Algorithmique

Ma puce !

L'énoncé

a. On considère l'algorithme suivant :

```
i et s sont deux entiers relatifs
s = 11
Pour i = 1 jusqu'à 4
    Si s est divisible par 5 alors s = s+2
                            sinon s = s+3
    s = s+i
    Que vaut la variable s ?
s = s×i
```

Exécuter l'algorithme précédent, répondre aux questions intermédiaires encadrées et conclure en donnant la valeur finale de la variable s.

b. On considère l'algorithme suivant :

```
n et s sont deux entier relatifs
n = 0
s = 25
Tant que s > 0 faire
    s = 2×s - 27
    n = n+1
```

Exécuter l'algorithme précédent (on détaillera les étapes) et conclure en donnant les valeurs finales des variables n et s.

c. On considère l'algorithme suivant :

```
i, k et s sont trois entiers relatifs
s = 5
Pour i = 3 jusqu'à 4
    s = s*i
    Pour k = 2 jusqu'à i
        s = s+k
    Que vaut la variable s ?
```

Exécuter l'algorithme précédent, répondre aux questions intermédiaires encadrées et conclure en donnant la valeur finale de la variable s.

Le corrigé

a. Exécutons ce premier programme :

Instruction et commentaire	*i*	*s*
s=11	?	11
Pour i=1 :	1	11
Comme s n'est pas divisible par 5 sinon s=s+3 $=11+3=14$	1	14
s=s+i $=14+1=15$	1	15
La variable s vaut 15.	1	15
Pour i=2 :	2	15
Comme s est divisible par 5 alors s=s+2 $=15+2=17$	2	17
s=s+i $=17+2=19$	2	19
La variable s vaut 19.	2	19
Pour i=3 :	3	19
Comme s n'est pas divisible par 5 sinon s=s+3 $=19+3=22$	3	22
s=s+i $=22+3=25$	3	25
La variable s vaut 25.	3	25
Pour i=4 :	4	25
Comme s est divisible par 5 alors s=s+2 $=25+2=27$	3	27
s=s+i $=27+4=31$	4	31
La variable s vaut 31.	4	31
s=s×i $=31\times 4=124$	4	124

Conclusion : à l'issue de l'exécution, le variable s vaut 124.

b. L'exécution du deuxième algorithme est la suivante :

Instruction et commentaire	*n*	*s*
n=0 s=25	0	25
Tant que : comme s>0 on entre dans la boucle	0	25
s=2×s-27 $=50-27=23$	0	23
n=n+1 $=0+1=1$	1	23
Tant que : comme s>0 on entre dans la boucle	1	23
s=2×s-27 $=46-27=19$	1	19
n=n+1 $=1+2=2$	2	19
Tant que : comme s>0 on entre dans la boucle	2	19
s=2×s-27 $=38-27=11$	2	11
n=n+1 $=2+1=3$	3	11
Tant que : comme s>0 on entre dans la boucle	3	11
s=2×s-27 $=22-27=-5$	3	-5
n=n+1 $=3+1=4$	4	-5
Tant que : comme s≤0 on casse la boucle	4	-5

Conclusion : à l'issue de l'exécution de l'algorithme, la variable n vaut 4 et s vaut -5.

c. Exécutons ce troisième programme :

Instruction et commentaire	***i***	***k***	***s***
`s=5`	?	?	5
`Pour i=3 :`	3	?	5
`s=s*i` $= 5\times 3 = 15$	3	?	15
`Pour k=2 : s=s+k` $= 15+2 = 17$	3	2	17
`Pour k=3 : s=s+k` $= 17+3 = 20$	3	3	20
La variable s vaut 20.	3	3	20
`Pour i=4 :`	4	3	20
`s=s*i` $= 20\times 4 = 80$	4	3	80
`Pour k=2 : s=s+k` $= 80+2 = 82$	4	2	82
`Pour k=3 : s=s+k` $= 82+3 = 85$	4	3	85
`Pour k=4 : s=s+k` $= 85+4 = 89$	4	4	89
La variable s vaut 89.	4	4	89

Conclusion : à l'issue de l'exécution de l'algorithme, la variable *s* vaut 89.

Calculs littéraux, équations et inéquations

Ensemble et en nombre

L'énoncé

Parmi les ensembles de nombres ℕ, Ì, ℤ, ℚ ou ℝ, donner le plus petit ensemble auquel appartient chacun des nombres suivants. Chaque réponse devra être expliquée.

$$a=\sqrt{81} \qquad b=\frac{77}{33} \qquad c=-\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} \qquad d=-\frac{78}{24}$$

Le corrigé

Cet exercice repose sur la simplification des nombres proposés.

$$a=\sqrt{81}=9\in\mathbb{N} \qquad b=\frac{77}{33}=\frac{\cancel{11}\times 7}{\cancel{11}\times 3}=\frac{7}{3}\in\mathbb{Q}$$

$$c=-\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{\frac{72}{2}}=-\sqrt{36}=-6\in\mathbb{Z} \qquad d=-\frac{78}{24}=-\frac{\cancel{6}\times 13}{\cancel{6}\times 4}=-\frac{13}{4}=-3,25\in \text{Ì}$$

Les aventures d'une lettre inconnue

L'énoncé

a. Au moyen d'une identité remarquable ou d'un facteur commun, factoriser les expressions suivantes.

$$a(x)=x^2-16x+64 \qquad b(x)=x^2-16x$$

$$c(x)=16x^2+24x+9 \qquad d(x)=16x^2-9$$

b. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$e(x)=(7x-2)^2-7\times(3-4x)$$

$$f(x)=(8-7x)(7-6x)$$

$$g(x)=(3x+8)\times(3x-8)-(3x+2)^2$$

Le corrigé

a. Factorisons les quatre expressions proposées.

$$a(x)=x^2-16x+64=\underbrace{x^2-2\times x\times 8+8^2}_{a^2-2\times a\times b+b^2}=(x-8)^2$$

$$b(x)=x^2-16x=\underbrace{x\times\boxed{x}-16\times\boxed{x}}_{\text{Facteur commun } x}=\boxed{x}\times(x-16)$$

$$c(x)=16x^2+24x+9=\underbrace{(4x)^2+2\times 4x\times 3+3^2}_{a^2+2\times a\times b+b^2}=(4x+3)^2$$

$$d(x)=16x^2-9=\underbrace{(4x)^2-3^2}_{a^2-b^2}=(4x+3)\times(4x-3)$$

b. Développons les expressions proposées.

$$e(x)=\left[(7x-2)^2\right]-7\times(3-4x)=\left[(7x)^2-2\times 7x\times 2+2^2\right]-21+28x$$
$$=49x^2-\cancel{28x}+4-21+\cancel{28x}=49x^2-17$$

$$f(x)=(8-7x)(7-6x)=56-48x-49x+42x^2=42x^2-97x+56$$

$$g(x)=(3x+8)\times(3x-8)-\left[(3x+2)^2\right]=(3x)^2-8^2-\left[(3x)^2+2\times 3x\times 2+2^2\right]$$
$$=9x^2-64-\left[9x^2+12x+4\right]=9x^2-64-9x^2-12x-4=-12x-68$$

Signe et inégalité

L'énoncé

a. Dresser le tableau de signe sur ℝ de la fonction :

$$f(x) = -x \times (6x-10) \times (x+8) \times (5-3x)$$

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

b. Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes. Certaines requièrent un tableau de signe mais pas toutes ! On conclura en donnant l'ensemble des solutions.

1. $-4x \leq 6x^2$ **2.** $5x - 3\times(2-7x) \geq 6(x+1) - 4$

3. $(5-7x)^2 > 49$ **4.** $-17 \leq 7 - 6x < 13$

Le corrigé

a. Afin de dresser le tableau de signe du produit $f(x) = -x(6x-10)(x+8)(5-3x)$, regardons où ses facteurs s'annulent !

- Le facteur affine $-x$ a pour coefficient directeur le négatif -1 et il s'annule lorsque $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Le facteur affine $6x-10$ a pour coefficient directeur le positif 6 et il s'annule lorsque $6x - 10 = 0 \Leftrightarrow 6x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$
- Le facteur affine $x+8$ a pour coefficient directeur le positif 1 et il s'annule lorsque $x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -8$
- Le facteur affine $-3x+5$ a pour coefficient directeur le négatif -3 et il s'annule lorsque $-3x + 5 = 0 \Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

Nous en déduisons que le tableau de signe du produit $f(x)$ est :

x	$-\infty$		-8		0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$-x$		+	|	+	0	−	|	−	
$6x-10$		−	|	−	|	−	0	+	
$x+8$		−	0	+	|	+	|	+	
$-3x+5$		+	|	+	|	+	0	−	
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	0	+	

➲ Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$, c'est déterminer quand le produit dont le tableau de signe vient d'être dressé est strictement négatif. D'après ce dernier, nous en déduisons que :

$$S =]-8; 0[$$

b.1. Pour résoudre cette première inéquation, nous allons tout ramener à gauche, puis nous chercherons à factoriser. Nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'un produit.

$$-4x \leq 6x^2 \Leftrightarrow -4x - 6x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{-4\times\boxed{x} - 6x\times\boxed{x} \leq 0}_{\text{Facteur commun } x} \Leftrightarrow \boxed{x}\times(-4-6x) \leq 0$$

Résoudre la première inéquation, c'est donc savoir quand le produit $x \times (-6x-4)$ est négatif ou nul. Avant de dresser son tableau de signe, analysons ses facteurs.

- Le facteur x a pour coefficient directeur le positif 1 et s'annule lorsque $x = 0$
- Le facteur affine $-6x-4$ a pour coefficient directeur le négatif -6 et il s'annule lorsque $-6x - 4 = 0 \Leftrightarrow -6x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$

Il vient alors :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
x		−	|	−	0	+	
$-6x-4$		+	0	−	|	−	
Signe de leur produit		−	0	+	0	−	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [0; +\infty[$$

b.2. Cette deuxième inéquation étant du premier degré, elle se résout classiquement.

$$5x - 3\times(2-7x) \geq 6(x+1) - 4 \Leftrightarrow 5x - 6 + 21x \geq 6x + 6 - 4$$
$$\Leftrightarrow 26x - 6 \geq 6x + 2 \Leftrightarrow 26x - 6x \geq 2 + 6$$
$$\Leftrightarrow 20x \geq 8 \xrightarrow{\div 20} x \geq \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions est :

$$S = \left[\frac{2}{5}; +\infty\right[$$

b.3. Pour solutionner cette troisième inéquation, nous suivrons la même stratégie que pour la première.

$$(5-7x)^2 > 49 \Leftrightarrow \underbrace{(5-7x)^2-7^2}_{a^2-b^2} > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left[(5-7x)+7\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(5-7x)-7\right]}_{(a-b)} > 0$$

$$\Leftrightarrow [5-7x+7]\times[5-7x-7] > 0 \Leftrightarrow [-7x+12]\times[-7x-2] > 0$$

Résoudre cette troisième inéquation, c'est savoir quand ce dernier produit est strictement positif. Examinons ses deux facteurs affines qui ont tous deux pour coefficient directeur le négatif -7.

- $-7x+12$ s'annule lorsque $-7x+12=0 \Leftrightarrow -7x=-12 \Leftrightarrow x=\frac{-12}{-7}=\frac{12}{7}$
- $-7x-2$ s'annule lorsque $-7x-2=0 \Leftrightarrow -7x=2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{7}$

Nous en déduisons que le tableau de signe du produit est :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{7}$		$\frac{12}{7}$		$+\infty$
$-7x+12$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$-7x-2$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Signe de leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de la troisième inéquation est :

$$S=\left]-\infty;-\frac{2}{7}\right[\cup\left]\frac{12}{7};+\infty\right[$$

b.4. Cette dernière inéquation se résout assez facilement et très classiquement.

$$-17\leq 7-6x<13 \xrightarrow{-7} -24\leq -6x<6 \xrightarrow[\text{L'ordre change}]{\div(-6)} 4\geq x>-1$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions est :

$$S=\left]-1;4\right]$$

Quotients impressionnistes

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois inéquations suivantes. On conclura chacune d'entre elles en donnant l'ensemble des solutions :

a. $\dfrac{-x\times(5x+3)}{2-x}>0$ **b.** $\dfrac{4-5x}{x+7}\leq -3$ **c.** $\dfrac{3}{3-x}\geq\dfrac{7}{7-x}$

Le corrigé

a. Résoudre cette première inéquation, c'est savoir quand le quotient du membre de gauche est strictement positif. Regardons où les facteurs affines le composant s'annulent.

$-x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $5x+3=0 \Leftrightarrow 5x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}$ ou $2-x=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$

Le tableau de signe du quotient constituant le membre de gauche est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		0		2		$+\infty$
$-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$5x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur quotient		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=\left]-\frac{3}{5};0\right[\cup\left]2;+\infty\right[$$

b. Pour résoudre cette deuxième inéquation, nous allons tout ramener à gauche et tout mettre au même dénominateur. Nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{4-5x}{x+7}\leq -3 \Leftrightarrow \frac{4-5x}{x+7}+3\leq 0 \Leftrightarrow \frac{4-5x+3\times(x+7)}{x+7}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-5x+3x+21}{x+7}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{25-2x}{x+7}\leq 0$$

Pour dresser le tableau de signe du quotient constituant le membre de gauche, déterminons les valeurs de x où s'annulent ses numérateur et dénominateur.

$25-2x=0 \Leftrightarrow -2x=-25 \Leftrightarrow x=\frac{-25}{-2}=\frac{25}{2}=12,5$ ou $x+7=0 \Leftrightarrow x=7$

Le tableau de signe du quotient est :

x	$-\infty$		-7		$12{,}5$		$+\infty$
$-2x+25$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+7$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	

Nous en déduisons l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =]-\infty;-7[\cup[12,5;+\infty[$$

c. Nous allons résoudre cette dernière inéquation de la même façon que la précédente.

$$\frac{3}{3-x}\geq\frac{7}{7-x} \Leftrightarrow \frac{3}{3-x}-\frac{7}{7-x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3\times(7-x)-7\times(3-x)}{(3-x)\times(7-x)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{21-3x-21+7x}{(3-x)\times(7-x)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{(3-x)\times(7-x)}\geq 0$$

Déterminons où les facteurs constituant le quotient du membre de gauche s'annulent.

$$4x=0 \Leftrightarrow x=\frac{0}{4}=0 \quad \text{ou} \quad 3-x=0 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3 \quad \text{ou} \quad 7-x=0 \Leftrightarrow -x=-7 \Leftrightarrow x=7$$

Le tableau de signe du quotient est le suivant :

x	$-\infty$		0		3		7		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$-x+7$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur quotient		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions est :

$$S=[0;3[\cup]7;+\infty[$$

Cube et carré

L'énoncé

a. Sur la feuille de copie, tracer dans un repère simplement orthogonal une esquisse de la courbe représentant la fonction carré, puis, dans un autre repère, une esquisse de la courbe de la fonction cube.

b. Donner les ensembles des solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes :

1. $x^3\leq -2197$ **2.** $x^2>169$ **3.** $x^3>0$ **4.** $1<x^2\leq 12$

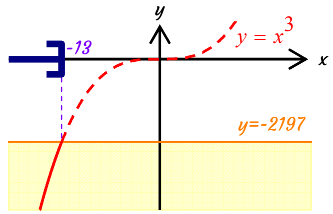
Le corrigé

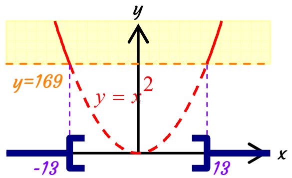
A partir des courbes des fonctions carré et cube et, en utilisant les fonctions racines carrée et cubique de la calculatrice, on résout les inéquations proposées en portant une grande attention aux bornes des intervalles considérés.

♥ Pour résoudre cette première inéquation, nous nous intéressons aux points de la courbe de la fonction cube dont l'ordonnée est inférieure ou égale à -2197.

L'ensemble des solution de l'inéquation $x^3\leq -2197$ est :

$$S=]-\infty;-13]$$





♥ Pour résoudre cette deuxième inéquation, il faut considérer les points de la courbe de la fonction carré dont l'ordonnée est strictement supérieure à 169.

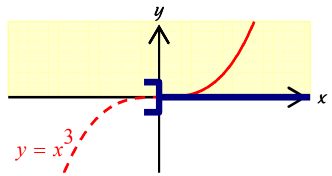
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2>169$ est :

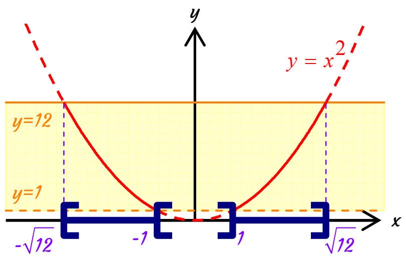
$$S=]-\infty;-13[\cup]13;+\infty[$$

♥ Pour solutionner cette troisième inéquation, il faut considérer la partie strictement positive de la courbe de la fonction cube.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x>0$ est :

$$S=]0;+\infty[$$





♥ Les solutions de l'inéquation $1<x^2\leq 12$ sont les abscisses des points de la courbe de la fonction carré dont l'ordonnée est plus grande que 1 mais inférieure ou égale à 12.

L'ensemble des solutions de cette dernière inéquation est :

$$S=\left[-\sqrt{12};-1\right[\cup\left]1;2\sqrt{3}\right]$$

Le retour des inéquations

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes. On conclura chacune d'entre elles en donnant l'ensemble des solutions.

a. $16 \geq (x-1)^2$ **b.** $\frac{7}{x} \leq \frac{3}{2-x}$

Le corrigé

a. Pour solutionner cette première inéquation, nous allons tout ramener à gauche. Puis, nous chercherons à factoriser.

$$16 \geq (x-1)^2 \Leftrightarrow \overbrace{4^2-(x-1)^2}^{a^2-b^2} \geq 0 \Leftrightarrow \overbrace{\left[4+(x-1)\right]}^{(a+b)} \times \overbrace{\left[4-(x-1)\right]}^{(a-b)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [4+x-1]\times[4-x+1] \geq 0 \Leftrightarrow [x+3]\times[-x+5] \geq 0$$

Résoudre cette première inéquation, c'est savoir quand ce dernier produit est positif ou nul. De manière assez évidente, ses deux facteurs s'annulent en -3 et 5. Son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de cette première inéquation est :

$$S = [-3;5]$$

b. Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons tout ramener à gauche et tout mettre au même dénominateur.

$$\frac{7}{x} \leq \frac{3}{2-x} \Leftrightarrow \frac{7}{x} - \frac{3}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{7\times(2-x)-3\times x}{x\times(2-x)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{14-7x-3x}{x\times(2-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{14-10x}{x\times(2-x)} \leq 0$$

Le tableau de signe de ce dernier quotient est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		0		$1{,}4$		2		$+\infty$
$-10x+14$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Leur quotient		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S =]-\infty;0[\cup \left[\frac{7}{5};2\right[$$

Le six t'aime !

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y :

$$(S)\begin{cases} 9x-3y=2 \\ 9x+7y=1 \end{cases}$$

Le corrigé

Le système $(S)\begin{cases} 9x-3y=2 & \textbf{(1)} \\ 9x+7y=1 & \textbf{(2)} \end{cases}$ va être résolu par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour déterminer x, on supprime les y.	Les x s'éliminent tout seuls et on obtient y.
$\textbf{(1)} \xrightarrow{\times 7} 63x-21y=14$ $\oplus$	$\textbf{(1)} \longrightarrow 9x-3y=2$ $\ominus$
$\textbf{(2)} \xrightarrow{\times 3} 27x+21y=3$	$\textbf{(2)} \longrightarrow 9x+7y=1$
$90x=17$	$-10y=1$
$x=\dfrac{17}{90}$	$y=-\dfrac{1}{10}$

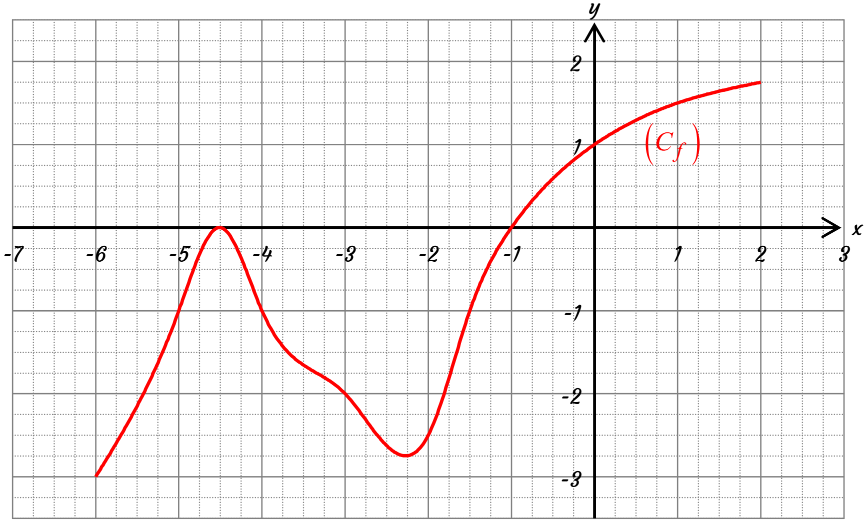
<u>Conclusion :</u> la solution du système (S) est le couple $\left(\dfrac{17}{90};-0{,}1\right)$.

Fonctions

Dessine-moi une fonction

L'énoncé

Sur le graphique ci-dessous, on tracé la courbe $\left(C_f\right)$ représentant la fonction *f*.



A partir du graphique précédent, on répondra directement sur la présente feuille aux questions suivantes avec toute la précision permise par ce premier. Aucune justification n'est demandée.

a. Compléter ce qui suit :

1. L'ensemble de définition de la fonction *f* est $D_f = \dots\dots\dots\dots$

2. Le maximum de *f* sur l'intervalle $[-5;-2]$ est ......; il est atteint en $x = \dots\dots$

3. Le (les) antécédent(s) de 2 par la fonction *f* est (sont)..........................

4. L' (les) image(s) de 0 par la fonction *f* est (sont)..........................

5. La (les) solution(s) de l'équation $f(x)=0$ est (sont)..........................

6. Le minimum de *f* sur l'intervalle $[-5;-1]$ est ......; il est atteint en $x = \dots\dots$

7. Le (les) antécédent(s) de -1 par la fonction *f* est (sont)..........................

8. $f(-2) = \dots\dots\dots\dots$

b. Compléter le tableau de signe suivant résumant le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.

x	
Signe de $f(x)$	

c. Compléter le tableau de variation suivant résumant les variations de la fonction *f* sur son ensemble de définition :

x	
Variation de *f*	

d. A l'aide du graphique ci-contre, Résoudre les inéquations suivantes :

$f(x)\geq 1$ S = ...	$-1 < f(x) < 1$ S = ...
$f(x) < -2$ S = ...	$7-5\times f(x)\leq 2$ S = ...

Le corrigé

a. Tout point de la courbe $\left(C_f\right)$ a des coordonnées de la forme $\underbrace{\left(x;f(x)\right)}_{\text{Un nombre et son image}}$.

1. Tous les points de la courbe $\left(C_f\right)$ ayant une abscisse *x* comprise entre -6 et 2, l'ensemble de définition de la fonction *f* est l'intervalle $[-6;2]$.
2. Sur $[-5;-2]$, le point le plus haut de la courbe a pour coordonnées $(-4,5;0)$. Par conséquent, le maximum de la fonction *f* sur cet intervalle est égal à 0 et il est atteint en $x=-4,5$.
3. Aucun point de la courbe $\left(C_f\right)$ n'ayant pour ordonnée 2, 2 n'a aucun antécédent par la fonction *f*.
4. Le point de la courbe $\left(C_f\right)$ d'abscisse 0 a pour ordonnée 1. Donc $f(0)=1$
5. Deux points de la courbe $\left(C_f\right)$ ont pour ordonnée 0; leurs abscisses sont $-4,5$ et -1. Ce sont les deux solutions de l'équation $f(x)=0$.

6. Le point le plus bas de la courbe sur l'ensemble $[-5;-1]$ a pour coordonnées $(-2,25;-2,75)$. Donc le minimum de *f* sur cet intervalle est égal à $-2,75$; il est atteint en $x=-2,25$.
7. Trois points de la fonction (C_f) ont pour ordonnée -1 ; leurs abscisses -5 ; -4 et $-1,5$ sont les trois antécédents de -1 par la fonction *f*.
8. Le point de la courbe d'abscisse -2 a pour ordonnée $-2,5$. Ainsi $f(-2)=-2,5$.

b. Le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[-6;2]$ est :

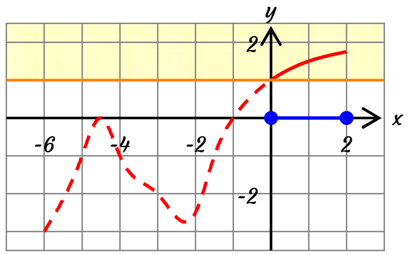
x	-6		$-4,5$		-1		2
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

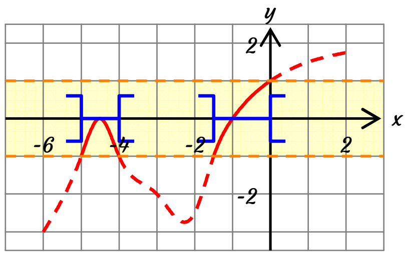
c. Le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[-6;2]$ est :

x	-6		$-4,5$		$-2,25$		7
f	-3	↗	0	↘	$-2,75$	↗	$1,75$

d.1. Pour résoudre l'inéquation $f(x)\geq 1$, nous devons nous intéresser aux points de la courbe (C_f) dont les ordonnées $f(x)$ sont supérieures ou égales à 1. Leurs abscisses *x* sont comprises entre 0 et 2 inclus. Ainsi :

$$S=[0;2]$$



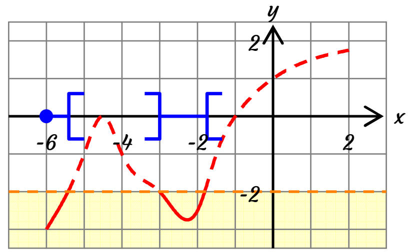


d.2. Les solutions de l'inéquation $-1<f(x)<1$ sont les abscisses *x* des points de (C_f) dont les ordonnées $f(x)$ sont strictement comprises entre -1 et 1. Par lecture graphique :

$$S=]-5;-4[\cup]-1,5;0[$$

d.3. Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe (C_f) dont l'ordonnée $f(x)$ est strictement inférieure à 2.
L'ensemble des solutions est :

$$S=[-6;-5,4[\cup]-3;-1,8[$$



d.4. D'abord, nous devons tripatouiller l'inéquation qui nous est proposée :

$$7-5\times f(x)\leq 2 \xrightarrow{-7} -5\times f(x)\leq -5 \xrightarrow[\text{L'ordre change car on divise par un négatif}]{\div(-5)} f(x)\geq 1$$

On retrouve la première inéquation dont l'ensemble des solutions est l'intervalle $[0;2]$.

Affine mais pas fine

L'énoncé

La fonction *f* est définie sur ℝ par :

$$f(x) = -\frac{7}{2}x - \frac{5}{3}$$

a. Calculer les images $f(4)$ et $f\left(-\frac{6}{5}\right)$.

b. Déterminer le ou les antécédents de 0 par la fonction *f*.

c. Déterminer le ou les antécédents de $\frac{9}{4}$ par la fonction *f*.

d. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur ℝ.

e. Dans cette question, α et β sont deux réels quelconques.
En partant de l'inégalité $\alpha > \beta$, établir le sens de variation de la fonction *f* sur ℝ.

Le corrigé

a. Calculons les deux images demandées :

$$f(4) = -\frac{7}{2}\times 4 - \frac{5}{3} = -\frac{28}{2} - \frac{5}{3} = -14 - \frac{5}{3} = \frac{-14\times 3}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{42}{3} - \frac{5}{3} = \boxed{-\frac{47}{3}}$$

$$f\left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{7}{2}\times\left(-\frac{6}{5}\right) - \frac{5}{3} = \frac{42}{10} - \frac{5}{3} = \frac{21}{5} - \frac{5}{3} = \frac{21\times 3}{5\times 3} - \frac{5\times 5}{3\times 5} = \frac{63}{15} - \frac{25}{15} = \boxed{\frac{38}{15}}$$

b. Pour déterminer le ou les antécédents de 0 par la fonction *f*, nous résolvons l'équation :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}x - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}x = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{7}{2}} = \frac{5}{3}\times\frac{2}{-7} = \boxed{-\frac{10}{21}}$$

Conclusion : 0 a un seul antécédent par la fonction *f* ; sa valeur est $x = -\frac{10}{21}$.

c. Pour trouver le ou les antécédent de 2,25 par la fonction *f*, nous devons résoudre dans ℝ l'équation :

$$f(x) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{7}{2}x - \frac{5}{3} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{7}{2}x = \frac{5}{3} + \frac{9}{4} = \frac{5\times 4 + 9\times 3}{12} = \frac{20+27}{12}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2}x = \frac{47}{12} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{47}{12}}{-\frac{7}{2}} = \frac{47}{12}\times\frac{2}{-7} = \frac{47}{6\times\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{-7} = \boxed{-\frac{47}{42}}$$

Conclusion : $\frac{9}{4}$ a pour seul antécédent $-\frac{47}{42}$ par la fonction *f*.

d. Comme son coefficient directeur $a = -3{,}5$ est négatif, alors le tableau de signe de la fonction affine $f(x) = ax + b$ est :

x	$-\infty$		$-\frac{10}{21}$		$+\infty$
Signe de $f(x) = -\frac{7}{2}x - \frac{5}{3}$		+	0	−	

e. L'enchainement d'inégalités demandé est le suivant :

$$\begin{array}{ccc} \alpha & > & \beta \\ -\frac{7}{2}\alpha & < & -\frac{7}{2}\beta \\ \underbrace{-\frac{7}{2}\alpha - \frac{5}{3}}_{f(\alpha)} & < & \underbrace{-\frac{7}{2}\beta - \frac{5}{3}}_{f(\beta)} \end{array}$$

×(-7/2)

-5/3

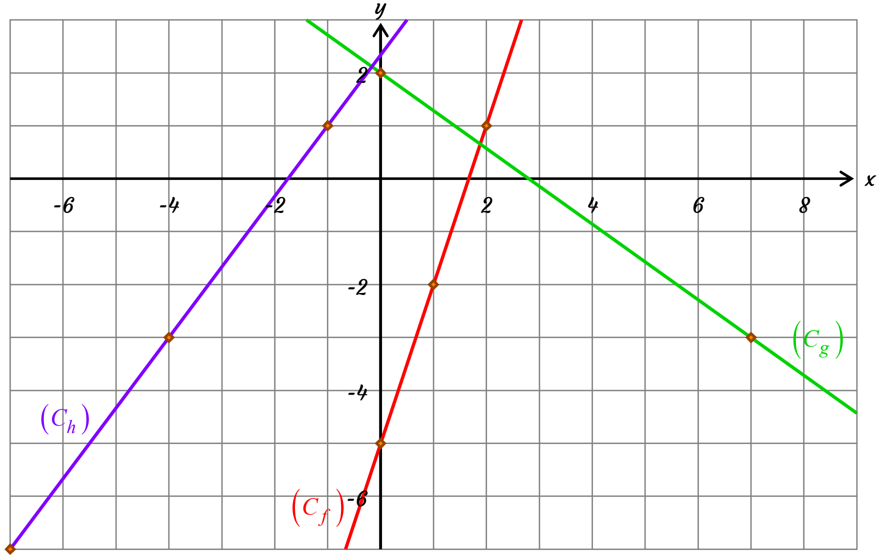
La fonction f change l'ordre sur]-∞; +∞ [

Conclusion : comme la fonction *f* change l'ordre sur ℝ, alors elle y est décroissante.

A droites toutes !

L'énoncé

a. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé trois droites $\left(C_f\right)$, $\left(C_g\right)$ et $\left(C_h\right)$ représentant les fonctions *f*, *g* et *h* qui sont définies sur ℝ. On a également mis en évidence certains de leurs points à coordonnées entières.
Donner une expression pour chacune de ces fonctions.



b. On appelle *j* la fonction affine définie sur ℝ par :

$$j(x)=\frac{7-5x}{6}$$

1. Donner les coefficient directeur et ordonnée à l'origine de *j*.
2. Calculer l'image $f(-1)$, puis déterminer le ou les antécédents de -3 par la fonction *j*.
3. Dresser le tableau de signe de $j(x)$ sur ℝ.
4. Sur le graphique ci-dessus, tracer la courbe $\left(C_j\right)$ représentant la fonction *j*.

Le corrigé

a. On rappelle que le coefficient directeur d'une droite est le quotient entre les variations d'ordonnée et d'abscisse entre deux points de la droite. L'ordonnée à l'origine est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.
D'après le graphique, les expressions des fonctions *f* et *g* sont :

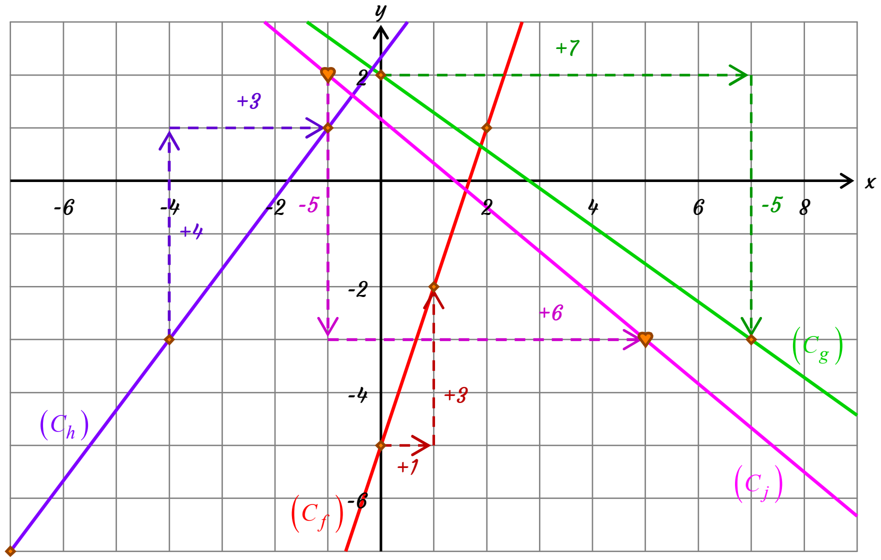
$$f(x)=3x-5 \qquad \text{et} \qquad g(x)=-\frac{5}{7}x+2$$

Par contre, le graphique ne permet de connaître que le coefficient directeur $\frac{4}{3}$ de $\left(C_h\right)$.

Donc une expression de la fonction *h* est $h(x)=\frac{4}{3}x+b$.

On détermine l'ordonnée à l'origine *b* en remarquant que d'après le graphique :

$$h(-1)=1 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\times(-1)+b=1 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}+b=1 \Leftrightarrow b=1+\frac{4}{3}=\frac{3+4}{3}=\frac{7}{3}$$



b.1. Pour tout réel *x*, nous avons : $j(x)=\frac{7-5x}{6}=\boxed{-\frac{5}{6}}\times x+\boxed{\frac{7}{6}}$

Coefficient directeur — Ordonnée à l'origine

b.2. Calculons l'image de -1 par *j* : $j(-1)=\frac{7-5\times(-1)}{6}=\frac{12}{6}=2$

Donc la courbe $\left(C_j\right)$ passe par le point de coordonnées $(-1;2)$.

Pour déterminer le ou les antécédents de -3 par la fonction *j*, nous résolvons l'équation :

$$j(x)=\frac{7-5x}{6}=-3 \xrightarrow{\times 6} 7-5x=-18 \Leftrightarrow -5x=-25 \Leftrightarrow x=\frac{-25}{-5}=5$$

<u>Conclusion :</u> -3 a un seul antécédent par la fonction *j* qui est 5. Donc la courbe $\left(C_j\right)$ passe aussi par le point de coordonnées $(5;-3)$.

b.3. Déterminons la valeur de x pour laquelle $j(x)$ est nul.

$$j(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{6}x+\frac{7}{6}=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{6}x=-\frac{7}{6} \Leftrightarrow x=\frac{-7/5}{-5/6}=\frac{7}{\cancel{-6}}\times\frac{\cancel{-6}}{5}=\boxed{\frac{7}{5}=1,4}$$

Son coefficient directeur $-\frac{5}{6}$ étant négatif, le tableau de signe de $j(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		1,4		$+\infty$
$j(x)=-\frac{5}{6}x+\frac{7}{6}$		$+$	0	$-$	

Géométrie analytique

Welcome in the plan !

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère simplement orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a positionné les points :

$$A\left(2{,}7\ ;\ -4\right) \qquad B\left(5\ ;\ 2\right) \qquad C\left(-1{,}5\ ;\ -1{,}5\right)$$

a. On appelle D le point de coordonnées $\left(6\ ;\ -6\right)$.

1. Recopier et compléter l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{OD} = \ldots\ldots \times \vec{i} + \ldots\ldots \times \vec{j}$
2. Placer le point D sur la figure ci-contre.
3. Les points A, C et D sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse par un calcul.

b. On appelle E le quatrième sommet du parallélogramme CABE.

1. Construire au compas le point E sur la figure ci-contre.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées $\left(x_E\ ;\ y_E\right)$ du point E.

c. On note I le milieu du segment [BC].

1. Placer le point I sur la figure.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées $\left(x_I\ ;\ y_I\right)$ du point I.
3. Sans faire le moindre calcul, expliquer pourquoi I est aussi le milieu de [EA].

d. On appelle F le point défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{DF} = \dfrac{5}{4} \times \overrightarrow{DB}$.

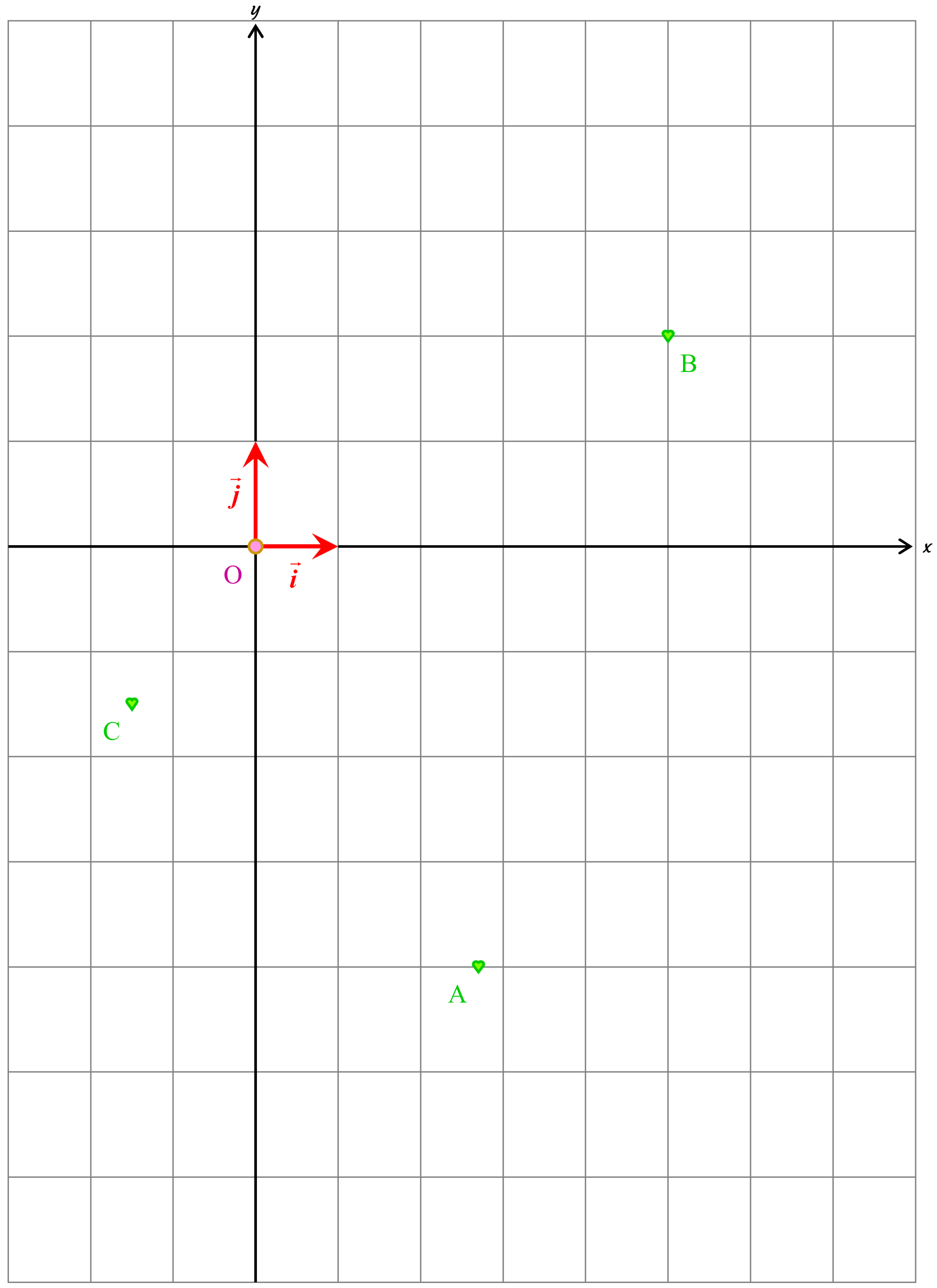
1. Déterminer par le calcul les coordonnées $\left(x_F\ ;\ y_F\right)$ du point F.
2. Placer le point F sur la figure.

e. On appelle G le point de coordonnées $\left(3\ ;\ 2\right)$.

1. Placer le point G sur la figure.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées $\left(x_J\ ;\ y_J\right)$ du point J défini par la relation vectorielle $2 \times \overrightarrow{BJ} - 3 \times \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{OJ}$.
3. Placer le point J sur la figure.

f. On appelle K le point de la droite (DG) dont l'ordonnée y_K est égale à -3.

1. Placer le point K sur la figure.
2. Déterminer par le calcul l'abscisse x_K du point K.



Le corrigé

a.1. Comme le point D a pour coordonnées $(6\ ;\ -6)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, alors nous avons la relation vectorielle : $\overrightarrow{OD} = 6\times\vec{i} - 6\times\vec{j}$

a.3. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1,5-2,7=-4,2 \\ -1,5-(-4)=2,5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 6-2,7=3,3 \\ -6-(-4)=-2 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Pour le savoir, calculons leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -4,2 & 3,3 \\ 2,5 & -2 \end{vmatrix} = -4,2\times(-2) - 2,5\times 3,3 = 8,4 - 8,25 = 0,15 \neq 0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
Conclusion : les points A, C et D ne sont pas alignés.

b.1. Le point E se construit au compas en reportant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ au départ de C.

b.2. On appelle $(x_E\ ;\ y_E)$ les coordonnées du point E.
CABE étant un parallélogramme, nous avons l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_E-(-1,5) \\ y_E-(-1,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2,7 \\ 2-(-4) \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}} \Leftrightarrow \overbrace{x_E + 1,5 = 2,3}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{y_E + 1,5 = 6}^{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$x_E = 0,8 \qquad y_E = 4,5$$

Conclusion : les coordonnées du point E sont $(0,8\ ;\ 4,5)$.

c.2. Les coordonnées du milieu I du segment [BC] sont données par :

$$x_I = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{5+(-1,5)}{2} = \frac{3,5}{2} = 1,75 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{2+(-1,5)}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25$$

c.3. Les diagonales du parallélogramme CABE se coupant en leur milieu, le milieu I de la diagonale [BC] est aussi celui de la diagonale [AE].

d.1. Traduisons sous forme de coordonnées la relation vectorielle définissant le point F.

$$\overrightarrow{DF} = \frac{5}{4}\times\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_F-6 \\ y_F-(-6) \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\times\begin{pmatrix} 5-6 \\ 2-(-6) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_F-6 \\ y_F+6 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}\times\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_F-6 \\ y_F+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,25 \\ 10 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}} \Leftrightarrow \overbrace{x_F - 6 = -1,25}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{y_F + 6 = 10}^{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$x_F = 4,75 \qquad y_F = 4$$

Conclusion : le point F a pour coordonnées $\left(\frac{19}{4}\ ;\ 4\right)$.

d.2. Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DB}$ étant colinéaires, le point F appartient à la droite (BD).
On place le point F comme étant le point de la droite (BD) ayant pour ordonnée 4.

e. Traduisons sous forme de coordonnées la relation vectorielle définissant le point J.

$$2\times\overrightarrow{BJ} - 3\times\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow 2\times\begin{pmatrix} x_J-5 \\ y_J-2 \end{pmatrix} - 3\times\begin{pmatrix} x_J-3 \\ y_J-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_J-0 \\ y_J-0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_J-10 \\ 2y_J-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_J+9 \\ -3y_J+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} -x_J-4 \\ -y_J+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_J \\ y_J \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{-x_J - 1 = x_J}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{-y_J + 2 = y_J}^{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$-2x_J = 1 \qquad -2y_J = -2$$

$$x_J = \frac{1}{-2} = -0,5 \qquad y_J = \frac{-2}{-2} = 1$$

Conclusion : les coordonnées du point J sont $(-0,5\ ;\ 1)$. Ce dernier se place avec le quadrillage.

f. K appartenant à la droite (DG), les vecteurs $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix} x_K-6 \\ -3-(-6)=3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 3-6=-3 \\ 2-(-6)=8 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. Donc leur déterminant est nul. Par suite :

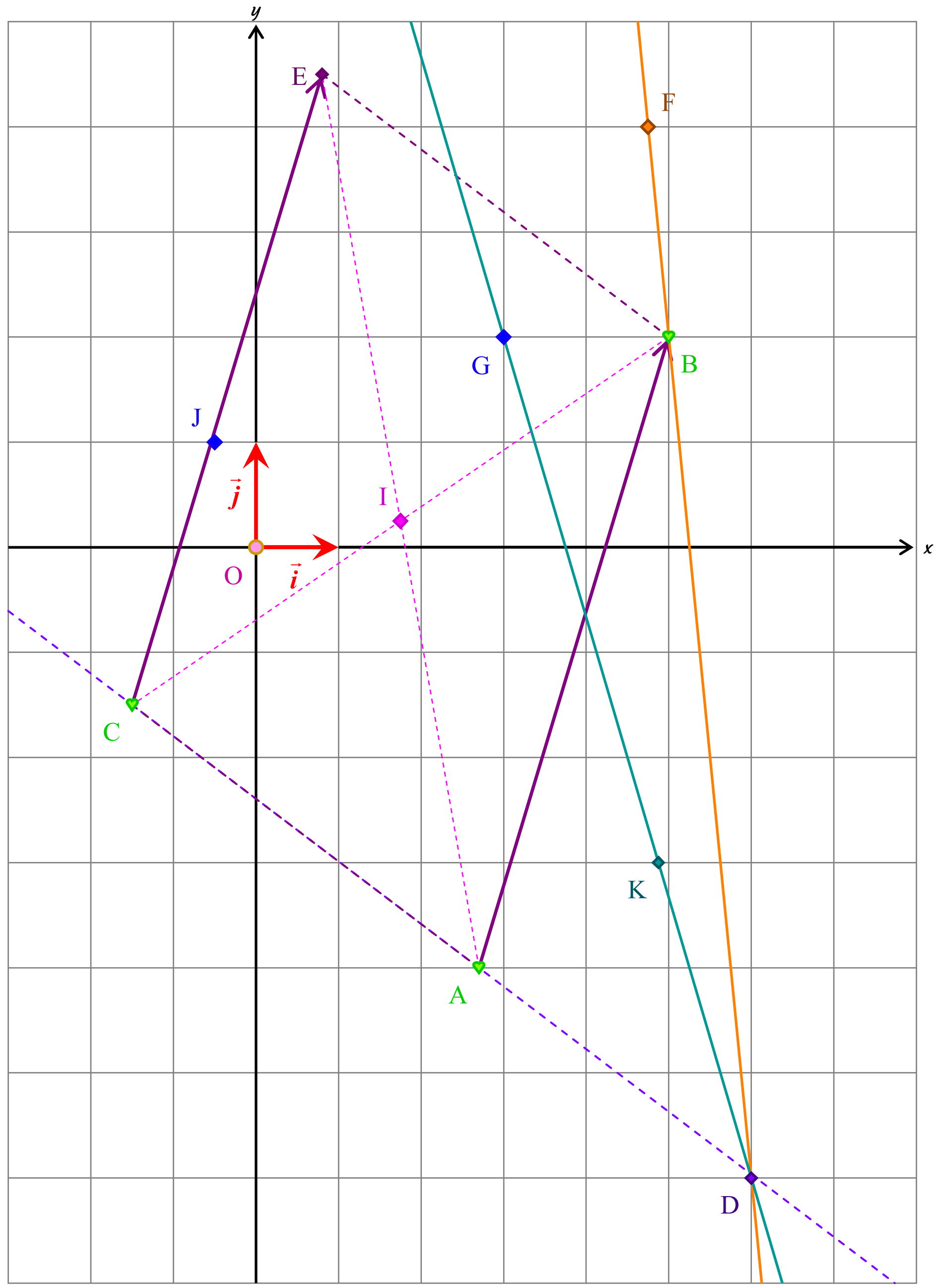
$$\det\left(\overrightarrow{DK};\overrightarrow{DG}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_K-6 & -3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_K-6)\times 8 - 3\times(-3) = 0 \Leftrightarrow 8x_K - 48 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x_K - 39 = 0 \Leftrightarrow 8x_K = 39 \Leftrightarrow x_K = \frac{39}{8}$$

Conclusion : le point K a pour coordonnées $(4,875\ ;\ -3)$.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Aventures orthonormées

L'énoncé

Sur la figure ci-après, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ où chaque vecteur de base mesure 1 centimètre et dans lequel on a positionné les points :

$U(8{,}6\ ;\ -7{,}8)$ $E(3\ ;\ -2)$ $F(x_F\ ;\ 1{,}2)$ $A(2\ ;\ 6)$

a. On appelle Γ le cercle de centre E passant par le point A.

4. Calculer le rayon du cercle Γ.

5. Le point U appartient-il au cercle Γ ? On justifiera sa réponse.

6. Déterminer l'abscisse x_F du point F qui appartient au cercle Γ et dont l'ordonnée est égale à 1,2.

b. On appelle B le quatrième sommet du parallélogramme AEUB.

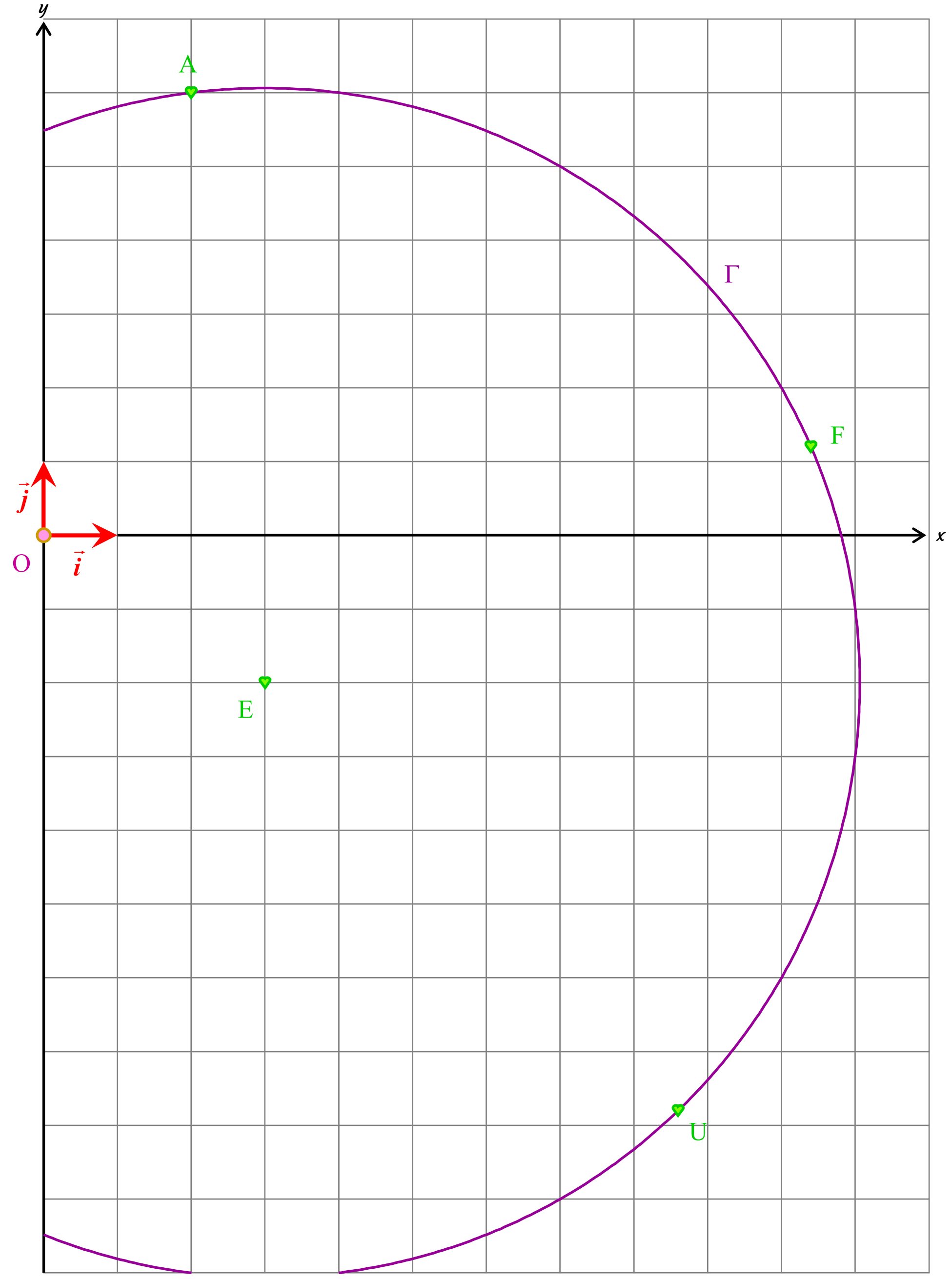
3. Construire au compas le point B sur la figure ci-contre.

4. Déterminer par le calcul les coordonnées $(x_B\ ;\ y_B)$ du point B.

5. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [AU].

6. Les droites (AU) et (EI) sont-elles perpendiculaires ? On justifiera sa réponse. Ce résultat était-il prévisible ?

c. Les points E, B et F sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.



Le corrigé

a.1. Le rayon du cercle Γ est égal à la longueur EA.

$$\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix} 2-3=-1 \\ 6-(-2)=8 \end{pmatrix} \Rightarrow EA = \left\|\overrightarrow{EA}\right\| = \sqrt{(-1)^2+8^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}\text{ cm}$$

Conclusion : le rayon du cercle Γ est égal à $\sqrt{65}$ centimètres.

a.3. La distance EU est-elle égale au rayon au cercle Γ soit $\sqrt{65}$ centimètres ?

$$\overrightarrow{EU}\begin{pmatrix} 8,6-3=5,6 \\ -7,8-(-2)=-5,8 \end{pmatrix} \Rightarrow EU = \sqrt{5,6^2+(-5,8)^2} = \sqrt{31,36+33,64} = \sqrt{65}\text{ cm}$$

Conclusion : le point U appartient au cercle Γ.

e.3. Le point $F(x_F\ ;\ 1,2)$ faisant partie du cercle Γ, la distance EF est égale à $\sqrt{65}$ centimètres.

Ensuite, exprimons cette distance EF en fonction de l'abscisse x_F.

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F-3 \\ 1,2-(-2)=3,2 \end{pmatrix} \Rightarrow EF = \sqrt{(x_F-3)^2+3,2^2} = \sqrt{(x_F-3)^2+10,24}$$

Ensuite, nous pouvons écrire :

$$F\in\Gamma \Rightarrow EF=\sqrt{65}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_F-3)^2+10,24}=\sqrt{65} \xrightarrow{\text{Carré}} (x_F-3)^2+10,24=65$$

$$\Rightarrow (x_F-3)^2=54,76 \Rightarrow x_F-3=\sqrt{54,76} \text{ ou } x_F-3=-\sqrt{54,76}$$

$$x_F=7,4+3 \qquad x_F=-7,4+3$$

$$x_F=\boxed{10,4} \qquad x_F=-3,8$$

Conclusion : Son abscisse étant positive, les coordonnées du point F sont $(10,4\ ;\ 1,2)$.

b.1. Le point B se construit au compas en reportant le vecteur $\overrightarrow{EU}$ au départ de A.

b.2. AEUB étant un parallélogramme, nous avons l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EU} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_B-2 \\ y_B-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8,6-3 \\ -7,8-(-2) \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}} \Leftrightarrow \overbrace{x_B-2=5,6}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{y_B-6=-5,8}^{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$x_B=7,6 \qquad y_B=0,2$$

Conclusion : les coordonnées du point B sont $(7,6\ ;\ 0,2)$.

b.3. Les coordonnées du milieu I du segment [AU] sont données par :

$$x_I = \frac{x_A + x_U}{2} = \frac{2+8,6}{2} = \frac{10,6}{2} = 5,3 \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_U}{2} = \frac{6+(-7,8)}{2} = \frac{-1,8}{2} = -0,9$$

Conclusion : les coordonnées du milieu F sont $(5,3\ ;\ -0,9)$.

b.4. Les vecteurs $\overrightarrow{AU}\begin{pmatrix} 8,6-2=6,6 \\ -7,8-6=-13,8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EI}\begin{pmatrix} 5,3-3=2,3 \\ -0,9-(-2)=1,1 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

$$\text{Test d'orthogonalité}\left(\overrightarrow{AU},\overrightarrow{EI}\right) = \underbrace{6,6\times 2,3+(-13,8)\times 1,1}_{\text{La somme des produits dans chaque coordonnée.}} = 15,18-15,18 = 0$$

Leur test d'orthogonalité étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{AU}$ et $\overrightarrow{EI}$ ne sont pas orthogonaux.
Conclusion : les droites (AU) et (EI) sont perpendiculaires.

♥ Ce résultat était prévisible car le parallélogramme AEUB a ses côtés consécutifs [EA] et [EU] égaux. En effet, les points A et U appartiennent au cercle Γ de centre E.
Donc AEUB est un losange...dont les diagonales [AU] et [EB] sont perpendiculaires en leur milieu commun I.

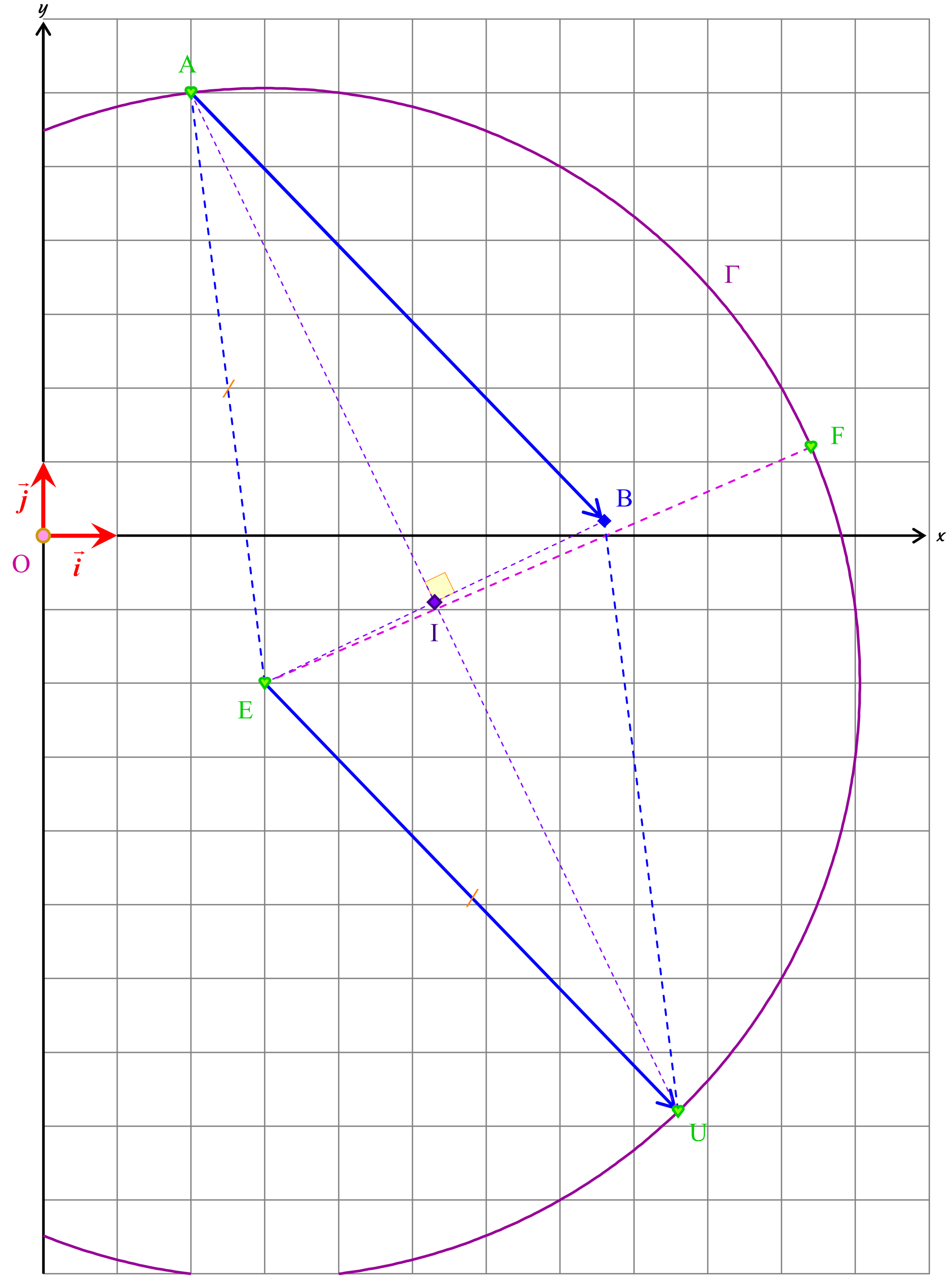
c. Les vecteurs $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 7,6-3=4,6 \\ 0,2-(-2)=2,2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 10,4-3=7,4 \\ 1,2-(-2)=3,2 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Pour le savoir, calculons leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}\right) = \begin{vmatrix} 4,6 & 7,4 \\ 2,2 & 3,2 \end{vmatrix} = 4,6\times 3,2-2,2\times 7,4 = 14,72-16,28 = -1,56 \neq 0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires.
Conclusion : les points E, B et F ne sont pas alignés.

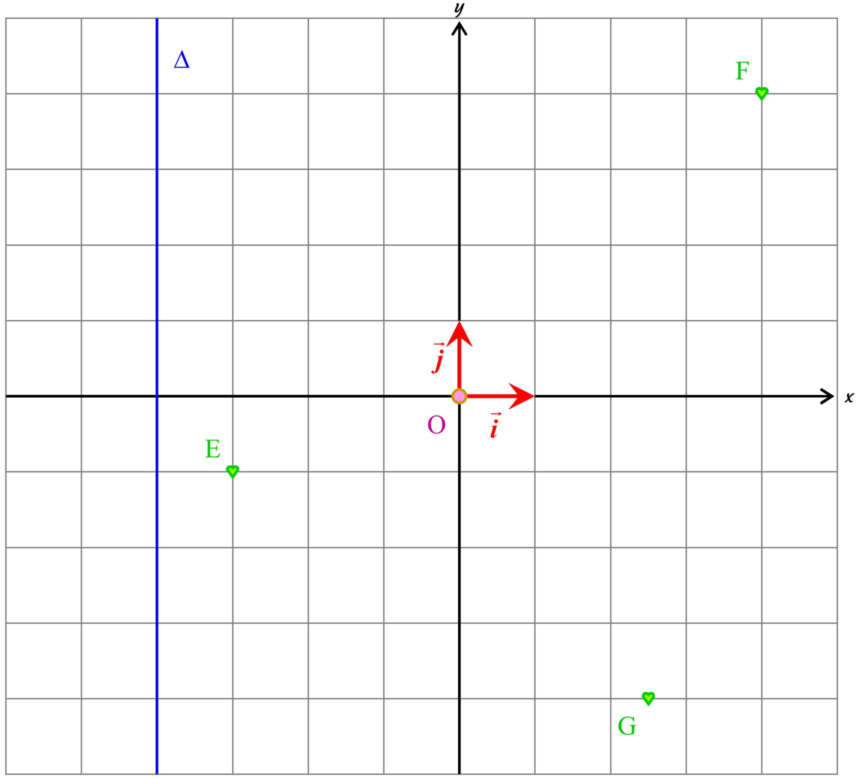
A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre ➔



La bataille des droites

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé et centimétrique dans lequel on a placé les points $E(-3\ ;\ -1)$, $F(4\ ;4)$ et $G(2{,}5\ ;\ -4)$.



a. On appelle d la droite d'équation $6x+8y+17=0$.

- **a.** Les points E et G appartiennent-ils à la droite d ? On justifiera sa réponse.
- **b.** Sans justifications, donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de d, puis tracer cette droite sur le graphique ci-dessus.
- **c.** Sans justifications, donner une équation et un vecteur directeur de la droite Δ qui a été tracé sur le graphique ci-dessus.
- **d.** Déterminer les coordonnées du point H qui est l'intersection des droites d et Δ.

b. Dans cette sous-partie, on s'intéresse à la droite (EF).

1. Déterminer par le calcul une équation de la droite (EF).
2. Prouver que les droites (EF) et d sont sécantes.
3. Déterminer les coordonnées du point H qui est l'intersection des droites d et (EF).

Le corrigé

a.1. Les coordonnées des deux points proposés vérifient-elles l'équation de la droite d ?

$$\begin{cases} 6x_E+8y_E+17=6\times(-3)+8\times(-1)+17=-18-8+17=-9\neq 0 \Rightarrow E\notin d \\ 6x_G+8y_G+17=6\times 2{,}5+8\times(-4)+17=15-32+17=0 \Rightarrow G\in d \end{cases}$$

a.2. Un vecteur directeur de la droite d d'équation $\underbrace{\boxed{6}}_{a}x+\underbrace{\boxed{8}}_{b}y+17=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b=-8\\ a=6\end{pmatrix}$.

On construit la droite d en faisant partir le vecteur $\vec{u}$ du point G. On obtient alors un second point de coordonnées $G'(-5{,}5\ ;2)$ de la droite.

a.3. La droite Δ étant parallèle à l'axe des ordonnées, l'un de ses vecteurs directeurs est $\vec{j}$.
L'une de ses équations est $x=-4$; tous les points de Δ ont une abscisse égale à -4.

a.4. Le point H appartenant aux droites Δ et d, ses coordonnées en vérifient les deux équations:

$$\begin{cases} H\in\Delta \Leftrightarrow x_H=-4 \\ H\in d \Leftrightarrow 6x_H+8y_H+17=0 \Leftrightarrow 6\times(-4)+8y_H+17=0 \\ \qquad \Leftrightarrow 8y_H-7=0 \Leftrightarrow 8y_H=7 \Leftrightarrow y_H=\frac{7}{8} \end{cases}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point H sont $(-4\ ;0{,}875)$.

b.1. Déterminons une équation cartésienne de la droite (EF).

$$M(x;y)\in(EF) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-(-3)\\ y-(-1)\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4-(-3)\\ 4-(-1)\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EF}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+3 & 7\\ y+1 & 5\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow [(x+3)\times 5]-[(y+1)\times 7]=0 \Leftrightarrow [5x+15]-[7y+7]=0$$

$$\Leftrightarrow 5x+15-7y-7=0 \Leftrightarrow 5x-7y+8=0$$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne de la droite (EF) est $5x-7y+8=0$.

b.2. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{u}$, directeurs pour les droites (EF) et d, sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{EF},\vec{u}\right)=\begin{vmatrix}7 & -8\\ 5 & 6\end{vmatrix}=7\times 6-5\times(-8)=42+40=82\neq 0$$

Leur déterminant n'étant pas nul, les vecteurs directeurs $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.
<u>Conclusion :</u> les droites (EF) et d ne sont pas parallèles mais sécants en un point L.

b.3. Comme le point L fait partie des droites (EF) et d, ses coordonnées en vérifient les deux équations :

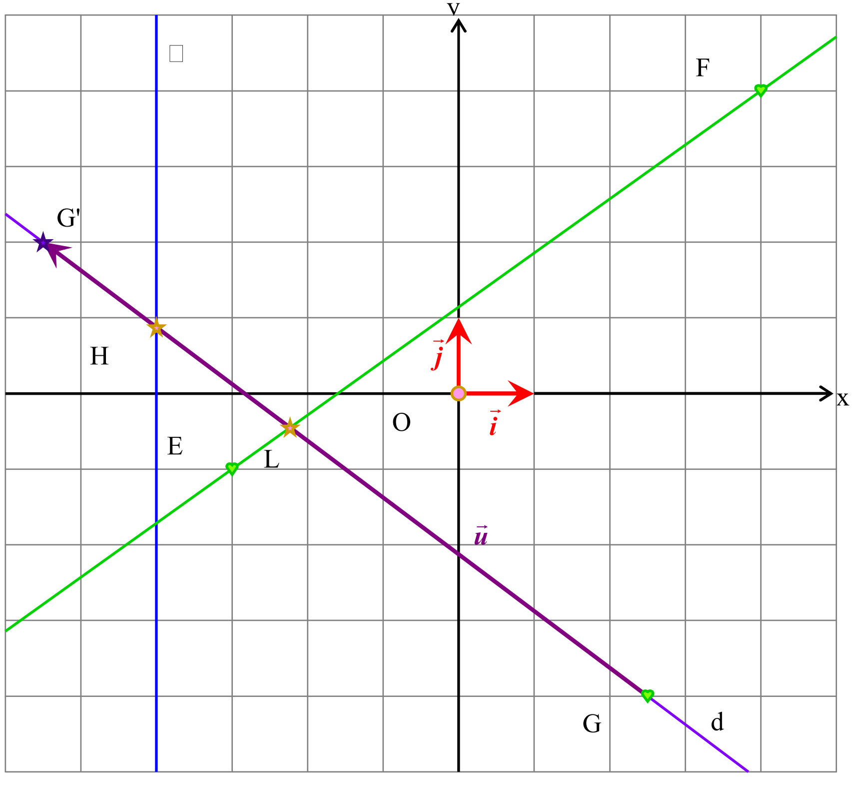
$$\begin{cases} \mathrm{L} \in (\mathrm{EF}) \iff 5x_{\mathrm{L}} - 7y_{\mathrm{L}} + 8 = 0 \\ \mathrm{L} \in d \iff 6x_{\mathrm{L}} + 8y_{\mathrm{L}} + 17 = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système linéaire par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour déterminer x_{L}, on supprime les y_{L}.	On annihile les x_{L} pour obtenir y_{L}.
(1) $\xrightarrow{\times 8}$ $40x_{\mathrm{L}} + 56y_{\mathrm{L}} + 64 = 0$ $\oplus$ *(2)* $\xrightarrow{\times 7}$ $42x_{\mathrm{L}} + 56y_{\mathrm{L}} + 119 = 0$ $82x_{\mathrm{L}} + 183 = 0$ $x_{\mathrm{L}} = -\dfrac{183}{82}$	*(1)* $\xrightarrow{\times 6}$ $30x_{\mathrm{L}} - 42y_{\mathrm{L}} + 48 = 0$ $\ominus$ *(2)* $\xrightarrow{\times 5}$ $30x_{\mathrm{L}} + 40y_{\mathrm{L}} + 85 = 0$ $-82y_{\mathrm{L}} - 37 = 0$ $y_{\mathrm{L}} = -\dfrac{37}{82}$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point L sont $\left(-\dfrac{183}{82} \,;\, -\dfrac{37}{82}\right)$.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Géométrie classique non repérée

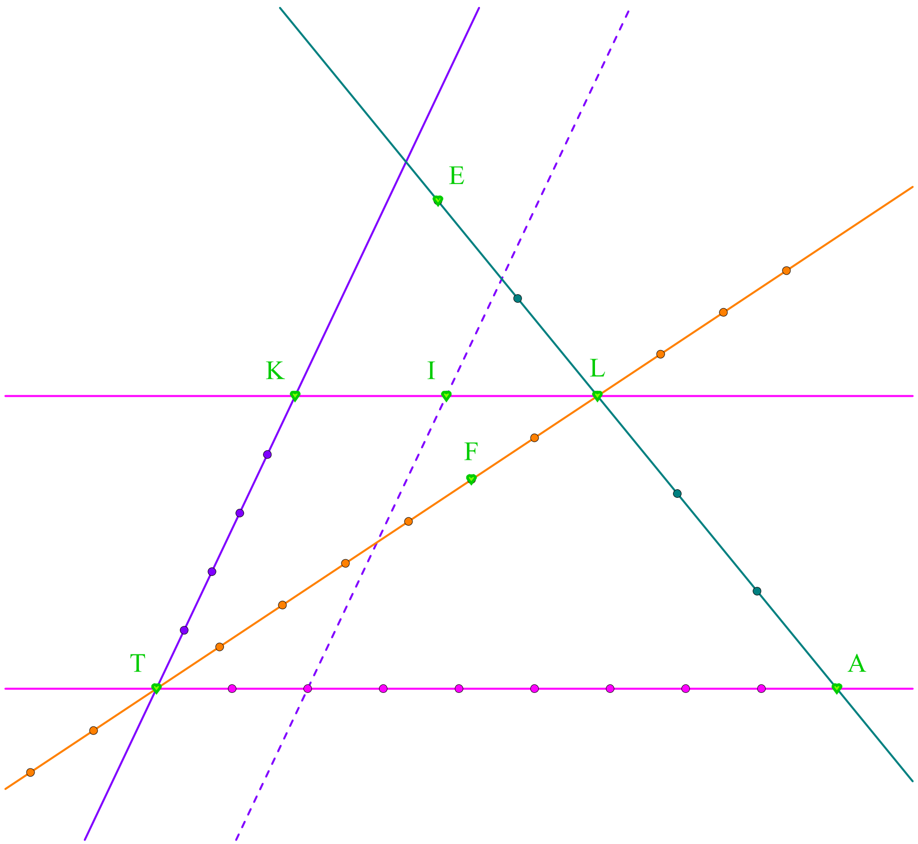
Vecteurs de bien-être ou pas

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, TALK est un trapèze dont les côtés (TA) et (KL) sont parallèles et tel que :

TA = 9 cm KL = 4 cm AL = 5 cm TL = 7 cm

Les droites parallèles ont été tracées de la même couleur. Enfin, certains segments ou droites ont été partagés en un certain nombre de parties égales.



a. En utilisant la figure ci-contre, compléter les relations vectorielles ci-dessous avec les réels qui conviennent le cas échéant.

$\overrightarrow{TF} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{TL}$ $\overrightarrow{IK} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{IL}$

$\overrightarrow{LA} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{LE}$ $\overrightarrow{KI} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{KA}$

$\overrightarrow{TI} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{TA} + \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{TK}$ $\overrightarrow{AF} = \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{TA} + \ldots\ldots\ldots \times \overrightarrow{TK}$

b. A l'aide du compas et de la règle graduée, construire les points M, N et P définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{KM} = -\frac{3}{5} \times \overrightarrow{KT} \qquad \overrightarrow{TN} = \frac{2}{3} \times \overrightarrow{AL} \qquad \overrightarrow{AP} = \frac{4}{7} \times \overrightarrow{LT} + \frac{3}{4} \times \overrightarrow{LK}$$

c. Le point S est défini par la relation vectorielle :

$$7 \times \overrightarrow{KS} - 2 \times \overrightarrow{AS} = \vec{0}$$

1. Par un calcul vectoriel, exprimer le vecteur $\overrightarrow{KS}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{KA}$. C'est-à-dire que l'on veut une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{KS} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{KA}$.
2. Placer le point S sur la figure ci-contre.

Le corrigé

a. En utilisant la figure, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{TF} = \frac{5}{7} \times \overrightarrow{TL} \qquad \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{IL} \qquad \overrightarrow{LA} = -\frac{3}{2} \times \overrightarrow{LE} \qquad \overrightarrow{TI} = \frac{2}{9} \times \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TK}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{KI}$ et $\overrightarrow{KA}$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas même direction, ils ne peuvent être «proportionnels».
Pour la dernière relation, il faut faire un petit calcul.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} &= \overbrace{\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TF}}^{\text{Merci Chasles !}} \\
&= -\overrightarrow{TA} + \frac{5}{7} \times \overrightarrow{TL} = -\overrightarrow{TA} + \frac{5}{7} \times \overbrace{\left(\overrightarrow{TK} + \overrightarrow{KL}\right)}^{\text{Merci Chasles !}} \\
&= -\overrightarrow{TA} + \frac{5}{7} \times \overrightarrow{TK} + \frac{5}{7} \times \overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{TA} + \frac{5}{7} \times \overrightarrow{TK} + \frac{5}{7} \times \frac{4}{9} \times \overrightarrow{TA} \\
&= \frac{5}{7} \times \overrightarrow{TK} + \left(-1 + \frac{20}{63}\right) \times \overrightarrow{TA} = \frac{5}{7} \times \overrightarrow{TK} + \frac{-63+20}{63} \times \overrightarrow{TA} = \frac{43}{63} \times \overrightarrow{TA} + \frac{5}{7} \times \overrightarrow{TK}
\end{aligned}$$

b. Le point M se place directement en utilisant le partage du segment [KT]; N et P nécessitent la construction de parallélogrammes à l'aide du compas.

c.1. Partons de la relation vectorielle définissant le point S.

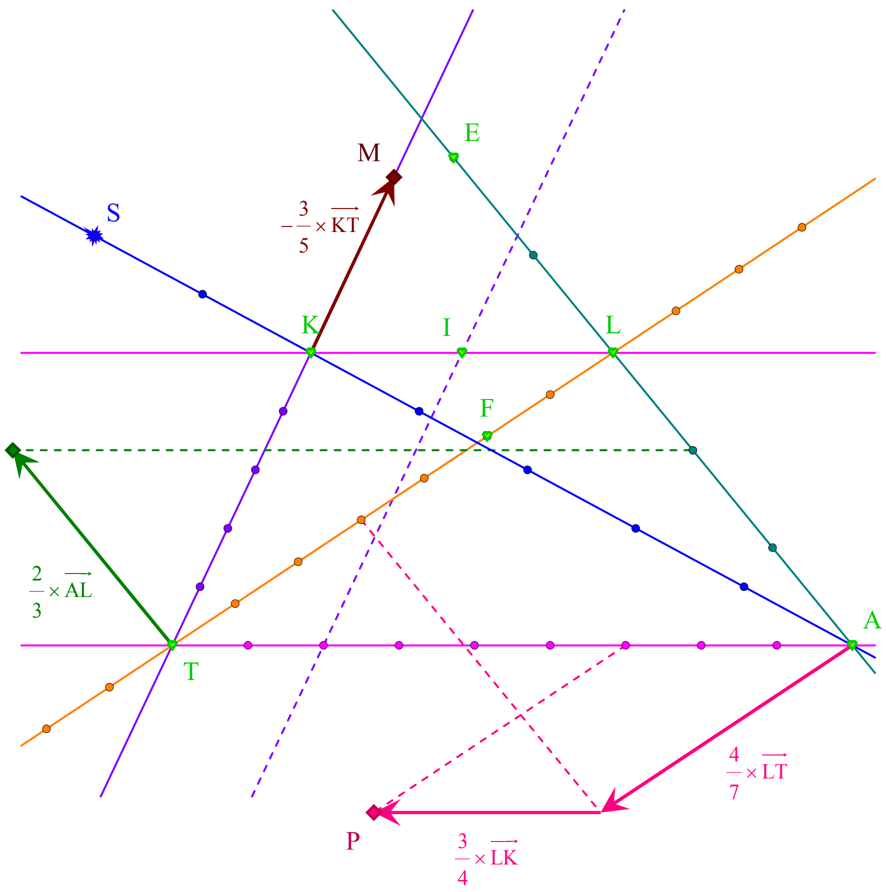
$$7\times\overrightarrow{KS}-2\times\overrightarrow{AS}=\vec{0} \Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{KS}-2\times\overbrace{\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KS}\right)}^{\text{Merci Chasles !}}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{KS}-2\times\overrightarrow{AK}-2\times\overrightarrow{KS}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 5\times\overrightarrow{KS}=2\times\overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{KS}=\frac{2}{5}\times\overrightarrow{AK}=-\frac{2}{5}\times\overrightarrow{KA}}$$

c.2. Le segment [AK] mesurant 8,14 centimètres, le point S se trouve sur la droite (KA) à $\frac{2}{5}\times 8{,}14\approx 3{,}26$ cm du point K mais à l'opposé de A.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



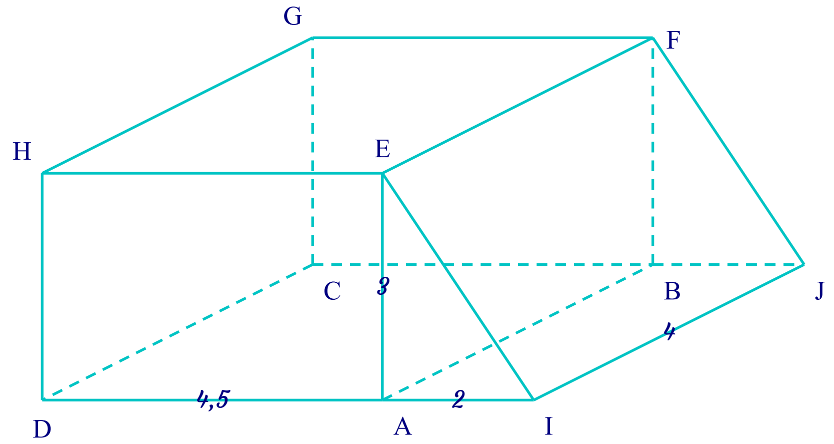
Laisse passe !

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, AIJBCDEFGH est un trapézoïde constitué du pavé droit ABCDEFGH auquel on a collé le prisme droit AIJBEF tels que

AD = 4,5 cm AI = 2 cm AE = 3 cm IJ = 4 cm

Le point I appartient à la droite (AD) et J fait partie de la droite (BC).



a. Calculer le volume exprimé en centimètres cubes trapézoïde AIJBCDEFGH.

b. Cette sous-partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, trois propositions sont faites mais une seule est juste. Laquelle ? On entourera la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

b.1. Les droites (CI) et (EG) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

b.2. Les plans (AFJ) et (DCG) sont :

Sécants	Parallèles distincts	Confondus

b.3. La droite (IJ) et le plan (EGH) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse.	La droite est incluse dans le plan.

b.4. Les droites (CE) et (DF) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

b.5. Les plans (ACJ) et (BDI) sont :

Sécants	Parallèles distincts	Confondus

b.6. La droite (EJ) et le plan (BDH) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse	La droite est incluse dans le plan

Le corrigé

a. Le trapézoïde AIJBCDEFGH est formé de deux solides :

- le pavé droit ABCDEFGH de volume $4,5\times 3\times 4 = \underline{54\text{ cm}^3}$
- le prime droit AIJBEF de volume $\dfrac{2\times 3}{2}\times 4 = \underline{12\text{ cm}^3}$

<u>Conclusion :</u> le volume du trapézoïde AIJBCDEFGH est de 66 centimètres cubes.

b. Passons en revue les diverses configurations.

1. Le point I n'appartenant pas au plan (CGE), les droites (CI) et (GE) sont non coplanaires.
2. Les plans (AFJ) et (DCG) sont sécants suivant une droite d qui est, d'après le théorème du toit, parallèle aux droites (GD) et (AF). Cette droite d passe aussi par le point d'intersection des droites (AJ) et (CD) qui sont sécantes dans le plan de base (ABC).
3. Comme la droite (IJ) est parallèle à (EF) qui est incluse dans le plan (EGH), alors la droite est parallèle au plan. Mais elle n'y est pas incluse car ni I, ni J n'en font partie.
4. Les droites (CE) et (DF) sont deux diagonales du pavé droit situées dans le même plan (AEGC) et se croisant au centre du polyèdre. Elles sont donc sécantes.
5. Les six points définissant les deux plans étant coplanaires, les plans (ACJ) et (BDI) sont confondus.
6. Compte tenu des dimensions du trapézoïde, la droite (EJ) ne peut être que sécante au plan (BDH). Pour obtenir leur point d'intersection X, il faut d'abord construire l'intersection d' des plans (BDH) et (EIJ). Celle-ci passe par le point F et le point d'intersection des droites (BD) et (IJ) qui sont sécantes dans le plan (ABC). Alors X est le point d'intersection des droites (EJ) et d'.

Probabilités et statistiques

Des maux cratiques

L'énoncé

La commune de *Trifouilly-sur-Bled* est constituée de deux villages : *Trifouilly* et *Bled*.
Les sous-parties de cet exercice sont indépendantes les unes des autres. Les probabilités seront retournées sous la forme d'une fraction irréductible ou d'une valeur décimale exacte.

a. Un référendum vient de se tenir dans la commune de *Trifouilly-sur-Bled*. 20% des électeurs ont répondu qu'ils étaient pour ce qui était proposé, 30% qu'ils étaient contre ce qui était proposé et le reste s'est abstenu.
Parmi les électeurs ayant voté pour ce qui était proposé, 60% habitent le village de *Trifoully*.
Parmi les électeurs ayant voté contre ce qui était proposé, 40% habitent le village de *Trifouilly*.
Enfin, 70% des abstentionnistes habitent le village de *Bled*.
Le lendemain du référendum, on rencontre au hasard un électeur de la commune.

1. Faire un arbre pondéré décrivant la situation de cet électeur rencontré au hasard. On définira les événements introduits avec précision.
2. Déterminer la probabilité que l'électeur rencontré au hasard habite *Bled*.
3. On sait que l'électeur rencontré habite *Bled*. Calculer la probabilité qu'il se soit abstenu. On pourra donner une valeur approchée de cette probabilité au millième près.

b. Le conseil municipal de *Trifouilly-sur-Bled* a été invité à participer au *Grand des Bas* qui se déroulera au palais des congrès de *Pétaouchnoque* le weekend prochain. Pour ce faire, il doit constituer une délégation de trois personnes. Pour ne froisser personne, on décide de procéder à un tirage au sort parmi les treize membres du conseil municipal dont la composition est la suivante :

- Six conseillers municipaux viennent de *Trifouilly*. Exactement quatre d'entre eux sont des femmes.
- Sept conseillers municipaux viennent de *Bled*. Exactement quatre d'entre eux sont des femmes.

La délégation est constituée de la manière suivante : le premier poste est réservé à un conseiller venant de *Trifouilly*, le deuxième poste est réservé à un conseiller habitant *Bled* et le troisième poste de remplaçant peut être occupé par n'importe quel autre conseiller municipal qui n'a pas été retenu pour l'un des deux premiers postes.

1. Montrer qu'il existe exactement 462 délégations possibles.
2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

A = «la délégation ne comporte que des hommes»
B = «le premier poste qui est réservé à un conseiller de *Trifouilly* est occupé par un homme mais les deux autres sont occupés par des femmes»
C = «la délégation est constituée d'un homme et deux femmes»
D = «la délégation comporte au moins une femme»

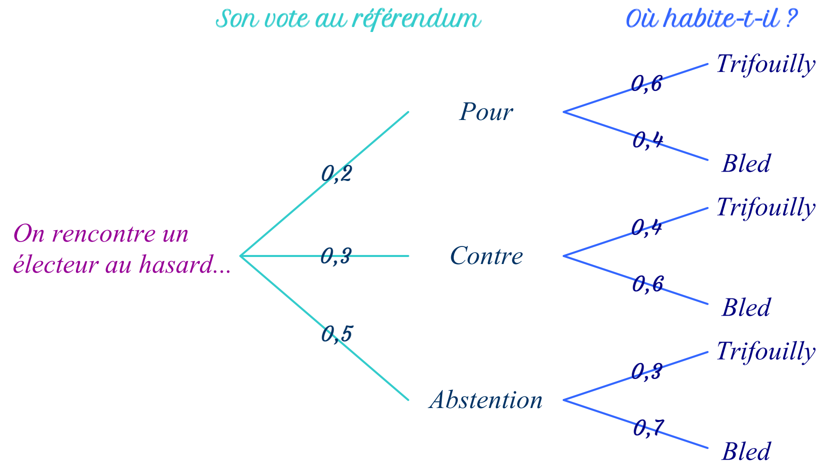
c. Une étude menée sur la population adulte de la commune de *Trifouilly-sur-Bled* a montré que :

- Exactement 35% des adultes avaient de grands pieds ou un grand nez.
- Exactement 21% des adultes avaient de grands pieds.
- Exactement 18% des adultes avaient un grand nez.

On rencontre au hasard un adulte de *Trifouilly-sur-Bled*. Calculer la probabilité qu'il ait un grand nez et de grands pieds.

Le corrigé

a.1. La situation de l'électeur rencontré peut être représentée par l'arbre suivant :



a.2. La probabilité que l'électeur habite *Bled* est la somme des probabilités de toutes les branches de l'arbre dont l'issue est *Bled*.

$$p(Bled) = p(\text{Pour} \cap Bled) + p(\text{Contre} \cap Bled) + p(\text{Abstention} \cap Bled)$$
$$= 0,2 \times 0,4 + 0,3 \times 0,6 + 0,5 \times 0,7 = 0,08 + 0,18 + 0,35 = 0,61$$

a.3. La probabilité que l'électeur de *Bled* rencontré se soit abstenu est donnée par :

$$p(\text{«L'électeur de } Bled \text{ s'est abstenu»}) = \frac{p(\text{Abstention} \cap Bled)}{p(Bled)} = \frac{0,5\times 0,7}{0,61} = \frac{0,35}{0,61} = \frac{35}{61} \approx 0,574 = 57,4\%$$

b.1. Constituons notre délégation par tirage au sort !

Poste de *Trifouilly*		Poste de *Bled*		Poste de remplaçant		
6 candidat(e)s	×	7 candidat(e)s	×	11 candidat(e)s restants	=	462 délégations possibles

b.2. Combien existe-t-il de délégations favorables à l'événement *A* c'est-à-dire composée exclusivement d'hommes ?

Poste de *Trifouilly*		Poste de *Bled*		Poste de remplaçant		
2 candidats	×	3 candidats	×	3 candidats restants	=	18 délégations *A*

Par conséquent, la probabilité de l'événement *A* est donnée par :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de délégations favorables à } A}{\text{Nombre total de délégations}} = \frac{18}{462} = \frac{\cancel{6}\times 3}{\cancel{6}\times 7\times 11} = \frac{3}{77}$$

➲ Dénombrons le nombre de délégations favorables à l'événement *B*.

Poste de *Trifouilly*		Poste de *Bled*		Poste de remplaçant		
2 candidats	×	4 candidates	×	7 candidates restantes	=	56 délégations *B*

Ainsi la probabilité de l'événement *B* est donnée par :

$$p(B) = \frac{\text{Nombre de délégations favorables à } B}{\text{Nombre total de délégations}} = \frac{56}{462} = \frac{\cancel{7}\times \cancel{2}\times 4}{\cancel{2}\times 3\times \cancel{7}\times 11} = \frac{4}{33}$$

➲ Pour connaître le nombre de délégations favorables à l'événement *C*, nous devons détailler les cas suivant le poste occupé par l'homme, les deux autres postes étant attribués à deux femmes.

D'abord, le cas où l'homme occupe le poste de *Trifouilly* a déjà été traité. C'est l'événement *B* pour lequel il existe 56 délégations favorables.

Ensuite, si l'homme occupe le poste de Bled alors la délégation est de la forme...

Poste de *Trifouilly*		Poste de *Bled*		Poste de remplaçant		
4 candidates	×	3 candidats	×	7 candidates restantes	=	84 délégations *B*

Enfin, l'homme peut occuper le poste de remplaçant. La délégation est alors de la forme...

Poste de *Trifouilly*		Poste de *Bled*		Poste de remplaçant		
4 candidates	×	4 candidates	×	5 candidates restantes	=	80 délégations

Au total, il existe donc $56+84+80=220$ délégations favorables à l'événement *C*. La probabilité de ce dernier est donnée par :

$$p(C) = \frac{\text{Nombre de délégations favorables à } C}{\text{Nombre total de délégations}} = \frac{220}{462} = \frac{\cancel{2}\times 10\times \cancel{11}}{\cancel{2}\times 3\times 7\times \cancel{11}} = \frac{10}{31}$$

➲ L'événement *D* qui est «au moins une femme dans la délégation» est l'événement contraire de l'événement *A* qui est «que des hommes dans la délégation» c'est-à-dire «aucune femme». Par conséquent :

$$p(D) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{77} = \frac{77-3}{77} = \frac{74}{77}$$

c. Nous avons la relation suivante :

$$p(\text{Grds pieds} \cup \text{Grd nez}) = p(\text{Grds pieds}) + p(\text{Grd nez}) - p(\text{Grds pieds} \cap \text{Grd nez})$$

$$0,35 = 0,21 + 0,18 - p(\text{Grds pieds} \cap \text{Grd nez})$$

$$p(\text{Grds pieds} \cap \text{Grd nez}) = 0,39 - 0,35 = 0,04$$

<u>Conclusion :</u> la probabilité que l'adulte rencontré ait de grands pieds et un grand nez est de 4%.

Poids-lourds en chiffres

L'énoncé

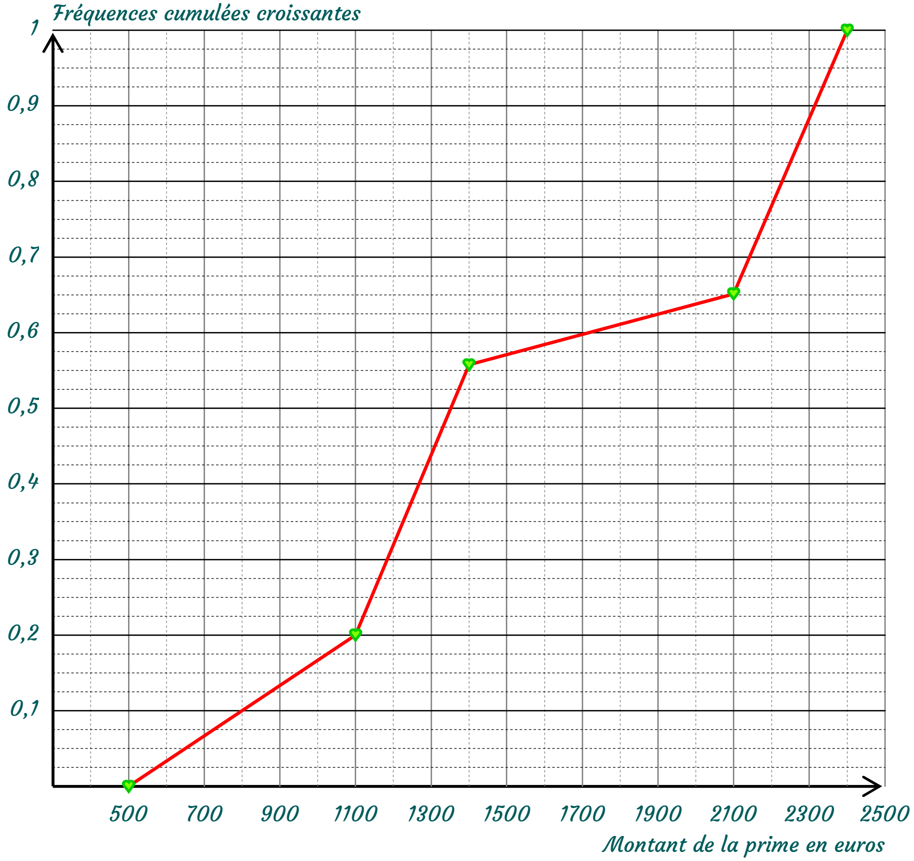
Les trois sous-parties de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

a. *La Blancoise du Graukhu*, célèbre transporteur routier, fait ses comptes pour le mois. Ses camions ont effectué :

- 19 trajets où ils ont transporté 8 tonnes de sable à chaque voyage;
- 21 trajets où ils ont transporté 12 tonnes de gravier à chaque voyage;
- 37 trajets où ils ont transporté 9 tonnes de cailloux à chaque voyage;
- 23 trajets où ils ont transporté 14 tonnes de terre à chaque voyage.

Calculer la masse moyenne transportée par trajet. On donnera le résultat exprimé en tonnes arrondi à l'hectogramme près.

b. On a étudié le montant des primes versées en fin d'année par l'entreprise *La Blancoise du Graukhu* à 666 de ses salariés. On a en construit le polygone des fréquences cumulées croissantes ci-après.



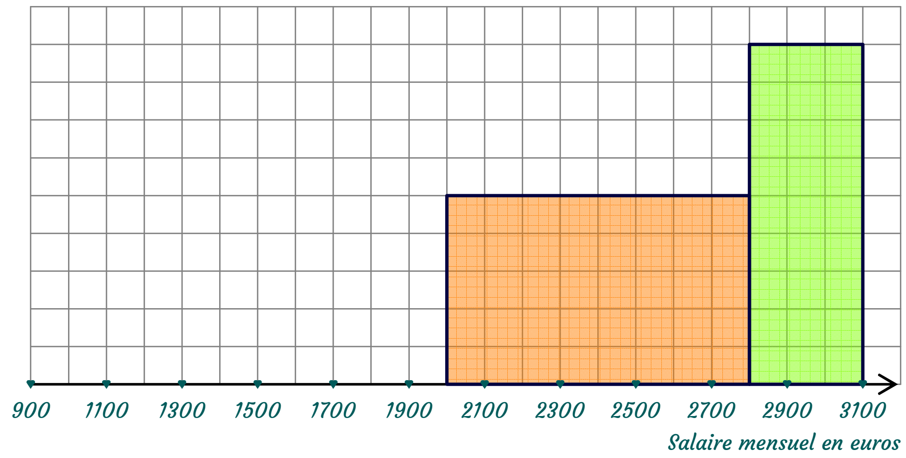
Avec toute la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Quels sont les montants minimal et maximal que perçoivent les salariés de l'entreprise ?
2. Déterminer la médiane M_e ainsi que les deux quartiles Q_1 et Q_3 de la présente série statistique.
3. Donner une estimation du nombre d'employés dont la prime a été inférieure à 1100 euros.
4. Donner une estimation de la part des employés ayant eu une prime comprise entre 1400 et 2100 euros.
5. Dans un document comptable, l'entreprise indique qu'exactement 20% de ses employés ont touché une prime de plus de x euros. Donner une estimation de ce réel x.

c. Dans les questions suivantes, on s'intéresse à la répartition des salaires mensuels dans l'entreprise *La Blancoise du Graukhu*. Les données recueillies ont été compilées dans la série statistique suivante hélas incomplète.

Classe de salaires exprimés en euros	$[1000;1400[$	$[1400;2000[$	$[2000;2800[$	$[2800;3100[$
Effectif	252	432		

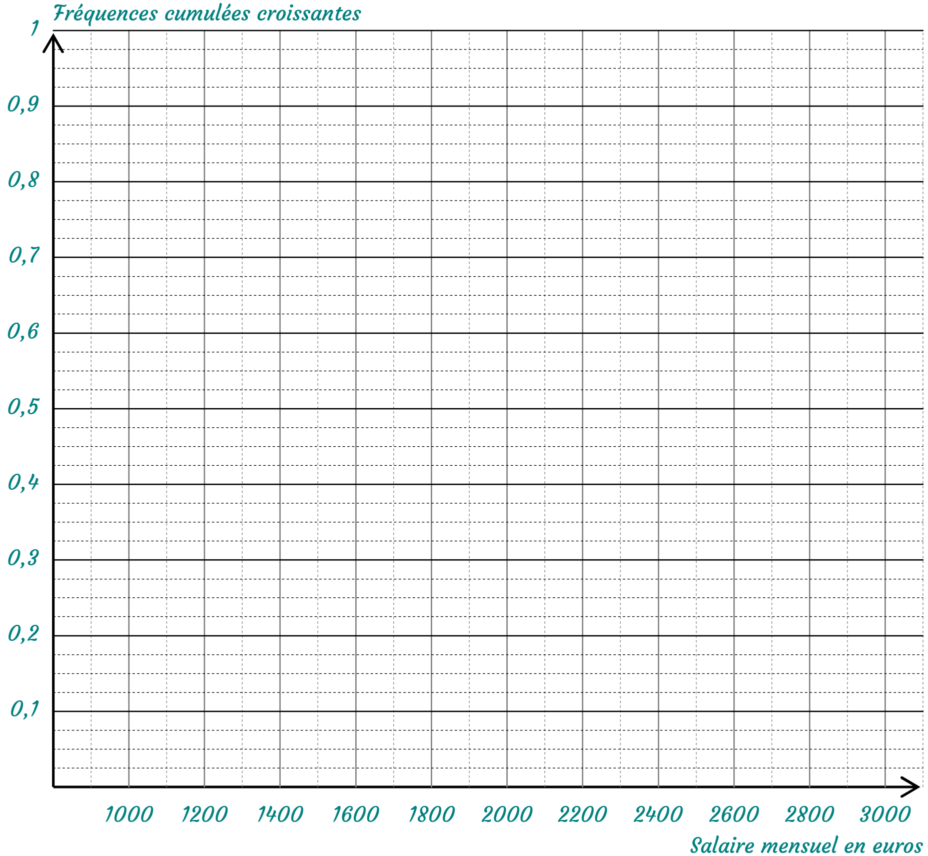
Ces données sont complétées par l'histogramme ci-dessous où un centimètre carré représente 36 individus.



1. Compléter le tableau et l'histogramme précédents.
2. Parmi les propositions suivantes, laquelle est égale au nombre de salariés de l'entreprise.

   1087 1287 1487 1687

3. Calculer le salaire moyen que l'on exprimera en euros. On arrondira le résultat à l'euro près.
4. Sur le graphique ci-dessous, construire le polygone des fréquences cumulées croissantes de la présente série statistique.

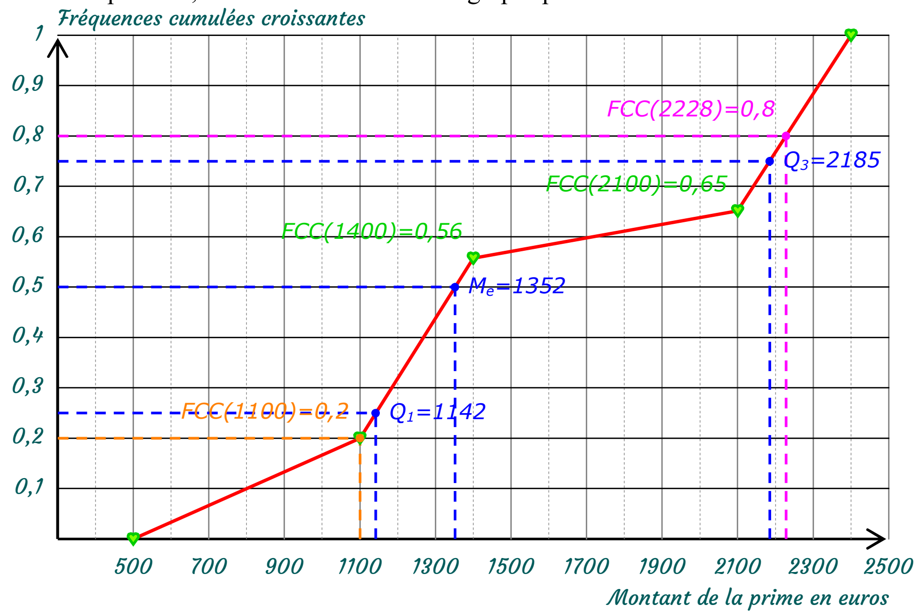


Le corrigé

a. La masse moyenne transportée par trajet est donnée par le calcul :

$$\text{Masse moyenne par trajet} = \frac{19\times8+21\times12+37\times9+23\times14}{19+21+37+23} = \frac{1059}{100} = 10,59 \text{ tonnes/trajet}$$

b. Dans cette question, le tout est de bien lire le graphique.



1. Le montant minimal est de 500€ et le montant maximal de 2400 euros.
2. La médiane est la modalité pour laquelle la fréquence cumulée croissante vaut 0,5 et les quartiles celles pour lesquelles la FCC vaut 0,25 et 0,75. On lit :

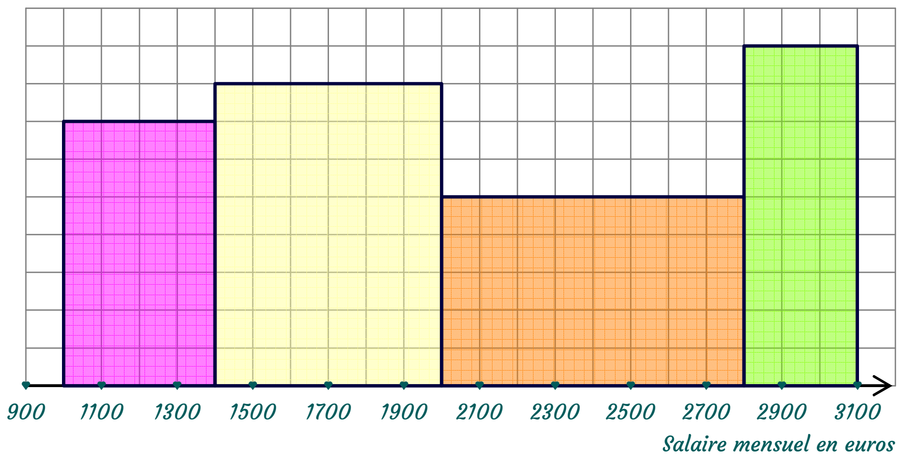
   $Q_1 \approx 1142€$ $M_e \approx 1352€$ $Q_3 \approx 2185€$

3. Exactement 20% des 666 salariés ont perçu une prime inférieure à 1100€ soit $0,2\times666\approx133$ employés.
4. Il y a approximativement $0,65-0,56=9\%$ des 666 salariés qui ont reçu une prime comprise 1400 et 2100 euros.
5. 20% des employés gagnent plus de 2228 euros.

c.1. Complété, le tableau est le suivant :

Classe de salaires exprimés en euros	$[1000;1400[$	$[1400;2000[$	$[2000;2800[$	$[2800;3100[$
Effectif	$\underbrace{252}_{7\times36}$	$\underbrace{432}_{12\times36}$	$\underbrace{360}_{10\times36}$	$\underbrace{243}_{6,75\times36}$
Rectangle ***aire = base × hauteur*** **en centimètres.**	$\underbrace{7}_{cm^2} = \underbrace{2\times3,5}_{cm\times cm}$	$\underbrace{12}_{cm^2} = \underbrace{3\times4}_{cm\times cm}$	$\underbrace{10}_{cm^2} = \underbrace{4\times2,5}_{cm\times cm}$	$\underbrace{6,75}_{cm^2} = \underbrace{1,5\times4,5}_{cm\times cm}$

Et l'histogramme est :



c.2. Au total, l'entreprise compte $252+432+360+243=\boxed{1287 \text{ salariés}}$.

c.3 Le salaire moyen des employés de *La Blancoise du Graukhu* est donné par le calcul:

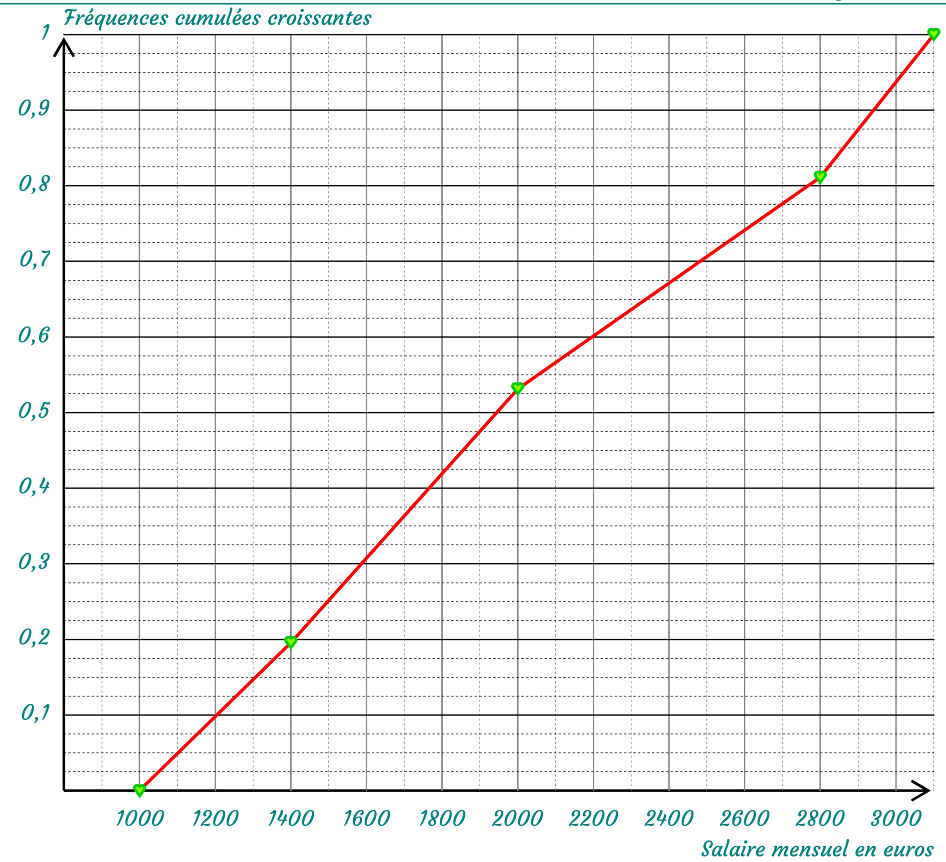
$$\text{Moyenne} = \frac{\sum \overbrace{\text{effectif} \times \text{Milieu}}^{\text{Pour chaque classe}}}{\text{Effectif total}}$$

$$= \frac{252\times1200+432\times1700+360\times2400+243\times2950}{1287} = \frac{2617650}{1287} \approx \boxed{2033{,}92€}$$

c.4. Calculons les fréquences et fréquences cumulées croissantes de la série statistique précédente :

Classe : quotient humoristique	$[1000;1400[$	$[1400;2000[$	$[2000;2800[$	$[2800;3100[$
Fréquence cumulée croissante	0,196	0,531	0,811	1,000

Et le polygone des fréquences cumulées croissantes est celui ci-contre ➚



Badaboum !

L'énoncé

a. La revue *Pipette Magazine* a souhaité savoir si les professeurs de physique-chimie exerçant en France préféraient la chimie ou bien la physique.
Pour ce faire, elle a fait réaliser un sondage auprès d'un échantillon représentatif de 624 professeurs de physique-chimie choisis au hasard. 330 d'entre eux ont déclaré qu'ils préféraient la chimie; les autres ont répondu qu'ils préféraient la physique.

1. Donner l'intervalle de confiance au seuil de 95% sur cet échantillon de 624 individus auquel doit appartenir la proportion de professeurs de physique-chimie préférant la chimie. On arrondira les bornes au centième près. On justifiera que parler d'un tel intervalle a un sens.
2. A la lumière de ce sondage, peut-on affirmer que, globalement, les professeurs de physique-chimie préfèrent la chimie ? On justifiera sa réponse.

b. L'an dernier, le Ministère a découvert que 47% des professeurs de physique-chimie rataient systématiquement leurs expériences en cours. Il a alors lancé un programme de formation pour faire baisser ce taux. Pour évaluer l'impact de ce programme, il vient de faire réaliser une étude sur un échantillon représentatif de 327 professeurs de physique-chimie choisis au hasard.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% sur un échantillon de 327 individus auquel devait appartenir toute fréquence observée de professeurs de physique-chimie ratant systématiquement leurs expériences en cours avant que le programme de formation ne soit lancé. Les bornes seront arrondies au centième près. On justifiera que parler d'un tel intervalle à un sens.
2. D'après l'étude réalisée à l'issue du programme de formation, 126 des 327 professeurs de physique-chimie de l'échantillon ratent encore systématiquement leurs expériences en cours. Au seuil de risque 5%, peut-on dire que le programme de formation du Ministère a eu un impact ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a.1. Ici $\left| \begin{array}{l} n = 624 \text{ individus} \\ p = \dfrac{330}{624} \approx 0{,}529 \end{array} \right.$. Nous avons $\left| \begin{array}{l} n = 624 \geq 30 \\ n \times f = 330 \geq 5 \\ n \times (1-f) = 294 \geq 5 \end{array} \right.$

Les trois conditions étant remplies, parler d'intervalle de confiance a un sens. Les bornes de ce dernier sont : $\left| \begin{array}{l} \text{Borne inf} = \dfrac{330}{624} - \dfrac{1}{\sqrt{624}} \approx 0{,}48 \quad \leftarrow \text{A minorer} \\ \text{Borne sup} = \dfrac{330}{624} + \dfrac{1}{\sqrt{624}} \approx 0{,}57 \quad \leftarrow \text{A majorer} \end{array} \right.$

a.2. La proportion p_C des professeurs de physique-chimie préférant la chimie appartient avec une probabilité au moins égale à 95% à l'intervalle de confiance $[0{,}48;0{,}57]$.
p_C peut être égale à 0,49 et dans ce cas, les professeurs préfèreraient la physique à 51%.
Mais la proportion p_C peut aussi être égale à 0,53 et dans ce cas, les professeurs préfèrent la chimie.
<u>Conclusion :</u> on ne peut rien conclure de cette étude.

b.1. Ici $\left| \begin{array}{l} n = 327 \text{ individus} \\ p = 0{,}47 \end{array} \right.$. Nous avons $\left| \begin{array}{l} n = 327 \geq 30 \\ n \times p = 327 \times 0{,}47 = 153{,}69 \geq 5 \\ n \times (1-p) = 327 \times 0{,}53 = 173{,}31 \geq 5 \end{array} \right.$

Les trois conditions étant remplies, parler d'intervalle de fluctuation a un sens. Les bornes de ce dernier sont : $\left| \begin{array}{l} \text{Borne inf} = 0{,}47 - \dfrac{1}{\sqrt{327}} \approx 0{,}41 \quad \leftarrow \text{A minorer} \\ \text{Borne sup} = 0{,}47 + \dfrac{1}{\sqrt{327}} \approx 0{,}53 \quad \leftarrow \text{A majorer} \end{array} \right.$

Toute fréquence de professeurs de physique-chimie ratant leurs expériences avant le programme de formation observée sur un échantillon de 327 individus appartient à cet intervalle avec une probabilité au moins égale à 95%.

b.2. Après le programme de formation, la fréquence observée sur l'échantillon de professeurs ratant leurs expériences systématiquement est égale à $f = \dfrac{126}{327} \approx 0{,}39$

Celle-ci étant plus petite que la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation, on peut considérer au seuil de risque 5% que le programme de formation a eu un impact.

Table des matières

Le mot de l'auteur

Ca y est ! Le nouveau bac arrive avec son cortège de nouveaux programmes. Pour les maths, la situation est désormais simple : on a le choix entre un programme de S légèrement dégradé et...rien.

Si l'intention de nos grands dirigeants était de combattre la sélection par cette infâme matière que j'enseigne, il me semble que c'est loupé. Car, ne figurant pas dans le tronc d'enseignements communs, en fin de terminale, devant le dieu capricieux *Parcoursup*, il y aura ceux qui auront fait des maths depuis la seconde...et les autres. Même si un petit niveau anciennement couvert par un programme de ES aurait suffi. T'as pas suivi, tant pis !

Ce principe s'applique bien sûr à toutes les spécialités que choisiront ou plutôt que délaisseront les élèves. Dans un premier temps, le Ministère a suggéré que le choix des spécialités pouvait se faire suivant les goûts et les envies. Sauf qu'un parcours d'études doit s'envisager à l'aune des nécessités de formation. A 15 ans, on a rarement une idée très précise de son orientation. Malgré leurs défauts, les filières L, ES et S avaient au moins l'avantage de laisser aux élèves une certaine capacité à se tromper ou à ne pas trop choisir; on affinerait plus tard et ce n'était pas plus mal.

Depuis, le Ministère a mis beaucoup d'eau dans son vinaigre. C'est que les choix anarchiques de tous risquaient de rendre les emplois du temps ingérables. Les caprices de chacun mis bout à bout auraient eu un coût horaire et surtout financier insupportable pour une réforme destinée avant tout à faire des économies. Car moins d'heures à faire, donc moins de profs à payer, optimisation ! Enfin, optimisation à court terme, car dans deux ans, combien d'élèves se rendront-ils compte qu'ils ont fait de mauvais choix dans leurs spécialités et que tout est à recommencer ? Au final, il est probable que les choix de spécialités recréeront de facto les filières supprimées par le gouvernement. Quelle ironie et à quel coût !

En fin de première (c'est-à-dire avant les vacances de Pâques), les élèves passeront dans chaque spécialité une épreuve de deux heures qui comptera pour le bac et qui sanctionnera leur année. Dans chaque établissement, il sera choisi un sujet parmi une banque de données nationale. Récemment, le Ministère a publié des sujets dits «zéros». Le terme «zéros» signifie qu'il s'agit de premières moutures indicatives sur ce qui sera demandé. Mais il pourrait aussi s'appliquer au niveau attendu tellement les énoncés sont indigents. Les ambitions grandiloquentes des programmes vont accoucher d'épreuves au rabais. Un bel exemple de la réussite pour tous, c'est-à-dire de l'échec pour les élèves d'en bas. L'avantage d'une épreuve sélective est qu'elle gomme l'effet «pognon»...à condition que chacun ait eu suffisamment d'heures de cours pour se former; les élèves les plus aisés ayant les cours particuliers pour combler cet éventuel déficit.

L'impression que j'ai en cette fin d'année, est que ceux qui croient à cette réforme sont peu nombreux. Même les inspecteurs semblent douter de sa pertinence. Tout ça pour ça...

Jérôme ONILLON