Le mot de l'auteur

Comme à chaque début d'été, je publie le recueil des exercices que j'ai donnés en devoir durant la saison. Voici la cuvée 2011-2012 de seconde...qui ressemble beaucoup aux précédentes.
La chose qui m'a le plus marquée cette saison est que la relation qu'entretenaient les parents d'élèves avec la matière mathématique était en train de changer. Avant, lorsque leurs enfants butaient sur une difficulté ou «se plantaient», ils admettaient que leurs enfants ne pouvaient pas tout comprendre et que l'apprentissage d'une notion prenait du temps. Mais cette patience raisonnable est désormais en voie de disparition.
La faute en revient à cette calamiteuse notion de «réussite scolaire pour tous» et aux programmes de collège qui, dans cette perspective, ont été expurgés de tous les points difficiles (notamment la géométrie) qui, antérieurement, permettaient de faire réfléchir et chercher les élèves.
Les mauvaises habitudes étant tenaces, ces parents si sourcilleux arrivent au lycée avec leurs «habitudes de collège» et entendent que leur progéniture comprenne tout tout de suite. Et peu importe qu'il ne travaille pas ! Car il n'y a plus de mauvais élèves, il n'y a que des mauvais profs avec des mauvaises méthodes.
Sauf qu'à l'instar du marathon, les mathématiques ne sont pas une matière instantanée où il suffit d'apprendre des choses par cœur. C'est l'utilisation des connaissances et donc la manœuvre qui sont au cœur de la discipline. Les mathématiques n'ont d'intérêt que dans la réflexion abstraite qu'elles permettent d'engendrer.
Hélas, l'esprit des temps est à l'immédiateté, à la marchandisation et au consumérisme. On ne suit pas un cours de mathématiques mais on l'achète. Et les clients sont exigeants !
Mais personne n'a songé à dire à ces parents inconscients que la garantie légale d'une année n'appliquait pas...

es exercices de ce volume sont classés par catégories :

La taverne de l'Irlandais

[http://www.tanopah.com]

présente

Mélancolie mathématique ...en seconde

Tous les exercices du présent document ont été conçus et réalisés par Jérôme ONILLON, professeur (dés)agrégé de mathématiques.

Edition du samedi 30 juin 2012

Algèbre, équation et inéquation

La tradition des équations

Le contexte

Cinq équations et inéquations du premier ou du second degré à résoudre. La forme canonique doit être connue.

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes. Chaque résolution sera conclue en donnant l'ensemble des solutions, éventuellement sous la forme d'un intervalle.

a. $-9 \le 5x-4 < 6$ **b.** $\frac{2}{3}\times(x-1)-\frac{1}{7} \ge 2-\frac{4}{7}\times(3-x)$

c. $x^2-16x+15=0$ **d.** $3x^2=7x$ **e.** $9x^2+42x+50=0$

Le corrigé

a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$-9 \le 5x-4 < 6 \overset{+4}{\Leftrightarrow} -5 \le 5x < 10 \overset{\div 5}{\Leftrightarrow} \boxed{-1 \le x < 2}$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S = [-1;2[$$

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{2}{3}\times(x-1)-\frac{1}{7} \ge 2-\frac{4}{7}\times(3-x) \Leftrightarrow \overbrace{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}-\frac{1}{7} \le 2-\frac{12}{7}+\frac{4}{7}x}^{\text{D'abord, on développe...}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\frac{2}{3}x-\frac{4}{7}x \le 2-\frac{12}{7}+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}}^{\text{Les termes en } x \text{ à gauche, le reste à droite...}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{21}x-\frac{12}{21}x \le \frac{42}{21}-\frac{36}{21}+\frac{14}{21}+\frac{3}{1} \Leftrightarrow \frac{2}{\cancel{21}}x \ge \frac{23}{\cancel{21}}$$

$$\Leftrightarrow 2x \ge 23 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} x \ge \frac{23}{2} = 11,5$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $[11,5;+\infty[$

Les trois prochaines équations étant du second degré, nous ne pourrons les résoudre que si nous aboutissons à un produit nul. Autrement dit, il va falloir factoriser !

c) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

On factorise le membre de gauche en recherchant sa forme canonique.

$$x^2-16x+15=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-2\times x\times 8}_{\text{Début de cette...}}+15=0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-8)^2-64}_{\text{...identité remarquée}}+15=0$$

$$\Leftrightarrow (x-8)^2-49=0$$

Voilà la forme canonique !

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-8)^2-7^2}_{a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \underbrace{[(x-8)-7]}_{(a-b)}\times\underbrace{[(x-8)+7]}_{(a+b)}=0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est...

$$\Leftrightarrow (x-15)\times(x-1)=0 \Leftrightarrow x-15=0 \text{ ou } x-1=0$$

$$x=15 \qquad x=1$$

Conclusion : cette équation du second degré à deux solutions qui sont 1 et 15.

d) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation proposée...qui est aussi du second degré :

Là aussi, une factorisation s'impose mais la technique est différente.

$$3x^2=7x \Leftrightarrow 3x^2-7x=0 \Leftrightarrow \overbrace{3x\times\boxed{x}-7\times\boxed{x}}^{\text{Facteur commun : } x}=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x}\times(3x-7)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 3x-7=0$$

$$3x=7$$

$$x=\frac{7}{3}$$

Attention ! On ne peut pas diviser par x car x peut être nul. D'ailleurs, 0 est solution

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est...

Nous en concluons que les solutions de cette équation sont :

$$S=\{1;15\}$$

e) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

A nouveau, on recherche une factorisation en utilisant la forme canonique !

$$9x^2+42x+50=0 \Leftrightarrow \underbrace{(3x)^2+2\times 3x\times 7}_{\text{Début de cette...}}+50=0 \Leftrightarrow \underbrace{(3x+7)^2-49}_{\text{...identité remarquée}}+50=0$$

$$\Leftrightarrow (3x+7)^2+1=0$$

Voilà la forme canonique ! Mais ce n'est pas une différence de deux carrés. Donc elle ne se factorise pas.

Un carré n'est jamais négatif !

$$\Leftrightarrow \boxed{(3x+7)^2=-1}$$

Ainsi se conclut la résolution de cette équation.

Conclusion : cette équation du second degré n'a pas de solution.

Mauvais signe !

Le contexte

Trois inéquations produits à résoudre au moyen d'une factorisation, puis d'un tableau de signe. La dernière de ces inéquations requiert la forme canonique...

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes. Chaque résolution sera conclue en donnant l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

a. $(3x-4)\times(-2x-3)<0$

b. $(5-3x)^2 \geq (2x+1)^2$

c. $3x^2+15<14x$

Le corrigé

a) La résolution de cette première inéquation ne pose guère de problèmes !

$$(3x-4)\times(-2x-3)<0$$

Quand ce produit est-il négatif ?

Examinons les facteurs composant ce produit :

- Le facteur affine $3x-4$: son coefficient directeur $a=3$ est positif.

  Il s'annule en : $3x-4=0 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

- Le facteur affine $-2x-3$: son coefficient directeur $a=-2$ est négatif.

  Il s'annule en : $-2x-3=0 \Leftrightarrow -2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{-2}=-1{,}5$

En conséquence, le tableau de signe du produit de ces deux facteurs est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3.x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-2.x-3$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

On termine toujours par le signe du coefficient directeur a

Le produit est strictement négatif avant $-1{,}5$ et après $4/3$. Nous en concluons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$$

Pour résoudre les deux inéquations à venir, nous allons devoir rechercher une factorisation. Puis, nous aurons à nous prononcer sur le signe d'un produit.

b) $(5-3x)^2 \geq (2x+1)^2 \Leftrightarrow \underbrace{(5-3x)^2-(2x+1)^2}_{\text{Différence de deux carrés}} \geq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\left[(5-3x)+(2x+1)\right]}_{\text{La somme}}\times\underbrace{\left[(5-3x)-(2x+1)\right]}_{\text{La différence}} \geq 0$

$\Leftrightarrow [5-3x+2x+1]\times[5-3x-2x-1]\geq 0$

$\Leftrightarrow (-x+6)\times(-5x+4)\geq 0$

Quand ce produit est-il positif ou nul ?

Examinons les deux facteurs composant ce produit :

- Le facteur affine $-x+6$: son coefficient directeur $a=-1$ est négatif.

  Il s'annule en : $-x+6=0 \Leftrightarrow -x=-6 \Leftrightarrow x=6$

- Le facteur affine $-5x+4$: son coefficient directeur $a=-5$ est aussi négatif.

  Il s'annule en : $-5x+4=0 \Leftrightarrow -5x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{-4}{-5}=0{,}8$

Nous en déduisons que le tableau de signe de ce produit est

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		6		$+\infty$
$-x+6$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$-5.x+4$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

On termine toujours par le signe du coefficient directeur a

Le produit est positif ou nul avant 0,8 et après 6, les deux inclus. Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=\left]-\infty;0{,}8\right]\cup\left[6;+\infty\right[$$

c) Résolvons dans ℝ l'inéquation :

$3x^2+15<14x \Leftrightarrow 3x^2-14x+15<0 \xrightarrow{\times 3} 9x^2-42x+45<0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(3x)^2-2\times 3x\times 7}_{\text{Début de cette...}}+45<0 \Leftrightarrow \underbrace{(3x-7)^2-49}_{\text{...identité remarquable}}+45<0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(3x-7)^2-2^2}_{a^2-b^2}<0 \Leftrightarrow \underbrace{\left[(3x-7)-2\right]}_{(a-b)}\times\underbrace{\left[(3x-7)+2\right]}_{(a+b)}<0$

$\Leftrightarrow (3x-9)\times(3x-5)<0$

Après avoir tout multiplié par 3, on factorise le membre de gauche en recherchant sa forme canonique.

Quand ce produit est-il négatif ?

Le tableau de signe de ce produit est :

x	$-\infty$		$5/3$		3		$+\infty$
$3x-9$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x-5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = \left]\frac{5}{3};3\right[$$

Quotients pour intellectuels

Le contexte

Deux inéquations quotients et une inéquation produit (du second degré) à résoudre au moyen d'un tableau de signe précédé de petits calculs ou d'une forme canonique.

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. Chaque résolution sera conclue en donnant l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

a. $\dfrac{4-2x}{(3x+1)(7-x)} \leq 0$

b. $\dfrac{5x+1}{2x-7} \geq 3$

c. $5x^2 < 4x-1$

Le corrigé

a) Cette première résolution se résume à savoir quand le quotient $\dfrac{4-2x}{(3x+1)(7-x)}$ est négatif ou nul. Examinons les facteurs le composant :

- Le facteur affine $-2x+4$: son coefficient directeur $a=-2$ est négatif.
  Il s'annule en : $-2x+4=0 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=\dfrac{-4}{-2}=2$
- Le facteur affine $3x+1$: son coefficient directeur $a=3$ est positif.
  Il s'annule en : $3x+1=0 \Leftrightarrow 3x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$
- Le facteur affine $-x+7$: son coefficient directeur $a=-1$ est négatif.
  Il s'annule en : $-x+7=0 \Leftrightarrow -x=-7 \Leftrightarrow x=7$

Nous en déduisons que le tableau de signe de notre quotient est :

x	$-\infty$		$-1/3$		2		7		$+\infty$
$-2x+4$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$3x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+7$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Le quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'ensemble des réels x pour lesquels le quotient est négatif ou nul. D'après le tableau ci-dessus :

$$\mathrm{S} = \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup[2;7[$$

b) Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons d'abord tout ramener dans le membre de gauche, puis nous effectuerons une mise au même dénominateur $2x-7$ avant d'avoir à nous prononcer sur le signe d'un quotient :

$$\frac{5x+1}{2x-7} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{5x+1}{2x-7} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x+1-3\times(2x-7)}{2x-7} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+1-6x+21}{2x-7} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+22}{2x-7} \geq 0$$

Quand ce quotient est-il positif ou nul ?

Examinons les numérateur et dénominateur de ce quotient :

- Le facteur affine $-x+22$: son coefficient directeur $a=-1$ est négatif.
  Il s'annule en : $-x+22=0 \Leftrightarrow -x=-22 \Leftrightarrow x=22$
- Le facteur affine $2x-7$: son coefficient directeur $a=2$ est positif.
  Il s'annule en : $2x-7=0 \Leftrightarrow 2x=7 \Leftrightarrow x=7/2=3,5$

Nous en déduisons que le tableau de signe de ce quotient :

x	$-\infty$		3,5		22		$+\infty$
$-x+22$		+	|	+	0	−	
$2x-7$		−	0	+	|	+	
Leur quotient		−	||	+	0	−	

Le quotient est positif ou nul entre 3,5 et 22. L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\mathrm{S} =]3,5;22]$$

c) Pour résoudre cette dernière inéquation, nous allons devoir faire preuve d'ingéniosité afin de faire apparaître le forme canonique ! Puis, nous chercherons à factoriser...

$$5x^2 < 4x-1 \Leftrightarrow 5x^2-4x+1<0 \xrightarrow{\times 5} 25x^2-20x+5<0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(5x)^2-2\times 5x\times 2}_{\text{Début de cette...}}+5<0 \Leftrightarrow \underbrace{(5x-2)^2-4}_{\text{...identité remarquable}}+5<0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(5x-2)^2+1}_{\text{Cette somme n'est pas factorisable avec } a^2-b^2} < 0 \Leftrightarrow \underbrace{(5x-2)^2<-1}_{\text{Un carré n'étant jamais négatif, il n'est jamais inférieur à } -1.}$$

Cette inéquation n'a aucune solution. Son ensemble des solutions est l'ensemble vide.

$$\mathrm{S} = \varnothing$$

Intermède équationnel

Le contexte

Deux inéquations à résoudre via un tableau de signe : une produit et une quotient.

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes. On conclura chaque résolution en donnant l'ensemble des solutions.

a. $(2x+3)\cdot(x+7) \geq (2x+3)\cdot(4x-5)$ **b.** $\dfrac{3}{x+2} \geq \dfrac{5}{x+7}$

Le corrigé

a) Nous allons résoudre cette première inéquation au moyen d'une factorisation.

$$(2x+3)\cdot(x+7) \geq (2x+3)\cdot(4x-5) \Leftrightarrow \overset{\text{Facteur...}}{\boxed{(2x+3)}}\cdot(x+7)-\overset{\text{...commun}}{\boxed{(2x+3)}}\cdot(4x-5)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(2x+3)}\times[(x+7)-(4x-5)]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)\times[x+7-4x+5]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)\times(-3x+12)\geq 0$$

Quand ce produit est-il positif ou nul ?

Examinons les deux facteurs composant ce produit :

Facteur $2x+3$: $a=2$ et $2x+3=0 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=-1,5$

Facteur $-3x+12$: $a=-3$ et $-3x+12=0 \Leftrightarrow -3x=-12 \Leftrightarrow x=4$

Par conséquent, le tableau de signe de ce produit est :

x	$-\infty$		$-1,5$		4		$+\infty$
$2x+3$		−	0	+	|	+	
$-3x+12$		+	|	+	0	−	
Leur produit		−	0	+	0	−	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette première inéquation est :

$$\mathrm{S} = [-1,5;4]$$

b) Cette seconde inéquation sera résolue via une mise au dénominateur commun.

$$\frac{3}{x+2} \geq \frac{5}{x+7} \Leftrightarrow \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x+7} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3\times(x+7)-5\times(x+2)}{(x+2)\times(x+7)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+21-5x-10}{(x+2)\times(x+7)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+11}{(x+2)\times(x+7)} \geq 0$$

Quand ce quotient est-il positif ou nul ?

Le tableau de signe de ce dernier quotient est :

x	$-\infty$		-7		-2		$5,5$		$+\infty$
$-2x+11$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+7$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de l'inéquation précédente est :

$$\boxed{S =]-\infty;-7[\cup]-2;5,5]}$$

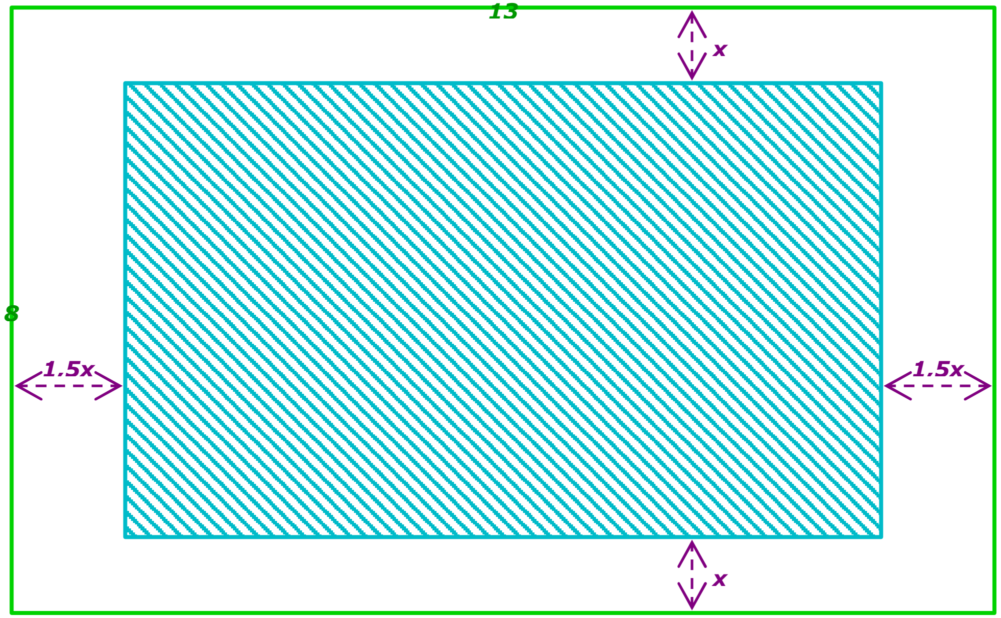
Encadrement au second degré

Le contexte

Un exercice de recherche pratique nécessitant la résolution d'une équation du second degré...où est utilisée une factorisation par identification des coefficients...hors programme !

L'énoncé

On dispose d'une feuille de carton de 13 centimètres de longueur sur 8 de largeur.
On souhaite créer sur le pourtour de la feuille un bord de x centimètres dans le sens de la largeur et $1,5\times x$ centimètres dans le sens de la longueur ainsi que cela est indiqué sur la figure ci-dessous :



On appelle $\mathcal{A}$ l'aire de la partie hachurée centrale exprimée en centimètres carrés.

a) Calculer la valeur de l'aire de la partie hachurée centrale lorsque $x=1$ [cas de la figure].

b) De manière générale, exprimer l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de x.

c) A quel intervalle appartient nécessairement le réel x ?

d) On souhaite que l'aire de la partie hachurée centrale fasse de 48 centimètres carrés.

1. Déterminer deux coefficients entiers a et b tels que pour tout réel x, on ait :
$$6x^2-50x+56=(x-7)\times(ax+b)$$
2. En déduire la valeur de x pour laquelle la partie hachurée centrale mesure 48 centimètres carrés.

Le corrigé

a) Lorsque x vaut 1, la partie hachurée centrale est un rectangle de 10 centimètres de longueur sur 6 de largeur. Par conséquent, son aire est de $10\times 6=\boxed{60\text{ cm}^2}$

b) La partie hachurée centrale est un rectangle de $13-2\times 1{,}5\times x$ centimètres de longueur sur $8-2\times x$ centimètres de largeur. Par conséquent, son aire est donnée par :

$$\boldsymbol{A}=\text{longueur}\times\text{largeur}$$
$$=(13-3x)\times(8-2x)=104-26x-24x+6x^2=\boxed{6x^2-50x+104\text{ cm}^2}$$

c) Le réel x est contraint par les dimensions du grand rectangle dans deux sens :

Celui de la longueur...	et	celui de la largeur...
$0\leq 3x\leq 13$		$0\leq 2x\leq 8$
$0\leq x\leq \dfrac{13}{3}$		$0\leq x\leq 4$

Conclusion : le réel x appartient à l'intervalle $[0;4]$.

d.1) On veut écrire la forme du second degré $6x^2-50x+56$ sous la forme :

$$6x^2-50x+56=(x-7)\times(ax+b)$$
$$=ax^2+bx-7ax-7b$$
$$\boxed{6}x^2+\boxed{(-50)}x+\boxed{56}=\boxed{a}x^2+\boxed{(b-7a)}x+\boxed{(-7b)}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux :

Egalité en x^2 : $6=a \iff \boxed{a=6}$

Egalité en x^1 : $-50=b-7a \iff b=-50+7\times 6=-50+42=\boxed{-8}$

Egalité en x^0 : $56=-7b \iff b=56/(-7)=\boxed{-8}$

Nous en déduisons la factorisation :

$$6x^2-50x+56=\boxed{(x-7)\times(6x-8)}$$

d.2) On cherche les valeurs de x pour lesquelles :

$$\boldsymbol{A}=48 \iff x^2-50x+104=48$$
$$\iff x^2-50x+56=0$$
$$\iff \underbrace{(x-7)(6x-8)}_{\text{Un produit est nul...}}=0 \iff \underbrace{x-7=0}_{\text{...l'un de ses...}} \text{ ou } \underbrace{6x-8=0}_{\text{...facteurs l'est !}}$$

$x=7$: Impossible car $x\in[0;4]$

$6x=8$

$x=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$: Possible car $x\in[0;4]$

Conclusion : pour que la partie hachurée centrale mesure 48 centimètres carrés, il faut que le réel x soit égal à $\dfrac{4}{3}\approx 1{,}33$ centimètres.

Algorithmique

Tout un programme ! Et même deux...

Le contexte

Un exercice où il s'agit d'exécuter à la main deux programmes regroupant les principales instructions exigibles.

L'énoncé

Cet exercice est composé de deux sous-parties indépendantes. Dans chaque sous-partie, un programme est donné au cours duquel des questions sont posées. Ces questions sont introduites par une flèche ➔. On se contentera de répondre à ces questions.
On rappelle que les instructions d'un même bloc sont écrites sur une même colonne.

a) Le premier programme est le suivant :

```
a, b et i sont trois entiers relatifs
a=1
b=0
Pour i=2 jusqu'à 4 faire :
        a=a+i
        b=b+a
        ➔ Question : que valent les variables a et b ?
```

b) Le second programme est le suivant.
Les valeurs des variables seront données (au pire) au dix-millième près, soit quatre chiffres après la virgule. De plus, on rappelle que `x^3` désigne le cube x^3.

```
a, b, x et y sont quatre nombres décimaux
a=1
b=2
Tant que b-a>0,1 faire :
      x=(a+b)/2
      y=x^3-x-1
      Si y<0  alors a=x
              sinon b=x
      ➔ Question : que valent les variables a, b, x et y ?
a=(2*a+b)/3
➔ Question : que vaut la variable a ?
```

Question subsidiaire : Sur le graphique ci-dessous quadrillé toutes les unités, on a tracé la courbe (C) représentant la fonction $f(x) = x^3 - x - 1$.
Qu'a-t-on recherché avec ce second programme ?

Le corrigé

a) Exécutons ce premier programme instruction par instruction, ligne après ligne.

Instruction	Son action	*a*	*b*	*i*
`a=1  b=0`	Affectent les variables *a* et *b* avec 1 et 0.	1	0	
`Pour i=2...`	♋ Première boucle avec $i=2$	1	0	2
`a=a+i`	On affecte $a+i=1+2=3$ à la variable *a*.	3	0	2
`b=b+a`	On affecte $b+a=0+3=3$ à la variable *b*.	3	3	2
→ Les variables *a* et *b* sont toutes deux égales à 3.				
`Pour i=3...`	♋ Seconde boucle avec $i=3$	3	3	3
`a=a+i`	On affecte $a+i=3+3=6$ à la variable *a*.	6	3	3
`b=b+a`	On affecte $b+a=3+6=9$ à la variable *b*.	6	9	3
→ Les variables *a* et *b* ont pour valeurs respectives 6 et 9.				
`Pour i=4...`	♋ Troisième et dernière boucle avec $i=4$	6	9	4
`a=a+i`	On affecte $a+i=6+4=10$ à la variable *a*.	10	9	4
`b=b+a`	On affecte $b+a=9+10=9$ à la variable *b*.	10	19	4
→ Les variables *a* et *b* ont pour valeurs respectives 10 et 19.				

b) Exécutons ce second programme.

Instruction	Son action	*a*	*b*
`a=1  b=2`	Les variables *a* et *b* prennent pour valeurs 1 et 2.	1	2
`Tant que b-a>0,1`	Comme $b-a=1$, alors la condition est remplie. On entame une première boucle...♋	1	2
`x=(a+b)/2` `y=y^3-x-1`	La variable *x* est égale à $(1+2)/2=1,5$ La variable *y* est égale à $1,5^3-1,5-1=0,875$.	1	2
`Si y<0...`	Comme $y>0$, alors on affecte la valeur de *x* à la variable *b*.	1	1,5
→ $a=1$ $b=1,5$ $x=1,5$ $y=0,875$			
`Tant que b-a>0,1`	Comme $b-a=0,5$, alors la condition est remplie. On entame une seconde boucle...♋	1	1,5
`x=(a+b)/2` `y=y^3-x-1`	La variable *x* est égale à $(1+1,5)/2=1,25$ La variable *y* vaut $1,25^3-1,25-1=-0,296875$.	1	1,5
`Si y<0...`	Comme $y<0$, alors on affecte la valeur de *x* à la variable *a*.	1,25	1,5
→ $a=1,25$ $b=1,5$ $x=1,25$ $y=-0,296875$			
`Tant que b-a>0,1`	Comme $b-a=0,25$, alors la condition est remplie. On entame une troisième boucle...♋	1,25	1,5
`x=(a+b)/2` `y=y^3-x-1`	La variable *x* est égale à $(1,25+1,5)/2=1,375$ La variable *y* vaut $1,375^3-1,375-1\approx 0,2246$.	1,25	1,5
`Si y<0...`	Comme $y>0$, alors on affecte la valeur de *x* à la variable *b*.	1,25	1,375
→ $a=1,25$ $b=1,375$ $x=1,375$ $y\approx 0,2246$			
`Tant que b-a>0,1`	Comme $b-a=0,125$, alors la condition est remplie. On entame une quatrième boucle...♋	1,25	1,375
`x=(a+b)/2` `y=y^3-x-1`	La variable *x* vaut $(1,25+1,375)/2=1,3125$ La variable *y* vaut $1,3125^3-1,3125-1\approx -0,0515$.	1,25	1,375
`Si y<0...`	Comme $y<0$, alors on affecte la valeur de *x* à la variable *a*.	1,3125	1,375
→ $a=1,3125$ $b=1,375$ $x=1,3125$ $y\approx -0,0515$			
`Tant que b-a>0,1`	Comme $b-a=0,0625\leq 0,1$, alors la condition n'est plus remplie. On casse la boucle	1,3125	1,375
`a=(2*a+b)/3`	La variable *a* vaut $(2\times 1,3125+1,375)/3\approx 1,33$	1,3333	1,375
→ La variable *a* est égale à environ 1,33333 soit $4/3$.			

Question subsidiaire : au travers ce programme, nous avons recherché une valeur approchée de la seule solution de l'équation $f(x)=0$. Nous pouvons en conclure qu'une valeur approchée de l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses est 1,33.

Les fonctions

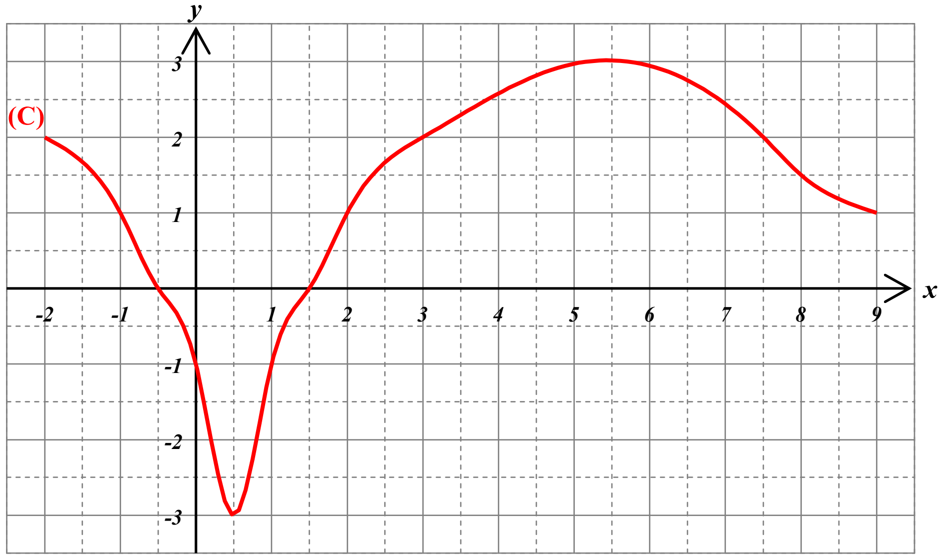
La tradition de la lecture graphique

Le contexte

Un exercice classique et basique de lecture graphique à partir de la courbe d'une fonction.

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $\left[-2;9\right]$. Sa courbe représentative (C) est tracée sur le graphique ci-dessous.



En utilisant le graphique précédent et avec toute la précision permise par celui-ci, on répondra aux questions ci-contre directement sur la feuille.

a) Compléter les phrases suivantes :

L'image de 0 par la fonction f est ....

L'image de -3 par la fonction f est ....

Les antécédents de 2 par la fonction f sont ....

Les antécédents de 4 par la fonction f sont ....

Le minimum de f sur l'intervalle $\left[-2;9\right]$ est....... Il est atteint en $x =$ ....

Le maximum de f sur l'intervalle $\left[-1;3\right]$ est....... Il est atteint en $x =$ ....

b) Compléter le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition se trouvant ci-dessous :

x	
f	

c) Compléter le tableau de signe de $f\left(x\right)$ se trouvant ci-dessous.

x	
$f\left(x\right)$	

d) Résoudre les inéquations suivantes :

$f\left(x\right) < -1$	$f\left(x\right) \geq 1$
S = ...	S = ...
$0 < f\left(x\right) \leq 2$	$f\left(x\right) > 3 - x$
S = ...	S = ...

Le corrigé

a) Tout point de la courbe représentative (C) a des coordonnées de la forme $\left(x; f\left(x\right)\right)$.
Autrement dit, l'ordonnée de tout point de (C) est l'image de son abscisse par la fonction *f*.

➲ L'image de 0 par *f* est l'ordonnée du point A dont l'abscisse est 0. Ainsi : $f\left(0\right)=-1$

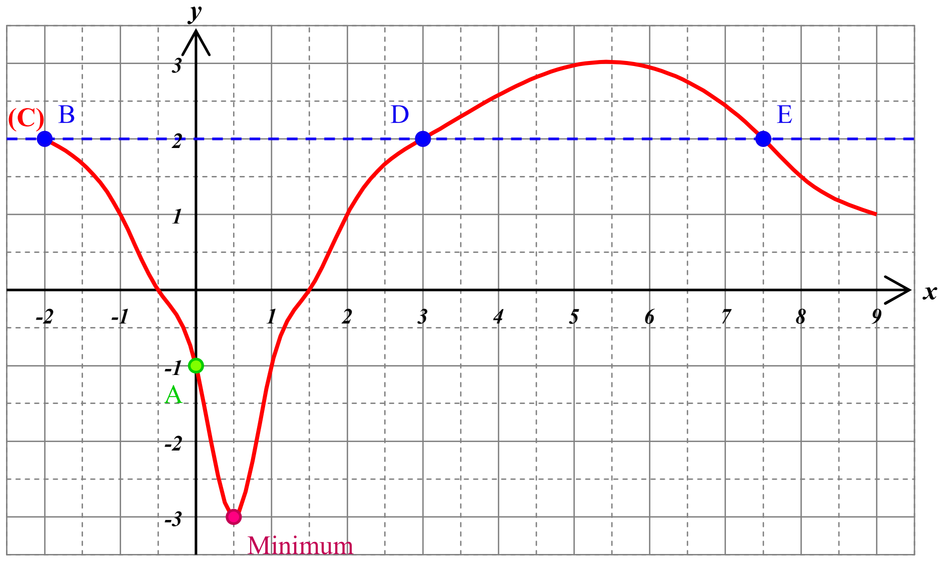
➲ -3 n'appartenant pas à l'ensemble de définition de la fonction *f*, il ne peut avoir d'image par cette fonction. D'ailleurs, aucun point de la courbe (C) n'a pour abscisse -3.

➲ Trois points de la courbe (C) ont pour ordonnée 2. Il s'agit de B dont l'abscisse est -2, D dont l'abscisse est 3 et E dont l'abscisse est 7,5.
Donc 2 a trois antécédents par la fonction *f* : -2; 1 et 7,5

➲ Aucun point de la courbe (C) n'a pour ordonnée 4. Par conséquent, ce dernier n'a pas d'antécédent par la fonction *f*.

➲ Le minimum de la fonction *f* sur l'intervalle $\left[-2;9\right]$ est -3. Il est atteint en $x=0,5$

➲ Le maximum de la fonction *f* sur l'intervalle $\left[-1;3\right]$ est 2. Il est atteint en $x=3$



b) D'après la courbe (C), le tableau de variation de la fonction *f* est le suivant :

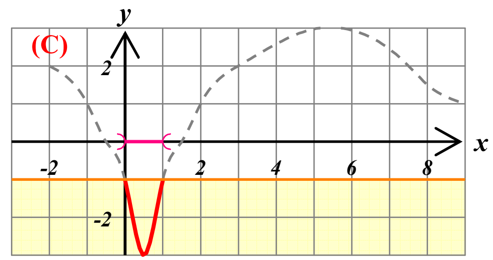
x	-2		0,5		5,5		9
f	2	↘	-3	↗	3	↘	1

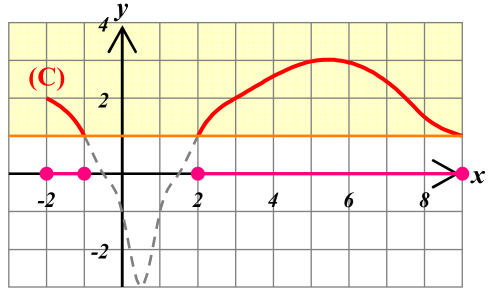
c) Le signe de $f\left(x\right)$ est donné par la position de la courbe (C) vis-à-vis de l'axe des abscisses (O*x*) qui marque le niveau 0. Le tableau de signe de $f\left(x\right)$ est :

x	-2		-0,5		1,5		9
$f\left(x\right)$		+	0	–	0	+	

d) Pour résoudre l'inéquation $f\left(x\right)<-1$, nous devons considérer tous les points de la courbe (C) dont l'ordonnée est strictement inférieure à -1.
Ceux-ci ont une abscisse qui est comprise entre 0 et 1 strictement. Par conséquent :

$$S=\left]0;1\right[$$





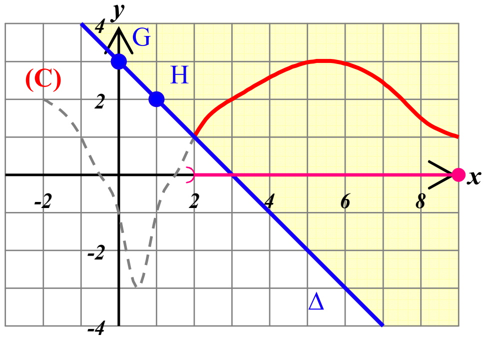
➲ Pour résoudre l'inéquation $f\left(x\right)\geq 1$, nous devons nous intéresser aux points de la courbe (C) dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 1.
Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

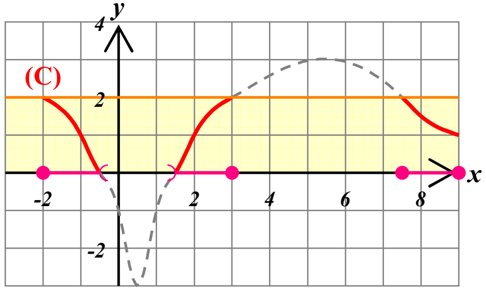
$$S=\left[-2;-1\right]\cup\left[2;9\right]$$

➲ L'inéquation $0 < f(x) \leq 2$ se résout en s'intéressant aux points de la courbe (C) dont l'ordonnée est strictement supérieure à 0 et inférieure ou égale à 9.
L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = [-2;-0,5[\cup]1,5;3] \cup [7,5;9]$$

Car en $-0,5$ et 1,5, la fonction *f* est nulle...





➲ Avant toute chose, traçons la courbe Δ représentant la fonction $g(x) = -x + 3$.

La fonction *g* étant affine, sa courbe Δ est une droite qui passe par les points :

$$\begin{array}{|lll} G(0;3) & \text{car} & g(0) = -0+3 = 3 \\ H(1;2) & \text{car} & g(1) = -1+3 = 2 \end{array}$$

Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$, c'est savoir quand la courbe (C) est au-dessus de la droite Δ. Nous en déduisons :

$$S =]2;9]$$

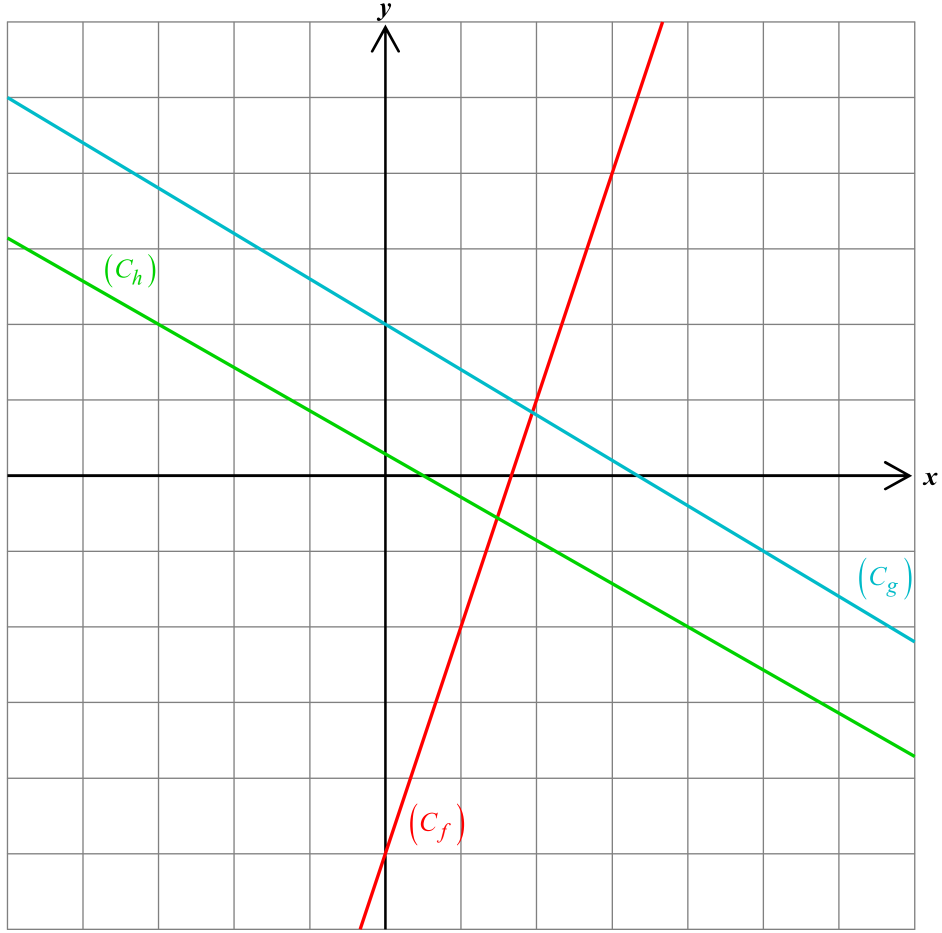
Les expressions bien droites

Le contexte

Un exercice sur les expressions des fonctions affines et les droites qui les représentent graphiquement.

L'énoncé

a) Sur le graphique ci-dessous, les droites (C_f), (C_g) et (C_h) représentent les fonctions affines *f*, *g* et *h*. Déterminer les expressions de ces trois fonctions.



b) Tracer sur le graphique ci-contre les courbes représentant les fonctions :

$$j(x) = -2x+3 \qquad\qquad k(x) = \frac{5x+4}{3}$$

Le corrigé

a) Leurs courbes représentatives étant des droites, les trois fonctions *f*, *g* et *h* sont affines, c'est-à-dire qu'une de leurs expressions est de la forme $a \times x + b$

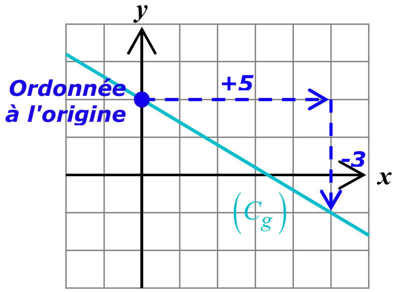
Pour la fonction *f* :

Son coefficient directeur *a* est égal à 3
Son ordonnée à l'origine *b* vaut -5

Donc, pour tout réel *x*, $f(x) = 3x-5$.

Pour la fonction *g* :

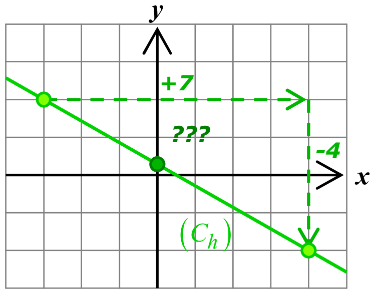
Son coefficient directeur $a = \dfrac{-3}{+5} = -\dfrac{3}{5}$
Son ordonnée à l'origine *b* vaut 2



Donc, pour tout réel *x*, $g(x) = -\dfrac{3}{5}x+2$.

Pour la fonction *h* :

Son coefficient directeur $a = \dfrac{-4}{+7} = -\dfrac{4}{7}$
On ne peut pas lire *b* directement



Donc *h* est de la forme $h(x) = -\dfrac{4}{7}x+b$

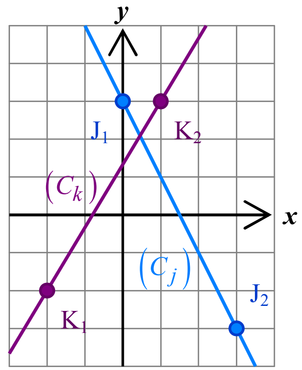
On détermine l'ordonnée à l'origine *b* en sachant

$$h(-3) = 2 \iff -\frac{4}{7}\times(-3)+b = 2 \iff b = 2-\frac{12}{7} = \frac{14}{7}-\frac{12}{7} = \frac{2}{7}$$

b) Les courbes (C_j) et (C_k) représentant les fonctions affines *j* et *k* sont deux droites se traçant avec deux paires de points.

(C_j) $\begin{cases} j(0) = -2\times 0+3 = 3 \Rightarrow J_1(0;3) \in (C_j) \\ j(3) = -2\times 3+3 = -6+3 = -3 \Rightarrow J_2(3;-3) \in (C_j) \end{cases}$

(C_k) $\begin{cases} k(-2) = \dfrac{5\times(-2)+4}{3} = \dfrac{-6}{3} = -2 \Rightarrow K_1(-2;-2) \in (C_k) \\ k(1) = \dfrac{5\times 1+4}{3} = \dfrac{9}{3} = 3 \Rightarrow K_2(1;3) \in (C_k) \end{cases}$



Les deux droites peuvent aussi être tracées à partir de l'ordonnée à l'origine b et du coefficient directeur a.

Parabole, pas de bol !

Le contexte

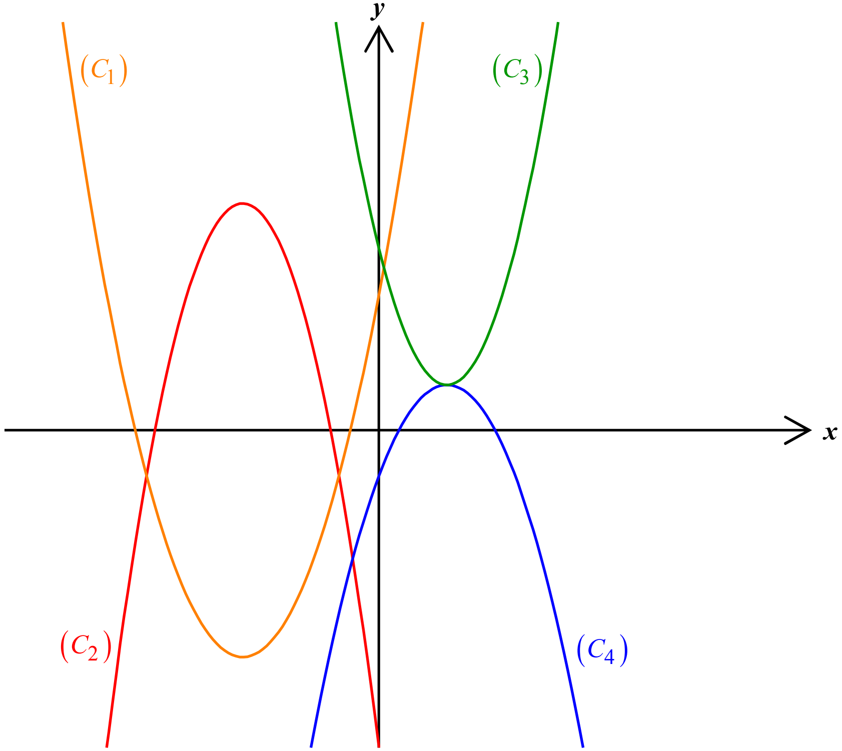
Un exercice d'association entre les fonctions du second degré et les paraboles qui les représentent graphiquement.

L'énoncé

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé quatre paraboles (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) représentant chacune l'une des quatre fonctions du second degré suivantes :

- $f(x) = -3x^2 - 12x - 5$
- $g(x) = -2x^2 + 4x - 1$
- $h(x) = 2x^2 + 8x + 3$
- $j(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Attribuer chaque courbe à la fonction du second degré qu'elle représente. Aucune justification n'est demandée.



Le corrigé

Les variations de la fonction du second degré $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ sont induites par le signe de son coefficient dominant a. De plus, elles s'inversent en $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Examinons les quatre fonctions du second degré proposées.

La fonction $f(x) = -3x^2 - 12x - 5$

Son coefficient dominant $a = -3$ est négatif.

Changement de variation : $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-12}{2\times(-3)} = -2$

La courbe (C_2) représente la fonction *f*.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f		↗	?	↘	

La fonction $g(x) = -2x^2 + 4x - 1$

Son coefficient dominant $a = -2$ est négatif.

Changement de variation : $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2\times(-2)} = 1$

La courbe (C_4) représente la fonction *g*.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g		↗	?	↘	

La fonction $h(x) = 2x^2 + 8x + 3$

Son coefficient dominant $a = 2$ est positif.

Changement de variation : $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{8}{2\times 2} = -2$

La courbe (C_1) représente la fonction *h*.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
h		↘	?	↗	

La fonction $j(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Son coefficient dominant $a = 3$ est positif.

Changement de variation : $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2\times 3} = 1$

La courbe (C_3) représente la fonction *j*.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
j		↘		↗	

Homo graphicus !

Le contexte

Un problème classique consistant en l'étude complète d'une fonction homographique.

L'énoncé

La fonction *f* dont la courbe représentative est notée $\left(C_f\right)$ est définie par :

$$f\left(x\right)=\frac{-3x+1}{2x-4}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction *f*.

b) Dresser le tableau de signe de $f\left(x\right)$

c) Les points A d'abscisse $x_{\text{A}}=-4$ et B d'ordonnée $y_{\text{B}}=-3$ appartiennent à $\left(C_f\right)$.
Déterminer par le calcul les ordonnée y_{A} et abscisse x_{B} de ces points.

d) Sur le graphique ci-contre, tracer la courbe $\left(C_f\right)$ représentant la fonction *f*.

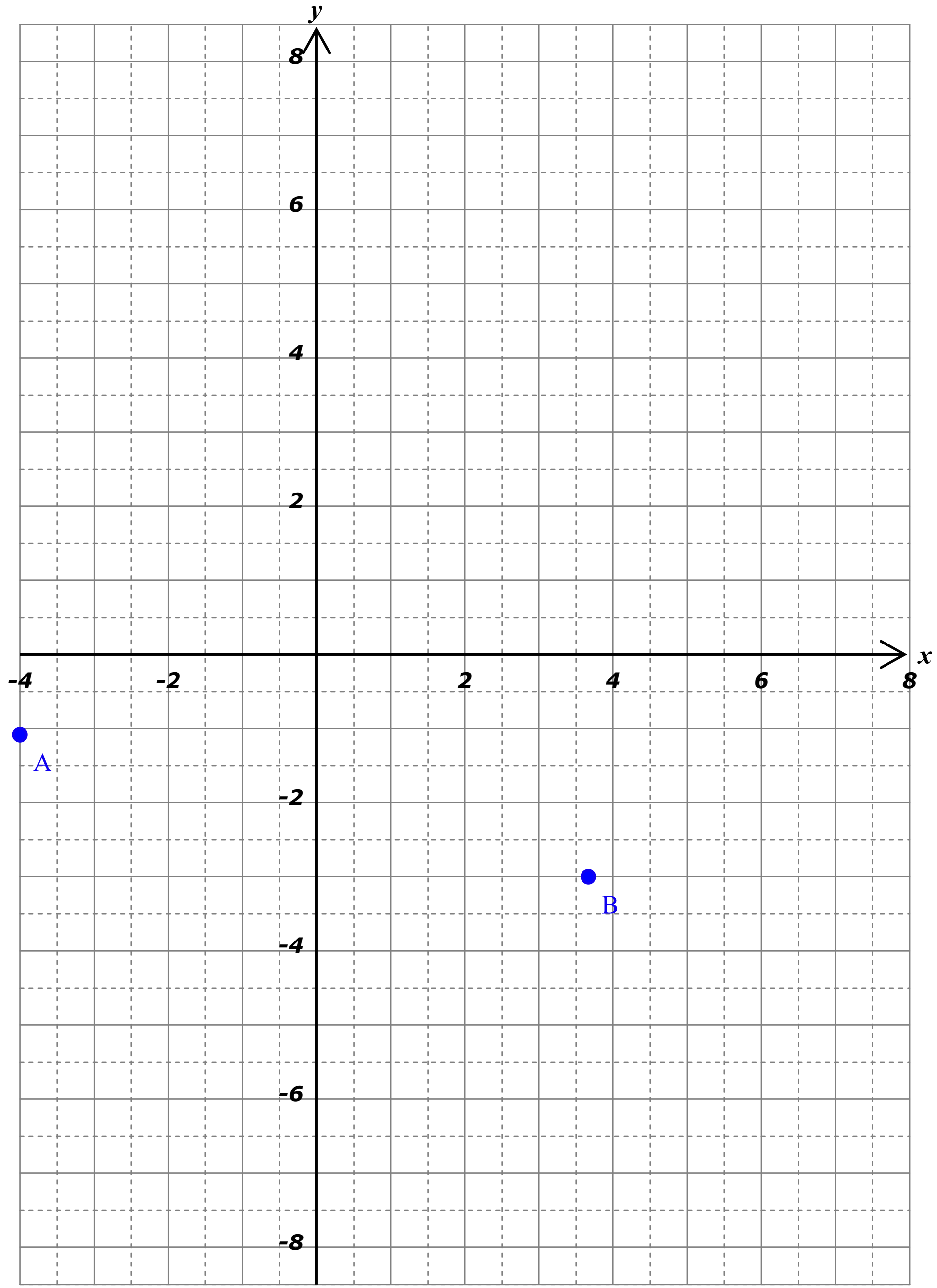
e) Soient α et β deux réels de l'intervalle $\left]-\infty;2\right[$ tels que $\alpha<\beta$.

1. Etablir que $f\left(\alpha\right)-f\left(\beta\right)=\dfrac{10\times\left(\alpha-\beta\right)}{\left(2\alpha-4\right)\times\left(2\beta-4\right)}$
2. En déduire le signe de la différence d'images $f\left(\alpha\right)-f\left(\beta\right)$.
3. Conclure en donnant le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $\left]-\infty;2\right[$.

f) Dans ces questions, α et β deux réels tels que $2<\alpha<\beta$.

1. Déterminer deux coefficients *a* et *b* tels que pour tout réel $x\in D_f$, on ait :
$$f\left(x\right)=a+\frac{b}{2x-4}$$
2. Au moyen d'un enchaînement d'inégalités partant de $2<\alpha<\beta$, établir le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $\left]2;+\infty\right[$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur son ensemble de définition.

g) Tracer sur le graphique la courbe $\left(C_g\right)$ représentant la fonction $g\left(x\right)=2x-1$
Résoudre graphiquement l'inéquation $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$.



Le corrigé

a) Les numérateur $-3x+1$ et dénominateur $2x-4$ constituant la fonction homographique *f* sont deux fonctions affines définies sur $\mathbb{R}$. Sauf que $f(x)$ est un quotient...

Le quotient $f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ Le dénominateur $2x-4$ est non nul

$\Leftrightarrow \quad 2x-4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \neq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$

<u>Conclusion :</u> tous les réels à l'exception de 2 ont une image par la fonction *f*.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

b) Examinons les facteurs affines apparaissant dans le quotient $f(x)$.

- Le numérateur $-3x+1$. Son coefficient directeur $a=-3$ est négatif.
  Il s'annule en : $-3x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{1}{3}$
- Le dénominateur $2x-4$. Son coefficient directeur $a=2$ est positif.
  Il s'annule en : $2x-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

Nous en déduisons que le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	$-\infty$		$1/3$		2		$+\infty$
$-3.x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$2.x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	

c) Comme le point A appartient à la courbe (C_f), alors ses coordonnées en vérifient l'équation. Par conséquent :

$$y_A = f(x_A) = \frac{-3\times x_A+1}{2\times x_A-4} = \frac{-3\times(-4)+1}{2\times(-4)-4} = \frac{12+1}{-8-4} = -\frac{13}{12}$$

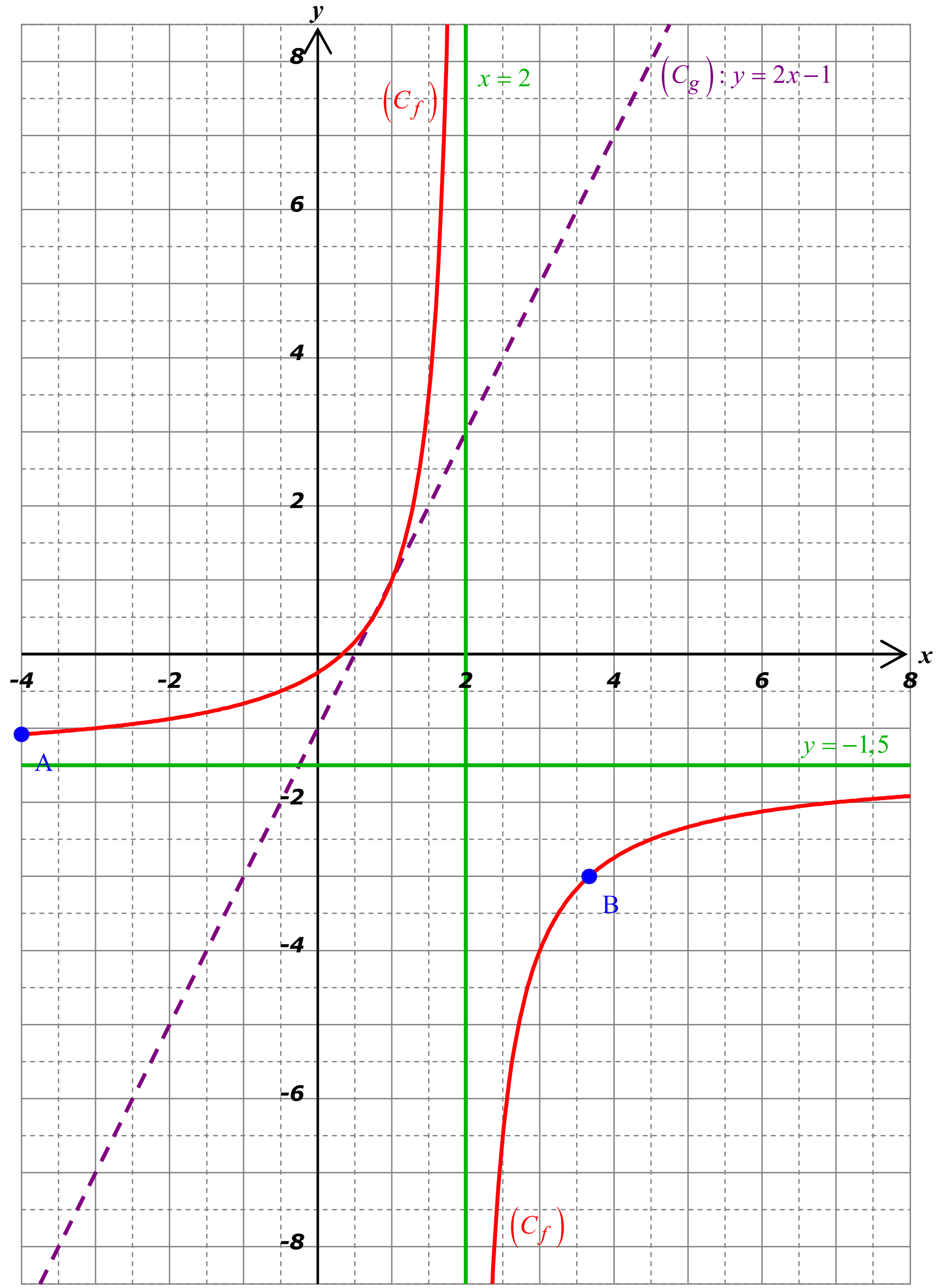
De même, les coordonnées de B vérifiant l'équation de la courbe (C_f), il vient :

$$y_B = f(x_B) \quad \Leftrightarrow \quad -3-\frac{-3x_B+1}{2x_B-4}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3\times(2x_B-4)-(-3x_B+1)}{2x_B-4}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overbrace{\frac{-3x_B+11}{2x_B-4}=0}^{\text{Un quotient est nul...}} \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{-3x_B+11=0}^{\text{Son numérateur l'est...}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{2x_B-4\neq 0}^{\text{Son dénominateur ne l'est pas...}}$$

$$-3x_B = -11 \qquad\qquad 2x_B \neq 4$$

$$x_B = \frac{11}{3} \qquad\qquad x_B \neq 2$$



d) La courbe (C_f) représentant la fonction homographique f est une hyperbole à deux branches s'appuyant sur les asymptotes verticale d'équation $x=2$ et horizontale d'équation $y=-1,5$.

e.1) Nous pouvons écrire :

$$f(\alpha)-f(\alpha)=\frac{-3\alpha+1}{2\alpha-4}-\frac{-3\beta+1}{2\beta-4}$$
$$=\frac{(-3\alpha+1)\times(2\beta-4)-(-3\beta+1)\times(2\alpha-4)}{(2\alpha-4)\times(2\beta-4)}$$
$$=\frac{\cancel{-6\alpha\beta}+12\alpha+2\beta-\cancel{4}+\cancel{6\alpha\beta}-12\beta-2\alpha+\cancel{4}}{(2\alpha-4)\times(2\beta-4)}$$
$$=\frac{10\alpha-10\beta}{(2\alpha-4)\times(2\beta-4)}=\frac{10\times(\alpha-\beta)}{(2\alpha-4)\times(2\beta-4)}$$

e.2) Examinons les facteurs composant le quotient $f(\alpha)-f(\beta)$.

- Le facteur 10 est...positif !
- Le facteur $\alpha-\beta$ est négatif car $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha-\beta<0$
- Le facteur $2\alpha-4$ est négatif car $\alpha<2 \overset{\times 2}{\Rightarrow} 2\alpha<4 \overset{-4}{\Rightarrow} 2\alpha-4<0$
- Le facteur $2\beta-4$ est aussi négatif car $\beta<2 \overset{\times 2}{\Rightarrow} \ldots \overset{-4}{\Rightarrow} 2\beta-4<0$

Par conséquent, le quotient $f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{10\times(\alpha-\beta)}{(2\alpha-4)\times(2\beta-4)}=\dfrac{\oplus\times\ominus}{\ominus\times\ominus}$ est négatif.

e.3) Récapitulons ce que nous ont appris les questions précédentes sur l'intervalle $]-\infty;2[$.

$$\underbrace{\text{Si}\quad \alpha<\beta \quad \underline{\text{alors}} \quad f(\alpha)-f(\beta)<0 \quad \text{soit} \quad f(\alpha)<f(\beta)}_{f \text{ conserve l'ordre sur l'intervalle }]-\infty;2[}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;2[$.

f.1) On veut écrire la fonction homographique f sous la forme décomposée.

$$f(x)=a+\frac{b}{2x-4}=\frac{a\times(2x-4)+b}{2x-4}=\frac{2ax-4a+b}{2x-4}$$

$$\frac{\boxed{-3}\times x+\boxed{1}}{2x-4}=\frac{\boxed{2a}\times x+\boxed{(b-4a)}}{2x-4}$$

En identifiant les coefficients de même degré des numérateurs, il vient alors :

Egalité des coefficients en x : $-3 = 2a \Leftrightarrow a = -3/2 = -1,5$

Egalité des coefficients constants : $1 = b - 4a \Leftrightarrow 1 = b + 6 \Leftrightarrow b = -5$

Nous en concluons :

$$f(x) = \frac{-3x+1}{2x-4} = -1,5 - \frac{5}{2x-4}$$

Une autre méthode consiste à extraire le dénominateur de chacun des termes du numérateur.

$$f(x) = \frac{\overbrace{-3x}^{\text{Combien de fois } 2x-4\text{ ?}} \quad +1}{2x-4} = \frac{\overbrace{-1,5\times(2x-4)-6}^{-3x}+1}{2x-4} = -1,5\times\frac{\cancel{(2x-4)}}{\cancel{2x-4}} + \frac{-5}{2x-4}$$

f.2) L'enchaînement d'inégalités demandé est le suivant :

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & < & \alpha & < & \beta \\
\times 2 & 4 & < & 2\alpha & < & 2\beta \\
-4 & 0 & < & 2\alpha-4 & < & 2\beta-4 \\
\text{Inverse} & & & \dfrac{1}{2\alpha-4} & > & \dfrac{1}{2\beta-4} \\
\times(-5) & & & \dfrac{-5}{2\alpha-4} & < & \dfrac{-5}{2\beta-4} \\
-1,5 & & & \underbrace{-1,5+\dfrac{-5}{2\alpha-4}}_{f(\alpha)} & < & \underbrace{-1,5+\dfrac{-5}{2\beta-4}}_{f(\beta)}
\end{array}$$

Deux réels positifs

La fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[

La fonction f conserve l'ordre sur]2 ; +∞[

Conclusion : la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$-1,5$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-1,5$

g) La courbe (C_g) représentant la fonction affine $g(x) = 2x-1$ est une droite de coefficient directeur 2 et passant par le point de coordonnées $(0;-1)$.

Graphiquement, on trouve que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty;2[$.

Variation totale !

Le contexte

Dans cet exercice, il s'agit d'établir la variation d'une fonction sur un intervalle au moyen d'un enchaînement d'inégalités en s'appuyant sur les variations des fonctions de référence.

L'énoncé

Au moyen d'un enchaînement d'inégalités, établir le sens de variation de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{12-3x^2}}$$

sur l'intervalle $]-2;0[$.

Le corrigé

Soient α et β deux réels de l'intervalle $]-2;0[$ tels que $\alpha < \beta$.

Comment leurs images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont-elles rangées ? Nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & -2 & < & \alpha & < & \beta & < & 0 \\
\text{Carré} & 4 & > & \alpha^2 & > & \beta^2 & > & 0 \\
\times(-3) & -12 & < & -3\alpha^2 & < & -3\beta^2 & < & 0 \\
+12 & 0 & < & 12-3\alpha^2 & < & 12-3\beta^2 & < & 12 \\
\text{Racine} & 0 & < & \sqrt{12-3\alpha^2} & < & \sqrt{12-3\beta^2} & < & \sqrt{12} \\
\text{Inverse} & & & \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{12-3\alpha^2}}}_{f(\alpha)} & > & \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{12-3\beta^2}}}_{f(\beta)} & &
\end{array}$$

Décroissante sur]-∞;0[

Deux réels négatifs

Croissante sur]0;+∞[

Deux réels positifs

Décroissante sur]0 ;+∞[

La fonction f change l'ordre sur]-2 ; 0[

Conclusion : la fonction f est (strictement) décroissante sur l'intervalle $]-2;0[$.

Géométrie analytique

Problème analytique !

Le contexte

Un problème qui recourt à tous les outils de la géométrie analytique (calcul sur les coordonnées, déterminant, norme d'un vecteur) à l'exception des équations de droites.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ où une unité graphique vaut un centimètre. Par défaut, les unités de longueur sont des centimètres.
Dans ce repère, on a positionné les points :

$$A(3;-4) \quad B(-4;1) \quad C(2;6) \quad E(-1,6;3)$$

a) Le point E appartient-il à la droite (BC) ? On justifiera sa réponse.

b) Le point F est le quatrième sommet du parallélogramme AEBF.
1. Déterminer les coordonnées du point F.
2. Placer au compas le point F sur la figure ci-contre.

c) Déterminer les coordonnées du point I qui est le milieu du segment [AC].

d) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$3\times\overrightarrow{BG}+4\times\overrightarrow{CG}=2\times\overrightarrow{CA}$$

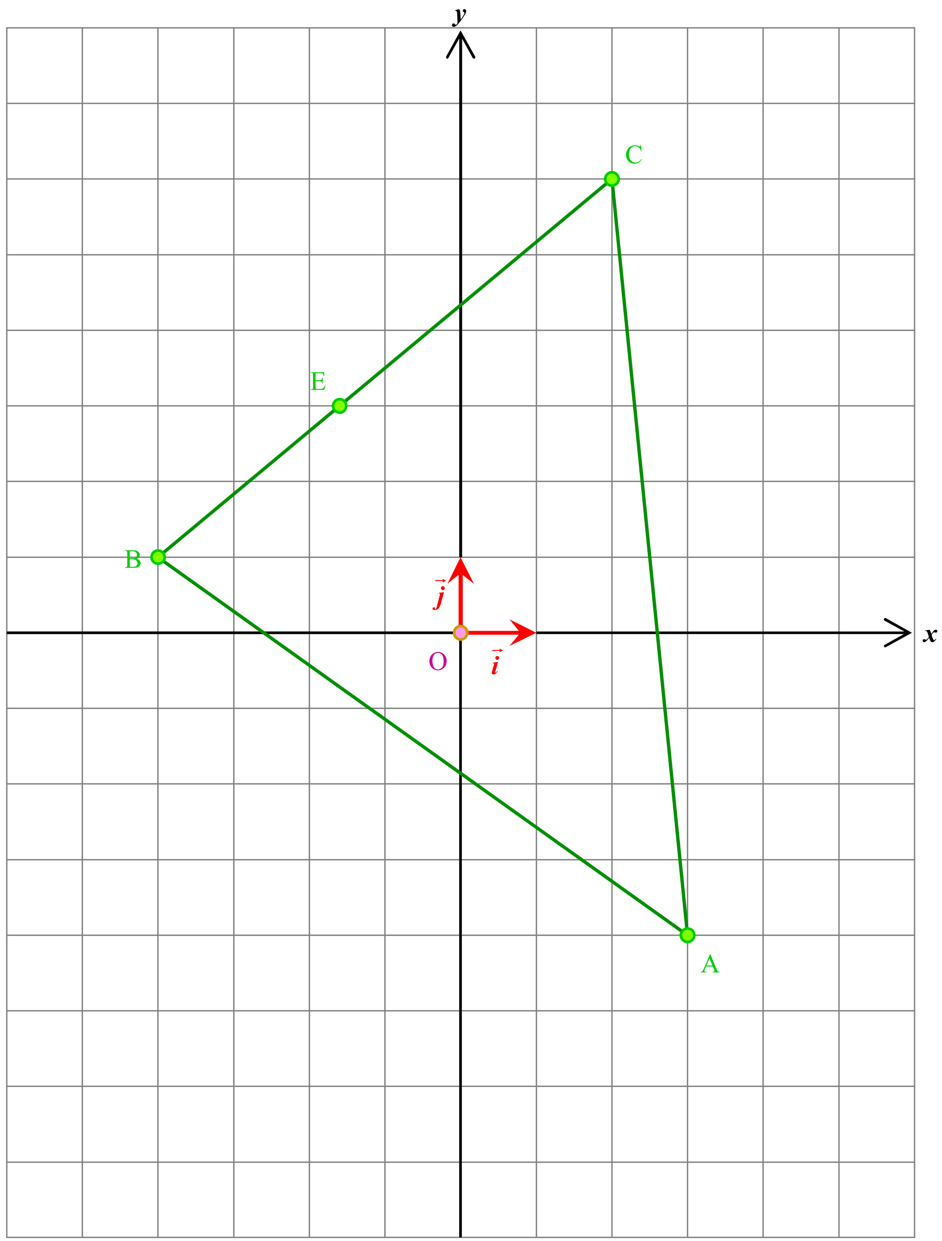
1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G.
2. Vérifier que G est le point d'intersection des droites (AE) et (BI).
3. Placer précisément le point G.

e) Déterminer les coordonnées du point J qui est l'intersection de la droite (AB) et de l'axe des abscisses (Ox).

f) Les points O et I appartiennent-ils au même cercle de centre A ? On justifiera sa réponse.

g) Déterminer les coordonnées du point K qui est l'intersection du cercle Γ de centre C passant par O et du segment [BI].

h) L est un point de l'axe des ordonnées (Oy) tel que le triangle ABL soit rectangle en B. Déterminer les coordonnées du point L.



Le corrigé

a) Les vecteurs $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1,6-(-4)=2,4\\3-1=2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2-(-4)=6\\6-1=5\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix}2,4 & 6\\2 & 5\end{vmatrix}=2,4\times5-2\times6=12-12=0$$

Comme leur déterminant est nul, les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
Donc les points B, C et E sont alignés. La réponse à la question est affirmative.

b) Le quatrième sommet F du parallélogramme AEBF vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EB}\Leftrightarrow\overbrace{\begin{pmatrix}x_F-3\\y_F-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2,4\\-2\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}\Leftrightarrow\overbrace{x_F-3=-2,4}^{\text{Abscisses égales}}\ \text{et}\ \overbrace{y_F+4=-2}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$x_F=0,6 \qquad y_F=-6$$

<u>Conclusion :</u> le point F a pour coordonnées $(0,6;-6)$. Sa construction précise se fait au compas.

c) Comme I est le milieu du segment [AC], ses coordonnées sont données par :

$$x_I=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}=2,5 \qquad \text{et} \qquad y_I=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{(-4)+6}{2}=\frac{2}{2}=1$$

<u>Conclusion :</u> le milieu I a pour coordonnées $(2,5;1)$.

d.1) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$3\times\overrightarrow{BG}+4\times\overrightarrow{CG}=2\times\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow 3\times\begin{pmatrix}x_G+4\\y_G-1\end{pmatrix}+4\times\begin{pmatrix}x_G-2\\y_G-6\end{pmatrix}=2\times\begin{pmatrix}1\\-10\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3x_G+12\\3y_G-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4x_G-8\\4y_G-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-20\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\overbrace{\begin{pmatrix}7x_G+4\\7y_G-27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-20\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow\overbrace{7x_G+4=2}^{\text{Abscisses égales}}\ \text{et}\ \overbrace{7y_G-27=-20}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$7x_G=-2 \qquad 7y_G=7$$

$$x_G=-\frac{2}{7} \qquad y_G=1$$

<u>Conclusion :</u> le point G a pour coordonnées $\left(-\frac{2}{7};1\right)$.

d.2) Le point G est aligné avec les points B et I car ils ont la même ordonnée 1.

➲ Pour savoir si le point G appartient aussi la droite (AE), regardons si les vecteurs $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}-2/7-3=-23/7\\1-(-4)=5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1,6-3=-4,6\\3-(-4)=7\end{pmatrix}$ sont colinéaires en calculant leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AE}\right)=\begin{vmatrix}-23/7 & -4,6\\5 & 7\end{vmatrix}=\frac{-23}{\cancel{7}}\times\cancel{7}-5\times(-4,6)=-23+23=0$$

Comme leur déterminant est nul, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.
Par conséquent, le point G appartient bien à la droite (AE).

d.3) On place précisément G comme étant le point d'intersection des droites (BI) et (AE).

e) D'abord, le point J appartenant à l'axe (Ox), son ordonnée y_J est nulle.

Ensuite, le point J faisant partie de la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}x_J-3\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-7\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Par conséquent, leur déterminant est nul. Il vient alors :

$$\det\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x_J-3 & -7\\4 & 5\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow(x_J-3)\times5-4\times(-7)=0$$

$$\Leftrightarrow 5x_J-15+28=0\Leftrightarrow 5x_J=-13\Leftrightarrow x_J=-\frac{13}{5}=-2,6$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point J sont $(-2,6;0)$

f) Pour savoir si les points O et I appartiennent au même cercle de centre A, calculons les distances AO et AI.

Comme $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ alors $AO=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\text{ cm}$

Comme $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-0,5\\5\end{pmatrix}$ alors $AI=\sqrt{(-0,5)^2+5^2}=\sqrt{0,25+25}=\sqrt{25,25}\text{ cm}$

<u>Conclusion :</u> leurs distances vis-à-vis du centre A étant différentes, les points O et I ne se trouvent pas sur le même cercle de centre A.

g) Le point K appartenant au segment [BI], son ordonnée y_K est égale à 1.

Ensuite, K appartient aussi cercle Γ dont nous ignorons le rayon. Calculons le !

$$\text{Rayon de } \Gamma = CO = \sqrt{(0-2)^2+(0-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

Comme K fait partie du cercle Γ de centre C et de rayon $\sqrt{40}$ cm, alors :

$$CK = \sqrt{40} \Rightarrow CK^2 = 40 \Rightarrow \left(\sqrt{(x_K-2)^2+(1-6)^2}\right)^2 = 40$$

$$\Rightarrow (x_K-2)^2+25 = 40$$

$$\Rightarrow (x_K-2)^2 = 15 \Rightarrow x_K - 2 = \sqrt{15} \quad \underline{\text{ou}} \quad x_K-2 = -\sqrt{15}$$

$$x_K = 2+\sqrt{15} \qquad x_K = 2-\sqrt{15}$$

K étant sur le segment [BI], son abscisse x_K est comprise entre $x_B = -4$ et $x_I = 2,5$.

Seule la seconde solution trouvée vérifie cette contrainte.

<u>Conclusion :</u> le point K a pour coordonnées $\left(2-\sqrt{15};1\right)$.

h) D'abord, le point L faisant partie de l'axe (Oy), son abscisse x_L est nulle.

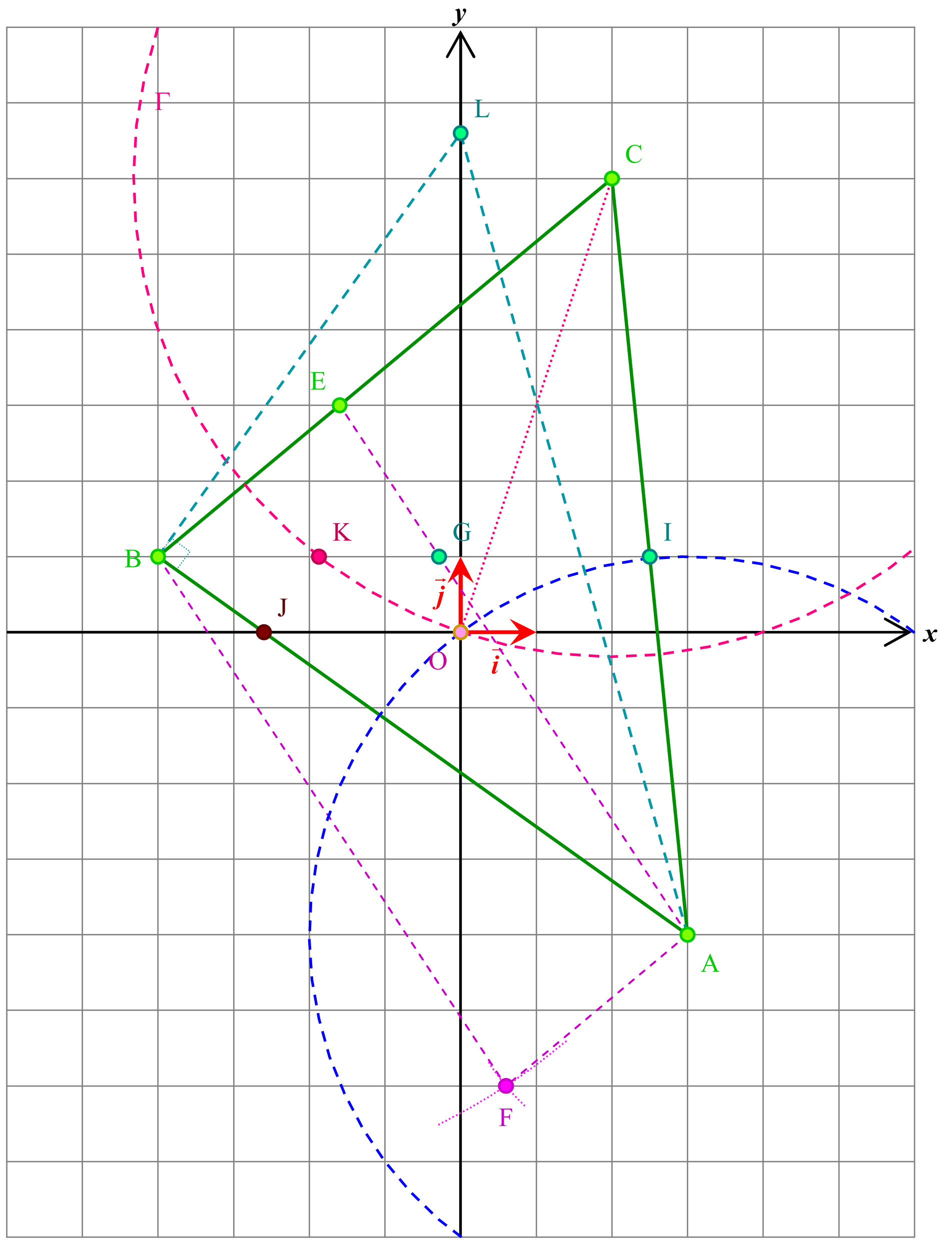
Ensuite, le triangle ABL étant rectangle en B, les vecteurs $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}4\\y_L-1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux. Par conséquent, leurs coordonnées vérifient l'égalité :

$$7\times 4+(-5)\times(y_L-1) = 0 \Leftrightarrow 28-5y_L+5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5y_L = -33 \Leftrightarrow y_L = \frac{-33}{-5} = \frac{33}{5} = 6,6$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point L sont $(0;6,6)$.

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-dessous



Problème de droites !

Le contexte

Un problème de fin de chapitre qui récourt à tous les outils de la géométrie analytique, y compris les équations de droites.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ où une unité graphique vaut un centimètre. Dans ce repère, on a positionné les points :

$$\text{A}(-2;0) \qquad \text{B}(5;-2) \qquad \text{C}(4;4) \qquad \text{G}(2;1)$$

Tous les constructions et positionnements se feront au compas, à l'équerre et à la règle.

a) Résoudre les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues :

$$(S)\begin{cases} 2x+7y=20 & \textbf{\textit{(1)}} \\ -x+4y=2 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases} \qquad (S')\begin{cases} 9x-15y=13 & \textbf{\textit{(1)}} \\ 12x-20y=15 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

b) Le triangle ABC est-il isocèle en A ? On justifiera sa réponse.

c) On appelle E le milieu du segment [AC].

1. Calculer les coordonnées de E.
2. Démontrer la relation vectorielle $\overrightarrow{\text{BG}}=\frac{3}{4}\times\overrightarrow{\text{BE}}$.
3. Placer précisément le point E.

d) Le point F est défini par la relation vectorielle :

$$3\times\overrightarrow{\text{AF}}+2\times\overrightarrow{\text{BF}}=\vec{\text{o}}$$

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point F.
2. Vérifier que F appartient à la droite (CG).
3. Placer précisément le point F.

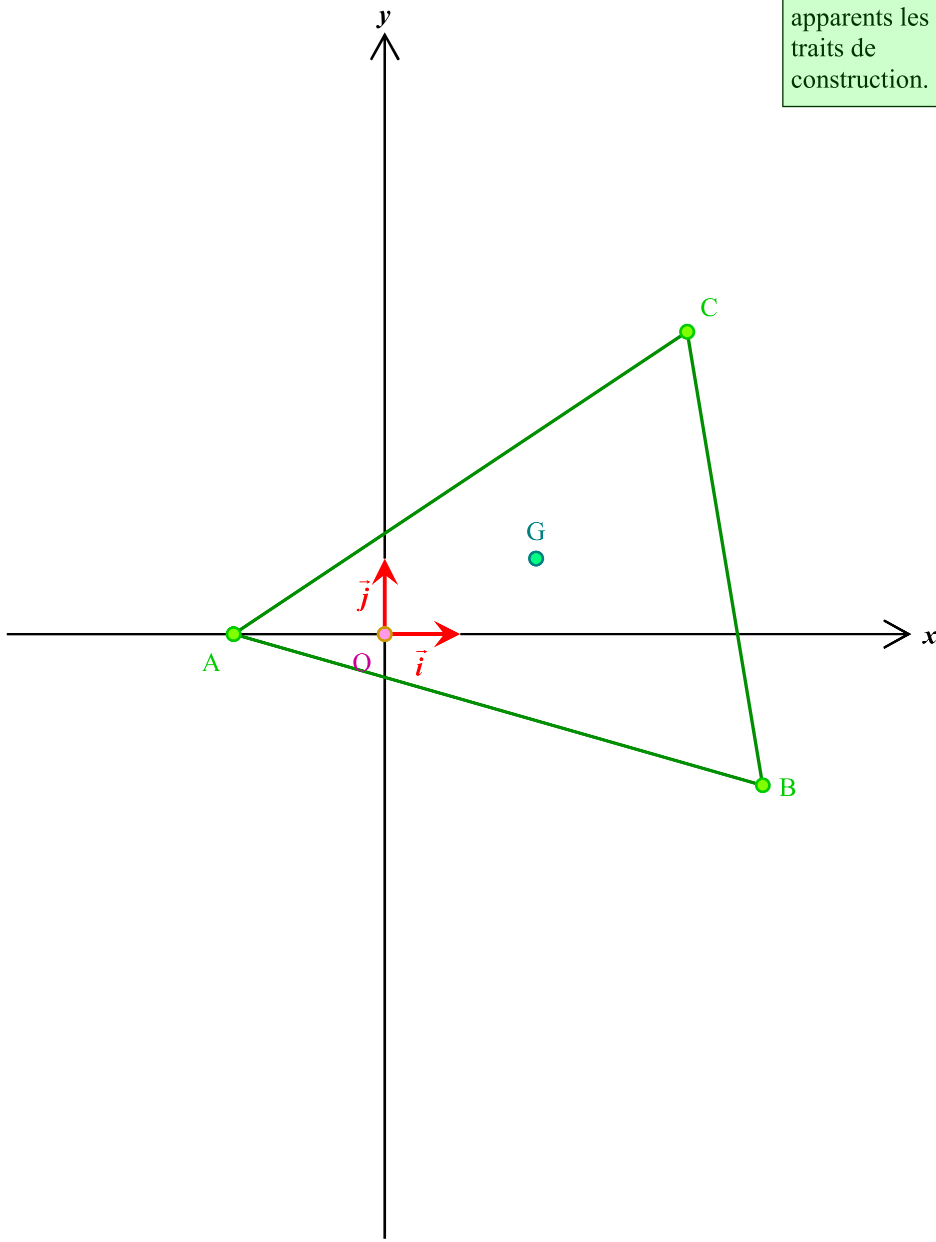
e) On appelle Δ la droite d'équation $2x+7y=20$.

1. Placer précisément à l'équerre ou au compas le point K de coordonnées $(-4;4)$.
2. Le point K appartient-il à la droite Δ ? On justifiera sa réponse.
3. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ.
4. Justifier que les droites (AB) et Δ sont parallèles.
5. Construire au compas la droite Δ.

f) On appelle D le point d'intersection des droites (AG) et Δ.

1. Déterminer une équation de la droite (AG).
2. En déduire les coordonnées du point D.
3. Vérifier que les points B, C et D sont alignés.

On laissera apparents les traits de construction.



Le corrigé

a) D'abord, regardons les rapports des coefficients du système (S).

$$\overbrace{\frac{a}{a'}=\frac{2}{-1}=-2}^{\text{Rapport des coefficients en } x} \qquad \overbrace{\frac{b}{b'}=\frac{7}{4}=1,75}^{\text{Rapport des coefficients en } y} \qquad \overbrace{\frac{c}{c'}=\frac{20}{2}=10}^{\text{Rapport des coefficients constants}}$$

Comme les coefficients en x et y ne sont pas proportionnels, alors le système (S) admet une unique solution que nous allons déterminer par...substitution.

On peut aussi procéder par combinaisons linéaires.

A partir de l'équation ***(2)***, on exprime l'inconnue x en fonction de y.

$$-x+4y=2 \iff x=4y-2$$

Puis, on remplace dans l'équation ***(1)*** l'inconnue x par ce qu'elle vaut en y.

$$2x+7y=20 \iff 2\times(4y-2)+7y=20 \iff 8y-4+7y=20$$

$$\iff 15y=24 \iff y=\frac{24}{15}=\frac{8}{5}=1,6$$

Il vient alors pour l'autre inconnue :

$$x=4y-2=4\times 1,6-2=6,4-2=4,4=\frac{22}{5}$$

Conclusion : le système (S) admet pour seule solution $(4,4;1,6)$.

On recherche une proportionnalité...

➲ Effectuons les rapports de coefficients du système (S').

$$\overbrace{\frac{a}{a'}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0,75}^{\text{Rapport des coefficients en } x} \qquad \overbrace{\frac{b}{b'}=\frac{-15}{-20}=\frac{3}{4}=0,75}^{\text{Rapport des coefficients en } y} \qquad \overbrace{\frac{c}{c'}=\frac{13}{15}\neq\frac{3}{4}}^{\text{Rapport des coefficients constants}}$$

Conclusion : comme seuls ses coefficients en x et y sont proportionnels, alors le système (S') n'admet aucune solution.

b) Pour savoir si le triangle ABC est isocèle en A, calculons les longueurs AB et AC.

Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ alors $AB=\sqrt{7^2+(-2)^2}=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}\approx 7,28$ cm

Comme $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ alors $AC=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}\approx 7,21$ cm

Conclusion : comme les distances AB et AC ne sont pas égales, alors le triangle ABC n'est pas isocèle en A.

c.1) E étant le milieu du segment [AC], ses coordonnées sont données par :

$$x_E=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{(-2)+4}{2}=\frac{2}{2}=1 \quad \text{et} \quad y_E=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{0+4}{2}=\frac{4}{2}=2$$

c.2) Les coordonnées des deux vecteurs sont $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$.

On observe :

$$\frac{3}{4}\times\overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\times\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cancel{4}\times 3/\cancel{4}\\ \cancel{4}\times 3/\cancel{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=\overrightarrow{BG}$$

L'égalité demandée est démontrée !

c.3) Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BE}$ étant colinéaires, les points B, G et E sont alignés.
Ainsi, E se place précisément comme étant l'intersection des droites (AC) et (BG).

d.1) Déterminons les coordonnées du point F en traduisant sous forme de coordonnées la relation vectorielle le définissant.

Dans chaque coordonnée des vecteurs : ***Arrivée - Départ***

$$3\times\overrightarrow{AF}+2\times\overrightarrow{BF}=\vec{o} \iff 3\times\begin{pmatrix}x_F+2\\x_F\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}x_F-5\\y_F+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}3x_F+6\\3y_F\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x_F-10\\2y_F+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \overbrace{\begin{pmatrix}5x_F-4\\5y_F+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \iff \overbrace{5x_F-4=0}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{5y_F+4=0}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$x_F=\frac{4}{5} \qquad y_F=-\frac{4}{5}$$

Conclusion : le point F a pour coordonnées $(0,8;-0.8)$

d.2) Pour savoir si les trois points C, G et F sont alignés, calculons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-3,2\\-4,8\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CF}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -3,2\\-3 & -4,8\end{vmatrix}=(-2)\times(-4,8)-(-3)\times(-3,2)=-9,6+9,6=0$$

Conclusion : leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires. Donc le point F appartient bien à la droite (CG).

d.3) Le point F se place précisément comme étant le point d'intersection des droites (AB) et (CG). Ou alors à la règle graduée, au compas ou à l'équerre.

e.1) D'abord, on place le point $\mathrm{I}(-4;0)$ à 4 centimètres du point O sur l'axe $\left(\mathrm{O};\vec{i}\right)$.

Puis, on positionne le point $\mathrm{J}(0;4)$ à 4 centimètre du point O sur l'axe $\left(\mathrm{O};\vec{j}\right)$.

Le point K se construit alors soit au compas comme étant le quatrième sommet d'un parallélogramme, soit à l'équerre comme étant le quatrième sommet du carré IOJK en traçant deux perpendiculaires aux axes.

e.2) Regardons si les coordonnées du point K vérifient l'équation de la droite Δ.

$$2x_{\mathrm{K}}+7y_{\mathrm{K}}=2\times(-4)+4\times 7=-8+28=20$$

<u>Conclusion :</u> ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point K appartient à la droite Δ.

e.3) D'après son équation $\boxed{2}\times x+\boxed{7}\times y=20$, un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-\boxed{7}\\ \boxed{2}\end{pmatrix}$.

e.4) Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont celles du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

Les droites Δ et (AB) partageant le même vecteur directeur $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, elles sont parallèles.

e.5) La parallèle Δ se construit en construisant au compas le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ au départ de K.

f.1) La droite (AG) est défini par son point A et son vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(x;y)\in(\mathrm{AG}) &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x+2\\ y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AG}}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \overbrace{\begin{vmatrix}x+2 & 4\\ y & 1\end{vmatrix}=0}^{\substack{\text{On écrit}\\ \text{le déterminant de } \overrightarrow{\mathrm{AM}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{AG}} \text{ avec leurs coordonnées}}} \Leftrightarrow (x+2)\times 1-y\times 4=0\\ &\Leftrightarrow x+2-4y=0 \Leftrightarrow x-4y+2=0\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> une équation de la droite de la droite (AG) est $x-4y+2=0$.

f.2) Le point D appartenant aux droites Δ et (AG), ses coordonnées en vérifient leurs deux équations :

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{D}\in\Delta &\Leftrightarrow 2x_{\mathrm{D}}+7y_{\mathrm{D}}=20\\ \mathrm{D}\in(\mathrm{AG}) &\Leftrightarrow x_{\mathrm{D}}-4y_{\mathrm{D}}+2=0 \Leftrightarrow -x_{\mathrm{D}}+4y_{\mathrm{D}}=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{Le couple } (x_{\mathrm{D}};y_{\mathrm{D}}) \text{ est solution de } (S).$$

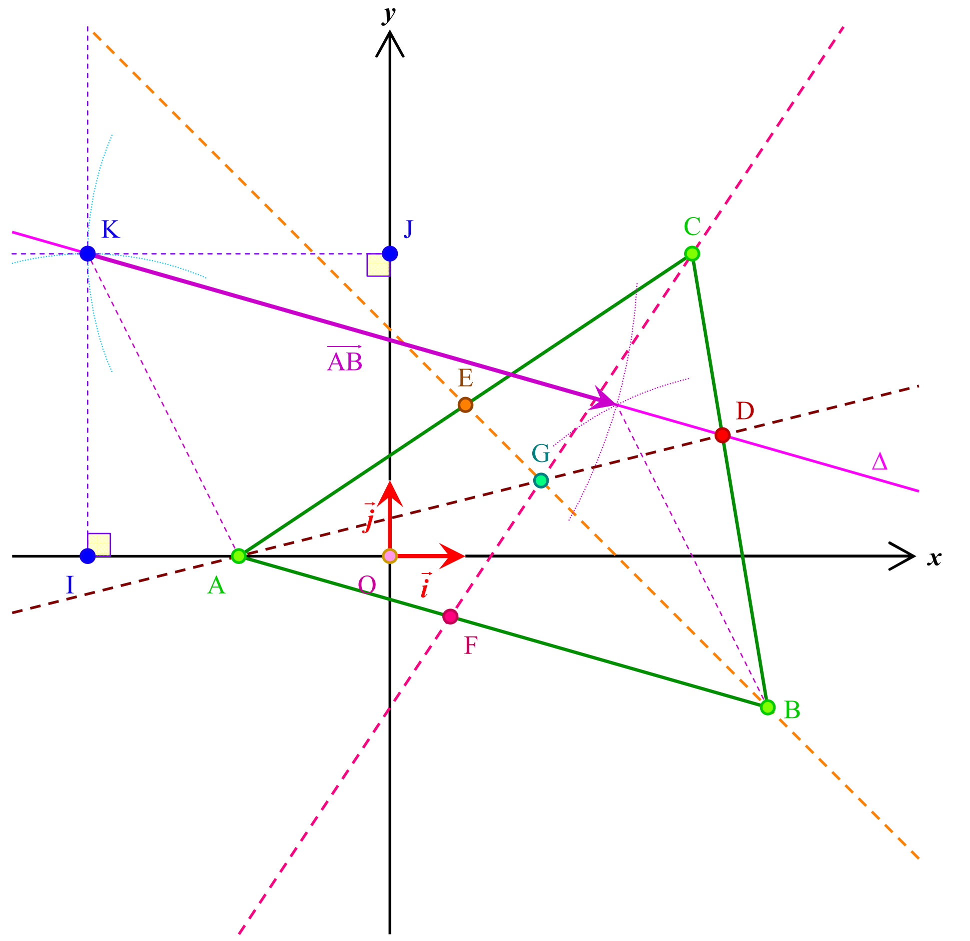
<u>Conclusion :</u> d'après la question **a**, le point D a pour coordonnées $(4,4;1,6)$.

f.3) Calculons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)=\begin{vmatrix}-1 & -0,6\\ 6 & 3,6\end{vmatrix}=(-1)\times 3,6-6\times(-0,6)=-3,6+3,6=0$$

<u>Conclusion :</u> leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ sont colinéaires. Donc le point D fait partie de la droite (BC).

A l'issue de l'aventure, la figure est la suivante :



Géométrie classique

Première vectorielle

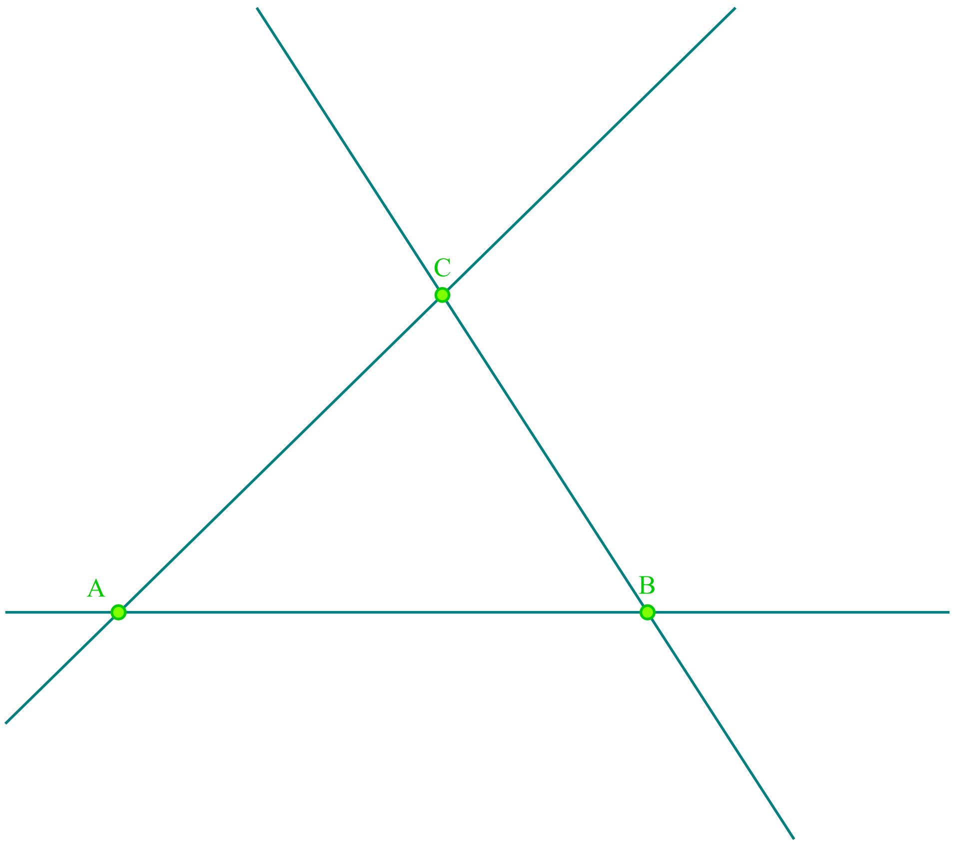
Le contexte

Un exercice basique de calcul vectoriel et de placement de points.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle tel que :

AB = 7cm AC = 6cm BC = 5cm



a) Construire les points D et I définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\times\overrightarrow{AC}$$

b) Le point E est défini par la relation vectorielle :

$$3\times\overrightarrow{BE} + 2\times\overrightarrow{CE} = \vec{0}$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Placer le point E sur la figure.

c) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{9}\times\overrightarrow{AE}$$

1. Placer le point G sur la figure.
2. Etablir la relation vectorielle $4\times\overrightarrow{AG} + 5\times\overrightarrow{EG} = \vec{0}$
3. Démontrer la relation vectorielle : $4\times\overrightarrow{AG} + 3\times\overrightarrow{BG} + 2\times\overrightarrow{CG} = \vec{0}$
   Indication : on pourra introduire le point E dans deux des trois vecteurs...

Le corrigé

a) Le point D est le quatrième sommet du parallélogramme CABD.

Le point I se situe sur la parallèle à la droite (AC) passant par B à $\frac{2}{3}\times 6 = 4$ cm de B.

b) Le point E est défini par l'égalité vectorielle :

$$3\times\overrightarrow{BE} + 2\times\overrightarrow{CE} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\times\overrightarrow{BE} + \underbrace{2\times\overrightarrow{CB} + 2\times\overrightarrow{BE}}_{2\times\overrightarrow{CE}} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\times\overrightarrow{BE} = 2\times\overrightarrow{BC}$$

C'est la relation de Chasles dans le sens décomposition...

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{BE} = \frac{2}{5}\times\overrightarrow{BC}}$$

Conclusion : le point E se trouve aux deux cinquièmes du segment [BC] à partir de B.

c.1) Le point G se situe aux cinq neuvième du segment [AE] à partir de A.

c.2) Modifions la relation vectorielle définissant le point G.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{5}{9}\times\overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} - \frac{5}{9}\times\overrightarrow{AE} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} \overbrace{- \frac{5}{9}\times\overrightarrow{AG} - \frac{5}{9}\times\overrightarrow{GE}}^{-5/9\times\overrightarrow{AE}\text{ par Chasles !}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}\times\overrightarrow{AG} + \frac{5}{9}\times\overrightarrow{EG} = \vec{0} \xrightarrow{\times 9} \boxed{4\times\overrightarrow{AG} + 5\times\overrightarrow{EG} = \vec{0}}$$

c.3) Pour établir la relation proposée, nous allons partir de la somme de gauche et prouver qu'elle est égale au vecteur nul en introduisant le point E dans les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CG}$.

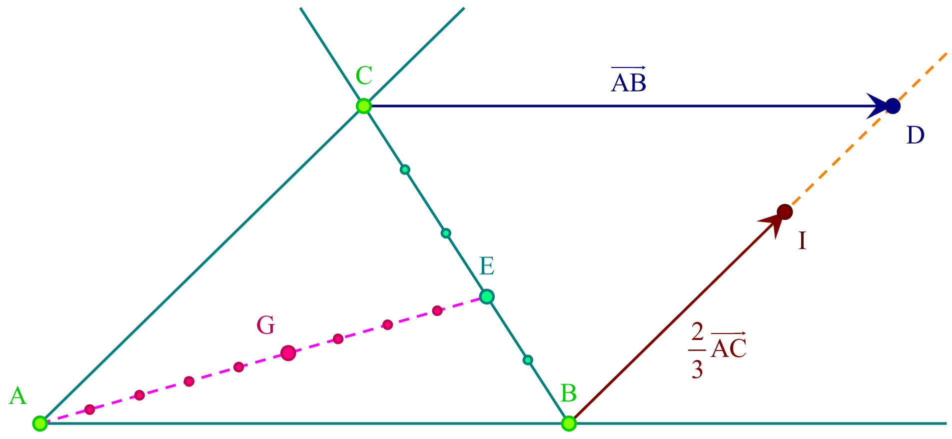
$$4\times\overrightarrow{AG}+3\times\overrightarrow{BG}+2\times\overrightarrow{CG} = 4\times\overrightarrow{AG}+\overbrace{3\times\overrightarrow{BE}+3\times\overrightarrow{EG}}^{=3\times\overrightarrow{BC}}+\overbrace{2\times\overrightarrow{CE}+2\times\overrightarrow{EG}}^{=2\times\overrightarrow{CG}}$$

Une double décomposition avec Chasles...

$$= \underbrace{4\times\overrightarrow{AG}+5\times\overrightarrow{EG}}_{\substack{=\vec{o}\\ \text{d'après } \mathbf{c.2}}} + \underbrace{3\times\overrightarrow{BE}+2\times\overrightarrow{CE}}_{\substack{=\vec{o}\\ \text{d'après la relation définissant E}}}$$

$$= \vec{o}+\vec{o}=\vec{o}$$

A la fin de l'exercice, la figure est la suivante :



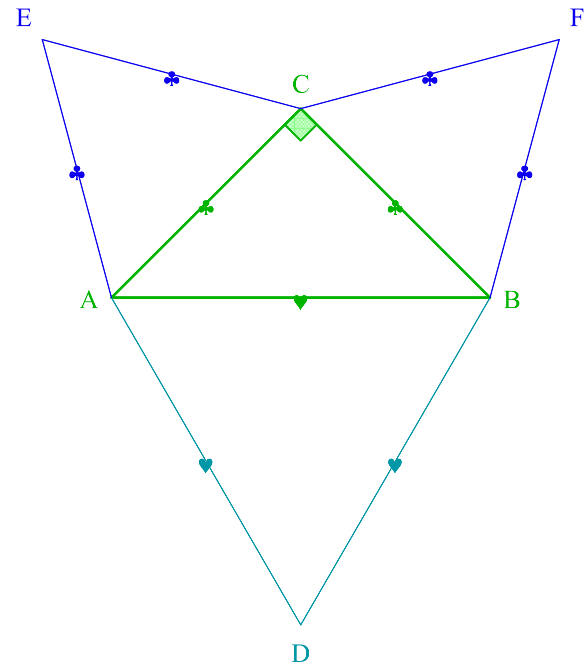
Tourcoti, tournicota, je terminais la tête en bas !

Le contexte

Un exercice franchement hors programme mais très simple sur les angles orientés et le radian. Ces deux notions relativement simples vues en première S sont néanmoins utiles pour introduire de manière confortable les fonctions cosinus et sinus.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le triangle ABC est isocèle rectangle en C, alors que les triangles ABD, ACE et BCF sont tous trois équilatéraux.



Donner une mesure exprimée en radians des angles orientés suivants.

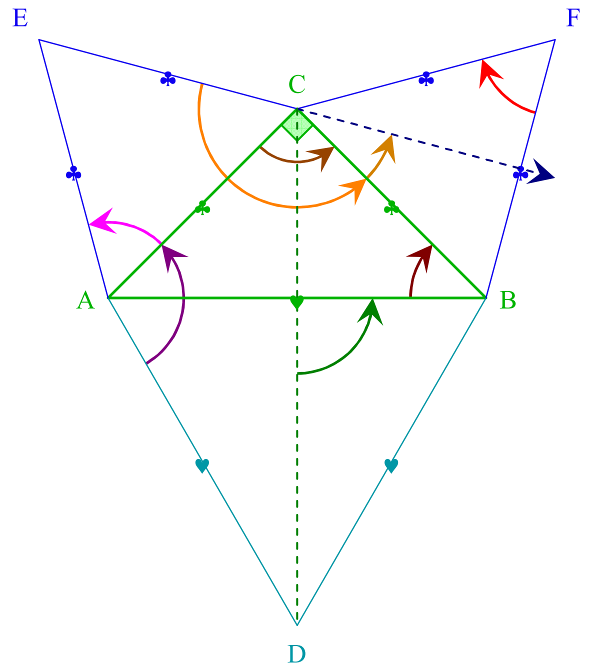
$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=$	$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=$	$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=$	$\left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FC}\right)=$
$\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)=$	$\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}\right)=$	$\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{EC}\right)=$	$\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}\right)=$

Le corrigé

Avant toutes choses, rappelons qu'un angle plat, c'est-à-dire de 180°, mesure π radians.

Les angles du triangle isocèle rectangle ABC mesurent soit $45° = \frac{\pi}{4}$, soit $90° = \frac{\pi}{2}$.

Les angles des triangles équilatéraux mesurent tous $60° = \frac{\pi}{3}$.



Ces choses ayant été dites, nous pouvons écrire :

$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right) = +60° = +\frac{\pi}{3} \qquad \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = +90° = +\frac{\pi}{2}$$

$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = -45° = -\frac{\pi}{4} \qquad \left(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FC}\right) = -60° = -\frac{\pi}{3}$$

Les deux angles suivants se trouvent par bonds...

$$\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

L'angle $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{EC}\right)$ est le complémentaire sur un angle plat de l'angle $\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}\right)$.

$$\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{EC}\right) = \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}\right) + \left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EC}\right) = -\frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{\pi}{6}$$

Les points C et D appartenant à la médiatrice du segment [AB], nous avons :

$$\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Ses sinus plein les mirettes

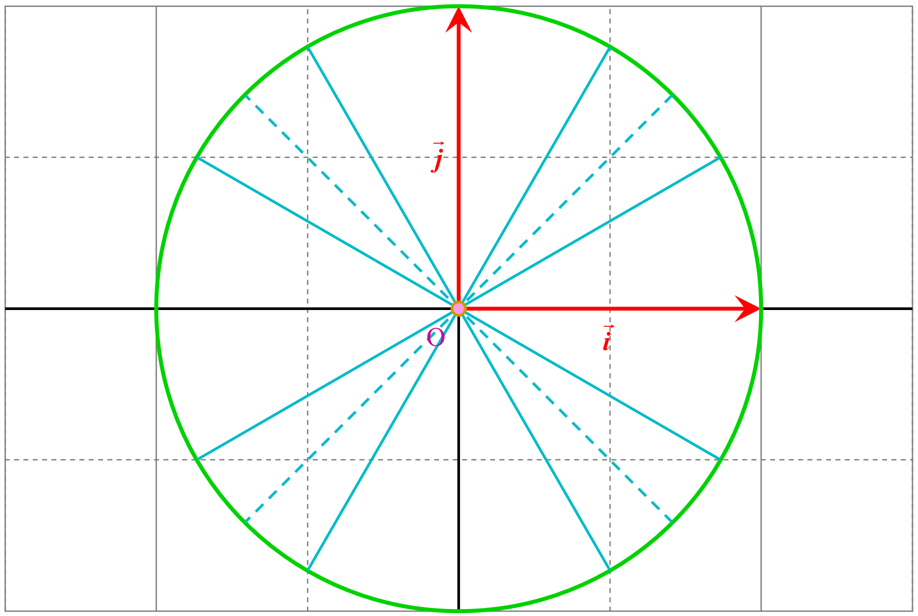
Le contexte

Un exercice de trigonométrie sur le cercle trigonométrique : radian, sinus et cosinus

L'énoncé

a) Sur la figure ci-dessous où le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, placer sur le cercle trigonométrique les points suivants :

1. Le point A associé au réel $-\dfrac{4\pi}{3}$
2. Le point B associé au réel $\dfrac{9\pi}{4}$
3. Le point C associé au réel $-\dfrac{19\pi}{6}$
4. Le point D associé au réel 33π



b) En s'aidant du cercle trigonométrique ci-dessus, résoudre les équations d'inconnue t suivantes :

1. Résoudre l'équation $\cos(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $[0;2\pi]$.
2. Résoudre l'équation $\sin(t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
3. Résoudre l'équation $\sin(t)=-1$ dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.
4. Résoudre l'équation $\cos(t)=-\dfrac{1}{2}$ dans l'intervalle $[\pi;3\pi]$.

Le corrigé

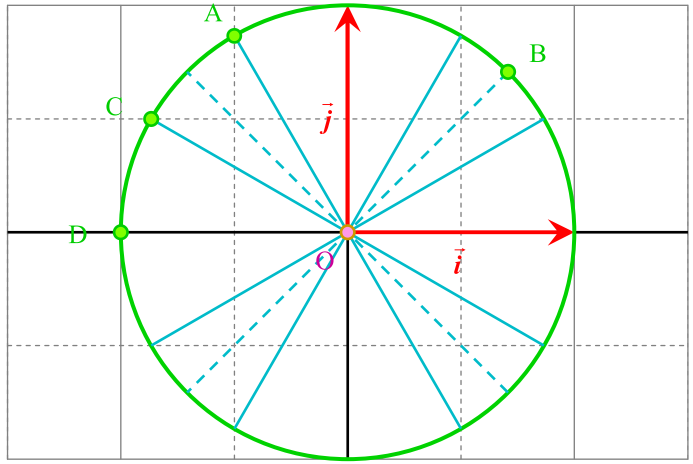
a) A, B, C et D sont les points du cercle trigonométrique tels que :

$$\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)=-\frac{4\pi}{3}$$

$$\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{9\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right)=-\frac{19\pi}{6}=-2\times2\pi+\frac{5\pi}{6}$$

$$\left(i,\overrightarrow{OD}\right)=33\pi=16\times\pi+\pi$$



b) En s'aidant du cercle trigonométrique complété, on détermine que les solutions des équations proposées sont :

1. $\cos(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ avec $t\in[0;2\pi]$ $\Leftrightarrow$ $t=\dfrac{\pi}{4}$ ou $t=\dfrac{7\pi}{4}$
2. $\sin(t)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ avec $t\in[-\pi;\pi]$ $\Leftrightarrow$ $t=-\dfrac{2\pi}{3}$ ou $t=-\dfrac{\pi}{3}$
3. $\sin(t)=-1$ avec $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ $\Leftrightarrow$ $t=-\dfrac{\pi}{2}$ ou $t=\dfrac{3\pi}{2}$
4. $\cos(t)=-\dfrac{1}{2}$ avec $t\in[\pi;3\pi]$ $\Leftrightarrow$ $t=\dfrac{4\pi}{3}$ ou $t=\dfrac{8\pi}{3}$

Prisme au piège !

Le contexte

Un exercice classique de géométrie dans l'espace où il s'agit de construire les droites d'intersection de deux plans avec notamment les théorèmes d'incidence et du toit.

Le corrigé

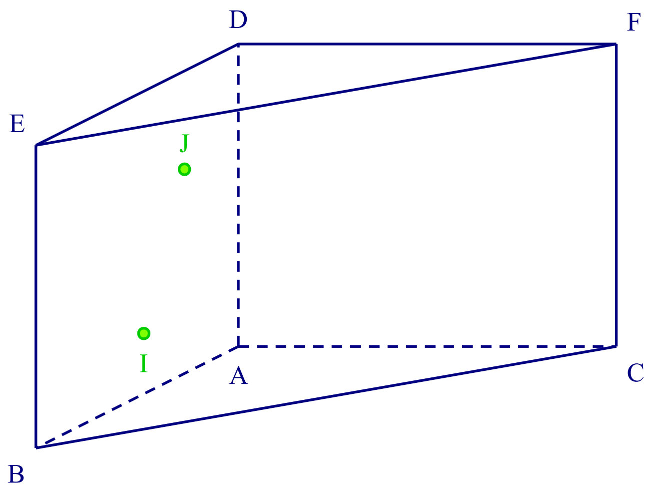
ABCDEF est un prisme droit s'appuyant sur deux triangles isométriques ABC et DEF respectivement rectangles A et D, et vérifiant :

AB = 3cm AC = 5cm AD = 4cm

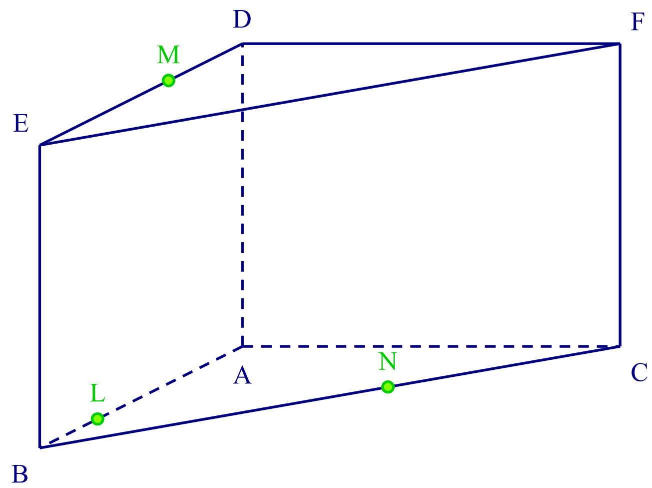
Toutes les constructions demandées seront effectuées à la règle et au compas et, justifiées sur la feuille de copie. Les parties cachés des droites et segments seront représentées en tirets.

a) Calculer le volume exprimé en litres du prisme ABCDEF.

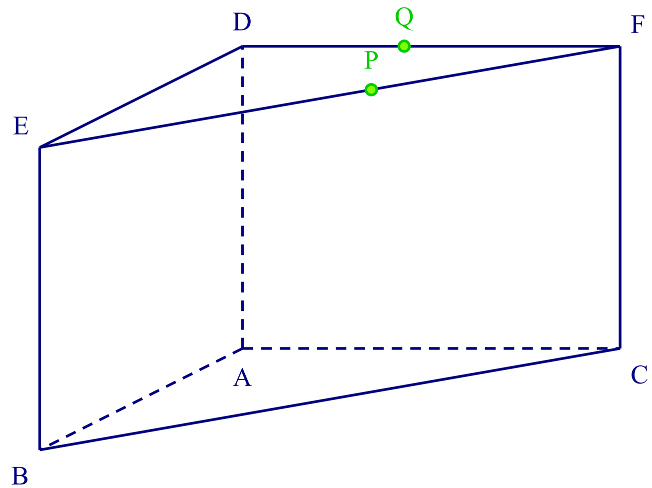
b) Les points I et J appartiennent tous deux au plan (ADE).
Sur la figure ci-dessous, construire l'intersection des plans (BCI) et (EFJ).



c) L, M et N sont trois points appartenant respectivement aux arêtes [AB], [DE] et [BC].
Sur la figure ci-dessous, construire l'intersection des plans (DEF) et (LMN).



d) Les points P et Q appartiennent respectivement aux arêtes [EF] et [DF].
Construire l'intersection des plans (AEQ) et (BDP).



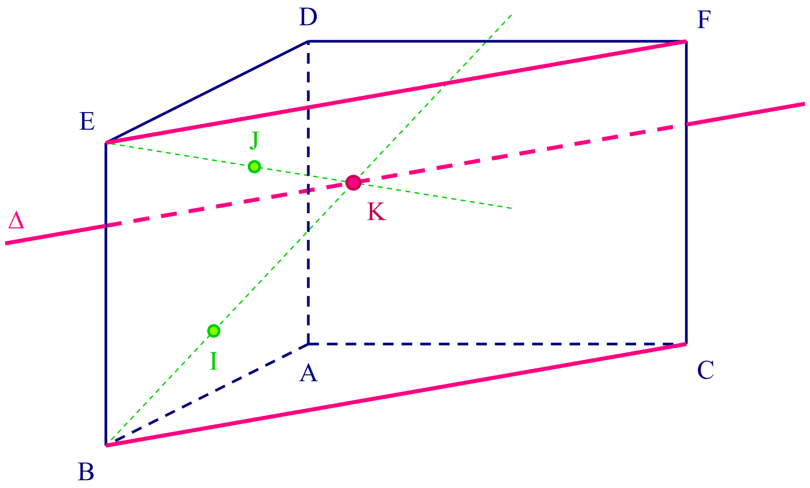
Le corrigé

a) Le volume du prisme ABCDEF est donné par la formule :

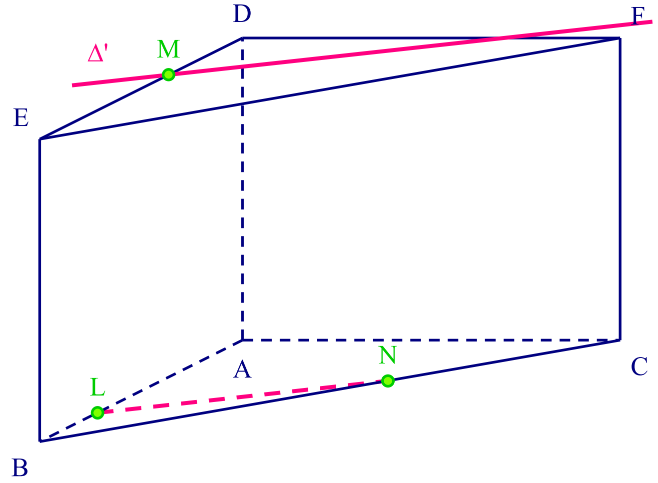
$$\text{Volume} = \text{Base du triangle ABC} \times \text{Hauteur}$$

$$= \frac{AB \times AC}{2} \times AD = \frac{3 \times 5}{2} \times 4 = 30 \text{ cm}^3 = 0,03 \text{ litre}$$

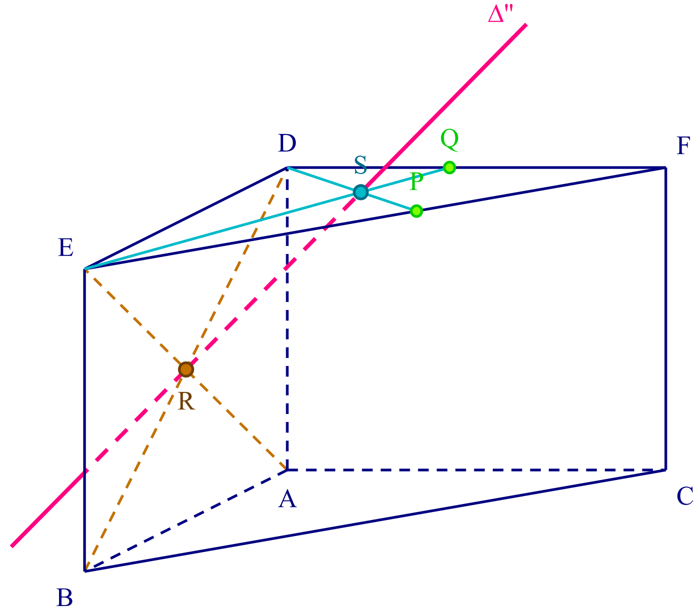
b) D'abord, disons que cette intersection des plans (BCI) et (EFJ) est une droite que nous appellerons Δ.
Ensuite, les droites (BI) et (EJ) sont sécantes dans le plan (ADE) qui porte la face rectangulaire ABED. Leur point d'intersection K appartenant aux deux plans (BCI) et (EFJ) fait de facto partie de leur intersection Δ.
Enfin, comme la droite (BC) du plan (BCI) est parallèle à la droite (EF) du plan (EFJ), alors, en application du théorème du toit, l'intersection Δ est parallèle à ces deux droites.
Conclusion : L'intersection Δ est la droite parallèle à (BC) et (EF) passant par K. Cette droite d'intersection ainsi que le point K se trouvent derrière le cube.



c) Encore une fois, l'intersection des plans (DEF) et (LMN) est une droite que nous noterons Δ' et qui passe par leur point commun M.
Ensuite, l'intersection des plans (LMN) et (ABC) est la droite (LN) car les points L et N sont communs à ces deux plans.
Enfin, le plan (LMN) coupe les plans parallèles (DEF) et (ABC) suivant deux droites parallèles. Par conséquent, la droite Δ' est parallèle à la droite (LN).
Conclusion : l'intersection Δ' est la parallèle à la droite (LN) passant par M.



d) Encore une fois, l'intersection des plans (AEQ) et (BDP) est une droite Δ".
Les droites (BD) et (AE) sont sécantes dans le plan (ADEB) en un point que nous appellerons R.
Les droites (EQ) et (DP) sont sécantes dans le plan (EDF) en un point S.
Les points R et S appartenant aux deux plans, ils font partie de la droite Δ".
Conclusion : l'intersection des plans (AEQ) et (BDP) est la droite (RS).



Probabilités et statistiques

Pommes, pommes, pommes, pommes !

Le contexte

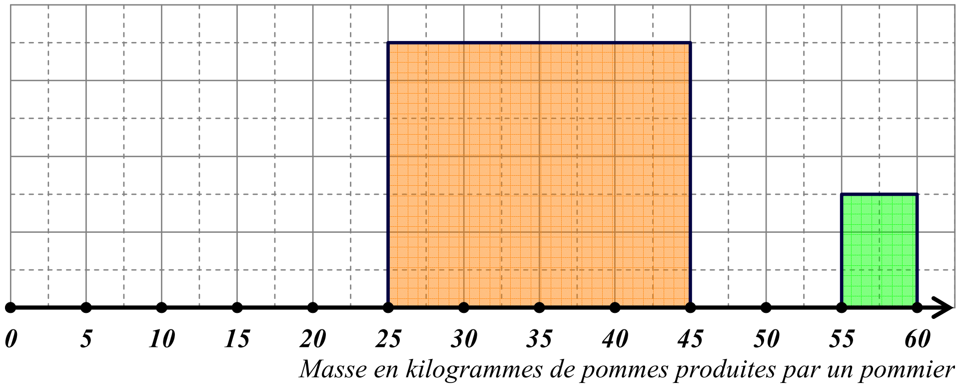
L'exercice classique sur les statistiques : classes, histogramme, polygone des fréquences cumulées croissantes, moyenne et indicateurs de dispersion.

L'énoncé

La cueillette des pommes vient de s'achever aux *Vergers Blancois*. Le chef comptable de la coopérative a comptabilisé la masse de pommes que chaque pommier a produite. Puis, il a rassemblé ces données en classes. Il en a résulté la série statistique suivante qui, malheureusement, est partielle.

Classe exprimée en kilogrammes	$[0;25[$	$[25;45[$	$[45;55[$	$[55;60[$
Effectif Nombre de pommiers	160		96	

Heureusement, le tableau ci-dessus est complété par l'histogramme ci-dessous où un centimètre carré représente 16 pommiers.



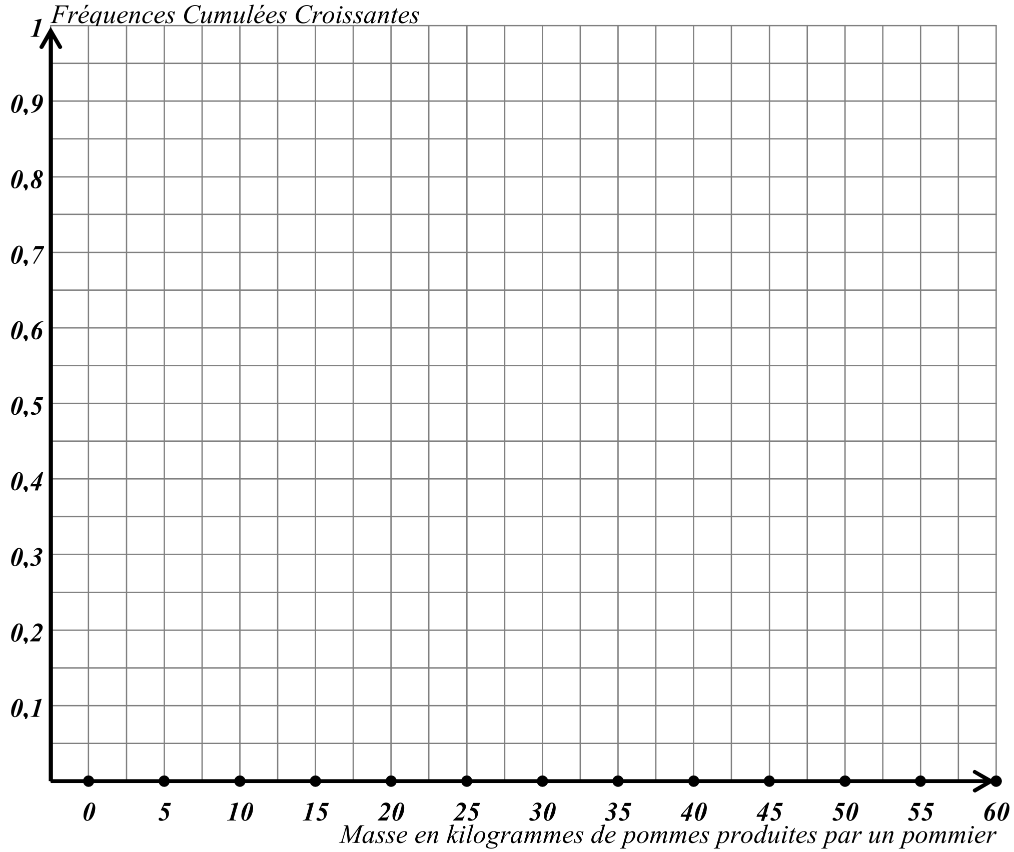
a) Compléter le tableau et l'histogramme ci-dessus.

b) Combien les *Vergers Blancois* possèdent-ils de pommiers ? On entourera la bonne réponse parmi les propositions ci-dessous :

456 480 504 528

c) Calculer la masse moyenne de pommes produite par un pommier.

d) Sur le graphique ci-après, construire le polygone des fréquences cumulées croissantes correspondant à la série statistique précédente.



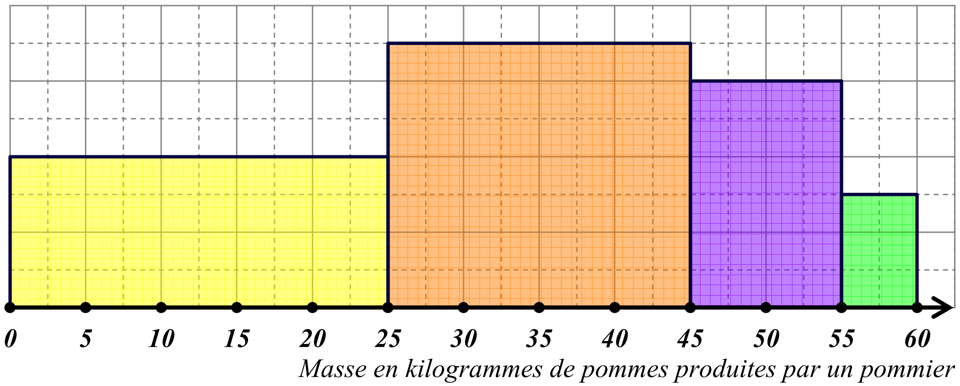
e) A partir du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer la médiane M_e ainsi que les deux quartiles Q_1 et Q_3.
2. On rapporte au chef comptable qu'il y a autant de pommiers qui produisent moins de 10 kilogrammes de pommes que de pommiers qui produisent plus de 50 kilogrammes de pommes.
   Cette affirmation est-elle vraie ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a) Complétés, le tableau et l'histogramme sont les suivants :

Classe exprimée en kilogrammes	$[0;25[$	$[25;45[$	$[45;55[$	$[55;60[$
Effectif Nombre de pommiers	160	224	96	24
Aire du rectangle en centimètres carrés	10	14	6	1,5
Dimensions en centimètres	5×2	$4\times3,5$	3×2	$1\times1,5$



b) Au total, les *Vergers Blancois* possèdent $160+224+96+24=\underline{504 \text{ pommiers}}$

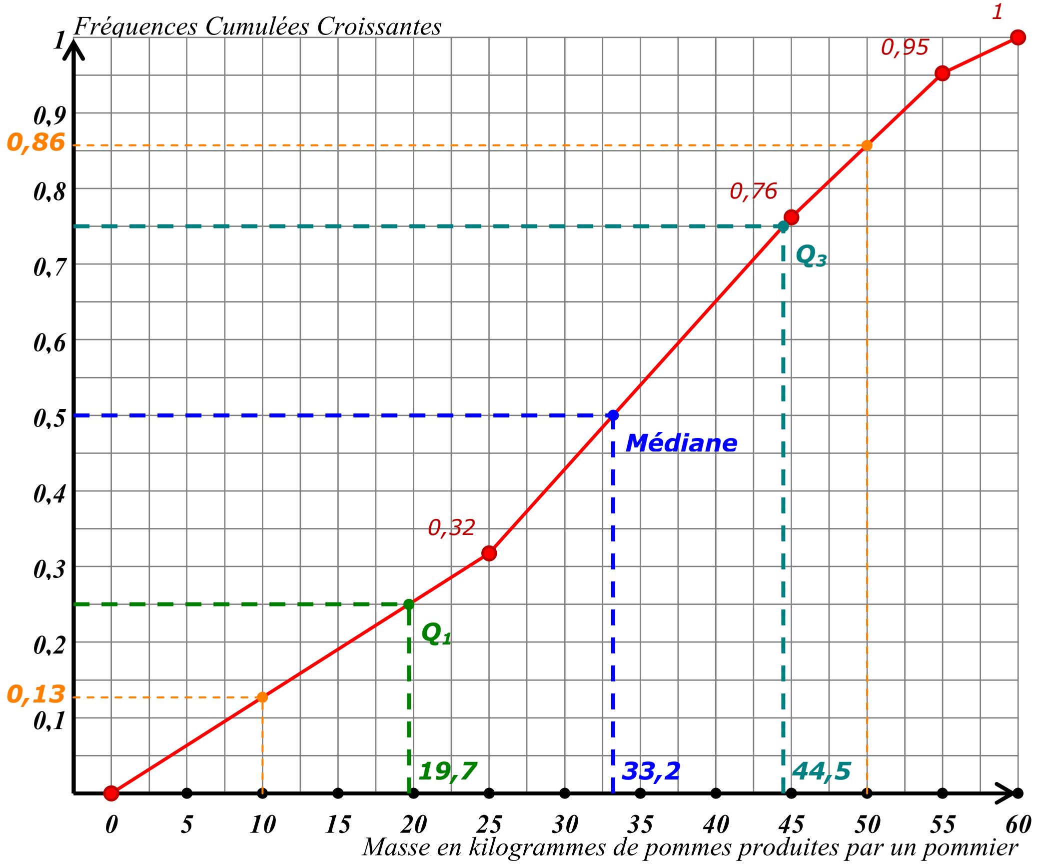
c) En supposant que dans une même classe, les pommiers sont répartis de façon régulière ou homogène, la masse moyenne de pommes produite par un pommier est donnée par :

$$\frac{\sum \text{effectif}\times\text{Milieu de la classe}}{\text{Effectif total}}=\frac{160\times12,5+224\times35+96\times50+24\times57,5}{504}\approx \underline{31,8 \text{ kg}}$$

d) Pour construire le polygone en question, il faut au préalable calculer les fréquences, puis les fréquences cumulées croissantes de la série statistique.

Classe exprimée en kilogrammes	$[0;25[$	$[25;45[$	$[45;55[$	$[55;60[$
Effectif	160	224	96	24
Fréquence	0,32	0,44	0,19	0,05
Fréquences cumulées croissantes	0,32	0,76	0,95	1

Ce qui donné le polygone des fréquences cumulées croissantes suivant :



e.1) La médiane est la modalité prise pour une fréquence cumulée croissante de 0,5. D'après le graphique, le «pommier médian» produit $M_e=\underline{33,2 \text{ kilogrammes}}$

Les quartiles Q_1 et Q_3 correspondent aux modalités prises pour des fréquences cumulées croissantes respectivement de 0,25 et 0,75. D'après le graphique, on trouve

$Q_1=\underline{19,7\text{kg}}$ et $Q_3=\underline{44,5\text{kg}}$

e.2) La fréquence cumulée croissante correspondant à une modalité de 10 kilogrammes est de 0,13. Celle correspondant à une modalité de 50 kg est de 0,86.
Il y a donc 13% des pommiers qui produisent moins de 10 kilogrammes et 14% plus de 50 kilogrammes. Avec l'incertitude introduite par toutes nos imprécisions, on peut dire que l'affirmation est vraie : il y a autant de pommiers qui produisent moins de 10 kg de pommes que de pommiers qui en produisent plus de 50.

Roule ou crève

Le contexte

Un exercice simple de probabilité qui se solutionne au moyen d'un arbre pondéré.

L'énoncé

Un réparateur de vélos a acheté 65% de son stock de pneus à un premier fournisseur et le reste chez un second.
Des études ont montré que :

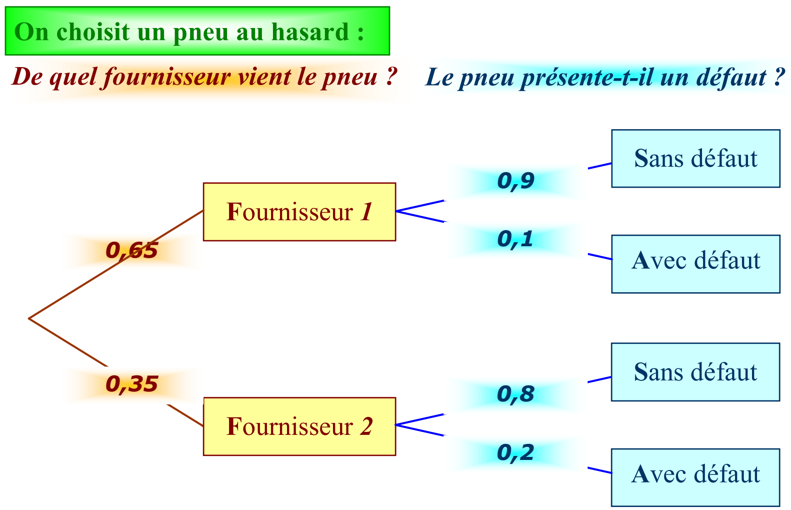
- 10% des pneus produits par le premier fournisseur présentaient un défaut.
- 20% des pneus produits par le second fournisseur présentaient un défaut.

Le réparateur prend au hasard un pneu dans son stock.

a. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation.
b. Calculer la probabilité que ce pneu soit sans défaut.

Le corrigé

a) La situation est la suivante :



b) Avant toutes choses, on définit les événements suivants :

F_1 = «Le pneu vient du fournisseur *1*» S = «Le pneu ne présente aucun défaut»
F_2 = «Le pneu vient du fournisseur *2*»

On souhaite calculer la probabilité :

$$p(S) = p(F_1 \cap S) + p(F_2 \cap S) = 0,65 \times 0,9 + 0,35 \times 0,8 = \underline{0,865}$$

Trois...deux...un...et c'est reparti !

Le contexte

Un exercice classique de probabilité mais surtout de dénombrement...qui peut aussi se résoudre au moyen d'un arbre pondéré.

L'énoncé

La *Blancoise de l'espace* s'apprête à lancer son nouveau vaisseau spatial. Pour ce faire, elle doit constituer un équipage de trois spationautes : un pilote, un copilote et un scientifique.
Pour les postes de pilote et de copilote, elle dispose de sept candidats dont trois femmes.
Chacun de ses sept candidats peut occuper le poste de pilote ou le poste de copilote.
Pour le poste de scientifique, elle dispose de quatre autres candidats dont trois femmes.
Les candidats ne peuvent être à la fois pilote (ou copilote) et scientifique.
Pour constituer son équipage, l'entreprise décide de procéder à un tirage au sort.

a) Combien y a-t-il d'équipages possibles ?

b) Déterminer les probabilités des événements suivants. Les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

A = «Le pilote du vaisseau spatial est une femme»
B = «L'équipage est constitué de trois femmes»
C = «L'équipage comprend au moins un homme»
D = «L'équipage comprend exactement deux hommes»

Le corrigé

a) Constituons notre équipage !

Pilote	Copilote	Scientifique		
7 candidats	6 candidats	4 candidats	soit	$7 \times 6 \times 4 = \underline{168 \text{ équipages}}$

Conclusion : Il y a 168 équipages possibles.

b) Comme toutes les personnes ont la même probabilité d'être tirée au sort pour un poste donné, nous sommes en situation d'équiprobabilité. Par conséquent, la probabilité d'un événement est donnée par :

$$\boxed{\text{probabilité} = \frac{\text{Nombre d'équipages favorables à l'événement}}{\text{Nombre total d'équipages}}}$$

Déterminons les probabilités demandées des événements.

A = «Le pilote du vaisseau spatial est une femme»

Combien existe-t-il d'équipages où le pilote est une femme ? Dénombrons-les !

Pilote	Copilote	Scientifique	
3 candidates	6 candidats	4 candidats	soit $3\times 6\times 4=\boxed{72 \text{ équipages}}$

Il existe 72 équipages favorables à l'événement A. Par conséquent :

$$p(\mathrm{A})=\frac{72}{168}=\frac{3\times\cancel{24}}{7\times\cancel{24}}=\boxed{\frac{3}{7}}$$

B = «L'équipage est constituée de trois femmes»

Combien existe-t-il d'équipages composés de trois femmes ? Dénombrons-les !

Pilote	Copilote	Scientifique	
3 candidates	2 candidates	3 candidates	soit $3\times 2\times 3=\boxed{18 \text{ équipages}}$

Il existe 18 équipages favorables à l'événement B. Il vient alors :

$$p(\mathrm{B})=\frac{18}{168}=\frac{3\times\cancel{6}}{28\times\cancel{6}}=\boxed{\frac{3}{28}}$$

C = **«L'équipage comprend au moins un homme»**

Le contraire de «au moins un homme» est «aucun homme» c'est-à-dire «trois femmes». Autrement dit, l'événement C est le contraire de l'événement B. D'où :

$$p(\mathrm{C})=1-p(\mathrm{B})=1-\frac{3}{28}=\frac{28}{28}-\frac{3}{28}=\boxed{\frac{25}{28}}$$

D = **«L'équipage comprend exactement deux hommes»**

Si l'équipage comprend exactement deux hommes, cela signifie que le poste restant (pilote, copilote et scientifique) est occupé par une femme.

Pour dénombrer tous les équipages favorables à l'événement D, nous devons envisager tous les postes que peut occuper la femme.

→ La femme peut occuper le poste de pilote...

Pilote	Copilote	Scientifique	
3 candidates	4 candidats	1 candidat	soit $3\times 4\times 1=\boxed{12 \text{ équipages}}$

→ La femme peut occuper le poste de copilote...

Pilote	Copilote	Scientifique	
4 candidats	3 candidates	1 candidat	soit $4\times 3\times 1=\boxed{12 \text{ équipages}}$

→ La femme peut occuper le poste de scientifique...

Pilote	Copilote	Scientifique	
4 candidats	3 candidats	3 candidates	soit $4\times 3\times 3=\boxed{36 \text{ équipages}}$

Il y a au total $12+12+36=60$ équipages favorables à l'événement D.

Nous en concluons :

$$p(\mathrm{D})=\frac{60}{168}=\frac{5\times\cancel{12}}{14\times\cancel{12}}=\boxed{\frac{5}{14}}$$

Le troisième y fait Bis Boules

Le contexte

Un exercice de probabilité assez costaud qui se résout au moyen d'un arbre pondéré.

L'énoncé

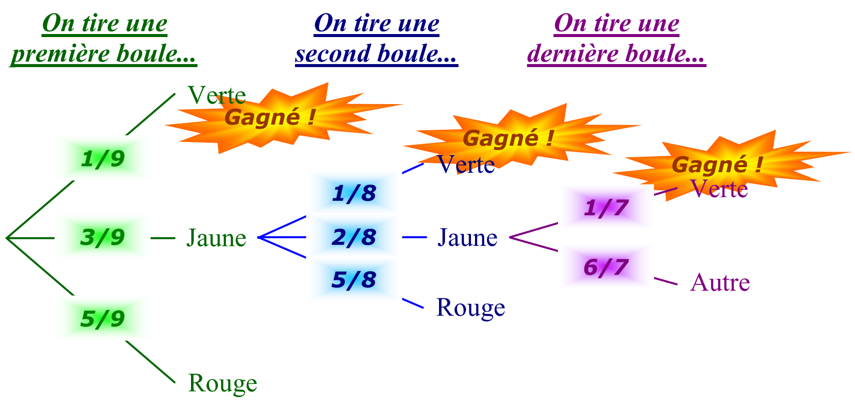
La *Blancoise des Jeux* vient de lancer un nouveau jeu de hasard : le *Bis Boules*.
Le principe du jeu est le suivant. Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher et numérotées de ***1*** à ***9*** :

- Une boule verte numérotée ***1***.
- Trois boules jaunes numérotées ***2***, ***3*** et ***4***.
- Cinq boules rouges numérotées ***5***, ***6***, ***7***, ***8*** et ***9***.

Le joueur tire au hasard une première boule. S'il tire la boule verte, il a gagné. S'il tire une boule rouge, il a perdu. Dans ces deux cas, le jeu s'arrête. Mais s'il tire une boule jaune, alors il retire une seconde boule dans l'urne mais sans avoir remis la première boule tirée. Si la seconde boule tirée est la verte, il a gagné. Si elle est rouge, il a perdu. Dans ces deux cas, le jeu s'arrête. Mais si la seconde boule tirée est jaune, alors il tire une troisième boule sans avoir remis les deux boules précédemment tirées dans l'urne.
Si la troisième boule tirée est verte, il a gagné. Sinon il a perdu. Quelque soit le résultat de ce dernier tirage, le jeu s'arrête.
Calculer la probabilité que le joueur gagne une partie de *Bis Boules*.

Le corrigé

Une partie de *Bis Boule* peut être représentée par l'arbre suivant :



$$p(\text{"Gagné"}) = p(\text{"Verte"}) + p(\text{"Jaune-Verte"}) + p(\text{"Jaune-Jaune-Verte"})$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{3}{9}\times\frac{1}{8} + \frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7} = \frac{1\times 8\times 7 + 3\times 7 + 6}{9\times 8\times 7} = \frac{83}{504}$$

La théorie et l'improbable pratique

Le contexte

Un dernier exercice de probabilité se résolvant au moyen d'un arbre pondéré et se terminant par une question sur un intervalle de fluctuation au seuil de 95%. Passionnant !

L'énoncé

La Blancoise des Jeux vient de lancer un nouveau jeu : *Maths pour gens brillants*.
Son principe est le suivant : d'abord, le joueur tire au hasard une question.
Un tiers de ces questions portent sur la géométrie, les deux cinquièmes portent sur l'analyse et les restantes sur les probabilités.
Des études ont montré que :

- Le joueur répondait correctement à une question de géométrie dans 60% des cas.
- Le joueur répondait correctement à une question d'analyse dans 65% des cas.
- Le joueur répondait correctement à une question de probabilités dans 90% des cas.

Un joueur se présente pour jouer, la partie commence...

a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation d'une partie de *Maths pour gens brillants*.

b) Etablir que la probabilité que le joueur réponde correctement à une question posée est de 0,7.

c) Les quatre enfants de la famille Vercère ont répondu chacun à une série de 250 questions de *Maths pour gens brillants*. Leurs taux de réussite respectifs à l'issue de leurs séries de 250 questions sont les suivants :

Nom	**Joy**	**Boby**	**Eudes**	**Annie**
Taux de réussite	68%	78%	64%	73%

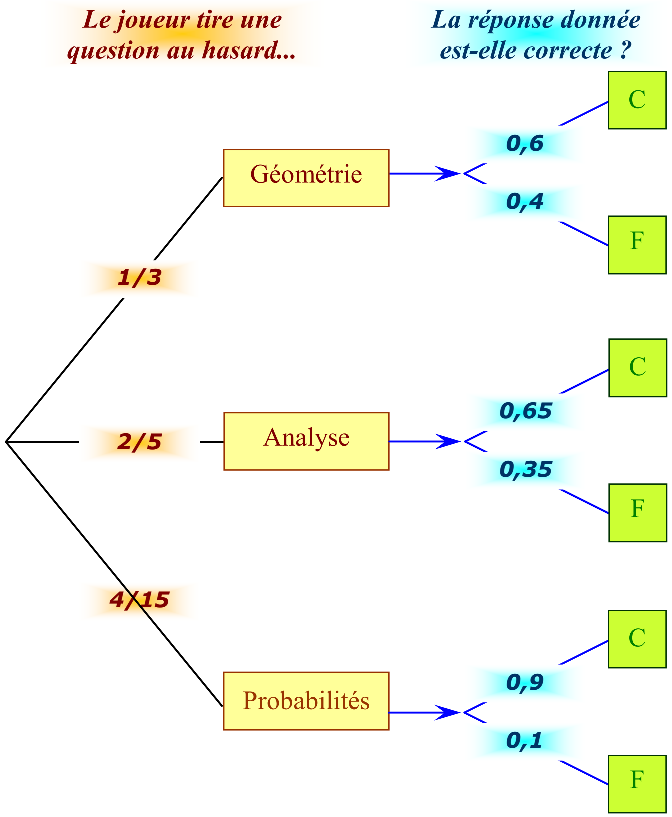
Parmi ces quatre personnes, lesquelles ont un taux de réussite se situant dans l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% ?

Le corrigé

a) La probabilité d'avoir une question de probabilités est $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}=\frac{15-5-6}{15}=\frac{4}{15}$

L'événement C désigne «la réponse apportée est correcte» et l'événement F est «la réponse apportée est fausse».

La situation d'une partie de *Question de maths pour gens brillants* est la suivante :



b) La probabilité de l'événement C est donnée par :

$$p(\mathrm{C}) = \frac{1}{3}\times 0,6 + \frac{2}{5}\times 0,65 + \frac{4}{15}\times 0,9 = 0,2+0,26+0,24 = \underline{0,7}$$

c) L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est donné par $\underbrace{\left[0,7-\frac{1}{\sqrt{250}};0,7+\frac{1}{\sqrt{250}}\right]}_{\text{soit } [0,636;0,764]}$.

Seuls Joy, Eudes et Annie Vercère ont un taux de réussite se situant dans cet intervalle.
Boby est en dehors.