Analyse

Trois contre un !

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ par :

$$f(x)=\frac{-x^3+10x^2-24x+8}{x-4}$$

Dans cet exercice, nous allons étudier la fonction f de fond en comble.

a. Calculer $f(2)$.

b. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 4 par la gauche, puis par la droite.

c. Compléter l'égalité ci-contre : $f(x)=x^2\times\dfrac{-1+\ldots\ldots}{1+\ldots\ldots}$.

En déduire les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.

d. Démontrer que, pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$, on a :

$$f'(x)=\frac{(4-2x)\times(x^2-9x+22)}{(x-4)^2}$$

e. En déduire les variations de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

f. Justifier que l'équation $f(x)=7$ admet exactement une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{4\}$. On donnera une valeur approchée au centième-près de cette solution.

Le corrigé

a. Calculons l'image de 2 par la fonction f :

$$f(2)=\frac{-2^3+10\times2^2-24\times2+8}{2-4}=\frac{-8+40-48+8}{2-4}=\frac{-8}{-2}=\boxed{4}$$

b. Lorsque x tend vers 4 :

$$-x^3+10x^2-24x+8\ \xrightarrow[x\to4]{}\ -4^3+10\times4^2-24\times4+8=-64+160-96+8=8$$

$$x-4\ \xrightarrow[x\to4]{}\ 4-4=0$$

Donc le quotient $f(x)$ s'en va vers $\dfrac{4}{0}$, donc un infini. Reste à savoir lequel, c'est-à-dire à connaître le signe de la fraction.

Le tableau du signe du dénominateur est :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	

Limite de f à gauche de 4 : $\displaystyle\lim_{x\to4^-}f(x)=\frac{8}{0^-}=\boxed{-\infty}$

Limite de f à droite de 4 : $\displaystyle\lim_{x\to4^+}f(x)=\frac{8}{0^+}=\boxed{+\infty}$

c. Pour tout réel x non nul et différent de 4, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{-x^3+10x^2-24x+8}{x-4}$$
$$=\frac{x^3}{x}\times\frac{-1+10\times\dfrac{x^2}{x^3}-24\times\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{8}{x^3}}{1-\dfrac{4}{x}}=\boxed{x^2\times\frac{-1+\dfrac{10}{x}-\dfrac{24}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}}{1-\dfrac{4}{x}}}$$

A partir de là, toute indétermination concernant f est levée aux voisinages des infinis.
En effet :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2\times\frac{-1+\dfrac{10}{x}-\dfrac{24}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}}{1-\dfrac{4}{x}}=$$
$$=(+\infty)\times\frac{-1+\dfrac{10}{-\infty}-\dfrac{24}{+\infty}+\dfrac{8}{-\infty}}{1-\dfrac{4}{-\infty}}=(+\infty)\times\frac{-1+0^--0^++0^-}{1-0^-}=(+\infty)\times\frac{-1}{1}=\boxed{-\infty}$$

De même :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=(+\infty)\times\frac{-1+\dfrac{10}{+\infty}-\dfrac{24}{+\infty}+\dfrac{8}{+\infty}}{1-\dfrac{4}{+\infty}}=(+\infty)\times\frac{-1+0^+-0^++0^+}{1-0^+}=(+\infty)\times\frac{-1}{1}=\boxed{-\infty}$$

d. f est un quotient $\dfrac{u}{v}$ où

$u(x)=-x^3+10x^2-24x+8$
$u'(x)=-3x^2+10\times2x-24$
$=-3x^2+20x-24$
Dérivable sur $\mathbb{R}$

et

$v(x)=x-4$
$v'(x)=1$
Dérivable sur $\mathbb{R}$
et non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ et, pour tout réel x de cet ensemble, on a :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{\left(-3x^2+20x-24\right)\times(x-4)-1\times\left(-x^3+10x^2-24x+8\right)}{(x-4)^2}$$

$$=\frac{-3x^3+20x^2-24x+12x^2-80x+96+x^3-10x^2+24x-8}{(x-4)^2}$$

$$=\frac{-2x^3+22x^2-80x+88}{(x-4)^2}$$

Développons le numérateur donné par l'énoncé et auquel nous sommes censés arriver :

$$(4-2x)\times\left(x^2-9x+22\right)=4x^2-36x+88-2x^3+18x^2-44x=\underline{-2x^3+22x^2-80x+88}$$

La formule recherchée de la dérivée est établie !

<u>Conclusion :</u> pour tout réel x différent de 4, nous avons :

$$f'(x)=\frac{(4-2x)\times\left(x^2-9x+22\right)}{(x-4)^2}$$

e. Comme d'habitude, c'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction f sur son ensemble de définition. Passons en revue les facteurs constituant ce premier quotient.

- Le facteur affine $-2x+4$ a un coefficient directeur -2 négatif et s'annule lorsque $-2x+4=0 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=\underline{2}$
- Le facteur du second degré $x^2-9x+22$ a pour discriminant :
  $$\Delta=(-9)^2-4\times1\times22=81-88=\underline{-7}$$
  Ce dernier étant négatif, le trinôme est toujours du signe de son coefficient dominant 1, donc toujours positif.
- Le dénominateur $(x-4)^2$ est toujours positif quand il n'est pas nul en $x=4$.

Par suite, le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et de variation de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$-2x+4$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x^2-9x+22$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x-4)^4$		$+$	|	$+$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
Variation de f	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$

f. D'abord, vu le tableau de variation ci-dessus, la maximum de f sur l'intervalle $]-\infty;4[$ étant égal à 4, l'équation $f(x)=7$ admet n'a aucune solution dans l'intervalle $]-\infty;4[$.

Ensuite, sur l'autre intervalle $]4;+\infty[$, comme :

la fonction f est continue sur $]4;+\infty[$ car c'est une fonction rationnelle
la fonction f est strictement décroissante sur $]4;+\infty[$
7 appartient à l'intervalle image $f\left(]4;+\infty[\right)=]-\infty,+\infty[$

alors, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=7$ admet une unique solution sur l'intervalle $]4;+\infty[$. A l'aide de la calculatrice, on détermine qu'une valeur approchée au centième près de cette dernière est 5,63.

Compose ton numéro

L'énoncé

a. La fonction *f* est définie sur l'ensemble $D_f = \left]-\infty;-3\right] \cup \left[\frac{7}{2};+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 21}$$

1. Justifier que la fonction *f* est bien définie sur l'ensemble D_f.
En déduire l'ensemble de dérivabilité de la fonction *f* ainsi que les valeurs des images $f(-3)$ et $f\left(\frac{7}{2}\right)$.

2. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque *x* tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.

3. Calculer la dérivée $f'(x)$.
En déduire le tableau de variation de *f* sur l'ensemble D_f.

b. La fonction arctangente, notée arctan en abrégé, est définie et dérivable sur ℝ. Elle est la réciproque de la fonction tangente. Son tableau de variation est le suivant :

t	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $\arctan'(t) = \frac{1}{t^2+1}$		$+$	
Variation de arctan	$-\pi/2$	$\nearrow$	$\pi/2$

La fonction *g* qui est dérivable sur ℝ est définie sur ce même ensemble par :

$$g(x) = \arctan\left(3x^2 - 2x^3\right)$$

Avant tout, on vérifiera que l'unité de mesure angulaire de la calculatrice est le radian.

1. Calculer les images de $g(0)$ et $g(1)$.
Indication : sur la calculatrice, la fonction arctangente est notée $\tan^{-1}$ ou atn.

2. Déterminer les limites de la fonction *g* en $-\infty$, puis en $+\infty$.

3. Calculer la dérivée $g'(x)$ de la fonction *g*. On ne développera pas le dénominateur.

4. En déduire les variations de la fonction *g* sur ℝ.

Le corrigé

a.1. Pour que la fonction $f = \sqrt{u}$ soit définie, il faut et il suffit que la fonction $u(x) = 2x^2 - x - 21$ soit définie (elle l'est sur ℝ) et soit positive ou nulle.

Déterminons le signe de la forme du second degré $u(x)$. Calculons son discriminant !

$$\Delta_{u(x)} = (-1)^2 - 4\times 2\times(-21) = 1 + 168 = 169 = 13^2$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $u(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-1)-13}{2\times 2} = \frac{-12}{4} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1)+13}{2\times 2} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$u(x)$ est du signe de son coefficient dominant 2 avant et après ses racines; il est du signe contraire entre. Bref, son tableau de signe est :

x	$-\infty$		-3		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$u(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

De ce tableau de signe, nous en déduisons trois choses :

- La fonction *u* étant positive ou nulle sur l'ensemble $D_f = \left]-\infty;-3\right] \cup \left[\frac{7}{2};+\infty\right[$, la fonction $f = \sqrt{u}$ est parfaitement définie sur cet ensemble.
- La fonction *u* étant dérivable et strictement positive sur $\left]-\infty;-3\right[\cup \left]\frac{7}{2};+\infty\right[$, la fonction $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur ce dernier ensemble.
- Les images : $f(-3) = \sqrt{u(-3)} = \sqrt{0} = 0$ et $f(3,5) = \sqrt{u(3,5)} = \sqrt{0} = 0$

a.2. Aux infinis, le polynôme $u(x)$ se comporte comme son terme dominant $2x^2$. Ainsi :

$$\text{En } -\infty : \lim_{x\to-\infty} u(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{u(x)} = +\infty$$

$$\text{En } +\infty : \lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{u(x)} = +\infty$$

a.3. La fonction *f* est de la forme $\sqrt{u}$ avec $\begin{cases} u(x) = 2x^2 - x - 21 \\ u'(x) = 2\times 2x - 1 = 4x - 1 \end{cases}$

Il vient alors :

$$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x-21}}$$

Le facteur affine $4x-1$ s'annule lorsque $4x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{4}$

Par suite, le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et de variation de la fonction *f* est le suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{4}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$4x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2\sqrt{2x^2-x-21}$		$+$	0		*Non définie*		0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	||		*Non définie*		||	$+$	
Variation de *f*	$+\infty$	↘	0		*Non définie*		0	↗	$+\infty$

b.1. Calculons les deux images demandées :

$$g(0)=\arctan\left(3\times 0^2-2\times 0^3\right)=\arctan(0)=0$$

$$g(1)=\arctan\left(3\times 1^2-2\times 1^3\right)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$$

b.2. D'abord, aux infinis, le polynôme $u(x)=3x^2-2x^3$ se comporte comme son terme dominant $-2x^3$. Ainsi :

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3=-2\times(-\infty)=+\infty$

alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(u(x))=\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$

Et de l'autre côté :

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3=-2\times(+\infty)=-\infty$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(u(x))=\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$

b.3. La fonction g est une composée $v\circ u$ avec $\left|\begin{array}{l} u(x)=3x^2-2x^3 \\ u'(x)=6x-6x^2 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R}\end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l} v(t)=\arctan(t) \\ v'(t)=\dfrac{1}{t^2+1} \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R}\end{array}\right.$

Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$g'(x)=u'(x)\times v'(u(x))=\left(6x-6x^2\right)\times\frac{1}{\left[u(x)\right]^2+1}=\frac{6x-6x^2}{\left[3x^2-2x^3\right]^2+1}$$

b.4. C'est le signe de la dérivée $g'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction g.

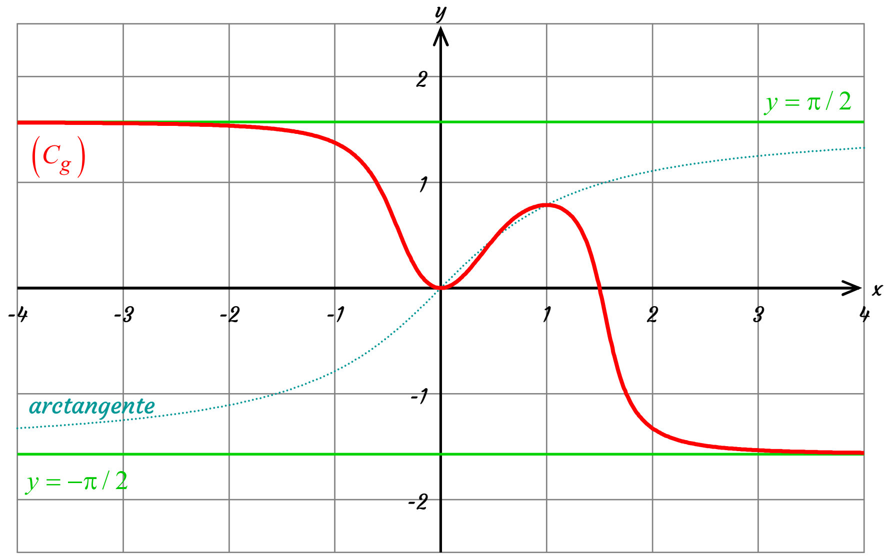
Examinons les signes des numérateur et dénominateur de $g'(x)$.

- Le numérateur $6x-6x^2=6x\times(1-x)$ s'annule en 0 et en 1. C'est aussi une forme du second degré dont le discriminant est égal à 36.
- Le dénominateur $\left[u(x)\right]^2+1$ est la somme d'un carré et de 1. Il est donc toujours supérieur ou égal à 1. D'où l'intérêt de ne pas le développer.

Nous en déduisons que le tableau de signe de $g'(x)$ et de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\left[u(x)\right]^2+1$		$+$	|	$+$	|	$+$	
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de g	$+\infty$	↘	0	↗	$\pi/4$	↘	$-\infty$

Graphiquement, la situation est la suivante :



Entrée des primitives

L'énoncé

a. Déterminer la primitive F définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = e^{2x} + \dfrac{12x}{3x^2+1}$ telle que $F(0) = 3$.

b. Calculer les intégrales suivantes. Dans chaque cas, on indiquera la primitive utilisée.

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx \qquad J = \int_0^2 \left(x - 2x^2 + 3e^x\right) dx \qquad K = \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Le corrigé

a. Examinons les deux termes constituant la fonction f.

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $e^{2x} = e^{ax}$ est $\dfrac{1}{a} \times e^{ax} = \dfrac{1}{2} \times e^{2x}$.
- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{12x}{3x^2+1} = \dfrac{2 \times 6x}{3x^2+1} = 2 \times \dfrac{u'}{u}$ avec $\left|\begin{array}{l} u(x) = 3x^2+1 \\ u'(x) = 3 \times 2x + 0 \\ \text{Positive sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$

  est la fonction $2 \times \ln(u) = 2 \times \ln\left(3x^2+1\right)$.

Donc la primitive F est de la forme $F(x) = \dfrac{1}{2} e^{2x} + 2 \times \ln\left(3x^2+1\right) + Cste$

On détermine la constante en sachant que :

$$\begin{aligned} F(0) = 3 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} e^{2\times 0} + 2 \times \ln\left(3 \times 0^2 + 1\right) + Cste = 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times e^0 + 2 \times \ln(1) + Cste = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 1 + 2 \times 0 + Cste = 3 \\ &\Leftrightarrow Cste = 3 - \frac{1}{2} = 2{,}5 \end{aligned}$$

Conclusion : la primitive F a pour expression $F(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} + 2 \times \ln\left(3x^2+1\right) + \dfrac{5}{2}$

b.1. Une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ est $F(x) = x - \ln(x) - \dfrac{1}{x}$

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[x - \ln(x) - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(2 - \ln(2) - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \ln(1) - \frac{1}{1}\right) = \frac{3}{2} - \ln(2)$$

b.2. Une primitive sur ℝ de $f(x)=x-2x^2+3e^x$ est $F(x)=\frac{1}{2}x^2-2\times\frac{1}{3}x^3+3e^x$.

$$J=\int_0^2\left(x-2x^2+3e^x\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+3e^x\right]_0^2=\left(\frac{2^2}{2}-\frac{2\times2^3}{3}+3\times e^2\right)-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{2\times0^3}{3}+3\times e^0\right)$$
$$=\left(2-\frac{16}{3}+3e^2\right)-\left(0-0+3\times1\right)=3e^2-\frac{19}{3}$$

b.3. Une primitive de la fonction $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est $F(x)=2\sqrt{x}$.

$$K=\int_1^{16}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_1^{16}=2\times\sqrt{16}-2\times\sqrt{1}=2\times4-2\times1=6$$

Intermède intégral

L'énoncé

Calculer les valeurs exactes des deux intégrales suivantes :

$$I=\int_0^2\left(e^{0,5x}-6x^2+1\right)dx \qquad J=\int_0^3\frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}dx$$

Pour le calcul de chacune de ces intégrales, on indiquera la primitive utilisée.

Le corrigé

➲ Calculons l'intégrale I.

Une primitive de la fonction $f(x)=e^{0,5x}-6x^2+x$ sur ℝ est $F(x)=\frac{1}{a}e^{ax}-6\times\frac{x^3}{3}+x$.

$$=e^{ax}-6\times x^2+1 \qquad =\frac{1}{0,5}e^{0,5x}-2x^3+x$$

Par suite : $I=\int_0^2\left(e^{0,5x}-6x^2+1\right)dx$

$$=\left[2e^{0,5x}-2x^3+x\right]_0^2$$
$$=\left(2\times e^{0,5\times2}-2\times2^3+2\right)-\left(2\times e^{0,5\times0}-2\times0^3+0\right)$$
$$=\left(2\times e^1-16+2\right)-\left(2\times e^0-0+0\right)=2e-14-2=2e-16$$

➲ La fonction $f(x)=\frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}$ est presque de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x)=7x^2+1$, $u'(x)=14x$, Dérivable et positive sur ℝ

En effet : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}=\frac{1}{14}\times\frac{14x}{\sqrt{7x^2+1}}=\frac{1}{14}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$

Donc une primitive de f sur ℝ est $F(x)=\frac{1}{14}\times2\sqrt{u}=\frac{1}{7}\times\sqrt{7x^2+1}$

Il vient alors : $J=\int_0^3\frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}dx=\left[\frac{1}{7}\times\sqrt{7x^2+1}\right]_0^3$

$$=\left(\frac{1}{7}\times\sqrt{7\times3^2+1}\right)-\left(\frac{1}{7}\times\sqrt{7\times0^2+1}\right)=\frac{1}{7}\times\sqrt{64}-\frac{1}{7}\times\sqrt{1}=\frac{8}{7}-\frac{1}{7}=1$$

Complexes

Complexes numériques

L'énoncé

a. Sans utiliser la calculatrice, écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$a=\frac{5i-3}{2i} \qquad b=\frac{3i-5}{7-2i}$$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes :

1. $2z^2-6z+13=0$ **2.** $7z-iz+8=3i+i(z-3i)$

Le corrigé

a. Dans cette question, il s'agit de simplifier les quotients proposés :

$$a=\frac{5i-3}{2i}=\frac{5i-3}{2}\times\frac{1}{i}=\left(\frac{5}{2}i-\frac{3}{2}\right)\times(-i)=-\frac{5}{2}i^2+\frac{3}{2}i=-\frac{5}{2}\times(-1)+\frac{3}{2}i=\frac{5+3i}{2}$$

$$b=\frac{3i-5}{7-2i}=\frac{(3i-5)\times(7+2i)}{(7-2i)\times(7+2i)}=\frac{21i+6i^2-35-10i}{7^2-(2i)^2}=\frac{11i-6-35}{49-4\times(-1)}=\frac{11i-41}{53}$$

b.1. Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2-6z+13=0$ qui est du second degré, nous calculons son discriminant.

$$\Delta=(-6)^2-4\times2\times13=36-104=-68=\left(i\sqrt{68}\right)^2=\left(i\sqrt{4}\times\sqrt{17}\right)^2=\left(2i\sqrt{17}\right)^2$$

Donc l'équation a deux solutions complexes et conjuguées :

$$z_1=\frac{-(-6)-2i\sqrt{17}}{2\times2}=\frac{6}{4}-\frac{2}{4}i\sqrt{17}=\frac{3-i\sqrt{17}}{2} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-(-6)+2i\sqrt{17}}{2\times2}=\frac{3-i\sqrt{17}}{2}$$

b.2. Pour résoudre cette seconde équation, nous allons procéder comme dans $\mathbb{R}$: mettre les z à gauche, le reste à droite; Et alors, nous aviserons.

$$\begin{aligned}7z-iz+8=3i+i(z-3i) &\Leftrightarrow 7z-iz=3i+iz-3i^2-8\\ &\Leftrightarrow 7z-iz-iz=3i-3\times(-1)-8\\ &\Leftrightarrow (7-2i)\times z=3i+3-8\\ &\Leftrightarrow (7-2i)\times z=3i-5 \Leftrightarrow z=\frac{3i-5}{7-2i}=\frac{11i-41}{53}\end{aligned}$$

Le complexe du parallélogramme

L'énoncé

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$. Dans ce dernier, on considère les points A, D et L d'affixes respectives :

$$z_A=-i \qquad z_D=5-2i \qquad z_L=-4+4i$$

a. Déterminer par le calcul l'affixe z_E du point E qui est le troisième sommet du parallélogramme ADEL.

b. Calculer l'affixe z_J du milieu J du segment [AD].

c. Déterminer par le calcul l'affixe z_K du point K qui est défini par la relation vectorielle $2\times\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{LK}=\vec{0}$

d. Les points E, J et K sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a. Comme ADEL est un parallélogramme, alors nous avons la relation vectorielle :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LE}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{LE}}=z_{\overrightarrow{AD}} &\Leftrightarrow z_E-z_L=z_D-z_A\\ &\Leftrightarrow z_E=z_D+z_L-z_A\\ &=(5-2i)+(-4+4i)-(-i)=1+3i\end{aligned}$$

b. J étant le milieu du segment [AD], les affixes de ces points vérifient l'égalité :

$$z_J=\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{(-i)+(5-2i)}{2}=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$$

c. Traduisons sous forme complexe l'égalité vectorielle définissant le point K.

$$\begin{aligned}2\times\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{LK}=\vec{0} &\Leftrightarrow 2\times(z_K-z_D)+(z_K-z_L)=0\\ &\Leftrightarrow 2\times z_K-2\times z_D+z_K-z_L=0\\ &\Leftrightarrow 3\times z_K=2\times z_D+z_L\\ &\Leftrightarrow z_K=\frac{2\times z_D+z_L}{3}=\frac{2\times(5-2i)+(-4+4i)}{3}=\frac{6}{3}=2\end{aligned}$$

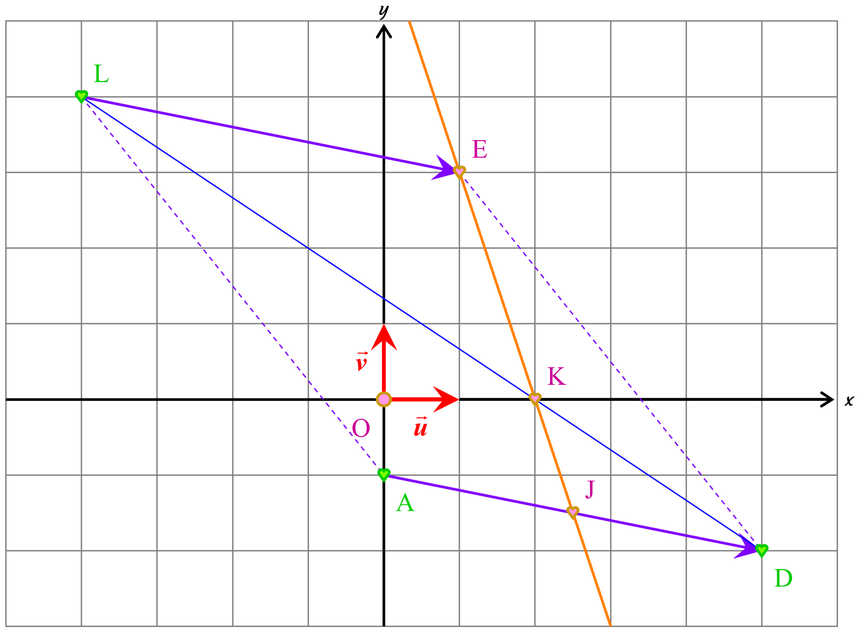
d. Calculons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EK}$.

$$z_{\overrightarrow{EJ}}=z_J-z_E=\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i\right)-(1+3i)=\frac{3}{2}-\frac{9}{2}i \qquad z_{\overrightarrow{EK}}=z_K-z_E=2-(1+3i)=1-3i$$

Comme $\frac{3}{2}\times z_{\overrightarrow{EK}}=z_{\overrightarrow{EJ}}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires.

Conclusion : les points E, J et K sont alignés.

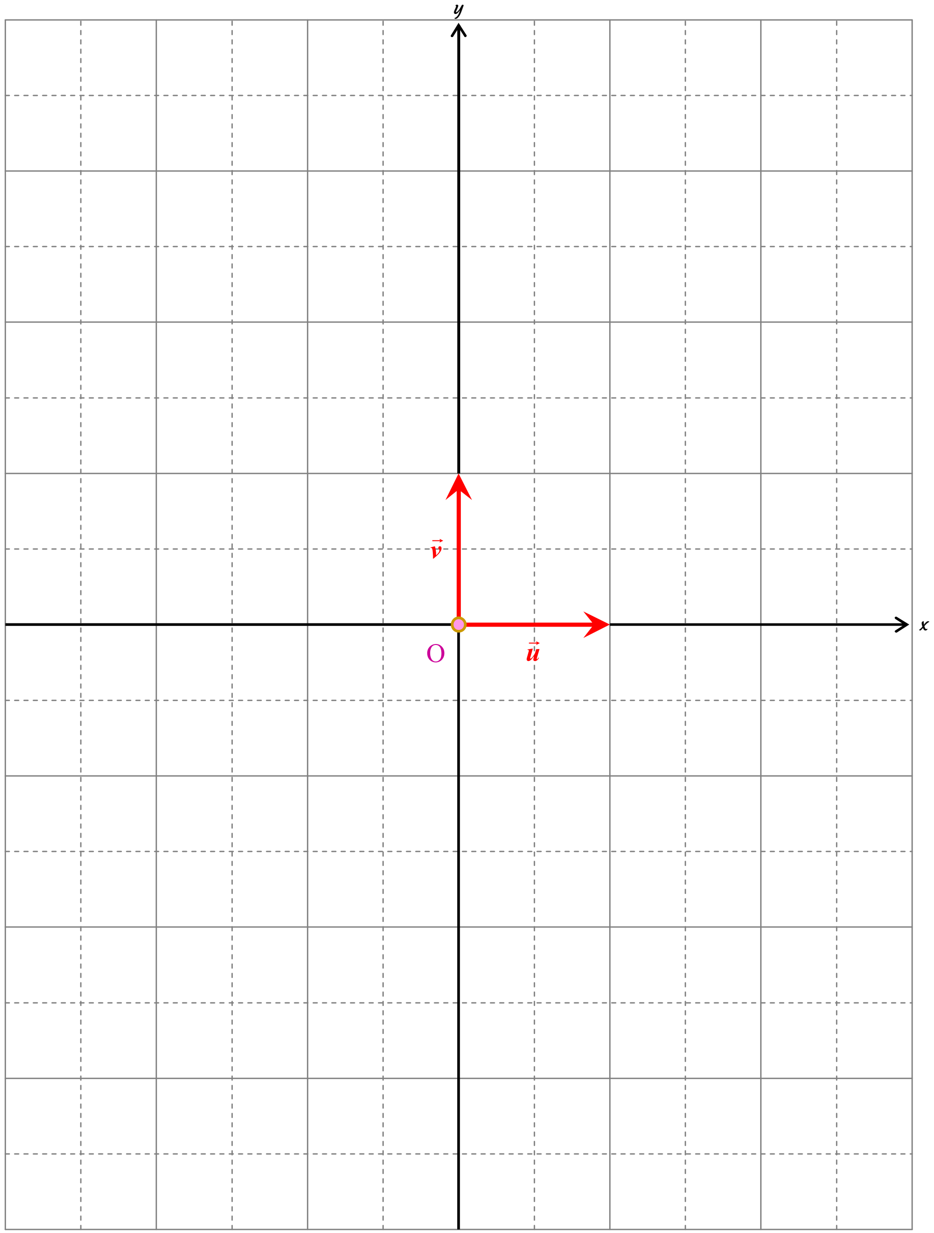
A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Complexes (inspired by the bac)

L'énoncé

Sur la figure ci-après, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ où une unité graphique vaut deux centimètres.



a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2+2z+4\right)\times\left(z^2+4\right)=0$.

b. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=-1+i\sqrt{3}$ et $z_B=2i$.

1. Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle. Justifier que les points A et B sont sur le même cercle de centre O.
2. Placer les points A et B sur la figure fournie en annexe. On expliquera brièvement la manière dont est faite le placement du point A.
3. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

c. On appelle F le point qui est le quatrième sommet du parallélogramme BOAF.

1. Placer le point F sur la figure fournie en annexe, puis calculer son affixe z_F. Calculer le module de z_F.
2. Justifier que BOAF est un losange. En déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}\right)$, puis une autre de $\left(\vec{u},\overrightarrow{OF}\right)$.
3. En déduire une valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

d. Deux modèles de calculatrices de marques différentes donnent les valeurs suivantes :

$$\overbrace{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}^{\text{Première calculatrice}} \qquad \overbrace{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}^{\text{Seconde calculatrice}}$$

Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse sans utiliser la calculatrice.

Le corrigé

a. Résolvons dans $\mathbb{C}$ cette équation du quatrième degré qui est en fait une double équation du second degré.

$$\overbrace{\left(z^2+2z+4\right)\times\left(z^2+4\right)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \iff \overbrace{z^2+2z+4=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad z^2+4=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

- Pour résoudre cette première sous-équation, calculons son discriminant :

$$\Delta=2^2-4\times1\times4=4-16=-12=\left(i\sqrt{12}\right)^2=\left(i\sqrt{4}\times\sqrt{3}\right)^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes et conjuguées :

$$z=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{2\times1}=\frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=\boxed{-1-i\sqrt{3}} \quad \underline{\text{ou}} \quad z=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{2\times1}=\boxed{-1+i\sqrt{3}}$$

- La seconde sous-équation sera résolue de manière plus...naturelle !

$$z^2-(-4)=0 \iff z^2-(2i)^2=0 \iff (z+2i)\times(z-2i)=0$$
$$\iff z+2i=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad z-2i=0$$
$$z=\boxed{-2i} \qquad z=\boxed{2i}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation proposée admet dans $\mathbb{C}$ quatre solutions :

$$\boxed{S=\left\{-2i\ ;\ 2i\ ;\ -1-i\sqrt{3}\ ;\ -1+i\sqrt{3}\right\}}$$

b.1. La première chose à faire est de calculer les modules de z_A et z_B.

$$|z_A|=\left|-1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=\boxed{2} \qquad |z_B|=|2i|=|2|\times|i|=2\times1=\boxed{2}$$

Comme $\begin{cases} OA=|z_A-z_O|=|z_A-0|=|z_A|=2 \\ OB=|z_B-z_O|=|z_B-0|=|z_B|=2 \end{cases}$, alors les points A et B appartiennent tous les deux au cercle de centre O et de rayon 2.

Ensuite, un argument de $z_B=2i$ est bien évidemment $\frac{\pi}{2}$.

Enfin, un argument θ_A de z_A vérifie :

$$\cos(\theta_A)=\frac{x_A}{|z_A|}=\boxed{-\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta_A)=\frac{y_A}{|z_A|}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

La valeur $\theta_A=\frac{2\pi}{3}$ convient.

Nous en concluons donc :

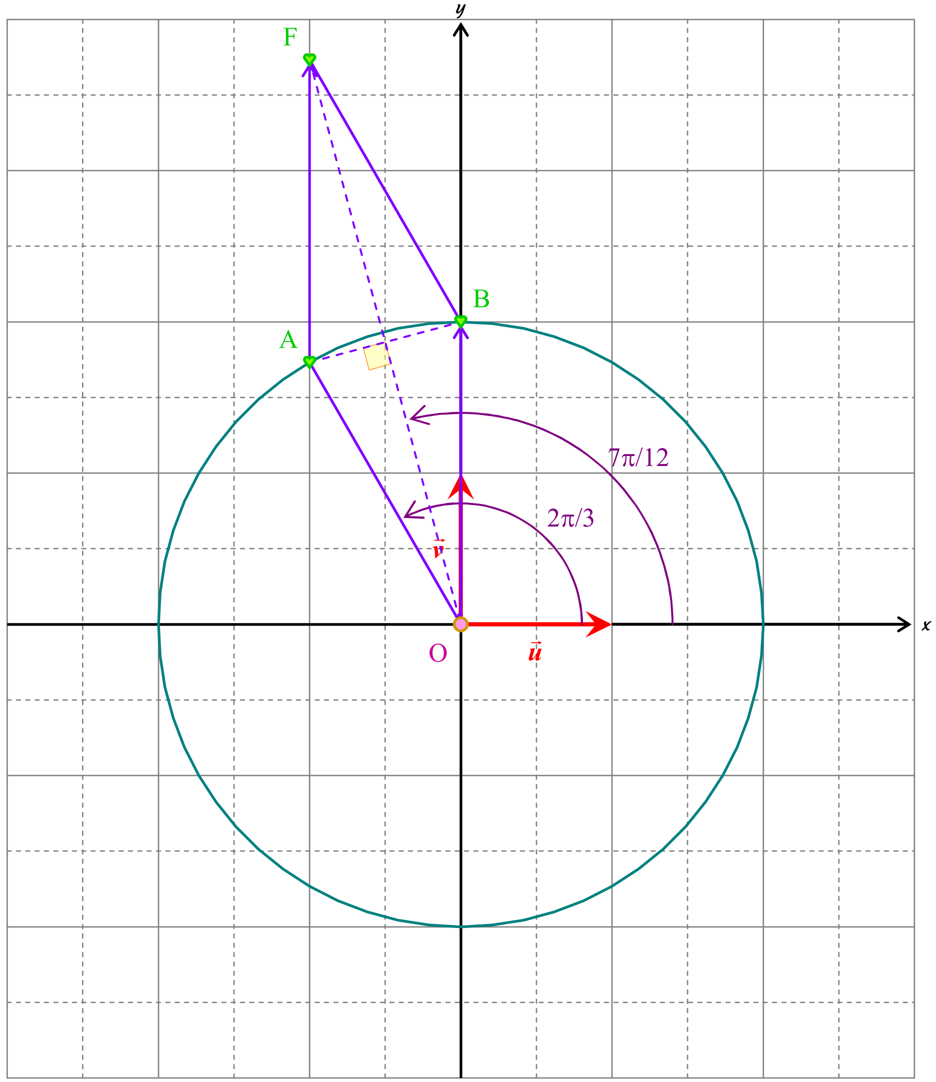
$$z_A=\overbrace{-1+i\sqrt{3}}^{\text{Ecriture algébrique}}=\overbrace{\boxed{2\times e^{i\frac{2\pi}{3}}}}^{\text{Ecriture exponentielle}} \qquad \underline{\text{et}} \qquad z_B=\overbrace{2i}^{\text{Ecriture algébrique}}=\overbrace{\boxed{2\times e^{i\frac{\pi}{2}}}}^{\text{Ecriture exponentielle}}$$

b.2. Le point B se place tout seul sur l'axe des ordonnées $(O;\vec{v})$.

Du fait de son affixe, le point A est l'un des deux points d'intersection de la droite verticale d'équation $x=-1$ et du cercle de centre O et de rayon 2.

b.3. Utilisant la relation de Chasles pour les angles, nous pouvons écrire :

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\overbrace{\left(\overrightarrow{OA},\vec{u}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)}^{\text{Merci Chasles !}}$$
$$=\left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)=\arg(z_B)-\arg(z_A)=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi-4\pi}{6}=\boxed{-\frac{\pi}{6}}$$



c.1. Comme BOAF est un parallélogramme, alors nous avons l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow z_F - z_A = z_B - z_O \Leftrightarrow z_F = z_A + z_B - z_O$$
$$= -1 + \boldsymbol{i}\sqrt{3} + 2\boldsymbol{i} - 0 = \boxed{-1 + \boldsymbol{i}\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

➲ Calculons le module de z_F.

$$|z_F| = \left|-1+\boldsymbol{i}\left(2+\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1+4+4\sqrt{3}+3} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{4\times\left(2+\sqrt{3}\right)} = \sqrt{4}\times\sqrt{2+\sqrt{3}} = \boxed{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

c.2. Comme le parallélogramme BOAF a ses deux côtés consécutifs [OA] et [OB] égaux, alors c'est un losange.
La diagonale [OF] du losange BOAF étant perpendiculaire à l'autre diagonale [AB], elle est aussi la hauteur/médiane/médiatrice/bissectrice issue de O dans le triangle isocèle OAB. Par suite :

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{12}}$$

Finalement, nous en concluons :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OF}\right) = \overbrace{\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right)}^{\text{Merci Chasles !}} = \frac{2\pi}{3} + \frac{-\pi}{12} = \frac{8\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{7\pi}{12}}$$

c.3. Comme un argument de z_F est $\frac{7\pi}{12}$, alors :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{re(z_F)}{|z_F|} = \frac{-1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{-1\times\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\times\left(2-\sqrt{3}\right)}}$$
$$= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\times\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\times\sqrt{4-3}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\times 1} = \boxed{-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

d. Elevons les deux valeurs retournées au carré :

$$\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2}{4^2} = \frac{2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}+6}{16} = \frac{8-2\sqrt{12}}{16}$$
$$= \frac{4\times 2-2\times\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{16} = \frac{4\times 2-2\times 2\times\sqrt{3}}{16} = \frac{4\times\left(2-\sqrt{3}\right)}{16} = \boxed{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = (-1)^2\times\frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}{2^2} = 1\times\frac{2-\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

<u>Conclusion :</u> leurs carrés tant égaux, les deux quantités négatives retournées par les calculatrices sont égales. Il n'y a donc pas de contradiction.

Mauvais plan complexe

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ dans lequel on considère les points E, A et U d'affixes respectives :

$$z_E = 3-2\boldsymbol{i} \qquad z_A = 2+6\boldsymbol{i} \qquad z_U = 8{,}6-7{,}8\boldsymbol{i}$$

a. On appelle R le point d'affixe $z_R = 2\boldsymbol{i}-4$.

1. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{ER}$, puis la distance ER.
2. Prouver que le point E est le centre du cercle circonscrit au triangle ARU.

b. On appelle B le quatrième sommet du parallélogramme AEUB.

1. Construire au compas le point B sur la figure ci-contre.
2. Déterminer par le calcul l'affixe z_B du point B.
3. Déterminer l'affixe z_I du milieu I du segment [AU].

c. On appelle q le nombre complexe défini par $q = \dfrac{z_A - z_I}{z_E - z_I}$.

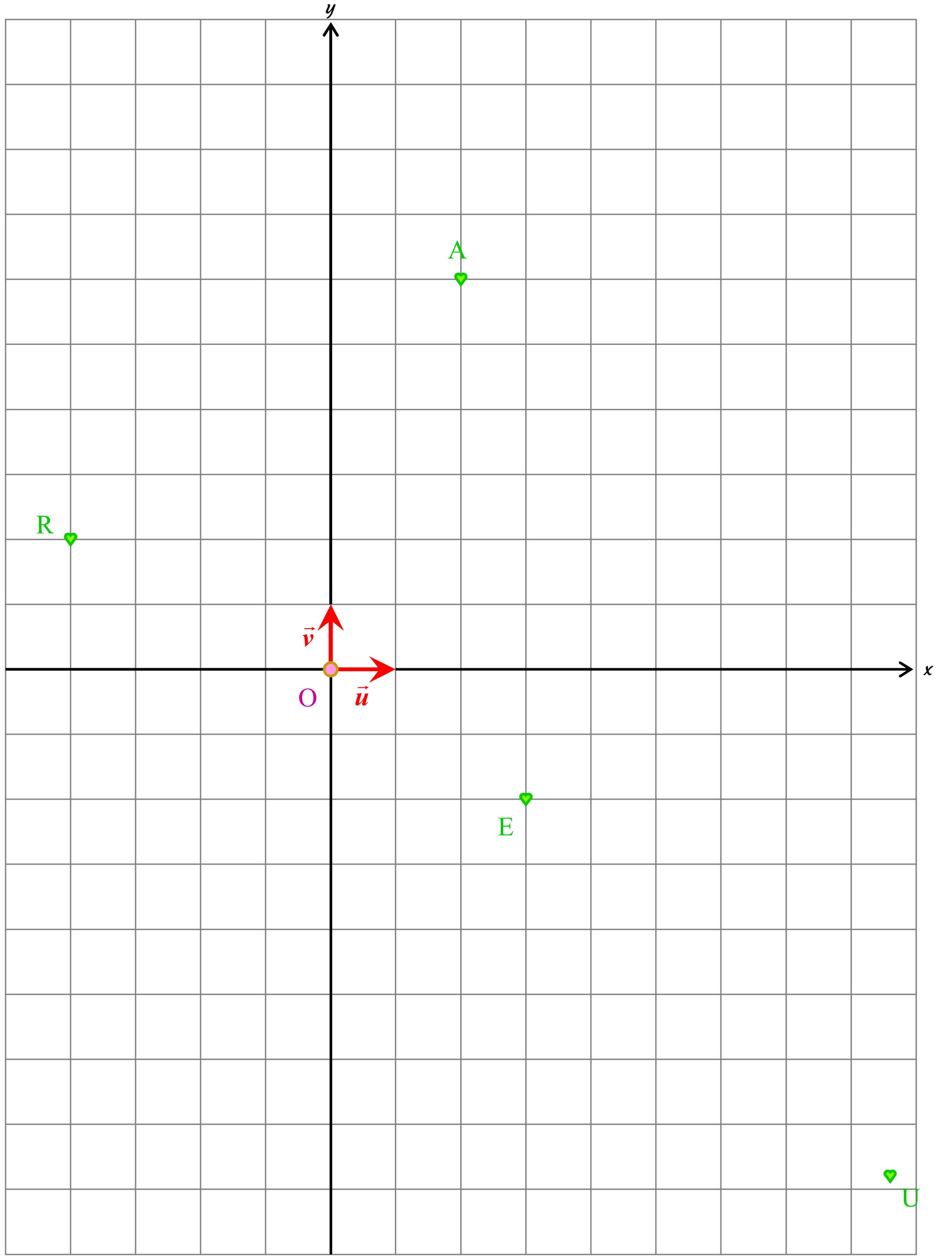
1. Prouver par le calcul que $q = -3\boldsymbol{i}$, puis écrire le nombre complexe q sous forme exponentielle.
2. Interpréter géométriquement les module et arguments du nombre complexe q.
   Que peut-on en déduire quant au quadrilatère AEUB ? Ce résultat était-il prévisible?

d. Sur la figure ci-contre, tracer les ensembles suivants.

1. L'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z vérifiant l'égalité $\left|z+4-2\boldsymbol{i}\right| = \left|z\right|$.
2. L'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z vérifiant $\arg\left(z-2-6\boldsymbol{i}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$ modulo 2π.
3. L'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixe z vérifiant l'égalité $\left|z+5\boldsymbol{i}\right| = 3$.

e. On appelle F le point du plan tel que $\dfrac{EF}{EO} = \sqrt{8}$ et $\left(\overrightarrow{EO},\overrightarrow{EF}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$ modulo 2π.

1. Ecrire sous forme algébrique le quotient complexe $\dfrac{z_F - z_E}{z_O - z_E}$.
2. En déduire l'affixe du point F.



Le corrigé

a.1. Calculons la distance ER.

$$\mathrm{ER} = |z_R - z_E| = |(2\boldsymbol{i}-4)-(3-2\boldsymbol{i})| = |4\boldsymbol{i}-7| = \sqrt{(-7)^2+4^2} = \sqrt{49+16} = \boxed{\sqrt{65}}$$

a.2. De plus :

$$\mathrm{EA} = |z_A - z_E| = |(2+6\boldsymbol{i})-(3-2\boldsymbol{i})| = |8\boldsymbol{i}-1| = \sqrt{(-1)^2+8^2} = \sqrt{1+64} = \boxed{\sqrt{65}}$$

$$\mathrm{EU} = |z_U - z_E| = |(8,6-7,8\boldsymbol{i})-(3-2\boldsymbol{i})| = |5,6-5,8\boldsymbol{i}| = \sqrt{5,6^2+(-5,8)^2} = \sqrt{31,36+33,65} = \boxed{\sqrt{65}}$$

Comme le point E est équidistant des points R, A et U, alors ce premier appartient aux trois médiatrices du triangle défini par les trois autres points. Donc E est le centre du cercle circonscrit au triangle ARU.

b.1. Comme AEUB est un parallélogramme, alors nous avons l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{\mathrm{UB}} = \overrightarrow{\mathrm{EA}} \Leftrightarrow z_B - z_U = z_A - z_E \Leftrightarrow z_B = z_A + z_U - z_E = (2+6\boldsymbol{i})+(8,6-7,8\boldsymbol{i})-(3-2\boldsymbol{i}) = \boxed{7,6+0,2\boldsymbol{i}}$$

b.2. L'affixe du milieu I du segment [AU] est donnée par la formule :

$$z_I = \frac{z_A+z_U}{2} = \frac{(2+6\boldsymbol{i})+(8,6-7,8\boldsymbol{i})}{2} = \frac{10,6-1,8\boldsymbol{i}}{2} = \boxed{5,3-0,9\boldsymbol{i}}$$

c.1. Ecrivons sous forme algébrique, puis exponentielle le quotient proposé.

$$q = \frac{z_A-z_I}{z_E-z_I} = \frac{(2+6\boldsymbol{i})-(5,3-0,9\boldsymbol{i})}{(3-2\boldsymbol{i})-(5,3-0,9\boldsymbol{i})} = \frac{-3,3+6,9\boldsymbol{i}}{-2,3-1,1\boldsymbol{i}}$$

$$= \frac{(-3,3+6,9\boldsymbol{i})\times(-2,3+1,1\boldsymbol{i})}{(-2,3-1,1\boldsymbol{i})\times(-2,3+1,1\boldsymbol{i})} = \frac{7,59-15,87\boldsymbol{i}-3,63\boldsymbol{i}+7,59\boldsymbol{i}^2}{(-2,3)^2-(-1,1\boldsymbol{i})^2}$$

$$= \frac{\cancel{7,59}-19,5\boldsymbol{i}-\cancel{7,59}}{5,29-(-1,21)} = -\frac{19,5\boldsymbol{i}}{6,5} = \boxed{-3\boldsymbol{i}}$$

$$= 3\times(-\boldsymbol{i}) = \overbrace{\boxed{3\times e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}}}^{\text{Ecriture exponentielle}}$$

c.2. Interprétons le quotient q :

- Son module égal à 3.

$$|q| = \left|\frac{z_A-z_I}{z_E-z_I}\right| \Leftrightarrow 3 = \frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IE}} \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{\mathrm{IA} = 3\times\mathrm{IE}}}^{\text{Ca renseigne assez peu !}}$$

- Ses arguments égaux à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

$$\arg(q) = \arg\left(\frac{z_A-z_I}{z_E-z_I}\right) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} = \left(\overrightarrow{\mathrm{IE}},\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right) \Rightarrow \boxed{\text{IEA est rectangle en I.}}$$

♥ Les segments [AI] et [EI] étant deux demi-diagonales du parallélogramme AEUB, nous en déduisons que :

⇒ Les longueurs des diagonales [AU] et [EB] ne sont pas égales. Donc AEUB n'est pas un rectangle.

⇒ Les diagonales [AU] et [EB] sont perpendiculaires. Par conséquent, AEUB est un losange. Ce que l'égalité des deux côtés [EA] et [EU] connue depuis la question **a.2** prouvait déjà.

d.1. Modifions l'écriture de l'égalité définissant l'ensemble $\mathcal{E}$.

$$\mathrm{M}(z)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow |z+4-2\boldsymbol{i}| = |z| \Leftrightarrow |z-(-4+2\boldsymbol{i})| = |z-0|$$

$$\Leftrightarrow |z-z_R| = |z-z_O| \Leftrightarrow \mathrm{RM} = \mathrm{OM}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{M}\in \text{médiatrice du segment [RO]}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment [OR].

d.2. Tripatouillons la relation définissant l'ensemble $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{M}(z)\in\mathcal{F} \Leftrightarrow \overbrace{\arg(z-2-6\boldsymbol{i}) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \arg(z-(2+6\boldsymbol{i})) = \frac{3\pi}{4}}^{\text{Modulo } 2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg(z-z_A) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) = \frac{3\pi}{4}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{F}$ est la demi-droite d'extrémité A qui fait un angle de $\frac{3\pi}{4}$ radians avec le premier vecteur de base $\vec{u}$.

d.3. Modifions l'écriture de la relation définissant l'ensemble $\mathcal{G}$.

$$\mathrm{M}(z)\in\mathcal{G} \Leftrightarrow \overbrace{|z+5\boldsymbol{i}| = 3 \Leftrightarrow |z-(-5\boldsymbol{i})| = 3 \Leftrightarrow |z-z_K| = 3 \Leftrightarrow \mathrm{KM}=3}^{\text{On appelle K le point d'affixe } z_K=-5\boldsymbol{i}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{M}\in \text{cercle de centre K d'affixe } z_K = -5\boldsymbol{i} \text{ et de rayon } 3}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{G}$ est le cercle de centre $\mathrm{K}(-5\boldsymbol{i})$ et de rayon 3.

e.1. Nous connaissons les module et arguments du quotient complexe évoqué. En effet :

$$\left|\frac{z_F-z_E}{z_O-z_E}\right| = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EO}} = \sqrt{8} \quad \underline{\text{et}} \quad \arg\left(\frac{z_F-z_E}{z_O-z_E}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{EO}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Par conséquent :

$$\frac{z_F - z_A}{z_O - z_A} = \sqrt{8} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{8} \times \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{8} \times \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{\sqrt{16} - \boldsymbol{i}\sqrt{16}}{2} = \frac{4 - 4\boldsymbol{i}}{2} = \underline{2 - 2\boldsymbol{i}}$$

e.2. Partant de là, nous pouvons écrire :

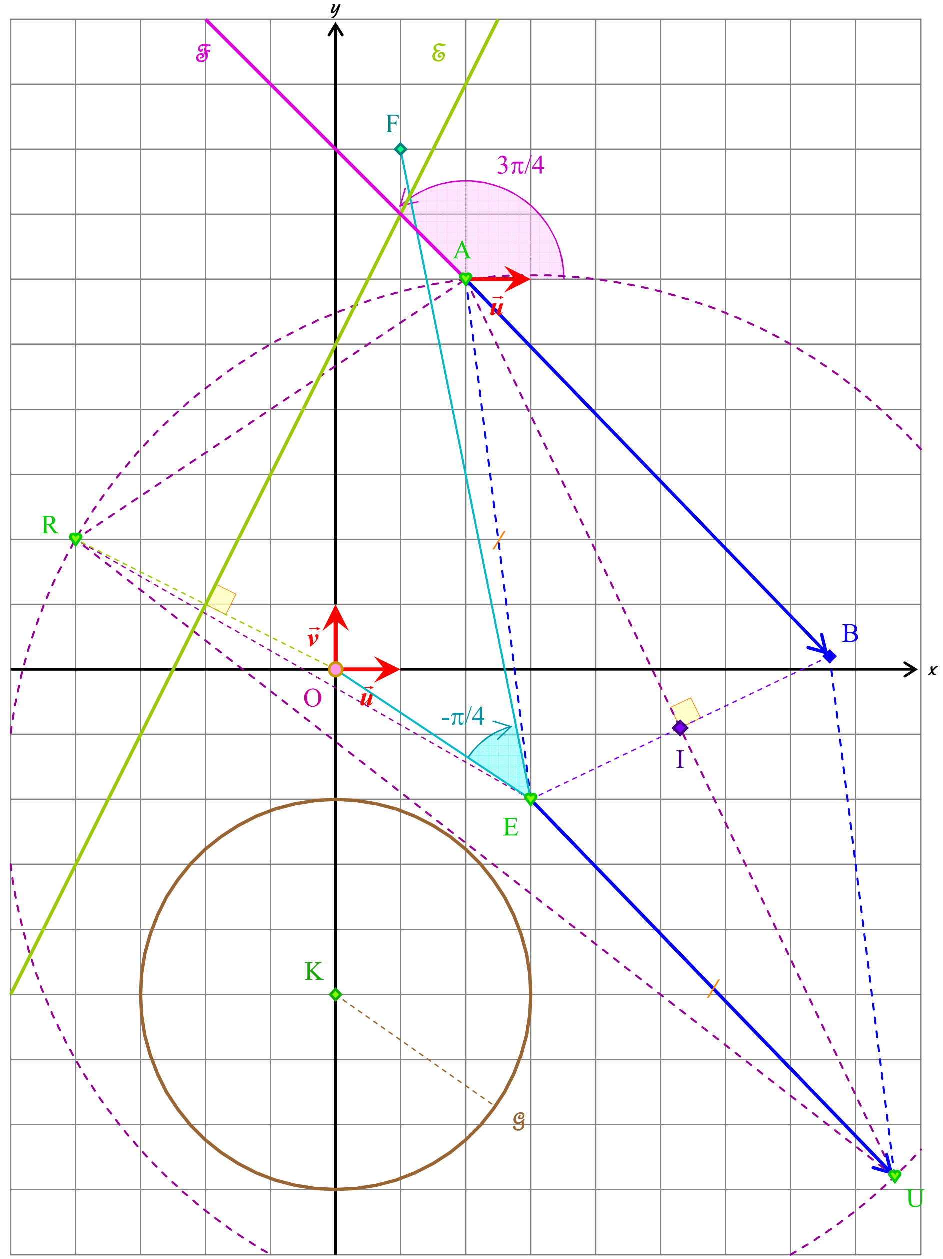
$$\frac{z_F - z_E}{z_O - z_E} = 2 - 2\boldsymbol{i} \quad \Leftrightarrow \quad z_F - z_E = (2 - 2\boldsymbol{i}) \times (0 - z_E)$$

$$\Leftrightarrow \quad z_F = z_E - z_E \times (2 - 2\boldsymbol{i})$$

$$= (3 - 2\boldsymbol{i}) - (3 - 2\boldsymbol{i}) \times (2 - 2\boldsymbol{i})$$

$$= 3 - 2\boldsymbol{i} - \left[6 - 6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{i}^2\right] = 3 - 2\boldsymbol{i} - 2 + 10\boldsymbol{i} = \underline{1 + 8\boldsymbol{i}}$$

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre ➔



Exponentielle

Cours toujours !

L'énoncé

a. On appelle h une fonction définie et dérivable sur ℝ remplissant simultanément les deux conditions suivantes :
(1) h est sa propre dérivée sur ℝ
(2) $h(0)=-7$

On appelle f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x)=h(x)\times e^{-x}$$

1. Calculer l'image $f(0)$.
2. Calculer la dérivée de f.
   Que peut-on en déduire quant à la fonction f ?
3. Conclure en donnant l'expression de $h(x)$ en fonction de x.

b. On appelle g la fonction définie sur ℝ par :

$$g(x)=(1-x)\times\frac{\sqrt{e^{16x+12}}}{\left(e^{2x+1}\right)^5\times e^{1-3x}}$$

1. Simplifier l'expression de $g(x)$.
2. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$, puis en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur ℝ.

Le corrigé

a.1. Calculons l'image de 0 par la fonction f :

$$f(0)=h(0)\times e^{-0}=-7\times e^0=-7\times 1=\underline{-7}$$

a.2. La fonction f est un produit $u\times v$ avec
$u(x)=h(x)$, $u'(x)=h(x)$, Dérivable sur ℝ
et
$v(x)=e^{-x}=e^{ax}$, $v'(x)=a\times e^{ax}=-e^{-x}$, Dérivable sur ℝ

Donc la fonction f est dérivable sur ℝ et, pour tout réel x, on a :

$$f'(x)=u'\times v+v'\times u=h(x)\times e^{-x}-e^{-x}\times h(x)=\underline{0}$$

Comme sa dérivée $f'(x)$ est nulle sur ℝ, alors la fonction f est constante sur $]-\infty;+\infty[$.
Et cette constante est égale à $f(0)=-7$.

a.3. Pour tout réel x, on a : $f(x)=h(x)\times e^{-x}=-7 \Leftrightarrow h(x)=\dfrac{-7}{e^{-x}}=-7\times e^{-(-x)}=\underline{-7e^x}$

b.1. Utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle, nous pouvons écrire :

$$g(x)=(1-x)\times\frac{\boxed{\sqrt{e^{16x+12}}}}{\boxed{\left(e^{2x+1}\right)^5}\times e^{1-3x}}=(1-x)\times\frac{e^{\frac{1}{2}\times(16x+12)}}{e^{5\times(2x+1)}\times e^{1-3x}}$$

$$=(1-x)\times\frac{e^{8x+6}}{\boxed{e^{10x+5}\times e^{1-3x}}}=(1-x)\times\frac{e^{8x+6}}{e^{(10x+5)+(1-3x)}}$$

$$=(1-x)\times\boxed{\frac{e^{8x+6}}{e^{7x+6}}}=(1-x)\times e^{(8x+6)-(7x+6)}=\underline{(1-x)\times e^x}$$

b.2. Déterminer les limites aux infinis de la fonction g :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x-xe^x=0^+-0^-=\underline{0^+}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-x)\times e^x=(-\infty)\times(+\infty)=\underline{-\infty}$$

b.3. Calculons la dérivée de la fonction $g=u\times v$ où
$u(x)=1-x$, $u'(x)=-1$, Dérivable sur ℝ
$v(x)=e^x$, $v'(x)=e^x$, Dérivable sur ℝ

Donc g est dérivable sur ℝ et, pour tout réel x, nous avons :

$$g'(x)=u'\times v+v'\times u=(-1)\times\boxed{e^x}+\boxed{e^x}\times(1-x)=\boxed{e^x}\times\left[-1+(1-x)\right]=\underline{-x\times e^x}$$

Le signe de la dérivée $g'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	−	
e^x		+	|	+	
Signe de $g'(x)$		+	0	−	
Variation de g	0^+	↗	1	↘	$-\infty$

Méga baston chez les fonctions

L'énoncé

a. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=2e^{2x}-1$

1. Donner les limites de la fonction h en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au centième près.
4. En déduire le tableau de signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{2x}-x$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant la calculatrice, donner une valeur approchée au dixième près de l'image $g(\alpha)$.

   En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x)=\dfrac{2x^2-e^{2x}}{2x-1}$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$ d'abord par la gauche, puis par la droite.
2. Prouver que, pour tout réel x distinct de 0 et $\frac{1}{2}$, on a : $f(x)=x\times\dfrac{2-\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2}{2-\dfrac{1}{x}}$

   En déduire les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel $x\neq\frac{1}{2}$, on a : $f'(x)=\dfrac{(4-4x)\times g(x)}{(2x-1)^2}$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
5. Donner l'équation réduite de la tangente T_0 à la courbe (C_f) en son point A d'abscisse 0.

   Déterminer les coordonnées du point H qui est l'intersection de la droite T_0 et de l'axe des abscisses (Ox).

Le corrigé

a.1. Déterminons les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=2\times 0^+-1=0^+-1=\underline{-1}\qquad \lim_{x\to+\infty} h(x)=2\times(+\infty)-1=+\infty-1=\underline{+\infty}$$

a.2. La fonction h est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$h'(x)=2\times\left(e^{ax}\right)'-0=2\times a\times e^{ax}-0=2\times 2\times e^{2x}=\underline{4e^{2x}}$$

a.3. L'exponentielle e^{2x} étant toujours strictement positive, la dérivée $h'(x)$ l'est aussi et la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En résumé :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$	
Variation de h	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a.4. Comme sur $\mathbb{R}$:

- la fonction h est continue car dérivable
- la fonction h est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$
- 0 appartient à l'intervalle image $h(]-\infty;+\infty[)=]-1,+\infty[$

alors, d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. A l'aide de la calculatrice, on détermine qu'une valeur approchée de α au centième près est $-0{,}35$.

Vu que la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ et que $h(\alpha)=0$, son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	

b.1. Calculons la dérivée de la fonction g qui est la différence de deux fonctions dérivables sur ℝ :

$$g'(x) = \left(e^{ax}\right)' - 1 = a \times e^{ax} - 1 = 2 \times e^{2x} - 1 = h(x)$$

Nous en déduisons que le tableau de variation de la fonction g sur ℝ est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g'(x) = h(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de g		↘	$g(\alpha) \approx 0,847$	↗	

b.2. Son minimum $g(\alpha)$ étant strictement supérieur à 0, la fonction $g(x) = e^{2x} - x$ est toujours strictement positive sur ℝ.

c.1. Lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$, le numérateur $2x^2 - e^{2x}$ tend vers $2 \times \frac{1}{4} - e^{2 \times \frac{1}{2}} = \underbrace{\frac{1}{2} - e}_{\approx -2,22}$.

Le dénominateur $2x-1$ tend lui vers 0. Deux cas sont donc à envisager :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

Limite de f à gauche de 0,5

$$\lim_{x \to 0,5^-} f(x) = \frac{\boxed{0,5 - e}^{\ominus}}{0^-} = +\infty$$

Limite de f à droite de 0,5

$$\lim_{x \to 0,5^+} f(x) = \frac{\boxed{0,5 - e}^{\ominus}}{0^+} = -\infty$$

c.2. Pour tout réel x distinct de 0 et de $\frac{1}{2}$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{2x^2 - e^{2x}}{2x-1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{2 - \frac{\left(e^x\right)^2}{x^2}}{2 - \frac{1}{x}} = x \times \frac{2 - \left(\frac{e^x}{x}\right)^2}{2 - \frac{1}{x}}$$

Cette dernière écriture de $f(x)$ va nous donner ses limites aux infinis :

$$\lim_{x \to -\infty} x \times \frac{2 - \left(\frac{e^x}{x}\right)^2}{2 - \frac{1}{x}} = (-\infty) \times \frac{2 - \left(\frac{0^+}{-\infty}\right)^2}{2 - 0^-} = (-\infty) \times \frac{2 - \left(0^-\right)^2}{2} = (-\infty) \times \frac{2 - 0^+}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \times \frac{2 - \left(\frac{e^x}{x}\right)^2}{2 - \frac{1}{x}} = (+\infty) \times \frac{2 - (+\infty)^2}{2 - 0^+} = (+\infty) \times \frac{2 - (+\infty)}{2} = (+\infty) \times \frac{(-\infty)}{2} = -\infty$$

c.3. f est un quotient $\frac{u}{v}$ avec

$u(x) = 2x^2 - e^{2x}$
$u'(x) = 4x - 2e^{2x}$
Dérivable sur ℝ

et

$v(x) = 2x - 1$
$v'(x) = 1$
Dérivable sur ℝ
et non nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ et :

$$f'(x) = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2} = \frac{\left(4x - 2e^{2x}\right) \times (2x-1) - 2 \times \left(2x^2 - e^{2x}\right)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 4x - 4xe^{2x} + 2e^{2x} - 4x^2 + 2e^{2x}}{(2x-1)^2} = \frac{4e^{2x} - 4xe^{2x} + 4x^2 - 4x}{(2x-1)^2}$$

Développons le numérateur auquel nous sommes censés arriver :

$$(4-4x) \times g(x) = (4-4x) \times \left(e^{2x} - x\right) = 4e^{2x} - 4x - 4e^{2x} + 4x^2$$

D'où l'égalité que nous devions établir !

c.4. C'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction f.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-4x+4$	$+$	|	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+$	|	$+$	|	$+$	
$(2x-1)^2$	$+$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $f'(x)$	$+$	||	$+$	0	$-$	
Variation de f	$-\infty$ ↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	$2-e^2$	↘ $-\infty$	

Pour que tout soit complet, calculons le maximum local

$$f(1)=\frac{2\times 1^2-e^{2\times 1}}{2\times 1-1}=\frac{2-e^2}{2-1}=2-e^2$$

c.5. L'équation réduite de la tangente T_0 est de la forme : $y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$

avec : $f'(0)=f'(x)=\dfrac{(4-4\times 0)\times\left(e^0-0\right)}{(2\times 0-1)^2}=\dfrac{4\times 1}{(-1)^2}=4$.

$f(0)=\dfrac{2\times 0^2-e^{2\times 0}}{2\times 0-1}=\dfrac{0-e^0}{0-1}=\dfrac{0-1}{0-1}=1$

Il vient alors :

$$T_0 \quad : \quad y=4\times(x-0)+1=4x+1$$

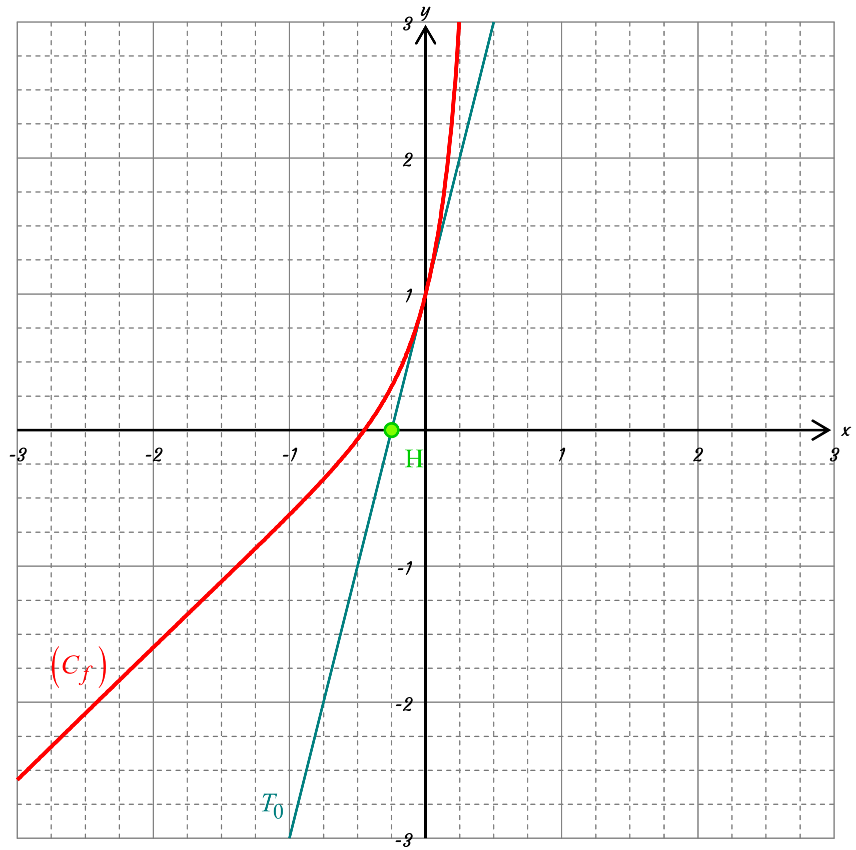
➲ Le point H appartenant à l'axe des abscisses, son ordonnée y_H est nulle.

De plus, H faisant partie de la tangente T_0, ses coordonnées en vérifient l'équation :

$$y_H=4x_H+1 \quad\Leftrightarrow\quad 0=4x_H+1 \quad\Leftrightarrow\quad 4x_H=-1 \quad\Leftrightarrow\quad x_H=-\frac{1}{4}$$

<u>Conclusion :</u> le point H a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

La situation de la courbe (C_f), de la tangente T_0 et du point H est la suivante :



Exponentielle (inspired by the bac)

L'énoncé

a. La fonction g est définie sur ℝ par :

$$g(x) = e^x - 2x$$

1. A la main, calculer l'image $g(\ln(2))$.
2. Résoudre dans ℝ l'inéquation $e^x - 2 < 0$. On conclura cette résolution en donnant l'ensemble des solutions de cette inéquation.
3. Calculer la dérivée $g'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction g sur ℝ.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur ℝ

b. La fonction f est définie sur ℝ par :

$$f(x) = \frac{e^x + 2x}{e^x - 2x}$$

On appelle (C_f) la courbe représentative de la fonction f.

1. Pourquoi la fonction f est-elle bien définie sur ℝ tout entier ?
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Démontrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{(4-4x)\times e^x}{(e^x - 2x)^2}$
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.
6. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à la courbe (C_f) en son point A d'abscisse 0.
   En déduire les coordonnées du point H qui est l'intersection de la droite T_0 avec l'axe des abscisses $(\mathrm{O}x)$.

Le corrigé

a.1. Calculons l'image demandée : $g(\ln(2)) = e^{\ln(2)} - 2\times\ln(2) = \underline{2 - 2\times\ln(2) \approx 0,61}$

a.2. Résolvons dans ℝ l'inéquation proposée.

$$e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \xrightarrow[\substack{\text{Croissante} \\ \text{sur }]0;+\infty[}]{\text{Ln}} \ln(e^x) < \ln(2) \Leftrightarrow x < \underline{\ln(2)}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de cette inéquation est $]-\infty;\ln(2)[$.

a.3. En tant que différence de fonctions dérivables sur ℝ, g l'est elle aussi. Par suite :

$$g'(x) = \underline{e^x - 2}$$

La question précédente nous a permis de déterminer quand $g'(x)$ était strictement négatif et par suite, positif et nul. Ce signe de la dérivée va nous donner les variations de la fonction g.

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	↘	$2-2\ln(2)\approx 0,61$	↗	$+\infty$

a.4. Son minimum sur ℝ étant le réel positif $g(\ln(2))$, la fonction g est strictement positive sur $]-\infty;+\infty[$.

b.1. $f(x)$ étant le quotient de deux fonctions définies et dérivables sur ℝ, pour qu'il existe, il faut et il suffit que son dénominateur $g(x) = e^x - 2x$ soit non nul.
Or, depuis la question précédente **a.4**, nous savons qu'il est toujours positif. Ce qui assure l'existence de $f(x)$ quelque soit le réel x considéré.

b.2. De prime abord : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 2x}{e^x - 2x} = \frac{0^+ + (-\infty)}{0^+ - (-\infty)} = \frac{-\infty}{+\infty} =$ **Forme indéterminée**

Cette dernière se lève en factorisant numérateur et dénominateur par leurs termes nous semblant les plus forts en $-\infty$: x.

$$f(x) = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \times \frac{\frac{e^x}{x} + 2}{\frac{e^x}{x} - 2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\frac{0^+}{-\infty} + 2}{\frac{0^+}{-\infty} - 2} = \frac{0^- + 2}{0^- - 2} = \frac{2}{-2} = \underline{-1}$$

b.3. De prime abord : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 2x}{e^x - 2x} = \frac{(+\infty)+(+\infty)}{(+\infty)-(-\infty)} = \frac{+\infty}{\textbf{Forme indéterminée}}$

Encore une fois, nous allons lever cette terrifiante incertitude en factorisant numérateur et dénominateur par leurs termes nous semblant les plus forts en $+\infty$: e^x.

$$f(x)=\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}\times\frac{1+2\dfrac{x}{e^x}}{1-2\dfrac{x}{e^x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1+2\times\dfrac{1}{+\infty}}{1-2\times\dfrac{1}{+\infty}}=\frac{1+2\times 0^+}{1-2\times 0^+}=\frac{1+0^+}{1-0^+}=\frac{1}{1}=1$$

b.4. La fonction f est un quotient $\frac{u}{v}$ où

$u(x)=e^x+2x$
$u'(x)=e^x+2$
Dérivable sur $\mathbb{R}$

et

$v(x)=e^x-2x$
$v'(x)=e^x-2$
Dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{\left(e^x+2\right)\times\left(e^x-2x\right)-\left(e^x-2\right)\times\left(e^x+2x\right)}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

$$=\frac{\cancel{e^{2x}}-2xe^x+2e^x-\cancel{4x}-\cancel{e^{2x}}-2xe^x+2e^x+\cancel{4x}}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

$$=\frac{4\times\boxed{e^x}-4x\times\boxed{e^x}}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{(4-4x)\times\boxed{e^x}}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

b.5. C'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction f.

Calculons le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$

$$f(1)=\frac{e^1+2\times 1}{e^1-2\times 1}=\frac{e+2}{e-2}\approx 6{,}57$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-4x+4$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$\left(e^x-2x\right)^2$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	-1	$\nearrow$	$(e+2)/(e-2)$	$\searrow$	1

b.6. L'équation réduite de la tangente T_0 est de la forme : $y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$

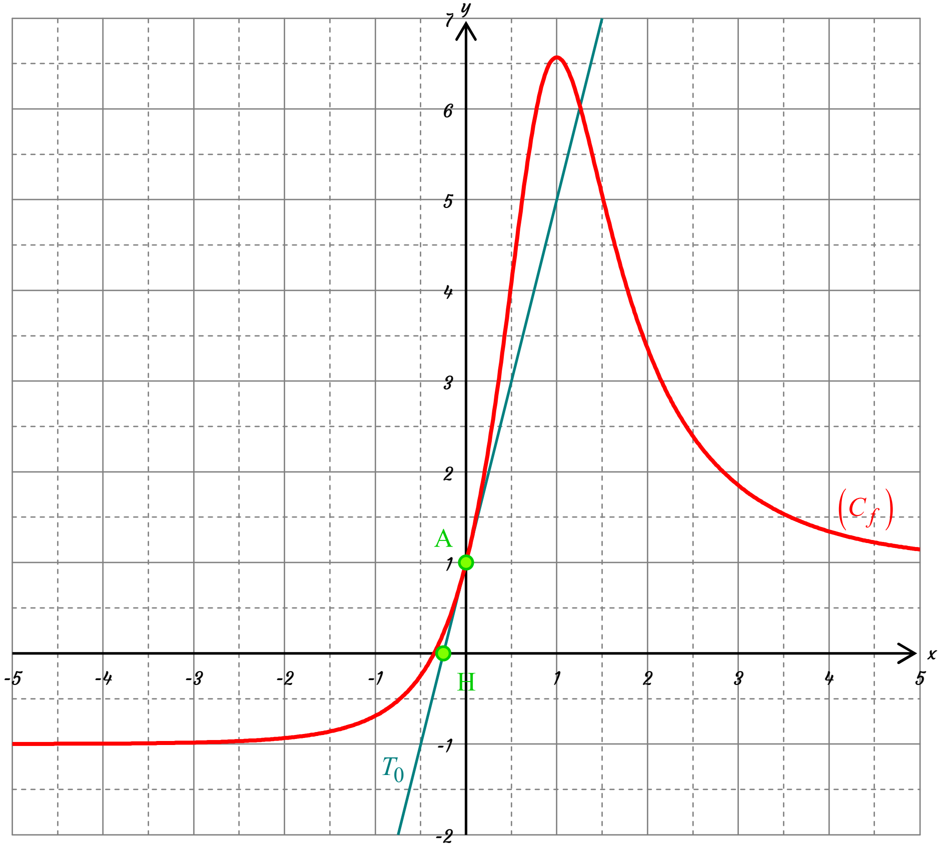
avec :

$$f'(0)=f'(x)=\frac{(4-4\times 0)\times e^0}{\left(e^0-2\times 0\right)^2}=\frac{4\times 1}{(1)^2}=\frac{4}{1}=4.$$

$$f(0)=\frac{e^0+2\times 0}{e^0-2\times 0}=\frac{1+0}{1-0}=\frac{1}{1}=1$$

Il vient alors :

$$T_0 \quad : \quad y=4\times(x-0)+1=4x+1$$



➲ Le point H appartenant à l'axe des abscisses, son ordonnée y_H est nulle.

De plus, H faisant partie de la tangente T_0, ses coordonnées en vérifient l'équation :

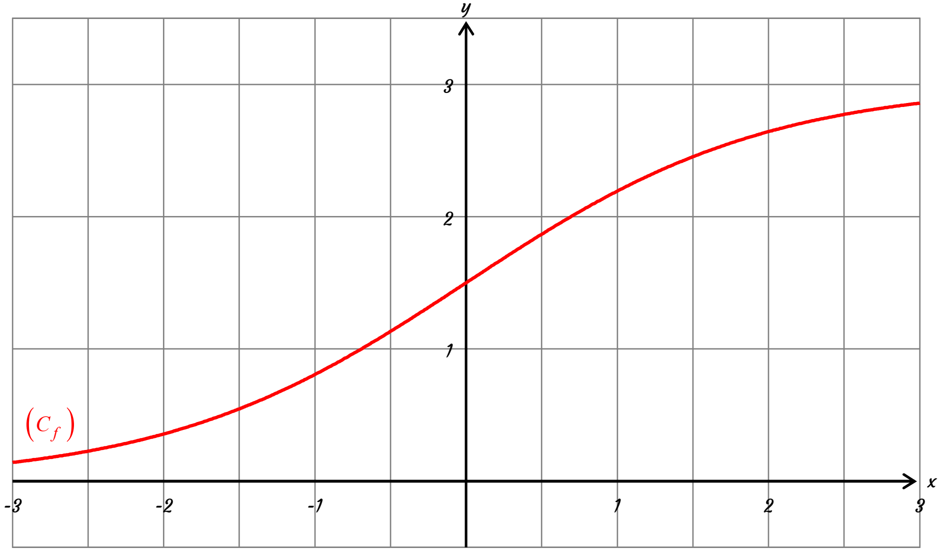
$$y_H=4x_H+1 \Leftrightarrow 0=4x_H+1 \Leftrightarrow 4x_H=-1 \Leftrightarrow x_H=-\frac{1}{4}$$

Analytique totale !

L'énoncé

La fonction f est définie sur ℝ par : $f(x)=\dfrac{3}{1+e^{-x}}$

Sa courbe (C_f) a été tracée dans un repère simplement orthogonal où une unité d'abscisse vaut 2 centimètres et une unité d'ordonnée mesure $\dfrac{7}{4}$ centimètres.



a. Dans cette sous-partie, on étudie la fonction f.

1. Justifier que la fonction f est bien dérivable sur ℝ.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
   Quelles sont les conséquences graphiques de ces résultats ?
3. Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x)=\dfrac{3e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$.
   En déduire le tableau de variation de la fonction f sur ℝ.
4. Résoudre dans ℝ l'inéquation $f(x)>2$. On conclura la résolution en donnant l'ensemble des solutions.

b. On appelle Δ la tangente à la courbe (C_f) en son point d'abscisse 0.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente Δ.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées de H qui est le point d'intersection de la tangente Δ et de la droite d'équation $y=3$.
3. Tracer la tangente Δ sur la figure ci-avant.

c. On appelle $\mathcal{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites verticales d'équation $x=0$ et $x=\ln(0,2)$.

1. Prouver que, pour tout réel x, on a : $f(x)=\dfrac{3e^{x}}{1+e^{x}}$.
   En déduire une primitive F de la fonction f sur ℝ.
2. Représenter le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique ci-avant, puis calculer l'aire de cette surface dont on donnera d'abord la valeur exacte en unités d'aire sous la forme $a\times\ln(b)$ où a et b sont deux rationnels. Puis donner une valeur approchée au millimètre carré près de cette aire qui sera exprimée en centimètres carrés.

Le corrigé

a.1. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur ℝ. De plus, le dénominateur $1+e^{-x}$ est toujours positif donc non nul car il est la somme de deux termes positifs : une exponentielle et 1.
C'est pour cela que la fonction f est dérivable sur ℝ.

a.2. Déterminons les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

Bien sûr, c'est pas bien d'écrire cela !

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{3}{1+e^{-(-\infty)}}=\frac{3}{1+e^{+\infty}}=\frac{3}{1+(+\infty)}=0^+$$

Donc la droite d'équation $y=0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

Grande est la honte que nous éprouvons en l'écrivant.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \overbrace{\frac{3}{1+e^{-(+\infty)}} = \frac{3}{1+e^{-\infty}} = \frac{3}{1+0^{+}} = 3}$$

Donc la droite d'équation $y=3$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

a.3. La fonction $f = 3\times\frac{1}{u}$ est une fonction inverse avec
$u(x) = 1+e^{ax}$
$u'(x) = 0 + a\times e^{ax} = (-1)\times e^{-x}$
Dérivable et non nulle sur ℝ

Donc la fonction f est dérivable sur ℝ et, pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = 3\times\frac{-u'}{u^2}$$
$$= 3\times\frac{-\left(-e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^2} = \frac{3\times e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

Comme d'habitude, c'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction f sur ℝ.
C'est le tableau ci-contre ➔

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$3e^{-x}$	$+$
$\left(1+e^{-x}\right)^2$	$+$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variation de f	$0 \nearrow 3$

a.4. Résolvons l'équation proposée.

$$f(x) > 2 \iff \frac{3}{1+e^{-x}} > 2 \xrightarrow[\text{qui est positif. Ordre conservé.}]{\times\left(1+e^{-x}\right)} 3 > 2\times\left(1+e^{-x}\right)$$

$$\iff 2\times e^{-x} < 1 \iff e^{-x} < \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Ln}} -x < \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\iff -x < -\ln(2) \xrightarrow{\times(-1)} x > \ln(2)$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ est $\left]\ln(2);+\infty\right[$.

b.1. L'équation réduite de la tangente Δ est de la forme $y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$ avec :

$$f(0) = \frac{3}{1+e^{-0}} = \frac{3}{1+e^{0}} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$f'(0) = \frac{3\times e^{-0}}{\left(1+e^{-0}\right)^2} = \frac{3\times e^{0}}{\left(1+e^{0}\right)^2} = \frac{3\times 1}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$$

Par conséquent, l'équation réduite de la droite Δ est : $y = \frac{3}{4}\times(x-0)+\frac{3}{2} = \frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

b.2. D'abord, le point H faisant partie de l'asymptote d'équation $y=3$, ses coordonnées sont de la forme $(x_H;3)$.
Ensuite, H appartenant à la tangente Δ, ses coordonnées en vérifient l'équation réduite :

$$3 = \frac{3}{4}x_H + \frac{3}{2} \iff \frac{3}{4}x_H = \frac{3}{2} \xrightarrow{\div(4/3)} x_H = \frac{3}{2}\times\frac{4}{3} = 2$$

Les coordonnées du point H sont $(2;3)$.

c.1. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{3\times e^{x}}{\left(1+e^{-x}\right)\times e^{x}} = \frac{3e^{x}}{e^{x}+e^{-x+x}} = \frac{3e^{x}}{e^{x}+e^{0}} = \frac{3e^{x}}{e^{x}+1}$$

Comme $f = 3\times\frac{u'}{u}$ avec
$u(x) = 1+e^{x}$
$u'(x) = e^{x}$
Dérivable et positive sur ℝ
,

alors l'une des primitives sur ℝ de la fonction f est $F(x) = 3\times\ln(u) = 3\times\ln\left(1+e^{x}\right)$.

c.2. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est donnée par l'intégrale :

$$Aire(\mathcal{D}) = \int_{\ln(0,2)}^{0} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{\ln(0,2)}^{0}$$

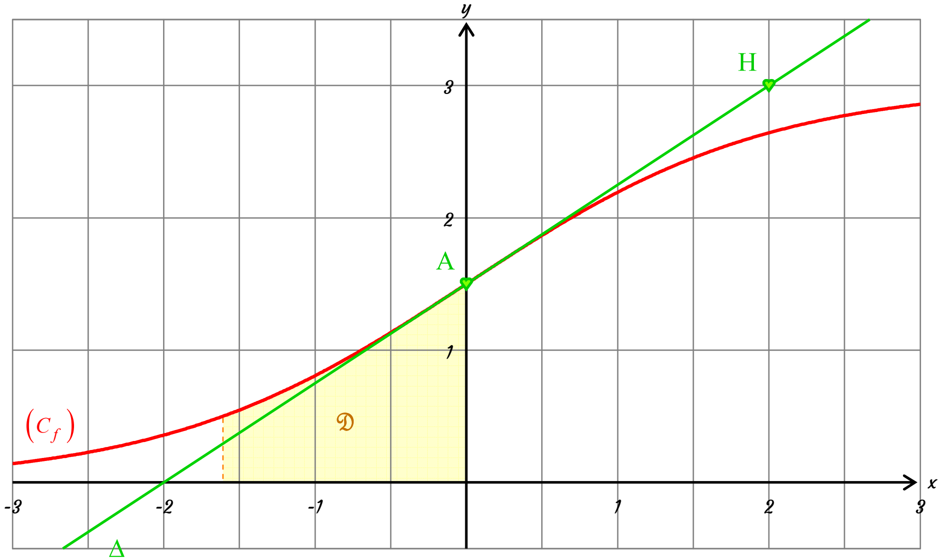
$$= F(0) - F(\ln(0,2)) = 3\times\ln\left(1+e^{0}\right) - 3\times\ln\left(1+e^{\ln(0,2)}\right)$$

$$= 3\times\ln(1+1) - 3\times\ln(1+0,2) = 3\times\ln(2) - 3\times\ln(1,2)$$

$$= 3\times\ln\left(\frac{2}{1,2}\right) = 3\times\ln\left(\frac{2}{6/5}\right) = 3\times\ln\left(2\times\frac{5}{6}\right) = 3\times\ln\left(\frac{5}{3}\right) \text{ unités d'aire}$$

$$= 3\times\ln\left(\frac{5}{3}\right)\times \overbrace{2\times\frac{7}{4}}^{\text{Dimensions d'une u.a en cm}} \approx 5,36 \text{ centimètres carrés}$$

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Géométrie spatiale

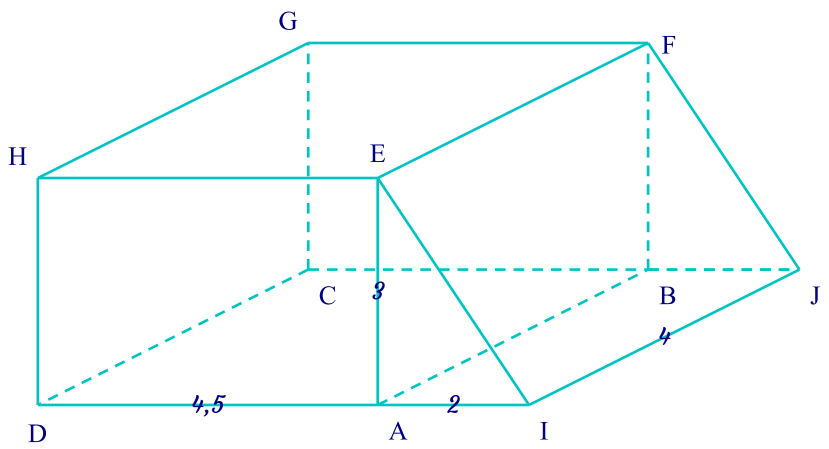
Dènegeurinezeuspèce

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, AIJBCDEFGH est un trapézoïde constitué du pavé droit ABCDEFGH auquel on a collé le prisme droit AIJBEF tels que

AD = 4,5 cm AI = 2 cm AE = 3 cm IJ = 4 cm

Le point I appartient à la droite (AD) et J fait partie de la droite (BC).



a. Cette sous-partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, trois propositions sont faites mais une seule est juste. Laquelle ? On entourera la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1/3 de points. Une mauvaise ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

a.1. Les droites (CI) et (EG) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

a.2. Les plans (AFJ) et (DCG) sont :

Sécants	Parallèles distincts	Confondus

a.3. La droite (IJ) et le plan (EGH) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse.	La droite est incluse dans le plan.

a.4. Les droites (CE) et (DF) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

a.5. Les plans (ACJ) et (BDI) sont :

Sécants	Parallèles distincts	Confondus

a.6. La droite (EJ) et le plan (BDH) sont :

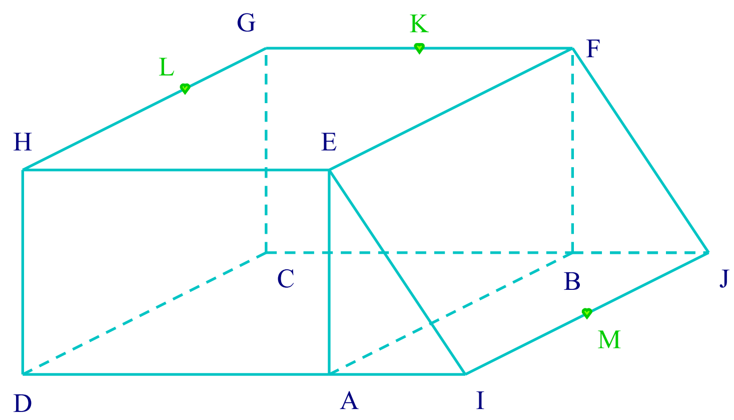
Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse	La droite est incluse dans le plan

b. On s'intéresse à la position relative de la droite (ED) par rapport au plan (FIJ).

1. Justifier brièvement que les droites (EF) et (ED) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que le triangle EDI est rectangle en E.
3. En déduire que la droite (ED) est orthogonale au plan (FIJ).

c. Sur la figure ci-dessous, les points K et M sont les milieux respectifs des segments [FG] et [IJ]. Le point L est défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{GL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GH}$.

1. Sur la figure ci-dessous, tracer l'intersection Δ des plans (KLM) et (ABC). On expliquera et justifiera sa construction.
2. Sur la figure ci-dessous, tracer l'intersection Γ des plans (KLM) et (CDH). On expliquera et justifiera sa construction.
3. Finir la construction de la section du trapézoïde AIJBCDEFGH par le plan (KLM). Aucune justification n'est demandée mais la construction doit être claire.



Le corrigé

a. Passons en revue les diverses configurations.

1. Le point I n'appartenant pas au plan (CGE), les droites (CI) et (GE) sont non coplanaires.
2. Les plans (AFJ) et (DCG) sont sécants suivant une droite d qui est, d'après le théorème du toit, parallèle aux droites (GD) et (AF). Cette droite d passe aussi par le point d'intersection des droites (AJ) et (CD) qui sont sécantes dans le plan de base (ABC).
3. Comme la droite (IJ) est parallèle à (EF) qui est incluse dans le plan (EGH), alors la droite est parallèle au plan. Mais elle n'y est pas incluse car ni I, ni J n'en font partie.
4. Les droites (CE) et (DF) sont deux diagonales du pavé droit situées dans le même plan (AEGC) et se croisant au centre du polyèdre. Elles sont donc sécantes.
5. Les six points définissant les deux plans étant coplanaires, les plans (ACJ) et (BDI) sont confondus.
6. Compte tenu des dimensions du trapézoïde, la droite (EJ) ne peut être que sécante au plan (BDH). Pour obtenir leur point d'intersection X, il faut d'abord construire l'intersection d' des plans (BDH) et (EIJ). Celle-ci passe par le point F et le point d'intersection des droites (BD) et (IJ) qui sont sécantes dans le plan (ABC). Alors X est le point d'intersection des droites (EJ) et d'.

b.1. Comme ABCDEFGH est un pavé droit, alors la droite (EF) est orthogonale au plan (ADE). Donc (EF) est aussi orthogonale à la droite (ED) qui est incluse dans le plan (ADE).

b.2. Commençons par calculer les longueur ED et EI.

- Le triangle ADE étant rectangle en A, il vient d'après Pythagore :
  $\mathrm{ED}^2 = \mathrm{EA}^2 + \mathrm{AD}^2 = 3^2 + 4,5^2 = 9 + 20,25 = 29,25 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ED} = \boxed{\sqrt{29,25}\ \text{cm}}$
- Le triangle ADI étant rectangle en A, il vient d'après Pythagore :
  $\mathrm{EI}^2 = \mathrm{EA}^2 + \mathrm{AI}^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{EI} = \boxed{\sqrt{13}\ \text{cm}}$

Par suite, comme $\mathrm{ED}^2 + \mathrm{EI}^2 = 29,25 + 13 = 42,25 = 6,5^2 = \mathrm{DI}^2$, alors, toujours en application du théorème de Pythagore, le triangle EDI est rectangle en E.

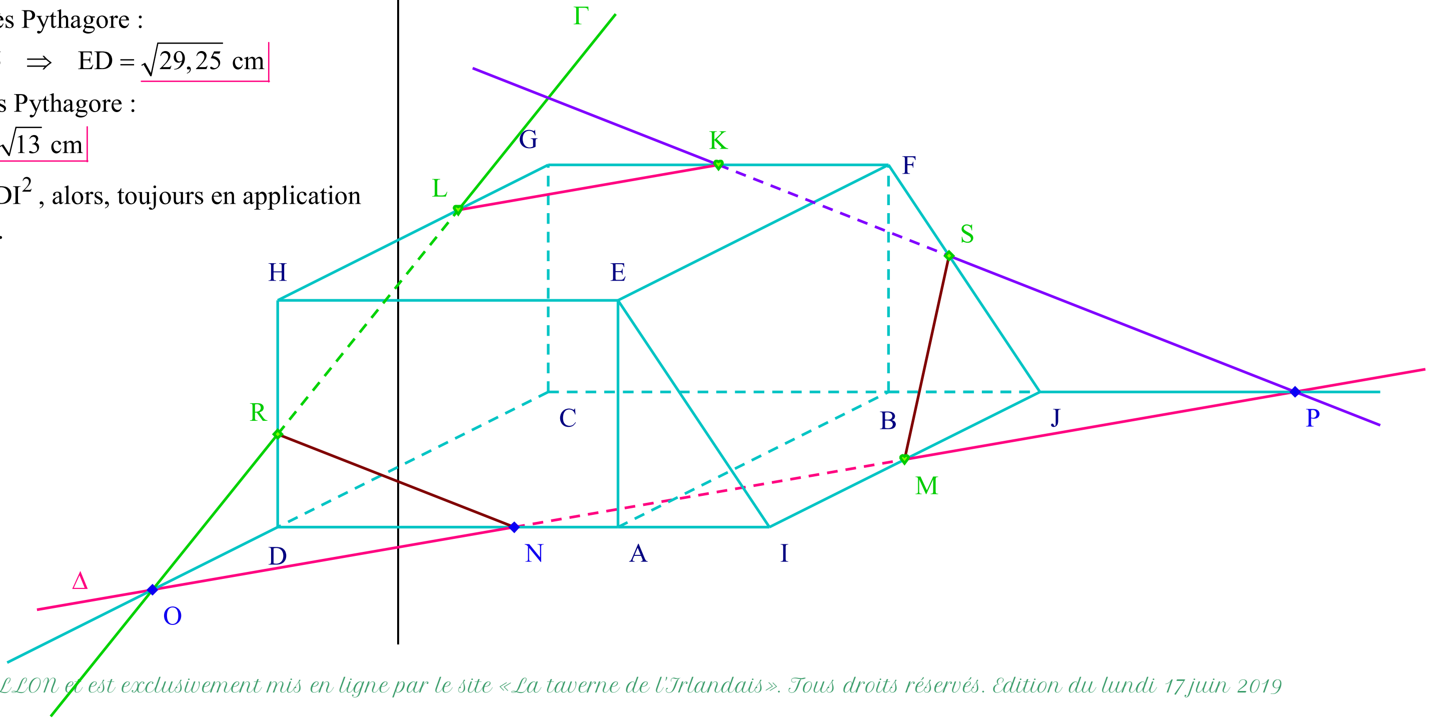
b.3. Comme la droite (ED) est perpendiculaire aux droites (EF) d'après **b.1** et (EI) d'après **b.2**, deux droites sécantes du plan (FIJ), alors la droite (ED) est perpendiculaire au plan (FIJ).

c.1. D'abord, cette intersection Δ est une droite qui passe par M, point commun aux plans (ABC) et (KLM).
Ensuite, en application du théorème d'incidence, le plan (KLM) coupe les plans parallèles (ABC) et (EFG) suivant deux droites parallèles (KL) et Δ.
Ainsi, l'intersection Δ est la parallèle à la droite (KL) passant par le point M.

c.2. D'abord, cette intersection Γ est une droite qui passe par L, point commun aux plans (CDH) et (KLM).
Ensuite, la droite Δ du plan (KLM) est sécante à la droite (CD) du plan (CDH) en un point que nous appellerons O. Tout cela se passe dans le plan de base (ABC).
Ce point O appartenant aux plans (CDH) et (KLM) fait partie de l'intersection Γ.
En conclusion, l'intersection Γ est plus simplement la droite (LO).

c.3. En poursuivant la construction, on obtient que la section du trapézoïde par le plan (KLM) est l'hexagone KLRNMS où :

- Le point R est l'intersection de la droites Γ et du côté [DH].
- P est le point d'intersection de la droite Δ du plan (KLM) et de la droite (BC) du plan (CFJ). Tout cela se passe encore dans le plan (ABC).
- S est le point d'intersection de la droite (KP) et du côté [FJ].



Logarithme

Ln (inspired by the bac)

L'énoncé

La fonction *f* est définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=(x+1)\times\ln(x+1)-x-2$$

a. Etudions la fonction *f* sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

1. Recopier et compléter le résultat du cours suivant : $\lim\limits_{t\to 0^+} t\times\ln(t)=\ldots\ldots$.

   En déduire la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers -1 par la droite.
2. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.
3. Résoudre dans l'intervalle $]-1;+\infty[$ l'inéquation $\ln(x+1)<0$.
4. Etablir que, pour tout réel $x>-1$, on a $f'(x)=\ln(x+1)$.
5. En déduire le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.
6. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1;+\infty[$. On donnera une valeur approchée au millième près de cette solution α.
7. Conclure en dressant le tableau de signe de $f(x)$ sur $]-1;+\infty[$.

b. La fonction *h* est définie par :

$$h(x)=\ln(f(x))$$

1. Justifier que la fonction *h* est seulement définie sur l'intervalle $]\alpha;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de la fonction *h* aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser le tableau de variation de la fonction *h* sur l'intervalle $]\alpha;+\infty[$.

Le corrigé

a.1. Dans le cours, il a été prouvé que $\lim\limits_{t\to 0^+} x\times\ln(x)=\underline{0^+}$

Quand *x* tend vers -1 par la droite, $t=x+1$ tend vers 0^+

$t\times\ln(t)=(x+1)\times\ln(x+1)$ tend vers 0^+

Par suite :

$$\lim_{x\to-1^+}\underbrace{(x+1)\times\ln(x+1)-x-2}_{f(x)}=0^+-(-1)-2=\underline{-1}$$

La conséquence de cette limite finie est que la fonction *f* est prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1)=-1$ alors qu'originellement elle n'y était pas définie.

a.2. De prime abord :

$$\lim_{x\to-1^+}\underbrace{(x+1)\times\ln(x+1)-x-2}_{f(x)}=(+\infty)\times(\infty)-(+\infty)-2=\underbrace{(+\infty)-(+\infty)-2}_{\text{Forme indéterminée}}$$

Pour lever l'indétermination, nous allons tout factoriser par *x* :

$$f(x)=x\times\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\ln(x+1)-1-\frac{2}{x}\right]\xrightarrow[x\to+\infty]{}(+\infty)\times\left[\left(1+0^+\right)\times(+\infty)-1-0^+\right]$$
$$=(+\infty)\times\left[1\times(+\infty)-1\right]$$
$$=(+\infty)\times(+\infty)=\underline{+\infty}$$

a.3. Résolvons dans l'intervalle $]-1;+\infty[$ l'inéquation proposée :

$$\ln(x+1)<0\xrightarrow[\text{Croissante sur }\mathbb{R}]{\text{Exponentielle}}x+1<e^0\quad\Leftrightarrow\quad x+1<1\quad\Leftrightarrow\quad\underline{x<0}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est :

$$S=\underline{]-1;0[}$$

Ainsi, $\ln(x+1)$ est négatif avant 0, nul en 0 et positif après.

a.4. Nous avons $f=u\times v-x-2$ où $\begin{cases}u(x)=x+1\\ u'(x)=1\\ \text{Dérivable sur }\mathbb{R}\end{cases}$ et $\begin{cases}v(x)=\ln(x+1)=\ln(u)\\ v'(x)=u'/u=1/(x+1)\\ \text{Dérivable sur }]-1;+\infty[\end{cases}$

Donc la fonction *f* est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et pour tout réel *x* de cet intervalle :

$$f'(x)=u'\times v+v'\times u-1+0$$
$$=1\times\ln(x+1)+\frac{1}{\cancel{x+1}}\times\cancel{(x+1)}-1=\ln(x+1)+1-1=\underline{\ln(x+1)}$$

a.5. Le signe de la dérivée $f'(x)$ va nous donner les variations de la fonction *f*.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)=\ln(x+1)$		$-$	0	$+$	
Variation de *f*	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Calculons la valeur du minimum : $f(0)=(0+1)\times\ln(0+1)-0-2=1\times 0-2=\underline{-2}$

a.6. La fonction *f* étant négative sur l'intervalle $]-1;0[$, l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $]-1;0[$.

Ailleurs, sur l'intervalle $[0;+\infty[$:

- la fonction *f* est continue car dérivable
- la fonction *f* est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
- 0 appartient à l'intervalle image $f([0;+\infty[)=[-2;+\infty[$

alors, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;+\infty[$. Avec la calculatrice, on observe : $\alpha\approx\underline{2{,}591}$

a.7. Tenant compte des deux questions précédentes, le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	-1		α		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

b.1. Pour que le logarithme d'une quantité existe, il faut et il suffit que cette quantité existe et soit strictement positive. Par suite :

$$h(x)=\ln(f(x))\text{ existe}\iff \overbrace{f(x)>0\iff x\in]\alpha;+\infty[}^{\text{D'après la question } \mathbf{a.7}}$$

b.2. Quand on sait vers où va *f*, on connait les limites de la fonction *h*.

Limite à droite de α : quand x tend vers α, $f(x)$ tend vers 0^+

$h(x)=\ln(f(x))$ tend vers $\underline{-\infty}$

Limite en +∞ : quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$

$h(x)=\ln(f(x))$ tend vers $\underline{+\infty}$

➲ Sur l'intervalle $]\alpha;+\infty[$, $h=\ln(f)$ étant la composée de deux fonctions strictement croissantes, elle est strictement croissante sur cet intervalle.

On peut aussi déduire cette variation à partir du signe de la dérivée $h'=\dfrac{f'}{f}$.

x	α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$+$	
Signe de $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$		$+$	
Variation de *h*	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Probabilités

Totale proba !

L'énoncé

Les cinq sous-parties de ce devoir sont indépendantes les unes des autres.

a. La fonction f est définie pour tout réel $t \neq 3$ par :

$$f(t) = \frac{1}{t-3}$$

A partir de la question **a.2**, X désignera une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans l'intervalle $[4;e+3]$ dont la densité de probabilité sera la fonction f.

1. Prouver que la fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[4;e+3]$.
2. Calculer $p\left(X \in \left[\frac{9}{2};5\right]\right)$.

   On donnera d'abord la valeur exacte sous la forme $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ où a et b seront deux naturels, puis une valeur approchée au millième près.
3. Déterminer la valeur exacte du réel $x \in [4;e+3]$ tel que $p(X < x) = 0,6$.
4. Déterminer deux entiers α et β tels que, pour tout réel $t \neq 3$, on ait :
$$\frac{t}{t-3} = \alpha + \frac{\beta}{t-3}$$
5. Calculer la valeur exacte de $E(X)$, puis en donner une valeur approchée au centième près.

b. Ce jour est un grand jour : le président vient rendre visite au maire mais il est en retard. A 11 heures, le préfet informe l'élu municipal que le président arrivera entre 11 heures 10 et 12 heures.
On note A le temps d'attente du maire exprimé en minutes à partir de 11 heures. La variable aléatoire A suit la loi uniformément distribuée sur l'intervalle $[10;60]$.

1. Représenter la densité de probabilité de la variable aléatoire A. On précisera les valeurs prises par cette dernière.
2. Calculer la probabilité que le président arrive entre 11 heures 20 et 11 heures 35.
3. Il est 11 heures 40 et le président n'est toujours pas là. Calculer la probabilité qu'il arrive après 11 heures 55.
4. Calculer $E(A)$. Que signifie ce résultat ?

c. Ce matin, Boby, agent de la police municipale, arrête aléatoirement les véhicules franchissant le rond-point à l'entrée de la ville.
On sait que 35% des véhicules passant par ce rond-point roulent à l'essence, 45% au diesel et le reste sont des gazogènes.
On sait aussi que 80% des véhicules diesel sont conformes à la réglementation contre seulement 15% des gazogènes. Mais, globalement, 60% des véhicules passant par ce rond-point sont conformes à la réglementation.
Boby arrête une voiture au hasard et on définit les événements suivants :

E = «le véhicule arrêté roule à l'essence»
D = «le véhicule arrêté roule au diesel»
G = «le véhicule arrêté est un gazogène»
C = «le véhicule arrêté est conforme à la réglementation»

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation d'un véhicule arrêté par Boby.
2. On sait que le véhicule arrêté roule à l'essence. Calculer la probabilité qu'il soit conforme à la réglementation.

   Les événements E et $\overline{C}$ sont-ils indépendants ? On justifiera sa réponse.
3. On sait que le véhicule que Boby vient d'arrêter est non conforme à la réglementation. Calculer la probabilité que ce soit un gazogène. On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.
4. Durant le dernière heure, Boby a arrêté au hasard 14 véhicules. Calculer la probabilité qu'exactement 5 parmi eux ne soient pas conformes à la réglementation. On écrira le calcul qui permet d'obtenir cette probabilité, puis on en donnera une valeur approchée au millième près.

d. Le distributeur automatique de café de la mairie est censé remplir des gobelets de 25 centilitres avec 17 centilitres de café. Seulement voilà, la machine est mal réglée. On appelle V le volume de café exprimé en centilitres versé dans un gobelet. On admet que la variable aléatoire continue V suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ cl et d'écart-type $\sigma = 3,2$ cl.
Le maire s'approche du distributeur, y introduit une pièce et la machine remplit un gobelet. On arrondira les probabilités demandées au millième près.

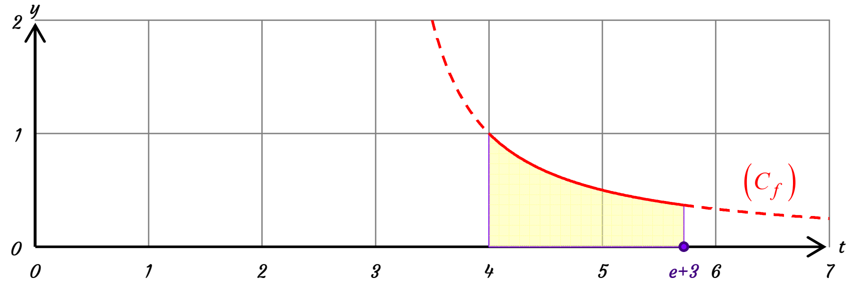
1. Calculer la probabilité que ce gobelet contienne entre 15 et 18 centilitres de café.
2. Calculer la probabilité que le gobelet déborde.
3. Sur son distributeur, l'exploitant souhaite indiquer la mention suivante : «exactement trois quarts des gobelets remplis comportent entre 14 et x centilitres de café». Déterminer ce volume x de café que l'on exprimera en centilitres et qu'on approchera au millilitre près.

e. *La Peule*, célèbre téléphoniste des Indres Occidentales, vient de sortir son dernier stupidphone : *l'Afaune*...dont la grande faiblesse est son haut-parleur qui tombe plus ou moins rapidement en panne.
On appelle T la variable aléatoire continue égale à la durée de vie exprimée en semaines du haut-parleur d'un *Afaune*. La loi de probabilité de T est la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$.

1. Donner l'expression de la densité de probabilité f de la variable aléatoire T.
   En utilisant la fonction f, prouver que $p(T \leq 5) = 1 - e^{-0,2}$.
   Dans le reste de l'exercice, on pourra se servir des formules vues en cours.
2. Calculer la probabilité que la durée de vie du haut-parleur d'un *Afaune* choisi au hasard dépasse une année. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième près.
3. Déterminer le réel positif α pour lequel $p(T \leq \alpha) = 0,8$. On donnera le résultat sous la forme $a \times \ln(b)$ où a et b seront deux entiers naturels.
4. On sait que la durée de vie du haut-parleur d'un *Afaune* particulier ne dépassera pas 25 semaines. Calculer la probabilité que sa durée de vie soit supérieure à 15 semaines. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième près.
5. Calculer la durée de vie moyenne d'un *Afaune*.
6. Une entreprise vient d'acheter neuf *Afaunes* pris au hasard dans la production. Calculer la probabilité qu'au moins quatre d'entre eux aient un haut-parleur fonctionnant toujours dans un an. On arrondira la probabilité demandée au millième près.

Le corrigé

a.1. Une primitive de la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t-3}$ sur l'intervalle $]3;+\infty[$ est $F(t) = \ln(t-3)$.



Ensuite, la fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[4;e+3]$ car :

La fonction f est continue sur cet intervalle.
La fonction f est positive sur cet intervalle car $t > 3$

$$\int_{[4;e+3]} f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_4^{e+3}$$
$$= \ln(e+3-3) - \ln(4-3) = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

a.2. La probabilité demandée se calcule avec la densité f.

$$p\left(X \in \left[\frac{9}{2};5\right]\right) = \int_{4,5}^{5} f(t)\,dt = \left[\ln(t-3)\right]_{4,5}^{5}$$
$$= \ln(5-3) - \ln(4,5-3) = \ln(2) - \ln(1,5) = \ln\left(\frac{2}{1,5}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,288$$

a.3. On cherche le réel $x \in [4;e+3]$ vérifiant :

$$p(X < x) = 0,6 \iff p(X \in [4;x]) = 0,6$$
$$\iff \int_4^x f(t)\,dt = 0,6 \iff \left[\ln(t-3)\right]_4^x = 0,6$$
$$\iff \ln(x-3) - \ln(4-3) = 0,6 \iff \ln(x-3) - 0 = 0,6$$
$$\iff \ln(x-3) = 0,6 \xrightarrow{\text{Exp}} x - 3 = e^{0,6} \iff x = 3 + e^{0,6} \approx 4,82$$

a.4. Pour tout réel $t \neq 3$, nous pouvons écrire :

$$\frac{t}{t-3} = \frac{t-3}{t-3} + \frac{3}{t-3} = 1 + \frac{3}{t-3}$$

a.5. L'espérance de la variable aléatoire continue X est donnée par :

$$E(X) = \int_4^{e+3} t \times f(t)\,dt = \int_4^{e+3} \frac{t}{t-3}\,dt$$

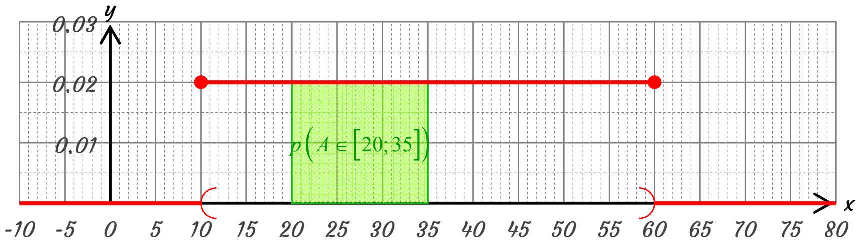
Or, une primitive de la fonction $f(t) = \dfrac{t}{t-3} = 1 + \dfrac{3}{t-3}$ sur l'intervalle $]3;+\infty[$ est la fonction $f(t) = t + 3 \times \ln(t-3)$.

Il vient alors :

$$E(X) = \left[t + 3 \times \ln(t-3)\right]_4^{e+3}$$
$$= \left(e + 3 + 3 \times \ln(e+3-3)\right) - \left(4 + 3 \times \ln(4-3)\right)$$
$$= \left(e + 3 + 3 \times \ln(e)\right) - \left(4 + 3 \times \ln(1)\right) = (e + 3 + 3 \times 1) - (4 - 3 \times 0) = e + 2 \approx 4,72$$

b.1. La densité de probabilité de la variable aléatoire A est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{60-10} = \frac{1}{50} = 0,02 \quad \text{si } t \in [10;60]$$
$$f(t) = 0 \quad \text{ailleurs}$$



b.2. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p\left(A \in [20;35]\right) = \frac{35-20}{60-10} = \frac{15}{50} = 0,3$$

b.3. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle :

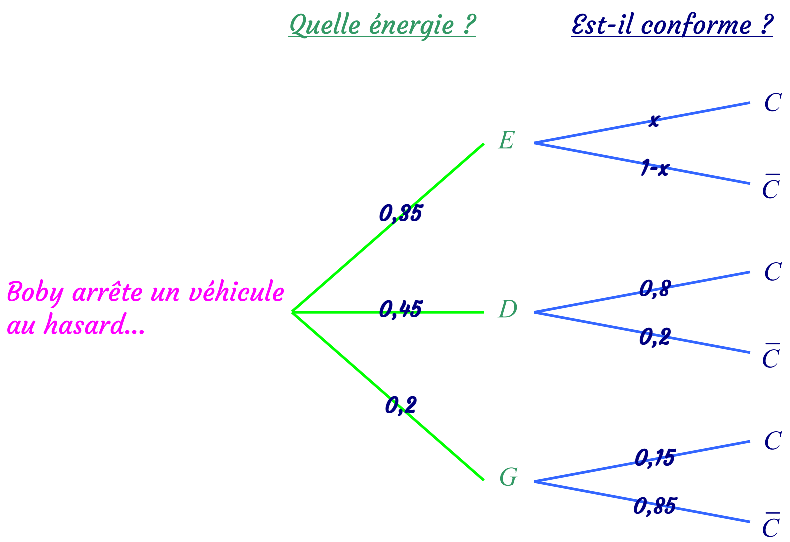
$$p\left(A \geq 55 \text{ sachant } A \geq 40\right) = \frac{p\left(A \geq 55 \cap A \geq 40\right)}{p\left(A \geq 40\right)} = \frac{p\left(A \in [55;60]\right)}{p\left(A \in [40;60]\right)} = \frac{5/\cancel{50}}{20/\cancel{50}} = \frac{1}{4}$$

b.4. L'espérance mathématique de la variable aléatoire A est donnée par :

$$E(A) = \frac{10+60}{2} = \frac{70}{2} = 35 \text{ minutes}$$

Le temps d'attente moyen du maire sera de 35 minutes.

c.1. L'arbre pondéré décrivant la situation d'un véhicule arrêté par Boby est le suivant :



c.2. On appelle x la probabilité recherchée. Les événements E, D et G formant une partition de l'univers des possibles, il vient en application de la formule des probabilités totales :

$$p(C) = p(C \cap E) + p(C \cap D) + p(C \cap G) \Leftrightarrow 0,6 = 0,35x + 0,45 \times 0,8 + 0,2 \times 0,15$$

$$\Leftrightarrow 0,6 = 0,35x + 0,36 + 0,03$$

$$\Leftrightarrow 0,35x = 0,21 \Leftrightarrow x = \frac{0,21}{0,35} = \frac{3}{5}$$

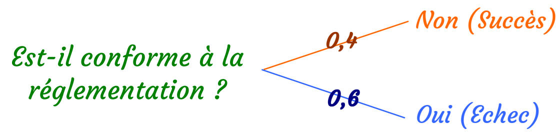
Conclusion : comme $p\left(C \text{ sachant } E\right) = p(C)$, alors les événements C et E sont indépendants.

Il en va alors de même pour les événements E et $\overline{C}$.

c.3. Dans cette question, il s'agit de calculer la probabilité :

$$p_{\overline{C}}(G) = p\left(G \text{ sachant } \overline{C}\right) = \frac{p\left(G \cap \overline{C}\right)}{p\left(\overline{C}\right)} = \frac{0,2 \times 0,85}{0,4} = \frac{0,17}{0,4} = \frac{17}{40} = 0,425$$

c.4. Chacun des quatorze véhicules arrêtés est pour Boby une épreuve de Bernoulli :

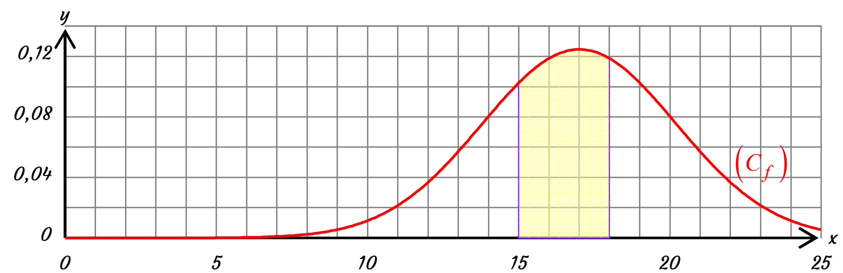


Les quatorze véhicules arrêtés au hasard sont indépendants les uns des autres et forment un schéma de Bernoulli. On appelle H la variable aléatoire égale au nombre de ceux-ci étant non conformes à la réglementation.
La loi de probabilité de H est la loi binomiale $B(n=14; p=0,4)$. Par conséquent, la probabilité demandée est donnée par :

$$p(H=5) = \binom{14}{5} \times 0,4^5 \times 0,6^9 = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \times 0,4^5 \times 0,6^9 \approx 0,207$$

d.1. Utilisant la fonction de calcul probabilités des lois normales de la calculatrice, la probabilité demandée est :

$$p\left(V \in [15;18]\right) \approx 0,357$$



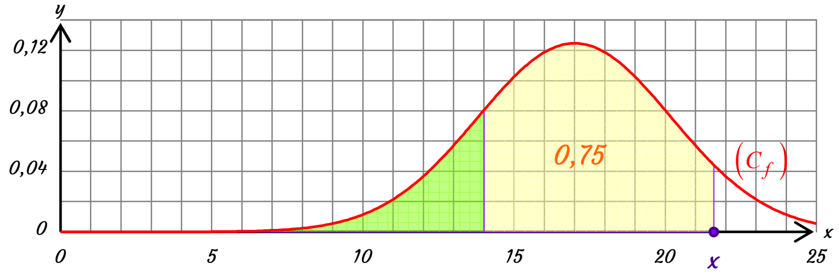
d.2. Pour que le gobelet déborde, il faut et il suffit que le volume versé par le distributeur soit supérieur à 25 centilitres. Par conséquent, la probabilité demandée est :

$$p\left(V\in\left]25;+\infty\right[\right)\approx \underline{0,006}$$

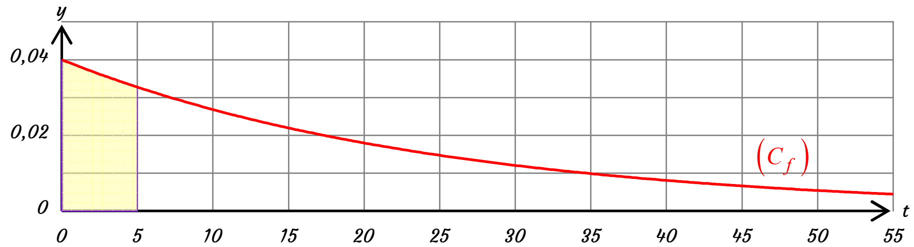
d.3. On cherche le réel x tel que :

$$p\left(V\in[14;x]\right)=0,75 \iff p(V\leq x)=p(V<14)+0,75$$
$$\iff x\approx \text{InvNorm}(0,174+0,75)\approx \underline{21,59 \text{ centilitres}}$$

<u>Conclusion :</u> l'exploitant du distributeur devra indiquer 21,6 centilitres en valeur maximale.



e.1. La densité de probabilité de T est la fonction $f(t)=0,04\times e^{-0,04t}$ qui est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dont une primitive est la fonction $F(t)=-e^{-0,04t}$.



Par suite, il vient :

$$p(T\leq 5)=p\left(T\in[0;5]\right)=\int_0^5 f(t)\,dt=\left[F(t)\right]_0^5$$
$$=\left(-e^{-0,04\times 5}\right)-\left(-e^{-0,04\times 0}\right)=-e^{-0,2}+e^0=\underline{1-e^{-0,2}}$$

e.2. En utilisant la formule vue en cours, la probabilité pour que la durée de vie du haut-parleur d'un *Afaune* dépasse une année, c'est-à-dire 52 semaines, est donnée par :

$$p(X\geq 52)=e^{-0,04\times 52}=\underline{e^{-2,08}\approx 0,125}$$

e.3. Utilisant une formule vue en cours, nous pouvons écrire :

$$p(T\leq\alpha)=0,8 \iff 1-e^{-0,04\alpha}=0,8 \iff -e^{-0,04\alpha}=-0,2$$
$$\iff e^{-0,04\alpha}=0,2 \xrightarrow{\text{Ln}} -0,04\alpha=\ln(0,2)$$
$$\iff \alpha=\frac{\ln(1/5)}{-0,04}=(-25)\times(-\ln(5))=\underline{25\times\ln(5)}$$

e.4. La probabilité conditionnelle que le haut-parleur d'un *Afaune* fonctionne plus de 15 semaines sachant qu'il ne dépassera pas 25 semaines est donnée par :

$$p(T\geq 15 \text{ sachant } T\leq 25)=\frac{p(T\geq 15 \cap T\leq 25)}{p(T\leq 25)}=\frac{p\left(T\in[15;25]\right)}{p\left(T\in[0;25]\right)}$$
$$=\frac{e^{-0,04\times 15}-e^{-0,04\times 25}}{e^{-0,04\times 0}-e^{-0,04\times 25}}=\frac{e^{-0,6}-e^{-1}}{1-e^{-1}}\approx \underline{0,286}$$

e.5. La durée de vie moyenne du haut-parleur d'un *Afaune* est égale à l'espérance de la variable aléatoire continue T soit $E(T)=\dfrac{1}{0,04}=\underline{25 \text{ semaines}}$

e.6. Chacun des neuf *Afaunes* achetés est une épreuve de Bernoulli :

Les neuf *Afaunes* étant indépendants car pris au hasard dans la production forment un schéma de Bernoulli. Si on appelle N la variable aléatoire égale au nombre de *Afaunes* dont le haut-parleur fonctionne encore après un an, sa loi de probabilité est la loi binomiale $B\left(n=9;p=e^{-2,08}\right)$

La probabilité demandée est donnée par :

$$p(N\geq 4)=\overbrace{1-p(N\leq 3)}^{\text{En utilisant la fonction de la calculatrice}}\approx 1-0,982=\underline{0,018}$$

Suites

Tout de suite

L'énoncé

a. La suite (u_n) est géométrique de raison positive q telle que : $\left| \begin{array}{l} u_3 = 972 \\ u_8 = 128 \end{array} \right.$

1. Déterminer la valeur exacte de la raison q qui est un rationnel non décimal.
2. Calculer u_0 et exprimer le terme u_n en fonction de l'entier naturel n.
3. Donner une valeur approchée au centième près de la somme

$$S = \underbrace{u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{17} + u_{18}}_{\text{Somme de tous les termes de la suite } (u_n) \text{ entre les rangs 3 et 18.}}$$

b. La suite (v_n) est définie par : $\left| \begin{array}{l} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 3 \times v_n - (v_n)^2 - 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{array} \right.$

1. Calculer la valeur exacte du terme v_2. On détaillera les calculs.
2. Dresser le tableau de signe de la fonction $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ qui est définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
3. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

c. La suite (w_n) est définie par : $\left| \begin{array}{l} w_0 = 1 \qquad w_1 = 7 \\ w_{n+2} = 8 \times w_{n+1} - 7 \times w_n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{array} \right.$

1. Calculer le terme w_3.
2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que $w_n = 7^n$.

d. La suite (t_n) est arithmétique de raison r telle que : $\left| \begin{array}{l} t_6 = -12 \\ t_{39} = 10 \end{array} \right.$

1. Déterminer la valeur exacte de la raison r.
2. Exprimer le terme t_n en fonction de l'entier naturel n.
3. Calculer la valeur exacte de la somme $T = \underbrace{t_6 + t_7 + t_8 + \ldots + t_{38} + t_{39}}_{\text{Somme de tous les termes de la suite } (t_n) \text{ entre les rangs 6 et 39.}}$

e. Déterminer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

1. La suite (a_n) arithmétique de raison -3.
2. La suite (b_n) géométrique de raison -3.
3. La suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$c_n = \left(\frac{2}{n^3} - n\right) \times \left(0,2^n - 1\right)$$
4. La suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$d_n = n^3 - 2n^2 - 3n - 4$$
5. La suite (e_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$e_n = \frac{3^n - 5^n}{5^n + 4^n - 1}$$
6. La suite (f_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$f_n = (-0,4)^n \times \left(1 - 3 \times (-2,5)^n\right)$$

Le corrigé

a.1. La raison q de la suite géométrique (u_n) vérifie l'égalité :

$$u_8 = u_3 \times q^{8-3} \iff q^5 = \frac{u_8}{u_5} = \frac{128}{972} = \frac{32}{243} \iff q = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

a.2. Le premier terme nous est donné par :

$$u_0 = u_3 \times q^{0-3} = 972 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = 972 \times \frac{3^3}{2^3} = 972 \times \frac{27}{8} = \boxed{3280,5 = \frac{6561}{2}}$$

Nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_n = u_0 \times q^n = \boxed{\frac{6561}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

a.3. La somme S demandée est donnée par la formule :

$$S = \underbrace{u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{17} + u_{18}}_{\substack{\text{Somme de 16 termes consécutifs} \\ \text{de la suite géométrique } (u_n) \text{ de raison } q = \frac{2}{3}.}} = u_3 \times \frac{1 - q^{16}}{1 - q} = 972 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{16}}{1 - \frac{2}{3}} \approx \boxed{2911,56}$$

b.1. La suite (v_n) étant définie par récurrence, le calcul du troisième terme v_2 requiert d'abord celui de v_1.

$$\begin{cases} v_1 = v_{0+1} = 3\times v_0 - (v_0)^2 - 2 = 3\times 2 - 2^2 - 2 = 6-4-2 = \underline{0} \\ v_2 = v_{1+1} = 3\times v_1 - (v_1)^2 - 2 = 3\times 0 - 0^2 - 2 = \underline{-2} \end{cases}$$

b.2. Le signe de la forme du second degré $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ va nous être donné par son discriminant :

$$\Delta_{f(x)} = 2^2 - 4\times(-1)\times(-2) = 4 - 8 = \underline{-4}$$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $f(x)$ est toujours du signe de son coefficient dominant -1, donc toujours négatif sur ℝ.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$

➲ Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$v_{n+1} - v_n = 3\times v_n - (v_n)^2 - 2 - v_n = -(v_n)^2 + v_n - 2 = \underline{f(v_n)}$$

D'après ce qui précède, la quantité $f(v_n)$ est toujours strictement négative. Par suite :

$$v_{n+1} - v_n < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v_{n+1} < v_n}$$

Conclusion : la suite (v_n) est strictement décroissante.

c.1. Le calcul du terme w_3 nécessite la détermination du terme précédent w_2.

$$\begin{cases} w_2 = w_{0+2} = 8\times w_{0+1} - 7\times w_0 = 8\times w_1 - 7\times w_0 = 8\times 7 - 7\times 1 = 56 - 7 = \underline{49} \\ w_3 = w_{1+2} = 8\times w_{1+1} - 7\times w_1 = 8\times w_2 - 7\times w_1 = 8\times 49 - 7\times 7 = 56 - 7 = \underline{343} \end{cases}$$

c.2. Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété : $P_n \quad : \quad w_n = 7^n$

- Initialisation : au premier rang, pour $n = 0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

  Comme $w_0 = 1 = 7^0$, alors la propriété P_0 est vraie.

  Le premier domino tombe.

- Hérédité ou principe de récurrence

  Supposons la propriété P_k vraie entre le rang 0 et un certain rang $n+1$.

  La propriété P_{n+2} est-elle alors vraie ? Voyons ce qu'il en est pour...

$$w_{n+2} = \overbrace{8\times w_{n+1} - 7\times w_n}^{\text{Les propriétés } P_n \text{ et } P_{n+1} \text{ sont supposées vraies}} = 8\times 7^{n+1} - 7\times 7^n$$

$$= 8\times \boxed{7^{n+1}} - \boxed{7^{n+1}} = (8-1)\times \boxed{7^{n+1}} = 7\times 7^{n+1} = \underline{7^{n+2}}$$

Donc la propriété P_{n+2} est alors vraie.

Le principe de récurrence est établi; si les premiers dominos jusqu'au numéro $n+1$ tombent, alors le suivant, celui portant le numéro $n+2$, tombera aussi.

Conclusion : pour tout entier naturel n. nous avons $w_n = 7^n$.

d.1. La raison r de la suite (t_n) vérifie l'égalité :

$$t_{39} = t_6 + (39-6)\times r \quad \Leftrightarrow \quad 10 = -12 + 33\times r \quad \Leftrightarrow \quad 33\times r = 22 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{22}{33} = \underline{\frac{2}{3}}$$

d.2. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$t_n = t_6 + (n-6)\times r = -12 + (n-6)\times\frac{2}{3} = -12 + \frac{2}{3}n - 4 = \underline{\frac{2}{3}n - 16}$$

d.3. La somme T demandée est donnée par la formule :

$$T = \underbrace{t_6 + t_7 + t_8 + \ldots + t_{38} + t_{39}}_{\substack{\text{Somme de 34 termes consécutifs} \\ \text{de la suite arithmétique } (t_n).}} = 34\times\frac{t_6 + t_{39}}{2} = 34\times\frac{-12+10}{2} = \underline{-34}$$

e.1. Une expression en fonction de n de la suite (a_n) arithmétique de raison -3 est :

$$a_n = \underbrace{a_0}_{\substack{\text{Peu importe la valeur} \\ \text{du premier terme } a_0}} + n\times r = a_0 - 3n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_0 - 3\times(+\infty) = \underline{-\infty}$$

e.2. Une expression en fonction de n de la suite (b_n) géométrique de raison -3 est :

$$b_n = b_0\times(-3)^n$$

A partir de là, la suite (b_n) est constituée de deux sous-suites qui vont avoir deux sous-limites distinctes :

- La sous-suite des termes de rang pair :

$$b_n = b_0\times\underbrace{(-1)^n}_{\substack{=1 \\ \text{car } n \text{ pair}}}\times 3^n = b_0\times 3^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} b_0\times(+\infty) = \underline{+\infty} & \text{si } b_0>0 \\ b_0\times(+\infty) = \underline{-\infty} & \text{si } b_0<0 \end{cases}$$

- La sous-suite des termes de rang impair :

$$b_n = b_0 \times \underbrace{(-1)^n}_{\substack{=-1 \\ \text{car } n \text{ impair}}} \times 3^n = -b_0 \times 3^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} -b_0 \times (+\infty) = \boxed{-\infty} & \text{si } b_0 > 0 \\ -b_0 \times (+\infty) = \boxed{+\infty} & \text{si } b_0 < 0 \end{cases}$$

Conclusion : la suite (b_n) n'a pas de limite (unique)..

e.3. La limite de la suite (c_n) ne pose guère de difficultés :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{n^3} - n\right) \times \left(0,2^n - 1\right) = \left(\frac{2}{+\infty} - (+\infty)\right) \times \left(0^+ - 1\right) = \left(0^+ - \infty\right) \times (-1) = \boxed{+\infty}$$

e.4. De prime abord, la suite (d_n) est une forme indéterminée ! En effet :

$$d_n = n^3 - 2n^2 - 3n - 4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{(+\infty) - (+\infty) - (+\infty)}_{\text{FORME INDÉTERMINÉE}} - 4$$

Pour lever l'indétermination, nous allons factoriser la somme d_n par son terme nous paraissant le plus fort : n^3.

$$d_n = n^3 \times \left(1 - 2 \times \frac{n^2}{n^3} - 3 \times \frac{n}{n^3} - \frac{4}{n^3}\right)$$

$$= n^3 \times \left(1 - \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (+\infty) \times \left(1 - 0^+ - 0^+ - 0^+\right) = \boxed{+\infty}$$

e.5. La suite (e_n) est aussi une forme indéterminée sous l'écriture qui nous est donnée par l'énoncé.

$$\lim_{n\to+\infty} e_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n - 5^n}{5^n + 4^n - 1} = \frac{(+\infty) - (+\infty)}{(+\infty) + (+\infty) - 1} = \boxed{\frac{\text{FORME INDÉTERMINÉE}}{+\infty}}$$

Pour lever l'indétermination, nous allons factoriser numérateur et dénominateur de la fraction par leurs termes dominants respectifs :

$$e_n = \frac{\cancel{5^n} \times \left(\frac{3^n}{5^n} - 1\right)}{\cancel{5^n} \times \left(1 + \frac{4^n}{5^n} - \frac{1}{5^n}\right)} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{1}{5^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{0^+ - 1}{1 + 0^+ - \frac{1}{+\infty}} = \frac{-1}{1 - 0^+} = \boxed{-1}$$

e.6. De prime abord :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = 0 \times \left(1 - 3 \times \text{PAS DE LIMITE}\right) = \text{FAUT VOIR AUTREMENT !}$$

Développons f_n !

$$f_n = (-0,4)^n \times \left(1 - 3 \times (-2,5)^n\right) = (-0,4)^n - 3 \times \left[-0,4 \times 2,5\right]^n$$

$$= (-0,4)^n - 3 \times 1^n = (-0,4)^n - 3 \times 1 = (-0,4)^n - 3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 - 3 = \boxed{-3}$$

Une suite slalomeuse

L'énoncé

La suite (v_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = 5 - \frac{4}{11} \times v_n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

a. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$P_n \quad : \quad 2 \leq v_n \leq 7$$

b. Sur le graphique ci-contre, construire sur l'axe des abscisses $(\mathrm{O}x)$ à la seule règle et sans calculs les quatre premiers termes $v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3$ de la suite (v_n).

Quel semble être le sens de variation de la suite (v_n) ?

c. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

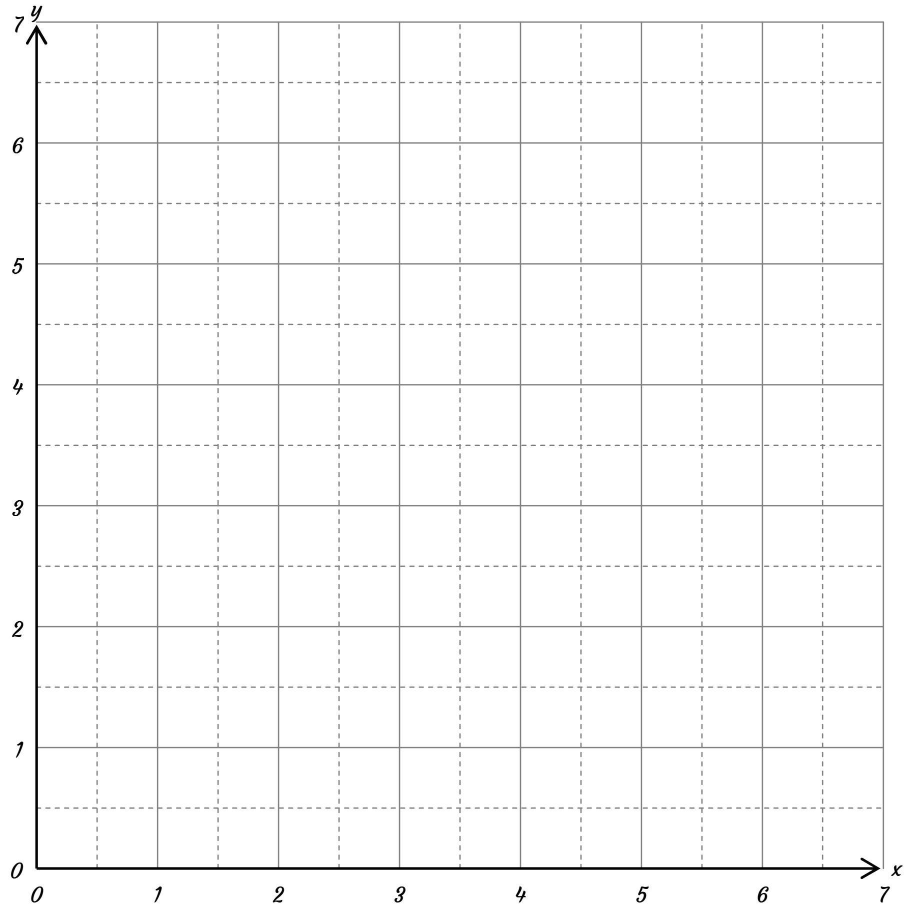
$$a_n = v_n - \frac{11}{3}$$

1. Calculer le terme a_0.
2. Démontrer que la suite (a_n) est géométrique de raison $-\frac{4}{11}$.
3. En déduire l'expression du terme v_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (v_n).

d. On considère l'algorithme suivant :

L'entier n vaut 0 et le réel v est égal à 7
Tant que (v < 3,666) ou (v > 3,667)
        n prend la valeur n+1
        v prend la valeur $5 - \frac{4}{11} \times$ v
Afficher la valeur de n

Quelle est la valeur de n affichée à l'issue de son exécution ?



Le corrigé

a. Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$P_n \quad : \quad 2 \leq v_n \leq 7.$$

- Initialisation : au premier rang, pour $n = 0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

  Comme $v_0 = 7 \in [2;7]$, alors la propriété P_0 est vraie.

  Le premier domino tombe.

- Hérédité ou principe de récurrence

  Supposons que la propriété P_k soit vraie entre les rangs 0 et n.

  La propriété P_{n+1} est-elle alors vraie ?

  Comme la propriété P_n est (supposée) vraie, alors nous pouvons écrire :

$$2 \le v_n \le 7 \xrightarrow{\times\left(-\frac{4}{11}\right)} -\frac{8}{11} \ge -\frac{4}{11}v_n \ge -\frac{28}{11}$$

$$\xrightarrow{+5} \quad 5-\frac{8}{11} \ge \underbrace{5-\frac{4}{11}\times v_n}_{v_{n+1}} \ge 5-\frac{28}{11} \quad \Rightarrow \quad \frac{47}{11} \ge v_{n+1} \ge \frac{27}{11}$$

Or, $\frac{47}{11}$ est inférieur à 7 et $\frac{27}{11}$ est supérieur à 2. Par conséquent :

$$2 \le v_{n+1} \le 7 \quad \Leftrightarrow \quad \text{La propriété } P_{n+1} \text{ est alors vraie.}$$

Le principe de récurrence est établi.
Si les premiers dominos jusqu'au numéro n tombent, alors le suivant, celui portant le numéro $n+1$, tombera aussi.

Conclusion : tous les termes de la suite (v_n) sont compris entre 2 et 7.

b. On passe d'un terme de la suite au suivant en appliquant la fonction $f(x)=5-\frac{4}{11}x$.

$$v_0 \xrightarrow{f} v_1 = f(v_0) \xrightarrow{f} v_2 \quad \ldots \quad v_n \xrightarrow{f} v_{n+1} = 5-\frac{4}{11}v_n = f(v_n) \quad \ldots$$

Avant d'entamer la construction, on trace deux droites : la première est la courbe (C) représentant la fonction affine f; la seconde est la première bissectrice du plan dont l'équation réduite est $y=x$.

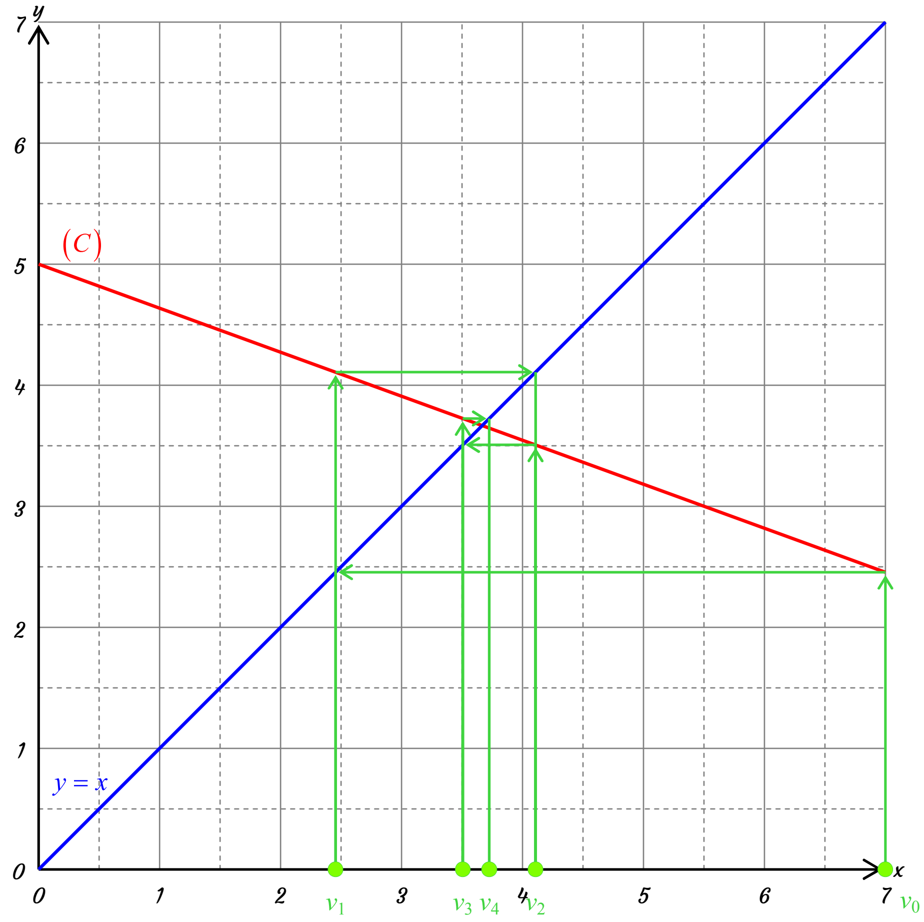
On place v_0 sur l'axe des abscisses. Se projetant verticalement sur la courbe (C), le point rencontré a pour coordonnées $(v_0\ ;\ v_1=f(v_0))$. On ramène cette ordonnée v_1 sur l'axe des abscisses en se projetant horizontalement sur la première bissectrice du plan. On aboutit alors au point de coordonnées $(v_1\ ;\ v_1)$.

Pour obtenir v_2, on reproduit la construction à repartant de v_1.

➲ Vu la construction venant d'être effectuée, on comprend que la suite n'est ni croissante, ni décroissante. En fait, ses termes de rangs pairs sont au-dessus de $\frac{11}{3}$ et ceux de rangs impairs au-dessous. Le plus simple est de calculer les premiers termes de la suite :

$$u_0 = 7 \qquad u_1 = \frac{27}{11} \approx 2,455 \qquad u_2 = \frac{497}{121} \approx 3,725 \qquad u_3 = \frac{4667}{1331} \approx 3,506 \quad \ldots$$

Tantôt ça descend et le coup d'après ça remonte...



c.1. Calculons le premier terme de la suite annexe (a_n) dont le rôle est de déterminer l'expression de la suite (v_n) en fonction de l'entier naturel n :

$$a_0 = v_0 - \frac{11}{3} = \frac{21}{3} - \frac{11}{3} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

c.2. Avant d'aller plus loin, remarquons que : $a_n = v_n - \frac{11}{3} \Leftrightarrow v_n = a_n + \frac{11}{3}$

Ensuite, pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$a_{n+1} = v_{n+1} - \frac{11}{3}$$

$$= \overbrace{5 - \frac{4}{11} \times v_n}^{v_{n+1}} - \frac{11}{3} = \frac{15}{3} - \frac{4}{11} \times u_n - \frac{11}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{11} \times v_n$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{11} \times \overbrace{\left(a_n + \frac{11}{3}\right)}^{v_n} = \frac{4}{3} - \frac{4}{11} \times a_n - \frac{4}{\cancel{11}} \times \frac{\cancel{11}}{3} = \frac{\cancel{4}}{3} - \frac{4}{11} \times a_n - \frac{\cancel{4}}{3} = \boxed{-\frac{4}{11} \times a_n}$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q = -\frac{4}{11}$ et de premier terme $a_0 = \frac{10}{3}$.

c.3. Par conséquent, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_n = a_0 \times q^n = \boxed{\frac{10}{3} \times \left(-\frac{4}{11}\right)^n}$$

Et par suite :

$$v_n = a_n + \frac{11}{3} = \boxed{\frac{10}{3} \times \left(-\frac{4}{11}\right)^n + \frac{11}{3}}$$

c.4. Connaissant l'expression de la suite (v_n) en fonction de n, la limite s'obtient rapidement.

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{10}{3} \times \underbrace{\boxed{\left(-\frac{4}{11}\right)^n}}_{q \in]-1;0[} + \frac{11}{3} = \frac{10}{3} \times \boxed{0} + \frac{11}{3} = 0 + \frac{11}{3} = \boxed{\frac{11}{3}}$$

d. L'algorithme proposé calcule successivement tous les termes de la suite (v_n) tant qu'ils ne sont pas dans l'intervalle $[3{,}666 \ ; \ 3{,}667]$.

En calculant à la calculatrice les premiers termes de cette suite, on détermine que le premier à être dans cet intervalle est $u_9 \approx 3{,}6663\ldots$

Donc la valeur de n retournée par le programme est 9.

Suites (inspired by the bac)

L'énoncé

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{7 \times u_n - 4}{u_n + 3} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

a. La fonction f est définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{7x - 4}{x + 3}$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de la fonction f à droite de -3, puis en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-3;+\infty[$.

b. Sur le graphique ci-après, on a tracé la courbe (C_f) représentant la fonction f définie lors de la question **a**. Construire sur l'axe des abscisses (Ox) à la seule règle et sans calculs les quatre premiers termes $u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3$ de la suite (u_n).

c. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$P_n \quad : \quad 2 < u_{n+1} < u_n$$

Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?

d. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$a_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

5. Calculer le terme a_0.
6. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5}$$

En déduire la nature de la suite (a_n), puis l'expression du terme a_n en fonction de l'entier naturel n.

7. Etablir que, pour tout entier naturel n, on a :

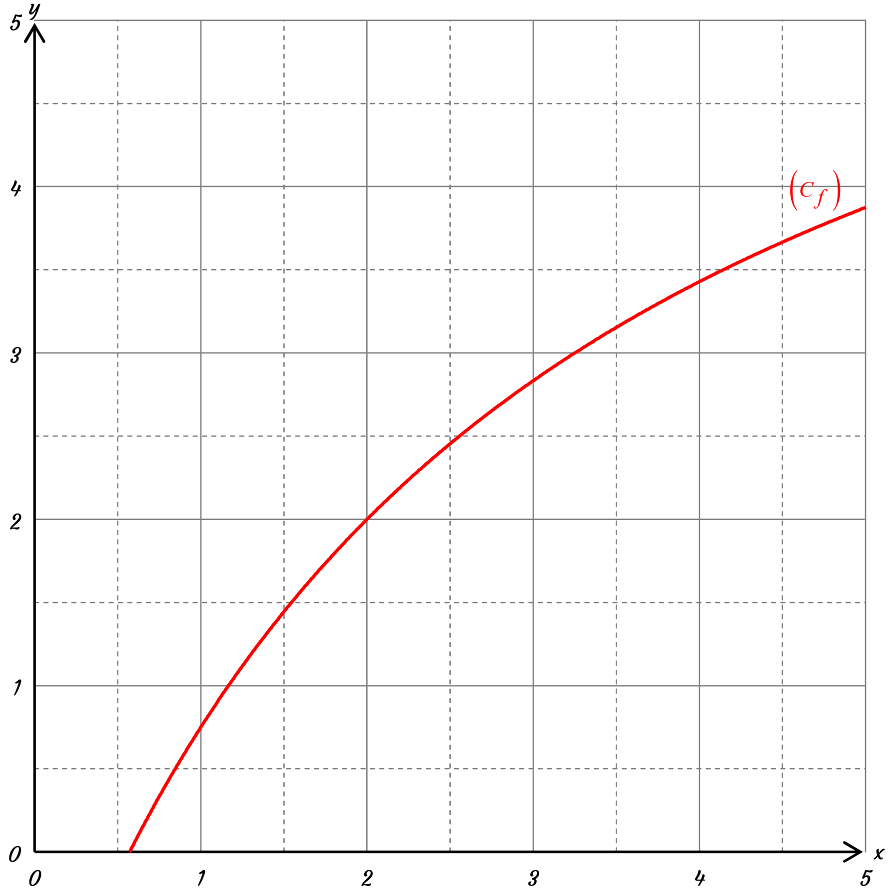
$$u_n = \frac{4n + 20}{2n + 5}$$

En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

e. On considère l'algorithme suivant :

```
L'entier n vaut 0 et le réel u est égal à 4
Tant que u>2,1
        n prend la valeur n+1
        u prend la valeur (7×u-4)/(u+3)
Afficher la valeur de n
```

Quelle est la valeur de n affichée à son issue ?



Le corrigé

a.1. Déterminons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -3 par la droite.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $x+3$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{7x-4}{x+3} = \frac{7\times(-3)-4}{0^+} = \frac{-25}{0^+} = -\infty$$

♥ Sous son écriture initiale, $f(x)$ est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Pour lever cette incertitude, nous décidons de factoriser numérateur et dénominateur de cette fonction par leurs termes les plus forts : x.

$$f(x) = \frac{7x-4}{x+3} = \frac{\cancel{x}\times\left(7-\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\times\left(1+\frac{3}{x}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{7-0^+}{1+0^+} = \frac{7}{1} = 7$$

a.2. La fonction f est un quotient $\frac{u}{v}$ où $\begin{cases} u(x) = 7x-4 \\ u'(x) = 7 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = x+3 \\ v'(x) = 1 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \\ \text{et non nulle sur } \mathbb{R}\setminus\{-3\} \end{cases}$

Donc la fonction f est bien dérivable sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ et, pour tout réel x de cet ensemble, nous avons :

$$f'(x) = \frac{u'\times v - v'\times u}{v^2} = \frac{7\times(x+3)-1\times(7x-4)}{(x+3)^2} = \frac{7x+21-7x+4}{(x+3)^2} = \frac{25}{(x+3)^2}$$

Encore une fois, c'est le signe de la dérivée qui donne les variations de la fonction.

x	-3 $+\infty$
25	$+$
$(x+3)^2$	$+$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variation de f	$-\infty$ ↗ 7

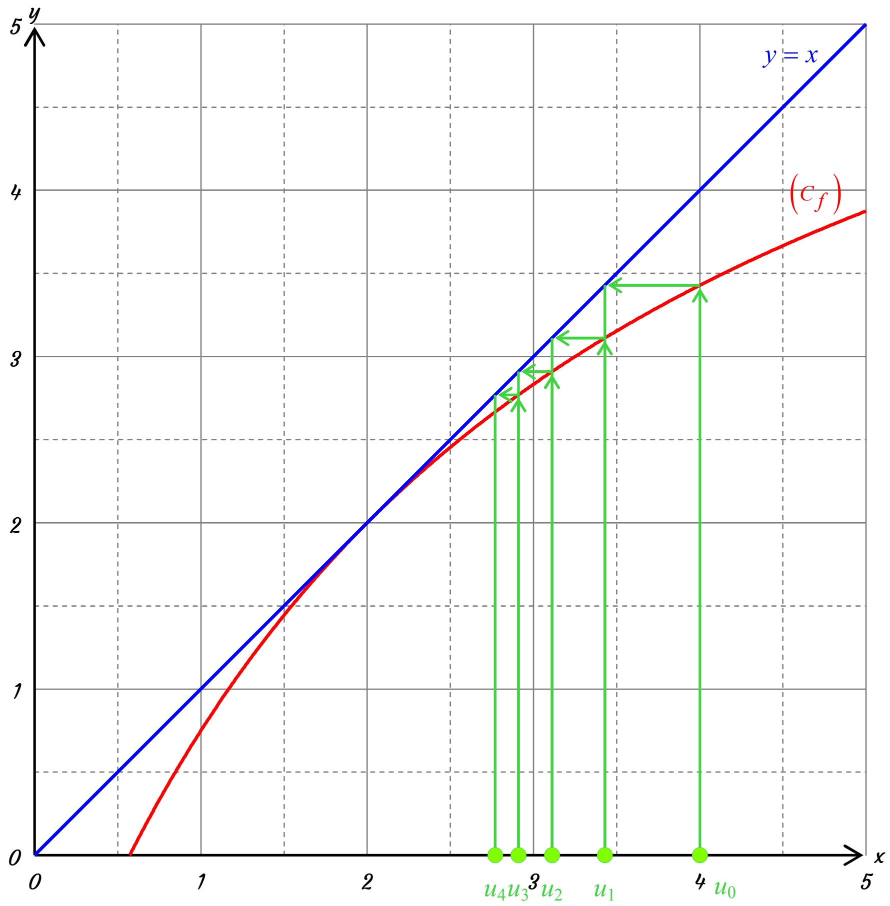
b. On passe d'un terme de la suite au suivant en appliquant la fonction $f(x)=\dfrac{7x-4}{x+3}$.

$$u_0 \xrightarrow{f} u_1=f(u_0) \xrightarrow{f} u_2=f(u_1) \quad \ldots \quad u_n \xrightarrow{f} u_{n+1}=f(v_n) \quad \ldots$$

La courbe représentant la fonction ayant été tracée, il ne reste plus qu'à tracer la droite d'équation $y=x$ qui est la première bissectrice du plan.

On place $u_0=4$ sur l'axe des abscisses. Se projetant verticalement sur la courbe (C_f), le point rencontré a pour coordonnées $(u_0\ ;\ u_1=f(u_0))$. On ramène cette ordonnée u_1 sur l'axe des abscisses en se projetant horizontalement sur la première bissectrice du plan. On aboutit alors au point de coordonnées $(u_1\ ;\ u_1)$. En poursuivant verticalement notre route, on aboutit au point de coordonnées $(u_1;0)$ de l'axe des abscisses.

Pour obtenir u_2, puis u_3, on recommence la construction.



c. Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$P_n \quad : \quad 2 \leq u_{n+1} < u_n\ .$$

- Initialisation : au premier rang, pour $n=0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

  Connaissant u_0, calculons le terme $u_1=\dfrac{7\times u_0-4}{u_0+3}=\dfrac{28-4}{4+3}=\dfrac{24}{7}$

  Comme $0<u_1<u_0$, alors la propriété est vraie au rang $n=0$.
  Le premier domino tombe

- Hérédité ou principe de récurrence

  Supposons que la propriété P_k soit vraie entre le rangs 0 et un certain entier n.
  La propriété P_{n+1} est-elle alors vraie ?
  Comme la propriété P_n est (supposée) vraie, alors nous pouvons écrire :

  $$2<u_{n+1}<u_n \xrightarrow[f \text{ conserve l'ordre}]{f \text{ est croissante sur }]-3;+\infty[} f(2)<\underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}}<\underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}}$$

  Or, vu que $f(2)=\dfrac{7\times 2-4}{2+3}=\dfrac{14-4}{5}=\dfrac{10}{5}=2$, alors nous avons bien :

  $2<u_{n+2}<u_{n+1}$ La propriété est vraie au rang $n+1$

  Le principe de récurrence est établi.
  Si les premiers dominos jusqu'au numéro n tombent, alors le suivant, celui portant le numéro $n+1$, tombera aussi.

Conclusion : Comme, pour tout entier naturel n, nous avons $2\leq u_{n+1}<u_n$, alors la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2. Donc elle est convergente : elle a une limite finie.

d.1. Calculons $a_0=\dfrac{1}{u_0-2}=\dfrac{1}{4-2}=\dfrac{1}{2}=0,5$

d.2. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire que, partant du membre de gauche :

$$a_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-2}=\frac{1}{\dfrac{7u_n-4}{u_n+3}-2}=\frac{1}{\dfrac{7u_n-4-2\times(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{u_n+3}{7u_n-4-2u_n-6}=\frac{u_n+3}{5u_n-10}$$

Puis, repartant du membre de droite :

$$a_n+\frac{1}{5}=\frac{1}{u_n-2}+\frac{1}{5}=\frac{1\times 5+1\times(u_n-2)}{5\times(u_n-2)}=\frac{5+u_n-2}{5u_n-10}=\frac{u_n+3}{5u_n-10}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, nous venons d'établir que :

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{5}$$

Donc, la suite (a_n) est arithmétique de raison $r = 0,2$ et de premier terme $a_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_n = a_0 + n \times r = \boxed{0,5 + 0,2 \times n}$$

d.3. D'abord, exprimons u_n en fonction de a_n. Nous savons que :

$$a_n = \frac{1}{u_n - 2} \Leftrightarrow a_n \times (u_n - 2) = 1 \Leftrightarrow a_n \times u_n - 2a_n = 1 \Leftrightarrow a_n \times u_n = 1 + 2a_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1+2a_n}{a_n} = \frac{1+2\times(0,5+0,2n)}{0,5+0,2n}$$

$$= \frac{2+0,4n}{0,5+0,2n} = \frac{10\times(2+0,4n)}{10\times(0,5+0,2n)} = \boxed{\frac{20+4n}{5+2n}}$$

♥ Lorsque n tend vers $+\infty$, u_n est une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{+\infty}$ que nous allons lever avec la recette habituelle.

$$u_n = \frac{20+4n}{5+2n} = \frac{\frac{20}{n}+4}{\frac{5}{n}+2} \times \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} = \frac{\frac{20}{n}+4}{\frac{5}{n}+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{0^+ + 4}{0^+ + 2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

e. L'algorithme calcule les premiers termes de la suite (u_n) tant qu'ils sont supérieurs à 2,1.
Au premier terme inférieur ou égal à cette valeur, la boucle s'arrête et l'algorithme retourne le rang n de ce premier terme.
Avec un tableau de valeurs de suite (u_n) fait avec la machine, on détermine que le premier terme inférieur ou égal à 2,1 est $u_{48} \approx \boxed{2,09900}$

L'algorithme retourne la valeur $n = \boxed{48}$.

Deux histoires de suites

L'énoncé

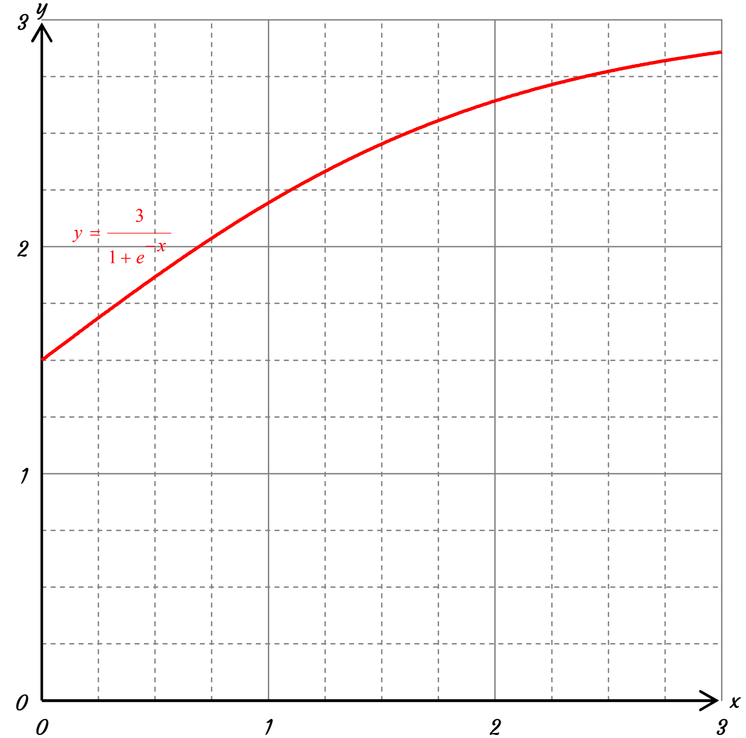
a. On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{1+e^{-u_n}} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Sur le graphique ci-dessous, construire sur l'axe des abscisses (Ox) à la seule règle et sans calculs les quatre premiers termes u_0 u_1 u_2 u_3 de la suite.

2. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 3$

3. Démontrer que la suite (u_n) admet une limite finie.



b. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{1-5^n}{\cos(n)+3^n}$

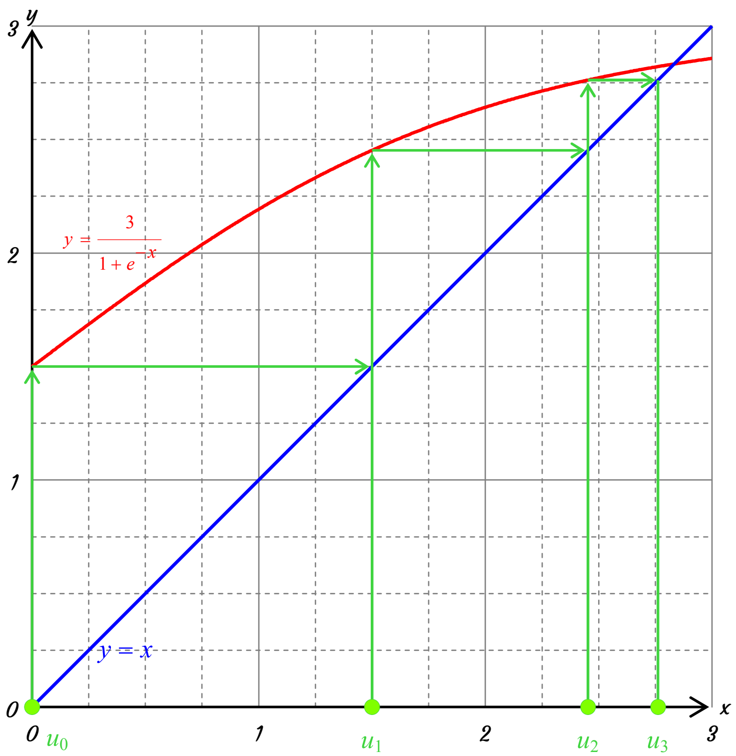
1. Démontrer que, pour tout entier positif n, on a : $v_n \leq \dfrac{1-5^n}{3^n+1}$

2. En déduire la limite de la suite (v_n).

Le corrigé

a.1. Ayant tracé la première bissectrice du plan, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$, on commence la construction en partant du point d'abscisse $u_0 = 0$ de l'axe (Ox).

Le point de la courbe d'abscisse u_0 a pour ordonnée $u_1 = \dfrac{3}{1+e^{-u_0}}$. En utilisant la droite tracée, on ramène cette dernière ordonnée sur l'axe des abscisses. Pour obtenir les termes suivants, on réitère le processus.



a.2. Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété : $0 \leq u_n < u_{n+1} < 3$.

- Initialisation : au premier rang, pour $n = 0$, la propriété est-elle vraie ?

  Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{3}{1+e^{-u_0}} = \dfrac{3}{1+e^0} = \dfrac{3}{1+1} = 1,5$, alors $0 \leq u_0 < u_1 < 3$.

  Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$. Le premier domino tombe.

- Hérédité ou principe de récurrence

  Supposons que la propriété soit vraie entre les rangs 0 et n.

  La propriété est-elle alors vraie au rang suivant $n+1$?

  Comme la propriété est (supposée) vraie au rang n, alors nous pouvons écrire :

$$0 \leq u_n < u_{n+1} < 3 \xrightarrow{\times(-1)} 0 \geq -u_n > -u_{n+1} > -3$$

$$\xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{\text{Exponentielle}} 1 \geq e^{-u_n} > e^{-u_{n+1}} > e^{-3}$$

$$\xrightarrow{+1} 2 \geq 1+e^{-u_n} > 1+e^{-u_{n+1}} > 1+e^{-3}$$

$$\xrightarrow[\text{Décroissante sur }]0;+\infty[]{\text{Inverse}} \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{-u_n}} < \frac{1}{1+e^{-u_{n+1}}} < \frac{1}{1+e^{-3}}$$

$$\xrightarrow{\times 3} \frac{3}{2} \leq \underbrace{\frac{3}{1+e^{-u_n}}}_{u_{n+1}} < \underbrace{\frac{3}{1+e^{-u_{n+1}}}}_{u_{n+2}} < \frac{3}{1+e^{-3}}$$

  Or, comme $1+e^{\cdots}$ est toujours supérieur à 1, alors $\dfrac{3}{1+e^{-3}}$ est inférieur à 3.

  Par conséquent, nous avons bien : $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 3$.

  La propriété est vraie au rang $n+1$. Le principe de récurrence est établi.

a.3. D'après ce qui précède :

Pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$ $\Rightarrow$ (u_n) est croissante.
Pour tout entier naturel n, $u_n < 3$ $\Rightarrow$ (u_n) est majorée par 3.

La suite (u_n) étant croissante et majorée, elle converge, c'est-à-dire qu'elle a une limite finie.

b.1. Pour tout entier positif n, nous pouvons écrire :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \xrightarrow{+3^n} 3^n - 1 \leq \cos(n) + 3^n \leq 3^n + 1$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{Décroissante} \\ \text{sur }]0;+\infty[}]{\text{Inverse}} \frac{1}{3^n - 1} \geq \frac{1}{\cos(n) + 3^n} \geq \frac{1}{3^n + 1}$$

$$\xrightarrow[\text{qui est négatif}]{\times\left(1-5^n\right)} \frac{1-5^n}{3^n - 1} \leq \underbrace{\frac{1-5^n}{\cos(n) + 3^n}}_{v_n} \leq \frac{1-5^n}{3^n + 1}$$

b.2. Déterminons la limite de la suite constituant le membre de droite.

$$\overbrace{\frac{1-5^n}{3^n+1} = \frac{5^n}{3^n} \times \frac{\frac{1}{5^n} - 1}{1 + \frac{1}{3^n}}}^{\text{On agit pour éviter une forme indéterminée } \frac{\infty}{\infty}} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{\frac{1}{5^n} - 1}{1 + \frac{1}{3^n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} (+\infty) \times \frac{\frac{1}{+\infty} - 1}{1 + \frac{1}{+\infty}} = (+\infty) \times \frac{0^+ - 1}{1 + 0^+} = \boxed{-\infty}$$

Majorée par une suite plongeant vers $-\infty$, la suite (v_n) ne peut prendre que cette limite.

Table des matières

Le mot de l'auteur

Une longue année de turbulences se termine enfin ! Elle débuta aux vacances de Toussaint 2018, où, suite à une vidéo montrant un élève braquant une collègue, le mouvement «pas de vagues» mit en lumière tous ces profs qui étaient agressés par des élèves ou leurs parents et, qui étaient lâchés par leurs administrations. En clair : «tes élèves, c'est ton problème ! Et surtout les cas dont personne ne veut ! Si tu es dans la m..., compte sur nous pour regarder ailleurs ou pour t'enfoncer un peu plus». Le Ministre promit que, désormais, ce genre d'attitude honteuse n'aurait plus lieu. Bien sûr...

Puis, dans la continuité du mouvement des «gilets jaunes», pour contester le dieu capricieux *Parcoursup* et la réforme du bac qui est un grand n'importe quoi, les syndicats d'élèves soutenus par certains enseignants lancèrent des appels au blocage des lycées. Lorsque cela vous arrive, n'essayez surtout pas de faire cours car l'administration vous le reprochera de peur que les parents des gentils bloqueurs viennent se plaindre. Car il existe deux sortes d'élèves : ceux qui se permettent tout et à qui on ne dit rien et...les autres qui sont priés de se taire. On vous l'a dit et répété : pas de vagues !

Et puis, en fin d'année, des syndicats de profs appelèrent à boycotter les surveillances de bac ou même la correction. Comment ces mêmes personnes pourront-elles dire ensuite à leurs élèves que travailler à l'école est important ? Même si le bac est devenu une petite farce, il a au moins le mérite d'exister. Reste à savoir pour combien de temps encore...

Nous vivons une époque que j'ai bien du mal à comprendre. Je ne suis même pas sûr de vouloir faire cet effort. Dans une telle adversité, la seule attitude raisonnable est de se taire et d'attendre que les vacances arrivent. Le plus dur sera de revenir à la rentrée.

Jérôme ONILLON