = 50 \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 + 20x + 40y + 130 = 75$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 8y + 26 = 15$$

$$\Leftrightarrow \underline{x^2 + 4x} + \underline{y^2 + 8y} + 11 = 0$$

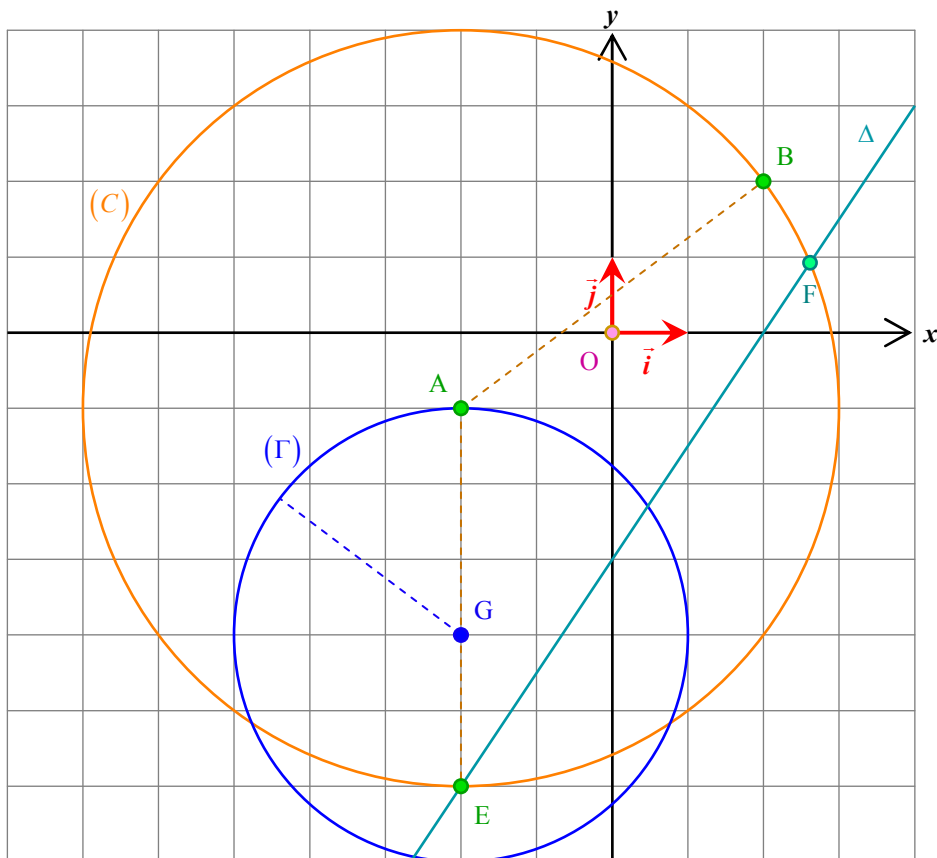
On appelle G
le point de
coordonnées $(-2; -4)$

$$\Leftrightarrow \underline{(x+2)^2 - 4} + \underline{(y+4)^2 - 16} + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+4)^2 = 9 \Leftrightarrow GM^2 = 9 \Leftrightarrow \underline{GM = 3}$$

Conclusion : l'ensemble (Γ) est le cercle de centre $G(-2; -4)$ et de rayon 3.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Probabilités et statistiques

Les stats, c'est vachement chouette !

Le contexte

Cet exercice de statistiques aborde les principaux points du chapitre...sans calculatrice.

L'énoncé

Cet exercice est composé de deux sous-parties indépendantes.

a) Le groupe des «pas courageux» d'une classe de première S a obtenu les notes suivantes lors du dernier devoir :

4 2 3 5 1

Calculer la moyenne de cette série statistique, puis montrer qu'une valeur approchée de son écart-type de cette série statistique est 1,41.

b) On étudie la répartition des salaires dans deux entreprises A et B. Dans les deux compagnies, les rémunérations mensuelles s'échelonnent de 1000 à 3200 euros. Le polygone des fréquences cumulées croissantes de l'entreprise A et le diagramme en boîte de l'entreprise B sont représentés ci-contre →

1. A partir des deux graphiques, déterminer les médianes, quartiles et moyennes de ces deux séries statistiques.
2. Voici cinq affirmations. Pour chacune d'entre elles, indiquer si elle est vraie, fausse ou indécidable (c'est-à-dire que l'on ne peut pas se prononcer). Aucune justification n'est demandée.

Dans l'entreprise A, le nombre d'employés gagnant moins de 1500 euros est supérieur au nombre d'employés gagnant plus de 2700 euros.

Vrai Faux Indécidable

Dans l'entreprise B, le nombre d'employés gagnant moins de 1500 euros est supérieur au nombre d'employés gagnant plus de 2700 euros.

Vrai Faux Indécidable

Le salaire moyen de l'entreprise B est supérieur au salaire moyen de l'entreprise A.

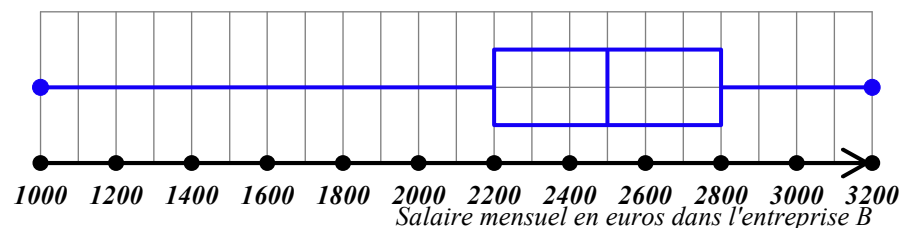
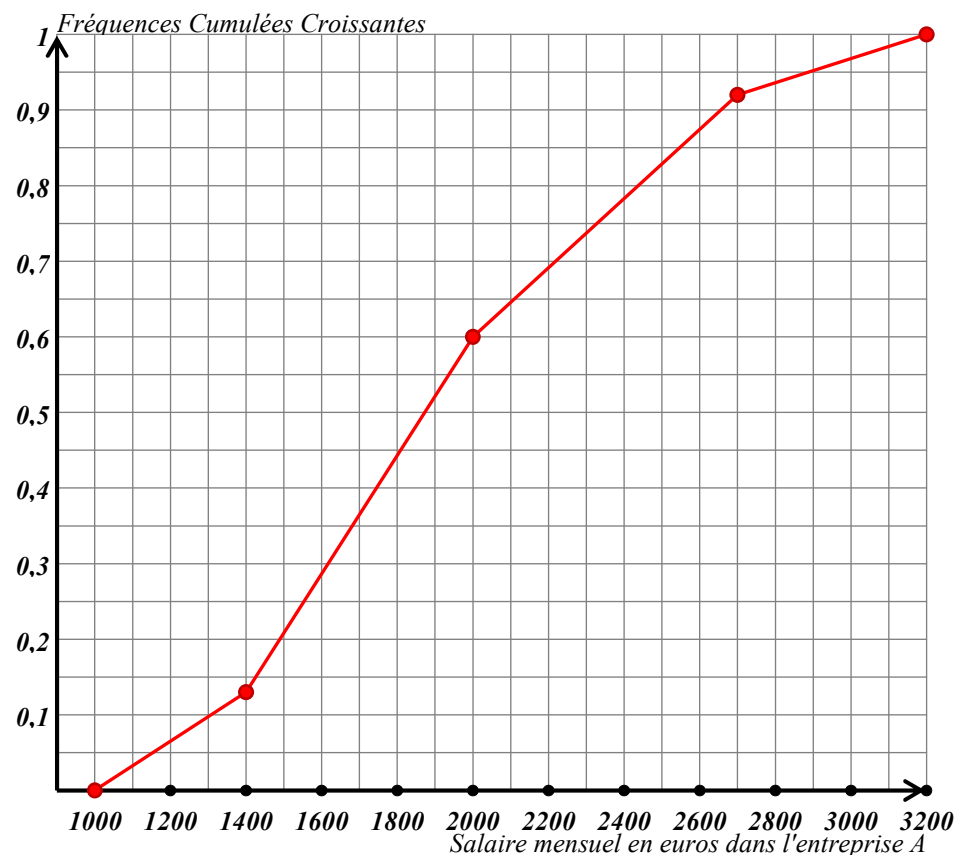
Vrai Faux Indécidable

Si l'on s'intéresse aux employés gagnant moins de 2000 euros, il y en a plus dans l'entreprise B que dans l'entreprise A.

Vrai Faux Indécidable

Si l'on s'intéresse à la part des employés d'une entreprise gagnant plus de 2800 euros, elle est plus grande dans l'entreprise B que dans l'entreprise A.

Vrai Faux Indécidable



Le corrigé

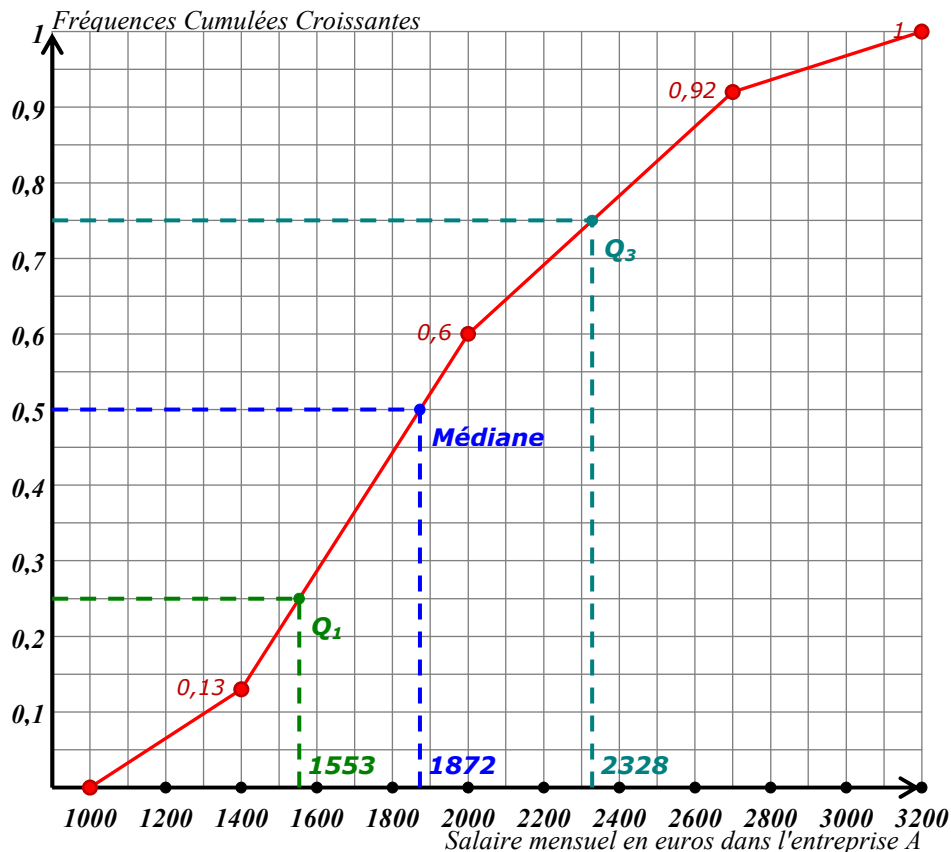
a) La moyenne, la variance et l'écart-type du groupe «pas courageux» sont donnés par :

$$\text{Moyenne} = \frac{4+2+3+5+1}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{Variance} = \frac{4^2+2^2+3^2+5^2+1^2}{5} - 3^2 = \frac{16+4+9+25+1}{5} - 9 = \frac{55}{5} - 9 = 11 - 9 = 2$$

$$\text{Ecart-type} = \sqrt{\text{Variance}} = \sqrt{2} \approx 1,41$$

b.1) Le polygone des fréquences cumulées croissantes de l'entreprise A nous donne ses indicateurs de dispersion (les quartiles et la médiane) mais pas sa moyenne.

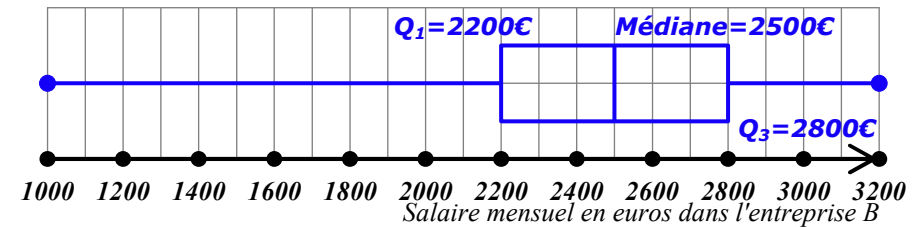


Néanmoins, on peut calculer une moyenne salariale en décumulant le polygone ci-dessus...

Somme des produits fréquence $\times$ Milieu de la classe

$$\text{Moyenne} = 0,13 \times 1200 + 0,47 \times 1700 + 0,32 \times 2350 + 0,08 \times 2950 \approx 1708\text{€}$$

De même, le diagramme en boîte de l'entreprise B nous donne aussi ses indicateurs de dispersion mais pas sa moyenne !



b.2) Examinons les différentes affirmations :

- D'après son polygone des fréquences cumulées croissantes, un peu plus de 20% des employés de l'entreprise A gagnent moins de 1500€ alors qu'un peu moins de 9% gagnent plus de 2700€. La première affirmation est vraie.
- D'après son diagramme en boîte, moins d'un quart (du fait de la position de Q_1) des employés de l'entreprise B gagnent moins de 1500€ alors que plus d'un quart (à cause de la position de Q_3) gagnent plus de 2700€. La seconde affirmation est fausse.
- Il est impossible de déterminer les salaires moyens dans les deux entreprises avec les données dont nous disposons. La troisième affirmation est indéterminable.
- Le terme «il y en a plus» impliquerait que nous connaissions les nombres d'employés dans les deux entreprises. Ce qui n'est pas le cas. La quatrième affirmation est indéterminable.
- La part des employés de l'entreprise A gagnant plus de 2800€ est d'environ 7% selon le polygone des fréquences cumulées croissantes. Du fait de la position du troisième quartile Q_3 et selon le diagramme en boîte, la part des employés de l'entreprise B gagnant plus de 2800€ est de 25%. La dernière affirmation est vraie.

Maths ou brillant ?

Le contexte

Un exercice classique de probabilité avec un arbre pondéré, la formule des probabilités totales qui ne dit pas son nom et une loi binomiale pour conclure.

L'énoncé

La Blancoise des Jeux vient de lancer un nouveau jeu : *Question de maths pour gens brillants*.

Son principe est le suivant : d'abord, le joueur tire au hasard une question.

Un tiers de ces questions portent sur la géométrie, les deux cinquièmes portent sur l'analyse et les restantes sur les probabilités.

Des études ont montré que :

- ☛ Le joueur répondait correctement à une question de géométrie dans 60% des cas.
- ☛ Le joueur répondait correctement à une question d'analyse dans 65% des cas.
- ☛ Le joueur répondait correctement à une question de probabilités dans 90% des cas.

Un joueur se présente pour jouer, la partie commence...

a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation d'une partie de *Question de maths pour gens brillants*.

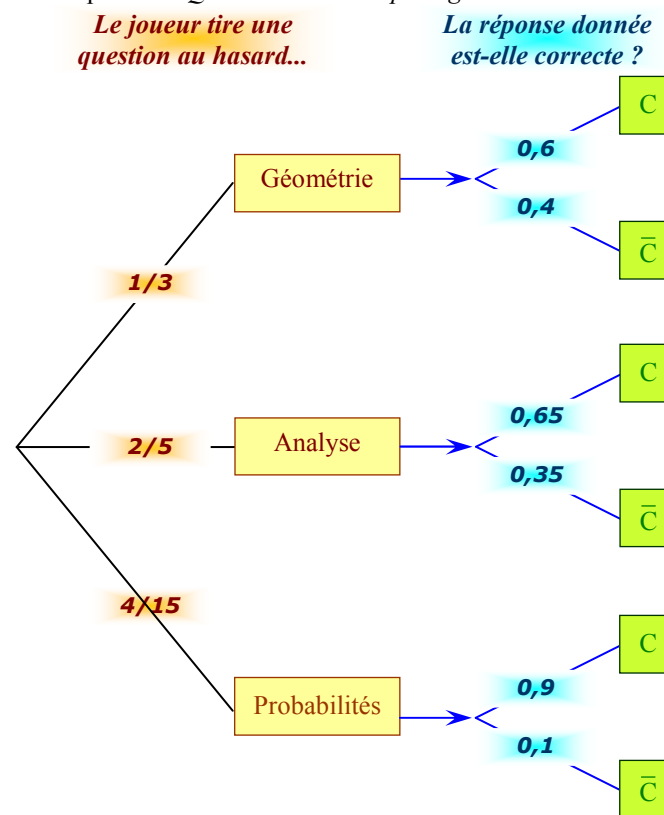
b) Etablir que la probabilité que le joueur réponde correctement à une question posée est de 0,7.

c) Un joueur décide de jouer dix fois de suite à *Question de maths pour gens brillants*. Les dix parties ou questions posées sont considérées comme indépendantes. Le résultat ou les conditions d'une partie (question) n'influent pas sur les autres parties (questions). On appelle X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de questions auxquelles le joueur a apporté une réponse correcte au cours des dix parties.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? On justifiera sa réponse.
2. Déterminer la probabilité que le joueur réponde correctement à exactement sept questions sur les dix.

Le corrigé

a) La situation d'une partie de *Question de maths pour gens brillants* est la suivante :



Quelques précisions :

- ☛ La probabilité d'avoir une question de probabilités est $1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{15-5-6}{15} = \frac{4}{15}$
- ☛ L'événement C désigne «la réponse apportée est correcte» et l'événement $\bar{C}$ «la réponse apportée est fautive».

b) La probabilité de l'événement C est donnée par :

$$\begin{aligned}
 p(C) &= p(\text{Géométrie} \cap C) + p(\text{Analyse} \cap C) + p(\text{Probabilités} \cap C) \\
 &= \frac{1}{3} \times 0,6 + \frac{2}{5} \times 0,65 + \frac{4}{15} \times 0,9 = 0,2 + 0,26 + 0,24 = 0,7
 \end{aligned}$$

Sans le dire, c'est la formule des probabilités totales qui s'applique...

c) Chaque question est pour le joueur une épreuve de Bernoulli...



Les dix questions forment un schéma de Bernoulli à dix épreuves.

Par conséquent, la variable aléatoire X qui comptabilise le nombre de succès au cours des dix épreuves suit la loi binomiale $B(10; 0,7)$.

La probabilité que le joueur réponde correctement à exactement sept questions sur les dix est donnée par :

$$p(X=7) = \binom{10}{7} \times 0,7^7 \times 0,3^3$$

Du fait de la symétrie des «*p* parmi *n*»

$$= \binom{10}{3} \times 0,7^7 \times 0,3^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \times 0,7^7 \times 0,3^3 \approx 0,267$$

Des lettres pour des chiffres

Le contexte

Cet exercice de probabilité s'ouvre sur un tirage simultané et ses combinaisons (clairement hors programme) avant de s'orienter sur une variable aléatoire discrète et la manipulation de son espérance.

L'énoncé

Signe de sa grande créativité, *La Blanche des Jeux* vient encore de lancer un nouveau jeu : *Des lettres pour des chiffres*.

Son principe est le suivant. Une urne contient 26 boules indiscernables au toucher sur lesquelles sont marquées les 26 lettres de l'alphabet : une boule, une lettre. Et réciproquement !

Six de ces vingt-six lettres (ou boules) sont des voyelles (*a e i o u y*) et les vingt autres des consonnes.

Après s'être acquitté d'une mise de m euros, le joueur tire au hasard et simultanément une main de quatre boules. Ainsi, par exemple, les tirages *rame*, *mare* et *amer* désignent-ils la même main. On ne tient pas compte de l'ordre des lettres.

Le joueur gagne dans trois cas :

- A. Si sa main comporte quatre voyelles, alors il gagne 5000€.
- B. Si sa main comporte trois voyelles et une consonne, alors il gagne 100€
- C. Si sa main comporte deux voyelles et deux consonnes, alors il est remboursé de sa mise m .

Dans tous les autres cas, il a perdu.

a) En expliquant son calcul, déterminer :

1. Le nombre total de mains.
2. Le nombre de mains favorables au cas **A**, c'est-à-dire celles composées de quatre voyelles.
3. Le nombre de mains favorables au cas **B**, c'est-à-dire celles composées de trois voyelles et une consonne.
4. Le nombre de mains favorables au cas **C**, c'est-à-dire celles composées de deux voyelles et deux consonnes.

b) On appelle X la variable aléatoire égale au gain brut (mise non déduite) exprimé en euros reçu par le joueur.

Des calculs arrondis au millième ont conduit à la loi de probabilité de la variable aléatoire X suivante :

Valeur de X	0€	m €	100€	5000€
Probabilité	0,781		0,027	0,001

1. Compléter le tableau et vérifier que les probabilités trouvées sont correctes.
2. Exprimer en fonction de m l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .
3. *La Blancoise des Jeux* entend faire un bénéfice de 1,20 euros par joueur. A combien doit-elle fixer la mise m pour parvenir à cet objectif ?

Le corrigé

a) D'abord, le tirage des quatre boules étant simultané et sans ordre, chaque main obtenue est une combinaison.

Au total, il y a $\overbrace{\binom{26}{4}}^{4 \text{ lettres à choisir parmi 26}} = \frac{26 \times 25 \times \cancel{24} \times 23}{4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 14950 \text{ mains possibles}$.

Passons en revue les trois cas qui conduisent à une main gagnante :

A. Une main avec quatre voyelles

Il y a $\overbrace{\binom{6}{4}}^{4 \text{ lettres à choisir parmi 6 voyelles}} = \frac{\cancel{6} \times 5 \times \cancel{4} \times 3}{4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 15 \text{ mains favorables à A}$

B. Une main avec trois voyelles et une consonne

Il y a $\overbrace{\binom{6}{3}}^{3 \text{ lettres à choisir parmi 6 voyelles}} \times \overbrace{\binom{20}{1}}^{1 \text{ lettre à choisir parmi 20 consonnes}} = \frac{\cancel{6} \times 5 \times 4}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} \times 20 = 400 \text{ mains B}$

C. Une main avec deux voyelles et deux consonnes

Il y a $\overbrace{\binom{6}{2}}^{2 \text{ lettres à choisir parmi 6 voyelles}} \times \overbrace{\binom{20}{2}}^{2 \text{ lettres à choisir parmi 20 consonnes}} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{20 \times 19}{2 \times 1} = 2850 \text{ mains C}$

b.1) La somme des probabilités prises par la variable aléatoire X est égale à 1. Ainsi :

$$p(X = m) = 1 - \overbrace{p(X = 0)}^{0,781} - \overbrace{p(X = 100)}^{0,027} - \overbrace{p(X = 5000)}^{0,001} = 0,191$$

En utilisant les résultats de la question a, on vérifie :

$$p(X = 5000) = p(\mathbf{A}) = \frac{15}{14950} = \frac{3}{2990} \approx 0,001$$

$$p(X = 100) = p(\mathbf{B}) = \frac{400}{14950} = \frac{8}{299} \approx 0,027$$

$$p(X = m) = p(\mathbf{C}) = \frac{2850}{14950} = \frac{57}{299} \approx 0,191$$

Les boules étant indiscernables au toucher, nous sommes en situation d'équiprobabilité.

b.2) L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est donnée par :

$$E(X) = \sum p(X = \text{valeur}) \times \text{valeur} \\ = 0,781 \times 0 + 0,191 \times m + 0,027 \times 100 + 0,001 \times 5000 = 0,191 \times m + 7,7$$

b.3) Lorsque l'espérance de gain brut est égale à la mise, le jeu est équitable.

La Blancoise des Jeux fait un bénéfice de 1,20€ lorsque le joueur perd 1,20€ en moyenne.

Autrement dit, lorsque :

$$E(X) = m - 1,20 \Leftrightarrow 0,191 \times m + 7,7 = m - 1,2$$

$$\Leftrightarrow -0,809 \times m = -8,9 \Leftrightarrow m = \frac{-8,9}{-0,809} \approx 11,00\text{€}$$

Conclusion : *La Blancoise des Jeux* réalise un bénéfice de 1,20€ par joueur lorsque la mise est fixée à 11 euros.

Les trois premiers

Le contexte

Cet exercice de probabilité reprend tous les trucs des deux précédents : tirage simultané et combinaisons, variable aléatoire avec espérance mathématique et pour finir un schéma de Bernoulli avec sa loi binomiale.

L'énoncé

Pour la dernière fois de la saison, la trop créative *Blancoise des Jeux* vient de créer un nouveau jeu : *Les Trois Premiers*.

Son principe est le suivant. Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 20.

Neuf de ces boules portent un entier premier. On rappelle qu'un entier est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même.

Dans un premier temps, le joueur verse une mise de m euros.

Ensuite, le joueur tire au hasard et simultanément une main de trois boules. Il n'y a pas d'ordre dans le tirage des trois boules.

Trois cas sont alors possibles :

- Si les trois boules tirées portent chacune un numéro premier, alors le joueur gagne 100 euros.
- Si, parmi les trois boules tirées, exactement deux portent un numéro premier, alors le joueur est remboursé de sa mise m .
- Dans toutes les autres compositions, le joueur perd.

a) Enumérer les neuf entiers premiers compris entre 1 et 20.

b) En expliquant et en écrivant ses calculs, déterminer :

- Le nombre total de mains de trois boules.
- Le nombre de mains favorables au cas **A**, c'est-à-dire celles composées de trois boules portant chacune un numéro premier.
- Le nombre de mains favorables au cas **B**, c'est-à-dire celles composées de trois boules dont exactement deux portent un numéro premier.

c) On appelle X la variable aléatoire égale au gain net (mise m déduite) exprimé en euros reçu par le joueur.

- Donner les trois valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?
- Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

Valeur de X			$100 - m$
Probabilité	0,58		0,07

- Exprimer en fonction de m l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .
- La Blancoise des Jeux* souhaite faire un bénéfice de 1,45 euros par partie. A combien doit-elle fixer la mise m pour parvenir à cet objectif ?

d) Un joueur décide de jouer sept fois de suite aux *Trois Premiers*. Chacune de ces sept parties est indépendante des autres.

On appelle Y la variable aléatoire comptabilisant le nombre de parties où le joueur gagne 100 euros.

On arrondira les probabilités demandées au millième près.

- Expliquer pourquoi la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Déterminer la probabilité que le joueur gagne exactement 3 parties sur les 7.
- Déterminer la probabilité que le joueur ne gagne aucune partie sur les 7.
- En déduire la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les 7.

Le corrigé

a) Les neuf entiers premiers compris entre 1 et 20 sont : 1 2 3 5 7 11 13 17 19

b) Le tirage des trois boules étant simultané et sans ordre, chaque main obtenue est une combinaison.

Au total, il y a $\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$ mains possibles.

3 numéros à choisir parmi 20

Le nombre de mains favorables au cas **A**, c'est-à-dire composées de trois boules portant

chacune un numéro premier, est de $\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = \frac{504}{6} = 84$

3 numéros à choisir parmi les 9 premiers

Le nombre de mains favorables au cas **B**, c'est-à-dire celles ayant deux boules portant un

numéro premier est, $\binom{9}{2} \times \binom{11}{1} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} \times \frac{11}{1} = 36 \times 11 = 396$

2 numéros à choisir parmi les 9 premiers *1 numéro à choisir parmi les 11 autres*

c.1) Les trois valeurs prises par la variable aléatoire X sont $100 - m$ euros.

Gain net = Gain brut - Mise

$m - m = 0$
 $-m$

c.2) Complété, le tableau donnant la loi de probabilité de X est le suivant :

Valeur de X	$-m$	0	$100 - m$
Probabilité	0,58	0,35	0,07

Quelques précisions :

☛ Un gain net X de $100 - m$ euros équivaut à obtenir une main de type **A**.

$$p(X = 100 - m) = p(\mathbf{A}) = \frac{\text{Nombre de mains } \mathbf{A}}{\text{Nombre total de mains}} = \frac{84}{1140} = 0,07$$

☛ Un gain net X de 0 euros équivaut à obtenir une main de type **B**.

$$p(X = 0) = p(\mathbf{B}) = \frac{\text{Nombre de mains } \mathbf{B}}{\text{Nombre total de mains}} = \frac{396}{1140} = 0,35$$

☛ Un gain net X de $-m$ euros correspond aux mains restantes de type **C**.

$$p(X = -m) = 1 - p(X = 0) - p(X = 100 - m) = 1 - 0,35 - 0,07 = 0,58$$

c.3) L'espérance mathématique est donnée par la formule :

$$E(X) = \sum p(X = \text{valeur}) \times \text{valeur}$$

$$= 0,58 \times (-m) + 0,35 \times 0 + 0,07 \times (100 - m) = 7 - 0,65 \times m$$

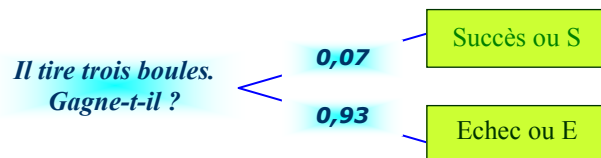
c.4) La Blancoise des Jeux fait un bénéfice de 1,45€ par joueur lorsque l'espérance de gain net du joueur sur une partie est de -1,45€. Autrement dit, lorsque :

$$E(X) = -1,45 \Leftrightarrow 7 - 0,65 \times m = -1,45 \Leftrightarrow -0,65 \times m = -8,45$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-8,45}{-0,65} \approx 13\text{€}$$

Conclusion : La Blancoise des Jeux réalise un bénéfice de 1,45€ par partie lorsque la mise est fixée à 13 euros.

d.1) Chacune des sept parties est pour le joueur une épreuve de Bernoulli.



Les sept parties forment un schéma de Bernoulli à sept épreuves

Par conséquent, la variable aléatoire Y qui comptabilise le nombre de succès au cours des sept épreuves suit la loi binomiale $B(7; 0,07)$.

d.2) La probabilité que le joueur gagne exactement 3 parties sur les 7 est donnée par:

$$p(Y = 3) = \binom{7}{3} \times 0,07^3 \times 0,93^4 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times 0,07^3 \times 0,93^4 \approx 0,009$$

d.3) La probabilité que le joueur ne gagne aucune partie sur les 7 est donnée par :

$$p(Y = 0) = \binom{7}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^7 = 1 \times 1 \times 0,93^7 \approx 0,602$$

d.4) «Gagner au moins une partie» est l'événement contraire de «n'en gagner aucune». Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,602 \approx 0,398$$

Mégamillion, méga pognon !

Le contexte

Ce problème donné en devoir à la maison traite sur la loterie américaine *Megamillion* et a pour objet la vérification des probabilités de gagner données par l'entreprise sur son site web.

Il est question de tirages simultanés et donc de combinaisons (hors programme) mais aussi de variable aléatoire et d'espérance mathématique.

L'énoncé

Le *Megamillion* est une sorte de loto américain où le joueur choisit sur un ticket cinq numéros principaux compris entre 1 et 56, puis un numéro complémentaire compris entre 1 et 46.

Chaque ticket coûte un dollar.

Pour gagner, le joueur doit avoir l'un au moins des cinq numéros principaux avec éventuellement le complémentaire.

Sur son site internet <http://www.megamillions.com/howto>, l'entreprise énonce les cas gagnants avec leurs probabilités :

MATCH 	MATCH 	PRIZE *	CHANCES	
5	+	1	Jackpot	1 in 175,711,536
5	+	0	\$250,000	1 in 3,904,701
4	+	1	\$10,000	1 in 689,065
4	+	0	\$150	1 in 15,313
3	+	1	\$150	1 in 13,781
3	+	0	\$7	1 in 306
2	+	1	\$10	1 in 844
1	+	1	\$3	1 in 141
0	+	1	\$2	1 in 75
Overall chances of winning a prize:				1 in 40

Le jackpot minimal est de 12 millions de dollars. Mais lorsqu'il n'est pas trouvé une semaine, il est remis en jeu la semaine suivante et cumulé avec le nouveau jackpot.

a) Les probabilités annoncées sont-elles exactes ? On justifiera sa réponse. Les gains sont-ils «cohérents» avec la probabilité de les gagner ?

b) On appelle X la variable aléatoire comptabilisant le gain brut que touche le joueur.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre le gain brut X ?
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ en supposant que le jackpot est de 12 millions de dollars.
3. En déduire la marge que fait l'entreprise sur chaque ticket. Sur son site, l'entreprise annonce que 50% des sommes collectées sont redistribuées aux joueurs, 35% sont perçues à titre de taxes par les Etats et que les 15% restants correspondent à ses frais de fonctionnement. Est-ce correct ?

Le corrigé

a) D'abord, précisons que le tirage des cinq numéros principaux se fait sans ordre et est simultané. Le nombre de tirages possibles est donné par :

$$\begin{array}{c} \text{5 numéros} \\ \text{principaux à} \\ \text{choisir parmi 56} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{complémentaire} \\ \text{à choisir parmi 46} \end{array} = \frac{\binom{56}{5} \times \binom{46}{1}}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 46 = 175711536$$

Passons en revue les divers tirages gagnants :

● Cinq numéros principaux et le complémentaire

Le nombre de tirages favorables à ce cas est donné par :

$$\begin{array}{c} \text{5 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 5 bons} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{complémentaire} \\ \text{à choisir parmi 1 bon} \end{array} = 1 \times 1 = 1$$

Sa probabilité de réalisation est de $\frac{1}{175711536}$ comme annoncé.

● Cinq numéros principaux sans le complémentaire

Le nombre de tirages favorables à ce cas est donné par :

$$\begin{array}{c} \text{5 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 5 bons} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{complémentaire} \\ \text{à choisir 45 mauvais} \end{array} = 1 \times 45 = 45$$

Sa probabilité de réalisation est de $\frac{45}{175711536} = \frac{5}{19523504} \approx \frac{1}{3904701}$.

Presque ! C'est que certaines fractions sont plus commerciales que d'autres...

☛ Quatre numéros principaux et le complémentaire

Le nombre de tirages favorables à ce cas est donné par :

$$\begin{array}{c} \text{4 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 5 bons} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{principal à choisir} \\ \text{parmi les 51 mauvais} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{complémentaire} \\ \text{à choisir 1 bon} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 51 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 51 \times 1 = 255$$

Sa probabilité de réalisation est de $\frac{255}{175711536} = \frac{85}{3819816} \approx \frac{1}{689065}$.

Encore une fois, l'entreprise d'extraction de richesses s'efforce de ne pas démotiver l'éventuel client-joueur avec une précision mathématique inconsidérée...

☛ Quatre numéros principaux sans le complémentaire

Le nombre de tirages favorables à ce cas est donné par :

$$\begin{array}{c} \text{4 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 5 bons} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{principal à choisir} \\ \text{parmi les 51 mauvais} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{complémentaire} \\ \text{à choisir 45 mauvais} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 51 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 45 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \times 51 \times 45 = 11475$$

Sa probabilité de réalisation est de $\frac{11475}{175711536} = \frac{1275}{19523504} \approx \frac{1}{15313}$.

☛ Trois numéros principaux et le complémentaire

Le nombre de tirages favorables à ce cas est donné par :

$$\begin{array}{c} \text{3 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 5 bons} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{2 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 51 mauvais} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{complémentaire} \\ \text{à choisir 1 bon} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 51 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{51 \times 50}{2 \times 1} \times 1 = 12750$$

Sa probabilité de réalisation est de $\frac{12750}{175711536} = \frac{2125}{29285256} \approx \frac{1}{13781}$.

☛ Trois numéros principaux sans le complémentaire

Le nombre de tirages favorables à ce cas est donné par :

$$\begin{array}{c} \text{3 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 5 bons} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{2 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 51 mauvais} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{complémentaire} \\ \text{à choisir 45 mauvais} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 51 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 45 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 \times 1275 \times 45 = 573750$$

Sa probabilité de réalisation est de $\frac{573750}{175711536} = \frac{31875}{9761752} \approx \frac{1}{306}$.

☛ Deux numéros principaux et le complémentaire

Le nombre de tirages favorables à ce cas est donné par :

$$\begin{array}{c} \text{2 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 5 bons} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{3 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 51 mauvais} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{complémentaire} \\ \text{à choisir 1 bon} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 51 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 \times 20825 \times 1 = 208250$$

Sa probabilité de réalisation est de $\frac{208250}{175711536} = \frac{14875}{12550824} \approx \frac{1}{844}$.

☛ Un numéro principal et le complémentaire

Le nombre de tirages favorables à ce cas est donné par :

$$\begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{principal à choisir} \\ \text{parmi les 5 bons} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{4 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 51 mauvais} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{complémentaire} \\ \text{à choisir 1 bon} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 51 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \times 249900 \times 1 = 1249500$$

Sa probabilité de réalisation est de $\frac{1249500}{175711536} = \frac{14875}{2091804} \approx \frac{1}{141}$.

☛ Juste le complémentaire

Le nombre de tirages favorables à ce cas est donné par :

$$\begin{array}{c} \text{5 numéros} \\ \text{principaux à choisir} \\ \text{parmi les 51 mauvais} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{1 numéro} \\ \text{complémentaire} \\ \text{à choisir 1 bon} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 51 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{51 \times 50 \times 49 \times 48 \times 47}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 1 = 2349060$$

Sa probabilité de réalisation est de $\frac{2349060}{175711536} = \frac{27965}{2091804} \approx \frac{1}{75}$.

☛ Et au total...

Il y a 4405086 tirages gagnants et leur probabilité est de $\frac{4405086}{175711536} \approx \frac{1}{40}$.

☞ Toute la question est de savoir si les gains sont inversement proportionnels aux probabilités d'apparition. Ainsi il ne faut pas faire le rapport de ces deux données mais leur produit.

Gain	Probabilité	Produit
12000000	5,69763E-09	0,068
250000	2,56102E-07	0,064
10000	1,45124E-06	0,015
150	6,53040E-05	0,010
150	7,25637E-05	0,011
7	3,26797E-03	0,023
10	1,18483E-03	0,012
3	7,09220E-03	0,021
2	1,33333E-02	0,027

Si les gains étaient inversement proportionnels à la probabilité de gagner, alors cela signifierait que l'entreprise consacre les mêmes sommes à tous les types de tirages gagnants. Ce qui n'est pas le cas car il faut bien faire rêver le client-joueur...

b.1) La variable aléatoire X peut prendre toutes les valeurs des gains (bruts) possibles à savoir :

0 2 3 10 7 150 10000 250000 12000000

b.2) Pour calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X , nous prendrons les «probabilités commerciales» fournies par l'entreprise qui sont très proches de probabilités réelles.

L'espérance de gain brut est donnée est par :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum \text{probabilité} \times \text{valeur prise par } X \\
 &= \frac{39}{40} \times 0 + \frac{1}{75} \times 2 + \frac{1}{141} \times 3 + \frac{1}{844} \times 10 + \frac{1}{306} \times 7 + \frac{1}{13781} \times 150 + \frac{1}{15313} \times 150 \\
 &\quad + \frac{1}{689065} \times 10000 + \frac{1}{3904701} \times 250000 + \frac{1}{175711536} \times 12000000 \\
 &\approx 0,25 \text{ dollar}
 \end{aligned}$$

b.3) Sur chaque ticket, l'entreprise fait $1 - 0,25 = 0,75$ dollars de marge...théorique. Cependant, elle annonce reverser la moitié des sommes collectées sous forme de gains. Est-ce une escroquerie ? Pas nécessairement car les données fournies par l'entreprise sont calculées à partir de son bilan financier dont on peut penser qu'il est rigoureusement contrôlé.

L'espérance mathématique est une sorte de moyenne idéale qui serait calculée sur un nombre infini de billets vendus. Sauf que l'entreprise ne vend qu'un nombre fini de billets même si celui-ci doit se chiffrer en dizaines de millions d'unités et de dollars. De plus, si l'entreprise vend 20 millions de billets (autant de dollars) et que le jackpot est gagné, alors elle reverse plus de 60% des sommes collectées aux joueurs. Si le jackpot n'est pas gagné, alors elle reverse moins de 19%. Comme quoi la réalité économique est souvent bien loin de l'idéal mathématique.

Produit scalaire

Classique scalaire

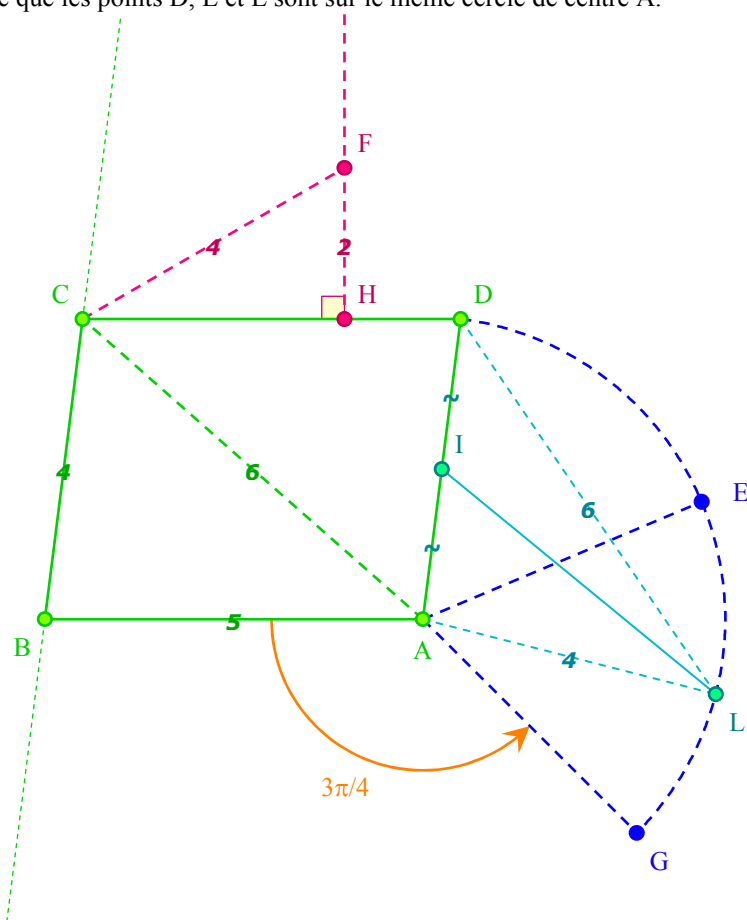
Le contexte

Cet exercice aborde les manipulations de base du produit scalaire.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous réalisée en dimensions réelles, toutes les distances portées sur les segments sont exprimées en centimètres et les angles en radians.

On précise que les points D, E et L sont sur le même cercle de centre A.



a) Sachant que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Calculer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

c) Sachant que le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ vaut 8, déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

d) Sachant que le triangle CFH est rectangle en H :

1. Calculer la longueur CH.
2. En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CD}$.

e) Placer sur la figure ci-contre les points suivants :

1. J est le point de la droite (BC) tel que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BJ} = -12$
2. K est le point de la droite (BC) tel que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{FK} = 0$

f) On appelle I le milieu de [AD].

1. Compléter l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI} = \dots$
2. Etablir l'égalité $(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IL})^2 + (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IL})^2 = 2 \times IL^2 + 8$
3. En déduire la longueur IL

g) Question subsidiaire : dans quelle unité un produit scalaire est-il exprimé ?

Le corrigé

a) Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2} \times \left[\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \times \left[AC^2 - AB^2 - AD^2 \right] = \frac{1}{2} \times \left[6^2 - 5^2 - 4^2 \right] = \frac{1}{2} \times [36 - 25 - 16] = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

N'oublions pas que ABCD est un parallélogramme.

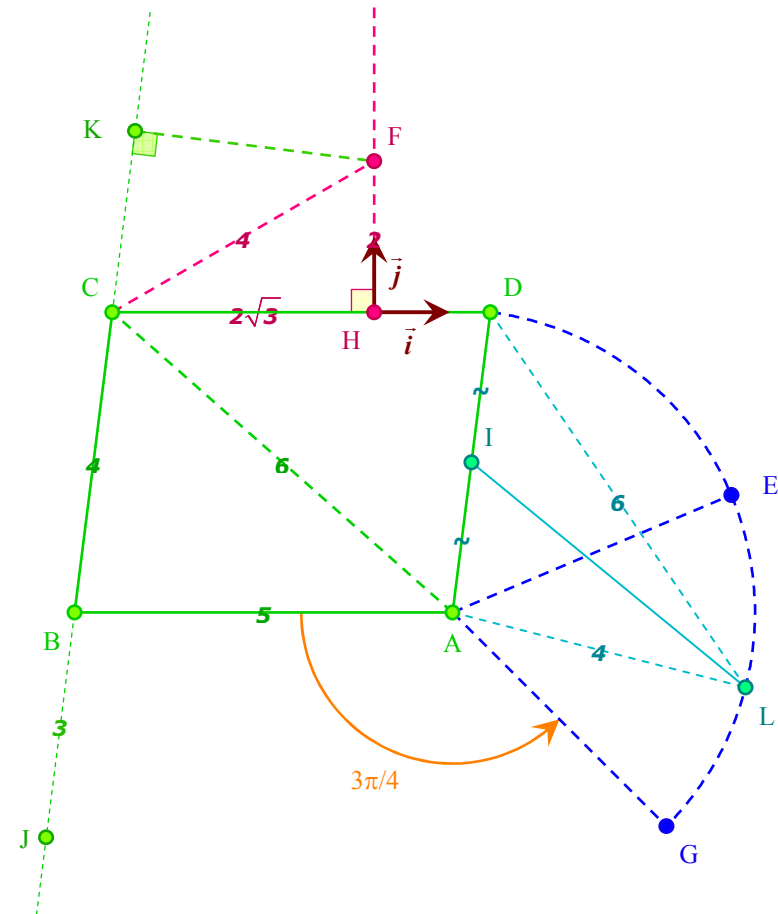
b) Là encore, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = AB \times AG \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 5 \times 4 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 20 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) = \pm \frac{\pi}{3} \text{ à } 2\pi\text{-près}$$
$$\begin{aligned} \text{CF}^2 = \text{CH}^2 + \text{HF}^2 &\Leftrightarrow 4^2 = \text{CH}^2 + 2^2 \Leftrightarrow \text{CH}^2 = 16 - 4 = 12 \\ &\Leftrightarrow \text{CH} = \sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overbrace{(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HF})}^{=\overrightarrow{CF}} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD}}_{\substack{\text{Colinéaires} \\ \text{de même sens}}} + \underbrace{\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{CD}}_{\text{Orthogonaux}} \\ &= CH \times CD + 0 = 2\sqrt{3} \times 5 +\end{aligned}$$

Expression du produit scalaire en repère orthonormé.

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\sqrt{3} \times 5 + (2) \times 0 = 10\sqrt{3} + 0 = \sqrt{300}$$


$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BJ} = -12 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot (\lambda \overrightarrow{BC}) = -12 \Leftrightarrow \lambda \times \overrightarrow{BC}^2 = -12$$

Le carré scalaire est égal à la norme... $\Leftrightarrow \lambda = \frac{-12}{BC^2} = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$

Conclusion : comme $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4} \times \overrightarrow{BC}$, alors le point J est situé à trois centimètres du point B à l'opposé de C.

e.2) Comme leur produit scalaire est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{FK}$ sont orthogonaux.
Conclusion : le point K est le projeté orthogonal du point F sur la droite (BC).

f.1) I étant le milieu du segment [AD], les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont opposés.
 Par conséquent, leur somme $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI}$ est nulle.

f.2) Développons chacun des carrés scalaires constituant le membre de gauche de l'égalité à établir !

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IL})^2 + (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IL})^2 &= \overrightarrow{AI}^2 + 2 \times \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{IL}^2 + \overrightarrow{DI}^2 + 2 \times \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{IL}^2 \\
 &= AI^2 + DI^2 + 2 \times IL^2 + 2 \times \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IL} + 2 \times \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{IL} \\
 &= 2^2 + 2^2 + 2 \times IL^2 + 2 \times \underbrace{(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) \cdot \overrightarrow{IL}}_{=0 \text{ car I milieu de [AD]}} \\
 &= 4 + 4 + 2 \times IL^2 + 2 \times 0 = 2 \times IL^2 + 8
 \end{aligned}$$

Le carré scalaire est égal à la norme...

f.3) Tripatouillons le membre de droite de l'égalité précédente

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IL})^2 + (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IL})^2 &= 2 \times IL^2 + 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{DI}^2 = 2 \times IL^2 + 8 \\
 &\Leftrightarrow AI^2 + DI^2 = 2 \times IL^2 + 8 \\
 &\Leftrightarrow 4^2 + 6^2 = 2 \times IL^2 + 8 \\
 &\Leftrightarrow 16 + 36 = 2 \times IL^2 + 8 \\
 &\Leftrightarrow 2 \times IL^2 = 52 - 8 \Leftrightarrow IL^2 = \frac{44}{2} = 22 \\
 &\Rightarrow IL = \sqrt{22} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Encore une fois, le carré scalaire est égal à la norme...

g) Par définition, le produit scalaire est une différence de carrés de normes. En effet :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times \left[\underbrace{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2}_{\text{cm}^2} - \underbrace{\|\vec{u}\|^2}_{\text{cm}^2} - \underbrace{\|\vec{v}\|^2}_{\text{cm}^2} \right] = \underbrace{\|\vec{u}\|}_{\text{cm}} \times \underbrace{\|\vec{v}\|}_{\text{cm}} \times \underbrace{\cos(\vec{u}, \vec{v})}_{\text{Rapport}}$$

Par conséquent, le produit scalaire de deux vecteurs dont la norme est exprimée en centimètres est lui-même exprimé en centimètres carrés.

Panneaux pour énergie scalaire

Le contexte

Cet exercice assez costaud sur le produit scalaire recourt à la formule des sinus, au théorème d'Al-Kashi et de la médiane et, se conclut avec des ensembles de points.

L'énoncé

Sur la figure ci-après, ABC et ABD sont deux triangles tels que :

$$AB = 7 \text{ cm}$$

$$BD = 5 \text{ cm}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$$

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{3}$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$$

On appelle I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AD].

a) Calculer la valeur exacte de la longueur BC et démontrer que $AD = \sqrt{39} \text{ cm}$.

On pourra vérifier les résultats trouvés en comparant leurs valeurs approchées aux longueurs mesurées sur la figure ci-après.

b) On appelle E le point de la droite (BD) vérifiant l'égalité :

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BE} = 20$$

- Placer le point E sur la figure ci-après. On justifiera sa construction
- On appelle F le point de la droite (BC) tel que $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} = 20$.
Placer le point F sur la figure ci-après. On expliquera sa construction.

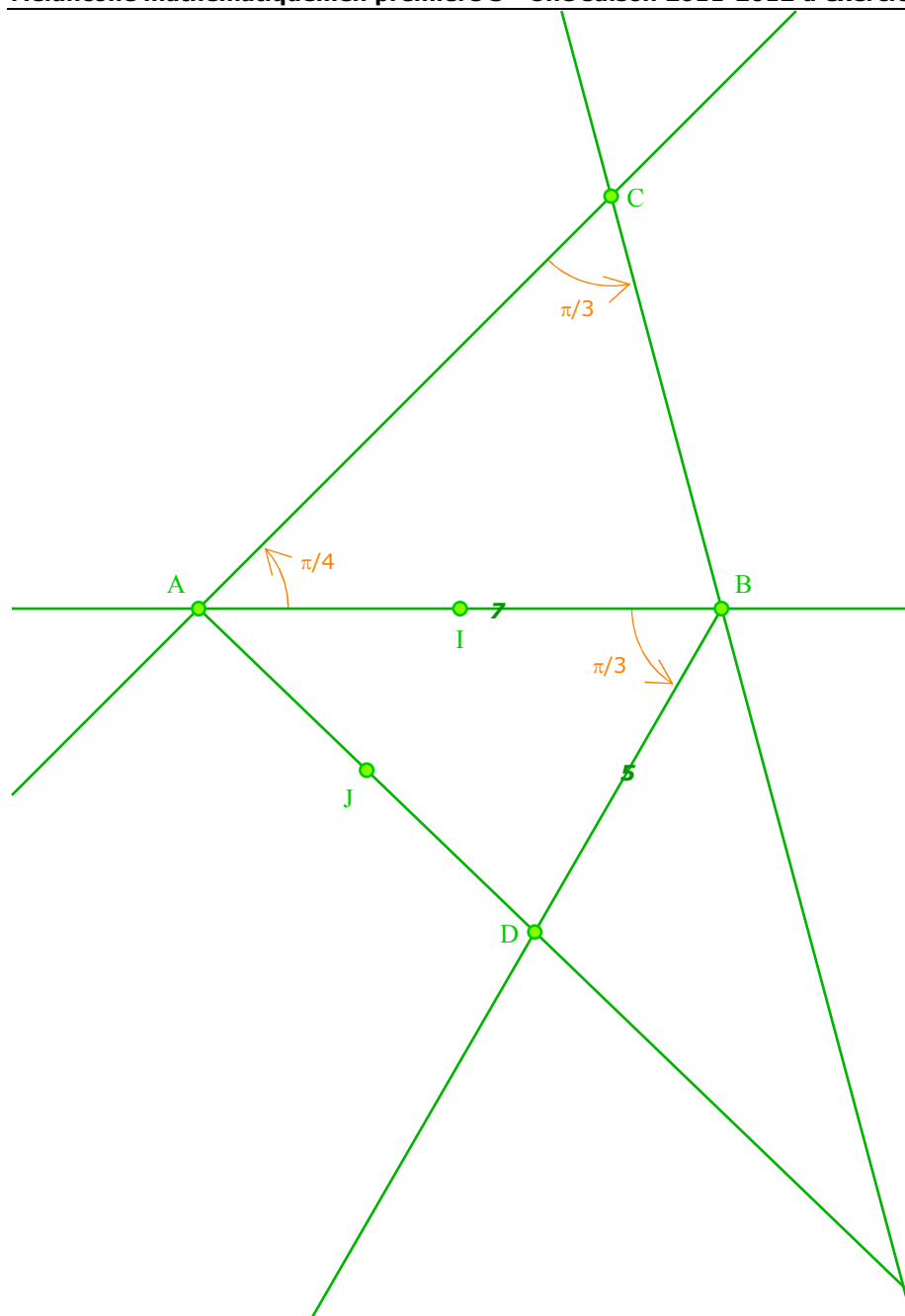
c) On appelle G le point défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7} \times \overrightarrow{AB}$$

- Placer le point G sur la figure.
- Démontrer l'égalité vectorielle $2 \times \overrightarrow{GA} + 5 \times \overrightarrow{GB} = \vec{0}$
- En utilisant le point B, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GE}$.
Que peut-on en conclure quand au triangle BGE ?

d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des ensembles de points du plan suivants :

- L'ensemble Δ des points M du plan vérifiant l'égalité $MA^2 + MD^2 = 32$
Indication : on pourra recourir au point J et à un résultat de la question a.
Le point I appartient-il à l'ensemble Δ ? On justifiera sa réponse.
- L'ensemble Σ des points M du plan vérifiant l'égalité $2 \times MA^2 + 5 \times MB^2 = 63$
Indication : on pourra recourir au point G et au résultat de la question c.2.

**Le corrigé**

a) D'abord, calculons la longueur BC.

La formule des sinus appliquée au triangle ABC nous permet d'écrire :

$$\frac{\sin(\hat{A})}{BC} = \frac{\sin(\hat{B})}{AC} = \frac{\sin(\hat{C})}{AB} \Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{BC} = \frac{\sin(\hat{B})}{AC} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{7}$$

$$\Leftrightarrow BC = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \times 7 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times 7 = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \times 7 = \frac{7}{3} \sqrt{6} \text{ cm}$$

➤ Pour calculer la longueur AD, nous allons appliquer le théorème d'Al-Kashi (ou de «Pythagore généralisé») dans le triangle ABD.

$$AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2 \times BA \times BD \times \cos(\widehat{ABD})$$

$$= 7^2 + 5^2 - 2 \times 7 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 49 + 25 - 70 \times \frac{1}{2} = 39$$

Nous en déduisons que la longueur AD est égale à $\sqrt{39}$ centimètres.

b.1) Comme le point E appartient à la droite (BD), alors les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.

De plus, le produit scalaire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BE}$ étant positif, les vecteurs colinéaires $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ ont même sens.

Tout cela étant dit, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BE} = 20 \Leftrightarrow BD \times BE = 20 \Leftrightarrow BE = \frac{20}{BD} = \frac{20}{5} = 4 \text{ cm}$$

Conclusion : le point E est situé aux quatre cinquièmes du segment [BD] à partir de B.

b.2) Nous savons déjà que le point F appartient à la droite (BC). Mais elle est longue ! Modifions l'égalité définissant le point F en introduisant le point E.

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} = 20 \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF}) = 20$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{EF} = 20 \Leftrightarrow 20 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{EF} = 20$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{EF}$$

Conclusion : F est le point d'intersection de la droite (BC) et de la perpendiculaire à la droite (BD) passant par E.

Une autre méthode : on peut tourner le problème en calculant la distance BF

F appartenant à la droite (BC), l'angle géométrique $\widehat{DBF}$ mesure :

☛ soit $\frac{3\pi}{4}$ si F est sur la demi-droite [BC).

☛ soit $\frac{\pi}{4}$ si F est sur l'autre demi-droite.

Ensuite, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BF}$ étant positif, le cosinus de leur angle géométrique est nécessairement positif. Seul le cosinus de $\frac{\pi}{4}$ est dans ce cas. Il vient :

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} = 20 \Leftrightarrow BD \times BF \times \cos(\widehat{DBF}) = 20 \Leftrightarrow 5 \times BF \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \Leftrightarrow BF = 4\sqrt{2}$$

c.1) D'après la relation vectorielle le définissant, le point G se trouve aux cinq septièmes du segment [AB], c'est-à-dire à 5 centimètres, à partir de A.

c.2) Comme le point G est situé aux cinq septièmes du segment [AB] à partir de A, alors il l'est aux deux septièmes à partir de B.

Partant du membre de gauche de la relation vectorielle à établir, nous pouvons écrire :

$$2 \times \overrightarrow{GA} + 5 \times \overrightarrow{GB} = 2 \times \left(-\frac{5}{7} \times \overrightarrow{AB} \right) + 5 \times \left(\frac{2}{7} \times \overrightarrow{AB} \right) = -\frac{10}{7} \times \overrightarrow{AB} + \frac{10}{7} \times \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

Une autre voie en travaillant sur la droite (AB)

On peut aussi poser un repère centimétrique $(A, \vec{i})$ sur la droite (AB) où les points A, B et G ont pour abscisses respectives 0; 7 et 5. Il vient alors :

$$2 \times \overrightarrow{GA} + 5 \times \overrightarrow{GB} = \overbrace{2 \times (5-0)\vec{i} + 5 \times (5-7)\vec{i}}^{\text{«Arrivée-départ» sur une droite}} = 10\vec{i} - 10\vec{i} = \vec{0}$$

c.3) Décomposons le vecteur $\overrightarrow{GE}$ en passant par le point B !

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GB} &= (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE}) \cdot \overrightarrow{GB} \\ &= \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GB}^2 - \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BG} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{GB}^2}_{\text{Carré scalaire}} - \underbrace{BE \times BG \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{On connaît leur angle}} = 2^2 - 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Comme leur produit scalaire est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont orthogonaux. Donc le triangle BGE est rectangle en G.

Une autre voie en contournant le problème

On calcule la distance EG avec le théorème d'Al-Kashi appliqué dans le triangle BEG.

$$EG^2 = BE^2 + BG^2 - 2 \times BE \times BG \times \cos(\widehat{EBG}) = 4^2 + 2^2 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 16 + 4 - 8 = 12$$

Puis, avec le théorème de Pythagore, on établit que le triangle est rectangle en G.

$$BE^2 = 4^2 = 16 \quad \text{et} \quad GE^2 + GB^2 = 12 + 2^2 = 16$$

Le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
Donc le triangle BEG est rectangle en G.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont orthogonaux et leur produit scalaire est nul...

d.1) En application de la première égalité du théorème de la médiane et en s'appuyant sur le milieu J du segment [AD], nous pouvons écrire :

$$MA^2 + MD^2 = 2 \times MJ^2 + \frac{AD^2}{2} = 2 \times MJ^2 + \frac{(\sqrt{39})^2}{2} = 2 \times MJ^2 + 19,5$$

L'égalité définissant l'ensemble Δ devient alors :

$$M \in \Delta \Leftrightarrow MA^2 + MD^2 = 32 \Leftrightarrow 2 \times MJ^2 + 19,5 = 32$$

$$\Leftrightarrow 2 \times MJ^2 = 12,5 \Leftrightarrow MJ^2 = 6,25 \Leftrightarrow MJ = \sqrt{6,25} = 2,5$$

Conclusion : l'ensemble Δ est le cercle de centre J et de rayon 2,5 centimètres.

☛ Comme les points I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AD], alors en application du théorème des milieux appliqué dans le triangle ABD, nous pouvons écrire :

$$JI = \frac{1}{2} \times DB = \frac{1}{2} \times 5 = 2,5 \text{ cm}$$

Donc I appartient bien au cercle de centre J et de rayon 2,5 centimètres, c'est-à-dire à Δ .

d.2) Avant tout développement, simplifions la somme...

$$\begin{aligned} 2 \times MA^2 + 5 \times MB^2 &= 2 \times \overrightarrow{MA}^2 + 5 \times \overrightarrow{MB}^2 = 2 \times (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 5 \times (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= 2 \times \overrightarrow{MG}^2 + \underbrace{(2 \overrightarrow{MG}) \cdot (2 \overrightarrow{GA})}_{\text{}} + 2 \times \overrightarrow{GA}^2 \\ &\quad + 5 \times \overrightarrow{MG}^2 + \underbrace{(2 \overrightarrow{MG}) \cdot (5 \overrightarrow{GB})}_{\text{}} + 5 \times \overrightarrow{GB}^2 \\ &= 7 \times \overrightarrow{MG}^2 + 2 \times \overrightarrow{GA}^2 + 5 \times \overrightarrow{GB}^2 + \underbrace{(2 \overrightarrow{MG}) \cdot (2 \overrightarrow{GA} + 5 \overrightarrow{GB})}_{\substack{= \vec{0} \\ \text{d'après la question c.2}}} \\ &= 7 \times \overrightarrow{MG}^2 + 50 + 20 + (2 \overrightarrow{MG}) \cdot \vec{0} = 7 \times \overrightarrow{MG}^2 + 70 + 0 = 7 \times \overrightarrow{MG}^2 + 70 \end{aligned}$$

La relation définissant l'ensemble Σ devient alors :

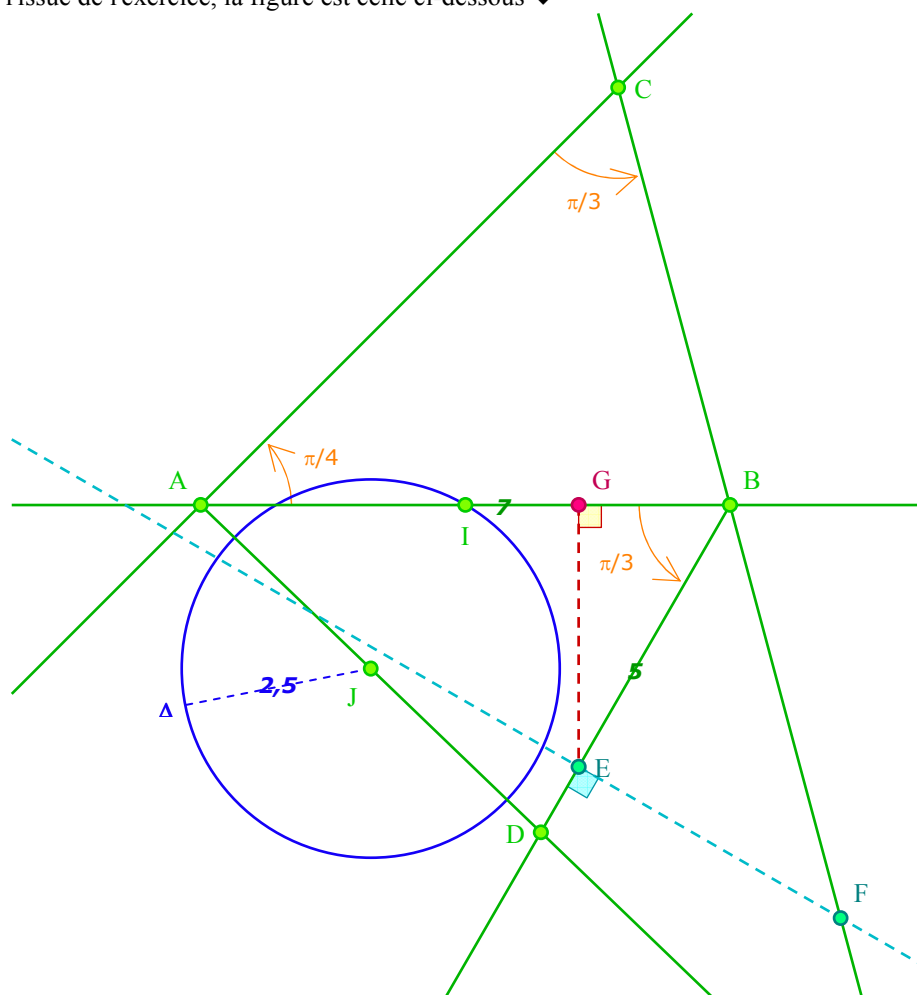
$$M \in \Sigma \Leftrightarrow 2 \times MA^2 + 5 \times MB^2 = 63 \Leftrightarrow 7 \times MG^2 + 70 = 63$$

$$\Leftrightarrow 7 \times MG^2 = -7 \Leftrightarrow MG^2 = -1$$

Un carré n'est jamais négatif !

Conclusion : Σ est l'ensemble vide.

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-dessous ↓



Les équations scalaires

Le contexte

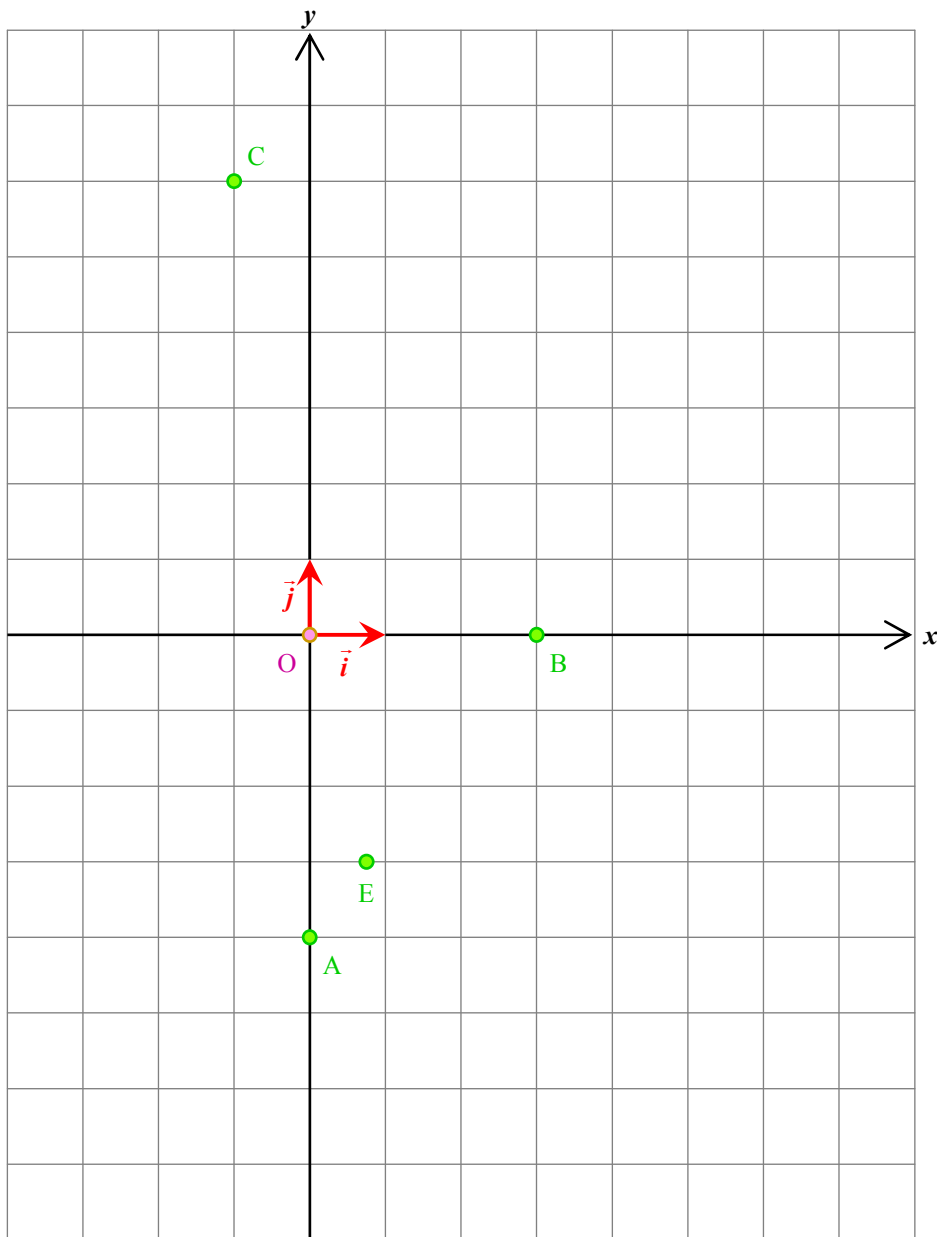
Cet exercice assez costaud aborde le produit scalaire sous le prisme analytique. Il traite des ensembles de points, des équations de droites et de cercles.

L'énoncé

Sur la figure ci-après, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on a positionné les points suivants :

$$A(0; -4) \quad B(3; 0) \quad C(-1; 6) \quad E\left(\frac{3}{4}; -3\right)$$

- Déterminer une équation (cartésienne) de la droite (AB).
Le point E appartient-il à la droite (AB) ? On justifiera sa réponse.
- On appelle Δ la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C. Ces deux droites sont sécantes en un point noté H.
 - Déterminer une équation (cartésienne) de la droite Δ .
 - En déduire les coordonnées du point H.
 - On appelle δ la distance existant entre le point C et la droite (AB).
Par définition, la distance entre un point et une droite est la plus petite des distances existant entre ce point et chaque point de la droite.
Calculer cette distance δ .
- On appelle Σ l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité $\overline{MB} \cdot \overline{MC} = -14$
 - Calculer les coordonnées du milieu J du segment [BC].
 - En appelant $(x; y)$ les coordonnées du point M, déterminer une équation (cartésienne) de l'ensemble Σ .
 - En déduire que Σ est l'ensemble vide.
- On appelle Γ l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité $3 \times AM^2 + BM^2 = 57$
 - En appelant $(x; y)$ les coordonnées du point M, déterminer une équation (cartésienne) de l'ensemble Γ .
 - Vérifier que l'origine O appartient à l'ensemble Γ .
 - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ , puis le représenter sur la figure ci-après.

**Le corrigé**

a) La droite (AB) est définie par son point $B(3;0)$ et son vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ y & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \times 4 - y \times 3 = 0 \Leftrightarrow \underline{4x - 3y - 12 = 0}$$

Conclusion : une équation de la droite (AB) est $4x - 3y = 12$

➡ Regardons si les coordonnées du point E vérifient l'équation de la droite (AB).

$$4x_E - 3y_E - 12 = 4 \times 0 - 3 \times (-3) - 12 = 3 + 9 - 12 = \underline{0}$$

Conclusion : ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point E appartient à la droite (AB).

b.1) La perpendiculaire Δ passe par le point $C(-1;6)$ et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+1) \times 3 + (y-6) \times 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3 + 4y - 24 = 0 \Leftrightarrow \underline{3x + 4y - 21 = 0}$$

Conclusion : une équation de la droite Δ est $3x + 4y = 21$.

b.2) Le point H appartenant aux deux droites (AB) et Δ , ses coordonnées en vérifient les deux équations et sont, par conséquent, la solution du système linéaire :

$$\begin{cases} 4x - 3y = 12 & (1) \leftarrow \text{Appartenance à (AB)} \\ 3x + 4y = 21 & (2) \leftarrow \text{Appartenance à } \Delta \end{cases}$$

Résolvons ce système par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour trouver x , on multiplie l'équation (1) par 4 et la (2) par 3 afin d'éliminer y .

$$\begin{array}{rcl} (1) & \xrightarrow{\times 4} & 16x - 12y = 48 \\ (2) & \xrightarrow{\times 3} & 9x + 12y = 63 \\ \hline & & 25x = 111 \\ & & x = \underline{4,44} \end{array} \oplus$$

Pour obtenir y , on multiplie l'équation (1) par 3 et la (2) par 4 de façon à éliminer x .

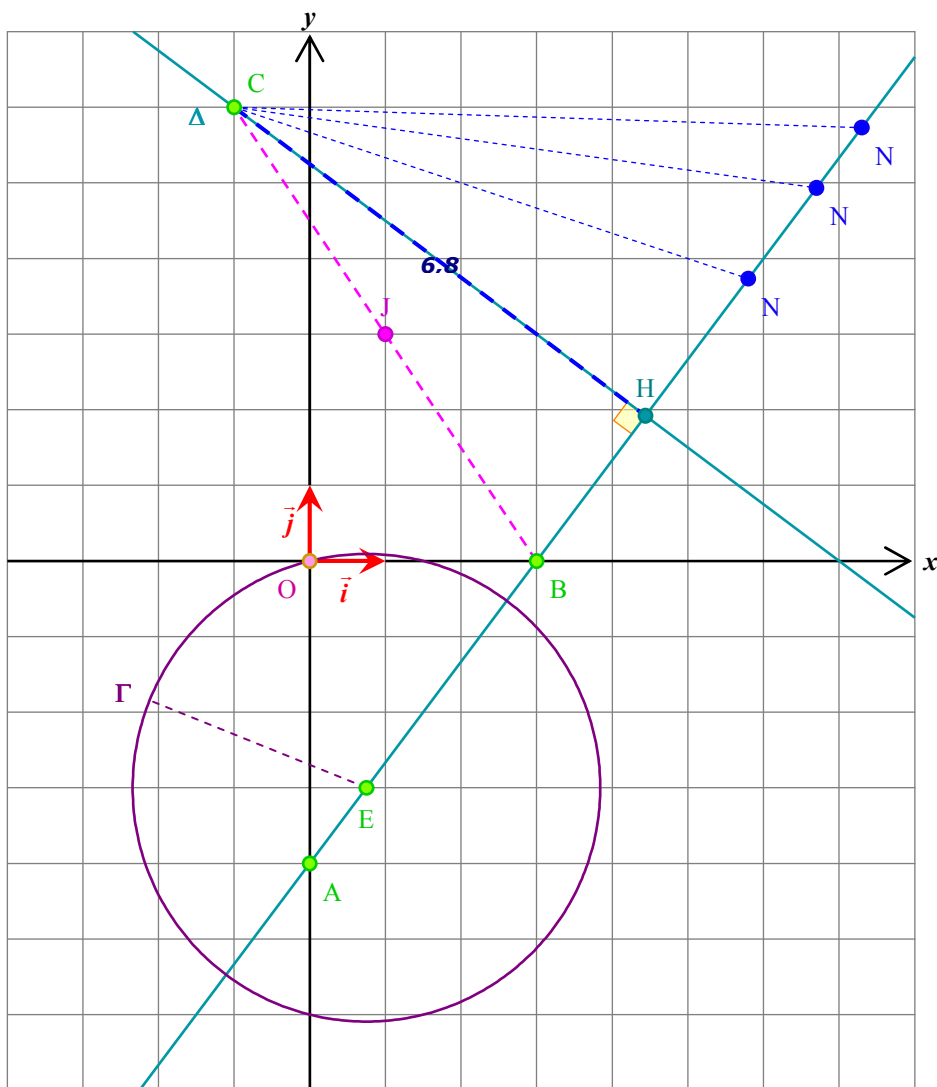
$$\begin{array}{rcl} (1) & \xrightarrow{\times 3} & 12x - 9y = 36 \\ (2) & \xrightarrow{\times 4} & 12x + 16y = 84 \\ \hline & & -25y = -48 \\ & & y = \underline{1,92} \end{array} \ominus$$

Conclusion : les coordonnées du point H sont $(4,44; 1,92)$.

En effet, le triangle CNH étant rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

Nous pouvons donc écrire :

$$\delta = CH = \sqrt{(4,44 - (-1))^2 + (1,92 - 6)^2} = \sqrt{(5,44)^2 + (-4,08)^2} = \sqrt{46,24} = \underline{6,8 \text{ cm}}$$


$$x_J = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{(-1) + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad y_J = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 + 6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

c.2) Si on note (x, y) les coordonnées du point M, alors $\overline{\text{MB}} \begin{pmatrix} 3-x \\ -y \end{pmatrix}$ et $\overline{\text{MC}} \begin{pmatrix} -1-x \\ 6-y \end{pmatrix}$.

$$M(x; y) \in \Sigma \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = -14$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-x \\ -y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1-x \\ 6-y \end{pmatrix} = -14 \\ &\Leftrightarrow (3-x) \times (-1-x) + (-y) \times (6-y) = -14 \\ &\Leftrightarrow -3 - 3x + x + x^2 - 6y + y^2 + 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 11 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(x; y) \in \Sigma &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 6y + 11 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2 \times x \times 1}_{\text{Début...}} + \underbrace{y^2 - 2 \times y \times 3 + 11}_{\text{Début...}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 - 1^2}_{\text{...d'identité.}} + \underbrace{(y-3)^2 - 3^3}_{\text{...d'identité.}} + 11 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 - 10 + 11 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-x_J)^2 + (y-y_J)^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \text{IM}
 \end{aligned}$$

Oops !
Un carré négatif !

Conclusion : un carré ne pouvant être négatif, il n'existe pas de point M du plan qui appartienne à l'ensemble Σ . Par conséquent, ce dernier est vide.

d.1) Si $(x; y)$ désignent les coordonnées du point M, alors $\overline{AM}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y+4 \end{smallmatrix}\right)$ et $\overline{BM}\left(\begin{smallmatrix} x-3 \\ y \end{smallmatrix}\right)$.

La relation définissant l'ensemble Γ devient alors :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \Gamma &\Leftrightarrow 3 \times AM^2 + BM^2 = 57 \\ &\Leftrightarrow 3 \times \left(\sqrt{x^2 + (y+4)^2} \right)^2 + \left(\sqrt{(x-3)^2 + y^2} \right)^2 = 57 \\ &\Leftrightarrow 3 \times (x^2 + y^2 + 8y + 16) + (x^2 - 6x + 9 + y^2) - 57 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 24y + 48 + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 57 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 6x + 24y = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{x^2 + y^2 - 1,5x + 6y = 0} \end{aligned}$$

d.2) Regardons si les coordonnées de l'origine O vérifient l'équation de Γ :

$$x_O^2 + y_O^2 - 1,5x_O + 6y_O = 0^2 + 0^2 - 1,5 \times 0 + 6 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Conclusion : ses coordonnées en vérifiant l'équation, l'origine O appartient à l'ensemble Γ .

d.3) Reprenons l'équation de Γ .

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \Gamma &\Leftrightarrow x^2 - 1,5x + y^2 + 6y = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2 \times x \times 0,75}_{\text{Début...}} + \underbrace{y^2 + 2 \times y \times 3}_{\text{Début...}} = 57 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(x - 0,75)^2 - 0,75^2}_{\text{...d'identité.}} + \underbrace{(y + 3)^2 - 3^2}_{\text{...d'identité.}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 0,75)^2 + (y + 3)^2 - \frac{9}{16} - \frac{144}{16} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 0,75)^2 + (y - (-3))^2 - \frac{153}{16} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 = \frac{153}{16} \\ &\Leftrightarrow EM^2 = \frac{153}{16} \Leftrightarrow EM = \underline{\frac{\sqrt{153}}{4}} \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble Γ est le cercle de centre E et de rayon $\frac{\sqrt{153}}{4}$...ou plus simplement passant par l'origine O.

Suites

Aux sources du profit

Le contexte

Ce grand classique du genre est une application à une situation donnée des suites arithmétiques et géométriques.

L'énoncé

Le Père Dechochète dirige la compagnie des *Eaux Saintes Blancoises* qui commercialise de l'eau minérale bénite. Il a notamment sous sa responsabilité deux sources qui lui posent bien des soucis : une *source A* et une *source B*.

Tout commença le premier décembre. Ce jour là, alors que les deux sources produisaient chacune 510 litres d'eau minérale bénite, le sourcier annonça à son patron que les écluses célestes ne s'étant pas suffisamment ouvertes au cours des mois précédents, les *sources A* et *B* allaient progressivement se tarir. Selon le soucieux sourcier qui n'était pas sorcier :

- ☞ La production journalière de la *source A* devait baisser chaque jour de 13 litres par rapport à ce qu'elle était le jour précédent.
- ☞ La production journalière de la *source B* devait baisser chaque jour de 4% par rapport à ce qu'elle était le jour précédent.

On appelle a_n et b_n les productions journalières respectives exprimées en litres des *sources A* et *B* le jour n .

Le premier décembre correspond au jour $n = 1$. Ce jour là, nous avons donc :

$$a_1 = 510 \quad \text{et} \quad b_1 = 510$$

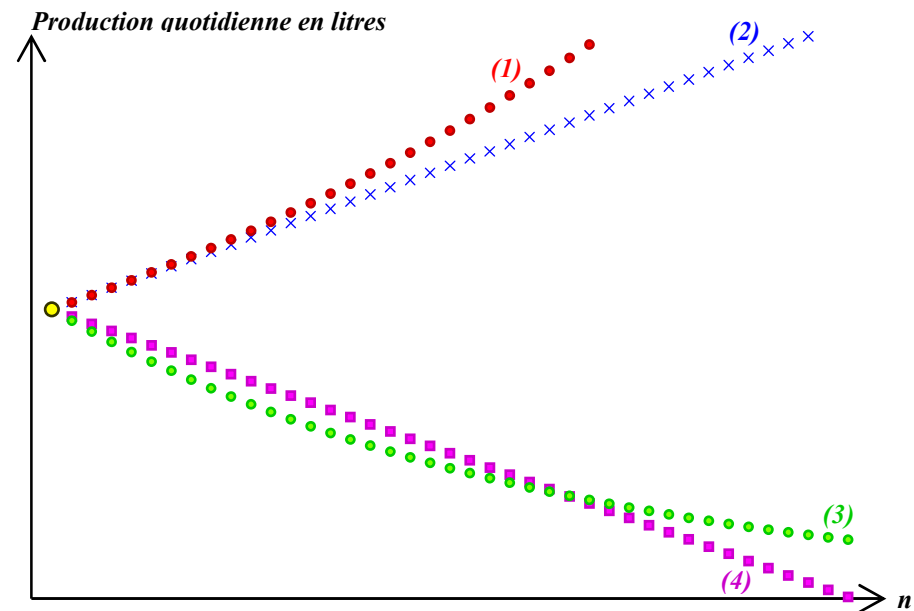
a) On s'intéresse à la production de la *source A*.

1. Calculer a_2 qui est le volume d'eau bénite exprimé en litres produite par la *source A* le second jour.
2. Etablir la nature de la suite (a_n) . On prendra grand soin à préciser ses attributs.
3. Exprimer le terme a_n en fonction de n .
4. Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est le volume d'eau bénite produite par la *source A* le quatorzième jour ? On entourera la bonne réponse.
289 litres 341 litres 380 litres 419 litres

b) On s'intéresse à la production de la *source B*.

1. Calculer b_2 qui est le volume d'eau bénite exprimé en litres produite par la *source B* le second jour.
2. Etablir la nature de la suite (b_n) . On prendra grand soin à préciser ses attributs.
3. Exprimer le terme b_n en fonction de n .
4. Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est le volume d'eau bénite produite par la *source B* le quatorzième jour ? On entourera la bonne réponse.
300 litres 325,5 litres 399,2 litres 415,8 litres

c) Sur le graphique ci-dessous où le repère est orthogonal mais non orthonormé, on a représenté les quarante premiers termes de quatre suites numérotées (1), (2), (3) et (4). Deux d'entre elles sont les suites (a_n) et (b_n) mais lesquelles ? Aucune justification n'est demandée.



d) Sur les quarante jours débutant le premier décembre, laquelle des deux *sources A* ou *B* produit le plus au total ? On justifiera sa réponse.

e) Que se passe-t-il à partir du quarante-et-unième jour ?

Le corrigé

a) Chaque jour, le volume d'eau bénite produite par la *source A* diminue de 13 litres par rapport au jour précédent. Par conséquent :

Les premiers termes :

$$\begin{aligned} a_2 &= \text{Volume produit le second jour} \\ &= \text{Volume de la veille} - 13 \\ &= a_1 - 13 = 510 - 13 = \underline{497 \text{ litres}} \end{aligned}$$

Le cas général :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \text{Volume produit le } (n+1)\text{-ième jour} \\ &= \text{Volume de la veille} - 13 \\ &= a_n - 13 \end{aligned}$$

Comme pour passer d'un terme a_n au suivant a_{n+1} , on retranche toujours la même quantité 13, alors la suite (a_n) est arithmétique de raison $r = -13$

de premier terme $a_1 = 510$

Nous en déduisons que pour tout entier naturel n :

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r = 510 + (n-1) \times (-13) = 510 - 13n + 13 = \underline{523 - 13n}$$

Le quatorzième jour, la *source A* produit :

$$a_{14} = 523 - 13 \times 14 = 523 - 182 = \underline{341 \text{ litres}}$$

b) Chaque jour, le volume d'eau bénite produite par la *source B* diminue de 4% par rapport à la veille. En conséquence :

Les premiers termes :

$$\begin{aligned} b_2 &= \text{Volume produit le second jour} \\ &= \text{Veille} - 4\% \text{ de la veille} \\ &= b_1 - 4\% \text{ de } b_1 = b_1 - 0,04 \times b_1 \\ &= (1 - 0,04) \times b_1 = 0,96 \times b_1 = \underline{489,6 \text{ litres}} \end{aligned}$$

Le cas général :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \text{Volume produit le jour } n+1 \\ &= \text{Veille} - 4\% \text{ de la veille} \\ &= b_n - 4\% \text{ de } b_n = b_n - 0,04 \times b_n \\ &= (1 - 0,04) \times b_n = \underline{0,96 \times b_n} \end{aligned}$$

Comme, pour passer d'un terme b_n au suivant b_{n+1} , on multiplie toujours par le même facteur 0,96, alors la suite (b_n) est géométrique de raison $q = 0,96$ de premier terme $b_1 = 510$.

Il vient alors que pour tout entier naturel n , nous avons :

$$b_n = b_1 \times q^{n-1} = \underline{510 \times 0,96^{n-1}} = 510 \times \frac{0,96^n}{0,96} = \frac{510}{0,96} \times 0,96^n = 531,25 \times 0,96^n$$

Le quatorzième jour, la *source B* produit :

$$b_{14} = 510 \times 0,96^{13} = \underline{299,98 \text{ litres}}$$

c) Les productions quotidiennes des deux sources diminuant, les suites (a_n) et (b_n) sont toutes deux décroissantes. Sur le graphique, deux suites sont décroissantes : (3) et (4). L'expression de la suite arithmétique $a_n = -13n + 523$ étant affine, les points représentant la suite (a_n) se trouvent sur une même droite.

Par conséquent, la suite (a_n) est représentée par la suite de points (3) et (b_n) par la (4).

d) Calculons les volumes totaux produits par les deux sources sur les quarante jours.

♥ Sur les 40 jours, la *source A* produit un total de :

$$\text{Total} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{40}}_{\text{Somme de 40 termes consécutifs de la suite arithmétique } (a_n)} = 40 \times \frac{a_1 + a_{40}}{2} = 40 \times \frac{510 + 3}{2} = \underline{10260 \text{ litres}}$$

♥ Sur les 40 jours, la *source B* produit un total de :

$$\text{Total} = \underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{40}}_{\text{Somme de 40 termes consécutifs de la suite géométrique } (b_n) \text{ de raison } 0,96} = b_1 \times \frac{1 - 0,96^{40}}{1 - 0,96} \approx \underline{10259,1 \text{ litres}}$$

Conclusion : sur les quarante jours, c'est la *source A* qui produit le plus.

e) A partir du quarante-et-unième jour, la production journalière de la *source A* devient négative car $a_{41} = -10$. Autrement dit et suivant le modèle adopté, elle est tarie.

A contrario et toujours suivant le modèle, cela n'arrivera jamais à la *source B* car il coulera toujours 96% de ce qu'il coulait la veille.

C'est ce que laissaient entrevoir leurs représentations graphiques (3) et (4).

Arithmétique sans raison

Le contexte

Dans ce petit exercice, il s'agit de déterminer la raison d'une suite arithmétique.

L'énoncé

La suite (u_n) est arithmétique. Quatre de ses termes vérifient les égalités :

$$u_7 = 100 \quad \text{et} \quad u_0 + u_5 + u_{10} = 222$$

Déterminer la valeur du terme u_{100} .

Le corrigé

La clé de la suite arithmétique (u_n) est sa raison r en ce sens qu'elle permet de passer d'un terme quelconque à n'importe quel autre. Choissant u_7 pour référence, nous avons :

$$\begin{aligned} u_0 &= u_7 + (0-7) \times r = 100 - 7r \\ u_5 &= u_7 + (5-7) \times r = 100 - 2r \\ u_{10} &= u_7 + (10-7) \times r = 100 + 3r \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} u_0 + u_5 + u_{10} &= 222 \Leftrightarrow (100 - 7r) + (100 - 2r) + (100 + 3r) = 222 \\ &\Leftrightarrow 300 - 6r = 222 \Leftrightarrow -6r = -78 \Leftrightarrow r = \frac{-78}{-6} = 13 \end{aligned}$$

La raison connue, il ne nous reste plus alors qu'à calculer le terme recherché :

$$u_{100} = u_7 + (100-7) \times r = 100 + 93 \times 13 = 100 + 1209 = 1309$$

Aux limites de la fin

Le contexte

Dans cet exercice, il s'agit de déterminer les limites à l'infini de quatre suites.

L'énoncé

Déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

$$u_n = n^2 - \frac{1}{n} + 0, 2^n \quad v_n = 7^n - 10^n \quad w_n = \frac{2n^2 + n}{5n^2 + 1} \quad t_n = (-1)^n \times \left(2 - \frac{1}{n^2 + 1} \right)$$

Le corrigé

a) Déterminons la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - \frac{1}{n} + 0, 2^n = (+\infty) - 0^+ + 0^+ = +\infty$$

b) Concernant la limite de la suite (v_n) , nous avons de prime abord :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n - 10^n = (+\infty) - (+\infty) = \text{Forme indéterminée}$$

Nous allons éliminer l'indétermination en factorisant la différence par son terme qui nous semble le plus fort : 10^n .

$$v_n = 7^n - 10^n = 10^n \times \left[\frac{7^n}{10^n} - 1 \right] = 10^n \times \left[\left(\frac{7}{10} \right)^n - 1 \right] = 10^n \times [0, 7^n - 1]$$

Voyons si l'indétermination a été levée par notre action.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 10^n \times [0, 7^n - 1] = (+\infty) \times [0^+ - 1] = (+\infty) \times (-1) = -\infty$$

c) A propos de la suite (w_n) , nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n}{5n^2 + 1} = \frac{(+\infty) + (+\infty)}{(+\infty) + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Forme indéterminée}$$

Là encore, nous allons lever l'indétermination en factorisant les numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts. Ensuite, ils s'expliqueront !

Pour tout entier naturel n , nous pouvons écrire :

$$w_n = \frac{2n^2 + n}{5n^2 + 1} = \frac{n^2 \times \left(2 + \frac{n}{n^2}\right)}{n^2 \times \left(5 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\cancel{n^2} \times \frac{2 + \frac{n}{n^2}}{\cancel{n^2}}}{5 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{5 + \frac{1}{n^2}}$$

Utilisant cette dernière écriture de la suite (w_n) , nous en déduisons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{5 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 + 0^+}{5 + 0^+} = \frac{2}{5} = 0,4$$

d) La suite (t_n) est formée de deux facteurs.

☛ Le facteur $(-1)^n$ qui est alternativement égal à 1 ou -1 .

Si n est pair alors $(-1)^n = \underbrace{(-1) \times (-1) \times \dots \times (-1) \times (-1)}_{\text{Nombre pair de facteurs}} = 1$

Si n est impair alors $(-1)^n = \underbrace{(-1) \times (-1) \times \dots \times (-1) \times (-1)}_{\text{Nombre impair de facteurs}} \times (-1) = -1$

☛ Le facteur $2 - \frac{1}{n^2 + 1}$ dont la limite en $+\infty$ se détermine sans anicroches.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n^2 + 1} = 2 - \frac{1}{(+\infty) + 1} = 2 - \frac{1}{+\infty} = 2 - 0^+ = 2$$

Conclusion : la suite (t_n) est formée de deux sous-suites :

Celle des termes de rang pair : $u_n = 1 \times \left(2 - \frac{1}{n^2 + 1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times 2 = 2$

Celle des termes de rang impair : $u_n = -1 \times \left(2 - \frac{1}{n^2 + 1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1 \times 2 = -2$

Ces deux sous-limites étant différentes, la (t_n) ne peut avoir de limite.

Suite pas fine

Le contexte

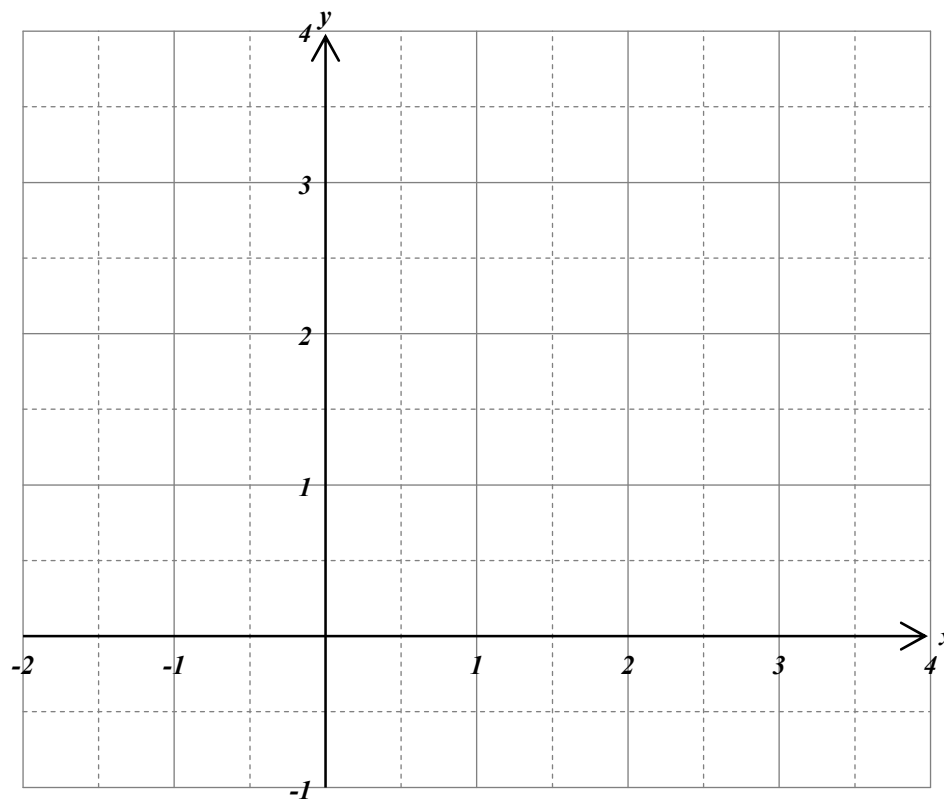
Cet exercice classique mais assez technique consiste en l'étude d'une suite définie par récurrence au moyen d'une fonction affine. On utilise pour ce faire une suite annexe géométrique.

Le corrigé

La suite (u_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{7} \times u_n + 2 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

a) Sur le graphique ci-dessous, construire à la règle (et éventuellement à l'équerre) et sur l'axe des abscisses (Ox) les quatre premiers termes u_0 u_1 u_2 u_3 de la suite (u_n) .



b) La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - \frac{7}{2}$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{7}$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{7}{2} - \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{7}\right)^n$
3. Etablir que pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{18}{7} \times \left(\frac{3}{7}\right)^n$
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
6. Les résultats trouvés sont-ils corroborés par le graphique de la question a.

Le corrigé

a) On passe du terme u_n au terme suivant u_{n+1} en appliquant toujours la fonction

$$f(x) = \frac{3}{7} \times x + 2$$

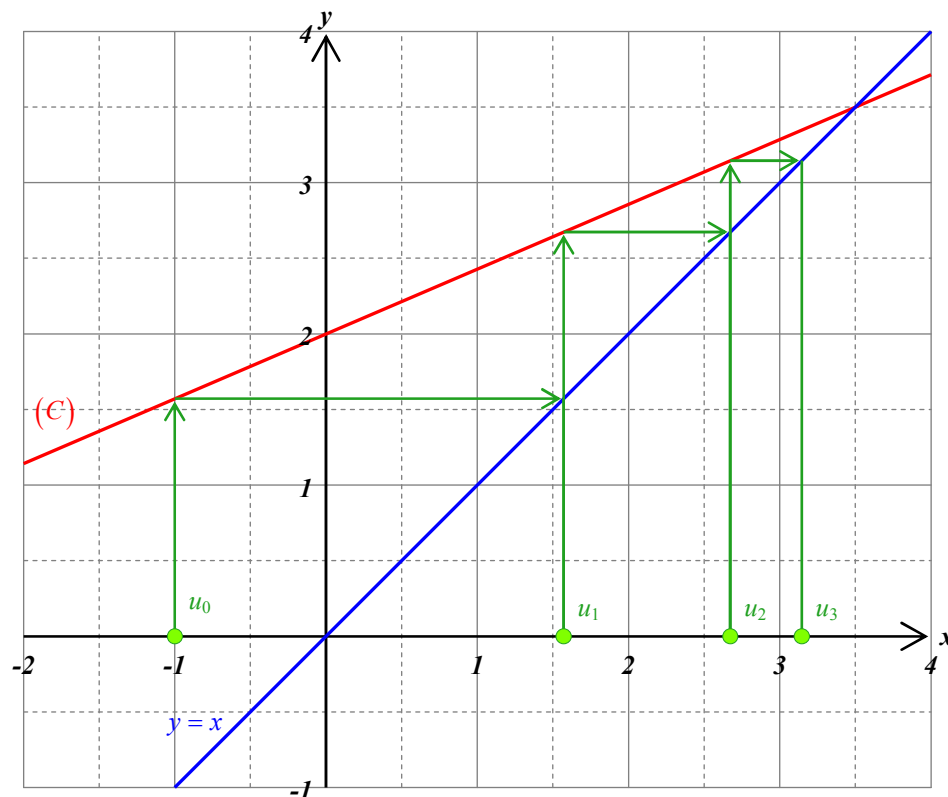
On appelle (C) sa courbe représentative qui est la droite d'équation $y = \frac{3}{7} \times x + 2$.

Cette droite (C) passe par son «point d'ordonnée à l'origine» de coordonnées $(0;2)$ et

suivant son coefficient directeur $\frac{3}{7}$ monte de 3 en ordonnée lorsque l'on progresse de 7 en abscisse. Ce qui nous donne un second point pour tracer la droite...

On construit également la droite d'équation $y = x$, c'est-à-dire le lieu du plan où l'abscisse x est égale à l'ordonnée y . Cette droite nous permettra de reporter tout point de l'axe des ordonnées (Oy) sur l'axe des abscisses (Ox) .

Puis, on commence le processus de construction ainsi que cela est fait ci-dessous :



Vu le graphique précédent, la suite (u_n) semble croissante et converger vers 3,5 dans «l'entre-deux-droites».

b.1 et 2) Pour tout entier naturel n , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{7}{2} \\ &= \left(\frac{3}{7} \times u_n + 2 \right) - \frac{7}{2} = \frac{3}{7} \times u_n + \frac{4}{2} - \frac{7}{2} \\ &= \frac{3}{7} \times \left(v_n + \frac{7}{2} \right) - \frac{3}{2} = \frac{3}{7} \times v_n + \frac{3 \times 7}{7 \times 2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{7} \times v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{7}$ et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - \frac{7}{2} = -1 - \frac{7}{2} = -\frac{9}{2} = -4,5$$

Nous en déduisons que pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -4,5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n$$

Et par voie de conséquence :

$$u_n = v_n + 3,5 = -4,5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n + 3,5$$

b.3) Utilisant l'expression du terme u_n , nous avons que pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left[-4,5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^{n+1} + 3,5 \right] - \left[-4,5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n + 3,5 \right] \\ &= \left(-4,5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n \right) \times \frac{3}{7} - \left(-4,5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n \right) = \left(-4,5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^n \right) \times \left(\frac{3}{7} - 1 \right) \\ &= \left(-4,5 \right) \times \left(\frac{3}{7}\right)^n \times \left(-\frac{4}{7} \right) = \frac{18}{7} \times \left(\frac{3}{7}\right)^n \end{aligned}$$

b.4) Comme la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n = \frac{18}{7} \times \left(\frac{3}{7}\right)^n$ est

toujours strictement positive, alors, nous avons que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante....ainsi que le laissait supposer la construction ci-contre.

b.5) Comme l'exposé $\frac{3}{7}$ est compris entre 0 et 1, alors la puissance $\left(\frac{3}{7}\right)^n$ tend vers 0^+ .

Nous en concluons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{2} - \frac{9}{2} \times \left(\frac{3}{7}\right)^n = \frac{7}{2} - \frac{9}{2} \times 0^+ = \frac{7}{2} - 0^+ = 3,5$$

b.6) Sur le graphique, on observe bien la croissance et la convergence de la suite (u_n) qui viennent d'être établies. Les termes de la suite grimpent dans l'entonnoir ou «entre-deux-

droites» formé par les droites d'équations $y = \frac{3}{7}x + 2$ et $y = x$ vers leur point

d'intersection qui a pour coordonnées $(3,5; 3,5)$: la limite qui vient d'être établie.

Trigonométrie et angles orientés

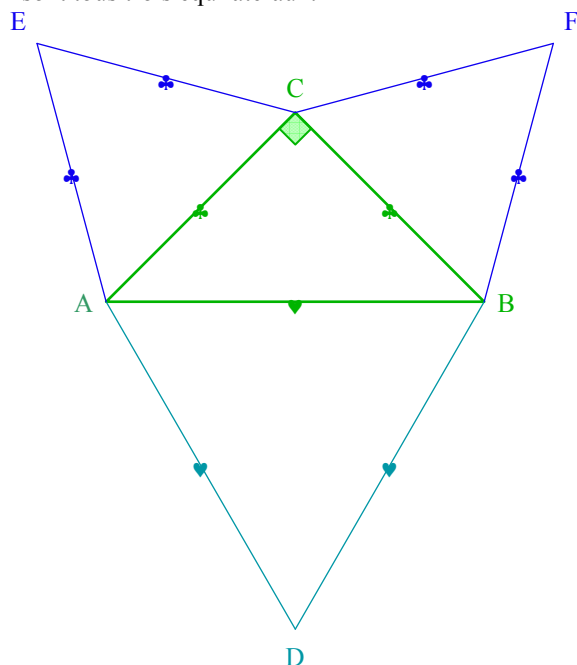
Tourcoti, tournicota et ça revient !

Le contexte

Cet exercice consiste à déterminer des mesures en radians d'angles orientés.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est isocèle rectangle en C, alors que les triangles ABD, ACE et BCF sont tous trois équilatéraux.



a) Donner une mesure exprimée en radians des angles orientés suivants. Aucune justification n'est demandée.

$$\begin{array}{llll} (\overline{AC}, \overline{AE}) = & (\overline{CA}, \overline{CB}) = & (\overline{BA}, \overline{BC}) = & (\overline{FB}, \overline{FC}) = \\ (\overline{AD}, \overline{AC}) = & (\overline{CE}, \overline{CB}) = & (\overline{CB}, \overline{EC}) = & (\overline{DC}, \overline{BA}) = \end{array}$$

b) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overline{AD}, \overline{CF})$. On expliquera son raisonnement.

c) Tracer sur figure précédente les ensembles de points suivants :

1. L'ensemble Δ des points M du plan tels que $(\overline{CF}, \overline{CM}) = \frac{\pi}{6}$ modulo 2π .
2. L'ensemble Γ des points M du plan tels que $(\overline{EM}, \overline{AC}) = 0$ modulo 2π
3. L'ensemble Σ des points M du plan tels que $(\overline{MA}, \overline{MD}) = -\frac{\pi}{2}$ modulo 2π

Le corrigé

a) Les angles géométriques du triangle isocèle rectangle ABC

mesurent soit $45^\circ = \frac{\pi}{4}$,

soit $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ pour l'angle droit.

Tous les angles des trois triangles équilatéraux mesurent

tous $60^\circ = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent :

$$(\overline{AC}, \overline{AE}) = +\frac{\pi}{3}$$

$$(\overline{CA}, \overline{CB}) = +\frac{\pi}{2}$$

$$(\overline{BA}, \overline{BC}) = -\frac{\pi}{4}$$

$$(\overline{FB}, \overline{FC}) = -\frac{\pi}{3}$$

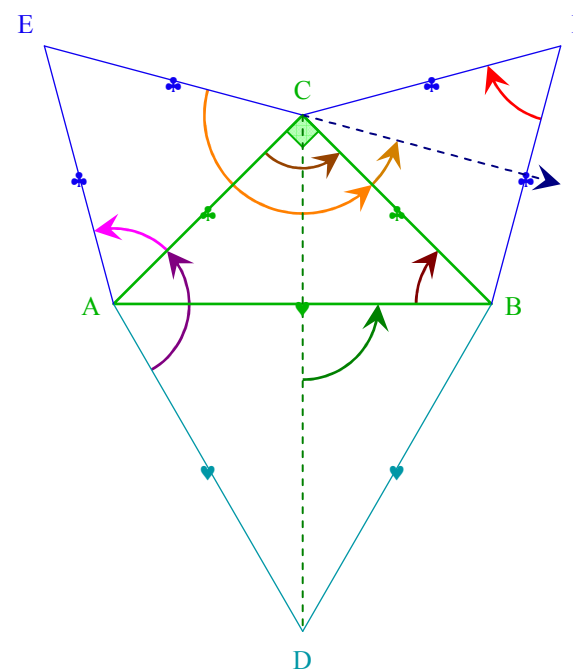
De plus :

$$(\overline{AD}, \overline{AC}) = (\overline{AD}, \overline{AB}) + (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$(\overline{CE}, \overline{CB}) = (\overline{CE}, \overline{CA}) + (\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

L'angle $(\overline{CB}, \overline{EC})$ est le complémentaire sur un angle plat de l'angle $(\overline{CE}, \overline{CB})$.

$$(\overline{CB}, \overline{EC}) = (\overline{CB}, \overline{CE}) + (\overline{CE}, \overline{EC}) = -\frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{\pi}{6}$$



Les points C et D appartenant à la médiatrice du segment [AB], on a : $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$

b) Les mesures de l'angle demandé peuvent se trouver de plusieurs manières :

Merci M'sieur Chasles !

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CF}) &= (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) + (-\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}) \\ &= (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \pi + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}) = \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{29\pi}{12} \equiv \frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

Une autre manière de voir les choses est :

Merci M'sieur Chasles !

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CF}) &= (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CF}) \\ &= (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (-\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (-\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}) \\ &= (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}) + \pi \\ &= (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}) + 2\pi \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} + 2\pi = \frac{5\pi}{12} + 2\pi \equiv \frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

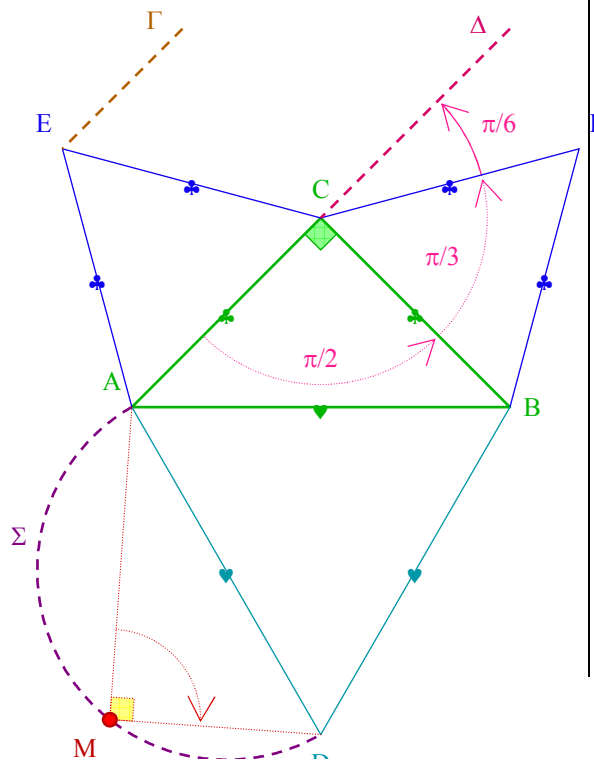
A 2π près,
au tour près...

c.1) L'ensemble Δ est la demi-droite portée par la droite (AC) d'extrémité C et ne contenant pas le point A.

c.2) Γ est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient colinéaires et aussi de même sens.

Par conséquent, l'ensemble Γ est la demi-droite d'extrémité E et de demi-direction celle du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

c.3) Un point M appartient à l'ensemble Γ si et seulement si le triangle AMD est rectangle indirect en M. Autrement dit, le point M doit faire partie du demi-cercle (indirect ?) de diamètre [AD].



Vous reprendrez bien un peu de t !

Le contexte

Cet exercice de trigonométrie met en oeuvre les formules donnant les cosinus, sinus et tangente d'angles associés.

L'énoncé

t est un sympathique réel de l'intervalle $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(t) = -\frac{4}{5}$

a. Déterminer la valeur exacte de $\cos(t)$

b. En déduire les valeurs exactes de :

$$\cos(t - \pi) \quad \sin(t - \pi) \quad \tan(t - \pi)$$

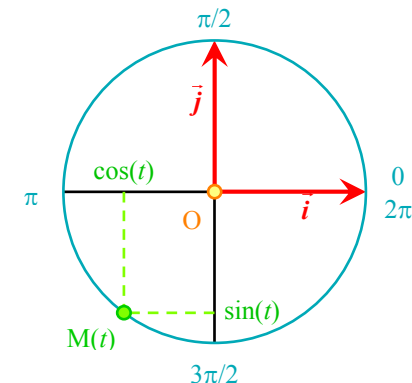
$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Le corrigé

a) Enroulons l'intervalle $[0; 2\pi]$ sur le cercle trigonométrique !

Le réel t faisant partie de l'intervalle $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$,

le point M qui lui est associé sur le cercle trigonométrique à une abscisse $x_M = \cos(t)$ et une ordonnée $y_M = \sin(t)$ négatives.



Qui plus est, ces cosinus et sinus sont liés par la relation :

$$\begin{aligned} [\cos(t)]^2 + [\sin(t)]^2 &= 1 \Leftrightarrow [\cos(t)]^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow [\cos(t)]^2 = 1 - \frac{16}{25} \\ &\Leftrightarrow [\cos(t)]^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \boxed{\cos(t) = -\frac{3}{5}} \text{ ou } \cancel{\cos(t) = \frac{3}{5}} \end{aligned}$$

b) En utilisant les propriétés trigonométriques des angles remarquables et associés, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \cos(t - \pi) &= -\cos(t) = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} \\ \sin(t - \pi) &= -\sin(t) = -\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5} \end{aligned} \Rightarrow \tan(t - \pi) = \frac{\sin(t - \pi)}{\cos(t - \pi)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(t) = -\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5} \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(t) = \frac{3}{5} \end{aligned} \Rightarrow \tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

Angles et plus

Le contexte

Cet exercice de trigonométrie met en oeuvre des formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus.

L'énoncé

On appelle α le réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{20}{29}$.

a) Déterminer la valeur exacte de $\sin(\alpha)$.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Le corrigé

a) Le réel α appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, son sinus est négatif.

De plus, nous savons :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{400}{841} = \frac{441}{841}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{441}{841}} = \frac{21}{29} \quad \text{ou} \quad \sin(\alpha) = -\frac{21}{29}$$

Impossible car $\sin(\alpha)$ est négatif

Voilà la bonne réponse !

b) Appliquons les formules d'addition et de duplication vues en cours.

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos(\alpha) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(\alpha) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{20}{29} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{21}{29}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{20+21}{29} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{41}{29} \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin(\alpha) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(\alpha) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{21}{29} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{20}{29} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{21-20}{29} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{29} \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} = \frac{1 + \frac{20}{29}}{2} = \frac{\frac{49}{29}}{2} = \frac{49}{29 \times 2} = \frac{49}{58}$$

α appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, sa moitié $\frac{\alpha}{2}$ est dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

Donc $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est positif. Nous en déduisons :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{49}{58}} = \frac{7}{\sqrt{58}}$$

Les équations qui tournent en rond

Le contexte

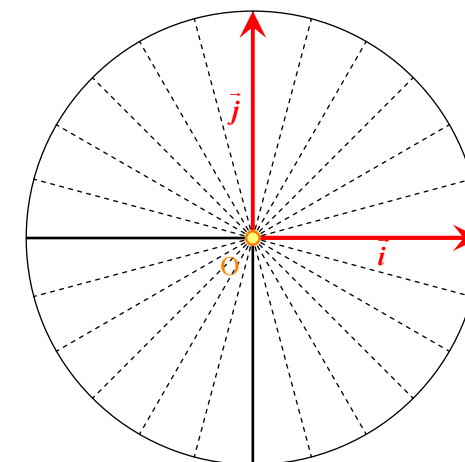
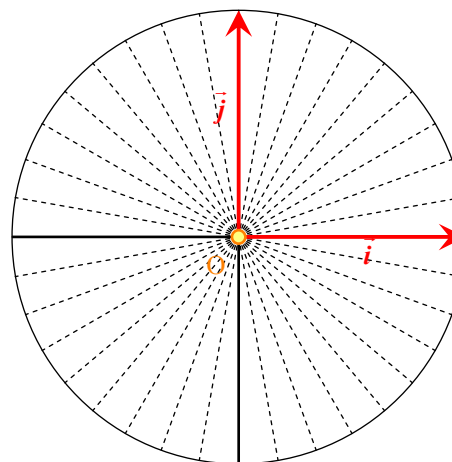
Cet exercice consiste en la résolution de deux équations trigonométriques. Un sujet toujours très technique.

L'énoncé

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin(2t) = \frac{1}{2}$$

Puis, on déterminera et représentera les solutions de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ sur le cercle trigonométrique ci-dessous qui a été partagé



en 24 portions égales.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(2t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Puis, on déterminera et représentera les solutions de l'intervalle $[0; 2\pi[$ sur le cercle trigonométrique ci-dessous qui a été partagé en 36 portions égales.

Le corrigé

a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ la première équation trigonométrique.

$$\sin(2t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2t) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad 2t = \pi - \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi$$

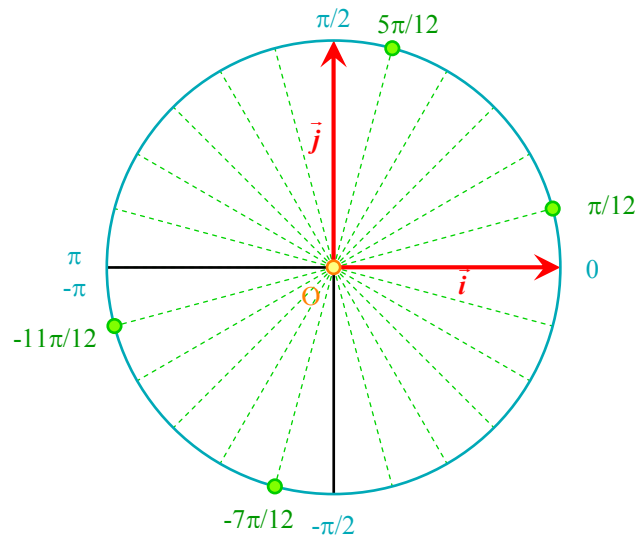
$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi}{12} + k \times \pi & 2t &= \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi \\ & \text{où } k \text{ est un entier relatif...} & t &= \frac{5\pi}{12} + k \times \pi \end{aligned}$$

Déduisons-en les solutions de cette équation se trouvant dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Celles de la forme } \frac{\pi}{12} + k \times \pi & \left| \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{12} + 0 \times \pi = \frac{\pi}{12} \\ k=-1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{12} + (-1) \times \pi = -\frac{11\pi}{12} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Celles de la forme } \frac{5\pi}{12} + k \times \pi & \left| \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow t = \frac{5\pi}{12} + 0 \times \pi = \frac{5\pi}{12} \\ k=-1 \Rightarrow t = \frac{5\pi}{12} + (-1) \times \pi = -\frac{7\pi}{12} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ces quatre solutions particulières sont représentées ci-contre sur le cercle trigonométrique sur lequel on a enroulé l'intervalle $]-\pi; \pi]$ →



b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ la seconde équation trigonométrique.

$$\cos(2t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos(2t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(t + \frac{\pi}{6}\right)\right) \Leftrightarrow \cos(2t) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{3} - t + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad 2t = -\left(\frac{\pi}{3} - t\right) + k \times 2\pi \\ & \text{où } k \text{ est toujours un entier relatif...} \\ & 3t = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi & 2t = -\frac{\pi}{3} + t + k \times 2\pi \\ & t = \frac{\pi}{9} + k \times \frac{2\pi}{3} & t = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \end{aligned}$$

Déterminons les solutions de cette équation se trouvant dans l'intervalle $[0; 2\pi[$:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Celles de la forme } \frac{\pi}{9} + k \times \frac{2\pi}{3} & \left| \begin{array}{l} k=0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{9} + 0 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{9} \\ k=1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{9} + 1 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9} \\ k=2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{9} + 2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{13\pi}{9} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Celles de la forme } -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \left| \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3} + 1 \times 2\pi = \frac{5\pi}{3} \end{array} \right.$$

Ces quatre solutions particulières sont représentées ci-contre sur le cercle trigonométrique sur lequel on a enroulé l'intervalle $[0; 2\pi[$ →

