Le mot de l'auteur

Dernière cuvée avant changement de programme ! Car à la rentrée prochaine, l'intégration par parties, les équations différentielles, les combinaisons et les sphères nous quittent remplacées par les probabilités continues qui arrivent en masse. Nous récupérerons aussi certaines notions comme les limites et les asymptotes qui avant se traitaient en première S.
Et il est probable que l'épreuve de mathématiques du baccalauréat S changera dans la foulée même si personne ne sait à quoi elle ressemblera. Peut-être l'introduction d'une épreuve pratique sur 4 points à l'image de ce qui se fait déjà en sciences physiques ou en biologie ? Histoire que tout le monde ait au moins quelques points. Quelle générosité ! Sauf qu'en matière de notation, la générosité précède souvent la dévalorisation du diplôme.
D'aucuns disent que les exigences ne baissent pas et qu'il n'y a qu'à voir pour s'en convaincre les épreuves donnés au bac et leurs résultats. C'est vrai en apparence mais faux dans la réalité. Car, dans les coulisses du bac, d'abord on décide de la moyenne à obtenir, puis on fait le barème pour y arriver. Alors, forcément, ça masque un peu la réalité.
Certains disent que le problème n'est pas le niveau mais la manière dont il est mesuré. Alors ils proposent de changer le système de notation et d'aller vers «l'évaluation par compétences» qui ne mesure que ce que l'évaluateur veut bien voir. Il fait froid mais il y a du soleil. L'évaluateur retiendra qu'il y a du soleil. Mais il fera toujours froid.

Les exercices de ce volume sont classés par catégories :

La taverne de l'Irlandais
[http://www.tanopah.com]
présente

Mélancolie mathématique ...en Terminale S

Tous les exercices du présent document ont été conçus et réalisés par Jérôme ONILLON, professeur (dés)agrégé de mathématiques.

Edition du samedi 30 juin 2012

Analyse

Une fonction par une autre

Le contexte

Un problème construit autour de l'étude d'une fonction rationnelle se conclue par une question sur un prolongement qui doit être continu et dérivable.

L'énoncé

La fonction φ est définie sur ℝ par :

$$\varphi(x) = x^3 - 3x + 5$$

a) Dans cette sous-partie, nous allons déterminer le signe de $\varphi(\mathrm{x})$ sur ℝ.

1. Déterminer les limites de la fonction φ aux infinis.
2. Etudier les variations de la fonction φ sur ℝ.
3. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans ℝ une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au centième près à l'aide de la calculatrice.
4. En déduire le tableau de signe de $\varphi(x)$ sur ℝ.

La fonction *f* est définie sur l'ensemble $[0;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

b) Calculer $f(0)$.

c) Dans cette sous-partie, nous allons nous intéresser aux limites de la fonction *f* ainsi qu'aux asymptotes de la courbe (C).

1. Déterminer les limites de *f* au voisinage de 1.
   Quelle est la conséquence graphique de ces limites.
2. Déterminer quatre coefficients entiers non nuls *a*, *b*, c et *d* tels que pour tout réel *x* de l'ensemble $[0;1[\cup]1;+\infty[$, on ait :

$$f(x) = a \cdot x + b + \frac{c \cdot x + d}{x^2 - 1}$$

3. Démontrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote Δ dont on précisera l'équation.
4. En déduire la limite de la fonction *f* en $+\infty$.
5. Etudier la position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote Δ sur l'ensemble $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

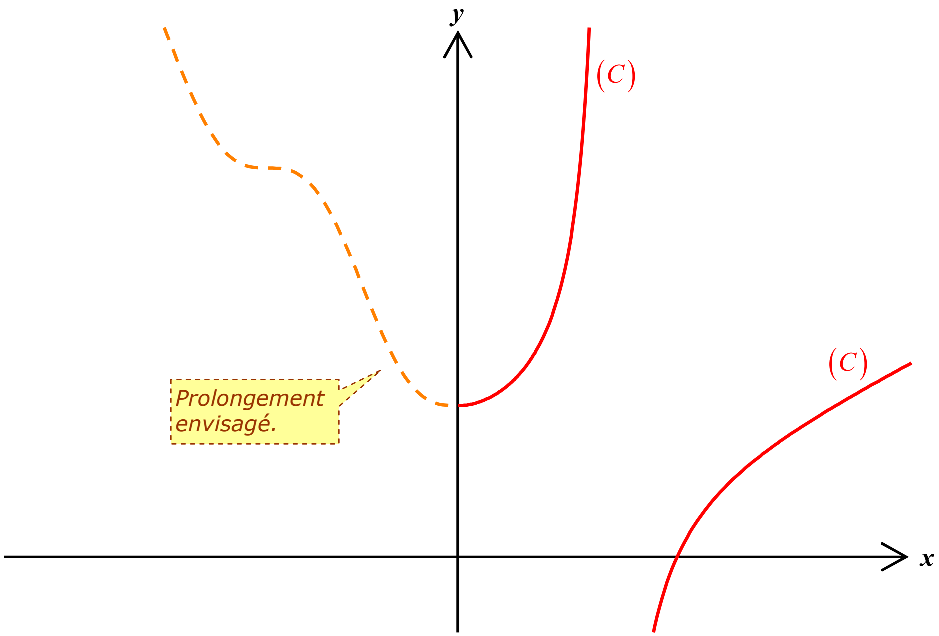
d) Dans ces questions, nous allons déterminer les variations de la fonction *f* en utilisant la fonction auxiliaire φ.

1. Démontrer que pour tout réel $x \in [0;1[\cup]1;+\infty[$, nous avons :

$$f'(x) = \frac{2x \times \varphi(x)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$$

2. En déduire les variations de la fonction *f* sur l'ensemble $[0;1[\cup]1;+\infty[$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

e) On souhaite prolonger la fonction *f* sur l'intervalle $]-\infty;0[$ par une fonction de la forme $a \times x + b + \sin(5x)$ ainsi que cela a été fait sur le graphique ci-dessous.



Déterminer les coefficients *a* et *b* pour que la fonction *f* ainsi prolongée soit <u>continue</u> et <u>dérivable</u> en $x = 0$

Le corrigé

a.1) Afin d'éviter tout conflit aux infinis, factorisons d'entrée $\varphi(x)$ par son terme le plus fort qui est x^3. Pour tout réel x non nul, nous pouvons écrire :

$$\varphi(x) = x^3 - 3x + 5 = x^3 \times \left[1 - 3\times\frac{x}{x^3} + \frac{5}{x^3}\right] = \underline{x^3 \times \left[1 - 3\times\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right]}$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \times\left[1 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right] = (-\infty)\times\left[1 - 0^+ + 0^-\right] = (-\infty)\times 1 = \underline{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \times\left[1 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right] = (+\infty)\times\left[1 - 0^+ + 0^+\right] = (+\infty)\times 1 = \underline{+\infty}$$

a.2) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme toutes les fonctions polynomiales.
Pour tout réel x, nous avons :

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 3\times 1 + 0 = \underline{3\times\left(x^2 - 1\right)}$$

Connaissant le signe du facteur $x^2 - 1$, nous en déduisons le signe de la dérivée $\varphi'(x)$ et de là, les variations de la fonction φ.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

a.3) D'abord, remarquons que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ car elle y est dérivable. Qui peut le plus, peu le moins. Ensuite, nous partitionnons l'ensemble des réels.

- La fonction φ est strictement croissante et continue sur l'intervalle $]-\infty;-1]$.
  L'image de l'intervalle $]-\infty;-1]$ par la fonction φ est l'intervalle $]-\infty;7]$.
  Comme 0 fait partie de cet intervalle image, alors, en application du «théorème de la bijection», il admet un unique antécédent par la fonction φ dans $]-\infty;-1]$.
- Le minimum de la fonction φ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ est 3.
  Par conséquent, 0 ne peut avoir d'antécédents par φ dans cet intervalle.

<u>Conclusion :</u> l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} =]-\infty;-1] \cup]-1;+\infty[$.
Un encadrement au centième de cette solution α est :

$$\underline{-2,28 \le \alpha \le -2,27}$$

a.4) Vu les questions **a.2** et **a.3**, nous concluons que le tableau de signe de φ est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	

b) Calculons l'image de 0 par la fonction *f*.

$$f(0) = \frac{2\times 0^3 - 0^2 - 4}{0^2 - 1} = \frac{-4}{-1} = \underline{4}$$

c.1) Deux limites sont à envisager au voisinage de 1 : l'une à gauche et l'autre à droite.
Lorsque x tend vers 1, le numérateur $2x^3 - x^2 - 4$ tend vers $2\times 1^3 - 1^2 - 4 = -3$ par continuité. En nous servant du tableau de signe ci-contre, nous pouvons écrire :

A gauche de 1, $x^2 - 1$ tend vers 0^-.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-3}{0^-} = \underline{+\infty}$$

A droite de 1, $x^2 - 1$ tend vers 0^+.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{-3}{0^+} = \underline{-\infty}$$

La courbe (C) s'envole à gauche de 1 et plonge à droite. Nous en déduisons que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

c.2) Nous allons décomposer la fonction rationnelle $f(x)$ en extrayant le dénominateur de chacun des termes du numérateur. C'est la «mauvaise méthode».

$$f(x) = \frac{\overbrace{2x^3}^{\text{Combien de fois } x^2-1\text{ ?}} - x^2 - 4}{x^2 - 1} = \frac{\overbrace{2x\times\left(x^2-1\right) + 2x}^{\text{Soit } 2x^3} - x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{2x\times\cancel{\left(x^2-1\right)}}{\cancel{x^2-1}} + \frac{\overbrace{-x^2}^{\text{Combien de fois } x^2-1\text{ ?}} + 2x - 4}{x^2 - 1} = 2x + \frac{\overbrace{(-1)\times\left(x^2-1\right) - 1}^{\text{Soit } 2x^3} + 2x - 4}{x^2 - 1}$$

$$= 2x + \frac{(-1)\times\cancel{\left(x^2-1\right)}}{\cancel{x^2-1}} + \frac{2x-5}{x^2-1} = \underline{2x - 1 + \frac{2x-5}{x^2-1}}$$

On peut aussi utiliser la bonne méthode par identification...

La méthode par identification des coefficients de même degré des numérateurs

On veut écrire la fonction rationnelle $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = a\cdot x + b + \frac{c\cdot x + d}{x^2-1} = \frac{(a\cdot x+b)\times(x^2-1)+c\cdot x+d}{x^2-1}$$

$$\frac{\boxed{2}\cdot x^3 + \boxed{(-1)}\cdot x^2 + \boxed{0}\cdot x + \boxed{-4}}{x^2-1} = \frac{\boxed{a}\cdot x^3 + \boxed{b}\cdot x^2 + \boxed{(c-a)}\cdot x + \boxed{(d-b)}}{x^2-1}$$

Ces deux fractions égales ayant le même dénominateur, nous en déduisons que leurs numérateurs sont égaux. Identifions les coefficients de même degré de ces derniers.

En x^3	$2 = a$ soit $a = 2$	*Et d'un !*
En x^2	$-1 = b$ soit $b = -1$	*Et de deux !*
En x	$0 = c - a \Leftrightarrow c = a = 2$	*Et de trois !*
Constant	$-4 = d - b \Leftrightarrow d = -4 + b = -4 - 1 = -5$	*Et de quatre !*

Nous en concluons que la forme décomposée de la fonction rationnelle *f* est :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{2x-5}{x^2-1}$$

c.3) La forme décomposée de $f(x)$ est la somme du terme affine $2x-1$ et d'un terme inverse. Déterminons la limite de ce dernier au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} \times \frac{2-\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times \frac{2-\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0^+ \times \frac{2-0^+}{1-0^+} = 0^+ \times 2 = 0^+$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ se comporte comme sa partie affine $2x-1$.

<u>Conclusion :</u> la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote Δ dont l'équation réduite est $y = 2x-1$.

c.4) Au voisinage de $+\infty$, la courbe (C) se confond avec son asymptote Δ. Autrement dit, la fonction *f* se comporte comme sa partie affine. Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$$

c.5) La position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote Δ est donnée par le signe de leur différence d'ordonnées pour une même abscisse x :

$$y_{(C)} - y_\Delta = f(x) - (2x-1) = \frac{2x-5}{x^2-1}$$

Dressons le tableau de signe de cette différence...enfin de ce quotient sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

x	0		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2.x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-1		$-$	0	$+$	|	$+$	
$y_{(C)} - y_\Delta$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Nous en concluons :

- $\Rightarrow$ La courbe (C) est au-dessus l'asymptote Δ sur les intervalles $[0;1[$ et $]2,5;+\infty[$.
- $\Rightarrow$ La courbe (C) croise son asymptote Δ en $x = 2,5$.
- $\Rightarrow$ La courbe (C) est au-dessous de son asymptote Δ sur l'intervalle $]1;2,5[$.

d.1) *f* est le quotient des fonctions

$u(x) = 2x^3 - x^2 - 4$ et	$v(x) = x^2 - 1$
$u'(x) = 6x^2 - 2x$	$v'(x) = 6x^2 - 2x$
Dérivable sur $\mathbb{R}$	Dérivable sur $\mathbb{R}$
	Non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

Nous en déduisons que la fonction *f* est dérivable (au moins) sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ et que pour tout réel x de cet ensemble, nous avons :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - v'(x)\times u(x)}{[v(x)]^2}$$

$$= \frac{(6x^2-2x)\times(x^2-1) - 2x\times(2x^3-x^2-4)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{6x^4 - 6x^2 - \cancel{2x^3} + 2x - 4x^4 + \cancel{2x^3} + 8x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 6x^2 + 10x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x\times\overbrace{(x^3-3x+5)}^{\varphi(x)}}{(x^2-1)^2}$$

d.2) Connaissant le signe des facteurs apparaissant dans le quotient $f'(x)$, nous allons pouvoir en déterminer le signe et ainsi en déduire les variations de f sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$2x$	0	$+$	|	$+$	
$\varphi(x)$		$+$	|	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$+$	||	$+$	
f	4	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d.3) L'équation réduite de la tangente T_0 est donnée par la formule :

$$y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$$

Avec :

$$f(0)=4 \qquad \text{et} \qquad f'(0)=\frac{2\times 0\times\varphi(0)}{(0^2-1)^2}=\frac{2\times 0\times 5}{1}=0$$

La tangente est horizontale.
Vu le tableau de variation de f, c'était prévisible !

Conclusion : l'équation réduite de la tangente T_0 est : $y=0\times(x-0)+4 \iff y=4$

e) On appelle $g(x)=a\times x+b+\sin(5x)$ le prolongement souhaité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

Prise au sens large, g est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est :

$$g'(x)=a\times 1+0+5\times\cos(5x)=a+5\times\cos(5x)$$

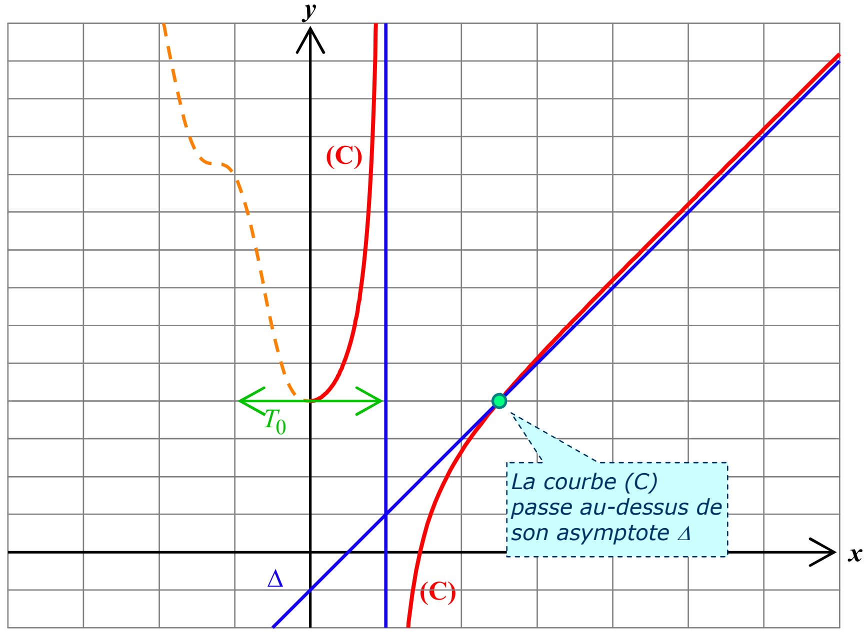
*La dérivée de **v**(ax+b) est a×**v'**(ax+b).*

Ce prolongement g doit vérifier plusieurs conditions :

- D'abord, il doit assurer la continuité de f en 0. Autrement dit, on doit avoir :
$$g(0)=f(0) \iff a\times 0+b+\sin(5\times 0)=4 \iff b+0=4 \iff b=4$$
- Ensuite, il doit assurer la dérivabilité de f en 0. On doit avoir :
$$g'(0)=f'(0) \iff a+5\times\cos(5\times 0)=0 \iff a+5\times 1=0 \iff a=-5$$

Conclusion : le prolongement souhaité pour expression $g(x)=4-5x+\sin(5x)$

La courbe (C) accompagnée de ses deux asymptotes et de la tangente T_0 est tracée sur le graphique ci-dessous.



Classique logarithmique

Le contexte

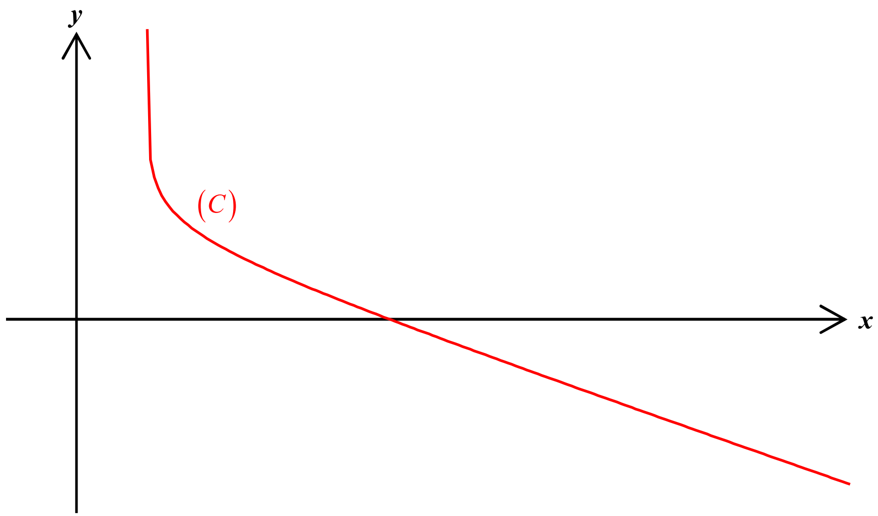
Un problème construit autour de l'étude d'une fonction affino-logarithmique avec tous les classiques du genre : limites, asymptotes, dérivée, variations et théorème de la bijection. Le problème se conclut par la détermination d'une primitive.

L'énoncé

La fonction *f* est définie pour tout réel x de l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$f(x) = -x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Sa courbe représentative (C) est tracée sur le graphique ci-dessous dans un repère simplement orthogonal.



a) D'abord, intéressons-nous au comportement de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition.

1. Déterminer la limite de f à droite de 1.
Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Etablir la limite lorsque x tend $+\infty$ du logarithme $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

En déduire que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote Δ dont on donnera l'équation réduite.

3. Résoudre dans ℝ l'inéquation $\frac{x+1}{x-1} > 1$.

En déduire la positive relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ.

b) A présent, établissons les variations de la fonction *f*.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]1;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x-1)\cdot(x+1)}.$$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1;+\infty[$.

Donner un encadrement au centième près de cette solution α.

4. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

c) On appelle H la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par :

$$H(x) = (x+1)\cdot\ln(x+1)-(x-1)\cdot\ln(x-1)$$

1. Démontrer que H est une primitive de la fonction $h(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

2. Déterminer l'expression de la fonction F qui est la seule primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]1;+\infty[$ vérifiant $F(2) = 3\times\ln(3)$

3. Etablir les variations de la fonction F sur $]1;+\infty[$.

Donner une valeur approchée de $F(\alpha)$ au dixième près.

Le corrigé

a.1) Lorsque x tend vers 1 par la droite :

Le numérateur $x+1$ tend vers $1+1=2$

Le dénominateur $x-1$ tend vers 0^+

$\Rightarrow$ le quotient $\frac{x+1}{x-1}$ tend vers $\frac{2}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow$ son logarithme $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ tend vers $+\infty$

Car $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t) = +\infty$

Nous en concluons :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1+4+(+\infty) = +\infty$$

Par conséquent, la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

a.2) Avant de nous intéresser à la limite de son logarithme en $+\infty$, penchons-nous d'abord sur celle du quotient.

De prime abord, c'est une forme indéterminée du type ∞/∞

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\times\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\times\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1+0^+}{1-0^-} = \frac{1}{1} = 1$$

La fonction logarithme népérien étant continue en 1, nous en déduisons :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(1) = 0$$

➲ Comme la fonction *f* est la somme de la partie affine $-x+4$ et d'une partie logarithmique tendant vers 0 en $+\infty$, alors la droite Δ d'équation $y=4-x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Nous en déduisons aussi que la limite de la fonction *f* en $+\infty$ est :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \boxed{-x+4} + \boxed{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = (-\infty)+0 = -\infty$$

a.3) Résolvons dans ℝ l'inéquation :

Quand ce quotient est-il strictement négatif ?

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-(x-1)}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} > 0$$

Le tableau de signe de ce dernier quotient est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		1		$+\infty$
2		+		+	
$x-1$		−	0	+	
Leur quotient		−	‖	+	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$S =]1;+\infty[$

➲ La positive relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ va nous être donnée par le signe de leur différence d'ordonnées pour une même abscisse :

$$y_{(C)} - y_\Delta = -x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - (-x+4) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Or, d'après la question précédente :

$$\underbrace{x>1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} > 1}_{\text{D'après la résolution de l'inéquation}} \xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Ln}} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > \ln(1) = 0$$

<u>Conclusion :</u> comme la différence d'ordonnées $y_{(C)} - y_\Delta$ est toujours strictement positive, alors la courbe (C) est toujours au-dessus de son asymptote Δ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

b.1) Le logarithme du quotient étant égal à la différence des logarithmes.

Nous pouvons écrire que pour tout réel $x>1$:

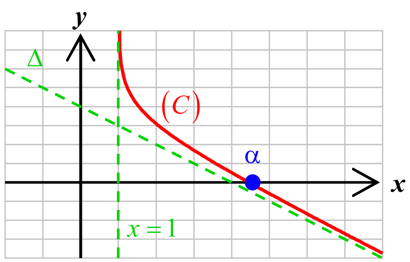
$$f(x) = -x+4+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \underbrace{-x+4+\ln(x+1)-\ln(x-1)}_{\text{Autre écriture de } f(x) \text{ idéale pour dériver}}$$

Comme les fonctions affines $\begin{cases} u(x)=x+1 \\ u'(x)=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x)=x-1 \\ v'(x)=1 \end{cases}$ sont dérivables et surtout <u>strictement positives</u> sur $]1;+\infty[$, alors leurs logarithmes $\overbrace{\ln(x+1)}^{\ln(u)}$ et $\overbrace{\ln(x-1)}^{\ln(v)}$ sont aussi dérivables sur cet intervalle. Et il en va de même pour la fonction *f* ! Par suite :

$$f'(x) = (-x+4)' + \frac{u'}{u} - \frac{v'}{u} = -1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1\times(x^2-1)+1\times(x-1)-1\times(x+1)}{(x+1)\times(x-1)}$$

$$= \frac{-x^2+1+x-1-x+1}{(x+1)\times(x-1)} = \frac{-x^2-1}{(x+1)\times(x-1)} = -\frac{x^2+1}{(x+1)\times(x-1)}$$

b.2) Les trois facteurs x^2+1 ; $x+1$ et $x-1$ étant strictement positifs sur $]1;+\infty[$, nous en concluons que la dérivée $f'(x)$ est strictement négative sur cet intervalle.



A droite, le tableau de variation de la fonction *f* ➔

🡐 A gauche, sa courbe (C)

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		−	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$

b.3) Comme :

La fonction f est dérivable donc continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
L'image de l'intervalle $]1;+\infty[$ par la fonction f est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.
0 appartient à l'intervalle image $]-\infty;+\infty[$.

alors, en application du théorème dit de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet un unique antécédent dans l'intervalle $]1;+\infty[$.

➲ D'après la calculatrice, un encadrement au centième de cette solution α est :

$$4,45 \leq \alpha \leq 4,46$$

b.4) Vu les questions **b.2** et **b.3**, nous en concluons que le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

c.1) La fonction H est la différence de deux produits de fonctions dérivables sur $]1;+\infty[$.

$$\overbrace{\left[(x+1)\times\ln(x+1)\right]'}^{(u\times v)'} = \overbrace{(x+1)'\times\ln(x+1)+\left(\ln(x+1)\right)'\times(x+1)}^{u'\times v+v'\times u}$$

$$= 1\times\ln(x+1)+\frac{1}{\cancel{x+1}}\times\cancel{(x+1)} = \ln(x+1)+1$$

$$\overbrace{\left[(x-1)\times\ln(x-1)\right]'}^{(u\times v)'} = \overbrace{(x-1)'\times\ln(x-1)+\left(\ln(x-1)\right)'\times(x-1)}^{u'\times v+v'\times u}$$

$$= 1\times\ln(x-1)+\frac{1}{\cancel{x-1}}\times\cancel{(x-1)} = \ln(x-1)+1$$

La fonction H est évidement dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle :

$$H'(x) = \left[(x+1)\cdot\ln(x+1)\right]' - \left[(x-1)\cdot\ln(x-1)\right]' == \left(\ln(x+1)+1\right)-\left(\ln(x-1)+1\right)$$

$$= \ln(x+1)+\cancel{1}-\ln(x-1)-\cancel{1} = \ln(x+1)-\ln(x-1) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = h(x)$$

Comme la dérivée de la fonction H est la fonction h, nous en concluons qu'une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]1;+\infty[$ est la fonction H.

c.2) La primitive F recherchée de la fonction $f(x)=-x+4+h(x)$ est de la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{2}\times x^2+4x+H(x)+Cste$$

Pour déterminer la valeur de la constante $Cste$, utilisons la condition initiale :

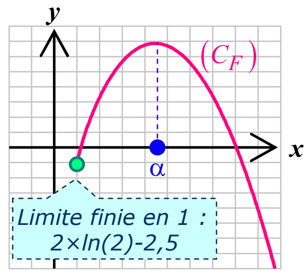
$$F(2)=3\cdot\ln(3) \Leftrightarrow -\frac{4}{2}+4\times 2+\cancel{3\times\ln(3)}-1\times\ln(1)+Cste = \cancel{3\times\ln(3)}$$

$$\Leftrightarrow -2+8-1\times 0+Cste=0 \Leftrightarrow Cste=-6$$

Conclusion : l'expression de la primitive F recherchée est :

$$F(x) = -\frac{x^2}{2}+4x+(x+1)\cdot\ln(x+1)-(x-1)\cdot\ln(x-1)-6$$

c.3) La fonction f est la dérivée de sa primitive F sur l'intervalle $]1;+\infty[$. Le signe de la première va nous donner les variations de la seconde.



x	1		α		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$		$+$	0	$-$	
f	$2\times\ln(2)-2,5$	↗	$F(\alpha)\approx 6,9$	↘	$-\infty$

$$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{2}+4+2\times\ln(2)-0^- -6 = 2\times\ln(2)-2,5$$

Car $\lim_{t\to 0^+} t\times\ln(t) = 0^-$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\times\left[-\frac{1}{2}+\frac{4}{x}+\frac{x+1}{x}\times\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{x}{x}\times\frac{\ln(x-1)}{x}-\frac{6}{x^2}\right]$$

$$= (+\infty)\times\left(-\frac{1}{2}+0^+ +1\times 0-1\times 0-0\right) = (+\infty)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\infty$$

Car $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0^+$

Hétérographie logarithmique

Le contetxe

Cet exercice est une reprise du problème précédent. Il consiste en l'étude complète d'une fonction qui est à la fois affine et logarithmique.

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par :

$$f(x)=1-x+\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 par la droite. On indiquera l'éventuelle conséquence graphique de cette limite.

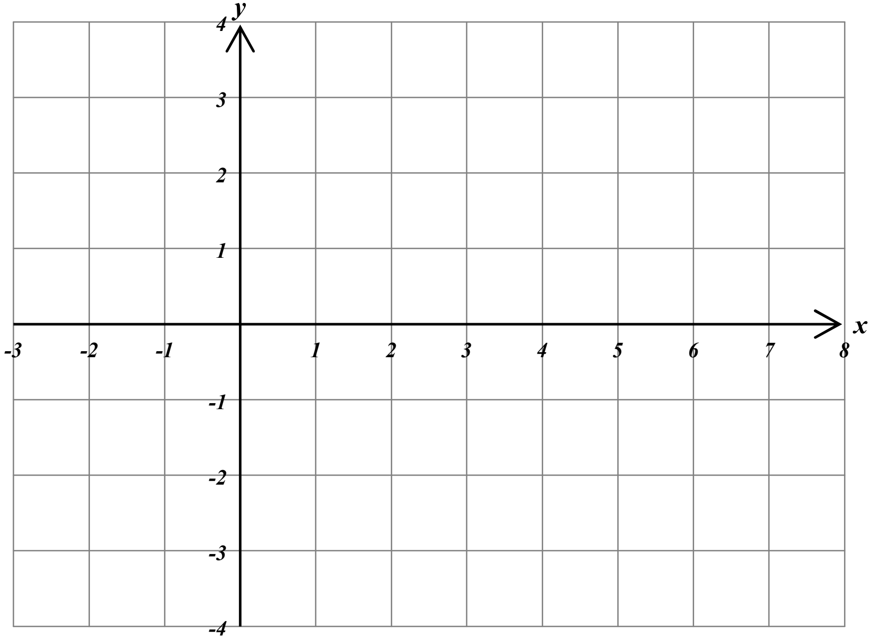
b) Démontrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.
Déterminer la position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote Δ.

c) Etablir que pour tour réel $x>-2$, on a :

$$f'(x)=-\frac{x^2+5x+5}{(x+2)(x+3)}$$

Dresser le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition $]-2;+\infty[$.

d) Sur le graphique ci-après, tracer la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.



Le corrigé

a) Lorsque x tend vers -2 par la droite :

Le numérateur $x+2$ tend vers $\boxed{0^+}$

Le dénominateur $x+3$ tend vers $\boxed{1^+}$

$\Rightarrow$ le quotient $\dfrac{x+2}{x+3}$ tend vers $\dfrac{0^+}{1^+}=\boxed{0^+}$

$\Rightarrow$ son logarithme $\ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)$ tend vers «$\ln\left(0^+\right)$» soit $\boxed{-\infty}$

Nous en concluons :

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+} 1-x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=1-(-2)+(-\infty)=\boxed{-\infty}$$

La conséquence graphique de cette limite est que la droite d'équation $x=-2$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

b) Nous sommes en présence d'une configuration que nous avons déjà rencontrée !

D'abord, nous pouvons écrire :

Il s'agit d'éviter l'indétermination ∞/∞

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\times\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\times\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{1+0^+}{1+0^+}=\frac{1}{1}=1$$

La fonction logarithme népérien étant continue en 1, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)=\ln(1)=0$$

Ainsi, au voisinage de $+\infty$, la fonction *f* se comporte-t-elle comme sa partie affine $1-x$.
Conclusion : la droite Δ d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) représentant la fonction *f* au voisinage de $+\infty$.

➲ La position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ va nous être donnée par le signe de leur différence d'ordonnées pour une même abscisse *x* :

$$y_{(C)}-y_\Delta=\cancel{1-x}+\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)-\cancel{(-x+1)}=\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)$$

Le signe du logarithme du quotient dépend de la position dudit quotient vis-à-vis de 1.
Aussi, intéressons-nous au signe de la différence :

$$\frac{x+2}{x+3}-1=\frac{x+2-1\times(x+3)}{x+3}=\frac{x+2-x-3}{x+3}=\frac{-1}{x+3}=\frac{\ominus}{\oplus}=\ominus \text{ sur }]-2;+\infty[$$

Comme leur différence est négative, alors le quotient est inférieur à 1 sur $]-2;+\infty[$.
Il vient alors pour tout réel $x>-2$:

$$\frac{x+2}{x+3}<1 \xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Ln}} \underbrace{\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)}_{y_{(C)}-y_\Delta}<\ln(1)=0$$

Conclusion : la courbe (C) est toujours au-dessous de son asymptote Δ.

c) Usant des propriétés algébriques du logarithme, nous avons que pour tout réel $x>-2$:

$$f(x)=1-x+\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)=\underbrace{1-x+\ln(x+2)-\ln(x+3)}_{\substack{\text{Valable sur }]-2;+\infty[\\ \text{car } x+2 \text{ et } x+3 \text{ y sont positifs.}}}$$

Les fonctions affines $\left|\begin{array}{l}u(x)=x+2\\u'(x)=1\end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l}v(x)=x+3\\v'(x)=1\end{array}\right.$ étant dérivables et strictement positives sur $]-2;+\infty[$, leurs logarithmes $\overbrace{\ln(x+2)}^{\ln(u)}$, $\overbrace{\ln(x+3)}^{\ln(v)}$ et *f* y sont aussi dérivables.

Nous pouvons alors écrire :

$$f'(x)=(1-x)'+\frac{u'}{u}-\frac{v'}{u}=-1+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{-1\times(x+2)\times(x+3)+1\times(x+3)-1\times(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$
$$=\frac{-x^2-3x-2x-6+x+3-x-2}{(x+2)(x+3)}=\frac{-x^2-5x-5}{(x+2)(x+3)}=-\frac{x^2+5x+5}{(x+2)(x+3)}$$

➲ Etudions le signe du seul facteur dont nous l'ignorons : $N(x)=x^2+5x+5$
Calculons le discriminant de cette forme du second degré :

$$\Delta_{N(x)}=5^2-4\times1\times5=25-20=5=\left(\sqrt{5}\right)^2$$

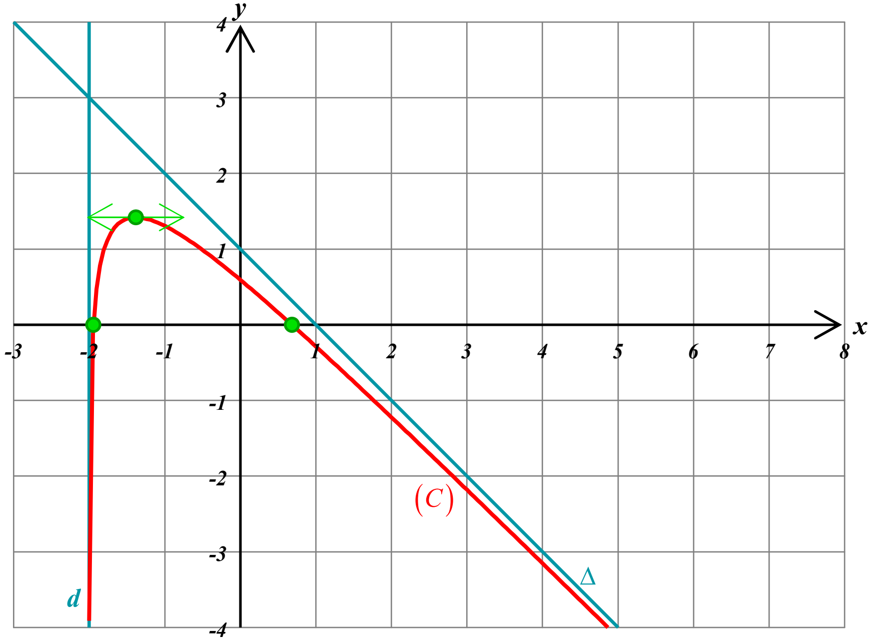
Son discriminant étant positif, le trinôme $N(x)$ admet deux racines distinctes :

$$\alpha_1=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}<-2 \quad\text{et}\quad \alpha_2=\frac{-5+\sqrt{5}}{2}>-2$$

$N(x)$ est du signe de son coefficient dominant 1 à l'extérieur de ses racines α_1 et α_2, du signe contraire à l'intérieur.
Le signe de la dérivée $f'(x)$ est à portée. Il va nous amener aux variations de *f*.
Une valeur approchée de $f(\alpha_2)$ est 1,42.

x	-2		α_2		$+\infty$
-1		$-$		$-$	
x^2+5x+5		$-$	0	$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
$x+3$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$f(\alpha_2)$	↘	$-\infty$

La courbe (C) accompagnée de ses deux asymptotes d et Δ est tracée sur le graphique ci-dessous. On a également placé trois points importants : le maximum atteint en $x = \dfrac{\sqrt{5}-5}{2}$ et les deux points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses $(\mathrm{O}x)$ dont des valeurs approchées au centième de leurs abscisses sont $-1{,}94$ et $0{,}68$.



Hétérographie exponentielle

Le contexte

Ce problème est construit autour de l'étude d'une fonction rationnelle-exponentielle. Il se termine par une mise en oeuvre de la méthode d'Euler.

L'énoncé

a) On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

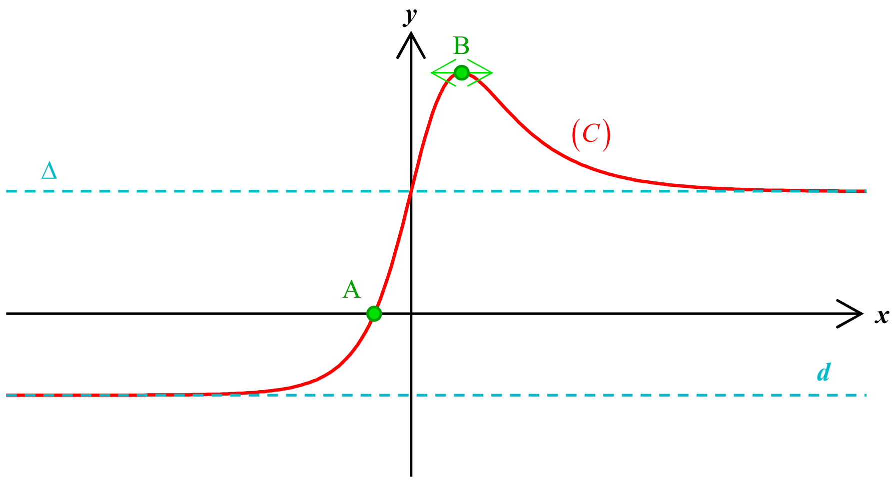
$$g(x) = e^x - x$$

1. Calculer la dérivée $g'(x)$.
2. En déduire que $g(x)$ est toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f est définie par :

$$f(x) = \frac{3e^x + 2x}{e^x - x}$$

Sa courbe représentative (C) a été tracée sur le graphique ci-dessous dans un repère orthogonal mais <u>non orthonormé</u>.



1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f. On justifiera sa réponse.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
3. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. Démontrer que pour tout réel x, nous avons :

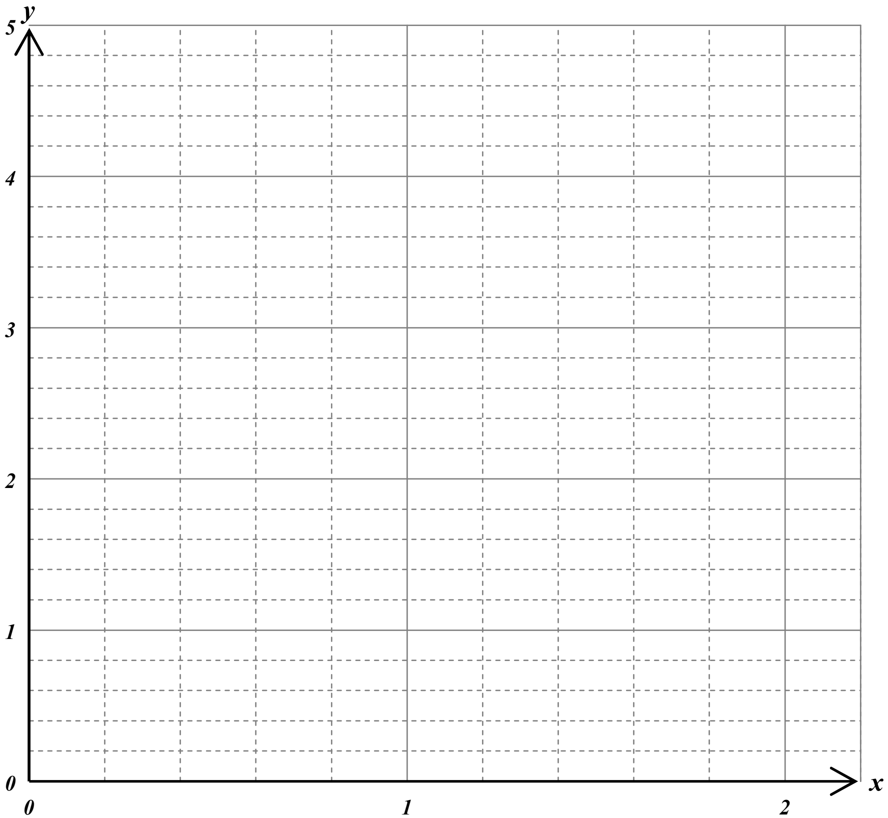
$$f'(x)=\frac{e^x\times(5-5x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

5. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
6. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera un encadrement au centième.
7. Conclure en donnant les coordonnées des points A et B ainsi que les équations réduites des droites d et Δ.

c) On rappelle que la méthode d'Euler repose sur la formule :

$$\boxed{\varphi(a+h)\approx\varphi(a)+h\times\varphi'(a)}$$

On appelle F la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=0$.
Il n'existe pas de formule permettant de connaître précisément l'expression de F.



Construire sur le graphique précédent et avec la méthode d'Euler une esquisse de la courbe (en fait une ligne brisée) représentant la fonction F sur l'intervalle $[0;1]$ avec un pas $h=0,2$.
Il s'agit donc de calculer les coordonnées de <u>cinq points</u>. La courbe obtenue sera composée de <u>cinq segments</u>. On indiquera les calculs faits sur la copie. On arrondira les valeurs obtenues au centième près.

Le corrigé

a.1) Etant la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, g l'est aussi ! Il vient alors :

$$g'(x)=\left(e^x\right)'-(x)'=\underline{e^x-1}$$

a.2) La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et valant 1 en 0, nous en déduisons que le signe de la dérivée $g'(x)$ et les variations de la fonction g sont ceux ci-contre ➔

$$g(0)=e^0-0=1-0=\underline{1}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)=e^x-1$		$-$	0	$+$	
g		↘	1	↗	

<u>Conclusion :</u> le tableau de variation ci-dessus nous indique que $g(x)$ est toujours supérieur ou égal à 1. Autrement dit, $g(x)$ est toujours strictement positif.

b.1) La fonction f est un quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Mais ce dernier ne peut exister que si son dénominateur $g(x)=e^x-x$ est non nul.
Et d'après la question **a.2**, c'est toujours le cas.
Nous en déduisons que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. En résumé : $\mathrm{D}_f=\underline{]-\infty;+\infty[}$

b.2) De prime abord :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^x+2x}{e^x-x}=\frac{3\times0^++(-\infty)}{0^+-(-\infty)}=\frac{-\infty}{+\infty}=\underline{\text{Forme indéterminée}}$$

Modifions l'écriture du quotient $f(x)$ en factorisant numérateur et dénominateur par celui qui semble faire la loi au voisinage de $-\infty$: x.

$$f(x)=\frac{3e^x+2x}{e^x-x}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\times\frac{3\times e^x\times\frac{1}{x}+2}{e^x\times\frac{1}{x}-1}=\frac{3\times e^x\times\frac{1}{x}+2}{e^x\times\frac{1}{x}-1}$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3\times e^x \times \frac{1}{x}+2}{e^x \times \frac{1}{x}-1} = \frac{3\times 0^+ \times 0^- +2}{0^+ \times 0^- -1} = \frac{2}{-1} = \boxed{-2}$$

La conséquence graphique de cette limite est que la droite d'équation $y=-2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$. Il s'agit de la droite *d*.

b.3) De prime abord :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x+2x}{e^x-x} = \frac{3\times(+\infty)+(+\infty)}{(+\infty)-(+\infty)} = \boxed{\text{Formes indéterminées}}$$

Là encore, nous allons modifier l'écriture du quotient $f(x)$ en factorisant numérateur et dénominateur par le terme nous semblant le plus fort en $+\infty$: e^x.

$$f(x) = \frac{3e^x+2x}{e^x-x} = \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} \times \frac{3+2\times\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}} = \boxed{\frac{3+2\times\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}}$$

Le cours nous enseigne :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x/x} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0^+}$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+2\times\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}} = \frac{3+2\times 0^+}{1-0^+} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

La conséquence graphique de cette limite est que la droite d'équation $y=3$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. Il s'agit de la droite Δ.

b.4) *f* est le quotient des fonctions

$u(x)=3e^x+2x$ et	$v(x)=e^x-x$
$u'(x)=3e^x+2$	$v'(x)=e^x-1$
Dérivable sur $\mathbb{R}$	Dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel *x*, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = \frac{u'\times v - v'\times u}{v^2} = \frac{(3e^x+2)\times(e^x-x)-(e^x-1)\times(3e^x+2x)}{(e^x-x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{3e^{2x}} - 3xe^x + 2e^x - \cancel{2x} - \cancel{3e^{2x}} - 2xe^x + 3e^x + \cancel{2x}}{(e^x-x)^2}$$

$$= \frac{5\times\boxed{e^x} - 5x\times\boxed{e^x}}{(e^x-x)^2} = \boxed{\frac{\boxed{e^x}\times(5-5x)}{(e^x-x)^2}}$$

b.5) L'exponentielle e^x étant toujours strictement positive, c'est le facteur $5-5x$ qui donne son signe à la dérivée $f'(x)$.

Calculons l'image de 1 par la fonction *f*.

$$f(1) = \frac{3\times e^1+2\times 1}{e^1-1} = \boxed{\frac{3e+2}{e-1} \approx 5{,}91}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$-5x+5$		$+$	0	$-$	
$(e^x-x)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-2	$\nearrow$	$(3e+2)/(e-1)$	$\searrow$	3

b.6) La fonction *f* est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
Ensuite, sur l'intervalle $]-\infty;1]$, étant attendus :

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;1]$.
L'image de l'intervalle $]-\infty;1]$ par la fonction *f* est l'intervalle $]-2;f(1)]$.
$f(1)$ est positif donc 0 appartient à l'intervalle image $]-2;f(1)]$.

alors, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty;1]$.
Par contre, la fonction *f* étant toujours supérieure à 3 sur $]1;+\infty[$, l'équation $f(x)=0$ n'a aucune solution dans cet intervalle.

Grâce à la calculatrice, on détermine qu'un encadrement au centième de la solution α est :

$$-0,73 \leq \alpha \leq -0,72$$

b.7) Les deux asymptotes *d* et Δ ont pour équations respectives $y=-2$ et $y=3$.

A étant le point de (C) dont l'ordonnée est égale à 0, ses coordonnées sont $(\alpha;0)$.

Du fait de la tangente horizontale, le point B a pour coordonnées $\left(1;\dfrac{3e+2}{e-1}\right)$.

c) La dérivée de la fonction *F* est la fonction *f*. Appliquée à ces deux fonctions, la formule rappelée devient :

$$\boxed{F(a+h)\approx F(a)+h\times f(a)}$$

Comme $F(0)=0$, le premier point de notre esquisse est $A_0(0;0)$.

Calculons les coordonnées des cinq autres points qui articulent notre esquisse :

$F(0,2)\approx F(0)+0,2\times f(0)=0+0,2\times 3=0,6 \quad \Rightarrow \quad A_1(0,2;0,6)$

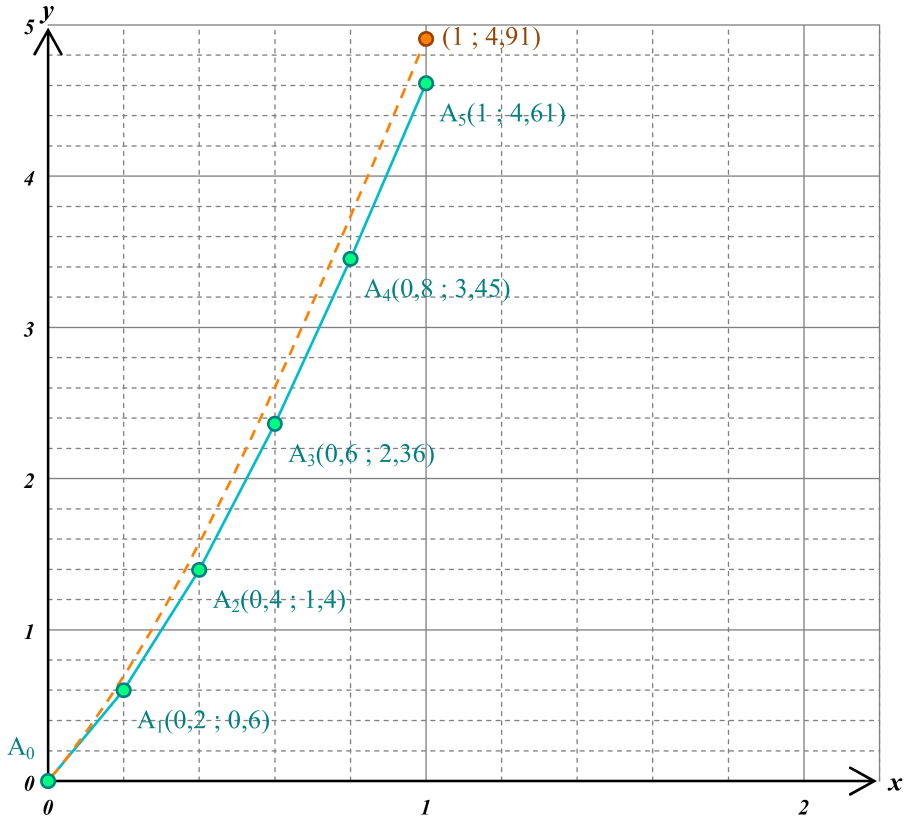
$F(0,4)\approx F(0,2)+0,2\times f(0,2)\approx 0,6+0,2\times 3,98=1,4 \quad \Rightarrow \quad A_2(0,4;1,4)$

$F(0,6)\approx F(0,4)+0,2\times f(0,4)\approx 1,4+0,2\times 4,83=2,36 \quad \Rightarrow \quad A_3(0,6;2,36)$

$F(0,8)\approx F(0,6)+0,2\times f(0,6)\approx 2,36+0,2\times 5,45=3,45 \quad \Rightarrow \quad A_4(0,8;3,45)$

$F(1)\approx F(0,8)+0,2\times f(0,8)\approx 3,45+0,2\times 5,81=4,61 \quad \Rightarrow \quad A_5(1;4,61)$

L'esquisse obtenue a été tracée sur le graphique ci-après.



En tirets oranges, on a tracé l'esquisse obtenue avec un pas $h=0,01$ soit 100 points calculés dont le tracé doit être assez proche de la courbe réelle de *F*.

Complexes et géométrie

Complexité homographique

Le contexte

Un exercice de calcul algébrique complexe ayant pour cadre une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{C}$ ou presque. On y recherche des images et un antécédent.

L'énoncé

La fonction f est définie par :

$$f(z) = \frac{z+1}{z+\boldsymbol{i}}$$

a) Quels les nombres complexes z qui ont une image par la fonction f ? On justifiera sa réponse.

b) Déterminer les images par la fonction f de 0 ; $2-\boldsymbol{i}$ et $1+2\boldsymbol{i}$.

c) Déterminer les antécédents de $2-3\boldsymbol{i}$ par la fonction f.

Le corrigé

a) La fonction homographique f est un quotient...complexe !

Le quotient $f(z)$ existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $z+\boldsymbol{i}$ est non nul $\Leftrightarrow$ $z \neq -\boldsymbol{i}$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{C} \setminus \{-\boldsymbol{i}\}$.

b) Calculons les images demandées par la fonction f.

$$f(0) = \frac{0+1}{0+\boldsymbol{i}} = \frac{1}{\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{i}$$

$$f(2-\boldsymbol{i}) = \frac{2-\boldsymbol{i}+1}{2-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}} = \frac{3-\boldsymbol{i}}{2}$$

$$f(1+2\boldsymbol{i}) = \frac{1+2\boldsymbol{i}+1}{1+2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}} = \frac{2+2\boldsymbol{i}}{1+3\boldsymbol{i}} = \frac{(2+2\boldsymbol{i})\times(1-3\boldsymbol{i})}{(1+3\boldsymbol{i})\times(1-3\boldsymbol{i})} = \frac{2-6\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{i}+6}{1^2-(3\boldsymbol{i})^2} = \frac{8-4\boldsymbol{i}}{1-(-9)} = \frac{4-2\boldsymbol{i}}{5}$$

c) Pour déterminer les antécédents de $2-3\boldsymbol{i}$ par f, nous devons résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
f(z) = 2-3\boldsymbol{i} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{z+\boldsymbol{i}} = 2-3\boldsymbol{i} \quad \Leftrightarrow \quad z+1 = (z+\boldsymbol{i})\times(2-3\boldsymbol{i}) \\
&\Leftrightarrow \quad z+1 = z\times(2-3\boldsymbol{i}) + \boldsymbol{i}\times(2-3\boldsymbol{i}) \\
&\Leftrightarrow \quad z-(2-3\boldsymbol{i})\times z = -1+2\boldsymbol{i}+3 \\
&\Leftrightarrow \quad (3\boldsymbol{i}-1)\times z = 2+2\boldsymbol{i} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{2+2\boldsymbol{i}}{3\boldsymbol{i}-1} = \frac{(2+2\boldsymbol{i})\times(3\boldsymbol{i}+1)}{(3\boldsymbol{i}-1)\times(3\boldsymbol{i}+1)} = \frac{6\boldsymbol{i}+2-6+2\boldsymbol{i}}{(3\boldsymbol{i})^2-1^2} = \frac{-4+8\boldsymbol{i}}{-10} = \frac{2-4\boldsymbol{i}}{5}
\end{aligned}$$

Transformations complexes

Le contexte

Un exercice imposant traitant des écritures complexes de transformations du plan.

L'énoncé

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ sur la figure ci-contre.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives :

$$a=-1+\boldsymbol{i} \qquad b=2-2\boldsymbol{i} \qquad c=2$$

a) On appelle D l'image du point A par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

1. Calculer l'affixe d du point D.
2. Construire le point D en utilisant exclusivement le compas et le quadrillage. On laissera apparents les traits de construction.
3. Déterminer l'affixe ω du point Ω qui est le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ par laquelle le point A a pour image C.

b) On appelle G l'image du point A par l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{2}{3}$.

1. Calculer l'affixe g du point G.
2. Construire le point G en utilisant exclusivement la règle et le quadrillage. On laissera apparents les traits de construction.
3. Existe-t-il une homothétie de centre A par laquelle le point B ait pour image le point O ? Si oui, on en déterminera le rapport. Si non, on expliquera pourquoi.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

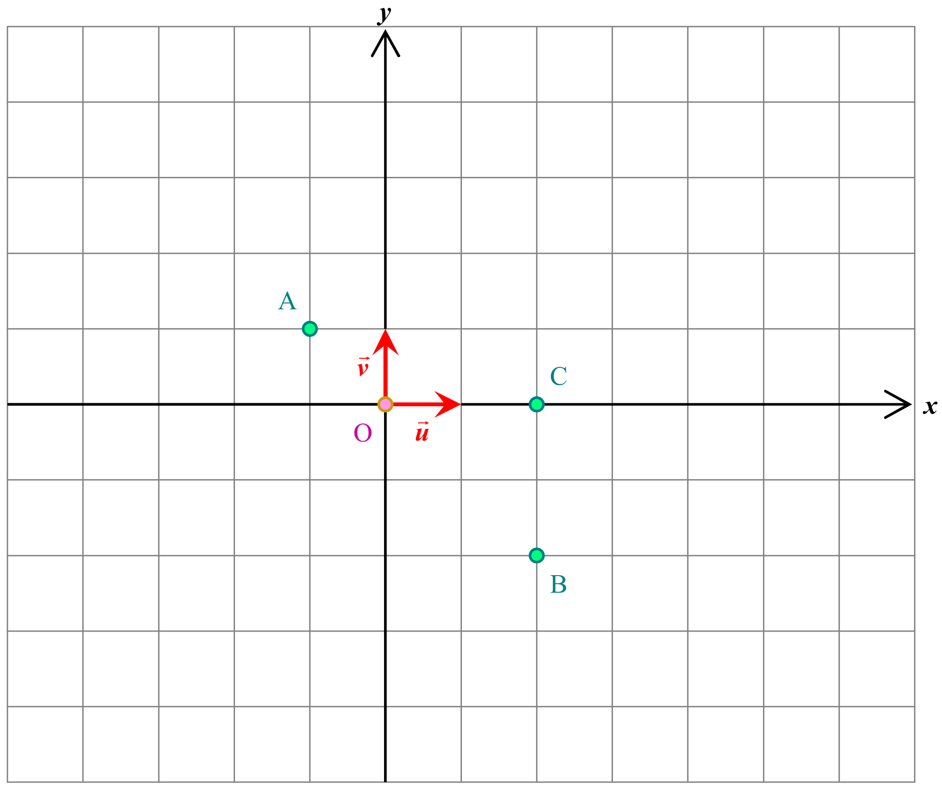
1. La transformation ***r*** dont une écriture complexe est : $z'=e^{\boldsymbol{i}\frac{5\pi}{7}}\times z$.
2. La transformation ***s*** dont une écriture complexe est : $z'=z-3+\boldsymbol{i}$.
3. La transformation ***t*** dont une écriture complexe est : $z+z'=4$

d) On appelle ***f*** la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' définie par :

$$z'=\left(1-\boldsymbol{i}\right)\times\overline{z}+2\boldsymbol{i}$$

On appelle P et Q les images respectives des points A et B par la transformation ***f***.

1. Calculer les affixes p et q des points P et Q.
   On vérifiera que $q-p=6$
2. En résolvant l'équation $z'=z$, déterminer les affixes des points fixes de la transformation ***f*** [c'est-à-dire ceux qui sont leurs propres images par ***f***].
   <u>Indication :</u> au cours de la résolution, on pourra poser $z=x+\boldsymbol{i}y$ où x et y sont les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z.
3. Ecrire les quotients $\frac{c-a}{b-a}$ et $\frac{c-p}{q-p}$ sous forme algébrique.
   En déduire une relation entre les angles orientés $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PC}\right)$.



Le corrigé

a.1) Comme le point D est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$, alors les affixes de ces points sont liées par la relation :

$$d-b=e^{-i\frac{3\pi}{4}}\times(a-b) \Leftrightarrow d-(2-2i)=\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]\times\left[(-1+i)-(2-2i)\right]$$

$$\Leftrightarrow d=2-2i+\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\times\left[-3+3i\right]$$

$$=2-2i+\frac{3\sqrt{2}}{2}-\cancel{\frac{3\sqrt{2}}{2}i}+\cancel{\frac{3\sqrt{2}}{2}i}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i^2$$

$$=2-2i+\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\times(-1)=\underline{2+3\sqrt{2}-2i}$$

a.2) Le point D est l'un des deux points d'intersection du cercle de centre B passant par A et de la droite horizontale d'équation $y=-2$

a.3) Comme le point Ω est le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ par laquelle le point A a pour image C, alors les affixes de ces trois points sont liées par la relation :

$$c-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}\times(a-\omega) \Leftrightarrow 2-\omega=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\times\left[(-1+i)-\omega\right]$$

$$\Leftrightarrow 2-\omega=i\times\left[-1+i-\omega\right] \Leftrightarrow -\omega=-2-i-1-i\omega$$

$$\Leftrightarrow i\omega-\omega=-3-i$$

$$\Leftrightarrow \omega=\frac{-3-i}{i-1}=\frac{(-3-i)\times(i+1)}{(i-1)\times(i+1)}$$

$$=\frac{-3i-3-(-1)-i}{i^2-1^2}=\frac{-2-4i}{-1-1}=\underline{1+2i}$$

b.1) Comme le point G est l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{2}{3}$, alors les affixes de ces points sont liées par la relation :

$$g-c=-\frac{2}{3}\times(a-c) \Leftrightarrow g-2=-\frac{2}{3}\times\left[(-1+i)-2\right]$$

$$\Leftrightarrow g=2-\frac{2}{3}\times\left[-3+i\right]=2+2-\frac{2}{3}i=\underline{4-\frac{2}{3}i}$$

b.2) Par une homothétie, le centre, le point et son image sont alignés. Par conséquent, l'image G appartient à la droite (CA).
De par son affixe, le point G appartient aussi à la droite verticale d'équation $x=4$.
On construit G comme étant le point d'intersection de ces deux droites.

b.3) Vu la figure, la réponse semble être «oui» car le centre A, le point B et son image O semblent alignés. En fait, toute la question est de savoir s'il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{AO}=k\times\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 0-a=k\times(b-a) \Leftrightarrow 0-(-1+i)=k\times\left((2-2i)-(-1+i)\right)$$

On traduit sous forme complexe l'égalité vectorielle...

$$\Leftrightarrow 1-i=k\times(3-3i) \Leftrightarrow k=\frac{1-i}{3-3i}=\frac{\cancel{(1-i)}}{3\times\cancel{(1-i)}}=\underline{\frac{1}{3}}$$

<u>Conclusion :</u> l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$ transforme le point B en O.

c.1) L'écriture complexe de la transformation ***r*** est celle d'une rotation de centre O. En effet, en supposant que z et z' sont les affixes respectives des points M et M′, on a :

$$z'=e^{i\frac{5\pi}{7}}\times z \Leftrightarrow z'-0=e^{i\frac{5\pi}{7}}\times(z-0)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\text{M}'\text{ est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle }\frac{5\pi}{7}}$$

c.2) L'écriture complexe de la transformation ***s*** est celle de la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$. En effet, l'affixe de ce vecteur est :

$$z_{\overrightarrow{CA}}=a-c=(-1+i)-2=\underline{-3+i}$$

c.3) L'écriture complexe de la transformation ***t*** est celle d'une symétrie centrale. En effet, en supposant que z et z' sont les affixes respectives des points M et M′, il vient :

$$z+z'=4 \Leftrightarrow \frac{z+z'}{2}=2=c \Leftrightarrow \text{C est le milieu du segment [MM}'\text{]}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\text{M}'\text{ est le symétrique de M par rapport à C}}$$

<u>Conclusion :</u> la transformation ***t*** est la symétrie centrale de centre C.

d.1) Comme les points P et Q sont les images des points A et B par la transformation ***f***, alors leurs affixes sont données par :

$$\begin{cases} p=(1-i)\times\overline{a}+2i=(1-i)\times(-1-i)+2i=-1-i+i+(-1)+2i=\underline{-2+2i} \\ q=(1-i)\times\overline{b}+2i=(1-i)\times(2+2i)+2i=2+2i-2i+2+2i=\underline{4+2i} \end{cases}$$

On vérifie que $q-p=(4+2i)-(-2+2i)=\underline{6}$

d.2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

On pose $z = x + iy$
donc $\overline{z} = x - iy$

$$\begin{aligned} z' = z &\Leftrightarrow (1-i)\times\overline{z} + 2i = z \\ &\Leftrightarrow (1-i)\times(x-iy)+2i = x+iy \\ &\Leftrightarrow x - iy - ix + i^2 y + 2i = x + iy \\ &\Leftrightarrow \overbrace{x - y + i\times(2-x-y) = x + iy}^{\text{Deux nombres complexes égaux...}} \Leftrightarrow \overbrace{\cancel{x} - y = \cancel{x}}^{\text{Parties réelles égales...}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{2 - x - y = y}^{\text{Parties imaginaires égales...}} \end{aligned}$$

$$y = 0 \qquad 2 - x - 0 = 0$$

$$x = 2$$

<u>Conclusion :</u> la transformation $\boldsymbol{f}$ a un seul point fixe. Il a pour affixe 2. Il s'agit de C.

d.3) Ecrivons les deux quotients complexes sous forme algébrique.

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{2-(-1+i)}{(2-2i)-(-1+i)} = \frac{3-i}{3-3i} = \frac{(3-i)\times(3+3i)}{(3-3i)\times(3+3i)} = \frac{9+9i-3i+3}{3^2-(3i)^2} = \frac{12+6i}{9-(-9)} = \frac{2}{3}+\frac{i}{3}$$

$$\frac{c-p}{q-p} = \frac{2-(-2+2i)}{6} = \frac{4-2i}{6} = \frac{2}{3}-\frac{i}{3}$$

➲ Les mesures des angles orientés $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PC}\right)$ sont les arguments des deux quotients précédents. Plus exactement :

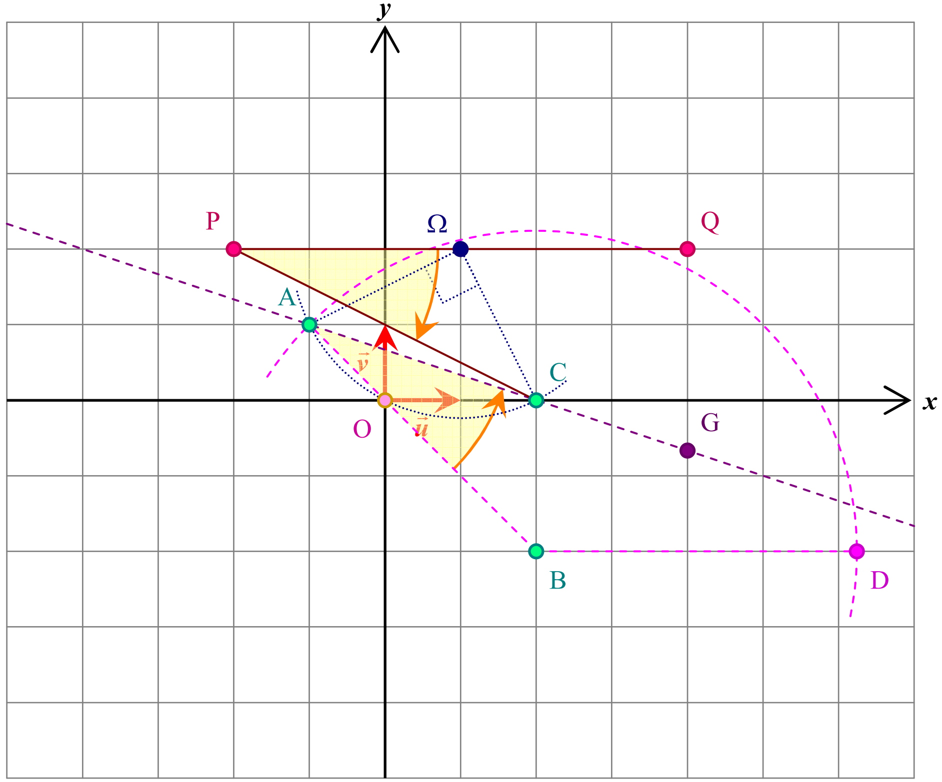
$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \qquad \underline{\text{et}} \qquad \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PC}\right) = \arg\left(\frac{q-p}{c-p}\right)$$

Or, ces deux quotients sont conjugués. Donc, leurs arguments sont opposés. Ainsi :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = -\arg\left(\frac{q-p}{c-p}\right) = -\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PC}\right)$$

Le dessous des cartes
P, Q et C sont les images respectives des points A, B et C par la transformation $\boldsymbol{f}$.
De par son expression complexe de la forme «affine-conjuguée», la transformation $\boldsymbol{f}$ est ce que l'on appelle une similitude indirecte, c'est-à-dire que qu'elle change l'orientation des angles. C'est pour cela que les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et celles de son image $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PC}\right)$ sont opposées.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Espace total !

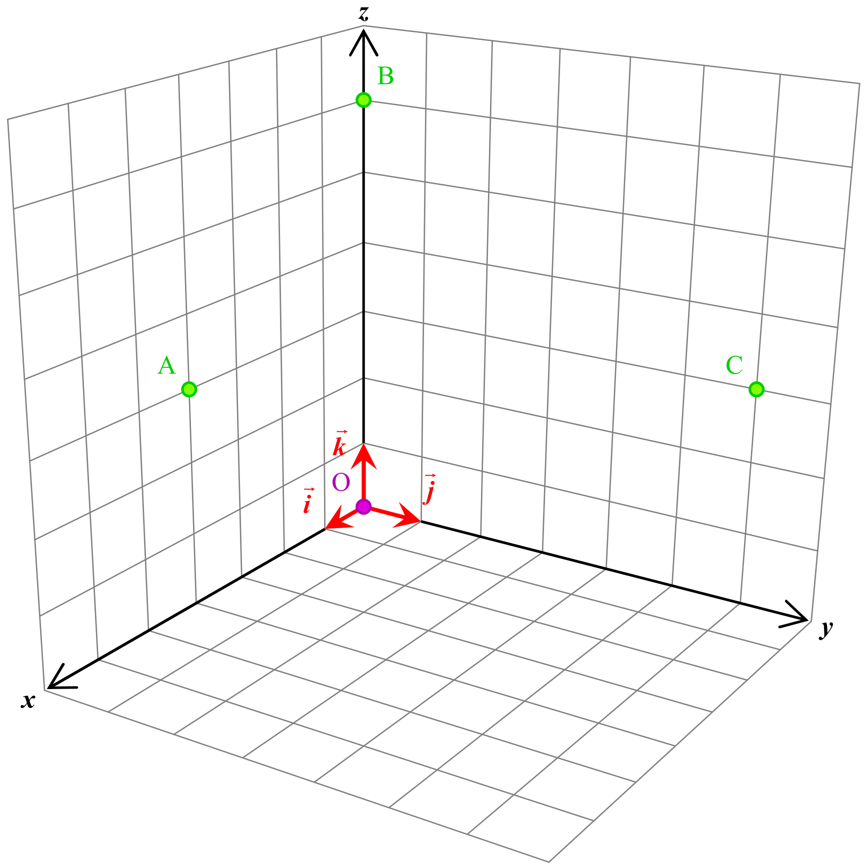
Le contexte

Un exercice de géométrie analytique dans l'espace abordant tous les classiques du genre avec une petite excursion sur le produit scalaire vu en première S.

L'énoncé

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Dans ce dernier représenté en perspective centrale sur la figure ci-dessous, on a positionné les points :

$A(4;0;3)$ $B(0;0;6)$ $C(0;6;3)$



a) On donne le programme suivant :

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

Si $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}$ alors afficher "................"

Si $x\times x'+y\times y'+z\times z'\neq 0$ alors afficher "................"

Quels messages le programme doit-il afficher entre les guillemets "..." ?

b) On appelle $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et qu'ils définissent un plan.
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).
3. En déduire une équation du plan (ABC).

c) On note G le barycentre des points pondérés $(A;3)$, $(B;-2)$ et $(C;1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point G.
2. Vérifier que la distance GB est égale à 9.

On admettra que les distances GA et GC mesurent respectivement $\sqrt{22}$ et $3\sqrt{6}$.

d) On appelle $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x+y+z-11=0$.

On appelle ***d*** la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases}x=2-4t\\y=5+10t\\z=2-2t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

1. Le point A appartient-il à la droite ***d*** ? On justifiera sa réponse
2. Démontrer que l'intersection des plans (ABC) et $\mathcal{P}$ est la droite ***d***.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ qui est la perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ passant par le point G.
4. Déterminer les coordonnées du point K qui est l'intersection de la droite Δ et du plan $\mathcal{P}$.

e) On appelle Σ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant l'égalité :

$$3\times \mathrm{MA}^2-2\times \mathrm{MB}^2+\mathrm{MC}^2=8$$

1. **La question impossible à ☠☠☠☠ points**
   On rappelle trois propriétés du cours :
   - ***(i)*** Le barycentre G est le point de l'espace tel que $3\overrightarrow{\mathrm{GA}}-2\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$
   - ***(ii)*** Le carré de la norme est égal au carré scalaire : $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$
   - ***(iii)*** $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\times\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

   En utilisant ces propriétés, établir que pour tout point M de l'espace, on a :

   $$3\times \mathrm{MA}^2-2\times \mathrm{MB}^2+\mathrm{MC}^2=2\times \mathrm{MG}^2-42$$
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ qui est l'intersection de l'ensemble Σ et du plan $\mathcal{P}$.

Le corrigé

a) La première instruction `si` regarde si les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles. Le message à afficher est : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

La seconde instruction `si` teste si le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est non nul. Le message à afficher est Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux .

b.1) Regardons si les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont proportionnelles.

	$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$		$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
Abscisses	-4	$\xleftarrow{\times 1}$	-4
Ordonnées	0	$\xleftarrow{\times 0}$	6
Cotes	3	$\xrightarrow{\times 0}$	0

Leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

b.2) Nous pouvons écrire :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}=3\times(-4)+2\times 0+4\times 3=-12+0+12=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$$

De plus :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\\0\end{pmatrix}=3\times(-4)+2\times 6+4\times 0=-12+12+0=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$$

Comme le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ qui sont directeurs pour le plan (ABC), alors le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b.3) Le plan (ABC) est défini par son point A et son vecteur normal $\vec{n}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{ABC}) &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-4\\y\\z-3\end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow (x-4)\times 3+y\times 2+(z-3)\times 4=0\\
&\Leftrightarrow 3x-12+2y+4z-12=0 \Leftrightarrow \boxed{3x+2y+4z-24=0}
\end{aligned}$$

c.1) Comme G est le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A};3)$, $(\mathrm{B};-2)$ et $(\mathrm{C};1)$, alors ses coordonnées sont données par les formules :

$$x_{\mathrm{G}}=\frac{3\times x_{\mathrm{A}}-2\times x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{C}}}{3+(-2)+1}=\frac{3\times 4-2\times 0+0}{2}=\frac{12}{2}=\boxed{6}$$

$$y_{\mathrm{G}}=\frac{3\times y_{\mathrm{A}}-2\times y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{C}}}{3+(-2)+1}=\frac{3\times 0-2\times 0+6}{2}=\frac{6}{2}=\boxed{3}$$

$$z_{\mathrm{G}}=\frac{3\times z_{\mathrm{A}}-2\times z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{C}}}{3+(-2)+1}=\frac{3\times 3-2\times 6+3}{2}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

c.2) Calculons les distances demandées :

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{GA}=\|\overrightarrow{\mathrm{GA}}\|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{4+9+9}=\boxed{\sqrt{22}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GB}}\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{GB}=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{36+9+36}=\sqrt{81}=\boxed{9}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GC}}\begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{GC}=\sqrt{(-6)^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54}=\sqrt{9}\times\sqrt{6}=\boxed{3\sqrt{6}}$$

d.1) Les coordonnées du point A vérifient-elles la représentation paramétrique de $\boldsymbol{d}$?

Existe un réel t tel que $x_A = 2-4t$ <u>et</u> $y_A = 2-4t$ <u>et</u> $z_A = 2-2t$?

$$\begin{array}{lll} 4 = 2-4t & 0 = 5+10t & 3 = 2-2t \\ 4t = -2 & -10t = 5 & 2t = -1 \\ t = -0,5 & t = -0,5 & t = -0,5 \end{array}$$

La réponse est oui ! Il d'agit de la valeur $t=-0,5$

<u>Conclusion :</u> le point A appartient bien à la droite $\boldsymbol{d}$.

d.2) Un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y+z-11=0$ est $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

Comparons les coordonnées des vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

	$\vec{n}$		$\vec{n'}$
Abscisses	3	$\xleftarrow{\times 1,5}$	2
Ordonnées	2	$\xleftarrow{\times 2}$	1
Cotes	4	$\xleftarrow{\times 4}$	1

Leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires. Donc les plans (ABC) et $\mathcal{P}$ sont sécants suivant une droite $\boldsymbol{d'}$.

➲ Nous savons déjà que le point A appartient déjà au plan (ABC) et à la droite $\boldsymbol{d}$.
Mais fait-il aussi partie du plan $\mathcal{P}$?

$$2x_A + y_A + z_A - 11 = 2\times 4+0+3-11 = 8+0+3-11 = 0$$

Comme ses coordonnées en vérifient l'équation, alors le point A fait aussi partie du plan $\mathcal{P}$.
Donc A appartient aussi à l'intersection $\boldsymbol{d'} = (\text{ABC}) \cap \mathcal{P}$.

D'après sa représentation paramétrique, un autre point de la droite $\boldsymbol{d}$ est :

$$\text{E}\begin{cases} x_E = 2-2\times 0 = 2 \\ y_E = 5+5\times 0 = 5 \\ z_E = 2-0 = 2 \end{cases} \quad \text{avec } t=0$$

Clairement, la droite $\boldsymbol{d}$ est aussi la droite (AE).
Regardons si ce point E appartient aux plans (ABC) et $\mathcal{P}$.

$$3x_E + 2y_E + 4z_E - 24 = 3\times 2+2\times 5+4\times 2-24 = 6+10+8-24 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{E} \in (\text{ABC})$$
$$2x_E + y_E + z_E - 11 = 2\times 2+5+2-11 = 4+5+2-11 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{E} \in \mathcal{P}$$

<u>Conclusion :</u> ses deux points A et E appartenant aux plans sécants (ABC) et $\mathcal{P}$, l'intersection de ceux-ci est la droite (AE) autrement nommée $\boldsymbol{d}$.

d.3) Tout vecteur normal à un plan est directeur pour chacune de ses perpendiculaires.
La droite Δ est défini par le point $\text{G}(6;3;0)$ et son vecteur directeur $\vec{n'}(2;1;1)$.

$\text{M}(x;y;z) \in \Delta \iff$ Les vecteurs $\overrightarrow{\text{GM}}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires

$\iff$ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\text{GM}} = t \times \vec{n'}$ soit $\begin{cases} x-6 = t\times 2 \\ y-3 = t\times 1 \\ z-0 = t\times 1 \end{cases}$

<u>Conclusion :</u> une représentation paramétrique de la droite Δ est $\begin{cases} x = 6+2t \\ y = 3+t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

c.4) Comme K appartient à la droite Δ, alors il existe un réel t_K tel que $\begin{cases} x_K = 6+2t_K \\ y_K = 3+t_K \\ z_K = t_K \end{cases}$

Comme K appartient aussi au plan $\mathcal{P}$, alors ses coordonnées en vérifient l'équation :

$$\begin{aligned} 2x_K + y_K + z_K - 11 = 0 &\iff 2\times(6+2t_K)+(3+t_K)+t_K-11 = 0 \\ &\iff 12+4t_K+3+t_K+t_K-11 = 0 \\ &\iff 6t_K = -4 \iff t_K = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$x_K = 6+2\times\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{18}{3}-\frac{4}{3} = \frac{14}{3} \quad \underline{\text{et}} \quad y_K = 3+\left(-\frac{2}{3}\right) = 3-\frac{2}{3} = \frac{7}{3} \quad \underline{\text{et}} \quad z_K = -\frac{2}{3}$$

e.1) Pour tout point M de l'espace, nous pouvons écrire :

*Propriété **(ii)**...*

$$3MA^2-2MB^2+MC^2=3\times\overrightarrow{MA}^2-2\times\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$$

$$=3\times\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2-2\times\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$=3\times\overrightarrow{MG}^2+\boxed{\left(2\,\overrightarrow{MG}\right)}\cdot\left(3\,\overrightarrow{GA}\right)+2\times\overrightarrow{GA}^2$$

*Propriété **(iii)**...*

$$-2\times\overrightarrow{MG}^2+\boxed{\left(2\,\overrightarrow{MG}\right)}\cdot\left(-2\,\overrightarrow{GB}\right)-2\times\overrightarrow{GB}^2$$

$$+\overrightarrow{MG}^2+\boxed{\left(2\,\overrightarrow{MG}\right)}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}^2$$

*Propriété **(i)**...*

$$=2MG^2+3GA^2-2GB^2+GC^2+\boxed{\left(2\,\overrightarrow{MG}\right)}\cdot\underbrace{\left(3\,\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)}_{=\vec{o}}$$

$$=2MG^2+3\times22-2\times81+54+\left(2\,\overrightarrow{MG}\right)\cdot\vec{o}=2\times MG^2-42$$

e.2) L'égalité définissant l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}$ devient alors :

$$M\in\boldsymbol{\Sigma}\iff 3\times MA^2-2\times MB^2+MC^2=8$$

$$\iff 2\times MG^2-42=8\iff 2\times MG^2=50\iff MG^2=25$$

$$\iff MG=5$$

Conclusion : l'ensemble Σ est la sphère de centre $G\left(6;3;0\right)$ et de rayon 5.

e.3) Calculons la distance existant entre le centre G de la sphère $\boldsymbol{\Sigma}$ et le plan $\mathcal{P}$.

$$d\left(G;\mathcal{P}\right)=\frac{\left|2\times6+3+0-11\right|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{\left|12+3+0-11\right|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{|4|}{\sqrt6}=\frac{4}{\sqrt6}=\frac{4\times\sqrt6}{\sqrt6\times\sqrt6}=\frac{4\sqrt6}{6}=\frac{2}{3}\sqrt6$$

Comme la distance entre le centre G et le plan $\mathcal{P}$ est inférieur au rayon 5 de la sphère $\boldsymbol{\Sigma}$, alors l'intersection $\boldsymbol{\Gamma}$ est un cercle :

Inclus dans le plan $\mathcal{P}$

Son centre est le projeté orthogonal K de G dans le plan $\mathcal{P}$

Son rayon est égal à $\sqrt{5^2-\left(\frac{2}{3}\sqrt6\right)^2}=\sqrt{25-\frac{4}{9}\times6}=\sqrt{25-\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{67}{3}}$

Equations différentielles, primitives et intégrales

Problème différentiel

Le contexte

Ce problème d'analyse classique commence par une résolution d'équations différentielles, se poursuit par une étude de fonction à base d'exponentielle et se termine par la détermination d'une primitive

L'énoncé

Ce problème est composé de quatre parties relativement indépendantes.

a) Dans cette première partie, il s'agit de résoudre les équations différentielles :

$$\begin{cases} (E) & y'-3y=4xe^{x} \\ (E') & y'-3y=0 \end{cases}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $u(x)=(ax+b)e^{x}$ soit une solution de l'équation différentielle ***(E)***.
2. Démontrer que la fonction $\varphi=u+v$ est solution de l'équation différentielle ***(E)*** si et seulement si la fonction v est solution de l'équation différentielle ***(E')***.
3. Donner les solutions de l'équation différentielle ***(E')***.
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle ***(E)***.
5. Déterminer la solution de l'équation différentielle ***(E)*** qui s'annule en 0.

b) La fonction g est définie pour tout réel x par :

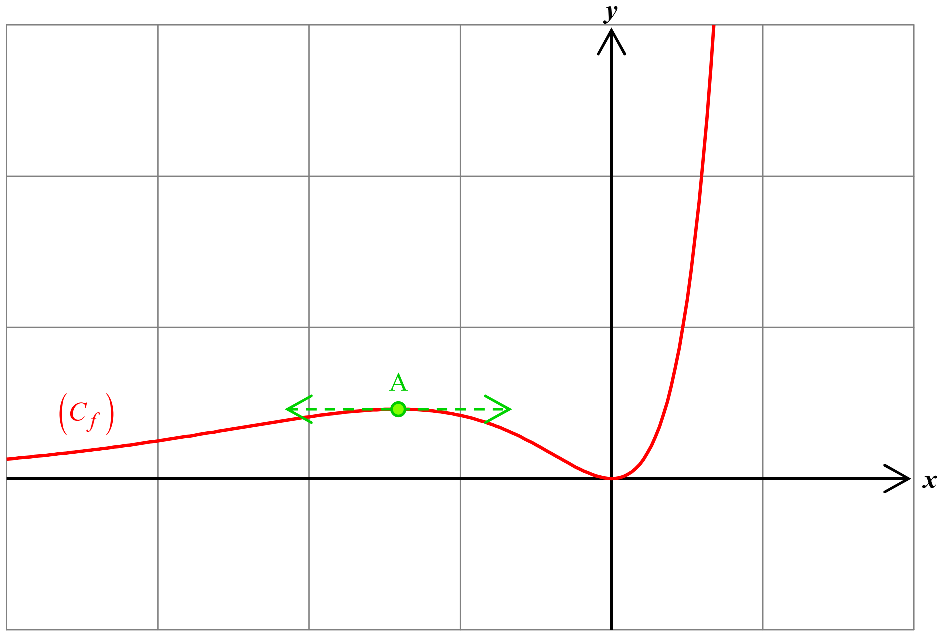
$$g(x)=3\times e^{2x}-2x-3$$

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée $g'(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g'(x)>0$.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
6. Vérifier que 0 est l'une de ces solutions et donner un encadrement au centième près de la seconde solution que l'on notera α.
7. Conclure en dressant le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=e^{3x}-(2x+1)\times e^{x}$$

Sa courbe représentative (C_f) est tracée sur le graphique ci-dessous.



1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. En calculant la dérivée de la fonction f, montrer que pour tout réel x, on a :
$$f'(x)=e^{x}\times g(x)$$
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Sur le graphique, la tangente à la courbe (C_f) au point A est horizontale. Donner des valeurs approchées au centième des coordonnées du point A.

d) On appelle F la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F(0)=7$.

1. Démontrer que la fonction $H(x)=(2x-1)\times e^{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h(x)=(2x+1)\times e^{x}$.
2. En déduire l'expression de la primitive F.

Le corrigé

a.1) Avant toutes choses, calculons la dérivée de la fonction u qui est un produit :

$$u'(x)=\left[(ax+b)\times e^x\right]'=(ax+b)'\times e^x+\left(e^x\right)'\times(ax+b)$$
$$=a\times \boxed{e^x}+\boxed{e^x}\times(ax+b)=\boxed{e^x}\times(ax+a+b)$$

u étant l'une des solutions de l'équation différentielle ***(E)***, nous avons que pour tout réel x :

$$u'(x)-3\times u(x)=4xe^x \Leftrightarrow \cancel{e^x}\times(ax+a+b)-3\times\cancel{e^x}\times(ax+b)=4x\cancel{e^x}$$
$$\Leftrightarrow ax+a+b-3ax-3b=4x$$
$$\Leftrightarrow \boxed{-2a}\times x+\boxed{a-2b}=\boxed{4}\times x+\boxed{0}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux. Par conséquent :

Egalité des coefficients en x : $-2a=4 \Leftrightarrow a=-2$

Egalité des coefficents constants : $a-2b=0 \Leftrightarrow -2b=-a \Leftrightarrow b=-1$

Réciproquement, on vérifie sans peine que la fonction $u(x)=(-2x-1)e^x$ est effectivement une solution de l'équation différentielle ***(E)***.

a.2) Procédons par équivalence ! Nous pouvons écrire :

Pour tout réel x concerné...

$$\varphi=u+v \text{ est solution de } \textbf{\textit{(E)}} \Leftrightarrow \varphi'(x)-3\times\varphi(x)=4xe^x$$
$$\Leftrightarrow \left(u'(x)+v'(x)\right)-3\times\left(u(x)+v(x)\right)=4xe^x$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{u'(x)-3\times u(x)}}_{\text{Car } u \text{ est solution...}}+v'(x)-3\times v(x)=\underbrace{\cancel{4xe^x}}_{\text{...de } (E)}$$
$$\Leftrightarrow v'(x)-3\times v(x)=0$$
$$\Leftrightarrow v \text{ est solution de l'équation différentielle } \textbf{\textit{(E')}}$$

A chaque étape, on s'assure que la réciproque est vraie...

a.3) D'après un résultat du cours, les solutions de l'équation différentielle ***(E')*** : $y'=3y$ sont les fonctions v de la forme $v(x)=Constante\times e^{3x}$

a.4) En application des questions **a.2** et **a.3**, les solutions de l'équation différentielle ***(E)*** sont les fonctions φ de la forme $\varphi(x)=v+u=Constante\times e^{3x}+(-2x-1)\times e^x$

a.5) On cherche la solution particulière φ de ***(E)*** qui s'annule en 0, c'est-à-dire telle que :

$$\varphi(0)=0 \Leftrightarrow Constante\times e^{3\times 0}-(2\times 0+1)\times e^0=0$$
$$\Leftrightarrow Constante\times 1-1\times 1=0 \Leftrightarrow Constante=1$$

Conclusion : la solution particulière recherchée est la fonction $f(x)=e^{3x}-(2x+1)\times e^x$

b.1) La limite de g en $-\infty$ ne pose guère de problèmes :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 3\times e^{2x}-2x-3=3\times 0^+-(-\infty)-3=0^++(+\infty)-3=+\infty$$

➲ De prime abord, la fonction g est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.

Pour la lever, nous allons factoriser par e^x et utiliser les limites de références du cours.

$$g(x)=3\times e^{2x}-2x-3=3\times e^x\times e^x-2x-3=e^x\times\left(3\times e^x-2\times\frac{x}{e^x}-\frac{3}{e^x}\right)$$

D'après un résultat du cours, comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=0^+$.

Nous en concluons :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\times\left(3\times e^x-2\times\frac{x}{e^x}-\frac{3}{e^x}\right)$$
$$=(+\infty)\times\left(3\times(+\infty)-2\times 0^+-\frac{3}{+\infty}\right)=(+\infty)\times\left((+\infty)-0^+-0^+\right)=+\infty$$

b.2) La dérivée de la fonction $e^{2x}=e^u$ est $u'\times e^u=2\times e^{2x}$

La fonction g est dérivable sur ℝ car elle est une somme de fonctions qui le sont.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$g'(x)=3\times\left(e^{2x}\right)'-(2x+3)'=3\times 2\times e^{2x}-2=6\times e^{2x}-2$$

b.3) On cherche quand la dérivée $g'(x)$ est strictement positive.

Ln est croissante sur]0 ; +∞[.

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow 6\times e^{2x}>2 \Leftrightarrow e^{2x}>\frac{1}{3} \overset{\text{Ln}}{\Leftrightarrow} 2x>\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}\times\ln(3)$$

b.4) La dérivée $g'(x)$ est strictement positive sur l'intervalle $\left]-\frac{\ln(3)}{2};+\infty\right[$, nulle en $-\frac{\ln(3)}{2}=\frac{\ln(1/3)}{2}$ et négative ailleurs.

Le tableau de variation de g est celui-ci ➔

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\times\ln(3)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$\ln(3)-2$	↗	$+\infty$

Nous devons calculer une certaine image qui est le minimum de g sur ℝ.

$$g\left(-\frac{\ln(3)}{2}\right)=3\times\exp\left(\cancel{2}\times\frac{\ln(1/3)}{\cancel{2}}\right)-\cancel{2}\times\left(-\frac{\ln(3)}{\cancel{2}}\right)-3=\cancel{3}\times\frac{1}{\cancel{3}}+\ln(3)-3=\ln(3)-2$$

b.5 et 6) D'abord, la fonction g est continue sur ℝ car elle y est dérivable.
Ensuite, le minimum $\ln(3)-2$ est strictement négatif car l'une de ses valeurs approchées par défaut est $-0,91$.

Cela peut aussi s'établir sans la machine...

Ces choses étant dites, comme :

La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\ln(3)/2\right[$.
L'image de l'intervalle $\left]-\infty;-\ln(3)/2\right[$ par la g est l'intervalle $\left]\ln(3)-2;+\infty\right[$.
0 appartient à l'intervalle image $\left]\ln(3)-2;+\infty\right[$.

alors, d'après le théorème dit «de la bijection», l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]-\infty;-\ln(3)/2\right[$.

D'après la calculatrice, un encadrement au centième de cette racine α est :

$$-1,42 \leq \alpha \leq -1,41$$

De plus, ayant :

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\ln(3)/2;+\infty\right[$.
L'image de l'intervalle $\left[-\ln(3)/2;+\infty\right[$ par la g est l'intervalle $\left[\ln(3)-2;+\infty\right[$.
0 appartient à l'intervalle image $\left[\ln(3)-2;+\infty\right[$.

alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\ln(3)/2;+\infty\right[$.
Et cette unique solution est 0. En effet :

$$g(0)=3\times e^{2\times 0}-2\times 0-3=3\times 1-0-3=0$$

<u>Conclusion :</u> 0 a exactement deux antécédents par la fonction g. Il s'agit de α et 0.

b.7) Vu le tableau de variation de g et le résultat de la question **b.6**, nous en déduisons que son tableau de signe est :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c.1) Déterminons la limite de f en $-\infty$ qui est presque une forme indéterminée ! Il suffit juste de développer un peu...
D'abord, quand x tend vers $-\infty$, $3x$ tend $-\infty$ donc e^{3x} tend vers 0^+.
Ensuite :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{3x}-2\times xe^{x}-e^{x}=0^+-2\times 0^- -0^+=0$$

➲ D'abord, lorsque x tend vers $+\infty$, $3x$ tend $+\infty$ donc e^{3x} tend vers $+\infty$.

Ensuite, en $+\infty$, la fonction f est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$ qui se lève en factorisant par le terme semblant le plus fort e^{3x}.

$$f(x)=e^{3x}-(2x+1)\times e^{x}=e^{3x}\times\left[1-(2x+1)\times\frac{e^{x}}{e^{3x}}\right]$$

$$=e^{3x}\times\left[1-(2x+1)\times\frac{1}{e^{2x}}\right]=e^{3x}\times\left[1-2\times\frac{x}{e^{x}}\times\frac{1}{e^{x}}-\frac{1}{e^{2x}}\right]$$

On met en évidence les limites de référence vues en cours.

Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{3x}\times\left[1-2\times\frac{x}{e^{x}}\times\frac{1}{e^{x}}-\frac{1}{e^{2x}}\right]$$

$$=(+\infty)\times\left[1-2\times 0^+\times 0^+-0^+\right]=(+\infty)\times 1=+\infty$$

c.2) Etant un assortiment de fonctions dérivables sur ℝ, il en va de même pour f.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=\left(e^{3x}\right)'-\underbrace{\left[(2x+1)\times e^{x}\right]'}_{\text{On dérive...}}=3\times e^{3x}-\underbrace{\left[2\times e^{x}+e^{x}\times(2x+1)\right]}_{\text{...un produit.}}$$

$$=3\times e^{3x}-e^{x}\times(2+2x+1)$$

$$=3\times\boxed{e^{x}}\times e^{2x}-\boxed{e^{x}}\times(2x+3)=\boxed{e^{x}}\times\overbrace{\left(3e^{2x}-2x-3\right)}^{g(x)}$$

c.3) Connaissant le signe des deux facteurs produisant la dérivée $f'(x)$, nous pouvons en déduire les variations de la fonction f ci-contre ➔

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
e^{x}		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

Calculons l'image de 0 par f.

$$f(0)=e^{3\times 0}-(2\times 0+1)\times e^{0}$$
$$=1-(0+1)\times 1=0$$

c.4) La tangente horizontale en A correspond au maximum local atteint en $x=\alpha$.

Des valeurs approchées des coordonnées du point A sont $\begin{cases} x_A = \alpha \approx -1,41 \\ y_A = f(\alpha) \approx 0,46 \end{cases}$

d.1) Calculons la dérivée de la fonction *H*.

$$H'(x) = \underbrace{\left[(2x-1)\times e^x\right]'}_{\text{On dérive encore un produit...}} = 2\times \boxed{e^x} + \boxed{e^x}\times(2x-1)$$

$$= \boxed{e^x}\times[2+2x-1] = e^x\times(2x+1) = h(x)$$

Conclusion : comme *h* est la dérivée de *H*, alors la fonction $H(x)=(2x-1)\times e^x$ est une primitive de la fonction $h(x)=(2x+1)\times e^x$.

d.2) Toutes les primitives *F* de la fonction $f(x)=e^{3x}-h(x)$ sont de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{3}\times e^{3x} - H(x) + Constante$$

La primitive particulière que nous recherchons vérifie la condition :

$$F(0)=7 \iff \frac{1}{3}\times e^{3\times 0} - (2\times 0-1)\times e^0 + Constante = 7$$

$$\iff \frac{1}{3}\times 1 - (-1)\times 1 + Constante = 7 \iff Constante = 7 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{17}{3}$$

Conclusion : une expression de la primitive *F* recherchée est :

$$F(x) = \frac{e^{3x}}{3} - (2x-1)\times e^x + \frac{17}{3}$$

Primitives stories

Le contexte

Un exercice où il s'agit de déterminer des primitives d'après des formules du cours.

L'énoncé

Les quatre sous-parties de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

a) Déterminer la primitive *F* de la fonction $f(x)=8x^3-12x^2+6x-2$ définie sur ℝ qui vérifie :

$$F(1)=2$$

b) Déterminer la primitive *F* de la fonction $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$ définie sur ℝ qui vérifie :

$$F(1)=7$$

c) Déterminer la primitive *F* de la fonction $f(x)=\dfrac{2}{(7x-1)^3}$ définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{7}\right[$ qui vérifie :

$$F(0)=1$$

d) Déterminer la primitive *F* de la fonction $f(x)=\dfrac{4}{2x+1}$ définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ qui vérifie :

$$F(0)=3$$

Le corrigé

a) La primitive *F* de la fonction $f(x)=8x^3-12x^2+6x-2$ est de la forme :

$$F(x) = 8\times\frac{1}{4}x^4 - 12\times\frac{1}{3}x^3 + 6\times\frac{1}{2}x^2 - 2x + Cste = 2x^4-4x^3+3x^2-2x+Cste$$

Il nous reste à déterminer la constante *Cste*. Pour cela, no us savons :

$$F(1)=2 \iff 2\times 1^4 - 4\times 1^3 + 3\times 1^2 - 2\times 1 + Cste = 2$$

$$\iff 2-4+3-2+Cste = 2 \iff -1+Cste=2 \iff Cste=3$$

Conclusion : la primitive *F* a pour expression : $F(x)=2x^4-4x^3+3x^2-2x+3$

b) La fonction *f* est presque de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ où la fonction $\left|\begin{array}{l} u(x)=2x^2+1 \\ u'(x)=4x \end{array}\right.$ est dérivable et strictement positive sur ℝ. Faisons apparaître cette forme dans l'écriture de $f(x)$.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{1}{4}\times\frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{1}{4}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$$

Par conséquent, la primitive *F* recherchée a une expression de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{4}\times 2\sqrt{u}+Cste=\frac{1}{2}\times\sqrt{2x^2+1}+Cste$$

A présent, déterminons la constante *Cste*. Pour ce faire, nous savons :

$$F(1)=7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\times\sqrt{2\times 1^2+1}+Cste=7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\times\sqrt{3}+Cste=7 \Leftrightarrow Cste=7-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conclusion : la primitive *F* recherchée a pour expression : $F(x)=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2x^2+1}+7-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) La fonction *f* est presque de la forme $u'\times u^n$ où la fonction $\left|\begin{array}{l} u(x)=7x-1 \\ u'(x)=7 \end{array}\right.$ est dérivable et non nulle sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{7}\right[$. En effet :

$$f(x)=\frac{2}{(7x-1)^3}=2\times(7x-1)^{-3}=2\times\frac{1}{7}\times 7\times(7x-1)^{-3}=\frac{2}{7}\times u'\times u^{-3}$$

Donc la primitive *F* recherchée est de la forme :

$$F(x)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{-3+1}\times u^{-3+1}+Cste=\frac{2}{7}\times\frac{1}{-2}\times(7x-1)^{-2}+Cste=-\frac{1}{7}\times\frac{1}{(7x-1)^2}+Cste$$

Déterminons la valeur de la constante avec la condition initiale proposée. Nous savons :

$$F(0)=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{7}\times\frac{1}{(7\times 0-1)^2}+Cste=1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{7}\times\frac{1}{1}+Cste=1 \Leftrightarrow Cste=1+\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$$

Conclusion : la primitive *F* recherchée a pour expression :

$$F(x)=\frac{8}{7}-\frac{1}{7\cdot(7x-1)^2}$$

d) La fonction *f* est presque de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où la fonction $\left|\begin{array}{l} u(x)=2x+1 \\ u'(x)=2 \end{array}\right.$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]-0,5;+\infty[$. En effet :

$$f(x)=\frac{4}{2x+1}=2\times\frac{2}{2x+1}=2\times\frac{u'}{u}$$

Donc la primitive *F* recherchée est de la forme :

$$F(x)=2\times\ln(u)+Cste=2\times\ln(2x+1)+Cste$$

Reste à déterminer la constante *Cste*. Pour ce faire, nous savons :

$$F(0)=3 \Leftrightarrow 2\times\ln(2\times 0+1)+Cste=3$$

$$\Leftrightarrow 2\times\ln(1)+Cste=3 \Leftrightarrow 2\times 0+Cste=3 \Leftrightarrow Cste=3$$

Conclusion : la primitive *F* recherchée a pour expression : $F(x)=2\times\ln(2x+1)+3$

Hétérographie primitive

Le contexte

Encore un exercice où il s'agit de déterminer des primitives d'après des formules du cours.

L'énoncé

a) La fonction f est définie sur ℝ par :

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{6x}}}$$

Déterminer l'expression de la primitive F de la fonction f vérifiant $F(0)=7$.

b) On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-0,5;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{8x^2+2}{2x+1}$$

1. Déterminer trois entiers relatifs a, b et c tels que pour tout réel $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, on ait :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+1}$$

2. Déterminer l'expression de la primitive F de la fonction f telle que $F(0)=7$

Le corrigé

a) $f(x)$ se simplifie en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle.

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{6x}}}=\frac{e^{2x}}{\exp\left(\frac{1}{2}\times 6x\right)}=\frac{e^{2x}}{e^{3x}}=e^{2x-3x}=e^{-x}=-(-1)\times e^{-x}=\underbrace{\boxed{-u'\times e^{u}}}_{\text{Voilà une forme intégrable !}}$$

Donc la primitive F a une expression de la forme :

$$F(x)=-e^{u}+Cste=\boxed{-e^{-x}+Cste}$$

On détermine la valeur de la constante $Cste$ en utilisant la condition initiale.

$$F(0)=7 \Leftrightarrow -e^{-0}+Cste=7 \Leftrightarrow -1+Cste=7 \Leftrightarrow Cste=\boxed{8}$$

<u>Conclusion :</u> une expression de la primitive F définie sur ℝ est :

$$F(x)=\boxed{8-e^{-x}}$$

b.1) Procédons par identification des coefficients. On veut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+1}$$

$$\frac{8x^2+2}{2x+1}=\frac{(ax+b)\times(2x+1)+c}{2x+1}=\frac{2ax^2+ax+2bx+b+c}{2x+1}$$

$$\frac{\boxed{8}\cdot x^2+\boxed{0}\cdot x+\boxed{2}}{2x+1}=\frac{\boxed{2a}\cdot x^2+\boxed{(a+2b)}\cdot x+\boxed{(b+c)}}{2x+1}$$

Ces deux fractions égales ayant le même dénominateur, nous en déduisons que leurs numérateurs sont égaux. De plus, deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux. Identifions-les !

$\boxed{\text{En } x^2}$	$8=2a$ soit $a=\boxed{4}$	*Et d'un !*
$\boxed{\text{En } x}$	$0=a+2b \Leftrightarrow 0=4+2b$ soit $b=\boxed{-2}$	*Et de deux !*
$\boxed{\text{Constant}}$	$2=b+c \Leftrightarrow 2=-2+c$ soit $c=\boxed{4}$	*Et de trois !*

<u>Conclusion :</u> la forme décomposée de la fonction rationnelle f est :

$$f(x)=\boxed{4x-2+\frac{4}{2x+1}}$$

b.2) Comme $f(x)=2\times 2x-2+2\times\frac{2}{2x+1}=2\times 2x-2+2\times\frac{u'}{u}$, alors une expression de la primitive F est de la forme :

$$F(x)=2\times x^2-2x+2\times\ln(u)+Cste=\boxed{2x^2-2x+2\times\ln(2x+1)+Cste}$$

Il nous reste à régler la valeur de la constante $Cste$ avec la condition initiale :

$$F(0)=7 \Leftrightarrow 2\times 0-2\times 0+2\times\ln(1)+Cste=7 \Leftrightarrow Cste=\boxed{7}$$

<u>Conclusion :</u> $F(x)=\boxed{2x^2-2x-2\ln(2x+1)+7}$

Intégrales stories

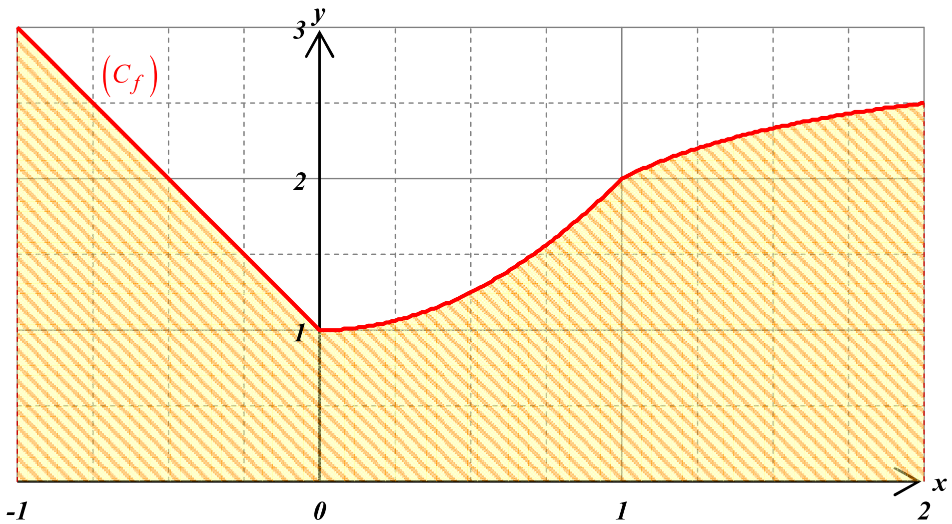
Le contexte

L'exercice classique sur les intégrales avec des aires, des primitives et aussi deux intégrations par parties.

L'énoncé

a) Sur le graphique ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthogonal où :

- Une unité de longueur en abscisse vaut 4 centimètres.
- Une unité de longueur en ordonnée vaut 2 centimètres.



Dans ce repère, on a tracé la courbe (C_f) représentant la fonction f définie et continue sur l'intervalle $[-1;2]$ par :

$$\begin{cases} \text{Si } x\in[-1;0[\text{ alors } f(x)=1-2x \\ \text{Si } x\in[0;1[\text{ alors } f(x)=x^2+1 \\ \text{Si } x\in[1;2] \text{ alors } f(x)=3-\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Déterminer une valeur approchée au millimètre carré près de l'aire exprimée en centimètres carrés du domaine hachuré se trouvant entre l'axe (Ox), la courbe (C_f), et les droites verticales d'équation $x=-1$ et $x=2$

b) Calculer les deux intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^{\ln(2)}\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx \qquad I_2=\int_0^{\ln(0,5)}\frac{e^{-x}}{\sqrt{4e^{-x}+1}}dx$$

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I_3=\int_0^{\pi/2}(x+1)\times\cos(x)\,dx$$

d) Le but des questions suivantes est le calcul de l'intégrale :

$$I=\int_2^3\left(9x^2-2x+3\right)\times\ln(x-1)\,dx$$

1. Déterminer quatre coefficients entiers relatifs a, b, c et d tels que pour tout réel $x\in[2;3]$, on ait :
$$\frac{3x^3-x^2+3x}{x-1}=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-1}$$
2. En déduire la valeur de l'intégrale $J=\displaystyle\int_2^3\frac{3x^3-x^2+3x}{x-1}dx$
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale I.

Le corrigé

a) Nous pouvons écrire que l'aire du domaine hachurée est donnée par :

$$\text{Aire}=\int_{-1}^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^0(1-2x)\,dx+\int_0^1\left(x^2+1\right)dx+\int_1^2\left(3-\frac{1}{x}\right)dx$$

On décompose avec Chasles !

$$=\left[x-x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[3x-\ln(x)\right]_1^2$$

$$=\left(0-0^2\right)-\left((-1)-(-1)^2\right)+\left(\frac{1}{3}\times1^3+1\right)-\left(\frac{1}{3}\times0^3+0\right)+\left(3\times2-\ln(2)\right)-\left(3\times1-\ln(1)\right)$$

$$=0-(-2)+\frac{4}{3}-0+6-\ln(2)-3+0=5+\frac{4}{3}-\ln(2)$$

$$=\frac{19}{3}-\ln(2)\text{ unités d'aires}=8\times\left(\frac{19}{3}-\ln(2)\right)\text{ cm}^2\approx 45{,}12\text{ cm}^2$$

b.1) Calculons l'intégrale I_1

Une primitive sur ℝ de la fonction $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{e^{3x}+1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'}{u}$

est la fonction $F(x)=\dfrac{1}{3}\times\ln(u)=\dfrac{1}{3}\times\ln\left(e^{3x}+1\right)$ avec $\left|\begin{array}{l} u(x)=e^{3x}+1 \\ u'(x)=3e^{3x}+0 \end{array}\right.$ *Toujours positive !*

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_0^{\ln(2)}\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}dx=\left[\frac{1}{3}\times\ln\left(e^{3x}+1\right)\right]_0^{\ln(2)}\\
&=\frac{1}{3}\times\ln\left(e^{3\times\ln(2)}+1\right)-\frac{1}{3}\times\ln\left(e^{3\times 0}+1\right)\\
&=\frac{1}{3}\times\ln\left(e^{\ln(8)}+1\right)-\frac{1}{3}\times\ln(1+1)=\frac{1}{3}\times\left[\ln(8+1)-\ln(2)\right]=\boxed{\frac{1}{3}\times\ln\left(\frac{9}{2}\right)}
\end{aligned}$$

b.2) Calculer l'intégrale I_2.

Une primitive sur ℝ de la fonction $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{4e^{-x}+1}}=\left(-\dfrac{1}{4}\right)\times\dfrac{-4e^{-x}}{\sqrt{4e^{-x}+1}}=-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

est la fonction $F(x)=-\dfrac{1}{4}\times 2\sqrt{u}=-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{4e^{-x}+1}$ avec $\left|\begin{array}{l} u(x)=4e^{-x}+1 \\ u'(x)=4\times\left(-e^{-x}\right)+0 \end{array}\right.$ *Toujours positive !*

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
I_2&=\int_0^{\ln(0,5)}\frac{e^{-x}}{\sqrt{4e^{-x}+1}}dx\\
&=\left[-\frac{1}{2}\times\sqrt{4e^{-x}+1}\right]_0^{\ln(0,5)}\\
&=\left(-\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times e^{-\ln(0,5)}+1}\right)-\left(-\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times e^{-0}+1}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times e^{\ln(2)}+1}+\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times e^{0}+1}\\
&=-\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times 2+1}+\frac{1}{2}\times\sqrt{4\times 1+1}=-\frac{1}{2}\times\sqrt{9}+\frac{1}{2}\times\sqrt{5}=\boxed{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}
\end{aligned}$$

c) Pour calculer I_3, nous allons appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}u(x)\times v'(x)\,dx=\left[u(x)\times v(x)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}u'(x)\times v(x)\,dx}$$

avec dans les deux rôles $\left|\begin{array}{l} u(x)=x+1 \\ u'(x)=1 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l} v'(x)=\cos(x) \\ v(x)=\sin(x) \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
I_3&=\int_0^{\pi/2}(x+1)\times\cos(x)\,dx\\
&=\left[(x+1)\times\sin(x)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}1\times\sin(x)\,dx\\
&=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-(0+1)\times\sin(0)-\left[-\cos(x)\right]_0^{\pi/2}\\
&=\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\times 1-1\times 0-\left(\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\left(-\cos(0)\right)\right)\\
&=\frac{\pi}{2}+1-0-\left((-0)-(-1)\right)\\
&=\frac{\pi}{2}+1-0+0-1=\boxed{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

d.1) Procédons par identification des coefficients. On souhaite écrire la fraction sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{3x^3-x^2+3x}{x-1}&=ax^2+bx+c+\frac{d}{x+1}\\
&=\frac{\left(ax^2+bx+c\right)\times(x-1)+d}{x+1}\\
&=\frac{ax^3-ax^2+bx^2-bx+cx-c+d}{x-1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\boxed{3}x^3+\boxed{(-1)}x^2+\boxed{3}\times x+\boxed{0}}{x-1}=\frac{\boxed{a}x^3+\boxed{(b-a)}x^2+\boxed{(c-b)}\times x+\boxed{(d-c)}}{x-1}$$

Les deux numérateurs sont deux polynômes égaux qui ont par conséquent des coefficients de même degré égaux.

Egalité en x^3 : $a = 3$

Egalité en x^2 : $-1 = b - a \Leftrightarrow b = -1 + a = 2$

Egalité en x^1 : $3 = c - b \Leftrightarrow c = 3 + b = 5$

Egalité en x^0 : $0 = d - c \Leftrightarrow d = c = 5$

Nous en concluons que pour tout réel $x \in [0;1]$, nous avons :

$$\frac{3x^3 - x^2 + 3x}{x-1} = 3x^2 + 2x + 5 + \frac{5}{x-1}$$

Une autre méthode de décomposition en extrayant le dénominateur de chacun des termes du numérateur.

$$\frac{3x^3 - x^2 + 3x}{x-1} = \frac{3x^2 \times (x-1) + 3x^2 - x^2 + 3x}{x-1}$$

$$= \frac{3x^2 \times \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{2x^2 + 3x}{x-1} = 3x^2 + \frac{2x \times (x-1) + 2x + 3x}{x-1}$$

$$= 3x^2 + \frac{2x \times \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{5x}{x-1} = 3x^2 + 2x + \frac{5 \times (x-1) + 5}{x-1}$$

$$= 3x^2 + 2x + \frac{5 \times \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{5}{x-1} = 3x^2 + 2x + 5 + \frac{5}{x-1}$$

d.2) D'après ce qui précède, l'intégrale J peut aussi s'écrire :

$$J = \int_2^3 \left(3x^2 + 2x + 5 + 5 \times \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= \left[x^3 + x^2 + 5x + 5 \times \ln(x-1)\right]_2^3$$

$$= \left(27 + 9 + 5 \times 3 + 5 \times \ln(3-1)\right) - \left(8 + 4 + 5 \times 2 + 5 \times \ln(2-1)\right)$$

$$= \left(51 + 5 \times \ln(2)\right) - \left(22 + 5 \times \ln(1)\right) = 29 + 5 \times \ln(2)$$

d.3) Nous appliquons à l'intégrale I la formule d'intégration par parties :

$$\int_2^3 u(x) \times v'(x)\,dx = \left[u(x) \times v(x)\right]_2^3 - \int_2^3 u'(x) \times v(x)\,dx$$

avec dans les deux rôles $u(x) = \ln(x-1)$, $u'(x) = \dfrac{1}{x-1}$, Dérivable sur $]1;+\infty[$ et $v'(x) = 9x^2 - 2x + 3$, $v(x) = 3x^3 - x^2 + 3x$, Dérivable sur $\mathbb{R}$

Nous pouvons alors écrire :

$$I = \int_2^3 \left(9x^2 - 2x + 3\right) \times \ln(x-1)\,dx$$

$$= \left[\left(3x^3 - x^2 + 3x\right) \times \ln(x-1)\right]_2^3 - \int_2^3 \left(x^3 + 2x^2 + x\right) \times \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \overbrace{\left(\left(3 \times 27 - 9 + 3 \times 3\right) \times \ln(3-1)\right)}^{\text{Image de 3}} - \overbrace{\left(\left(3 \times 8 - 4 + 3 \times 2\right) \times \ln(2-1)\right)}^{\text{Image de 2}} - J$$

$$= 81 \times \ln(2) - 26 \times \ln(1) - J$$

$$= 81 \times \ln(2) - 0 - \left(29 + 5 \times \ln(2)\right) = 76 \times \ln(2) - 29$$

Suites

Aux limites du commencement

Le contexte

Deux limites de suites classiques à déterminer.

L'énoncé

Déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

$$u_n = \frac{7^n + 1}{5^n + 3^n} \qquad \text{et} \qquad v_n = (-1)^n \times \left(2 - \frac{1}{n^2+1}\right)$$

Le corrigé

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7^n}{5^n} \times \frac{1+\frac{1}{5^n}}{1+\frac{3^n}{5^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^n \times \frac{1+\frac{1}{5^n}}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n} = (+\infty) \times \frac{1+\frac{1}{+\infty}}{1+0^+} = +\infty$

soit 0^+

Telle quelle forme indéterminée ∞ / ∞

b) D'abord : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{n^2+1} = 2 - \frac{1}{(+\infty)+1} = 2 - \frac{1}{+\infty} = 2 - 0^+ = 2$

Ensuite, la suite (v_n) est formée de deux sous-suites :

Celle des termes pairs : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 \times \left(2 - \frac{1}{n^2+1}\right) = 1 \times 2 = 2$

Celle des termes impairs : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1) \times \left(2 - \frac{1}{n^2+1}\right) = -1 \times 2 = -2$

Conclusions : ces deux sous-limites étant différentes, la suite (t_n) ne peut avoir de limite.

Résous ton problème, exprime ton n !

Le contexte

Un exercice classique sur les suites commençant par l'étude d'une fonction, puis enchainant sur l'étude d'une suite définie par récurrence au moyen de cette fonction.

L'énoncé

*Les deux parties de cet exercice sont relativement indépendantes. Seul le résultat de la question **a.4** sert dans la résolution de la question **b.4**.*

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^x + 1\right) - x - 2$$

1. Etablir que pour tout réel x, nous avons :
$$f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) - 2$$
Indication : on pourra commencer par écrire que $\ln\left(e^x+1\right) = \ln\left(e^x \times (1+\ldots)\right)$

2. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$.
Conseil : on pourra utiliser l'écriture de $f(x)$ établie lors de la question **a.1**.

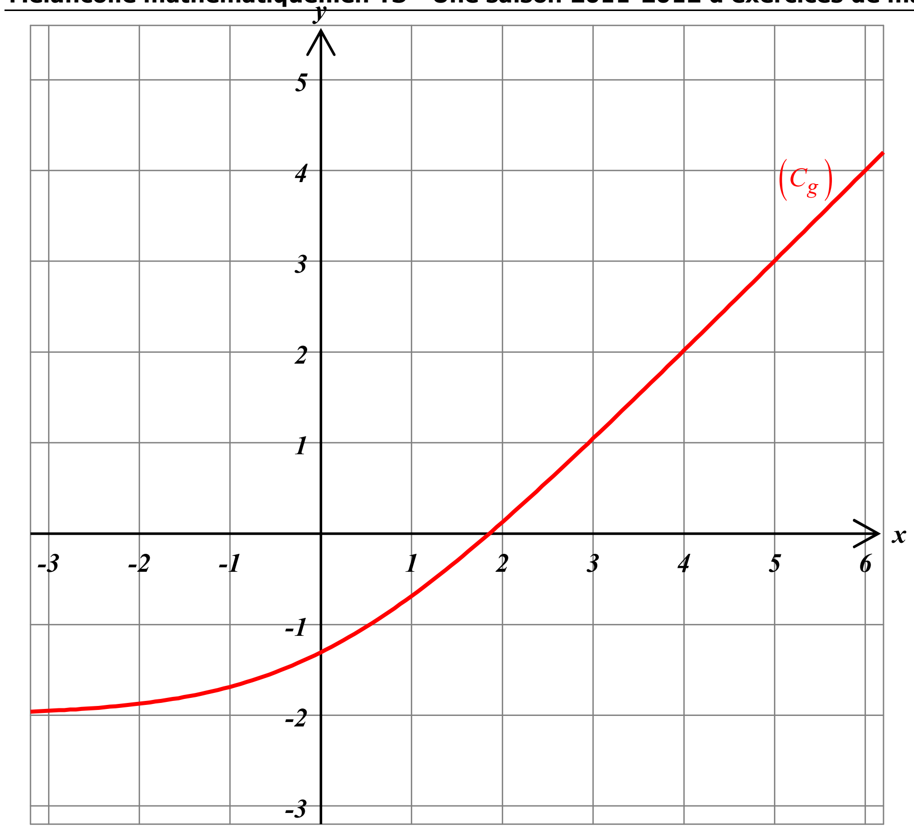
3. En dérivant la fonction f, démontrer que pour tout réel x, on a :
$$f'(x) = \frac{-1}{e^x+1}$$
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée au centième près de cette solution α.

b) La suite (u_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \ln\left(e^{u_n}+1\right) - 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Sur le graphique ci-après, on a tracé la courbe (C_g) représentant la fonction
$$g(x) = \ln\left(e^x+1\right) - 2$$
Construire sur l'axe des abscisses (Ox) et sans aucun calcul les cinq premiers termes de la suite à savoir u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4. On laissera apparents les traits de construction.



2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n, la propriété

$$P_n \quad : \quad -2 < u_{n+1} < u_n$$

Note : le cas échéant, on pourra recourir à des valeurs approchées dans le raisonnement.

3. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? On justifiera sa réponse.

   En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appellera ℓ sa limite.

4. Déterminer cette limite ℓ.

Le corrigé

a.1) Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \ln\left(e^x+1\right) - x - 2 = \ln\left[e^x \times \left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right] - x - 2$$

$$= \ln\left(e^x\right) + \ln\left(1+e^{-x}\right) - x - 2 = \cancel{x} + \ln\left(1+e^{-x}\right) - \cancel{x} - 2 = \ln\left(1+e^{-x}\right) - 2$$

a.2) Pour déterminer les limites de f aux infinis, utilisons son écriture établie lors de **a.1**.

- Lorsque x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty \Rightarrow e^{-x}$ tend vers $+\infty$
  - $1+e^{-x}$ tend vers $1+(+\infty) = +\infty$
  - $\ln\left(1+e^{-x}\right)$ tend vers $\ln(+\infty) = +\infty$
  - Donc $f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right) - 2$ tend vers $(+\infty) - 2 = +\infty$
- Lorsque x tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty \Rightarrow e^{-x}$ tend vers 0^+
  - $1+e^{-x}$ tend vers $1+0^+ = 1$
  - $\ln\left(1+e^{-x}\right)$ tend vers $\ln(1) = 0$ *Car la fonction ln est continue en 1.*
  - Donc $f(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right) - 2$ tend vers $0 - 2 = -2$

a.3) Pour calculer la dérivée de f, utilisons son écriture originale.

Ayant $u(x) = e^x + 1$, $u'(x) = e^x$, Dérivable et positive sur $\mathbb{R}$, la fonction $f(x) = \ln(u) - x - 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Il vient alors que pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{u'}{u} - 1 - 0 = \frac{e^x}{e^x+1} - 1$$

$$= \frac{e^x - 1\times\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = \frac{\cancel{e^x} - \cancel{e^x} - 1}{e^x+1} = \frac{-1}{e^x+1}$$

Le signe de la dérivée $f'(x)$ nous donne les variations de la fonction f ci-contre ➔

x	$-\infty$		$+\infty$
-1		$-$	
e^x+1		$+$	
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	↘	-2

a.4) Comme
- La fonction f est continue car dérivable sur $\mathbb{R}$
- La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- L'image de l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ par f est $]-2;+\infty[$
- 0 appartient à l'intervalle image $]-2;+\infty[$

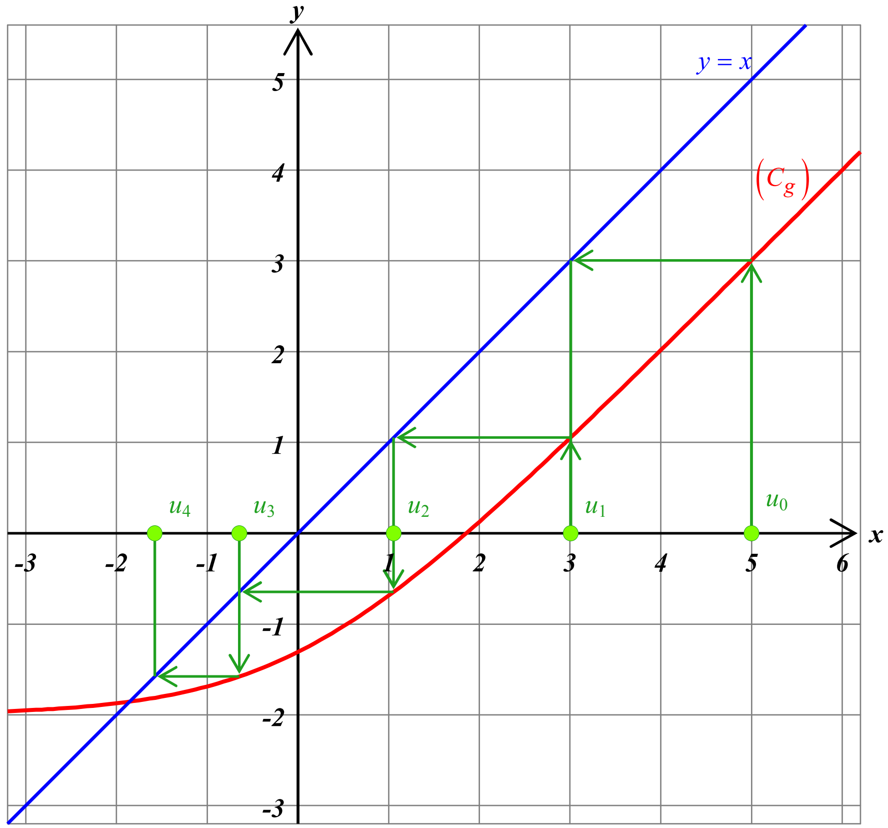
alors, en application du «théorème de la bijection», l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
D'après la calculatrice, une valeur approchée au centième de cette solution α est $-1,85$.

Le truc en plus : il est même possible de déterminer exactement l'expression de α en utilisant l'écriture de $f(x)$ établie lors de la question **a.1**.

$$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \ln\left(1+e^{-\alpha}\right)-2=0 \Leftrightarrow \ln\left(1+e^{-\alpha}\right)=2 \overset{\text{Exp}}{\Rightarrow} 1+e^{-\alpha}=e^2$$

$$\Rightarrow e^{-\alpha}=e^2-1 \overset{\text{Ln}}{\Rightarrow} -\alpha=\ln\left(e^2-1\right) \Rightarrow \alpha=-\ln\left(e^2-1\right)\approx-1,85$$

b.1) La première chose à faire est de tracer la droite d'équation $y=x$. Puis, on positionne u_0 sur l'axe des abscisses. On se projette alors verticalement sur la courbe $\left(C_g\right)$.
Le point obtenu a pour abscisse u_0 et pour $g\left(u_0\right)=u_1$.
En se projetant horizontalement sur la première bissectrice du plan, puis verticalement sur l'axe des abscisses $(\mathrm{O}x)$, on parvient à reporter u_1 sur ce dernier. On construit les autres termes de la suite en réitérant le processus.
La construction est faite ci-contre ➚



b.2) Dans une démonstration par récurrence, deux choses sont à établir :

- Au premier rang $n=0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

  Nous avons $u_0=5$

  $u_1=\ln\left(e^{u_0}+1\right)-2=\ln\left(e^5+1\right)-2\approx 3,01$

  Comme $-2<u_1<u_0$, alors la propriété P_0 est vraie.

- Le principe de récurrence ou de propagation

Supposons que la propriété P_n pour un certain entier n. Nous avons alors :

$$-2 < u_{n+1} < u_n \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{\boxed{\text{Exp}}} e^{-2} < e^{u_{n+1}} < e^{u_n}$$

$$\xrightarrow{\boxed{+1}} e^{-2}+1 < e^{u_{n+1}}+1 < e^{u_n}+1$$

$$\xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\boxed{\text{Ln}}} \ln\left(e^{-2}+1\right) < \ln\left(e^{u_{n+1}}+1\right) < \ln\left(e^{u_n}+1\right)$$

$$\xrightarrow{\boxed{-2}} \ln\left(e^{-2}+1\right)-2 < u_{n+2} < u_{n+1}$$

Or, le minorant $\ln\left(e^{-2}+1\right)-2$ est lui-même supérieur à -2.

En effet, une exponentielle étant toujours positive, nous avons :

$$e^{-2} > 0 \xrightarrow{\boxed{+1}} e^{-2}+1 > 1 \xrightarrow{\boxed{\text{Ln}}} \ln\left(e^{-2}+1\right) > 0$$

$$\xrightarrow{\boxed{-2}} \ln\left(e^{-2}+1\right)-2 > -2$$

Finalement, nous concluons $-2 < u_{n+2} < u_{n+1}$, soit la propriété P_{n+1}.

Le fait que la propriété P_n soit vraie implique que la propriété suivante P_{n+1} est aussi vraie. Le principe de récurrence ou de propagation est établi.

b.3) La famille de propriété (P_n) établies lors de la question précédente a deux conséquences.

- Comme pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$, alors la suite (u_n) est décroissante.
- Comme pour tout entier n, $u_n > 0$, alors la suite (u_n) est minorée.

Conclusion : la suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle converge...vers un réel ℓ.

b.4) Comme
La suite (u_n) est définie par récurrence au moyen de la fonction g,
La fonction g est continue car dérivable sur $\mathbb{R}$
Tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à $\mathbb{R}$
La suite (u_n) converge vers un réel ℓ

alors cette limite ℓ est l'une des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$g(x)=x \Leftrightarrow \ln\left(e^x+1\right)-2=x \Leftrightarrow \ln\left(e^x+1\right)-x-2=0 \Leftrightarrow f(x)=0$$

Or, d'après la question **a.4**, cette équation a pour seule solution α. C'est donc cela la limite de notre suite (u_n).

Dernière danse avant liquidation

Le contexte

L'exercice classique sur les suites que l'on établit comme adjacentes et définies comme des barycentres de barycentres de barycentres...

L'énoncé

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies par récurrence par :

$$\underbrace{\left|\begin{array}{l} a_0=-5 \\ a_{n+1}=\dfrac{2\times a_n+b_n}{3} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} b_0=10 \\ b_{n+1}=\dfrac{2\times a_n+3\times b_n}{5} \end{array}\right.}_{\text{Pour tout entier naturel } n}$$

a) Calculer les premiers termes a_1 et b_1, puis vérifier que $a_2=\dfrac{4}{3}$ et $b_2=\dfrac{12}{5}$.

b) On appelle (d_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$d_n=b_n-a_n$$

1. Démontrer que la suite (d_n) est géométrique de raison $\dfrac{4}{15}$.
2. En déduire que (d_n) est une suite de termes strictement positifs convergeant vers 0.

c) En utilisant un résultat de la question **b.2**, établir les sens de variations des suites (a_n) et (b_n).

d) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ.

e) On appelle (c_n) la suite définie pour tout entier n par :

$$c_n=6\times a_n+5\times b_n$$

1. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété P_n : $c_n=20$
2. En déduire la valeur de la limite ℓ.

Le corrigé

a) Calculons les premiers termes jusqu'au rang 2 des deux suites :

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2\times a_0 + b_0}{3} = \dfrac{2\times(-5)+10}{3} = \dfrac{0}{3} = 0 \\ b_1 = \dfrac{2\times a_0 + 3\times b_1}{5} = \dfrac{2\times(-5)+3\times 10}{5} = \dfrac{20}{5} = 4 \end{cases}$$

Il vient alors :

$$a_2 = \frac{2\times a_1 + b_1}{3} = \frac{2\times 0+4}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{2\times a_1 + 3\times b_1}{5} = \frac{2\times 0 + 3\times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

b) Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} \\ &= \frac{(2\times a_n + 3\times b_n)\times 3}{5\times 3} - \frac{(2\times a_n + b_n)\times 5}{3\times 5} \\ &= \frac{(6\times a_n + 9\times b_n) - (10\times a_n + 5\times b_n)}{15} = \frac{-4\times a_n + 4\times b_n}{15} = \frac{4}{15}\times(b_n - a_n) = \frac{4}{15}\times d_n \end{aligned}$$

Donc la suite (d_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{4}{15}$ et de premier terme :

$$d_0 = b_0 - a_0 = 10 - (-5) = 15$$

Par conséquent, pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$d_n = d_0 \times q^n = 15\times\left(\frac{4}{15}\right)^n$$

Cette expression en fonction de n nous conduit à deux conclusions :

- Chaque terme d_n est positif car il est le produit de facteurs positifs.
- Comme la raison $q = \dfrac{4}{15}$ appartient à l'intervalle $[0;1[$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} 15\times\left(\frac{4}{15}\right)^n = 15\times 0^+ = 0^+$$

c) Pour établir le sens de variation de la suite (a_n), intéressons-nous à la différence de deux de ses termes consécutifs :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2\times a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{2\times a_n + b_n - 3\times a_n}{3} = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{1}{3}\times \underbrace{d_n}_{\oplus} = \oplus$$

Comme la différence de deux termes consécutifs $a_{n+1} - a_n$ est toujours strictement positive, alors la suite (a_n) est strictement croissante.

➲ De même, pour la suite (b_n), nous pouvons écrire pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{2\times a_n + 3\times b_n}{5} - b_n \\ &= \frac{2\times a_n + 3\times b_n - 5\times b_n}{5} = \frac{2\times a_n - 2\times b_n}{5} = -\frac{2}{5}\times \underbrace{d_n}_{\oplus} = \ominus \end{aligned}$$

Comme la différence de deux termes consécutifs $b_{n+1} - b_n$ est toujours strictement négative, alors la suite (b_n) est strictement décroissante.

d) Récapitulons tout ce qui a été plus ou moins établi :

C1. La suite (a_n) est strictement croissante.

C2. La suite (b_n) est strictement décroissante.

C3. Leur différence $d_n = b_n - a_n$ est toujours strictement positive.

C4. Leur différence $d_n = b_n - a_n$ converge vers 0.

Nous en concluons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et que donc, elles convergent vers une même limite ℓ.

e.1) Démontrons par récurrence sur l'entier n la propriété :

$$P_n \quad : \quad c_n = 20\,.$$

➔ Au premier rang : la propriété P_0 est-elle vraie ?

Calculons le premier terme de cette nouvelle suite :

$$c_0 = 6\times a_0 + 5\times b_0 = 6\times(-5) + 5\times 10 = -30 + 50 = 20$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

➔ Le principe de récurrence : la propriété P_n vraie implique-t-elle que P_{n+1} soit vraie ?

Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un certain entier n, c'est-à-dire que $c_n = 50$.

Que peut-on alors en déduire pour c_{n+1} ? Ben, voyons...

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 6\times a_{n+1} + 5\times b_{n+1} \\ &= \overset{2}{\cancel{6}}\times\frac{2\times a_n + b_n}{\cancel{3}} + \cancel{5}\times\frac{2\times a_n + 3\times b_n}{\cancel{5}} \\ &= 4\times a_n + 2\times b_n + 2\times a_n + 3\times b_n = 6\times a_n + 5\times b_n = c_n = 20 \end{aligned}$$

Donc la propriété P_{n+1} est alors vraie. Le principe de récurrence est établi.

e.2) Les suites adjacentes (a_n) et (b_n) convergeant vers ℓ, leur combinaison linéaire (c_n) converge vers $6\times\ell+5\times\ell=11\times\ell$.

Or, cette suite (c_n) étant constante et toujours égale à 20, sa limite est aussi égale à...20.

Nous en déduisons :

$$11\times\ell=20 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\ell=\frac{20}{11}}$$

Suivez l'intégrale !

Le contexte

Un exercice très classique consistant en l'étude d'une suite d'intégrales : lien, variation et limite.

L'énoncé

On appelle (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n=\int_1^2 (x-1)^n\times e^x\,dx$$

a) En calculant l'intégrale, vérifier que $u_0=e\times(e-1)$

b) En intégrant par parties l'intégrale u_{n+1}, démontrer que pour tour entier naturel n, on a :

$$u_{n+1}=e^2-(n+1)\times u_n$$

En déduire la valeur de l'intégrale u_3.

c) Démontrer que pour tour entier naturel n, on a :

$$\frac{e}{n+1}\le u_n\le\frac{e^2}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite (u_n).

Le corrigé

a) Calculons l'intégrale u_0.

$$u_0=\int_1^2 \overbrace{(x-1)^0}^{1}\times e^x\,dx=\int_1^2 e^x\,dx=\left[e^x\right]_1^2=\left(e^2\right)-\left(e^1\right)=e^2-1=\underline{e\times(e-1)}$$

b) La formule d'intégration par parties est :

$$\boxed{\int_1^2 u(x)\times v'(x)\,dx=\left[u(x)\times v(x)\right]_1^2-\int_1^2 u'(x)\times v(x)\,dx}$$

avec dans les deux rôles
$$\begin{array}{|l}u(x)=x^{n+1}\\ u'(x)=(n+1)\times x^n\\ \text{Dérivable sur }\mathbb{R}\end{array}\qquad \underline{\text{et}}\qquad \begin{array}{|l}v'(x)=e^x\\ v(x)=e^x\\ \text{Dérivable sur }\mathbb{R}\end{array}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_1^2 (x-1)^{n+1} \times e^x dx \\
&= \left[(x-1)^{n+1} \times e^x\right]_1^2 - \int_1^2 (n+1)\times(x-1)^n \times e^x dx \\
&= \underbrace{(2-1)^{n+1}}_{1} \times e^2 - \underbrace{(1-1)^{n+1}}_{0} \times e^1 - (n+1)\times \int_1^2 (x-1)^n \times e^x dx \\
&= \boxed{e^2 - (n+1)\times u_n}
\end{aligned}$$

L'intégrale u_3 se calcule de proche en proche à partir de u_0 avec la formule précédente :

$$\begin{aligned}
u_1 &= e^2 - (0+1)\times u_0 = e^2 - \left(e^2 - e\right) = \boxed{e} \\
u_2 &= e^2 - (1+1)\times u_1 = e^2 - 2\times e = \boxed{e^2 - 2e} \\
u_3 &= e^2 - (2+1)\times u_2 = e^2 - 3\times\left(e^2 - 2e\right) = \boxed{-2e^2 + 6e}
\end{aligned}$$

c) Pour tout réel x de l'intervalle $[1;2]$, nous pouvons écrire :

$$1 \leq x \leq 2 \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{\text{Exp}} e \leq e^x \leq e^2$$

$$\xrightarrow[\text{qui est positif ou nul sur } [1;2]]{\times(x-1)^n} \boxed{e\times(x-1)^n \leq e^x \times (x-1)^n \leq e^2 \times (x-1)^n}$$

Intégrons cette dernière inégalité sur l'intervalle $[1;2]$!

$$\int_1^2 e\times(x-1)^n\,dx \leq \int_1^2 e^x \times (x-1)^n\,dx \leq \int_1^2 e^2 \times (x-1)^n\,dx$$

$$\left[e\times\frac{1}{n+1}\times(x-1)^{n+1}\right]_1^2 \leq u_n \leq \left[e^2\times\frac{1}{n+1}\times(x-1)^{n+1}\right]_1^2$$

$$\frac{e}{n+1}\times\underbrace{(2-1)^{n+1}}_{1} - \frac{e}{n+1}\times\underbrace{(1-1)^{n+1}}_{0} \leq u_n \leq \frac{e^2}{n+1}\times\underbrace{(2-1)^{n+1}}_{1} - \frac{e^2}{n+1}\times\underbrace{(1-1)^{n+1}}_{0}$$

$$\frac{e}{n+1}\times 1 - \frac{e}{n+1}\times 0 \leq u_n \leq \frac{e^2}{n+1}\times 1 - \frac{e^2}{n+1}\times 0$$

$$\frac{e}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e^2}{n+1}$$

➲ Comme les suites de gauche $\frac{e}{n+1}$ et de droite $\frac{e^2}{n+1}$ tendent toutes les deux vers 0^+, alors, en application du «théorème des gendarmes», nous en déduisons :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \boxed{0^+}$$