Algèbre, équations et inéquations

La grande parade des inégalités

L'énoncé

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et les inéquations suivantes :

1. $5x^2+x+1=2x^2+5x-2$ **2.** $\left(2x^2-7x+3\right)\times\left(x-x^2+1\right)\leq 0$

3. $\dfrac{56}{7-x}\leq 2x+9$ **4.** $\dfrac{5}{x+3}\geq 1+\dfrac{1}{x-2}$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\left|x^2+1\right|=3$ **2.** $\left|3x^2+x\right|=\left|3x^2-x-6\right|$

3. $\left|7-5x\right|<9$ **4.** $\left|2-x^2\right|\geq -1$

Le corrigé

a.1. Pour résoudre la première équation $5x^2+x+1=2x^2+5x-2 \iff 3x^2-4x+3=0$, nous allons calculer son discriminant :

$$\Delta=(-4)^2-4\times 3\times 3=16-36=-20$$

Comme son discriminant est négatif, alors cette équation du second degré n'admet pas de solution. Ce que l'on résume par :

$$S=\varnothing$$

a.2. Résoudre l'équation $\left(2x^2-7x+3\right)\times\left(x-x^2+1\right)\leq 0$, c'est trouver quand le produit constituant le membre de gauche est négatif ou nul.

Examinons les signes deux facteurs du second degré composant le produit du membre de gauche.

✧ Signe de $f_1(x)=2x^2-7x+3$.

C'est une forme du second degré, calculons son discriminant :

$$\Delta_{f_1(x)}=(-7)^2-4\times 2\times 3=49-24=25=5^2$$

Son discriminant étant positif, la forme du second degré $f_1(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-(-7)-5}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0,5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-7)+5}{2\times 2}=\frac{12}{4}=3$$

Comme son coefficient dominant 2 est positif, $f_1(x)$ est positif à l'extérieur de ses racines et négatif sur l'intervalle $\left]0,5;3\right[$.

✧ Signe de $f_2(x)=-x^2+x+1$.

C'est encore une forme du second degré dont nous calculons le discriminant :

$$\Delta_{f_2(x)}=1^2-4\times(-1)\times 1=1+4=5=\left(\sqrt{5}\right)^2$$

Son discriminant étant positif, $f_2(x)$ a aussi deux racines :

$$x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{-1-\sqrt{5}}{-2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_4=\frac{-1+\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Son coefficient dominant -1 étant négatif, la forme du second degré $f_2(x)$ est négative à l'extérieur des racines et positive entre.

Le tableau de signe du produit $f_1(x)\times f_2(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		3		$+\infty$
$f_1(x)$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	
$f_2(x)$		−	0	+	|	+	0	−	|	−	
Leur produit		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=\left]-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[3;+\infty\right[$$

a.3. Cette troisième inéquation va se résoudre en cherchant à se prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{56}{7-x}\leq 2x+9 \iff \frac{56}{7-x}-2x-9\leq 0$$

$$\iff \frac{56-2x\times(7-x)-9\times(7-x)}{7-x}\leq 0$$

$$\iff \frac{56-14x+2x^2-63+9x}{7-x}\leq 0 \iff \frac{\overbrace{2x^2-5x-7}^{N(x)}}{7-x}\leq 0$$

Pour connaître le signe du numérateur $N(x)=2x^2-5x-7$ qui est une brave forme du second degré, nous commençons par calculer son discriminant :

$$\Delta_{N(x)}=(-5)^2-4\times 2\times(-7)=25+56=81=(9)^2$$

Nous en déduisons que la forme du second degré $N(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-(-5)-9}{2\times 2}=\frac{-4}{4}=-1 \qquad \text{et} \qquad x_1=\frac{-(-5)+9}{2\times 2}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}=3,5$$

Nous en déduisons que le tableau de signe du quotient est :

x	$-\infty$		-1		$3,5$		7		$+\infty$
$N(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+7$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur quotient		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=[-1;3,5]\cup]7;+\infty[$$

a.4. Pour résoudre cette quatrième inéquation, nous allons encore faire en sorte d'avoir à nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{5}{x+3}\geq 1+\frac{1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{5}{x+3}-1-\frac{1}{x-2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\times(x-2)-1\times(x+3)\times(x-2)-1\times(x+3)}{(x+3)\times(x-2)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-10-x^2+2x-3x+6-x-3}{(x+3)\times(x-2)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\overbrace{-x^2+3x-7}^{N(x)}}{(x+3)\times(x-2)}\geq 0$$

Etudions le signe du numérateur $N(x)=-x^2+3x-7$. D'abord, son discriminant :

$$\Delta_{N(x)}=3^2-4\times(-1)\times(-7)=9-28=-19$$

Comme son discriminant est négatif, la forme du second degré $N(x)$ est toujours du même signe : négative comme son coefficient dominant -1.

Par conséquent, le tableau du quotient est :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$N(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur quotient		$-$	||	$+$	||	$-$	

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette quatrième inéquation est :

$$S=]-3;2[$$

b.1. Résolvons cette première équation faisant appel à la valeur absolue.

$$|x^2+1|=3 \Leftrightarrow x^2+1=-3 \quad \underline{\text{ou}} \quad x^2+1=3$$

$$x^2=-4 \qquad\qquad x^2=2$$

Pas possible !
Un carré n'est jamais négatif.

$$x=-\sqrt{2} \quad \underline{\text{ou}} \quad x=\sqrt{2}$$

<u>Conclusion :</u> cette équation a deux solutions qui sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

b.2. Résolvons la seconde équation proposée :

$$\overbrace{|3x^2+x|=|3x^2-x-6|}^{\text{Deux nombres ayant même valeur absolue...}} \Leftrightarrow \overbrace{3x^2+x=-(3x^2-x-6)}^{\text{...sont opposés...}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \overbrace{\cancel{3x^2}+x=\cancel{3x^2}-x-6}^{\text{...ou égaux.}}$$

$$3x^2+\cancel{x}=-3x^2+\cancel{x}+6 \qquad\qquad 2x=-6$$

$$6x^2=6 \qquad\qquad x=-3$$

$$x^2=1$$

$$x=-1 \quad \underline{\text{ou}} \quad x=1$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette seconde équation est :

$$S=\{-3;-1;1\}$$

b.3. Résolvons la troisième inéquation proposée :

$$|7-5x|<9 \Leftrightarrow -9<7-5x<9 \xrightarrow{-7} -16<-5x<2 \xrightarrow{\div(-5)} 3,2>x>-0,4$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=]-0,4;3,2[$$

b.4. La résolution de l'inéquation $\left|2-x^2\right| \geq -1$ requiert juste de savoir une chose : une valeur absolue est toujours positive ou nulle. Même celle du réel $2-x^2$!
Par conséquent, quelque soit le réel x considéré, la valeur absolue $\left|2-x^2\right|$ est toujours plus grande que -1. Tout réel est donc solution de l'inéquation. Ce que l'on résume par :

$$S = \mathbb{R}$$

Intermède absolu !

L'énoncé

Simplifier l'écriture du réel suivant :

$$A = \left|\sqrt{3}-\pi\right| + \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| + 4\times\left|\sqrt{36}-\sqrt{9}\right| - \left|\sqrt{2}-\pi\right|$$

On détaillera ses calculs.

Le corrigé

Pour mémoire, rappelons que la valeur absolue d'un réel a vaut $-a$ si a est négatif et a si a est positif. Cela étant dit :

$$\begin{aligned} A &= \overbrace{\left|\sqrt{3}-\pi\right|}^{\ominus} + \overbrace{\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|}^{\oplus} + 4\times\left|\sqrt{36}-\sqrt{9}\right| - \overbrace{\left|\sqrt{2}-\pi\right|}^{\ominus} \\ &= -\left(\sqrt{3}-\pi\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + 4\times\left|6-3\right| - \left[-\left(\sqrt{2}-\pi\right)\right] \\ &= \cancel{-\sqrt{3}} + \cancel{\pi} + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}} + 4\times 3 + \cancel{\sqrt{2}} - \cancel{\pi} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Scary équation XXXXXXX

L'énoncé

a. Résoudre dans ℝ l'équation $7x^4+13x^2=2$.

b. On appelle P le polynôme défini pour tout réel x par :

$$P(x)=3x^3+27x^2+46x+28$$

1. Pourquoi le polynôme $P(x)$ est-il factorisable par le facteur $x+7$?
2. Par la méthode de votre choix, déterminer trois coefficients entiers a, b et c tels que pour tout réel x, on ait :

$$P(x)=(x+7)\times\left(ax^2+bx+c\right)$$

c. Résoudre dans ℝ l'équation $\left(3x^3+27x^2+46x+28\right)\times\left(7x^4+13x^2-2\right)=0$

Le corrigé

a. Nous voilà en présence d'une équation bicarrée. Procédons à un changement d'inconnue.

On appelle t le réel défini par $t=x^2$. L'équation devient alors :

$$7x^4+13x^2=2 \iff 7\times\left(x^2\right)^2+13x^2-2=0 \iff \underbrace{7t^2+13t-2=0}_{(0)}$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation ***(0)*** qui est du second degré :

$$\Delta_{(0)}=13^2-4\times7\times(-2)=169-(-56)=225=15^2$$

Son discriminant étant positif, l'équation ***(0)*** admet deux solutions distinctes :

$$t_1=\frac{-13-15}{2\times7}=\frac{-28}{14}=-2 \qquad \underline{\text{et}} \qquad t_2=\frac{-13+15}{2\times7}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$$

Reprenons la résolution de notre équation bicarrée :

$$7x^4+13x^2=2 \iff 7t^2+13t-2=0$$

$$\iff t=-2 \quad \underline{\text{ou}} \quad t=\frac{1}{7}$$

$$\iff x^2=-2 \quad \underline{\text{ou}} \quad x^2=\frac{1}{7}$$

Pas de solution ! Un carré n'est jamais négatif.

$$x=-\sqrt{\frac{1}{7}}=-\sqrt{\frac{7}{49}}=-\frac{\sqrt{7}}{7} \quad \underline{\text{ou}} \quad x=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

<u>Conclusion :</u> notre équation bicarrée admet exactement deux solutions : $S=\left\{-\frac{\sqrt{7}}{7};\frac{\sqrt{7}}{7}\right\}$

b.1. Calculons l'image de -7 par le polynôme P.

$$\begin{aligned}P(-7)&=3\times(-7)^3+27\times(-7)^2+46\times(-7)+28\\&=3\times(-343)+27\times49-322+28\\&=-1029+1323-322+28=1351-1351=0\end{aligned}$$

Le réel -7 étant l'une de ses racines (valeur qui l'annule), le polynôme $P(x)$ est factorisable par le facteur $x-(-7)=x+7$.

b.2. Deux méthodes permettent de factoriser le polynôme $P(x)$ par le facteur $x+7$.

<u>La méthode par identification des coefficients de même degré</u>

On veut écrire le polynôme P sous la forme :

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+7)\times\left(ax^2+bx+c\right)\\&=ax^3+bx^2+cx+7ax^2+7bx+7c\end{aligned}$$

$$\boxed{3}x^3+\boxed{27}x^2+\boxed{46}x+\boxed{28}=\boxed{a}x^3+\boxed{(b+7a)}x^2+\boxed{(c+7b)}x+\boxed{7c}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux :

En x^3	$3=a$ soit $a=3$	*Et d'un !*
En x^2	$27=b+7a \iff 27=b+21 \iff b=27-21=6$	*Et de deux !*
En x	$46=c+7b \iff 46=c+42 \iff c=46-42=4$	*Et de trois !*
Constant	$28=7c \iff c=\frac{28}{7}=4$	*C'est vérifié !*

<u>La méthode par extraction du facteur x+7 de chacun des termes de P</u>

Combien de fois $x+7$?

$$P(x)=\boxed{3x^3}+27x^2+46x+28=\boxed{3x^2\times(x+7)-21x^2}+27x^2+46x+28$$

Combien de $x+7$?

$$=3x^2\times(x+7)+\boxed{6x^2}+46x+28=3x^2\times(x+7)+\boxed{6x\times(x+7)-42x}+46x+28$$

$$=3x^2\times(x+7)+6x\times(x+7)+4x+28$$

Un... ...facteur... ...commun

$$=3x^2\times\boxed{(x+7)}+6x\times\boxed{(x+7)}+4\times\boxed{(x+7)}=\boxed{(x+7)}\times\left(3x^2+6x+4\right)$$

<u>Conclusion :</u> une écriture factorisée du polynôme P est :

$$P(x)=\underbrace{3x^3+27x^2+46x+28}_{\text{Forme développée}}=\underbrace{(x+7)\times\left(3x^2+6x+4\right)}_{\text{Une forme factorisée...}}$$

c. La résolution de cette dernière équation fait appel à celles des deux précédentes.

$$\overbrace{\left(3x^3+27x^2+46x+28\right)}^{P(x)}\times\left(7x^4+13x^2-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+7)\times\left(3x^2+6x+4\right)\times\left(7x^4+13x^2-2\right)=0}_{\text{Un produit est nul...}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\underbrace{x+7=0}_{(1)} \quad \underline{\text{ou}} \quad \underbrace{3x^2+6x+4=0}_{(2)} \quad \underline{\text{ou}} \quad \underbrace{7x^4+13x^2-2=0}_{(3)}}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

Résolvons ces trois sous-équations :

(1) $x+7=0 \Leftrightarrow x=\boxed{-7}$

(2) Cette seconde équation est du second degré. Calculons son discriminant !

$$\Delta_{(2)}=6^2-4\times 3\times 4=36-48=\boxed{-12}$$

Son discriminant étant négatif, ***(2)*** n'a pas de solutions réelles.

(3) La question **a.** nous a appris que cette équation bicarrée n'avait que deux solutions : $-\frac{\sqrt{7}}{7}$ et $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

<u>Conclusion :</u> l'équation $\left(3x^3+27x^2+46x+28\right)\times\left(7x^4+13x^2-2\right)=0$ a exactement trois solutions. Nous écrivons :

$$\boxed{S=\left\{-7;-\frac{\sqrt{7}}{7};\frac{\sqrt{7}}{7}\right\}}$$

Analyse

Graphique et conséquences

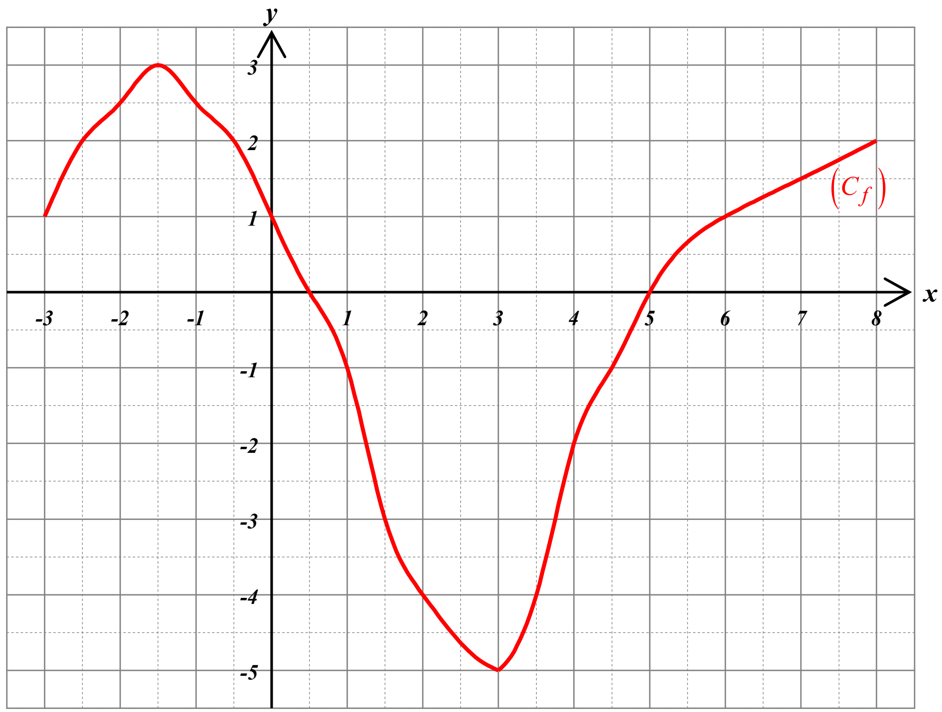
L'énoncé

La fonction *f* est définie et continue sur l'intervalle $[-3;8]$.

Sa courbe représentative (C_f) est tracée sur le graphique ci-contre ↗

a. En utilisant le graphique ci-contre, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer les images de -4 ; 0 et 2 par la fonction *f*.
2. Déterminer les antécédents de -4 et 4 par la fonction *f*.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur son ensemble de définition.
4. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.



b. On appelle *g* la fonction définie par :

$$g(x) = 1 - 2 \times f(x)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction *g*.
2. Calculer $g(3)$.
3. Déterminer les antécédents de -1 par la fonction *g*.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction *g* sur son ensemble de définition D_g.

c. On appelle *h* la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{1}{f(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction *h*.
2. Déterminer les antécédents de $0,5$ par la fonction *h*.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction *h* sur son ensemble de définition D_h.

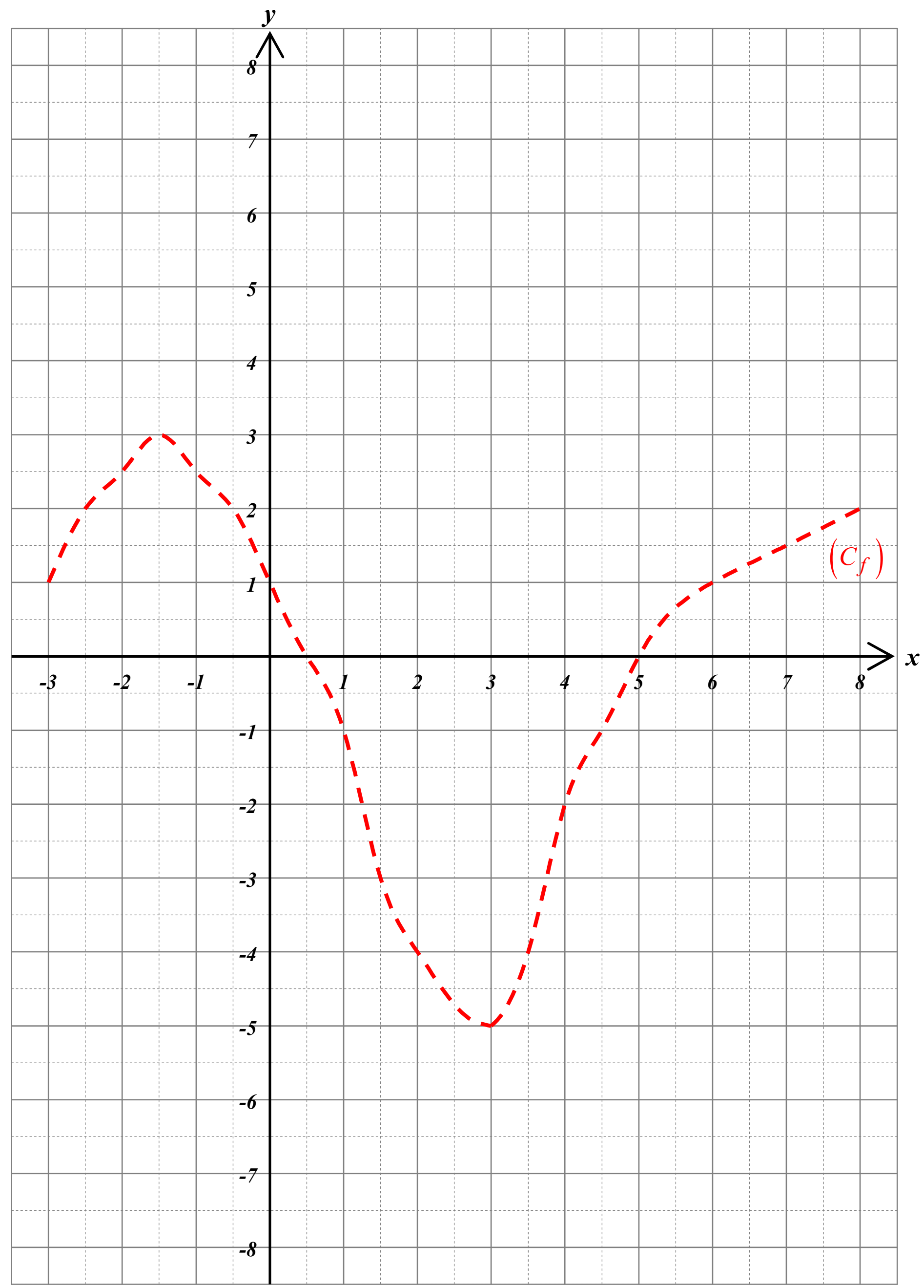
d. On appelle *j* la fonction définie par :

$$j(x) = \sqrt{f(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_j de la fonction *j*.
2. Déterminer les antécédents de -1 par la fonction *j*.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction *j* sur son ensemble de définition D_j.

e. Sur le graphique ci-contre, tracer en bleu une esquisse de la courbe (C_k) représentant la fonction *k* définie par :

$$k(x) = |f(x)|$$



Le corrigé

a.1. D'après le graphique, nous avons :

$$\underbrace{-4 \text{ n'a pas d'image par } f}_{\text{En dehors de l'ensemble de définition}} \qquad f(0)=1 \qquad f(2)=-4$$

a.2. Les antécédents de -4 par la fonction f sont 2 et 3,5.
4 n'a pas d'antécédents par la fonction f.

a.3. Le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition est le suivant :

x	-3		$-1,5$		3		8
f	1	↗	3	↘	-5	↗	2

a.4. Le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	-3		$0,5$		5		8
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b.1. La seule contrainte pesant sur l'existence de l'image $g(x)$ est l'existence de $f(x)$.
Les fonctions g et f ont le même ensemble de définition. Ainsi :

$$D_g = D_f = [-3;8]$$

b.2. Calculons l'image de 3 par la fonction g.

$$g(3) = 1-2\times f(3) = 1-2\times(-5) = 1+10 = 11$$

b.3. Pour connaître les antécédents de -1 par la fonction g, nous devons résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} g(x)=-1 &\Leftrightarrow 1-2\times f(x) = -1 \\ &\Leftrightarrow \cancel{-2}\times f(x) = \cancel{-2} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{f(x)=1 \Leftrightarrow x=-3 \ \underline{\text{ou}} \ x=0 \ \underline{\text{ou}} \ x=6}_{\text{D'après le graphique.}} \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> -1 a trois antécédents par la fonction g qui sont -3 ; 0 et 6.

b.4. Multiplier une fonction par le facteur négatif -2 change ses variations.
Lui rajouter 1, les conserve.

En conséquence, le tableau de variation de g est le suivant :

x	-3		$-1{,}5$		3		8
g	-1	↘	-5	↗	11	↘	-3

Deux images sont à calculer pour avoir un tableau complet :

$$g(-1{,}5)=1-2\times f(-1{,}5)=1-2\times 3=1-6=\underline{-5}$$
$$g(8)=1-2\times f(8)=1-2\times 2=1-4=\underline{-3}$$

c.1. L'existence de l'image $h(x)$ repose sur la possibilité de calcul de l'inverse de $f(x)$.

$$\text{L'inverse } h(x) \text{ existe} \Leftrightarrow f(x) \text{ existe } \underline{\text{et}}\ f(x)\neq 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{x\in[-3;8]}_{\text{Existence}}\ \underline{\text{et}}\ \underbrace{x\neq 0{,}5\ \underline{\text{et}}\ x\neq 5}_{\text{Non nullité}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de la fonction h est :

$$D_h=[-3;8]\setminus\{0{,}5;5\}=\underline{[-3;0{,}5[\cup]0{,}5;5[\cup]5;8]}$$

c.2. Pour déterminer les antécédents de $0{,}5$ par la fonction h, nous devons résoudre l'équation :

$$h(x)=0{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=0{,}5$$
$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{0{,}5}=2 \Leftrightarrow \underbrace{x=-2{,}5\ \underline{\text{ou}}\ x=-0{,}5\ \underline{\text{ou}}\ x=8}_{\text{D'après le graphique}}$$

<u>Conclusion :</u> 0,5 a trois antécédents par la fonction h qui sont $-2{,}5$; $-0{,}5$ et 8.

c.3. Les variations de l'inverse d'une fonction sont les contraires de cette fonction.
Par conséquent, le tableau de variation de h est le suivant :

x	-3		$-1{,}5$		$0{,}5$		3		5		8
$h=\frac{1}{f}$	1	↘	$1/3$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-0{,}2$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$0{,}5$

Quelques explications à propos de ce tableau :

- ✧ D'abord, les images de -3 ; $-1{,}5$; 3 et 8 par la fonction $h=\frac{1}{f}$ s'obtiennent en inversant les images trouvées par f sur le graphique.
- ✧ Ensuite, en 0,5 et en 5, il faut déterminer ce que l'on appelle des <u>limites</u> en se souvenant que l'inverse de quelque chose de petit est grand.
  Dans le détail :

A gauche de 0,5 ou $0{,}5^-$: $\displaystyle\lim_{x\to 0{,}5^-} h(x)=\lim_{x\to 0{,}5^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^+}=\underline{+\infty}$

A droite de 0,5 ou $0{,}5^+$: $\displaystyle\lim_{x\to 0{,}5^+} h(x)=\lim_{x\to 0{,}5^+}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^-}=\underline{-\infty}$

A gauche de 5 ou 5^- : $\displaystyle\lim_{x\to 5^-} h(x)=\lim_{x\to 5^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^-}=\underline{-\infty}$

A droite de 5 ou 5^+ : $\displaystyle\lim_{x\to 5^+} h(x)=\lim_{x\to 5^+}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^+}=\underline{+\infty}$

c.1. L'existence de $j(x)$ repose sur l'existence de la racine carrée de $f(x)$. Ainsi :

$$\text{La racine } j(x) \text{ existe} \Leftrightarrow f(x) \text{ existe } \underline{\text{et}}\ f(x)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{x\in[-3;8]}_{\text{Existence}}\ \underline{\text{et}}\ \underbrace{x\in[-3;0{,}5]\cup[5;8]}_{\text{Non négativité}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de la fonction j est :

$$D_j=\underline{[-3;0{,}5]\cup[5;8]}$$

c.2. Les antécédents de -1 par j sont les solutions de l'équation $j(x)=\sqrt{f(x)}=-1$.

Une racine étant par définition un réel positif ou nul, une telle équation n'a pas de solution.
<u>Conclusion :</u> -1 n'a pas d'antécédent par la fonction j.

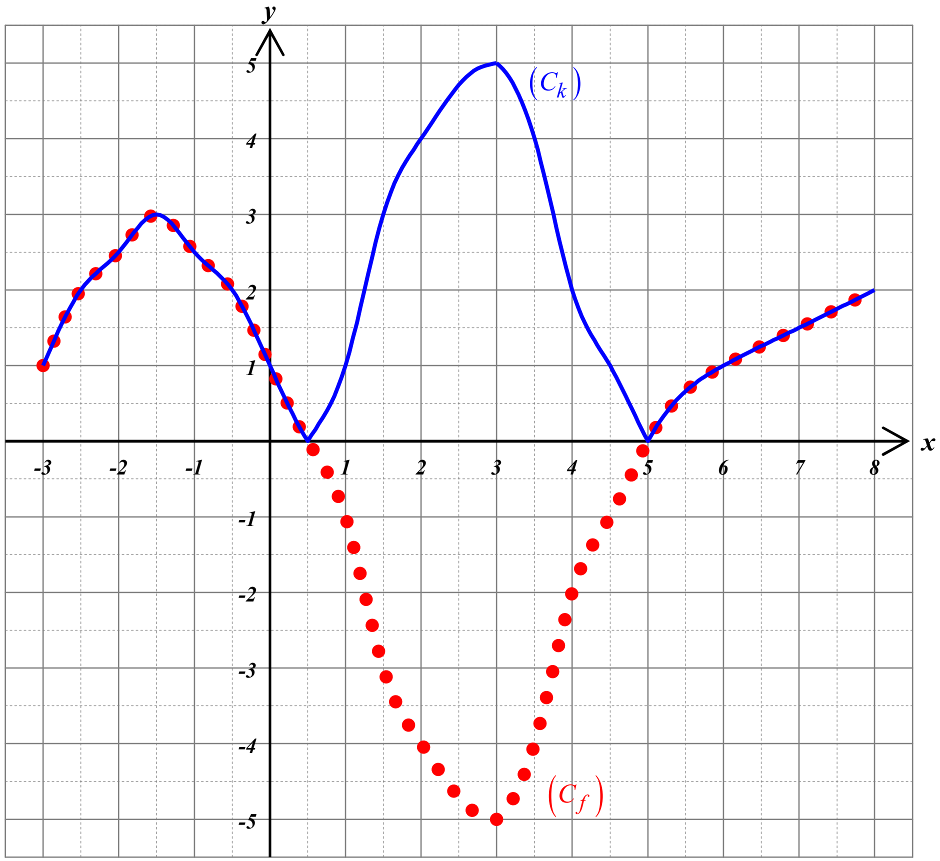
c.3. Les variations de la racine d'une fonction sont les mêmes que celles de cette fonction.
Par conséquent, le tableau de variation de j est le suivant :

x	-3		$-1{,}5$		$0{,}5$		5		$+\infty$
$j=\sqrt{f}$	1	↗	$\sqrt{3}$	↘	0	j n'est pas définie	0	↗	$\sqrt{2}$

d. Lorsque $f(x)$ est positif, alors $k(x)=|f(x)|=f(x)$
La courbe (C_k) suit la trace de (C_f)

Lorsque $f(x)$ est négatif, alors $k(x)=|f(x)|=-f(x)$.
(C_k) est symétrique à (C_f) par rapport à (Ox)

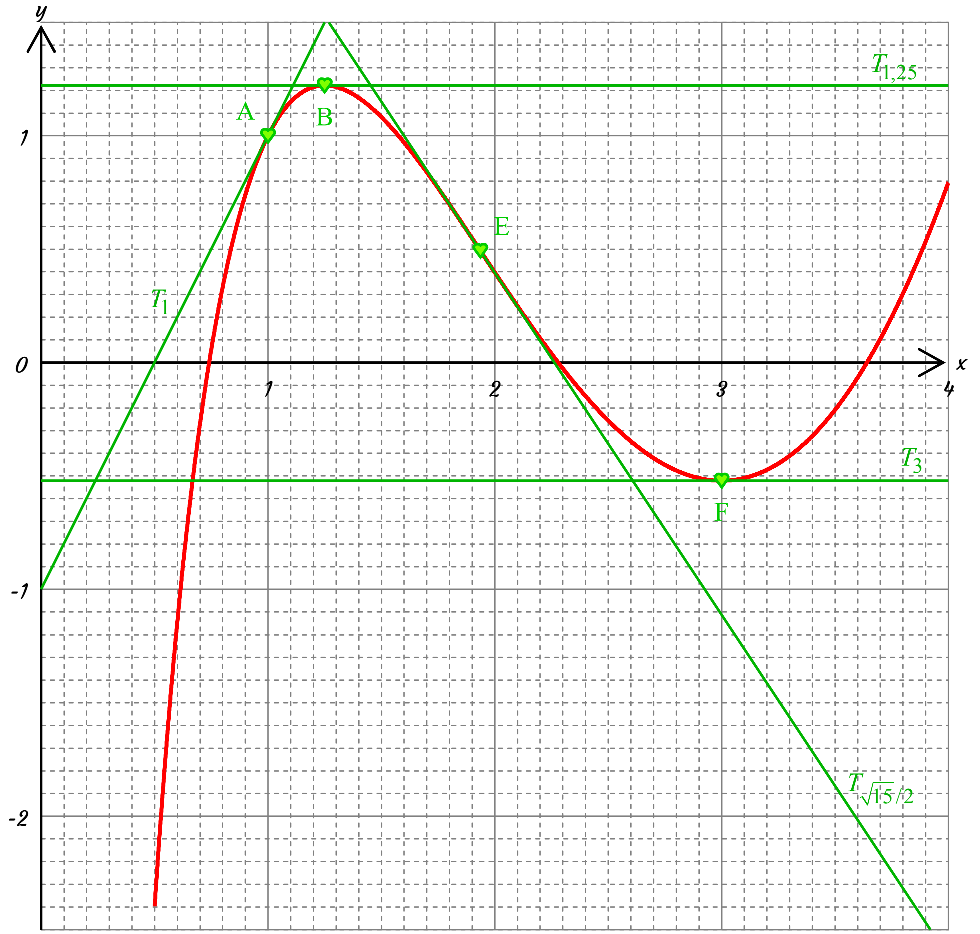
Par conséquent, la courbe (C_k) est celle ci-dessous :



La dérive du dromadaire

L'énoncé

f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0,5;4]$ dont on a tracé la courbe représentative (C_f) sur le graphique ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité graphique 3 centimètres.



On a également tracé quatre tangentes T_1 $T_{1,25}$ $T_{\sqrt{15}/2}$ T_3 à la courbe (C_f) aux points A, B, E et F d'abscisses respectives $x_A=1$ $x_B=1,25$ $x_E=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ $x_F=3$.

Avec toute la précision permise par le graphique, donner les valeurs (éventuellement approchées au dixième près) des nombres suivants :

$f'(1) = \ldots\ldots$ $\quad f(3) = \ldots\ldots$ $\quad f'\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right) = \ldots\ldots$

$f'(1{,}25) = \ldots\ldots$ $\quad f\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right) = \ldots\ldots$ $\quad f(1) = \ldots\ldots$

Le corrigé

Répondons aux questions posées :

$f'(1) =$ Coefficient directeur de la tangente $T_1 = \underline{2}$

$f(3) = f(x_F) =$ Ordonnée du point F $\approx \underline{-0{,}52}$

$f'(1{,}25) =$ Coefficient directeur de la tangente horizontale $T_{1,25} = \underline{0}$

$f'\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right) =$ Coefficient directeur de la tangente $T_{\sqrt{15}/2} \approx \underline{-1{,}5}$

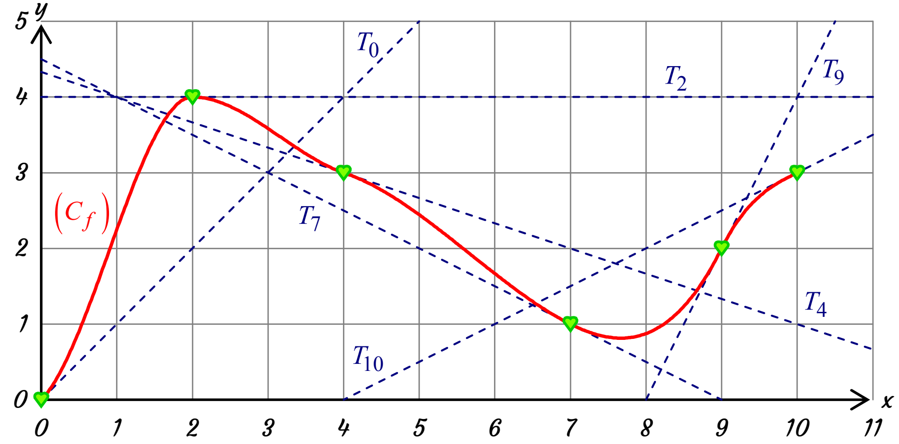
$f\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right) = f(x_E) =$ Ordonnée du point E $\approx \underline{0{,}49}$

$f(1) = f(x_A) =$ Ordonnée du point A $\approx \underline{1}$

La tangente de la vengeance

L'énoncé

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté en rouge dans un repère orthonormé la fonction f qui est dérivable sur l'intervalle $[0;10]$.



On a également tracé en tirets bleu marine les tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisse 0; 2; 4; 7; 9 et 10.

En utilisant le graphique, compléter sans justifications ce qui suit :

$f(0) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad f'(2) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad f'(4) = \ldots\ldots\ldots$

$f(7) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad f'(9) = \ldots\ldots\ldots$ $\quad f(10) = \ldots\ldots\ldots$

Le corrigé

L'image $f(a)$ est l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe (C_f) alors que le nombre dérivé $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T_a à la courbe (C_f).

De plus, le coefficient directeur d'une droite est égal au quotient $\dfrac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}}$ entre deux points de la droite.

Ces rappels ayant été faits, nous pouvons répondre sereinement aux questions posées :

$f(0) = \underline{0}$ $\quad f'(2) = \underline{0}$ $\quad f'(4) = \dfrac{-1}{+3} = \underline{-\dfrac{1}{3}}$

$f(7) = \underline{1}$ $\quad f'(9) = \dfrac{+2}{+1} = \underline{2}$ $\quad f(10) = \underline{3}$

Laitues de de fonctions

L'énoncé

Cet exercice est formé de deux sous-parties indépendantes.

a. La fonction *f* est définie sur ℝ par :

$$f(x)=-4x^3+22x^2-7x+1$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, puis sa limite lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction *f*.
4. Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions dans ℝ ? On expliquera sa réponse.
   Donner des valeurs approchées au dixième-près de ces éventuelles solutions.
5. En déduire le signe de $f(x)$ en fonction de x.

b. La fonction *g* est définie par :

$$g(x)=\frac{6x^2+9x+2}{2x+1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction *g*. On justifiera sa réponse.
2. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, puis sa limite lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-0,5$ par gauche, puis sa limite lorsque x tend vers $-0,5$ par la droite.
4. En dérivant la fonction *g*, montrer que pour tout réel $x\in D_g$, on a :

$$g'(x)=\frac{12x^2+12x+5}{(2x+1)^2}$$

5. En déduire le tableau de variation de la fonction *g*.
6. m étant un réel fixé quelconque, combien l'équation $g(x)=m$ admet-elle de solutions dans D_g ? On expliquera sa réponse.

Le corrigé

a.1. Aux infinis, le polynôme $f(x)$ se comporte comme son terme dominant $-4x^3$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} -4\times x^3=-(-\infty)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -4\times x^3=-(+\infty)=-\infty$$

a.2. Comme tout polynôme, la fonction *f* est dérivable sur ℝ et pour tour réel *x*, on a :

$$f'(x)=\left(-4\times x^3+22\times x^2-7\times x+1\right)'=-4\times 3x^2+22\times 2x-7\times 1+0=-12x^2+44x-7$$

a.3. Les variations de la fonction *f* vont être données par le signe de sa dérivée $f'(x)$ qui est une forme du second degré. Aussi, calculons son discriminant :

$$\Delta_{f'(x)}=44^2-4\times(-12)\times(-7)=1936-336=1600=40^2$$

Son discriminant étant positif, $f'(x)$ admet deux racines distinctes qui sont :

$$x_1=\frac{-44-40}{2\times(-12)}=\frac{-84}{-24}=\frac{\cancel{-12}\times 7}{\cancel{-12}\times 2}=3,5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-44+40}{2\times(-12)}=\frac{-4}{-24}=\frac{\cancel{-4}\times 1}{\cancel{-4}\times 6}=\frac{1}{6}$$

$f'(x)$ est du signe de son coefficient dominant -12 à l'extérieur de ses racines et du signe contraire à l'intérieur. Par conséquent, le tableau de variations de la fonction *f* est celui ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(x)=-12x^2+44x-7$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$23/54$	↗	$74,5$	↘	$-\infty$

Pour que la fête soit complète, nous devons calculer les valeurs des deux extrema.

$$f\left(\frac{1}{6}\right)=-4\times\left(\frac{1}{6}\right)^3+22\times\left(\frac{1}{6}\right)^2-7\times\frac{1}{6}+1=-4\times\frac{1}{216}+22\times\frac{1}{36}-\frac{7}{6}+1$$
$$=-\frac{1}{54}+\frac{11}{18}-\frac{7}{6}+1=\frac{-1+11\times3-7\times9+1\times54}{54}=\frac{-1+33-63+54}{54}=\frac{23}{54}$$
$$f\left(\frac{7}{2}\right)=-4\times\left(\frac{7}{2}\right)^3+22\times\left(\frac{7}{2}\right)^2-7\times\frac{7}{2}+1=-4\times\frac{343}{8}+22\times\frac{49}{4}-\frac{49}{2}+1$$
$$=-\frac{343}{2}+\frac{539}{2}-\frac{49}{2}+\frac{2}{2}=\frac{149}{2}=74,5$$

a.4. Vu son tableau de variation et en considérant que la fonction *f* est continue sur ℝ, il est clair que *f* ne passe qu'une seule fois par 0 sur l'intervalle $\left]\frac{7}{2};+\infty\right[$.

Le minimum de *f* sur l'autre partie de ℝ qu'est l'intervalle $\left]-\infty;\frac{7}{2}\right]$ étant le positif $\frac{23}{54}$, l'équation $f(x)=0$ n'y admet pas de solution.

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α dans ℝ dont une valeur approchée au dixième-près est 5,2.

a.5. Vues ses variations, nous en déduisons que le signe de $f(x)$ est :

x	$-\infty$		$\alpha\approx5,2$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

b.1. Les numérateur $6x^2+9x+2$ et dénominateur $2x+1$ sont définis sur ℝ.
Le seul écueil à l'existence du quotient $g(x)$ est donc l'éventuelle nullité de son dénominateur.

Le quotient $g(x)$ existe $\Leftrightarrow\quad 2x+1\neq0\quad\Leftrightarrow\quad 2x\neq-1\quad\Leftrightarrow\quad x\neq-0,5$

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction *g* est
$$D_g=\mathbb{R}\setminus\{-0,5\}=\left]-\infty;-0,5\right[\cup\left]-0,5;+\infty\right[$$

b.2. Aux infinis, la fonction rationnelle $g(x)=\frac{6x^2+9x+2}{2x+1}$ se comporte comme le quotient de ses termes dominants $\frac{6x^2}{2x}=\frac{3x\times\cancel{2x}}{\cancel{2x}}=3x$.

Il vient alors :
$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}3x=3\times(-\infty)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}3x=3\times(+\infty)=+\infty$$

b.3. Quand x tend vers $-0,5$, le numérateur $6x^2+9x+2$ tend vers :
$$6\times(-0,5)^2+9\times(-0,5)+2=1,5-4,5+2=-1$$
Le tableau de signe du dénominateur est le suivant :

x	$-\infty$	Gauche →	$-0,5$	← Droite	$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

Nous en déduisons :

Limite à gauche de 1	Limite à droite de 1
$\lim_{x\to1^-}g(x)=\frac{-1}{0^-}=+\infty$	$\lim_{x\to1^+}g(x)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

b.4. La fonction rationnelle *g* est le quotient des fonctions :

$u(x)=6x^2+9x+2$
$u'(x)=6\times2x+9+0=12x+9$
Dérivable sur ℝ

et

$v(x)=2x+1$
$v'(x)=2$
Dérivable sur ℝ et non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{-0,5\}$

Donc la fonction $g=\frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-0,5\}$ et pour tout réel x de cet ensemble :
$$g'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{(12x+9)\times(2x+1)-2\times\left(6x^2+9x+2\right)}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{24x^2+12x+18x+9-12x^2-18x-4}{(2x+1)^2}=\frac{12x^2+12x+5}{(2x+1)^2}$$

b.5. C'est le signe de sa dérivée $g'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *g*.

Le dénominateur $(2x+1)^2$ est positif quand il n'est pas nul en $x=-0,5$.

Afin de connaître le signe du numérateur $N(x)=12x^2+12x+5$ qui est une forme du second degré, calculons son discriminant.
$$\Delta_{N(x)}=12^2-4\times12\times5=144-240=-96$$

Son discriminant étant négatif, la forme $N(x)$ est toujours du signe de son coefficient dominant 12.

Nous en déduisons que le tableau de signe de $g'(x)$ et celui de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		$-0,5$		$+\infty$
$N(x)=12x^2+12x+5$		$+$	|	$+$	
$(2x+1)^2$		$+$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	||	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b.6. Vu son tableau de variations, quelque soit le niveau m choisi, la fonction g passe à deux reprises par ce niveau m : une première fois sur l'intervalle $]-\infty;-0,5[$ et une seconde sur l'intervalle $]-0,5;+\infty[$.

<u>Conclusion :</u> quelque soit le réel m, l'équation $g(x)=m$ admet exactement deux solutions dans D_g.

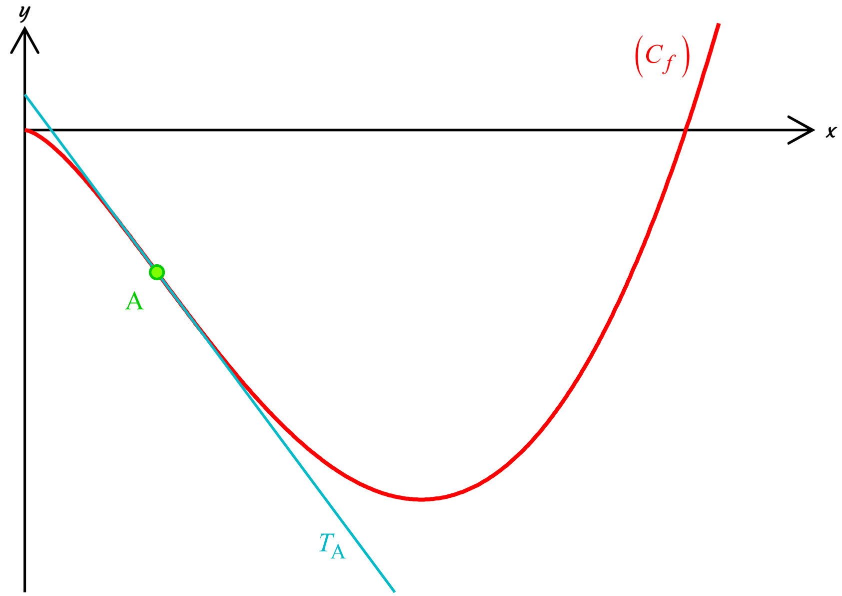
Puissance cinq demi !

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}\times\left(x^2-5x\right)$$

Sa courbe (C_f) a été tracée sur le graphique ci-dessous dans un repère non orthonormé.



On a également tracé la droite T_A qui est la tangente à la courbe (C_f) en son point A d'abscisse $x_A=1$.

1. Calculer les images $f(0)$ et $f(3)$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ? On expliquera sa réponse.
   Etablir que $f'(x)=\sqrt{x}\times(2,5\times x-7,5)$
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_A.

Le corrigé

1. Calculons les images de 0 et 3 par la fonction *f*.

$$f(0)=\sqrt{0}\times\left(0^2-5\times 0\right)=0\times 0=\underline{0}$$

$$f(3)=\sqrt{3}\times\left(3^2-5\times 3\right)=\sqrt{3}\times(9-15)=-6\sqrt{3}\approx\underline{-10,4}$$

2. De prime abord, nous pouvons écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\times\left[x^2-5x\right]=(+\infty)\times\left[(+\infty)-(+\infty)\right]=(+\infty)\times\underline{\text{Forme indéterminée}}$$

L'indétermination provenant du second facteur sera vite levée. En effet :

$$f(x)=\sqrt{x}\times\overbrace{\left(x\times\boxed{x}-5\times\boxed{x}\right)}^{\text{Nous aurions pu aussi factoriser par } x^2}=\sqrt{x}\times\boxed{x}\times(x-5)\xrightarrow[x\to+\infty]{}(+\infty)\times(+\infty)\times(+\infty)=\underline{+\infty}$$

3. La fonction *f* est le produit des fonctions :

$$\begin{cases} u(x)=\sqrt{x} \\ u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ \text{Dérivable sur }]0;+\infty[\end{cases} \quad \underline{\text{et}} \quad \begin{cases} v(x)=x^2-5x \\ v'(x)=2x-5 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $f=u\times v$ est (seulement) dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et sur cet ensemble :

$$\begin{aligned} f'(x)&=u'\times v+v'\times u \\ &=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\left(x^2-5x\right)+(2x-5)\times\sqrt{x} \\ &=\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}\times x\times\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}-\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}\times 5\times\sqrt{x}\times\cancel{\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}-5\sqrt{x} \\ &=2,5\times x\times\boxed{\sqrt{x}}-7,5\times\boxed{\sqrt{x}}=\underline{\boxed{\sqrt{x}}\times(2,5x-7,5)} \end{aligned}$$

Note : du fait de son expression, la dérivée $f'(x)$ peut être prolongée en 0. Il n'y a aucune contre-indications, ni aucun écueil comme un dénominateur éventuellement nul. C'est pour cela que dire que la fonction *f* est dérivable sur $[0;+\infty[$ n'est pas usurpé.

4. Encore une fois, c'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *f*.

Le premier facteur $\sqrt{x}$ est positif sauf quant il est nul en $x=0$.

Le second facteur est affine et s'annule lorsque $2,5\times x-7,5=0 \Leftrightarrow 2,5\times x=7,5$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{7,5}{2,5}=\underline{3}$$

Par conséquent, le tableau de variation de la fonction *f* est le suivant :

x	0		3		$+\infty$
$\sqrt{x}$		+	|	+	
$2,5x-7,5$		−	0	+	
$g'(x)$		−	0	+	
g	0	↘	$-6\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

5. La tangente T_A a une équation réduite de la forme $y=f'(1)\times(x-1)+f(1)$ avec :

$$f(1)=\sqrt{1}\times\left(1^2-5\times 1\right)=1\times(-4)=\underline{-4}$$

$$f'(1)=\sqrt{1}\times(2,5\times 1-7,5)=1\times(-5)=\underline{-5}$$

Nous en concluons que l'équation réduite de la tangente T_A est :

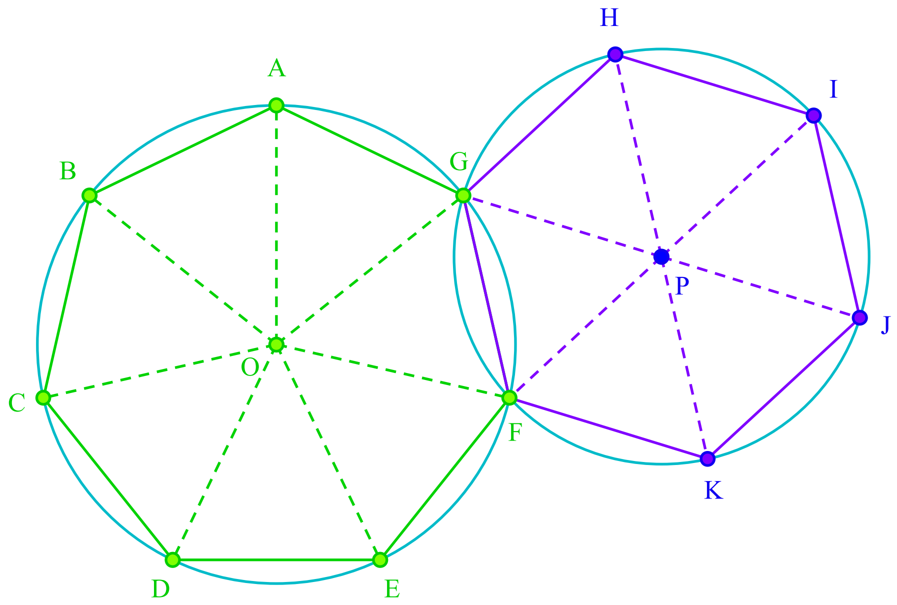
$$y=(-5)\times(x-1)+(-4) \Leftrightarrow y=-5x+5-4 \Leftrightarrow \underline{y=-5x+1}$$

Angles et trigonométrie

Les polygones réguliers

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFG est un heptagone régulier de centre O et FGHIJK est un hexagone régulier de centre P.



a. Déterminer les mesures principales exactes exprimées en radians des angles orientés suivants. On s'évertuera à justifier chaque réponse par un calcul ou par une phrase énonçant un argument géométrique.

$\left(\overrightarrow{PH},\overrightarrow{PJ}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DE}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{FG}\right)=\ldots\ldots$

$\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{OB}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{FO},\overrightarrow{CO}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FK}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{KJ}\right)=\ldots\ldots$

b. Déterminer, puis tracer sur la figure ci-dessus les ensembles suivants :

1. L'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{PJ},\overrightarrow{PM}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ modulo 2π.
2. L'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MK},\overrightarrow{ME}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.
3. L'ensemble $\mathcal{E}_3$ des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{KM}\right)=0$ modulo 2π

Le corrigé

a. Déterminons les mesures principales des angles orientés proposés :

1. Un hexagone régulier partage un tour complet (soit 2π radians) en six parties égales. Par conséquent : $\left(\overrightarrow{PH},\overrightarrow{PJ}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}$ radians modulo 2π
2. Un heptagone régulier partage un tour complet (soit 2π radians) en sept parties égales. Ainsi : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{2\pi}{7}$ radians modulo 2π
3. Le triangle ODE est isocèle en O et l'angle au sommet $\widehat{O}$ mesure $\dfrac{2\pi}{7}$ radians.

   Les deux angles géométriques à base $\widehat{D}$ et $\widehat{E}$ se partagent le complément sur π.

   Ainsi : $\widehat{D}=\dfrac{1}{2}\times\left(\pi-\widehat{O}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(\pi-\dfrac{2\pi}{7}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7\pi-2\pi}{7}=\dfrac{5\pi}{14}$

   Nous en concluons : $\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DE}\right)=-\dfrac{5\pi}{14}$ modulo 2π
4. Les points O et P étant équidistants des points F et G, la droite (OP) est la médiatrice du segment [FG].

   Par conséquent : $\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{FG}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π .
5. Nous avons : $\left(\overrightarrow{DO},\overrightarrow{OB}\right)=\left(-\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)$

   $$=\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)+\pi=-\frac{4\pi}{7}+\pi=\frac{-4\pi+7\pi}{7}=\frac{3\pi}{7}\text{ modulo }2\pi$$
6. Nous avons : $\left(\overrightarrow{FO},\overrightarrow{CO}\right)=\left(-\overrightarrow{OF},-\overrightarrow{OC}\right)$

   $$=\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OC}\right)=3\times\left(\frac{-2\pi}{7}\right)=-\frac{6\pi}{7}\text{ modulo }2\pi$$

7. Nous avons : $\left(\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FK}\right)=\overbrace{\left(\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FG}\right)+\left(\overrightarrow{FG},\overrightarrow{FK}\right)}^{\text{D'après Chasles !}}$

$$=\left(-\frac{5\pi}{14}\right)+\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-5\pi\times 3-2\pi\times 14}{42}=\frac{-15\pi-28\pi}{42}$$

$$=-\frac{43\pi}{42}=\frac{41\pi}{42}-\frac{84\pi}{2}=\frac{41\pi}{42}+2\pi=\frac{41\pi}{42}\ \text{ modulo } 2\pi$$

8. Nous avons : $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{KJ}\right)=\overbrace{\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{FO}\right)+\left(\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FK}\right)+\left(\overrightarrow{FK},\overrightarrow{KJ}\right)}^{\text{Encore d'après Chasles !}}$

$$=\left(-\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FO}\right)+\left(\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FK}\right)+\left(-\overrightarrow{KF},\overrightarrow{KJ}\right)$$

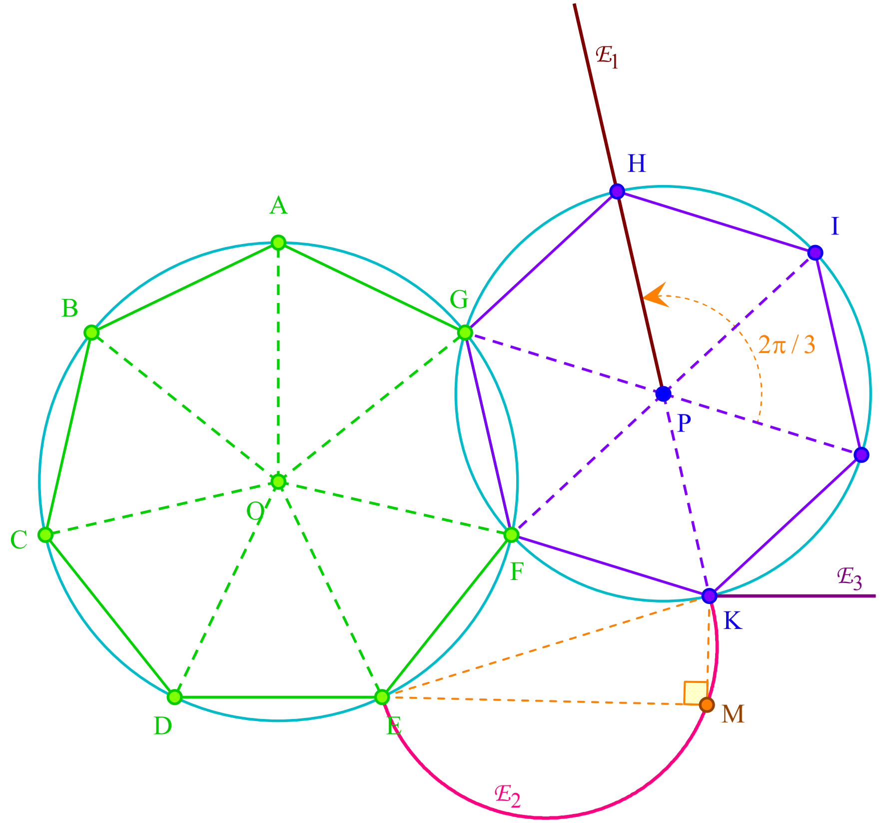
$$=\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FO}\right)+\pi+\frac{41\pi}{42}+\left(\overrightarrow{KF},\overrightarrow{KJ}\right)+\pi$$

$$=-\frac{5\pi}{14}+\frac{41\pi}{42}-\frac{2\pi}{3}+2\pi \qquad \boxed{\leftarrow \text{On travaille modulo } 2\pi}$$

$$=\frac{-5\pi\times 3+41\pi-2\pi\times 14}{42}=\frac{-2\pi}{42}=-\frac{\pi}{21}\ \text{ modulo } 2\pi$$

b.1. Comme $\left(\overrightarrow{PJ},\overrightarrow{PH}\right)=\frac{2\pi}{3}$, alors le point H appartient à l'ensemble $\mathcal{E}_1$.

Plus exactement, cet ensemble $\mathcal{E}_1$ est la demi-droite]PH).



Un point et ses copains

L'énoncé

On appelle t le réel de l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(t)=\frac{5}{7}$

a. Déterminer la valeur exacte de $\cos(t)$.

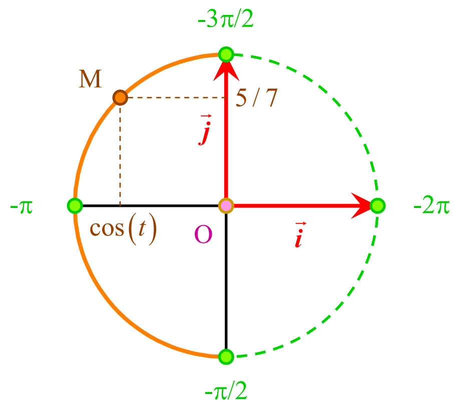
b. En déduire les valeurs exactes de :

$\cos(t-\pi)$ $\sin(t+\pi)$ $\sin(4\pi-t)$

$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ $\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$

Le corrigé

a. Si l'on considère le point M associé au réel t qui appartient à l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$ sur le cercle trigonométrique, son abscisse $x_M=\cos(t)$ est strictement négative.



Ses cosinus et sinus de ce réel t vérifient aussi :

$$[\cos(t)]^2+[\sin(t)]^2=1 \Leftrightarrow [\cos(t)]^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2=1 \Leftrightarrow [\cos(t)]^2+\frac{25}{49}=1$$

$$\Leftrightarrow [\cos(t)]^2=1-\frac{25}{49}=\frac{49-25}{49}=\frac{24}{49}$$

$$\Leftrightarrow \cos(t)=\sqrt{\frac{24}{49}}=\frac{\sqrt{4\times 6}}{\sqrt{49}}=\frac{2}{7}\sqrt{6} \quad \underline{\text{ou}} \quad \underbrace{\cos(t)=-\frac{2}{7}\sqrt{6}}_{\text{Seule cette solution est possible !}}$$

b. Appliquant les diverses formules des cosinus et sinus des angles associés ou pas, nous pouvons écrire :

$$\cos(t-\pi)=\cos(-(\pi-t))=\cos(\pi-t)=-\cos(t)=-\left(-\frac{2}{7}\sqrt{6}\right)=\frac{2}{7}\sqrt{6}$$

$$\sin(t+\pi)=-\sin(t)=-\frac{5}{7}$$

$$\sin(4\pi-t)=\sin\left(2\times 2\pi+\boxed{(-t)}\right)=\sin\left(\boxed{-t}\right)=-\sin(t)=-\frac{5}{7}$$

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(t)=-\frac{5}{7}$$

$$\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\boxed{t+\frac{\pi}{2}}+\pi\right)=-\sin\left(\boxed{t+\frac{\pi}{2}}\right)=-\cos(t)=\frac{2}{7}\sqrt{6}$$

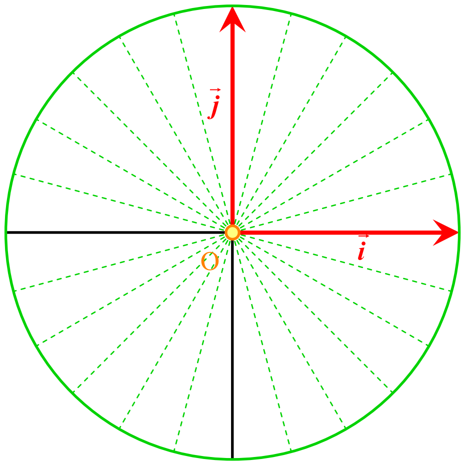
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos\left(-\left(\boxed{\frac{\pi}{2}-t}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin(t)=\frac{5}{7}$$

Ces équations qui tournent en rond

L'énoncé

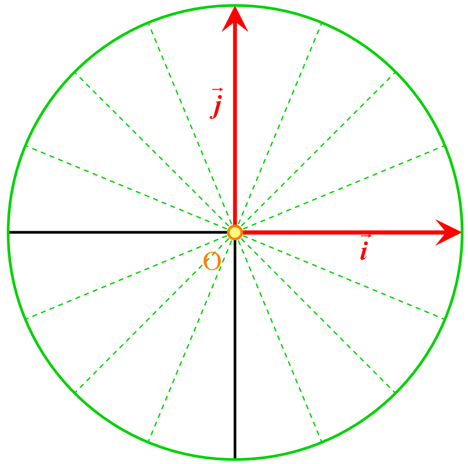
a. Résoudre dans ℝ l'équation d'inconnue t qu'est : $2\times\sin(3t)+\sqrt{2}=0$

Donner toutes les solutions se trouvant dans l'intervalle $[-2\pi;0]$. On représentera celles-ci sur le cercle trigonométrique ci-dessous qui a été partagé en 24 parties égales.



b. Résoudre dans ℝ l'équation d'inconnue t qu'est : $\cos(4t)=0$

Donner toutes les solutions se trouvant dans l'intervalle $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$. On représentera celles-ci sur le cercle trigonométrique ci-dessous qui a été partagé en 16 parties égales.



Le corrigé

a. D'abord, résolvons dans ℝ l'équation proposée :

$$2\times\sin(3t)+\sqrt{2}=0 \iff \sin(3t)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin(3t)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

où k et l sont deux entiers relatifs

$$\iff 3t=-\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad 3t=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+l\times 2\pi$$

$$t=-\frac{\pi}{12}+k\times\frac{2\pi}{3} \qquad t=\frac{5\pi}{12}+l\times\frac{2\pi}{3}$$

Les solutions se trouvant sur l'intervalle $[-2\pi;0]$ sont :

Solutions de la forme $-\frac{\pi}{12}+k\times\frac{2\pi}{3}$

$k=0 \quad : \quad -\frac{\pi}{12}+0\times\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}$

$k=-1 \quad : \quad -\frac{\pi}{12}-1\times\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}-\frac{8\pi}{12}=-\frac{9\pi}{12}=-\frac{3\pi}{4}$

$k=-2 \quad : \quad -\frac{\pi}{12}-2\times\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}-\frac{16\pi}{12}=-\frac{17\pi}{12}$

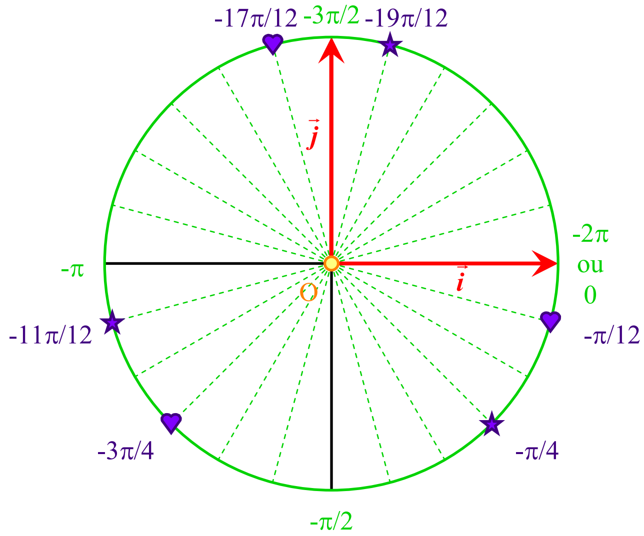
Solutions de la forme $\frac{5\pi}{12}+l\times\frac{2\pi}{3}$

$l=-1 \quad : \quad \frac{5\pi}{12}-\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}-\frac{8\pi}{12}=-\frac{3\pi}{12}=-\frac{\pi}{4}$

$l=-2 \quad : \quad \frac{5\pi}{12}-2\times\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}-\frac{16\pi}{12}=-\frac{11\pi}{12}$

$l=-3 \quad : \quad \frac{5\pi}{12}-3\times\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}-\frac{24\pi}{12}=-\frac{19\pi}{12}$

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous, on a enroulé l'intervalle $[-2\pi;0]$, puis on a positionné les six solutions de l'équation dans cet ensemble .



b. Nous pouvons écrire :

$$\cos(4t)=0 \Leftrightarrow \overbrace{4t=-\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad 4t=\frac{\pi}{2}+l\times 2\pi}^{\text{où } k \text{ et } l \text{ sont deux entiers relatifs}}$$

$$t=-\frac{\pi}{8}+k\times\frac{\pi}{2} \qquad t=\frac{\pi}{8}+l\times\frac{\pi}{2}$$

Les solutions se trouvant dans l'intervalle $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ sont :

Solutions de la forme $-\frac{\pi}{8}+k\times\frac{\pi}{2}$

$k=1 \quad : \quad -\frac{\pi}{8}+1\times\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{8}+\frac{4\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}$

$k=2 \quad : \quad -\frac{\pi}{8}+2\times\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{8}+\frac{8\pi}{8}=\frac{7\pi}{8}$

$k=3 \quad : \quad -\frac{\pi}{8}+3\times\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{8}+\frac{12\pi}{8}=\frac{11\pi}{8}$

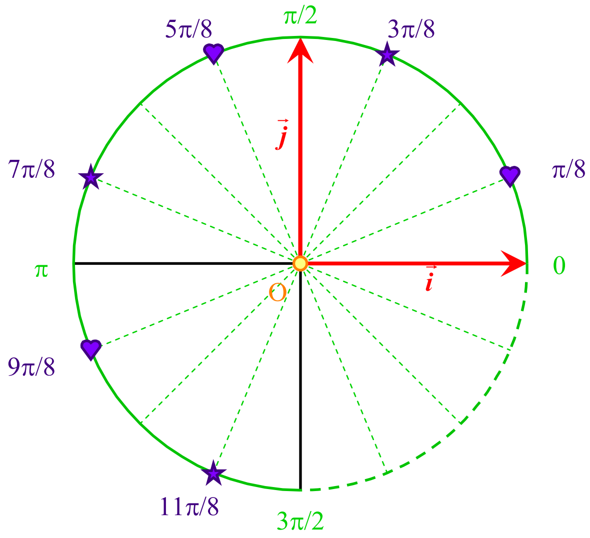
Solutions de la forme $\frac{\pi}{8}+l\times\frac{\pi}{2}$

$l=0 \quad : \quad \frac{\pi}{8}+0\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$

$l=1 \quad : \quad \frac{\pi}{8}+1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}+\frac{4\pi}{8}=\frac{5\pi}{8}$

$l=2 \quad : \quad \frac{\pi}{8}+2\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}+\frac{8\pi}{8}=\frac{9\pi}{8}$

Sur le cercle trigonométrique ci-dessous sur lequel on a enroulé l'intervalle $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$, on a placé les six solutions trouvées.



La bonne formule

L'énoncé

α est un réel de l'intervalle $\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ tel que $\cos(\alpha)=\frac{5}{13}$.

a. Calculer $\sin(\alpha)$.

b. En déduire les valeurs exactes des nombres suivants :

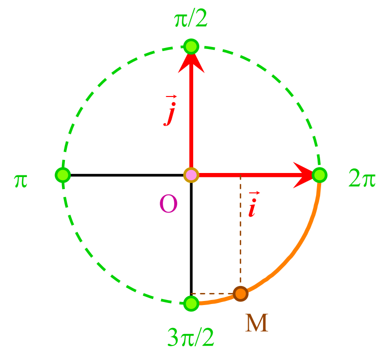
$\cos(\alpha+\pi)$ $\quad\sin(\pi-\alpha)$ $\quad\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ $\quad\sin(2\alpha)$ $\quad\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

c. Développer et réduire le polynôme $P(x)=(x+2)^5-32$

Le corrigé

a. Si l'on considère le point M associé au réel α qui appartient à l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ sur le cercle trigonométrique, son ordonnée $y_M=\sin(\alpha)$ est strictement négative.



Les cosinus et sinus de ce réel α vérifient l'égalité :

$$[\cos(\alpha)]^2+[\sin(\alpha)]^2=1 \Leftrightarrow \left[\frac{5}{13}\right]^2+[\sin(\alpha)]^2=1 \Leftrightarrow \frac{25}{169}+[\sin(\alpha)]^2=1$$

$$\Leftrightarrow [\sin(\alpha)]^2=1-\frac{25}{169}=\frac{169-25}{169}=\frac{144}{169}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha)=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}}=\frac{12}{13} \quad \underline{\text{ou}} \quad \underbrace{\sin(\alpha)=-\frac{12}{13}}_{\text{Seule cette solution est possible !}}$$

b. Appliquons les diverses formules sur les fonctions trigonométriques vues cette année !

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha) = -\frac{5}{13} \qquad \sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha) = -\frac{12}{13}$$

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha) = -\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos(\alpha) = -\frac{5}{13}$$

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \cos(\alpha)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin(\alpha)\times\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{5-12}{13} = -\frac{7}{26}\sqrt{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\cos(\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\sin(\alpha)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{13}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{26}\sqrt{3}+\frac{6}{13}$$

cos(a-b)=cos(a)×cos(b)+sin(a)×sin(b)
sin(a-b)=sin(a)×cos(b)-cos(a)×sin(b)

Ensuite :

$$\sin(2\alpha) = 2\times\sin(\alpha)\times\cos(\alpha) = 2\times\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{5}{13} = -\frac{120}{169}$$

Et enfin :

$$\cos\left(2\times\boxed{\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\times\left[\cos\left(\boxed{\frac{\alpha}{2}}\right)\right]^2-1 \iff \cos(\alpha) = 2\times\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1$$

cos(2)=2×cos²(α)-1

$$\iff \frac{5}{13} = 2\times\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1$$

$$\iff 2\times\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{5}{13}+1 = \frac{18}{13}$$

$$\iff \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{18}{13} = \frac{9}{13}$$

$$\iff \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Nous avons donc deux valeurs possibles pour $\cos(\alpha/2)$. Or :

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \xrightarrow{\div 2} \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ est négatif}$$

Nous en déduisons :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\times\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = -\frac{3}{13}\sqrt{13}$$

c. Appliquons la formule du binôme de Newton pour développer $P(x)$.

$$P(x) = (x+2)^5-32 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\times x^k\times 2^{5-k}-32$$

$$= \binom{5}{0}\times x^0\times 2^5+\binom{5}{1}\times x^1\times 2^4+\binom{5}{2}\times x^2\times 2^3$$

$$+\binom{5}{3}\times x^3\times 2^2+\binom{5}{4}\times x^4\times 2^1+\binom{5}{5}\times x^5\times 2^0-32$$

$$= 1\times 1\times 32+5\times x\times 16+10\times x^2\times 8+10\times x^3\times 4+5\times x^4\times 2+1\times x^5\times 1-32$$

$$= \cancel{32}+80x+80x^2+40x^3+10x^4+x^5-\cancel{32}$$

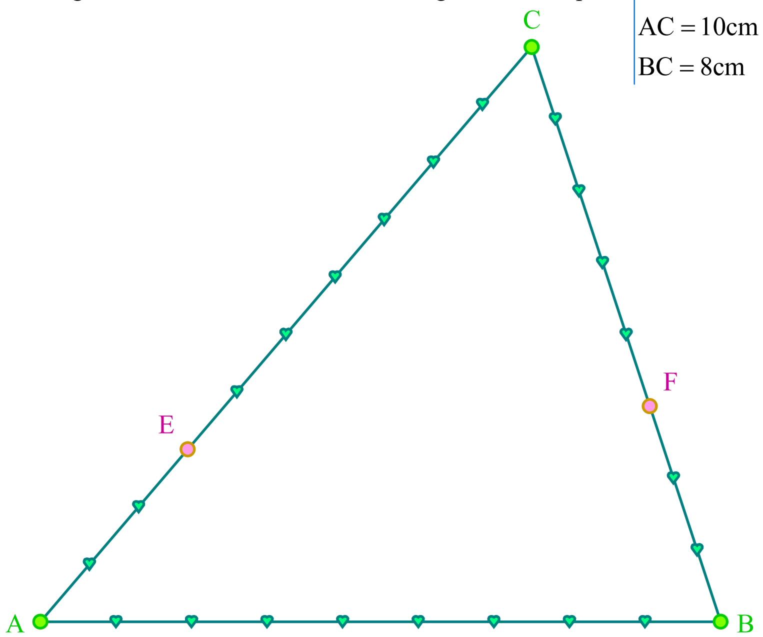
$$= x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x$$

Géométrie analytique et classique

Dans les griffes des vecteurs

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, on a tracé le triangle ABC tel que : $AB = 9\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$



Le point E se situe à trois centimètres du point A sur le segment [AC].
F est un point du segment [BC] situé à trois centimètres de B.

a. On appelle D le point défini par la relation vectorielle :

$$7\times\overrightarrow{AD}+5\times\overrightarrow{BD}=\vec{o}$$

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$, placer le point D sur la figure.

b. On appelle G le point situé aux deux tiers du segment [BE] à partir de B.

1. Construire le point G.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Démontrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\times\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\times\overrightarrow{AC}$.
4. Le point G appartient-il à la droite (AF) ? On justifiera sa réponse.

c. En utilisant le résultat de la question **b.3**, établir la relation vectorielle :

$$7\times\overrightarrow{AG}+5\times\overrightarrow{BG}+3\times\overrightarrow{CG}=\vec{o}$$

d. En déduire que les points C, D et G sont aussi alignés.

Le corrigé

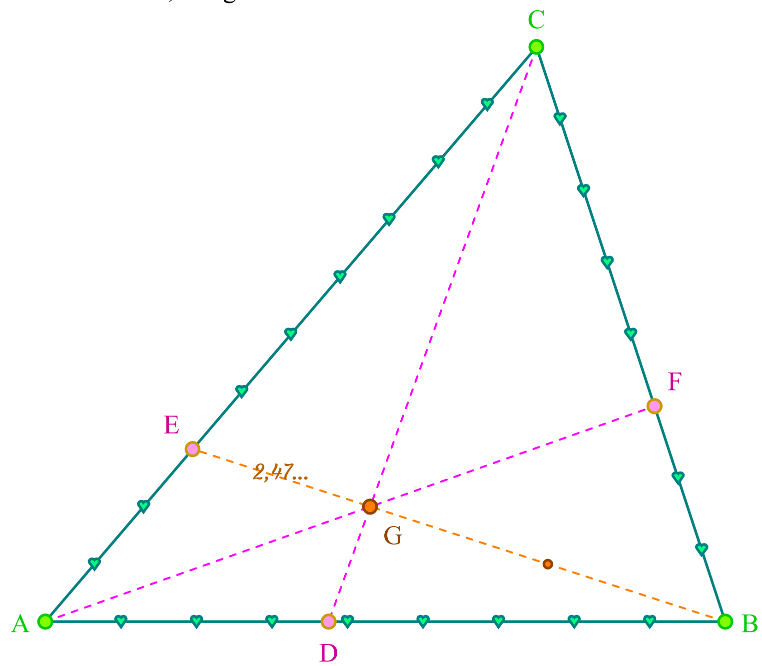
a.1. En utilisant la relation de Chasles, nous pouvons écrire :

$$7\times\overrightarrow{AD}+5\times\overrightarrow{BD}=\vec{o} \Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{AD}+\overbrace{5\times\overrightarrow{BA}+5\times\overrightarrow{AD}}^{5\overrightarrow{BD}\text{ par Chasles !}}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 12\times\overrightarrow{AD}=5\times\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AD}=\frac{5}{12}\times\overrightarrow{AB}}$$

Le point D se situe sur le segment [AB] à $\frac{5}{12}\times 9=\frac{15}{4}=3{,}75\text{cm}$ du point A.

b.1. A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



b.2. Décomposons le vecteur $\overrightarrow{AF}$ en passant par le point B.

$$\overrightarrow{AF} = \overbrace{\overrightarrow{A\boxed{B}} + \overrightarrow{\boxed{B}F}}^{\text{Chasles !}} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\times\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overbrace{\frac{3}{8}\times\overrightarrow{B\boxed{A}} + \frac{3}{8}\times\overrightarrow{\boxed{A}C}}^{\text{Encore Chasles !}}$$

$$= \frac{8}{8}\times\overrightarrow{AB} - \frac{3}{8}\times\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\times\overrightarrow{AC} = \boxed{\frac{5}{8}\times\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\times\overrightarrow{AC}}$$

b.3. Nous allons décomposer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en passant par le point E.

$$\overrightarrow{AG} = \overbrace{\overrightarrow{A\boxed{E}} + \overrightarrow{\boxed{E}G}}^{\text{Chasles !}} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\times\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE} + \overbrace{\frac{1}{3}\times\overrightarrow{E\boxed{A}} + \frac{1}{3}\times\overrightarrow{\boxed{A}B}}^{\text{Toujours Chasles !}}$$

$$= \frac{2}{3}\times\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\times\overrightarrow{AB} = \frac{2}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{10}\times\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\times\overrightarrow{AB} = \boxed{\frac{1}{3}\times\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\times\overrightarrow{AC}}$$

b.4. Comparons les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

	$\overrightarrow{AF}$		$\overrightarrow{AG}$
$\overrightarrow{AB}$	$\frac{5}{8}$	$\xrightarrow{\times\frac{8}{15}}$	$\frac{1}{3}$
$\overrightarrow{AC}$	$\frac{3}{8}$	$\xrightarrow{\times\frac{8}{15}}$	$\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{8}{15}\times\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AG}}$$

<u>Conclusion :</u> les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ étant colinéaires, les points A, G et F sont alignés.

c. En utilisant le résultat de la question **b.3**, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\times\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\times\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \overbrace{\frac{1}{3}\times\overrightarrow{A\boxed{G}} + \frac{1}{3}\times\overrightarrow{\boxed{G}B}}^{\text{Chasles !}} + \overbrace{\frac{1}{5}\times\overrightarrow{A\boxed{G}} + \frac{1}{5}\times\overrightarrow{\boxed{G}C}}^{\text{Re-Chasles !}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} - \frac{1}{3}\times\overrightarrow{AG} - \frac{1}{5}\times\overrightarrow{AG} + \frac{1}{3}\times\overrightarrow{BG} + \frac{1}{5}\times\overrightarrow{CG} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\times15 - 1\times5 - 1\times3}{15}\times\overrightarrow{AG} + \frac{1}{3}\times\overrightarrow{BG} + \frac{1}{5}\times\overrightarrow{CG} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{15}\times\overrightarrow{AG} + \frac{1}{3}\times\overrightarrow{BG} + \frac{1}{5}\times\overrightarrow{CG} = \vec{o}$$

$$\overset{\times15}{\Leftrightarrow} \boxed{7\times\overrightarrow{AG} + 5\times\overrightarrow{BG} + 3\times\overrightarrow{CG} = \vec{o}}$$

d. Repartons de la question **c.1** en y introduisant le point D.

$$7\times\overrightarrow{AG} + 5\times\overrightarrow{BG} + 3\times\overrightarrow{CG} = \vec{o} \Leftrightarrow \overbrace{7\times\overrightarrow{AD} + 7\times\overrightarrow{DG}}^{\text{Chasles !}} + \overbrace{5\times\overrightarrow{BD} + 5\times\overrightarrow{DG}}^{\text{Chasles !}} + 3\times\overrightarrow{CG} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{7\times\overrightarrow{AD} + 5\times\overrightarrow{BD}}_{=\vec{o}} + 12\times\overrightarrow{DG} + 3\times\overrightarrow{CG} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 12\times\overrightarrow{DG} + 3\times\overrightarrow{CG} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{CG} = 4\times\overrightarrow{GD}}$$

<u>Conclusion :</u> les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{GD}$ étant colinéaires, les points C, G et D sont alignés.

Géométrie totale

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ où l'on a placé les points suivants :

$$A\left(-4;-2\right) \qquad B\left(5;3\right) \qquad C\left(0;-6\right)$$

a. Le triangle ABC est-il isocèle ou équilatéral ? On justifiera sa réponse.

b. On appelle Δ la droite d'équation $4x-7y-42=0$.

1. Vérifier que le point C appartient à la droite Δ.
2. Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles ? On justifiera sa réponse.
3. Tracer la droite Δ sur le graphique ci-contre.
4. Déterminer une équation de la droite Δ' qui est la hauteur du triangle ABC issue du sommet A.
5. Déterminer les coordonnées du point D qui est l'intersection des droites Δ et Δ'.

c. On appelle G le point défini par la relation vectorielle :

$$4\times\overrightarrow{AG}+3\times\overrightarrow{BG}=2\times\overrightarrow{AC}$$

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du milieu I du segment [AC].
3. Les points B, G et I sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.

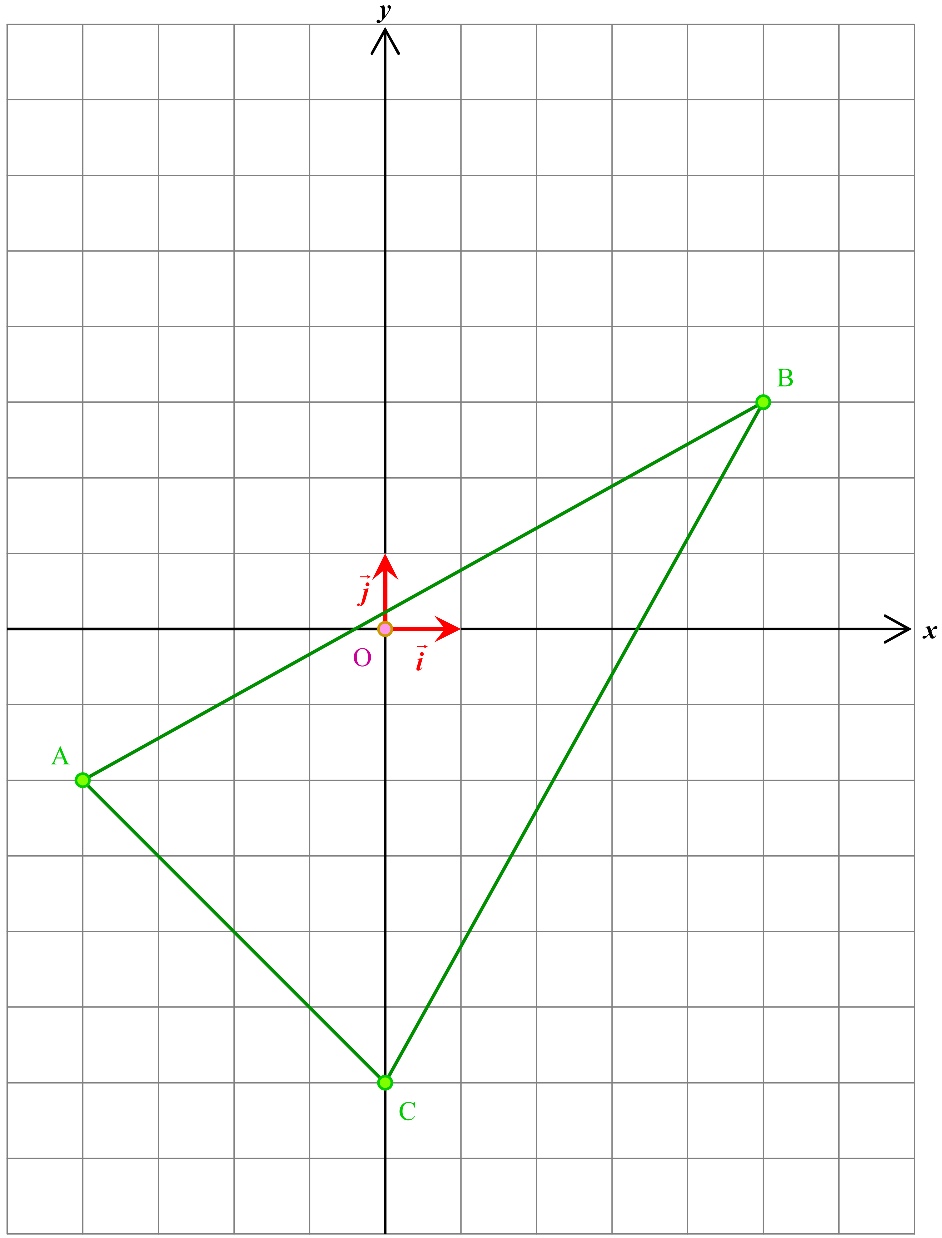
d. On appelle $\left(\Gamma\right)$ le cercle de diamètre [AB].

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\left(\Gamma\right)$.
2. Le point I appartient-il au cercle $\left(\Gamma\right)$? On justifiera sa réponse.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E qui est le point d'intersection du cercle $\left(\Gamma\right)$ avec l'axe des ordonnées $\left(O;\vec{j}\right)$ dont l'ordonnée est positive.

e. On appelle $\left(\mathscr{E}\right)$ l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$2\times AM^2+3\times BM^2+2\times CM^2=326$$

1. Etablir qu'une équation de l'ensemble $\left(\mathscr{E}\right)$ est $x^2+y^2-2x+2y-16=0$. ☠☠☠
2. Déterminer la nature et les attributs de l'ensemble $\left(\mathscr{E}\right)$.
3. Si cela est possible, tracer cet ensemble $\left(\mathscr{E}\right)$ sur la figure ci-contre.



Le corrigé

a. Calculons les longueurs des trois côtés du triangle ABC.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-(-4)=9\\3-(-2)=5\end{pmatrix} \Rightarrow AB=\sqrt{9^2+5^2}=\sqrt{81+25}=\underline{\sqrt{106}}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-(-4)=4\\-6-(-2)=-4\end{pmatrix} \Rightarrow AC=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{16+16}=\underline{\sqrt{32}=4\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-5=-5\\-6-3=-9\end{pmatrix} \Rightarrow BC=\sqrt{(-5)^2+(-9)^2}=\sqrt{25+81}=\underline{\sqrt{106}}$$

<u>Conclusion :</u> le triangle ABC est seulement isocèle en B.

b.1. Les coordonnées du point C vérifient-elles l'équation cartésienne de la droite Δ ?

$$4x_C-7y_C-42=4\times 0-7\times(-6)-42=42-42=\underline{0}$$

Ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point C appartient à la droite Δ.

b.2. Un vecteur directeur de la droite $\Delta : 4x-7y-42=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est tout simplement $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}$.

Calculons le déterminant de ces deux vecteurs :

$$\det\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}7 & 9\\4 & 5\end{vmatrix}=7\times5-4\times9=35-36=\underline{-1\neq 0}$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.
<u>Conclusion :</u> les droites Δ et (AB) ne sont pas parallèles.

b.4. La droite Δ' est la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A. Ainsi :

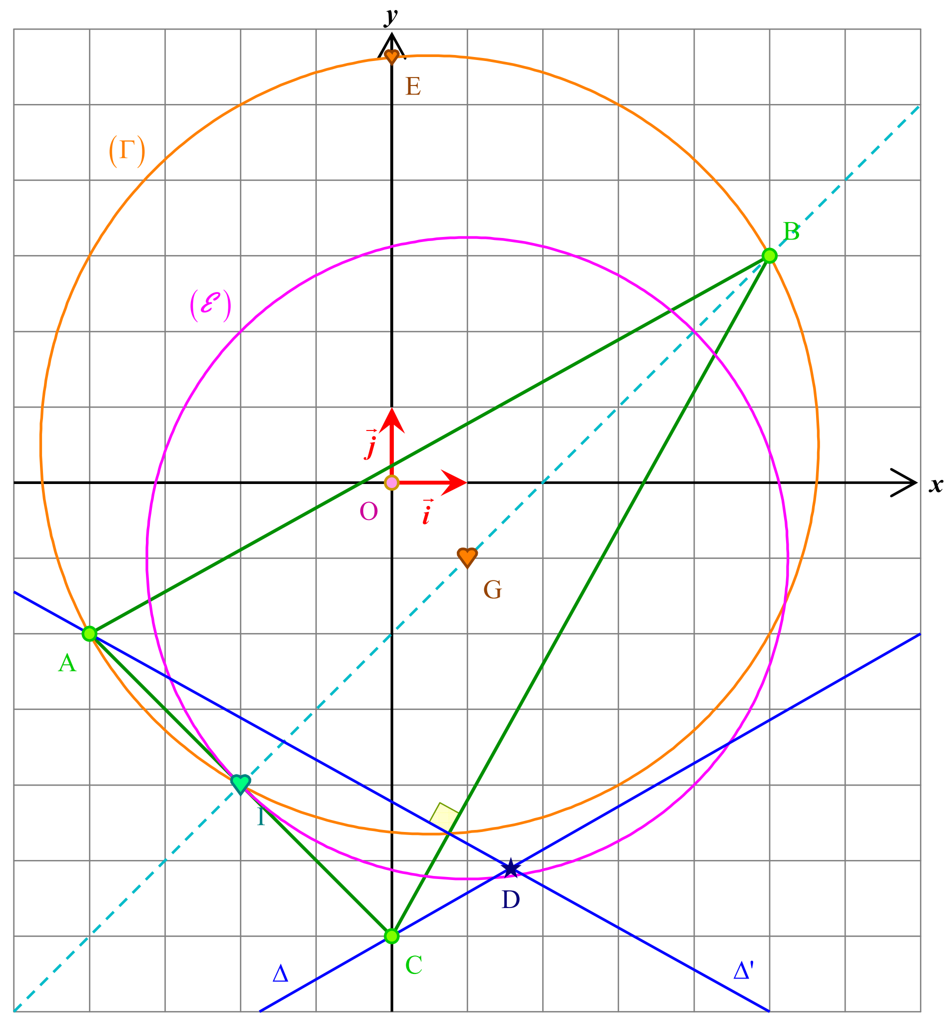
$$M(x;y)\in\Delta' \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+4\\y+2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-9\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)\times(-5)+(y+2)\times(-9)=0$$

$$\Leftrightarrow -5x-20-9y-18=0 \overset{\boxed{\times(-1)}}{\Leftrightarrow} \underline{5x+9y+38=0}$$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne de la droite Δ' est $5x+9y+38=0$.



b.5. Comme D appartient aux droites Δ et Δ', alors ses coordonnées en vérifient les deux équations et, par conséquent, sont les solutions du système :

$$\begin{cases}4x-7y-42=0 \Leftrightarrow D\in\Delta & \textit{(1)}\\5x+9y+38=0 \Leftrightarrow D\in\Delta' & \textit{(2)}\end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour obtenir x, on anéantit y.	Pour déterminer y, on élimine x.
$\begin{array}{lrl} \textit{(1)} & \xrightarrow{\times 9} & 36x-63y-378=0 \\ \textit{(2)} & \xrightarrow{\times 7} & 35x+63y+266=0 \\ \hline & & 71x-112=0 \\ & & x=\dfrac{112}{71} \end{array} \oplus$	$\begin{array}{lrl} \textit{(1)} & \xrightarrow{\times 5} & 20x-35y-210=0 \\ \textit{(2)} & \xrightarrow{\times 4} & 20x+36y+152=0 \\ \hline & & -71x-362=0 \\ & & y=-\dfrac{362}{71} \end{array} \ominus$

Conclusion : le point d'intersection D a pour coordonnées $\left(\dfrac{112}{71};-\dfrac{362}{71}\right)$.

c.1. Traduisons sous forme de coordonnées la relation vectorielle définissant le point G.

$$4\times\overrightarrow{AG}+3\times\overrightarrow{BG}=2\times\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 4\times\begin{pmatrix}x_G+4\\y_G+2\end{pmatrix}+3\times\begin{pmatrix}x_G-5\\y_G-3\end{pmatrix}=2\times\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4x_G+16\\4y_G+8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3x_G-15\\3y_G-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}7x_G+1\\7y_G-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{7x_G+1=8}^{\text{Abscisses égales}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{7y_G-1=-8}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$7x_G=7 \qquad 7y_G=-7$$

$$x_G=1 \qquad y_G=-1$$

Conclusion : le point G a pour coordonnées $(1;-1)$.

c.2. Les coordonnées du milieu I du segment [AC] sont données par :

$$x_I=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{(-4)+0}{2}=-2 \qquad \underline{\text{et}} \qquad y_I=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{(-2)+(-6)}{2}=-4$$

c.3. Toute la question est de savoir si les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires.

$$\det\left(\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BI}\right)=\begin{vmatrix}-4 & -7\\-4 & -7\end{vmatrix}=(-4)\times(-7)-(-4)\times(-7)=28-28=0$$

Comme leur déterminant est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires.
Conclusion : les points B, G et I sont bien alignés.

d.1. Le cercle (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle ABM soit rectangle en M. Par conséquent, nous avons l'équivalence :

$$M(x;y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BM} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+4\\y+2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-5\\y-3\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)\times(x-5)+(y+2)\times(y-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+4x-20+y^2-3y+2y-6=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-x-y-26=0$$

Conclusion : une équation cartésienne du cercle (Γ) est $x^2+y^2-x-y-26=0$.

d.2. Regardons si les coordonnées du point $I(-2;-4)$ vérifient l'équation de (Γ).

$$x_I^2+y_I^2-x_I-y_I-26=(-2)^2+(-4)^2-(-2)-(-4)-26$$

$$=4+16+4+4-26=0$$

Conclusion : ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point I appartient au cercle (Γ).

d.3. D'abord, le point E faisant partie de l'axe des ordonnées $(O;\vec{j})$, ses coordonnées sont de la forme $(0;y_E)$ où y_E est un réel positif.

Ensuite, E appartenant aussi au cercle (Γ), ses coordonnées en vérifient l'équation :

$$0^2+y_E^2-0-y_E-26=0 \Leftrightarrow y_E^2-y_E-26=0$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation qui est du second degré :

$$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-26)=1+104=105=\left(\sqrt{105}\right)^2$$

Son discriminant étant positif, l'équation $y_E^2-y_E-26=0$ admet deux racines distinctes.

$$y_E=\frac{-(-1)-\sqrt{105}}{2}=\underbrace{\frac{1-\sqrt{105}}{2}}_{\text{Solution négative}} \quad \underline{\text{ou}} \quad y_E=\frac{-(-1)+\sqrt{105}}{2}=\underbrace{\frac{1+\sqrt{105}}{2}}_{\text{Solution positive}}$$

Conclusion : le point E a pour coordonnées $\left(0;\dfrac{1+\sqrt{105}}{2}\right)$

e.1. Remplaçons les distances AM, BM et CM par ce qu'elles valent en x et y.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{M}(x;y)\in(\mathscr{E}) \\
\Leftrightarrow\ & 2\times \mathrm{AM}^2+3\times \mathrm{BM}^2+2\times \mathrm{CM}^2=326 \\
\Leftrightarrow\ & 2\times\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}^{\,2}+3\times\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}^{\,2}+2\times\sqrt{(x-0)^2+(y+6)^2}^{\,2}=326 \\
\Leftrightarrow\ & 2\times\left[x^2+8x+16+y^2+4y+4\right]+3\times\left[x^2-10x+25+y^2-6y+9\right] \\
& \qquad +2\times\left[x^2+y^2+12y+36\right]-326=0 \\
\Leftrightarrow\ & \overbrace{2x^2+16x+32+2y^2+8y+8}+\overbrace{3x^2-30x+75+3y^2-18y+27} \\
& \qquad +\overbrace{2x^2+2y^2+24y+72}-326=0 \\
\Leftrightarrow\ & 7x^2+7y^2-14x+14y-112=0 \overset{\div 7}{\Leftrightarrow} x^2+y^2-2x+2y-16=0
\end{aligned}$$

e.2. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(x;y)\in(\mathscr{E}) \Leftrightarrow\ & x^2-2x+y^2+2y-16=0 \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{x^2-2\times x\times 1}_{a^2-2\times a\times b}+\underbrace{y^2+2\times y\times 1}_{a^2+2\times a\times b}-16=0 \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{(x-1)^2-1}_{a^2-2\times a\times b}+\underbrace{(y+1)^2-1}_{a^2+2\times a\times b}-16=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-x_G)^2+(y-y_G)^2=18 \Leftrightarrow \mathrm{GM}=\sqrt{18} \\
\Leftrightarrow\ & \text{M appartient au cercle de centre G et de rayon } \sqrt{18}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble $(\mathscr{E})$ est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{18}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

e.3. Il n'est guère facile de tracer un cercle de rayon $3\sqrt{2}$. Mais on s'aperçoit que les coordonnées du point I vérifient l'équation de $(\mathscr{E})$.

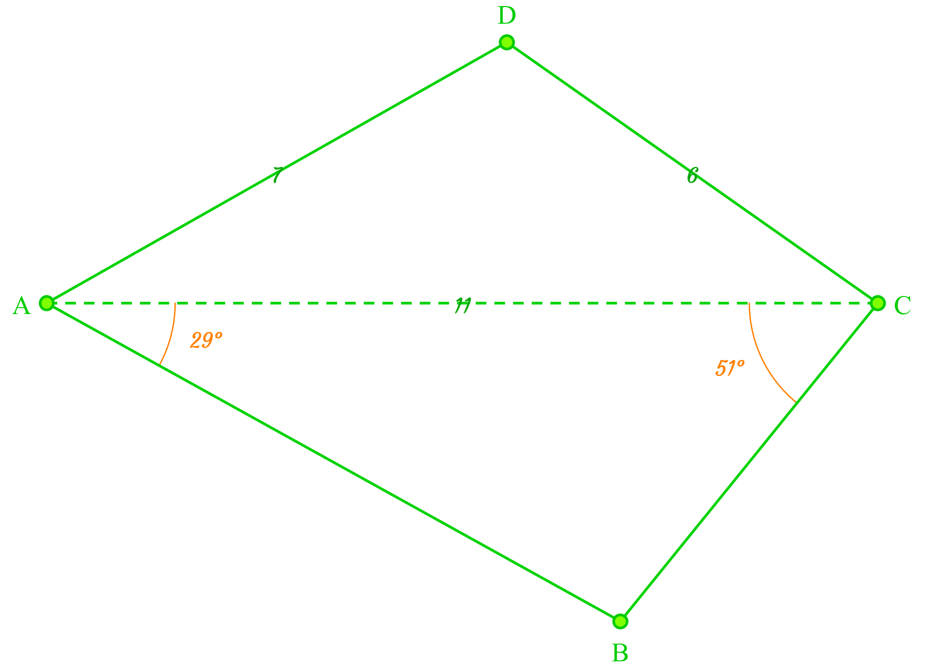
C'est ainsi que l'on dessine cet ensemble : $(\mathscr{E})$ est le cercle de centre G passant par I.

Ongles et langueurs...ou presque

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un quadrilatère tel que :

$\mathrm{AC}=11$ cm $\quad$ $\mathrm{CD}=6$ cm $\quad$ $\mathrm{AD}=7$ cm $\quad$ $\widehat{\mathrm{CAB}}=29°$ $\quad$ $\widehat{\mathrm{ACB}}=51°$



a. Déterminer une valeur approchée au centième de degré près de la mesure de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{ADC}}$.

b. Déterminer des valeurs approchées au dixième de millimètre près des longueurs des côtés AB et BC.

c. En déduire une valeur approchée au millimètre carré près de l'aire du quadrilatère ABCD. On rappelle que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du sinus d'un sommet multipliée par les longueurs des deux côtés adjacents.

Le corrigé

a. Appliquant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ACD, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2\times DA\times DC\times\cos\left(\widehat{ADC}\right) &\Leftrightarrow 121 = 49+36-84\times\cos\left(\widehat{ADC}\right) \\ &\Leftrightarrow 84\times\cos\left(\widehat{ADC}\right) = -36 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{ADC}\right) = -\frac{36}{84} = -\frac{3}{7} \\ &\Leftrightarrow \widehat{ADC} \approx 115{,}38° \end{aligned}$$

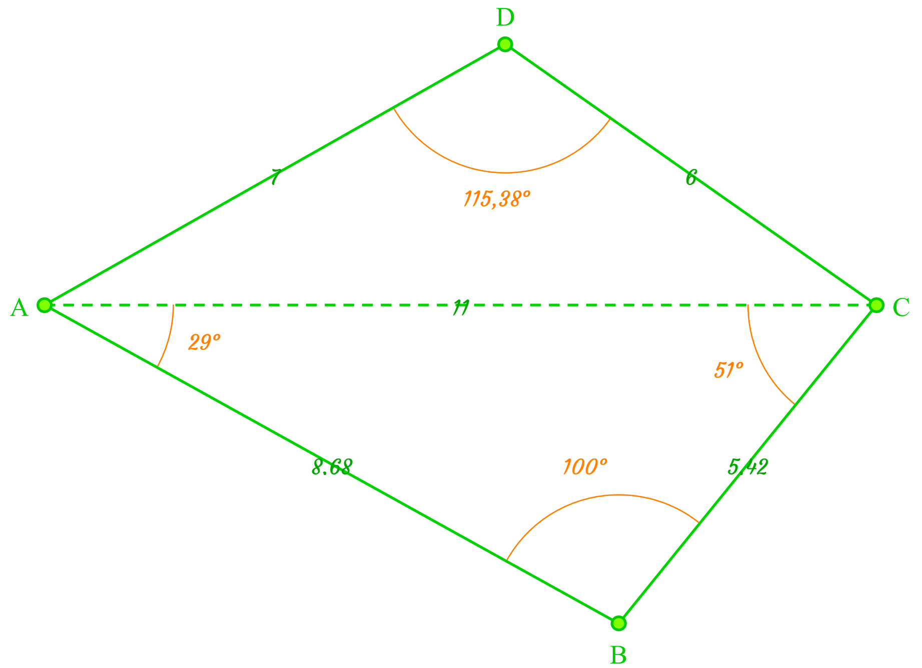
b. Appliquons la formule des sinus dans le triangle ABC :

$$\frac{\sin\left(\widehat{BAC}\right)}{BC} = \frac{\sin\left(\widehat{ABC}\right)}{AC} = \frac{\sin\left(\widehat{ACB}\right)}{AB} \Leftrightarrow \frac{\sin(29°)}{BC} = \frac{\sin(100°)}{11} = \frac{\sin(51°)}{AB}$$

Il vient alors :

$$\frac{\sin(100°)}{11} = \frac{\sin(51°)}{AB} \Leftrightarrow AB = 11\times\frac{\sin(51°)}{\sin(100°)} \approx 8{,}68 \text{ cm}$$

$$\frac{\sin(29°)}{BC} = \frac{\sin(100°)}{11} \Leftrightarrow BC = 11\times\frac{\sin(29°)}{\sin(100°)} \approx 5{,}42 \text{ cm}$$



c. Les aires des triangles ABC et ACD sont données par :

$$\mathit{Aire}(ABC) = \frac{AB\times AC\times\sin\left(\widehat{BAC}\right)}{2} \approx \frac{8{,}68\times 11\times\sin(29°)}{2} \approx 23{,}14 \text{ cm}^2$$

$$\mathit{Aire}(ACD) = \frac{DA\times DC\times\sin\left(\widehat{ADC}\right)}{2} \approx \frac{7\times 6\times\sin(115{,}38°)}{2} \approx 18{,}97 \text{ cm}^2$$

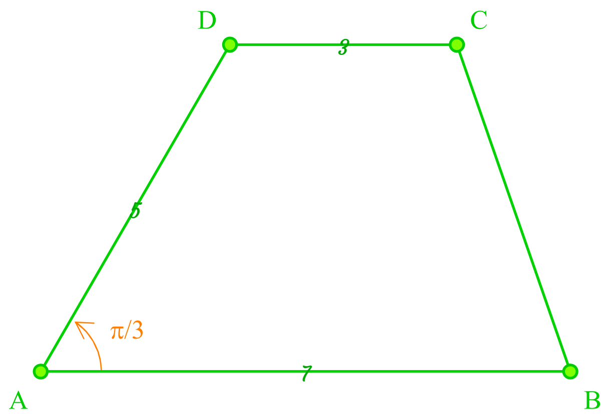
<u>Conclusion :</u> l'aire du quadrilatère ABCD est de 42,11 centimètres carrés.

Le cirque scalaire du trapèze

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze tel que :

AB = 7 cm AD = 5 cm CD = 3 cm $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{3}$



a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BA}^2$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

b. On appelle I le milieu du segment [AC].

1. Démontrer que la longueur AC mesure 7 centimètres.
2. En déduire la longueur exacte de la médiane [DI].

c. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB).

1. Calculer la longueur AH.
2. Placer sur la droite (AB) le point E tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=-49$

d. On appelle K le point du plan tel que :

$$3\times\overrightarrow{KA}+4\times\overrightarrow{KB}=\vec{o}$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$, puis placer le point K.
2. Soit M un point quelconque du plan.
   Démontrer que $3\times\overrightarrow{MA}+4\times\overrightarrow{MB}=7\times\overrightarrow{MK}$.
3. M étant toujours un point quelconque du plan, établir l'égalité :

$$3\times MA^2+4\times MB^2=7\times MK^2+84$$

e. Déterminer la nature et les attributs, puis tracer les ensembles de points suivants. Chaque ensemble fait appel à un résultat établi au cours de l'exercice.

1. L'ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}=-49$.
2. L'ensemble $\mathcal{E}_2$ des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=-13$.
3. L'ensemble $\mathcal{E}_3$ des points M tels que $3\times\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CB}=4\times\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

L'ensemble $\mathcal{E}_4$ des points M tels que $3\times MA^2+4\times MB^2=196$

Le corrigé

a. Calculons les produits scalaires demandés :

$$\overrightarrow{BA}^2=BA^2=7^2=\underline{49}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos\left(\widehat{BAD}\right)=7\times5\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=35\times\frac{1}{2}=\underline{17,5}$$

$$\overbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}^{\text{Deux vecteurs colinéaires de sens opposés}}=-AB\times CD=-7\times3=\underline{-21}$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}$$

$$=BA^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=49-17,5-21=\underline{10,5}$$

b.1. En appliquant le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ADC, nous pouvons écrire :

$$AC^2=DA^2+DC^2-2\times DA\times DC\times\cos\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$$

D'abord, calculons l'angle orienté :

$$\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)=\left(-\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DC}\right)+\pi=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\underline{\frac{2\pi}{3}\quad\text{modulo } 2\pi}$$

Ensuite, nous pouvons calculer le carré de la diagonale AC :

$$AC^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=25+9-30\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\underline{49}$$

Nous en déduisons :

$$AC=\sqrt{49}=\underline{7\text{cm}}$$

b.2. Un théorème de la médiane appliqué au point D et au segment [AC] de milieu I nous permet d'écrire l'égalité :

$$2\times DI^2+\frac{AC^2}{2}=DA^2+DC^2 \iff 2\times DI^2+\frac{7^2}{2}=5^2+3^2$$
$$\iff 2\times DI^2+24{,}5=25+9$$
$$\iff 2\times DI^2=9{,}5 \iff DI^2=4{,}75=\frac{19}{4}$$
$$\iff DI=\sqrt{\frac{19}{4}}=\frac{\sqrt{19}}{2}$$

c.1. Le point H étant le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB), le triangle AHD est rectangle en H. Par conséquent :

$$\cos\left(\widehat{DAH}\right)=\frac{AH}{AD} \iff AH=AD\times\cos\left(\widehat{DAH}\right)=5\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\times\frac{1}{2}=2{,}5\text{cm}$$

c.2. D'abord, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HE}\right)$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DH}}^{\text{Orthogonaux}}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HE}=-21+0+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HE}=-21+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HE}$$

Il vient alors :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=-49 \iff -21+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HE}=-49 \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HE}=-28$$

Les points H et E appartenant à la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HE}$ sont colinéaires. Leur produit scalaire étant négatif, leurs sens sont opposés. Reprenons !

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HE}=-28 \iff -AB\times HE=-28 \iff -7\times HE=-28 \iff HE=\frac{-28}{-7}=4\text{ cm}$$

<u>Conclusion :</u> E se trouve à 4 centimètres à gauche de H, soit 1,5 de A sur la droite (AB).

d.1. Nous pouvons écrire :

$$3\times\overrightarrow{KA}+4\times\overrightarrow{KB}=\vec{o} \iff \overbrace{3\times\overrightarrow{KB}+3\times\overrightarrow{BA}}^{\text{Merci Chasles !}}+4\times\overrightarrow{KB}=\vec{o}$$
$$\iff 3\times\overrightarrow{BA}=7\times\overrightarrow{BK} \iff \overrightarrow{BK}=\frac{3}{7}\times\overrightarrow{BA}$$

<u>Conclusion :</u> le point K se trouve aux trois septièmes du segment [BA] à partir de B. Donc à 3 centimètres de B et 4 de A.

d.2. Pour tout point M du plan, nous pouvons écrire :

$$3\times\overrightarrow{MA}+4\times\overrightarrow{MB}=\overbrace{3\times\overrightarrow{MK}+3\times\overrightarrow{KA}}^{\text{Re-merci Chasles !}}+\overbrace{4\times\overrightarrow{MK}+4\times\overrightarrow{KB}}^{\text{Gloire à toi, Chasles !}}$$
$$=7\times\overrightarrow{MK}+\underbrace{3\times\overrightarrow{KA}+4\times\overrightarrow{KB}}_{\substack{=\vec{o}\\ \text{d'après la définition de K}}}=7\times\overrightarrow{MK}$$

d.3. Pour tout point M du plan, nous pouvons écrire :

$$3\times MA^2+4\times MB^2=3\times\overrightarrow{MA}^2+4\times\overrightarrow{MB}^2$$
$$=3\times\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}\right)^2+4\times\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}\right)^2$$
$$=3\times\left[\overrightarrow{MK}^2+\overrightarrow{KA}^2+2\times\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KA}\right]+4\times\left[\overrightarrow{MK}^2+\overrightarrow{KB}^2+2\times\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KB}\right]$$
$$=3\times MK^2+3\times KA^2+6\times\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KA}+4\times MK^2$$
$$+4\times KB^2+8\times\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{KB}$$
$$=7\times MK^2+3\times KA^2+4\times KB^2+3\times\boxed{2\times\overrightarrow{MK}}\cdot\overrightarrow{KA}+4\times\boxed{2\times\overrightarrow{MK}}\cdot\overrightarrow{KB}$$
$$=7\times MK^2+3\times KA^2+4\times KB^2+\boxed{2\times\overrightarrow{MK}}\cdot\underbrace{\left(3\times\overrightarrow{KA}+4\times\overrightarrow{KB}\right)}_{\substack{=\vec{o}\\ \text{d'après la définition de K}}}$$
$$=7\times MK^2+3\times 4^2+4\times 3^2+0=7\times MK^2+84$$

e.1. Nous pouvons écrire :

$$M\in\mathcal{E}_1 \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}=-49$$
$$\iff \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EM}\right)=-49 \iff \cancel{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EM}=\cancel{-49}$$
$$\iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EM}=0 \iff \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{EM} \text{ sont orthogonaux}$$
$$\iff M\in\text{perpendiculaire à la droite (AB) passant par E.}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}_1$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par E.

e.2. Le point I étant le milieu du segment [AC], nous pouvons écrire en application d'un certain énoncé du théorème de la médiane :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=MI^2-IA^2=MI^2-3{,}5^2=MI^2-12{,}25$$

Il vient alors :

$$M\in\mathcal{E}_2 \iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=-13 \iff MI^2-12{,}25=-13 \iff \underbrace{MI^2=-0{,}75}_{\substack{\text{Impossible !}\\ \text{Un carré n'est}\\ \text{jamais négatif.}}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}_2$ est vide.

e.3. Concernant l'ensemble $\mathscr{E}_3$, nous pouvons écrire :

$$M \in \mathscr{E}_3 \Leftrightarrow 3\times\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CB} = 4\times\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BC}$$
$$\Leftrightarrow 3\times\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CB} - 4\times\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$$
$$\Leftrightarrow 3\times\overrightarrow{MA}\cdot\boxed{\overrightarrow{CB}} + 4\times\overrightarrow{MB}\cdot\boxed{\overrightarrow{CB}} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(3\times\overrightarrow{MA}+4\times\overrightarrow{MB}\right)}_{\substack{=7\times\overrightarrow{MK} \\ \text{d'après la question } \mathbf{d.2}}}\cdot\boxed{\overrightarrow{CB}} = 0$$
$$\Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{CB} = 0 \overset{\boxed{\div 7}}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{MK}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$$

$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow$ M $\in$ perpendiculaire à la droite (CB) passant par K.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathscr{E}_3$ est la droite perpendiculaire à la droite (CB) passant par le point K.

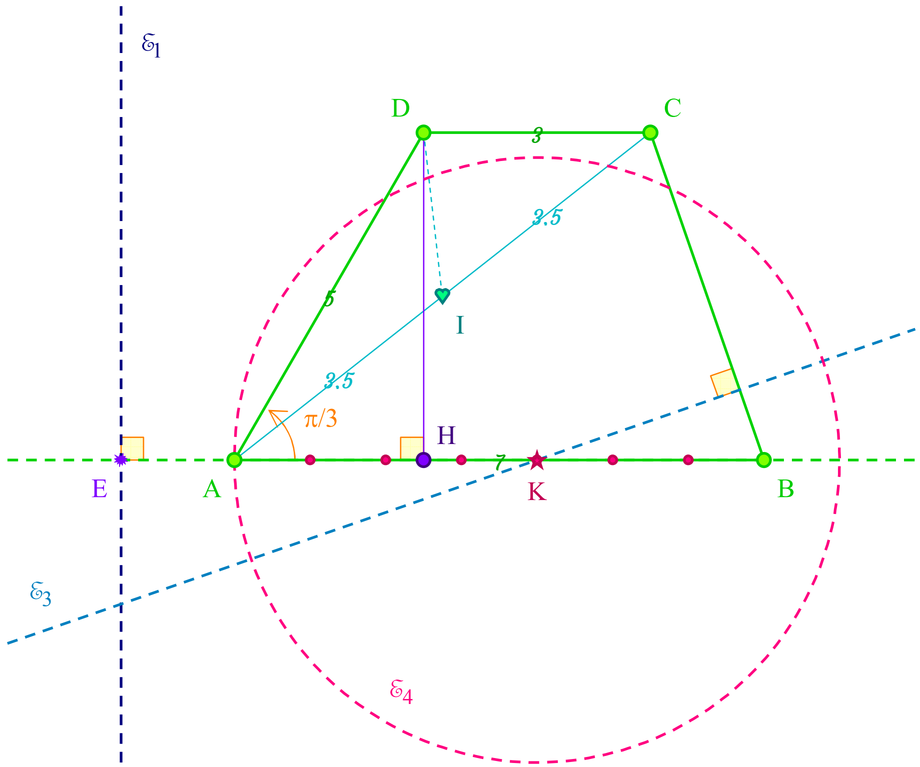
e.4. Nous pouvons écrire :

$$M \in \mathscr{E}_4 \Leftrightarrow \underbrace{3\times MA^2 + 4\times MB^2}_{\substack{=7\times MK^2+84 \\ \text{d'après la question } \mathbf{d.3}}} = 196$$
$$\Leftrightarrow 7\times MK^2 + 84 = 196 \Leftrightarrow 7\times MK^2 = 112 \Leftrightarrow MK^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow MK = 4$$

$\Leftrightarrow$ M $\in$ cercle de centre K de rayon 4 (donc passant par A).

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathscr{E}_4$ est le cercle de centre K passant par le point A.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Probabilités

A taaable !

L'énoncé

J'ai plein d'amis qui en viendraient presque aux mains tant ils souhaitent tous venir manger à ma table chaque dimanche. Hélas, je ne puis accueillir que sept invités à ma table où les places sont indifférenciées tellement c'est un plaisir de partager ma table.
Exactement, j'ai 25 amis qui se répartissent comme suit :

- ♥ 13 ont plus de quarante ans et parmi ceux-ci il y a exactement 5 femmes.
- ♥ Le reste a moins de quarante ans et parmi ceux-ci il y a exactement 8 femmes.

Souhaitant préserver la paix parmi tous mes amis, je décide de procéder à un tirage au sort pour déterminer les sept veinards qui auront le plaisir de déjeuner à ma table ce dimanche. Ayant écrit leurs 25 noms sur autant de petits papiers pliés que j'ai mis dans un chapeau, je prélève en une seule fois une poignée de sept petits papiers dont les noms griffonnés constitueront ma tablée. La tablée compte exactement sept invités, aucune place n'est vide et étant l'hôte, je ne fais pas partie de la tablée.

a. Combien de tablées différentes puis-je constituer avec mes 25 amis ?
b. Combien de tablées différentes ne sont constituées que de femmes ?
c. Combien de tablées différentes ne sont constituées que de femmes de plus de quarante ans ?
d. Combien de tablées différentes sont constituées exactement de quatre femmes de moins de quarante ans et de trois hommes de plus de quarante ans ?
e. Combien existe-t-il de tablées où il y a exactement deux femmes de plus de quarante ans et deux hommes de moins de quarante ans ?
f. Combien existe-t-il de tablées comportant au moins un homme ?

Le corrigé

Les places autour de la table étant indifférenciées et le tirage au sort des noms s'effectuant en une seule fois, il s'agit d'un tirage simultané dont les résultats sont des combinaisons. Par suite :

a. Au total, il existe $\overbrace{\binom{25}{7}}^{\text{7 personnes à choisir parmi 25}} = \dfrac{25\times24\times23\times22\times\cancel{21}\times\cancel{20}\times19}{\cancel{7}\times6\times\cancel{5\times4}\times\cancel{3}\times2\times1} = \underline{480700}$ tablées possibles.

b. Il existe $\overbrace{\binom{13}{7}}^{\text{7 femmes à choisir parmi 13}} = \dfrac{13\times\cancel{12}\times11\times\cancel{10}\times9\times8\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times6\times\cancel{5}\times\cancel{4\times3}\times\cancel{2}\times1} = \underline{1716}$ tablées constituées uniquement de femmes.

c. Etant donné qu'il n'existe que 5 femmes de plus de 40 ans, je ne peux pas constituer une tablée uniquement avec celles-ci.

d. Il existe $\overbrace{\binom{8}{4}}^{\text{4 femmes de moins de 40 ans à choisir parmi 8}} \times \overbrace{\binom{8}{3}}^{\text{3 hommes de plus de 40 ans à choisir parmi 8}} = 70\times56 = \underline{3920}$ tablées constituées exactement de quatre femmes de moins de 40 ans et de trois hommes de plus de quarante ans.

e. Il existe $\overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{2 femmes de plus de 40 ans à choisir parmi 5}} \times \overbrace{\binom{4}{2}}^{\text{2 hommes de moins de 40 ans à choisir parmi 4}} \times \overbrace{\binom{16}{3}}^{\text{3 autre personne à choisir parmi 16}} = 10\times6\times560 = \underline{33600}$ tablées comportant exactement deux femmes de plus de quarante ans et deux hommes de moins de quarante ans.

f. «Au moins un homme» signifie qu'il peut y en avoir entre 1 et 7. Plutôt que de dénombrer tous les cas possibles, nous allons passer par l'événement contraire d'«au moins un homme» qui est «aucun homme», c'est-à-dire «que des femmes».
Depuis la question **b.** nous savons qu'il existe 1716 tablées uniquement constituées de femmes.
Donc il existe $480700-1716=\underline{478984}$ tablées comportant au moins un homme.

Coup de bol...ou de bambou ?

L'énoncé

Dans ma grande générosité confinant à la maladie mentale incurable, j'ai décidé de tirer au hasard et simultanément cinq copies parmi toutes celles que vous allez me rendre. Aux cinq heureux lauréats de mon tirage au sort, j'accorderai un quart de point en plus que je ne refuserai pas aux autres.

1. Combien existe-t-il de tirages possibles ?
2. Quelle est la probabilité que le quinté gagnant soit composé de trois copies de filles et deux copies de garçons ?

Le corrigé

Le tirage des cinq heureux lauréats étant simultané, les résultats sont des combinaisons que nous dénombrerons avec les fameux «*p* parmi *n*».

a. Il existe au total $\overbrace{\binom{18}{5}}^{\text{5 copies à choisir parmi 18}} = \dfrac{18\times17\times16\times\cancel{15}\times14}{\cancel{5}\times4\times\cancel{3}\times2\times1} = \underline{8568}$ quintés possibles.

b. Il existe $\overbrace{\binom{9}{3}}^{\text{3 copies de filles à choisir parmi 9}} \times \overbrace{\binom{9}{2}}^{\text{2 copies de garçons à choisir parmi 9}} = 84\times36 = \underline{3024}$ quintés composés de trois filles et deux garçons. La probabilité d'un tel quinté est donc de $\dfrac{3024}{8568} = \boxed{\dfrac{6}{17}}$

La folie du jeu

L'énoncé

Afin de célébrer le retour des beaux jours, la *Blancoise des Jeux* vient de lancer le *7 dans le chapeau*.

Le principe de ce jeu est le suivant. D'abord, le joueur s'acquitte d'une mise de m euros.

Dans un chapeau, se trouvent dix boules indiscernables au toucher et numérotées de ***0*** à ***9***.

Le joueur tire au hasard une première boule.

- Si cette première boule porte le numéro *7*, il gagne 700€.
- Si cette première boule tirée porte un numéro strictement inférieur à *7*, il a perdu.
- Si cette première boule tirée porte un numéro strictement supérieur à *7*, alors il tire une seconde boule sans avoir remis la première dans le chapeau.
  Si cette seconde boule tirée porte le numéro *7*, il gagne 700€. Sinon il est remboursé de sa mise m.

a. Un joueur se présente pour jouer au *7 dans le chapeau*.

1. Construire un arbre pondéré décrivant une partie de *7 dans le chapeau*.
2. Montrer que la probabilité que le joueur gagne 700€ est égale à $\dfrac{11}{90}$.

b. On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique ou net (mise m déduite) obtenu par le joueur à une partie de *7 dans le chapeau*.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Etablir que l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X est donnée par la formule $E(X) = \dfrac{3850-37m}{45}$.
3. La *Blancoise des Jeux* fixe la mise à $m = 100$€. Le jeu est-il favorable ou défavorable à la compagnie ?
4. A combien la compagnie doit-elle fixer la mise pour escompter faire des bénéfices sur une partie de *7 dans le chapeau* ?

c. Pris d'un coup de folie, Nick Heunithaite décide de jouer vingt fois de suite au *7 dans le chapeau*. Ces vingt parties sont réputées indépendantes les unes des autres. Le résultat de l'une n'influe pas sur les résultats des autres.

On appelle N la variable aléatoire égale au nombre de parties qu'il gagne sur les 20 jouées.

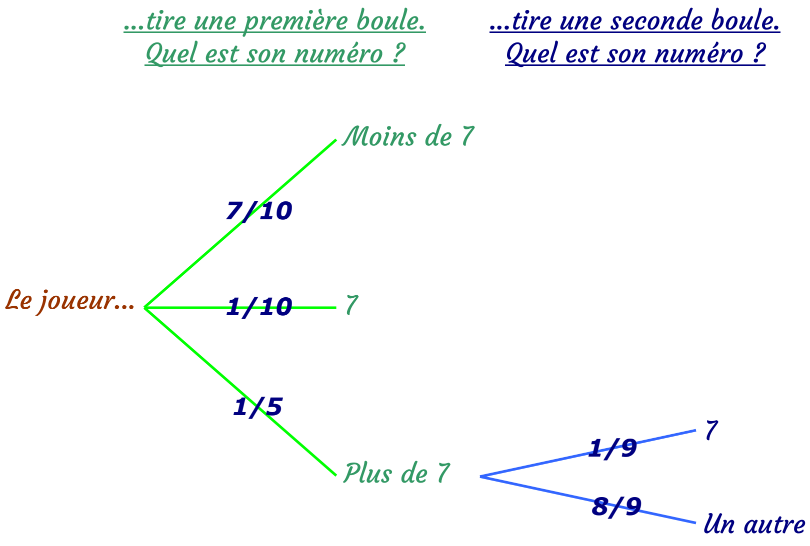
On considère qu'il gagne une partie lorsque son gain brut à celle-ci est égal à 700€.

Dans les questions suivantes, les probabilités seront données au dix-millième-près.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire N ? On justifiera sa réponse.
2. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 3 parties sur les 20 qu'il joue.
3. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins 7 parties sur 20 qu'il joue.

Le corrigé

a.1. La situation d'une partie de *7 dans le chapeau* peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :



a.2. La probabilité qu'un joueur gagne 700€ est donnée par :

$$p(\text{«700€»}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{45} = \frac{1\times 9 + 1 \times 2}{90} = \frac{11}{90}$$

b.1. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs en euros suivantes : $-m \quad 0 \quad 700-m$

Sa loi de probabilité est la suivante :

$$p(X=-m) = \frac{7}{10} \qquad p(X=0) = \frac{1}{5} \times \frac{8}{9} = \frac{8}{45} \qquad p(X = 700-m) = \frac{11}{90}$$

b.2. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum \text{probabilité} \times \text{valeur} \\ &= \frac{7}{10} \times (-m) + \frac{8}{45} \times 0 + \frac{11}{90} \times (700-m) \\ &= -\frac{7}{10} m + \frac{770}{9} - \frac{11}{90} m \\ &= \frac{770}{9} - \frac{7\times 9 + 11}{90} m = \frac{770}{9} - \frac{37}{45} m = \frac{770 \times 5 - 37m}{45} = \frac{3850-37m}{45} \end{aligned}$$

b.3. Lorsque la mise m est fixée à 100 euros, l'espérance $E(X)$ est égale à :

$$E(X) = \frac{3850 - 37 \times 100}{45} = \frac{150}{45} \approx 3{,}33€$$

<u>Conclusion :</u> sur chaque partie, le joueur peut espérer gagner environ 3,33€. Le jeu est donc défavorable à la compagnie.

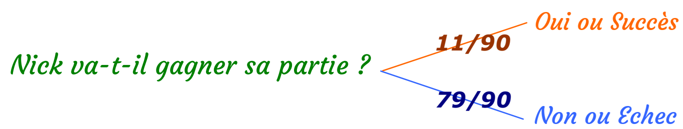
b.4. Pour que la compagnie fasse des bénéfices sur son jeu, il faut et il suffit que l'espérance de gain du joueur soit négative.

$$E(X) < 0 \iff \frac{3850-37m}{45} < 0 \xrightarrow{\times 45} 3850 - 37m < 0 \iff 3850 < 37m$$

$$\iff m > \frac{3850}{37} €$$

<u>Conclusion :</u> pour que la compagnie fasse des bénéfices, la mise m doit être supérieure à 104,06 euros.

c.1. Chaque partie de *7 dans le chapeau* est pour Nick une terrible épreuve de Bernoulli.



Les 20 parties indépendantes les unes des autres forment un schéma de Bernoulli de 20 épreuves. La variable aléatoire N comptant le nombre de «succès» parmi les 20 parties jouées suit donc la loi binomiale $B\left(20; \frac{11}{90}\right)$.

c.2. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(N=3) = \underbrace{\binom{20}{3} \times \left(\frac{11}{90}\right)^3 \times \left(\frac{79}{90}\right)^{17}}_{\text{ou directement avec la fonction distribution particulière binomiale de la calculatrice.}} \approx 0{,}2269$$

c.3. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(N \geq 7) = \underbrace{1 - p(N \leq 6) \approx 1 - 0{,}9926}_{\text{Avec la fonction distribution cumulative binomiale de la calculatrice.}} = 0{,}0074$$

Suites

Intermède en attendant la suite

L'énoncé

a. (u_n) est une suite arithmétique dont deux des termes sont :

$$u_{27} = 56 \qquad \underline{\text{et}} \qquad u_{83} = -196$$

Calculer le terme u_{2013}.

b. La suite (v_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} v_7 = 10 \\ v_{n+1} = v_n + n^2 + 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Calculer les termes v_9 et v_5.

Le corrigé

a. La première chose à faire est de déterminer la raison r de cette suite arithmétique (u_n).

Celle-ci vérifie l'égalité :

$$u_{83} = u_{27} + (83-27) \times r \iff -196 = 56 + 56 \times r \iff -252 = 56 \times r$$

$$\iff r = \frac{-252}{46} = \underline{-4,5}$$

Nous en déduisons :

$$u_{2013} = u_{27} + (2013-27) \times (-4,5) = 56 + 1986 \times (-4,5) = 56 - 8937 = \underline{-8881}$$

b. Pour calculer le terme v_9, il faut au préalable trouver le terme précédent v_8.

$$\begin{cases} v_8 = v_7 + 7^2 + 2 = 10 + 49 + 2 = \underline{61} \\ v_9 = v_8 + 8^2 + 2 = 61 + 64 + 2 = \underline{127} \end{cases}$$

Pour connaître le terme v_5, nous devons au préalable déterminer le terme v_6.

$$\begin{cases} v_7 = v_6 + 6^2 + 2 \iff 10 = v_6 + 38 \iff v_6 = 10 - 38 = \underline{-28} \\ v_6 = v_5 + 5^2 + 2 \iff -28 = v_5 + 27 \iff v_5 = -28 - 27 = \underline{-55} \end{cases}$$

Eco-irresponsables

L'énoncé

La *Blancoise Radioactive* est une compagnie minière des *Indres Occidentales* exploitant deux mines fournissant de l'hypéranium, un matériau fissile pour centrales nucléaires.
On étudie les productions hebdomadaires de ces deux mines sur une année complète soit 52 semaines.

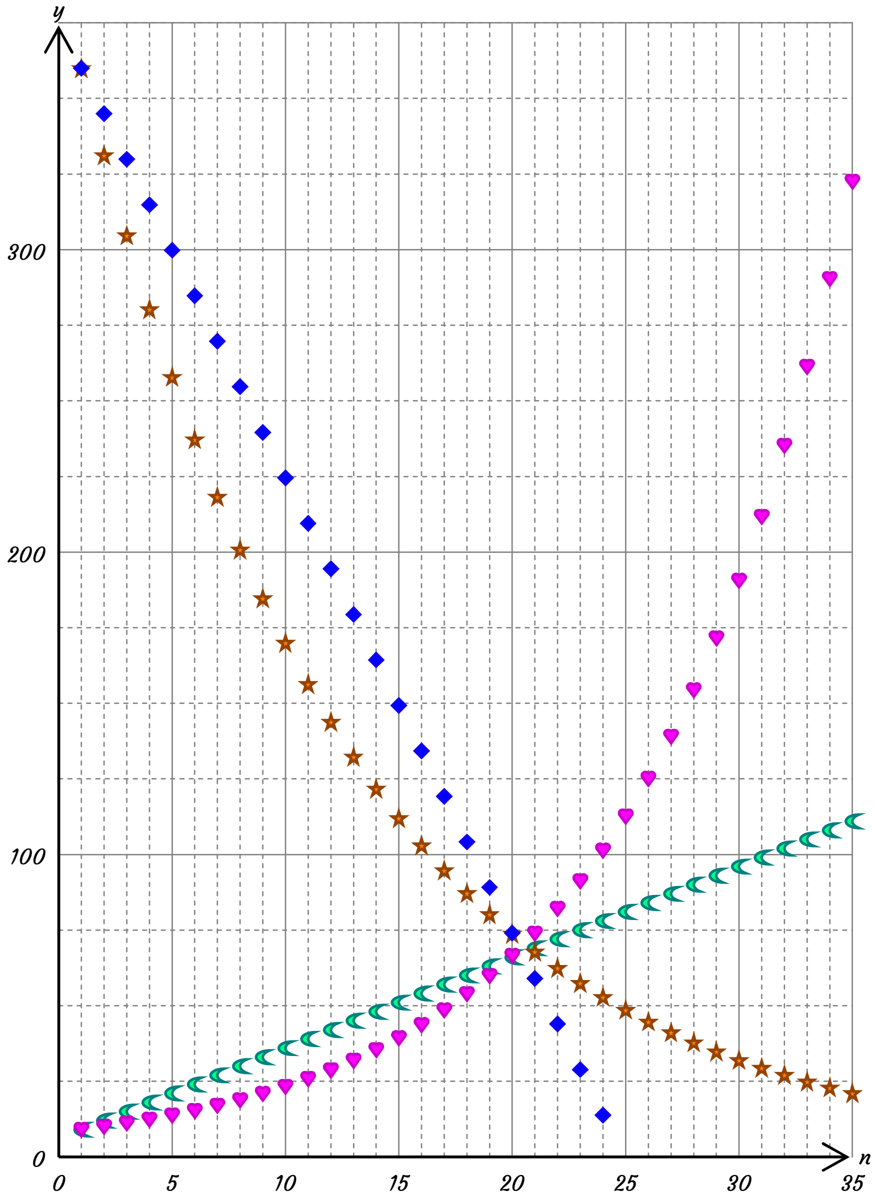
a. La première mine produit 360 kilogrammes d'hyperanium la première semaine de cette année étudiée. Mais chacune des semaines suivantes, cette production hebdomadaire baisse de 8% par rapport à la production de la semaine précédente.
On appelle a_n la <u>production hebdomadaire</u> d'hyperanium exprimées en kilogrammes de cette première mine durant la semaine n. On a donc $a_1 = 360$.

1. Calculer les termes a_2 et a_3.
2. Quelle est la nature de la suite (a_n) ? On précisera ses attributs.
3. Exprimer a_n en fonction de n.
4. Parmi les propositions suivantes, laquelle est une valeur approchée au kilogramme-près de la production de la première mine durant la vingtième semaine de l'année étudiée ? On justifiera sa réponse.
   62kg 74kg 86kg 98kg
5. Calculer la <u>production totale</u> de la première mine durant l'année complète.

b. La seconde mine produit 9 kilogrammes d'hyperanium la première semaine de cette année étudiée. Mais chacune des semaines suivantes, cette production hebdomadaire augmente de 3 kilogrammes par rapport à la production de la semaine précédente.
On appelle b_n la <u>production hebdomadaire</u> d'hyperanium exprimée en kilogrammes de cette seconde mine durant la semaine n. On a donc $b_1 = 9$.

1. Calculer les termes b_2 et b_3.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? On précisera ses attributs.
3. Exprimer b_n en fonction de n.
4. Parmi les propositions suivantes, laquelle est une valeur approchée au kilogramme-près de la production de la seconde mine durant la vingtième semaine de l'année étudiée ? On justifiera sa réponse.
   54kg 60kg 66kg 72kg
5. Déterminer la semaine à partir de laquelle la production hebdomadaire de cette seconde mine devient inférieure à celle de la première mine.
6. Calculer la production totale de la seconde mine sur l'année complète.
   Conclure.

c. Sur la figure ci-dessous, on a construit quatre suites de points. Deux d'entre elles représentent les suites $\left(a_n\right)$ et $\left(b_n\right)$. Les identifier. Aucune justification n'est demandée.



Le corrigé

a.1. D'après l'énoncé, nous pouvons écrire :

$$a_2 = a_1 - 8\% \text{ de } a_1 = \boxed{a_1} - 0,08 \times \boxed{a_1} = \boxed{a_1} \times (1-0,08) = 0,92 \times a_1 = 331,2\text{kg}$$
$$a_3 = a_2 - 8\% \text{ de } a_2 = 0,92 \times a_1 = 304,704€$$

a.2. De manière générale, comme, pour tout entier positif n, nous avons :

$$a_{n+1} = a_n - 8\% \text{ de } a_n = \boxed{a_n} - 0,08 \times \boxed{a_n} = \boxed{a_n} \times (1-0,08) = 0,92 \times a_n$$

alors la suite $\left(a_n\right)$ est géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $a_1 = 360$.

a.3. Nous en déduisons que pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = 360 \times 0,92^{n-1}$$

a.4. La production de la vingtième semaine de la première mine est donnée par :

$$a_{20} = 360 \times 0,92^{20-1} = 360 \times 0,92^{19} \approx 73,84\text{kg}$$

a.5. La production d'une année complète de cette première mine est donnée par la somme :

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{52}}_{\text{Somme de } \boxed{52} \text{ termes consécutifs d'une suite géométrique}} = a_1 \times \frac{1-0,92^{\boxed{52}}}{1-0,92} = 360 \times \frac{1-0,92^{52}}{0,08} \approx 4441,1\text{kg}$$

b.1. D'après l'énoncé, nous avons :

$$b_2 = b_1 + 3 = 12\text{kg}$$
$$b_3 = b_2 + 3 = 15\text{kg}$$

b.2. De manière générale, comme, pour tout entier positif n, nous avons :

$$b_{n+1} = b_n + 3$$

alors la suite $\left(b_n\right)$ est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $b_1 = 9$.

b.3. Nous en déduisons que pour tout entier naturel n, nous avons :

$$b_n = b_1 + (n-1) \times r = 9 + (n-1) \times 3 = 9 + 3n - 3 = 6 + 3n$$

b.4. La production de la vingtième semaine de la seconde mine est donnée par :

$$b_{20} = 6 + 3 \times 20 = 66\text{kg}$$

b.5. La suite (a_n) est clairement décroissante alors que la suite (b_n) est décroissante.

La suite (b_n) est inférieure à la suite (a_n) dés la première semaine et ce, jusqu'à la vingtième semaine. A partir de la vingt-et-unième semaine, les choses s'inversent définitivement. En effet, nous avons :

$$a_{20} > b_{20} \quad \text{mais} \quad a_{21} \approx 67{,}9 < b_{21} = 69$$

b.6. La production d'une année complète de cette seconde mine est donnée par la somme :

$$\underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{52}}_{\text{Somme de } \boxed{52} \text{ termes consécutifs d'une suite arithmétique}} = 52 \times \frac{b_1 + b_{52}}{2} = 52 \times \frac{9 + (6 + 3 \times 52)}{2} = 52 \times \frac{171}{2} = \underline{4446\text{kg}}$$

<u>Conclusion :</u> sur une année complète, la seconde mine est légèrement plus productive que la première.

c. La suite (b_n) est arithmétique, c'est-à-dire, par abus de langage, affine. Les points qui la représentent doivent donc être alignés. La suite (b_n) étant également croissante, elle est représentée par les «clairs de lune».

La suite (a_n) est décroissante, géométrique mais surtout non affine. Par conséquent, elle est représentée par les «étoiles».

Très cher Toto

L'énoncé

a. L'heure des comptes est venue pour Toto. La semaine de la rentrée, sa môman lui avait donné 45 euros d'argent de poche. Elle lui avait également dit que s'il travaillait bien à l'école, alors l'argent de poche qu'elle lui donnait chaque semaine serait augmenté de 2,30 euros par rapport à la somme de la semaine précédente.
Cela fait 14 semaines que Toto est rentré et contrairement à certaines personnes, il a été exemplaire à l'école.
Calculer la somme totale perçue par Toto sur ces 14 semaines.

b. Prévoyant, Toto avait négocié avec son papa le même genre de rétribution sauf que les modalités étaient différentes.
La semaine de la rentrée, son papa donna à Toto 45 euros. Puis, il lui promit que, chaque semaine, s'il était sage en classe, cette somme hebdomadaire serait augmentée de 4,3% par rapport à celle de la semaine précédente.
Calculer la somme totale perçue par Toto sur ces 14 semaines.

Le corrigé

a. On appelle u_n la somme perçue par Toto la n-ième semaine de cours depuis la rentrée.

$$\begin{aligned}
&u_1 = \underline{45€} \\
&u_2 = u_1 + 2{,}3 = \underline{47{,}3€} \\
&u_3 = u_2 + 2{,}3 = \underline{49{,}6€} \\
&\qquad \ldots \\
&u_{n+1} = u_n + 2{,}3
\end{aligned}$$

Clairement, la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 2{,}3$ et de premier terme $u_1 = 45$.
Par conséquent, la somme perçue par Toto sur les 14 premières semaines est donnée par :

$$\underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{14}}_{\text{Somme de 14 termes consécutifs d'une suite arithmétique}} = 14 \times \frac{u_1 + u_{14}}{2} = 14 \times \frac{45 + (45 + 13 \times 2{,}3)}{2} = \underline{839{,}30€}$$

b. On appelle v_n la somme perçue par Toto de son papa la n-ième semaine de cours depuis la rentrée. Nous avons :

$$\begin{aligned}
&v_1 = 45 \\
&v_2 = v_1 + 4{,}3\% \text{ de } v_1 = \boxed{v_1} + 0{,}043 \times \boxed{v_1} = (1 + 0{,}043) \times \boxed{v_1} \approx \underline{46{,}94€} \\
&v_3 = v_2 + 4{,}3\% \text{ de } v_2 = 1{,}043 \times v_2 \approx \underline{48{,}95} \\
&\qquad \ldots \\
&v_{n+1} = v_n + 4{,}3\% \text{ de } v_n = 1{,}043 \times v_n
\end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=1,043$ et de premier terme $v_1=45$. Par conséquent, la somme perçue par Toto sur les 14 premières semaines est donnée par :

$$\underbrace{v_1+v_2+v_3+\ldots+v_{14}}_{\text{Somme de 14 termes consécutifs d'une suite géométrique}}=v_1\times\frac{1-q^{14}}{1-q}=45\times\frac{1-1,043^{14}}{1-1,043}=840,28€$$

Sans limites

L'énoncé

Déterminer les limites lorsque l'entier n tend vers $+\infty$ des suites suivantes :

a. $a_n=\sqrt{n}-\dfrac{1}{n^2+1}$ **b.** $b_n=100n^2-n^3+1000n+1$

c. $c_n=\dfrac{2-5^n}{2^n-5}$ **d.** $d_n=\dfrac{(-1)^n}{n+(0,2)^n}$

Le corrigé

a. De prime abord :

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}-\frac{1}{n^2+1}=(+\infty)-\frac{1}{(+\infty)+1}=(+\infty)-\frac{1}{(+\infty)}=(+\infty)-0^+=+\infty$$

b. Au premier regard :

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}100n^2-n^3+1000n+1=(+\infty)-(+\infty)+(+\infty)+1=\boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

Pour lever l'indétermination, nous allons factoriser la suite (b_n) par son terme nous semblant le plus fort qui est n^3.

$$\begin{aligned}b_n&=100n^2-n^3+1000n+1\\&=100\times\frac{n^2}{n^3}\times\boxed{n^3}-1\times\boxed{n^3}+1000\times\frac{n}{n^3}\times\boxed{n^3}+\frac{1}{n^3}\times\boxed{n^3}\\&=\boxed{n^3}\times\left[100\times\frac{1}{n}-1+1000\times\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right]\end{aligned}$$

Ayant suffisamment affaibli les termes en conflit, la limite de la suite se déterminer désormais sans trop de peines !

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}b_n&=\lim_{n\to+\infty}n^3\times\left[100\times\frac{1}{n}-1+1000\times\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right]\\&=(+\infty)\times\left[100\times0^+-1+1000\times0^++0^+\right]\\&=(+\infty)\times\left[0^+-1+0^++0^+\right]=(+\infty)\times(-1)=-\infty\end{aligned}$$

c. Au premier coup d'oeil :

$$\lim_{n\to+\infty}c_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{2-5^n}{2^n-5}=\frac{2-(+\infty)}{(+\infty)-5}=\frac{-\infty}{+\infty}=\boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

L'indétermination va être levée en factorisant les numérateur et dénominateur de c_n par leurs termes nous semblant les plus forts. Puis, ils s'expliqueront entre eux !

$$c_n = \frac{2-5^n}{2^n-5} = \frac{5^n \times \left[\frac{2}{5^n}-1\right]}{2^n \times \left[1-\frac{5}{2^n}\right]} = \frac{5^n}{2^n} \times \frac{\frac{2}{5^n}-1}{1-\frac{5}{2^n}} = \left(\frac{5}{2}\right)^n \times \frac{\frac{2}{5^n}-1}{1-\frac{5}{2^n}} = 2,5^n \times \frac{\frac{2}{5^n}-1}{1-\frac{5}{2^n}}$$

La limite de la suite (c_n) est alors directement accessible !

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} 2,5^n \times \frac{\frac{2}{5^n}-1}{1-\frac{5}{2^n}} = (+\infty)\times\frac{\frac{2}{+\infty}-1}{1-\frac{5}{+\infty}} = (+\infty)\times\frac{0^+-1}{1-0^+} = (+\infty)\times\frac{-1}{1} = -\infty$$

d. La puissance $(-1)^n$ est alternativement égale à 1 ou -1 suivant que l'entier n soit pair ou impair. Pour connaître l'éventuelle limite de la suite (d_n), ces deux cas sont à envisager séparément.

- La sous-suite des termes de rang pair :

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ pair}}} d_n = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n+(0,2)^n} = \frac{1}{(+\infty)+0^+} = \frac{1}{(+\infty)} = 0^+$$

- La sous-suite des termes de rang impair :

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ impair}}} d_n = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ impair}}} \frac{-1}{n+(0,2)^n} = \frac{-1}{(+\infty)+0^+} = \frac{-1}{(+\infty)} = 0^-$$

Ces deux sous-suites ayant la même limite, nous en déduisons :

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$$

L'étang sont durs

L'énoncé

Toto possède un étang qui, au premier matin de l'été, contient 3000 mètres cubes d'eau.
Mais l'été est beau et chaque jour de celui-ci, l'étang perd 12% de son volume d'eau du fait de l'évaporation due au soleil resplendissant, à la chaleur accablante et à l'aridité ambiante.
Pour compenser cette perte d'eau, Toto a été autorisé par décision préfectorale à rajouter chaque soir dans son étang exactement 240 mètres cubes d'eau qu'il puise dans la rivière longeant son étang.
On appelle v_n le volume d'eau exprimé en mètres cubes contenu dans l'étang au soir du jour n de l'été après le rajout quotidien de 240 m^3 autorisé par la préfecture.
Pour note, le volume initial d'eau est de $v_0 = 3000 \text{ m}^3$.

a. Calculer les termes v_1 et v_2, puis vérifier que v_3 est «proche» de 2680 mètres cubes.
Sans justifications, compléter, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante :

$$v_{n+1} = \ldots\ldots \times v_n + \ldots\ldots$$

b. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$a_n = v_n - 2000$$

1. Calculer le terme a_0.
2. En complétant le raisonnement partiel suivant :
$$a_{n+1} = v_{n+1} \pm \ldots\ldots$$
$$= \ldots = \ldots\ldots \times v_n \pm \ldots\ldots = \ldots\ldots \times (a_n \pm \ldots\ldots) \pm \ldots\ldots = \ldots = \ldots\ldots \times a_n$$
Démontrer que la suite (a_n) est géométrique. On précisera sa raison.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, nous avons $v_n = 1000 \times 0,88^n + 2000$
4. Déterminer la limite de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
Toto craint que son étang soit totalement asséché à la fin de l'été. Ses craintes sont-elles fondées ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a. Calculons les premiers termes de la suite.

$$v_1 = v_0 - \overbrace{12\% \text{ de } v_0}^{\text{Evaporation}} + \overbrace{240}^{\text{Rajout}} = \boxed{v_0} - 0{,}12 \times \boxed{v_0} + 240 = \boxed{v_0} \times \overbrace{0{,}88}^{1-0{,}12} \times v_0 + 240 = 2880 \text{ m}^3$$

$$v_2 = v_1 - \overbrace{12\% \text{ de } v_1}^{\text{Evaporation}} + \overbrace{240}^{\text{Rajout}} = 0{,}88 \times v_1 + 240 = 2774{,}4 \text{ m}^3$$

$$v_3 = v_2 - \overbrace{12\% \text{ de } v_2}^{\text{Evaporation}} + \overbrace{240}^{\text{Rajout}} = 0{,}88 \times v_2 + 240 = 2681{,}472 \text{ m}^3$$

De manière générale, nous pouvons écrire que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$v_{n+1} = v_n - \overbrace{12\% \text{ de } v_n}^{\text{Evaporation}} + \overbrace{240}^{\text{Rajout}} = \boxed{v_n} - 0{,}12 \times \boxed{v_n} + 240 = 0{,}88 \times \boxed{v_n} + 240$$

b.1. Calculons le premier terme de la suite annexe (a_n).

$$a_0 = 3000 - 2000 = 1000$$

b.2. Pour entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \underbrace{v_{n+1}} - 2000 \\ &= \underbrace{0{,}88 \times v_n + 240} - 2000 \\ &= 0{,}88 \times v_n - 1760 \\ &= 0{,}88 \times (a_n + 2000) - 1760 = 0{,}88 \times a_n + \cancel{1760} - \cancel{1760} = 0{,}88 \times a_n \end{aligned}$$

Donc la suite annexe (a_n) est géométrique de raison $q = 0{,}88$.

b.3. La suite (a_n) étant géométrique de raison $q = 0{,}88$ et de premier terme $a_0 = 1000$, nous avons pour tout entier naturel n :

$$a_n = a_0 \times q^n = 1000 \times 0{,}88^n$$

Il vient alors :

$$a_n = v_n - 2000 \quad \Leftrightarrow \quad v_n = a_n + 2000 = 1000 \times 0{,}88^n + 2000$$

b.4. La limite de la suite (v_n) est donnée par :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} 1000 \times \boxed{0{,}88^n} + 2000 = 1000 \times 0^+ + 2000 = 0^+ + 2000 = 2000$$

La limite précédente est très claire : le volume d'eau de l'étang va tendre vers 2000 mètres cubes. Par conséquent, l'étang sera loin d'être asséché à la fin de l'été. Les craintes de Toto sont infondées.

Drôle de zozo et tête à Toto.

L'énoncé

Toto est content car son cousin Zozo lui a proposé de lui louer le bistrot qu'il tient en centre-ville.

a. Zozo a annoncé à son cousin Toto que 82% de ses clients étaient satisfaits du service fourni. Méfiant, Toto a décidé de vérifier cette affirmation en effectuant une petite enquête. Au hasard des rencontres, il a demandé à 107 clients du bistrot s'ils étaient satisfaits du service.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de clients du bistrot satisfaits du service.

1. En supposant que Zozo dise vrai, quelle est la loi de probabilité de X ? On justifiera sa réponse.
2. En supposant que Zozo dise vrai, calculer la probabilité qu'exactement 81 personnes soient satisfaites du service. On donnera le résultat arrondi au dix-millième près.
3. Toto a conçu l'algorithme suivant :

   i et n sont deux entiers naturels et, p est un réel
   On demande à l'utilisateur de saisir une valeur pour n
   p prend pour valeur 0
   Pour i allant de 0 à n
       p prend la valeur $p + \binom{107}{i} \times 0{,}82^i \times 0{,}18^{107-i}$
   Fin du Pour
   En sortie, afficher la valeur de p

   Exécuter cet algorithme sachant que l'utilisateur donne 2 pour valeur à n.
   Que calcule cet algorithme ?
4. En utilisant la table fournie ci-après, déterminer les entiers suivants :

   n_0 est le plus petit entier tel que $p(X \le n_0) > 0{,}025$
   n_1 est le plus petit entier tel que $p(X \le n_1) \ge 0{,}975$
5. Au cours de son enquête, Toto a compté 81 clients satisfaits du service.
   Au seuil de risque 5%, peut-il considérer que son cousin Zozo lui a dit vrai ?

b. Finalement, Toto a accepté l'offre de Zozo. Les deux cousins ont signé un contrat.
On appelle c_n le chiffre d'affaire hebdomadaire net réalisé par Toto la $n+1$-ième semaine du contrat de location.
La première semaine, Toto réalise un chiffre d'affaire hebdomadaire net de $c_0 = 3000€$.
Du fait du nombre croissant de clients, les semaines suivantes, ce chiffre d'affaire hebdomadaire net augmente d'abord chaque semaine de 4% par rapport à celui de la semaine précédente. Puis, à la fin de chaque semaine, ce chiffre d'affaire hebdomadaire net doit être amputé de 130€ qui correspondent au loyer versé par Toto à Zozo.

1. Calculer c_1.
   Parmi les propositions suivantes, entourer celle qui est une valeur approchée à l'unité près de c_2.
   a $c_2 \approx 2740$ **b** $c_2 \approx 2830$ **c** $c_2 \approx 2980$ **d** $c_2 \approx 3020$
2. Pour tour entier naturel n, exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.
3. Toto vient de rédiger l'algorithme suivant :

   ```
   n est un entier naturel et c un réel
   n prend la valeur 0 et c prend la valeur 3000
   Tant que c > 0
       n prend la valeur n+1
       c prend la valeur 1,04×c−130
   Fin du Tant que
   En sortie, afficher la valeur de n
   ```

   Que calcule cet algorithme ? On ne demande pas (encore) de donner la valeur qu'il affiche.
4. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier n par :
   $$a_n = c_n - 3250$$
   Calculer a_0
   Démontrer que la suite (a_n) est géométrique.
5. Etablir que pour tout entier naturel n, on a : $c_n = 3250 - 250 \times 1,04^n$
6. En déduire la limite de la suite (c_n).
7. En utilisant la calculatrice, donner la valeur affichée par le second algorithme de Toto énoncé lors de la question **b.3**.
8. Calculer la somme $S = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{64} + a_{65}}_{\text{Somme des 66 premiers termes de la suite } (a_n)}$.
   En déduire le chiffre d'affaire total que Toto réalise sur les 66 premières semaines du contrat de location.

Loi de probabilité cumulée de la variable aléatoire X :

n	p(X≤n)	n	p(X≤n)	n	p(X≤n)	n	p(X≤n)	n	p(X≤n)
60	5,24E-10	70	3,17E-05	80	3,83E-02	90	7,52E-01	100	1
61	1,87E-09	71	7,73E-05	81	6,21E-02	91	8,27E-01	101	1
62	6,40E-09	72	1,81E-04	82	9,64E-02	92	8,87E-01	102	1
63	2,12E-08	73	4,08E-04	83	1,44E-01	93	9,31E-01	103	1
64	6,74E-08	74	8,83E-04	84	2,05E-01	94	9,61E-01	104	1
65	2,07E-07	75	1,84E-03	85	2,80E-01	95	9,80E-01	105	1
66	6,11E-07	76	3,66E-03	86	3,68E-01	96	9,90E-01	106	1
67	1,74E-06	77	7,01E-03	87	4,65E-01	97	9,96E-01	107	1
68	4,75E-06	78	1,29E-02	88	5,65E-01	98	9,98E-01		
69	1,25E-05	79	2,27E-02	89	6,63E-01	99	9,99E-01		

Le corrigé

a.1. Chaque client rencontré au hasard est pour Toto une épreuve de Bernoulli :

Par suite, les 107 clients rencontrés forment un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de clients rencontrés, suit la loi binomiale $B(n = 107 ; p = 0,82)$.

a.2. La probabilité qu'exactement 81 clients sur les 107 rencontrés apprécient le service est donnée par :

$$p(X = 81) = \underbrace{\binom{107}{81} \times 0,82^{81} \times 0,18^{36}}_{\text{Se calcule aussi avec la fonction } \textbf{BinomDP} \text{ de la calculatrice}} \approx 0,02376$$

a.3. Exécutons l'algorithme de Toto lorsque l'utilisateur saisit . $n = 2$

$n = 2 \quad p = 0$

i doit prendre toutes valeurs entières entre 0 et 2

Pour $i = 0$

$$p = p + \binom{107}{0} \times 0,82^0 \times 0,18^{107} = 0 + p(X=0) = p(X=0) \approx 2,1\times 10^{-80}$$

Pour $i = 1$

$$p = p + \binom{107}{1} \times 0,82^1 \times 0,18^{106} = p(X=0) + p(X=1) = p(X \le 1) \approx 1\times 10^{-77}$$

Pour $i = 2$

$$p = p + \binom{107}{2} \times 0,82^2 \times 0,18^{105} = p(X\le 1) + p(X=2) = p(X \le 2) \approx 2,4\times 10^{-75}$$

On affiche la valeur de p c'est-à-dire la probabilité $p(X \le 2) \approx 2,4\times 10^{-75}$

L'algorithme calcule la probabilité cumulée $p(X \le n) = p(X=0) + \ldots + p(X=n)$

C'est avec cet algorithme que Toto peut remplir le tableau donné ci-après.

a.4. D'après le tableau qui donne les probabilités cumulées de la variable aléatoire X, on détermine :

$n_0 = 80$ car $p(X \le 79) \approx \boxed{0,0223}$ et $p(X \le 80) \approx \boxed{0,0383}$

$n_1 = 95$ car $p(X \le 94) \approx \boxed{0,961}$ et $p(X \le 95) \approx \boxed{0,980}$

a.5. D'après ce qui précède, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% pour les effectifs pour un échantillon de 107 individus est $[80;95]$.

L'effectif observé de 81 personnes faisant partie de l'intervalle de fluctuation $[80;95]$, on peut accepter au seuil de risque 5% l'hypothèse que Zozo dise vrai.

b.1. Les chiffres d'affaire nets réalisés les deuxième et troisième semaines du contrat sont donnés par :

$$c_1 = c_0 + \underbrace{4\% \text{ de } c_0}_{\text{La croissance}} - \underbrace{130}_{\text{Le loyer}}$$

$$= c_0 + 0,04\times c_0 - 130 = 1,04\times c_0 - 130 = 1,04\times 3000 - 130 = \boxed{2990€}$$

$$c_2 = c_1 + \underbrace{4\% \text{ de } c_1}_{\text{La croissance}} - \underbrace{130}_{\text{Le loyer}} = 1,04\times c_1 - 130 = 1,04\times 2990 - 130 = \boxed{2979,60€}$$

Parmi les réponses proposées, la correcte est donc la $\boxed{c}$.

b.2. De manière générale, on montre que pour tout entier naturel n, on a :

$$c_{n+1} = c_n + \underbrace{4\% \text{ de } c_n}_{\text{La croissance}} - \underbrace{130}_{\text{Le loyer}} = c_n + 0,04\times c_n - 130 = \boxed{1,04\times c_n - 130}$$

b.3. Pour comprendre à quoi sert l'algorithme, exécutons les «premières passes» !

$n = 0 \quad c = 3000$

Comme $c > 0$, on effectue la boucle

$n = n + 1 = 1$

$c = 1,04\times c - 130 = 2990 = c_1$

Comme $c > 0$, on effectue la boucle

$n = n + 1 = 2$

$c = 1,04\times c - 130 = 2979,6 = c_2$

Comme $c > 0$, on effectue la boucle

$n = n + 1 = 3$

$c = 1,04\times c - 130 = 2968,784 = c_3$

......

On affiche la première valeur de n pour laquelle $c \le 0$

Cet algorithme calcule consécutivement tous les termes de la suite (c_n) jusqu'à ce qu'ils deviennent négatifs ou nuls.

b.4. Calculons le premier terme de la suite annexe (a_n).

$$a_0 = c_0 - 3250 = 3000 - 3250 = \boxed{-250}$$

Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$a_n = c_n - 3250 \quad \Leftrightarrow \quad a_n + 3250 = c_n$$

Il vient alors :

$$a_{n+1} = c_{n+1} - 3250$$

$$= \underbrace{1,04\times c_n - 130}_{c_{n+1}} - 3250 = 1,04\times u_n - 3380$$

$$= 1,04\times \underbrace{(a_n + 3250)}_{u_n} - 3380$$

$$= 1,04\times a_n + 1,04\times 3250 - 3380 = 1,04\times a_n + \cancel{3380} - \cancel{3380} = \boxed{1,04\times a_n}$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $a_0 = -250$.

b.5. Donc pour tout entier naturel n, nous avons :

$$\begin{cases} a_n = a_0 \times q^n = \boxed{-250 \times 1,04^n} \\ c_n = 3250 + a_n = \boxed{3250 - 250 \times 1,04^n} \end{cases}$$

b.6. Déterminons la limite de la suite (c_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} 3250 - 250 \times \boxed{1,04^n} = 3250 - 250 \times \boxed{(+\infty)} = 3250 - \infty = \boxed{-\infty}$$

b.7. D'après le tableau de valeurs de la calculatrice calculé avec $f(x) = 3250 - 250 \times 1,04^x$ les termes de la suite (c_n) deviennent négatifs ou nuls lorsque $n \geq 66$.

Conclusion : la valeur de n affichée par l'algorithme de la question **b.3** est 66.

b.8. Nous pouvons écrire :

$$S = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{64} + a_{65}}_{\substack{\text{Somme des } \boxed{66} \text{ premiers termes} \\ \text{de la suite géométrique } (a_n) \text{ de raison } q=1,04}}$$

$$= a_0 \times \frac{1 - 1,04^{\boxed{66}}}{1 - 1,04} = -250 \times \frac{1 - 1,04^{\boxed{66}}}{-0,04} \approx \boxed{-76941,78}$$

Le chiffre d'affaire total réalisé par Toto sur les 66 premières semaines est donné par :

$$c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{65} = \overbrace{\underbrace{3250 + a_0}_{c_0} + \underbrace{3250 + a_1}_{c_1} + \underbrace{3250 + a_2}_{c_2} + \ldots + \underbrace{3250 + a_{65}}_{c_{65}}}^{\text{Au total 66 paires de termes}}$$

$$= 66 \times 3250 + \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{65}}_{S}$$

$$= 214500 - 76941,78 \approx \boxed{137558,22€}$$

Et l'année prochaine, ce sera vachement plus pire !

Sommaire du rodéo :