Algèbre, équations et inéquations

En cas de roman !

L'énoncé

a est un réel de l'intervalle $]-3;7[$ et b un réel de l'intervalle $]-5;-2[$.

Déterminer les plus petits intervalles auxquels appartiennent les nombres suivants :

$$S = 7-4a \qquad \text{et} \qquad T = 2a-b+1$$

Le corrigé

➲ Déduisons un encadrement du nombre $S = 7-4a$ de celui de a.

$$a \in]-3;7[\quad \Leftrightarrow \quad -3 < a < 7 \quad \xrightarrow{\times(-4)} \quad 12 > -4a > -28$$

$$\xrightarrow{+7} \quad 19 > \underbrace{7-4a}_{S} > -21 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{S \in]-21;19[}$$

<u>Conclusion :</u> le plus petit intervalle auquel appartient le nombre S est $]-21;19[$.

➲ Déduisons un encadrement du nombre $T = 2a-b+1$ de ceux de a et b.

$$a \in]-3;7[\quad \Leftrightarrow \quad -3 < a < 7 \quad \xrightarrow{\times 2} \quad -6 < 2a < 14 \quad \Leftrightarrow \quad -6 < 2a < 14 \quad \oplus$$

$$b \in]-5;-2[\quad \Leftrightarrow \quad -5 < b < -2 \quad \xrightarrow{\times(-1)} \quad 5 > -b > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < -b < 5$$

$$-4 < 2a-b < 19$$

$$\xrightarrow{+1} \quad -3 < \underbrace{2a-b+1}_{T} < 20$$

<u>Conclusion :</u> le plus petit intervalle auquel appartient le nombre T est $]-3;20[$.

Produits et quotients

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. On conclura chaque résolution en donnant l'ensemble des solutions.

a. $(-6x-2)\times(7-x) \geq 0$ **b.** $\dfrac{2x+3}{(4x-1)\times(5-2x)} \leq 0$

c. $5x > 3x^2$ **d.** $16x^2 \geq 24x+7$ **e.** $\dfrac{4}{x+3} > \dfrac{5}{3-x}$

Le corrigé

a. Résoudre cette inéquation, c'est savoir quand le produit $(-6x-2)\times(7-x)$ est positif ou nul. Examinons les deux facteurs affines $ax+b$ composant ce produit.

$\overset{a\ominus}{\boxed{-6}}\times x-2$ s'annule quand $-6x-2=0 \Leftrightarrow -6x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{-6}=\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

$\overset{a\ominus}{\boxed{-1}}\times x+7$ s'annule lorsque $7-x=0 \Leftrightarrow -x=-7 \Leftrightarrow x=\boxed{7}$

Nous en déduisons que le tableau de signe de ce produit est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		7		$+\infty$
$-6x-2$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$-x+7$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

On termine toujours par le signe de a.

Le produit $(-6x-2)\times(7-x)$ est positif ou nul avant $-\dfrac{1}{3}$ et après 7, les deux compris.

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de cette première inéquation est :

$$\boxed{S = \left]-\infty;-\frac{1}{3}\right] \cup [7;+\infty[}$$

b. Quand le quotient $\dfrac{2x+3}{(4x-1)\times(5-2x)}$ est-il négatif ou nul ? Telle est la question posée par cette deuxième inéquation.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Examinons les trois facteurs affines $ax+b$ composant ce quotient.

$\overset{a\oplus}{\boxed{2}}\times x+3$ s'annule lorsque $2x+3=0 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3}{2}=-1,5$

$\overset{a\oplus}{\boxed{4}}\times x-1$ s'annule lorsque $4x-1=0 \Leftrightarrow 4x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}=0,25$

$\overset{a\ominus}{\boxed{-2}}\times x+5$ s'annule lorsque $-2x+5=0 \Leftrightarrow -2x=-5 \Leftrightarrow x=2,5$

Nous en déduisons que le tableau de signe du quotient est le suivant ↗
Seules les «parties négatives ou nulles» de celui-ci nous intéresserons !

x	$-\infty$		$-1,5$		$0,25$		$2,5$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-2x+5$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur quotient		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de la deuxième inéquation est :

$$S=\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$$

c. La résolution de cette troisième inéquation nécessite une petite factorisation.

$$5x>3x^2 \Leftrightarrow 5x-3x^2>0 \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x}\times 5-3x\times\boxed{x}}^{\text{Facteur commun}}>0 \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x}\times(5-3x)}^{\text{Quand ce produit est-il positif ?}}>0$$

Le tableau de signe de ce produit est le suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-3x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les facteurs s'annulent en...

$x=0$ C'est tout !

$-3x+5=0$

$-3x=-5$

$x=\dfrac{5}{3}$

L'ensemble des solutions de cette troisième inéquation est : $S=\left]0;\dfrac{5}{3}\right[$

d. Cette quatrième inéquation nécessite aussi une petite factorisation...

$$16x^2-24x-7\geq 0 \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{(4x)^2-2\times 4x\times 3}}^{a^2-2\times a\times b}-7\geq 0 \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{(4x-3)^2-9}}^{(a-b)^2-b^2}-7\geq 0$$

On ramène tout à gauche, puis on factorise en utilisant la forme canonique.

$$\Leftrightarrow \underbrace{(4x-3)^2-16}_{a^2-b^2}\geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left[(4x-3)+4\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(4x-3)-4\right]}_{(a-b)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(4x+1)\times(4x-7)\geq 0}_{\text{Quand ce quotient est-il positif ou nul ?}}$$

Le tableau de signe de ce dernier produit est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Où ces facteurs s'annulent-ils ?

$4x+1=0$ et $4x-7=0$

$4x=-1$ $\quad$ $4x=1$

$x=-\dfrac{1}{4}$ $\quad$ $x=\dfrac{7}{4}$

L'ensemble des solutions de cette quatrième inéquation est : $S=\left]-\infty;-0,25\right]\cup\left[1,75;+\infty\right[$

e. Cette dernière inéquation se résout l'étude du signe d'un quotient.

$$\frac{4}{x+3}>\frac{5}{3-x} \Leftrightarrow \frac{4}{x+3}-\frac{5}{3-x}>0 \Leftrightarrow \frac{4\times(3-x)-5\times(x+3)}{(x+3)(3-x)}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12-4x-5x-15}{(x+3)(3-x)}>0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{-9x-3}{(x+3)(3-x)}}_{\text{Quand ce quotient est-il positif ?}}>0$$

Le tableau de signe de ce quotient est :

x	$-\infty$		-3		$-1/3$		3		$+\infty$
$-9x-3$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$-x+3$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S=\left]-3;-\dfrac{1}{3}\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Mauvais signe

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

a. $(3x+7)^2 \leq (7x-3)^2$ **b.** $\dfrac{7}{2-x} \geq 9x+6$

Le corrigé

a. Cette première inéquation nécessite une petite factorisation pour être résolue.

$$(3x+7)^2 \leq (7x-3)^2 \iff \overbrace{(3x+7)^2-(7x-3)^2}^{a^2-b^2} \leq 0$$

$$\iff \overbrace{\left[(3x+7)+(7x-3)\right]}^{(a+b)} \times \overbrace{\left[(3x+7)-(7x-3)\right]}^{(a-b)} \leq 0$$

$$\iff [3x+7+7x-3]\times[3x+7-7x+3] \leq 0$$

$$\iff \underbrace{(10x+4)\times(-4x+10)}_{\text{Quand ce quotient est-il négatif ou nul ?}} \leq 0$$

Dressons le tableau de signe de ce dernier produit.

x	$-\infty$		$-0,4$		$2,5$		$+\infty$
$10x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-4x+10$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Où ces facteurs s'annulent-ils ?

$10x+4=0$ $\quad$ $-4x+10=0$

$10x=-4$ $\quad$ $-4x=-10$

$x=-\dfrac{4}{10}$ $\quad$ $x=\dfrac{-10}{-4}$

$x=-0,4$ $\quad$ $x=2,5$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=\left]-\infty;-\frac{2}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$$

b. Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons tout ramener dans le membre de gauche, tout mettre au même dénominateur, puis nous verrons...

$$\frac{7}{2-x} \geq 9x+6 \iff \frac{7}{2-x}-9x-6 \geq 0 \iff \frac{7-9x\times(2-x)-6\times(2-x)}{2-x} \geq 0$$

$$\iff \frac{7-18x+9x^2-12+6x}{2-x} \geq 0 \iff \frac{9x^2-12x-5}{2-x} \geq 0$$

Le numérateur est à factoriser en utilisant la forme canonique.

$$\iff \frac{\overbrace{(3x)^2-2\times 3x\times 2}^{a^2-2\times a\times b}-5}{2-x} \geq 0 \iff \frac{\overbrace{(3x-2)^2-2^2}^{(a-b)^2-b^2}-5}{2-x} \geq 0$$

$$\iff \frac{(3x-2)^2-9}{2-x} \geq 0 \iff \frac{\overbrace{(3x-2)^2-3^2}^{a^2-b^2}}{2-x} \geq 0$$

$$\iff \frac{\overbrace{\left[(3x-2)+3\right]}^{(a+b)}\times\overbrace{\left[(3x-2)-3\right]}^{(a-b)}}{2-x} \geq 0 \iff \underbrace{\frac{(3x+1)\times(3x-5)}{2-x}}_{\text{Quand ce quotient est-il positif ou nul ?}} \geq 0$$

Le tableau de signe de ce dernier quotient est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{5}{3};2\right[$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Inéquation quotient et forme canonique

L'énoncé

Le but de cet exercice est la résolution dans ℝ de l'inéquation :

$$(E) \qquad \frac{15}{x+2} \leq 4 + \frac{1}{5-x}$$

a. En utilisant la forme canonique, factoriser l'expression $f(x) = 4x^2 - 28x + 33$.

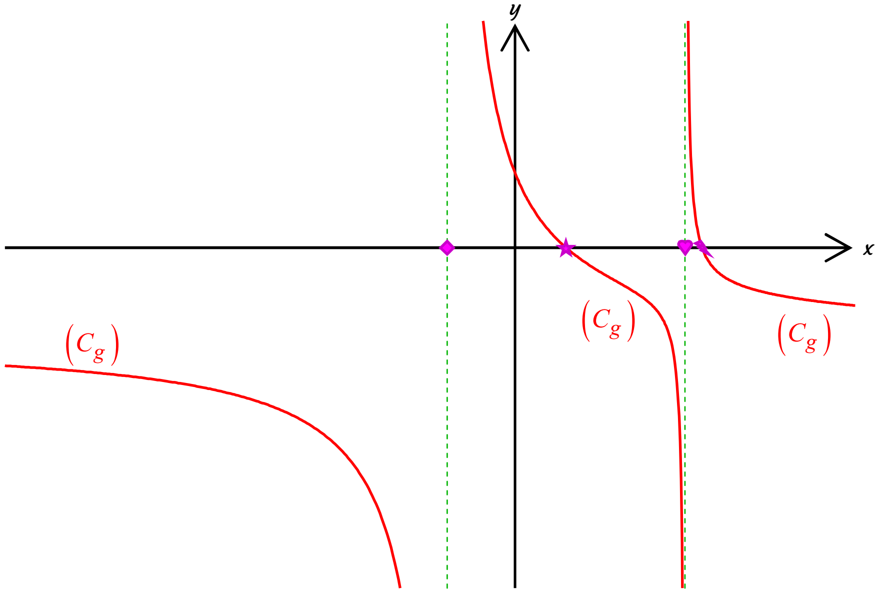
b. Démontrer que l'inéquation (E) peut aussi s'écrire $\dfrac{4x^2 - 28x + 33}{(x+2)(5-x)} \leq 0$

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (E).

d. Sur la figure ci-dessous, on a tracé dans un repère non orthonormé la courbe (C_g) représentant la fonction :

$$g(x) = \frac{4x^2 - 28x + 33}{(x+2)\times(5-x)}$$

Déterminer les abscisses des quatre points apparaissant sur le graphique ci-dessous.



Le corrigé

a. Factorisons la forme $f(x)$ en utilisant la méthode de la forme canonique :

$$f(x) = 4x^2 - 28x + 33$$

$$= \overbrace{\boxed{(2x)^2 - 2\times 2x \times 7}}^{a^2-2\times a\times b} + 33 = \overbrace{\boxed{(2x-7)^2 - 49}}^{(a-b)^2-b^2} + 33$$

$$= \underbrace{(2x-7)^2 - 16}_{a^2-b^2} = \underbrace{\left[(2x-7)+4\right]}_{(a+b)} \times \underbrace{\left[(2x-7)-4\right]}_{(a-b)} = (2x-3)\times(2x-11)$$

b. Nous allons tout ramener à gauche et mettre au même dénominateur $(x+2)\times(5-x)$.

$$\frac{15}{x+2} \leq 4 + \frac{1}{5-x} \Leftrightarrow \frac{15}{x+2} - 4 - \frac{1}{5-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{15\times(5-x) - 4\times(x+2)\times(5-x) - 1\times(x+2)}{(x+2)\times(5-x)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{75 - 15x - \left[(4x+8)\times(5-x)\right] - x - 2}{(x+2)\times(5-x)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{73 - 16x - \left[20x - 4x^2 + 40 - 8x\right]}{(x+2)\times(5-x)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{73 - 16x - 20x + 4x^2 - 40 + 8x}{(x+2)\times(5-x)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 28x + 33}{(x+2)\times(5-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)\times(2x-11)}{(x+2)\times(5-x)} \leq 0$$

c. Résoudre l'inéquation (E), c'est savoir quand le précédent quotient est négatif ou nul. Afin de dresser son tableau de signe, examinons les facteurs le composant :

$\overset{a\oplus}{\boxed{2}} \times x - 3$ s'annule quand $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1{,}5$

$\overset{a\oplus}{\boxed{2}} \times x - 11$ s'annule lorsque $2x - 11 = 0 \Leftrightarrow 2x = 11 \Leftrightarrow x = 5{,}5$

$\overset{a\oplus}{\boxed{1}} \times x + 2$ s'annule lorsque $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$\overset{a\ominus}{\boxed{-1}} \times x + 5$ s'annule quand $5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		5		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x-11$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+5$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
Leur quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation (E) est :

$$S =]-\infty;-2[\cup \left[\frac{3}{2};5\right[\cup \left[\frac{11}{2};+\infty\right[$$

d. Les ordonnées des quatre points situés sur l'axe des abscisses sont toutes égales à 0. Leurs abscisses correspondent aux deux valeurs interdites et aux deux valeurs d'annulation du quotient $g(x)$.

Le point losange a pour coordonnées $(-2;0)$.
Le point étoile a pour coordonnées $(1,5;0)$.
Le point coeur a pour coordonnées $(5;0)$.
Le point éclair a pour coordonnées $(5,5;0)$.

Trois deux deux

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les trois systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues x et y suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 6x+15y=18 & \textbf{(1)} \\ 14x+35y=42 & \textbf{(2)} \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 7x-2y=8 & \textbf{(1)} \\ 8x+3y=5 & \textbf{(2)} \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} 30x+21y=9 & \textbf{(1)} \\ 10x+7y=2 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Le corrigé

a. Combien le système (S_1) admet-il de solutions ? Afin de le savoir, regardons les rapports de ses coefficients :

Rapport des coefficients en $x = \frac{6}{14} = \frac{\cancel{2}\times 3}{\cancel{2}\times 7} = \frac{3}{7}$

Rapport des coefficients en $y = \frac{15}{35} = \frac{\cancel{5}\times 3}{\cancel{5}\times 7} = \frac{3}{7}$

Rapport des coefficients constants $= \frac{18}{42} = \frac{\cancel{6}\times 3}{\cancel{6}\times 7} = \frac{3}{7}$

Conclusion : les trois rapports étant égaux, le système (S_1) admet une infinité de solutions qui sont les coordonnées des points de la droite d'équation ***(1)*** ou ***(2)*** car il s'agit de la même équation...au facteur près.

b. Une fois encore, la résolution du système (S_2) commence par la recherche du nombre de ses solutions au travers des rapports des coefficients.

Rapport des coefficients en $x = \frac{7}{8}$ Rapport des coefficients en $y = -\frac{2}{3}$

Les rapports des coefficients en x et y étant différents, le système (S_2) admet une unique solution que nous allons déterminer par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour connaître x, on cherche à éliminer y.	Pour obtenir y, on vise la destruction des x.
(1) $\xrightarrow{\times 3}$ $21x-6y=24$ $\oplus$ ***(2)*** $\xrightarrow{\times 2}$ $16x+6y=10$ $37x=34$ $x=\frac{34}{37}$	***(1)*** $\xrightarrow{\times 8}$ $56x-16y=64$ $\ominus$ ***(2)*** $\xrightarrow{\times 7}$ $56x+21y=35$ $-37y=29$ $y=-\frac{29}{37}$

Conclusion : le système (S_2) admet pour unique solution le couple $\left(\frac{34}{37};-\frac{29}{37}\right)$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

c. Encore une fois, la résolution du système (S_3) commence par la détermination du nombre de ses solutions avec les rapports de ses coefficients :

Rapport en $x = \dfrac{30}{10} = 3$ Rapport en $y = \dfrac{21}{7} = 3$ Rapport des constants $= \dfrac{9}{2} = 4,5$

<u>Conclusion :</u> seuls ses coefficients en x et y étant proportionnels, le système (S_3) n'admet aucune solution.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Algorithmique

Les pros du grammes

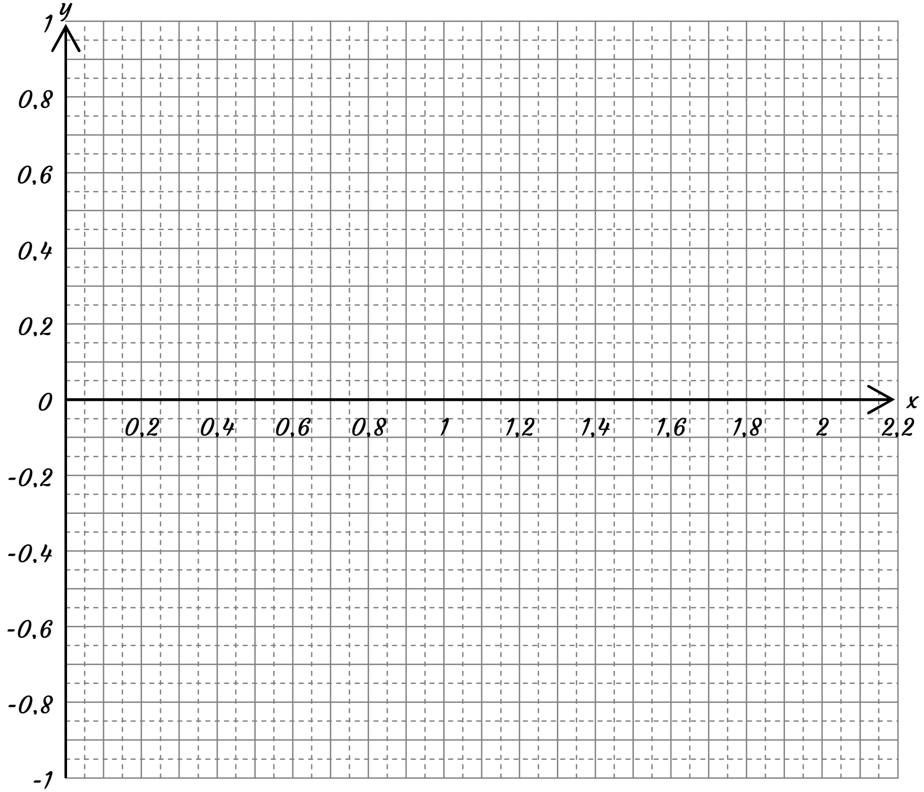
L'énoncé

a. Exécuter le programme suivant. Seules les réponses aux questions posées sont demandées.

```
n est un entier naturel et v un réel
n=0
v=3000
Tant que v>2600
    n=n+1
    v=0,88×v+240
    Que vaut la variable v ?
Que vaut la variable n ?
```

b. Exécuter le programme suivant. Les constructions demandées se feront sur le graphique ci-contre. Le cas échéant, on arrondira les variables réelles au centième-près.
Lorsque le programme lui demande, l'utilisateur répond 5 pour valeur à donner à l'entier *n*.

```
a, b et h sont des réels.
i et n sont des entiers naturels
Demander à l'utilisateur une valeur pour l'entier n
a=1
b=0
h=1/n
Sur le graphique ci-contre,
    construire le point de coordonnées (a;b)
Pour i=1 jusqu'à n
    b=b+h/a
    a=a+h
    Sur le graphique ci-contre,
        construire le point de coordonnées (a;b)
```



c. Exécuter le programme suivant. Seules les réponses aux questions posées sont demandées.

```
a, i et j sont trois entiers relatifs
a=0
Pour i=1 jusqu'à 3
    Pour j=i jusqu'à 3
        Si a est pair alors a=a+i×j
                      sinon a=a+j
        Que vaut la variable a ?
    a=a+i
    Que vaut la variable a ?
```

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Le corrigé

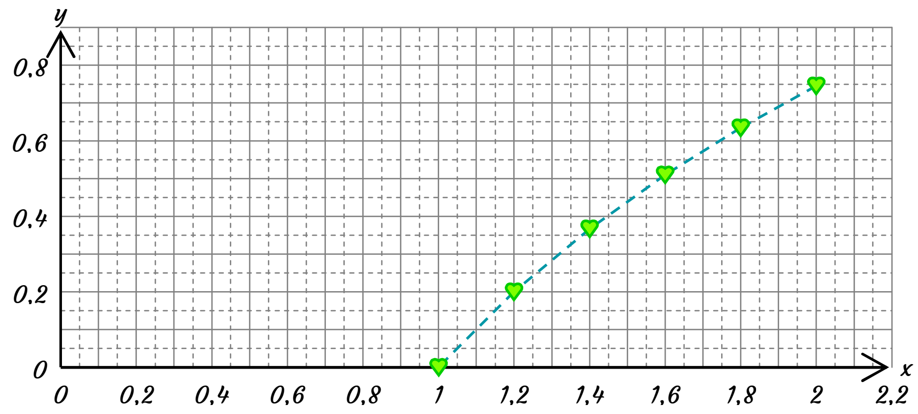
a. Exécutons ce premier programme, instruction par instruction. Les valeurs de v demandées dans les questions sont celles encadrées.

Instruction et commentaire	*n*	*v*
`n=0 v=3000`	0	3000
`Tant que : comme v>2600, on entre dans la boucle`	0	3000
`n=n+1` $=0+1=1$	1	3000
`v=0,88×v+240` $=0{,}88\times3000+240=2880$	1	$\boxed{2880}$
`Tant que : comme v>2600, on entre dans la boucle`	1	2880
`n=n+1` $=2$ `v=0,88×v+240` $=0{,}88\times2880+240=2774{,}4$	2	$\boxed{2774{,}4}$
`Tant que : comme v>2600, on entre dans la boucle`	2	2774,4
`n=n+1` $=3$ `v=0,88×v+240` $=0{,}88\times2774{,}4+240\approx2681{,}5$	3	$\boxed{2681{,}5}$
`Tant que : comme v>2600, on entre dans la boucle`	3	2681,5
`n=n+1` $=4$ `v=0,88×v+240` $\approx0{,}88\times2681{,}5+240\approx2599{,}7$	4	$\boxed{2599{,}7}$
`Tant que : comme v⩽2600, on quitte la boucle`	4	2599,7
La valeur de la variable *n* est 4		

b. Exécutons ce second programme.

Instruction et commentaire	*a*	*b*	*h*	*n*	*i*
`n=5 a=1 b=0`	1	0	?	5	?
`h=1/n` $=0{,}2$	1	0	0,2	5	?
`On construit le point (1;0)`	1	0	0,2	5	?
`Pour i=1 [on va jusqu'à 5]`	1	0	0,2	5	1
`b=b+h/a` $=0+0{,}2/1=0{,}2$	1	0,2	0,2	5	1
`a=a+h` $=1+0{,}2=1{,}2$	1,2	0,2	0,2	5	1
`On construit le point (1,2;0,2)`	1,2	0,2	0,2	5	1
`Pour i=2`	1,2	0,2	0,2	5	2
`b=b+h/a` $=0{,}2+0{,}2/1{,}2\approx0{,}37$ `a=a+h` $=1{,}4$	1,4	0,37	0,2	5	2
`On construit le point (1,4;0,37)`	1,4	0,37	0,2	5	2
`Pour i=3`	1,4	0,37	0,2	5	3
`b=b+h/a` $=0{,}37+0{,}2/1{,}4\approx0{,}51$ `a=a+h` $=1{,}6$	1,6	0,51	0,2	5	3
`On construit le point (1,6;0,51)`	1,6	0,51	0,2	5	3
`Pour i=4`	1,6	0,51	0,2	5	4
`b=b+h/a` $=0{,}51+0{,}2/1{,}6\approx0{,}64$ `a=a+h` $=1{,}8$	1,8	0,64	0,2	5	4
`On construit le point (1,8;0,64)`	1,8	0,64	0,2	5	4
`Pour i=5`	1,8	0,64	0,2	5	5
`b=b+h/a` $=0{,}65+0{,}2/1{,}8\approx0{,}76$ `a=a+h` $=2$	2	0,76	0,2	5	5
`On construit le point (2;0,76)`	2	0,76	0,2	5	5
Une valeur approchée de ln(2) est 0,76.					

A l'issue de l'exécution du programme, le graphique est le suivant :



c. Exécutons ce dernier programme. Les valeurs de *a* demandées dans les questions sont celles encadrées.

Instruction et commentaire	*a*	*i*	*j*
`a=0`	0	?	?
`Pour i=1 [on va jusqu'à 3]`	0	1	?
`Pour j=1 [on va jusqu'à 3]`	0	1	1
`Comme a pair alors a=a+i×j` $=0+1\times1=1$	$\boxed{1}$	1	1
`Pour j=2`	1	1	2
`Comme a impair sinon a=a+j` $=1+2=3$	$\boxed{3}$	1	2
`Pour j=3`	3	1	3
`Comme a impair sinon a=a+j` $=3+3=6$	$\boxed{6}$	1	3
`a=a+i` $=6+1=7$	$\boxed{7}$	1	3
`Pour i=2`	7	2	3
`Pour j=2 [on va jusqu'à 3]`	7	2	2
`Comme a impair sinon a=a+j=` $7+2=9$	$\boxed{9}$	2	2
`Pour j=3`	9	2	3
`Comme a impair sinon a=a+j=` $9+3=12$	$\boxed{12}$	2	3
`a=a+i` $=12+2=14$	$\boxed{14}$	2	3
`Pour i=3`	14	3	3
`Pour j=3 [on va jusqu'à 3]`	14	3	3
`Comme a pair alors a=a+i×j` $=14+3\times3=23$	$\boxed{23}$	3	3
`a=a+i` $=23+3=26$	$\boxed{26}$	3	3

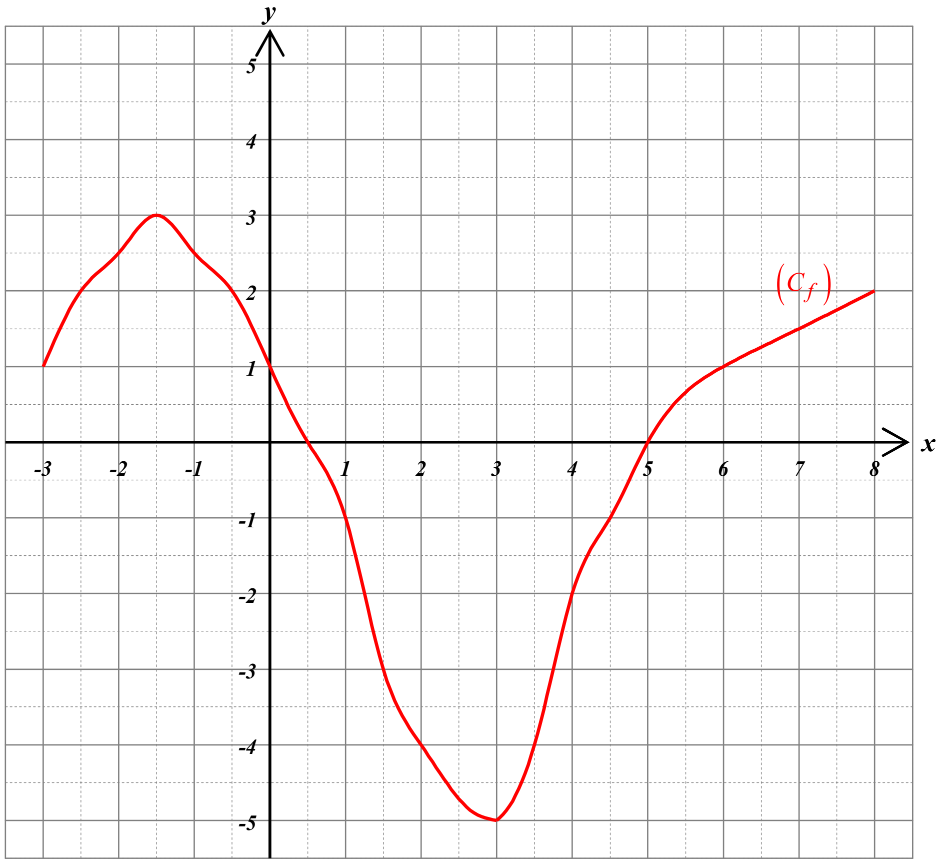
Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Fonctions

Graphique et conséquences

L'énoncé

f est une fonction dont la courbe représentative $\left(C_f\right)$ a été intégralement tracée sur le graphique ci-dessous ➜



On répondra aux questions posées directement sur la présente feuille en utilisant le graphique et avec toute la précision permise par celui-ci.

a. Compléter ce qui suit :

1. L'ensemble de définition de la fonction *f* est ……………………………………

2. $f(0) =$ ………………… $f(8,5) =$ …………………

3. Le (ou les) antécédent(s) de -1 par la fonction *f* est (sont)…………………………

4. Le (ou les) image(s) de -1 par la fonction *f* est (sont)…………………………

5. Le maximum de *f* sur l'intervalle $[-1;8]$ est……… Il est atteint en $x =$ …………

6. Le (ou les) antécédent(s) de 4 par la fonction *f* est (sont)…………………………

7. Le (ou les) solution (s) de l'équation $f(x)=1$ est (sont)…………………………

8. Le minimum de *f* sur l'intervalle $[-3;5]$ est……… Il est atteint en $x =$ …………

b. Compléter le tableau de variation de la fonction *f* sur son ensemble de définition se trouvant ci-dessous :

x	
f	

c. Compléter le tableau de signe de $f(x)$ se trouvant ci-dessous.

x	
$f(x)$	

d. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$f(x) < -1$

S = ……………………………………

$1 \leq f(x) < 2$

S = ……………………………………

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

$-3 < f(x) \le 1$	$f(x) < -5$
S = ...	S = ...

e. Résoudre (graphiquement) les deux équations suivantes :

$5 - 3 \times f(x) = 17$	$\dfrac{5}{f(x)} + 1 = 3$
S = ...	S = ...

Le corrigé

a.1. Les points de la courbe (C_f) ont leurs abscisses comprises entre -3 et 8.

L'ensemble de définition de la fonction *f* est $D_f = [-3;8]$

a.2. L'ordonnée du point de la courbe (C_f) d'abscisse 0 vaut 1 . Donc $f(0) = 1$

Aucun point de la courbe (C_f) n'a pour abscisse $8,5$. Donc 8,5 n'a pas d'image par *f*. Autrement dit, 8,5 ne fait pas partie de l'ensemble de définition de *f*.

a.3. Deux points de la courbe (C_f) ont pour ordonnée -1 . Leurs abscisses 1 et $4,5$ sont les antécédents de -1 par la fonction *f*.

a.4. Le point de la courbe (C_f) ayant pour abscisse -1 a pour ordonnée $2,5$. Cette dernière valeur est l'image de -1 par la fonction *f*.

a.5. Le point «le plus haut» de la portion de la courbe (C_f) restreinte à l'intervalle $[-1;8]$ a pour coordonnées $(-1;2,5)$.

Par conséquent, le maximum de la fonction *f* sur $[-1;8]$ est $2,5$. Il est atteint en $x = -1$.

a.6. Aucun point de la courbe (C_f) n'ayant pour ordonnée 4, ce dernier n'a aucun antécédent par la fonction *f*.

a.7. Trois points de la courbe (C_f) ont pour ordonnée 1. Leurs abscisses -3; 0 et 6 sont les solutions de l'équation $f(x) = 1$.

a.8. Le point «le plus bas» de la portion de (C_f) restreinte à l'intervalle $[-3;5]$ a pour coordonnées $(3;-5)$. Donc le minimum de *f* sur $[-3;5]$ est -5 . Il est atteint en $x = 3$.

b. D'après sa courbe représentative (C_f), le tableau de variation de la fonction *f* est :

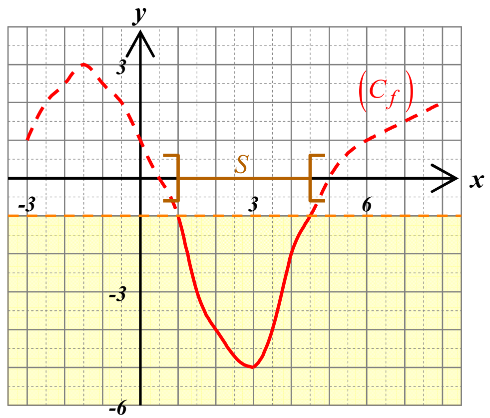
x	-3		$-1,5$		3		8
f	1	↗	3	↘	-5	↗	2

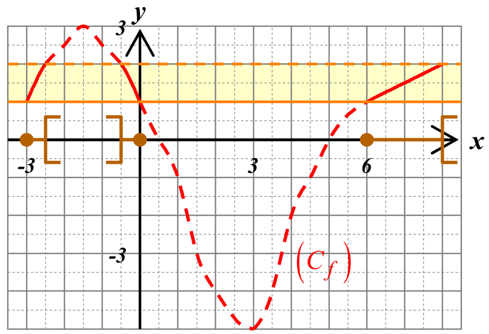
c. D'après la courbe représentative (C_f), le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	-3		$0,5$		5		8
$f(x)$	0	+	0	–	0	+	

d.1. Les solutions de l'inéquation $f(x) < -1$ sont les abscisses des points de la courbe (C_f) dont l'ordonnée $f(x)$ est strictement inférieure à -1 .➔
L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S =]1;4,5[$$





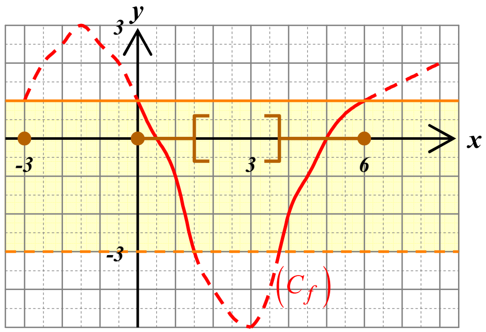
🡐 **d.2.** Vu le graphique ci-contre, les solutions de l'inéquation $1 \le f(x) < 2$ sont :

$$S = [-3;-2,5[\cup]-0,5;0] \cup [6;8[$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

d.3. Vu le graphique ci-contre ➔
les solutions de l'inéquation $-3 < f(x) \leq 1$ sont :

$$S = \{3\} \cup [0;1,5[\cup]3,7;6]$$



d.4. Aucun point de la courbe (C_f) n'ayant une ordonnée strictement inférieure à -5, l'inéquation $f(x) < -5$ n'admet aucune solution. Ce que l'on résume par : $S = \varnothing$

e. Résolvons la première des deux équations proposées :

$$5 - 3\times f(x) = 17 \overset{-5}{\Leftrightarrow} -3\times f(x) = 12$$

$$\overset{\div(-3)}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{12}{-3} = 4 \Leftrightarrow \underbrace{x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 3,5}_{\text{soit } S=\{2;3,5\}}$$

➲ Résolvons la seconde équation proposée :

$$\frac{5}{f(x)} + 1 = 3 \overset{\boxed{-1}}{\Leftrightarrow} \frac{5}{f(x)} = 2$$

$$\overset{\boxed{\div 5}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{f(x)} = \frac{2}{5} \overset{\boxed{\text{Inv}}}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \underbrace{x = -2 \quad \text{ou} \quad x = -1}_{\text{soit } S=\{-2;-1\}}$$

Artillerie parabolique

L'énoncé

La fonction *f* est définie pour tout réel *x* par :

$$f(x) = x^2 + 8x + 7$$

a. Calculer les images de 0 et -7 par la fonction *f*.

b. Déterminer le ou les antécédents de 7 par la fonction *f*.

c. Déterminer le ou les antécédents de 0 par la fonction *f*.
Indication : votre raisonnement pourra débuter comme suit :

Question super bonus
2,5 points

$$\boxed{x^2 + 8x} + 7 = \ldots \Leftrightarrow \boxed{x^2 + 2\times x\times\ldots} + 7 = \ldots \Leftrightarrow \boxed{(x+\ldots)^2 - \ldots} + 7 = \ldots \Leftrightarrow \ldots$$

Le corrigé

a. Calculons les images de 0 et -7 par la fonction *f*.

$$f(0) = 0^2 + 8\times 0 + 7 = 0 + 0 + 7 = 7$$

$$f(-7) = (-7)^2 + 8\times(-7) + 7 = 49 - 56 + 7 = 0$$

b. Depuis la question précédente, nous connaissons déjà un antécédent de 7 par *f* qui est 0. Mais peut-être y en a-t-il d'autres ? Pour les trouver tous, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x + \cancel{7} = \cancel{7}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x}\times x + 8\times\boxed{x}}_{\text{Facteur commun}} = 0 \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x}\times(x+8) = 0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 8 = 0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$x = -8$$

Conclusion : 7 a deux antécédents par la fonction *f* qui sont -8 et 0.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

c. Encore une fois, nous connaissons déjà un antécédent de 0 qui est -7. Mais il en existe peut-être d'autres ? Pour le savoir, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x^2+8x}+7=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x^2+2\times x\times 4}}^{a^2+2\times a\times b}+7=0 \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{(x+4)^2-4^2}}^{(a+b)^2-b^2}+7=0$$

On factorise en utilisant la forme canonique.

$$\Leftrightarrow (x+4)^2-16+7=0 \Leftrightarrow (x+4)^2-9=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+4)^2-3^2}_{a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \Big[\underbrace{(x+4)+3}_{(a+b)}\Big]\times\Big[\underbrace{(x+4)-3}_{(a-b)}\Big]=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x+7)\times(x+1)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x+7=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad x+1=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

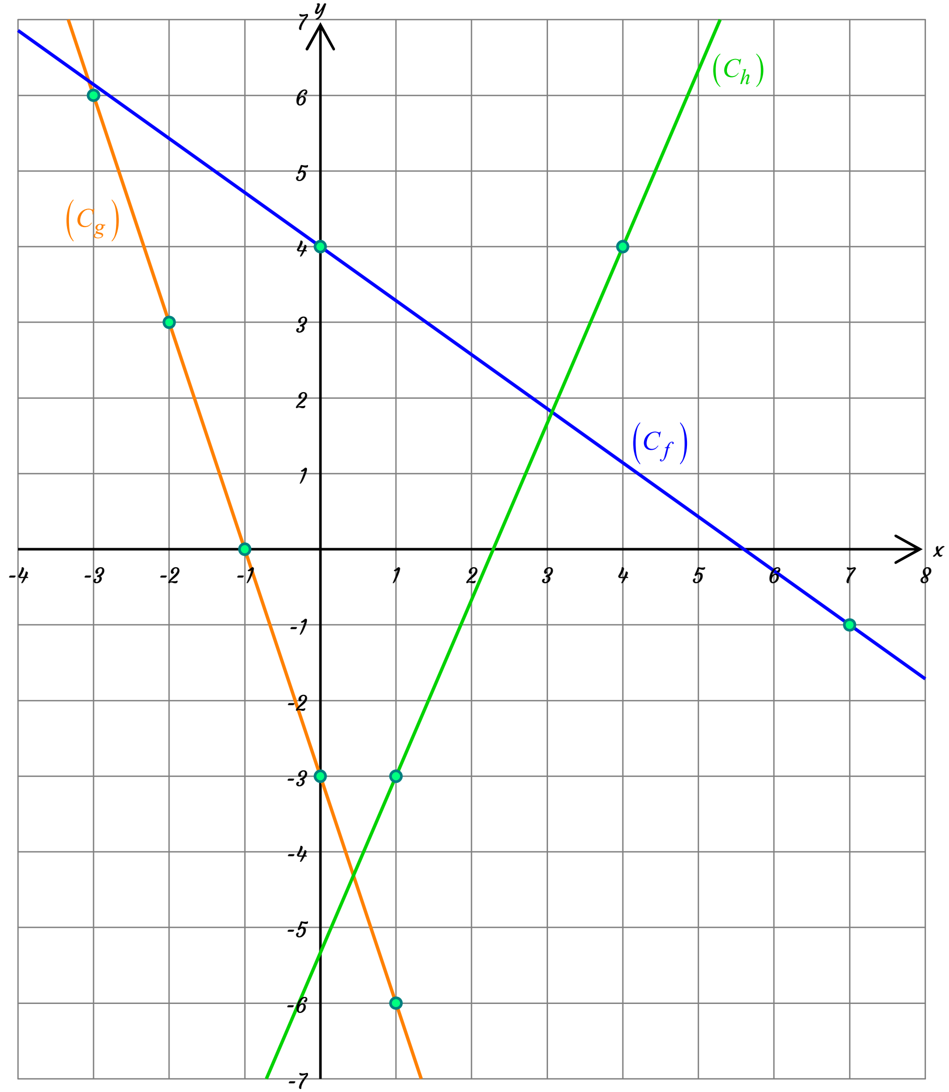
$$x=-7 \qquad\qquad x=-1$$

<u>Conclusion :</u> 0 a exactement deux antécédents par la fonction *f* qui sont -1 et -7

Droitures fonctionnelles

L'énoncé

a. Sur le graphique orthonormé et centimétrique ci-dessous, on a tracé les droites (C_f), (C_g) et (C_h) représentant les fonctions *f*, *g* et *h*.



Déterminer les expressions des trois fonctions *f*, *g* et *h*.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

b. On appelle j la fonction définie pour tout réel x par :

$$j(x)=\frac{4x-7}{3}$$

On appelle (C_j) la courbe représentant cette fonction j.

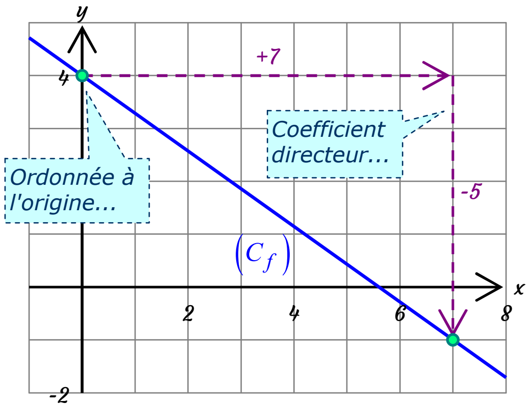
1. Calculer les images de -2 et 7 par la fonction j.
2. Déterminer le ou les antécédents de 0 par la fonction j.
3. Sur le graphique ci-contre, tracer la courbe (C_j).
4. Au moyen d'un enchainement d'inégalités, établir le sens de variation de la fonction j sur $\mathbb{R}$.
5. Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $j(x)$.

Le corrigé

a. D'abord, comme sa courbe (C_f) est une droite, la fonction f est affine et de la forme $f(x)=ax+b$.

Ensuite, le point d'intersection de la courbe (C_f) et de l'axe des ordonnées $(\mathrm{O}y)$ ayant pour coordonnées $(0;4)$, l'ordonnée à l'origine b est égale à 4.

Enfin, le coefficient directeur se détermine en sautant d'un point de la droite à coordonnées entières à un autre.



$$a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-5}{+7}=-\frac{5}{7}$$

Conclusion : une expression de la fonction affine f est

$$f(x)=-\frac{5}{7}x+4=\frac{28-5x}{7}$$

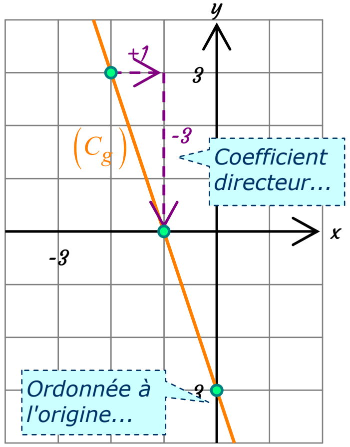
Sa courbe (C_g) étant une droite, la fonction g est aussi affine et de la forme $g(x)=ax+b$.

Directement sur le graphique, on lit que l'ordonnée à l'origine b est égale à -3.

Lorsque l'on progresse de $+1$ en abscisse, on fait -3 en ordonnée. C'est le coefficient directeur a.

Conclusion : une expression de la fonction affine g est

$$g(x)=-3x-3$$



Pour les mêmes raisons que f et g, la fonction h est affine et de la forme $h(x)=ax+b$.

Le coefficient directeur a se trouve en allant d'un point à coordonnées entières à un autre : $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{+7}{+3}=\frac{7}{3}$

Par contre, l'ordonnée à l'origine b n'est pas directement lisible sur l'axe des ordonnées.

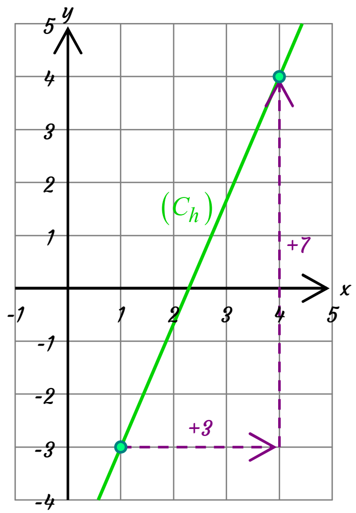
Nous allons la trouver en sachant que :

$$h(1)=-3 \Leftrightarrow \frac{7}{3}\times 1+b=-3 \Leftrightarrow \frac{7}{3}+b=-3$$

$$\Leftrightarrow b=-3-\frac{7}{3}=\frac{-9}{3}-\frac{7}{3}=-\frac{16}{3}$$

Conclusion : une expression de la fonction h est

$$h(x)=\frac{7}{3}x-\frac{16}{3}=\frac{7x-16}{3}$$



b.1. Calculons les images demandées :

$$j(-2)=\frac{4\times(-2)-7}{3}=\frac{-8-7}{3}=\frac{-15}{3}=-5 \Rightarrow \mathrm{A}(-2;-5)\in(C_j)$$

$$j(7)=\frac{4\times 7-7}{3}=\frac{28-7}{3}=\frac{21}{3}=7 \Rightarrow \mathrm{B}(7;7)\in(C_j)$$

b.2. Pour connaître les antécédents de 0 par j, nous résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$j(x)=0 \overset{\times 3}{\Leftrightarrow} \cancel{3}\times\frac{4x-7}{\cancel{3}}=0\times 3 \Leftrightarrow 4x-7=0 \Leftrightarrow 4x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}=1,75$$

Conclusion : 0 a un seul antécédent par la fonction j qui est 1,75.

b.3. La fonction j est affine car elle peut s'écrire sous la forme $ax+b$. En effet :

$$j(x)=\frac{4x-7}{3}=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}=\underset{a}{\boxed{\frac{4}{3}}}\times x+\underset{b}{\boxed{\left(-\frac{7}{3}\right)}}$$

La courbe (C_j) est une droite passant par les points A et B définis lors de la question **b.1**.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

b.4. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Comment sont rangées $j(\alpha)$ et $j(\beta)$?

$$\begin{array}{rcl} \alpha & < & \beta \\ & \times 4 & \\ 4\alpha & < & 4\beta \\ & -7 & \\ 4\alpha - 7 & < & 4\beta - 7 \\ & \div 3 & \\ j(\alpha) & < & j(\beta) \end{array}$$

j conserve l'ordre sur]-∞ ; +∞[

Conclusion : Conservant l'ordre, la fonction j est strictement croissante sur ℝ.

b.5. Le tableau de variation de j va nous donner celui de signe de $j(x)$.

x	$-\infty$	$1,75$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

x	$-\infty$		$7/4$		$+\infty$
$j(x)$		$-$	0	$+$	

Tri sélectif

L'énoncé

Les fonctions f, g et h sont définies pour tout réel x par :

$$f(x) = 4x^2 - 20x + 9 \qquad g(x) = 9 - 5x \qquad h(x) = -4x - 8$$

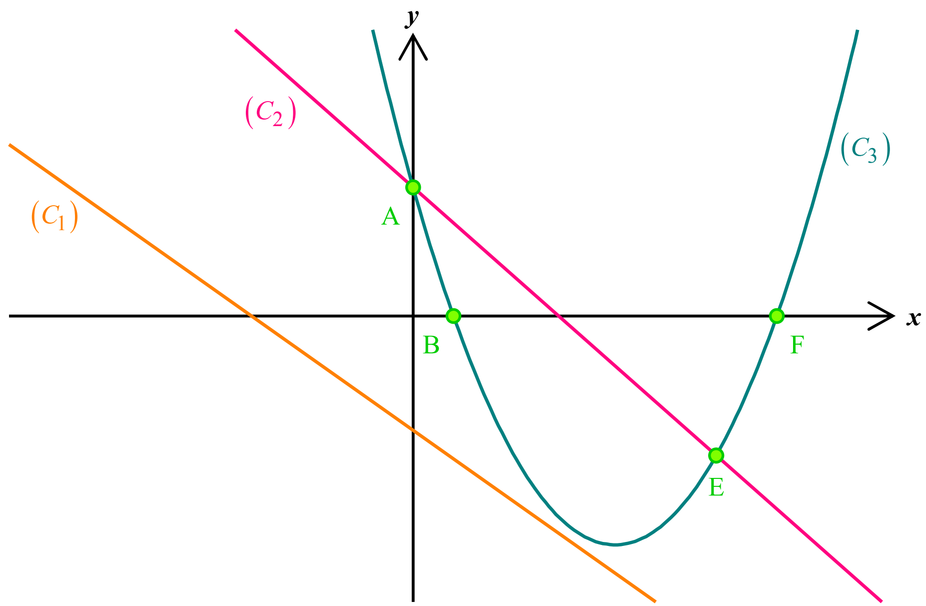
a. Calculer l'image de -2 par la fonction f, puis calculer $g\left(\frac{15}{4}\right)$.

b. Déterminer par le calcul le ou les antécédents de 0 par la fonction f.

c. Résoudre dans ℝ l'équation $f(x) = g(x)$

d. Résoudre dans ℝ l'équation $f(x) = h(x)$

e. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère orthogonal non orthonormé trois courbes représentant (dans le désordre) les fonctions f, g et h.



1. Sans justification, attribuer à chaque courbe la fonction qu'elle représente.
2. En utilisant les questions précédentes, donner les coordonnées des points A, B, E et F.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Le corrigé

a. Calculons les images demandées.

$$f(-2)=4\times(-2)^2-20\times(-2)+9=4\times4+40+9=16+49=\boxed{65}$$
$$g\left(\frac{15}{4}\right)=9-5\times\frac{15}{4}=\frac{36}{4}-\frac{75}{4}=\boxed{-\frac{39}{4}=-9,75}$$

b. Les antécédents de 0 par la fonction *f* sont les solutions dans ℝ de l'équation :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{4x^2-20x}+9=0$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{\boxed{(2x)^2-2\times2x\times5}}^{a^2+2\times a\times b}+9=0 \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{(2x-5)^2-25}}^{(a+b)^2-b^2}+9=0$$

On factorise en utilisant la forme canonique.

$$\Leftrightarrow \underbrace{(2x-5)^2-16}_{a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \underbrace{[(2x-5)+4]}_{(a+b)}\times\underbrace{[(2x-5)-4]}_{(a-b)}=0$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{(2x-1)\times(2x-9)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{2x-1=0 \quad \text{ou} \quad 2x-9=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$
$$2x=1 \qquad 2x=9$$
$$\boxed{x=0,5} \qquad \boxed{x=4,5}$$

Conclusion : 0 a exactement deux antécédents par la fonction *f* qui sont $0,5$ et $4,5$.

c. Résolvons dans ℝ l'équation du second degré :

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 4x^2-20x+\cancel{9}=\cancel{9}-5x$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-15x=0 \Leftrightarrow \underbrace{\boxed{x}\times4x-15\times\boxed{x}}_{\text{Facteur commun}}=0$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x}\times(4x-15)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x=0} \quad \text{ou} \quad 4x-15=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$
$$4x=15$$
$$\boxed{x=\frac{15}{4}=3,75}$$

Conclusion : l'équation $f(x)=g(x)$ a exactement deux solutions : 0 et 3,75.

d. Résolvons dans ℝ de l'équation du second degré :

$$f(x)=h(x) \Leftrightarrow 4x^2-20x+9=-4x-8 \Leftrightarrow 4x^2-16x+17=0$$

On factorise en utilisant la forme canonique.

$$\Leftrightarrow \overbrace{\boxed{(2x)^2-2\times2x\times4}}^{a^2+2\times a\times b}+17=0 \Leftrightarrow \overbrace{\boxed{(2x-4)^2-16}}^{(a+b)^2-b^2}+17=0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{(2x-5)^2+1}_{\text{Non factorisable}}=0 \Leftrightarrow \underbrace{(2x-5)^2=-1}_{\text{Pas de solution ! Un carré n'est jamais négatif.}}$$

Conclusion : l'équation $f(x)=h(x)$ n'a pas de solution dans ℝ.

e.1. Les fonctions *g* et *h* étant affines, leurs courbes représentatives sont des droites. D'emblée, nous savons que la parabole (C_3) représente la fonction du second degré *f*.
L'ordonnée à l'origine d'une fonction affine correspond graphiquement à l'ordonnée du point d'intersection de sa droite représentative avec l'axe des ordonnées (Oy).
Or, d'après le graphique, l'ordonnée à l'origine de la droite (C_2) est positive...comme celle de *g* alors que celle de la droite (C_1) est négative...comme celle de *h*.
Conclusion : la courbe (C_1) représente *h*, (C_2) représente *g* et (C_3) représente *f*.

e.2. Les points B et F appartiennent à la courbe (C_3) représentant la fonction *f* et ont tous deux pour ordonnée 0. Leurs abscisses sont donc les antécédents de 0 par *f*. Leurs coordonnées sont :

$$\boxed{B(0,5;0)} \quad \text{et} \quad \boxed{F(4,5;0)}$$

Les points A et E sont les points d'intersection des courbes (C_2) et (C_3) représentant les fonctions *g* et *f*. Leurs abscisses sont solutions de l'équation $f(x)=g(x)$.
Par conséquent, leurs coordonnées sont :

$$\boxed{A(0;9)} \quad \text{et} \quad \boxed{E\left(\frac{15}{4};-\frac{39}{4}\right)}$$

Les ordonnées des points A et E s'obtiennent en calculant les images de 0 et $\frac{15}{4}$ par les fonctions *f* ou *g*. La seconde image a déjà été calculée lors de la question **a.**

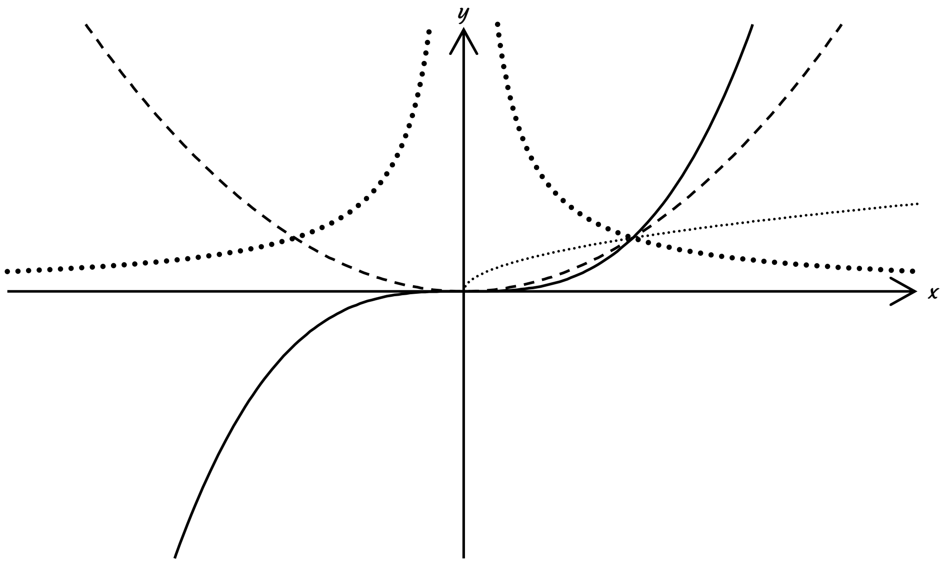
$$g(0)=9-5\times0=\boxed{9}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Les mauvaises références

L'énoncé

a. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère non orthonormé quatre courbes dont trois représentent une fonction de référence.



Laquelle des quatre fonctions de référence n'est pas représentée sur ce graphique ? On entourera la réponse. Aucune justification n'est demandée.

Fonction carré | Fontion cube | Fonction inverse | Fonction racine carrée

b. Donner les ensembles de solutions des inégalités suivantes.

$\sqrt{x} < 49 \qquad 4 \leq x^2 < 5 \qquad -2 < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{4} \qquad x^3 \geq -1000$

Le corrigé

a. Seule la courbe de la fonction inverse n'est pas représentée sur le graphique.

b. En utilisant les courbes des fonctions de référence, on résout les inéquations proposées.

$\sqrt{x} < 49 \iff x \in [0;2401[$

$4 \leq x^2 < 5 \iff x \in \left]-\sqrt{5};-2\right] \cup \left[2;\sqrt{5}\right[$

$-2 < \dfrac{1}{x} \leq 4 \iff x \in]-\infty;-0,5[\cup [4;+\infty[$

$x^3 \geq -1000 \iff x \in [-10;+\infty[$

Cauchemar fonctionnel

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1;0]$ par :

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{x^2 - 1}}$$

Par un enchainement d'inégalités, établir le sens de variation de la fonction f sur $]-1;0[$

Le corrigé

Soient α et β deux réels de l'intervalle $]-1;0[$ tels que $\alpha < \beta$. Ainsi nous avons :

$$-1 < \alpha < \beta < 0$$

↑ Deux réels négatifs ↑

Carré — Décroissante sur]-∞;0[

$$1 > \alpha^2 > \beta^2 > 0$$

-1

$$0 > \alpha^2 - 1 > \beta^2 - 1 > -1$$

Inverse — Décroissante sur]-∞ ; 0[

$$\frac{1}{\alpha^2-1} < \frac{1}{\beta^2-1} < -1$$

×(-2)

$$\frac{-2}{\alpha^2-1} > \frac{-2}{\beta^2-1} > 2$$

+1

$$1-\frac{2}{\alpha^2-1} > 1-\frac{2}{\beta^2-1} > 3$$

Racine — Croissante sur]0;+∞[

$$\underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{\alpha^2-1}}}_{f(\alpha)} > \underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{\beta^2-1}}}_{f(\beta)} > \sqrt{3}$$

La fonction f change l'ordre sur]-1 ; 0[

Conclusion : la fonction f changeant l'ordre sur l'intervalle $]-1;0[$, elle y est décroissante.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Ô mon graphique !

L'énoncé

La fonction *f* est définie par :

$$f(x)=\frac{-6x-7}{3x+4}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction *f*. On expliquera sa réponse.

b. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

c. Sur le graphique ci-après, achever la courbe (C_f) qui a été partiellement tracée dans dans un repère orthonormé. On construira également ses deux asymptotes.

d. On s'intéresse aux variations de la fonction *f* sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[$.

1. Déterminer deux entiers relatifs *a* et *b* tels que pour tout réel $x \in D_f$, on ait :

$$f(x)=a+\frac{b}{3x+4}$$

2. Au moyen d'un enchainement d'inégalités, établir le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[$.

e. On s'intéresse aux variations de la fonction *f* sur l'intervalle $\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

1. Démontrer que pour tous réels α et β appartenant à l'ensemble D_f, on a :

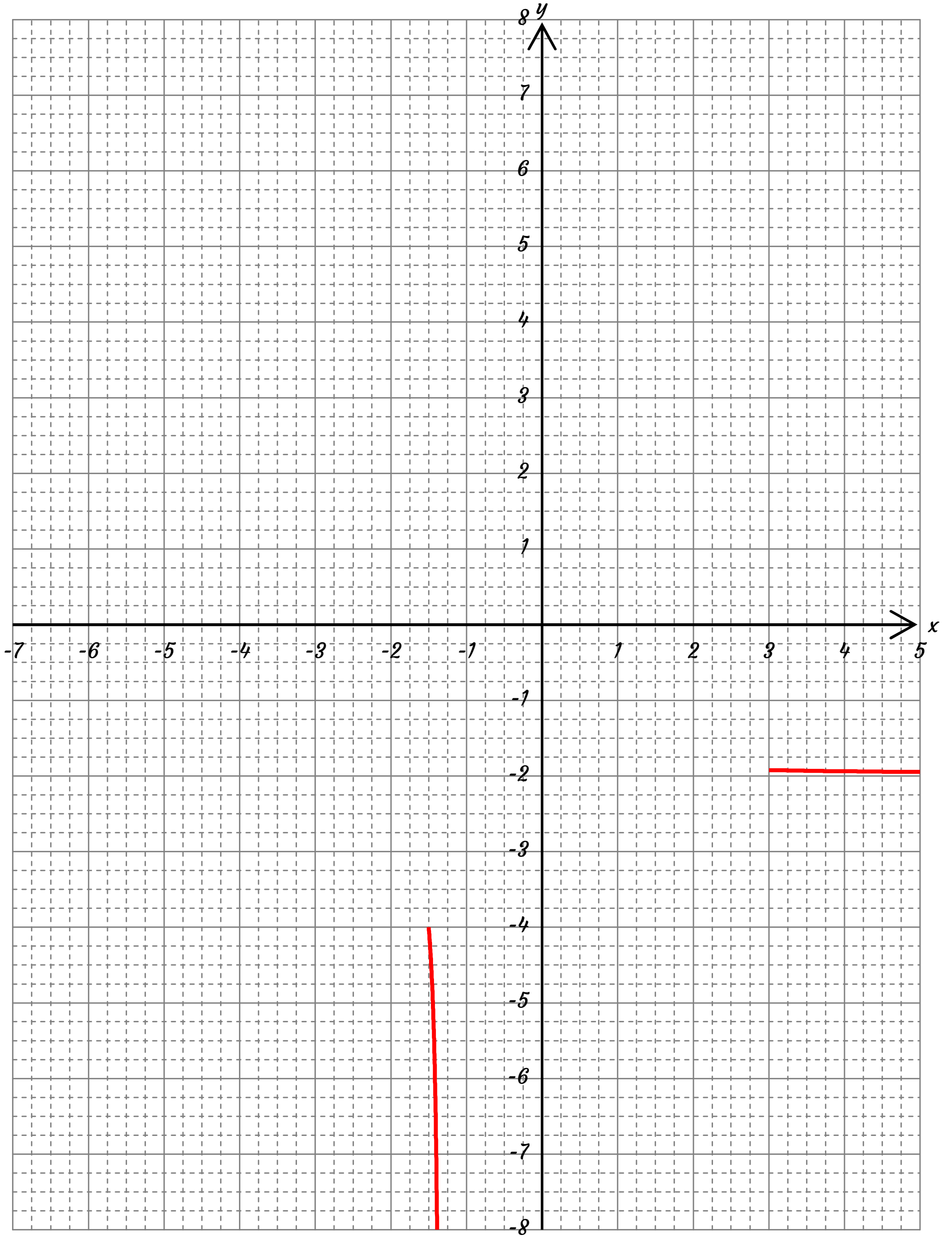
$$f(\alpha)-f(\beta)=\frac{3\times(\beta-\alpha)}{(3\alpha+4)\times(3\beta+4)}$$

2. Soient α et β deux réels de l'intervalle $\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$ tels que $\alpha<\beta$.

   Laquelle de leurs deux images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ est la plus grande ? On justifiera sa réponse.

   En déduire le sens de variation de *f* sur l'intervalle $\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

3. Conclure en dressant le tableau de variation de *f* sur D_f.



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Le corrigé

a. La fonction $f(x)$ est le quotient des fonctions $u(x) = -6x-7$ et $v(x) = 3x+4$ qui sont définies sur $\mathbb{R}$. Seule la nullité du dénominateur peut faire que $f(x)$ n'existe pas.

$$\text{Le quotient } f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \text{Son dénominateur } 3x+4 \text{ est non nul}$$
$$\Leftrightarrow 3x+4 \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq -4 \Leftrightarrow \boxed{x \neq -\frac{4}{3}}$$

Conclusion : l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\} = \boxed{\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[\cup \left]-\frac{4}{3};+\infty\right[}$

b. Le tableau de signe du quotient $f(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{7}{6}$		$+\infty$
$-6x-7$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

c. Sur le graphique ci-contre, on a tracé l'hyperbole (C_f) représentant la fonction f ainsi que ses deux asymptotes qui sont les droites verticale d'équation $x = -\frac{4}{3}$ et horizontale d'équation $y = -2$.

d.1. Pour tout réel $x \in D_f$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{\boxed{-6x}-7}{3x+4} = \frac{\boxed{-2\times(3x+4)+8}-7}{3x+4} = \frac{-2\times\cancel{(3x+4)}}{\cancel{3x+4}} + \frac{1}{3x+4} = \boxed{-2+\frac{1}{3x+4}}$$

d.2. Soient α et β deux réels de l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[$ tels que $\alpha < \beta$. Il vient alors :

$$\alpha < \beta < -\frac{4}{3}$$
$$\times 3$$
$$3\alpha < \beta < -4$$
$$+4$$
Deux réels négatifs
$$3\alpha+4 < 3\beta+4 < 0$$
$$\text{Inverse}$$
Décroissante sur]-∞ ; 0[
$$\frac{1}{3\alpha+4} > \frac{1}{3\beta+4}$$
$$-2$$
$$\underbrace{-2+\frac{1}{3\alpha+4}}_{f(\alpha)} > \underbrace{-2+\frac{1}{3\beta+4}}_{f(\beta)}$$

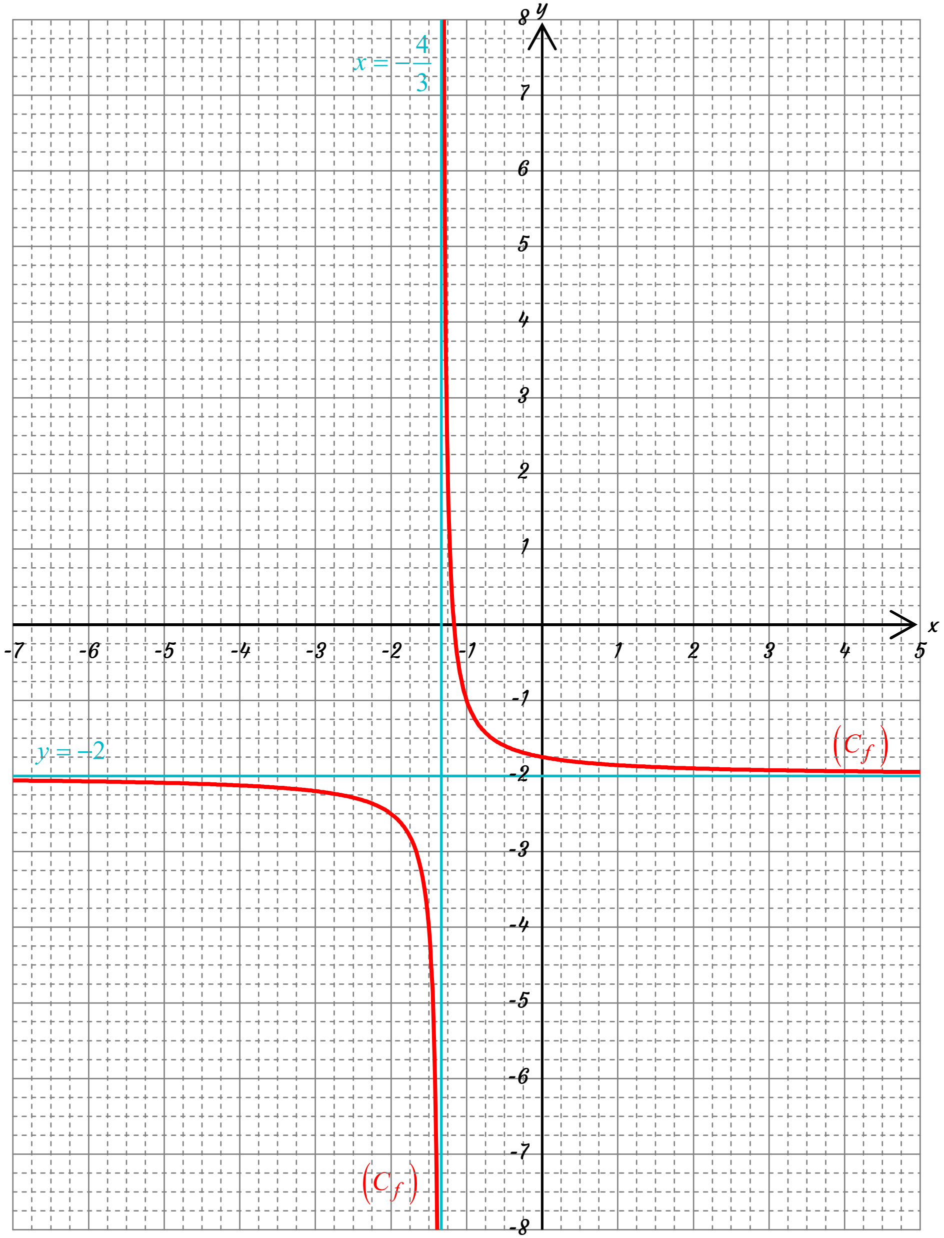
La fonction f change l'ordre sur]-∞ ; -4/3 [

Conclusion : la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[$.

e.1. Nous pouvons écrire :

$$f(\alpha)-f(\beta) = \frac{-6\alpha-7}{3\alpha+4} - \frac{-6\beta-7}{3\beta+4}$$
$$= \frac{[(-6\alpha-7)\times(3\beta+4)]-[(-6\beta-7)\times(3\alpha+4)]}{(3\alpha+4)\times(3\beta+4)}$$
$$= \frac{[-18\alpha\beta-24\alpha-21\beta-28]-[-18\beta\alpha-24\beta-21\alpha-28]}{(3\alpha+4)\times(3\beta+4)}$$
$$= \frac{\cancel{-18\alpha\beta}-24\alpha-21\beta-\cancel{28}+\cancel{18\alpha\beta}+24\beta+21\alpha+\cancel{28}}{(3\alpha+4)\times(3\beta+4)}$$
$$= \frac{3\beta-3\alpha}{(3\alpha+4)\times(3\beta+4)} = \boxed{\frac{3\times(\beta-\alpha)}{(3\alpha+4)\times(3\beta+4)}}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.



e.2. Examinons les facteurs composant la différence $f(\alpha)-f(\beta)$.

- $\beta-\alpha$ est positif car $\alpha<\beta \Leftrightarrow 0<\beta-\alpha$.
- $3\alpha+4$ et $3\beta+4$ sont positifs $\alpha>-\frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} 3\alpha>-4 \xrightarrow{+4} 3\alpha+4>0$

  $\beta>-\frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} 3\beta>-4 \xrightarrow{+4} 3\beta+4>0$

  Ou alors on regarde le tableau de signe de $3x+4$

Donc le quotient $f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{3\times(\beta-\alpha)}{(3\alpha+4)\times(3\beta+4)}=\dfrac{\oplus\times\oplus}{\oplus\times\oplus}$ est positif.

<u>Conclusion :</u> sur l'intervalle $\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$, si $\alpha<\beta$ alors $f(\alpha)-f(\beta)>0$

$f(\alpha)>f(\beta)$

La fonction *f* conservant l'ordre sur $\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$, elle y est strictement croissante.

e.3. En conclusion finale, le tableau de variation de la fonction *f* est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
f	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Vérités paraboliques

L'énoncé

Quatre affirmations sont proposées. Pour chacune d'entre elles, on dira si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction $f(x) = -3x^2 + 12x + 7$ est décroissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$:....................

2. La fonction $g(x) = 4x^2 + 16x + 5$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$:........................

3. La fonction $h(x) = 7x^2 - 21x + 1$ est croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$:..........................

4. La fonction $j(x) = -2x^2 - 3x + 1$ est croissante sur l'intervalle $]-\infty;-1[$:.........................

Le corrigé

1. La fonction $f(x) = -3x^2 + 12x + 7$ a un coefficient dominant $a = -3$ négatif et change de variation en $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12}{2\times(-3)} = 2$

f est décroissante sur $]2;+\infty[$. **Vrai**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	19	$\searrow$	$-\infty$

2. La fonction $g(x) = 4x^2 + 16x + 5$ a un coefficient dominant $a = 4$ positif et change de variation en $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{16}{2\times 4} = -2$

g est décroissante sur $]-2;+\infty[$. **Faux**

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	-11	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction $h(x) = 7x^2 - 21x + 1$ a un coefficient dominant $a = 7$ positif et change de variation en $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-21}{2\times 7} = \dfrac{21}{14} = 1,5$

h n'est pas que croissante sur $]1;+\infty[$. **Faux**

x	$-\infty$		$1,5$		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	$-14,75$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La fonction $j(x) = -2x^2 - 3x + 1$ a un coefficient dominant $a = -2$ négatif et change de variation en $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-3}{2\times(-2)} = \dfrac{3}{-4} = -0,75$

j est croissante sur $]-\infty;-1[$. **Vrai**

x	$-\infty$		$-0,75$		$+\infty$
h	$-\infty$	$\nearrow$	$17/8$	$\searrow$	$-\infty$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

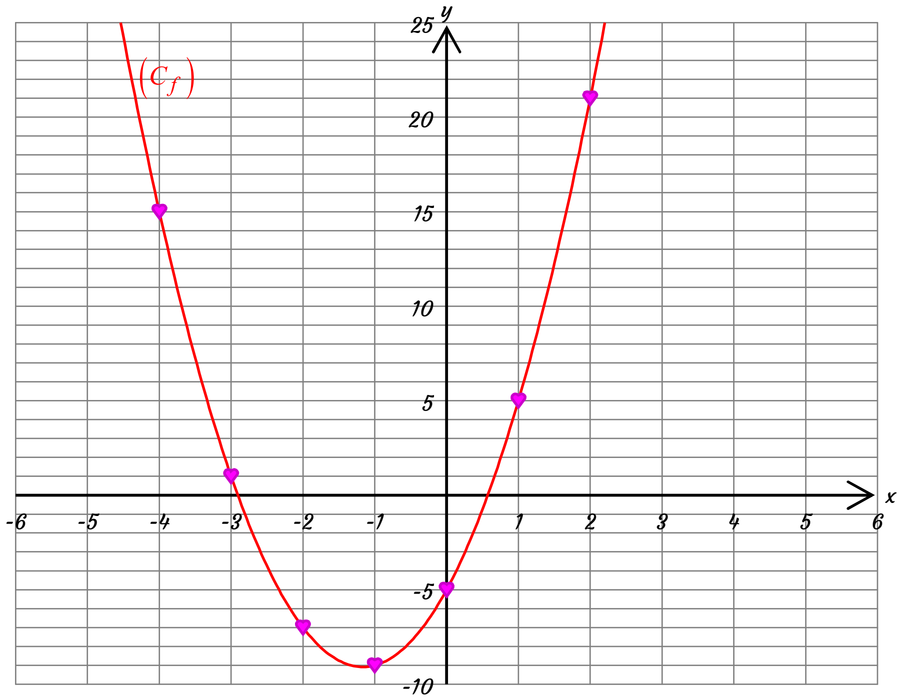
Système au second degré

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, on a tracé dans un repère simplement orthogonal la courbe d'une fonction du second degré *f* de la forme :

$$f(x) = a \times x^2 + b \times x + c$$

où *a*, *b* et *c* sont trois coefficients entiers inconnus que l'on vous impose de déterminer.



a. Expliquer pourquoi les trois coefficients *a*, *b* et *c* vérifient le système linéaire de trois équations :

$$(S)\quad \begin{cases} a - b + c = -9 & \textbf{(1)} \\ 4a + 2b + c = 21 & \textbf{(2)} \\ 9a - 3b + c = 1 & \textbf{(3)} \end{cases}$$

b. Résoudre ce système (S), puis en déduire une expression de la fonction du second degré *f*.

Le corrigé

a. Pour comprendre d'où vient le système (S), il faut regarder ses coefficients constants qui sont autant d'images, c'est-à-dire d'ordonnées de points d'abscisses entières représentés sur le graphique. D'après les points de ce graphique :

$$\begin{array}{|lclcll} f(-1) = -9 & \Leftrightarrow & a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = -9 & \Leftrightarrow & a - b + c = -9 & \textbf{(1)} \\ f(2) = 21 & \Leftrightarrow & a \times 2^2 + b \times 2 + c = 21 & \Leftrightarrow & 4a + 2b + c = 21 & \textbf{(2)} \\ f(-3) = 1 & \Leftrightarrow & a \times (-3)^2 + b \times (-3) + c = -9 & \Leftrightarrow & 9a - 3b + c = 1 & \textbf{(3)} \end{array}$$

b. Pour résoudre le système 3×3 qu'est (S), on constitue par combinaisons linéaires un système 2×2 avec les inconnues *a* et *b*.

$$\left.\begin{array}{lclclcl} \textbf{(2)} - \textbf{(1)} & \longrightarrow & 3a + 3b = 30 & \xrightarrow{\div 3} & a + b = 10 & \textbf{(21)} \\ \textbf{(3)} - \textbf{(1)} & \longrightarrow & 8a - 2b = 10 & \xrightarrow{\div 2} & 4a - b = 5 & \textbf{(31)} \end{array}\right\} (S')$$

Ce sous-système (S') se résout sans trop de difficultés. On obtient l'inconnue *a* en ajoutant les deux équations qui le constituent :

$$\textbf{(21)} + \textbf{(31)} \longrightarrow 5a = 15 \Leftrightarrow a = \frac{15}{5} = \underline{3}$$

En remplaçant *a* par sa valeur 3 dans l'équation ***(21)***, on détermine alors l'inconnue *b*.

$$\textbf{(21)} \quad 3 + b = 10 \Leftrightarrow b = 10 - 3 = \underline{7}$$

Enfin, on trouve la dernière inconnue *c* en remplaçant *a* et *b* par leurs valeurs dans l'une des trois équations composant le système (S).

$$\textbf{(1)} \quad 3 - 7 + c = -9 \Leftrightarrow -4 + c = -9 \Leftrightarrow c = -9 + 4 = \underline{-5}$$

<u>Conclusion :</u> une expression de la fonction du second degré *f* est :

$$f(x) = 3x^2 + 7x - 5$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Géométrie analytique

Premiers pas analytiques...au galop !

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ non orthogonal dans lequel on a déjà placé les quatre points :

$A(4;-5)$ $B(-5;-3)$ $C(-2;2)$ $D(2;-8,3)$

a. On appelle le point H de coordonnées $(2;-4)$.

1. Placer le point H sur la figure ci-contre.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point K défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{AK}=\frac{7}{2}\times\overrightarrow{AH}$.
3. Placer le point K sur la figure ci-contre.

b. Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ? On justifiera sa réponse.

c. On appelle E le quatrième point du parallélogramme DABE.

1. Construire au compas le point E sur la figure ci-contre.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E.
3. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [BD].
4. Que peut-on dire des points A, E et I ? On justifiera sa réponse.

d. Déterminer les coordonnées du point F qui est l'intersection de la droite (AB) et de l'axe des ordonnées $\left(O;\vec{j}\right)$.

e. Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$5\times\overrightarrow{AG}+7\times\overrightarrow{CG}=4\times\overrightarrow{CB}$$

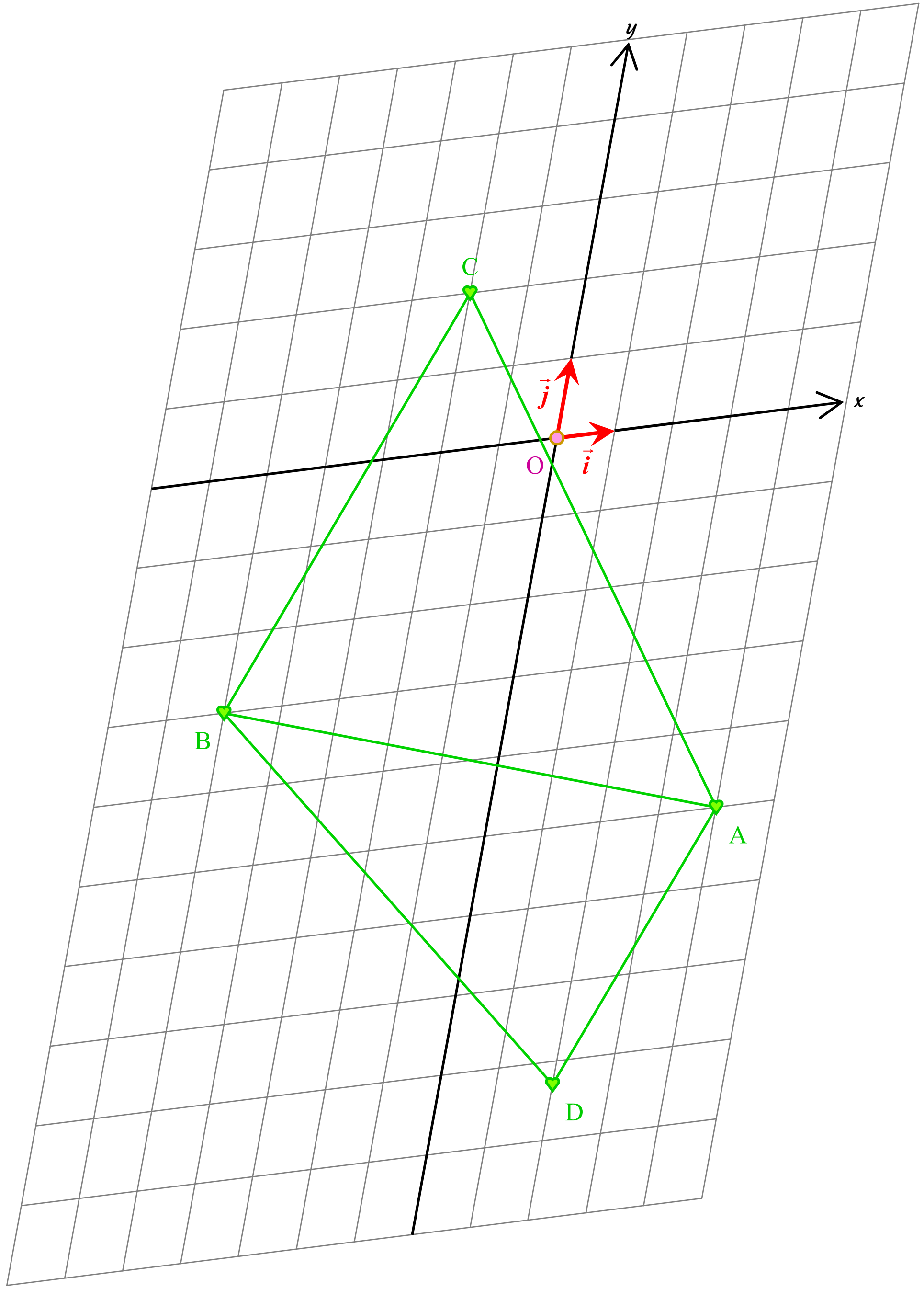
1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G.
2. Démontrer que les points C, F et G sont alignés.

f. On appelle L le point d'intersection des droites (AC) et (OH).

1. Etablir que les coordonnées du point L vérifient les deux équations :

$$7x_L+6y_L+2=0 \quad \underline{\text{et}} \quad y_L=-2x_L$$

2. En déduire les coordonnées du point L.



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Le corrigé

a.1. H ayant pour coordonnées $(2;-4)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ se place avec la relation vectorielle $\overrightarrow{OH}=2\vec{i}-4\vec{j}$.

a.2. Traduisons sous forme de coordonnées la relation vectorielle définissant K.

$$\overrightarrow{AK}=\frac{7}{2}\times\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_K-4 \\ y_K-(-5)\end{pmatrix}=\frac{7}{2}\times\begin{pmatrix} 2-4 \\ -4-(-5)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_K-4 \\ y_K+5\end{pmatrix}=\frac{7}{2}\times\begin{pmatrix} -2 \\ 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_K-4 \\ y_K+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 3,5\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{x_K-4=-7}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{y_K+5=3,5}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$x_K=-7+4 \qquad y_K=3,5-5$$

$$x_K=-3 \qquad y_K=-1,5$$

a.3. K est le point de la droite (AH) d'abscisse -3. C'est ainsi que nous le plaçons !

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2-4=-2 \\ -8,3-(-5)=-3,3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2-(-5)=3 \\ 2-(-3)=5\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3,3 & 5\end{vmatrix}=(-2)\times 5-(-3,3)\times 3=-10+9,9=-0,1\neq 0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.
<u>Conclusion :</u> les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles.

c.1. Le point E est l'intersection de deux arcs de cercle : l'un de centre B et de rayon AD et, l'autre de centre D et de rayon BA. C'est ainsi qu'il se construit au compas.

c.2. Le quatrième sommet E du parallélogramme DABE vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_E-(-5) \\ y_E-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -3,3\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{x_E+5=-2}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{y_E+3=-3,3}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$x_E=-7 \qquad y_E=-6,3$$

<u>Conclusion :</u> le point E a pour coordonnées $(-7;-6,3)$

c.3. Les coordonnées du milieu I du segment [BD] sont données par:

$$x_I=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{-5+2}{2}=\frac{-3}{2}=-1,5 \qquad \text{et} \qquad y_I=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{(-3)+(-8,3)}{2}=-5,65$$

c.4. Le quadrilatère DABE étant un parallélogramme, ses diagonales [BD] et [AE] se coupent en leur milieu. Par conséquent, le point I est aussi le milieu de [AE].

d. Comme le point F appartient à l'axe $(O;\vec{j})$, alors son abscisse x_F est nulle.

Ensuite, F appartenant à la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 0-4 \\ y_F-(-5)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5-4=-9 \\ -3-(-5)=2\end{pmatrix}$

sont colinéaires. Donc leur déterminant est nul et il vient:

$$\det\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4 & -9 \\ y_F+5 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (-4)\times 2-(y_F+5)\times(-9)=0$$

$$\Leftrightarrow -8+9y_F+45=0 \Leftrightarrow 9y_F=-37 \Leftrightarrow y_F=-\frac{37}{9}$$

<u>Conclusion :</u> le point F a pour coordonnées $\left(0;-\frac{37}{9}\right)$.

e.1. Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$5\times\overrightarrow{AG}+7\times\overrightarrow{CG}=4\times\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 5\times\begin{pmatrix} x_G-4 \\ y_G+5\end{pmatrix}+7\times\begin{pmatrix} x_G+2 \\ y_G-2\end{pmatrix}=4\times\begin{pmatrix} -3 \\ -5\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5x_G-20 \\ 5y_G+25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7x_G+14 \\ 7y_G-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 \\ -20\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 12x_G-6 \\ 12y_G+11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 \\ -20\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{12x_G-6=-12}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{12y_G+11=-20}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$12x_G=-6 \qquad 12y_G=-31$$

$$x_G=-0,5 \qquad y_G=-\frac{31}{12}$$

<u>Conclusion :</u> le point G a pour coordonnées $\left(-0,5;-\frac{31}{12}\right)$.

e.2. Se demander les points C, F et G sont alignés équivaut à se chercher si les vecteurs

$$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix} 0-(-2)=-2 \\ -\frac{37}{9}-2=\frac{-37-2\times 9}{9}=-\frac{55}{9}\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} -0,5-(-2)=1,5 \\ -\frac{31}{12}-2=\frac{-31-2\times 12}{12}=-\frac{55}{12}\end{pmatrix}$$ sont colinéaires.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Pour le savoir, calculons leur déterminant :

$$\det\left(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CG}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 1,5\\ -55/9 & -55/12\end{vmatrix}=(-2)\times\left(-\frac{55}{12}\right)-\left(-\frac{55}{9}\right)\times 1,5=\frac{55}{6}-\frac{55}{6}=\underline{0}$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{GG}$ étant colinéaires, le point C, F et G sont alignés.

f.1 L appartenant à la droite (AC), les vecteurs $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_L-4\\ y_L+5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\ 7\end{pmatrix}$ sont colinéaires et leur déterminant est nul. Par suite :

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AC}\right)=0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x_L-4 & -6\\ y_L+5 & 7\end{vmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow (x_L-4)\times 7-(y_L+5)\times(-6)=0\\ &\Leftrightarrow 7x_L-28+6y_L+30=0 \Leftrightarrow \underline{7x_L+6y_L+2=0}\end{aligned}$$

Ensuite, L faisant aussi partie de (OK), les vecteurs $\overrightarrow{OL}\begin{pmatrix}x_L-0\\ y_L-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}2-0\\ -4-0\end{pmatrix}$ sont aussi colinéaires et leur déterminant est aussi nul. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{OL},\overrightarrow{OH}\right)=0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x_L & 2\\ y_L & -4\end{vmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow x_L\times(-4)-y_L\times 2=0\\ &\Leftrightarrow -2y_L=4x_L \Leftrightarrow \underline{y_L=\frac{4}{-2}x_L=-2x_L}\end{aligned}$$

f.2. Sans le dire, nous venons de constituer le système linéaire de deux équations à deux inconnues x_L et y_L qu'est :

$$\begin{cases}7x_L+6y_L+2=0 & \textbf{\textit{(1)}}\\ y_L=-2x_L & \textbf{\textit{(2)}}\end{cases}$$

Ce système se résout sans problème par substitution. Dans l'équation ***(1)***, on remplace y_L par ce qu'il vaut en x_L d'après ***(2)***.

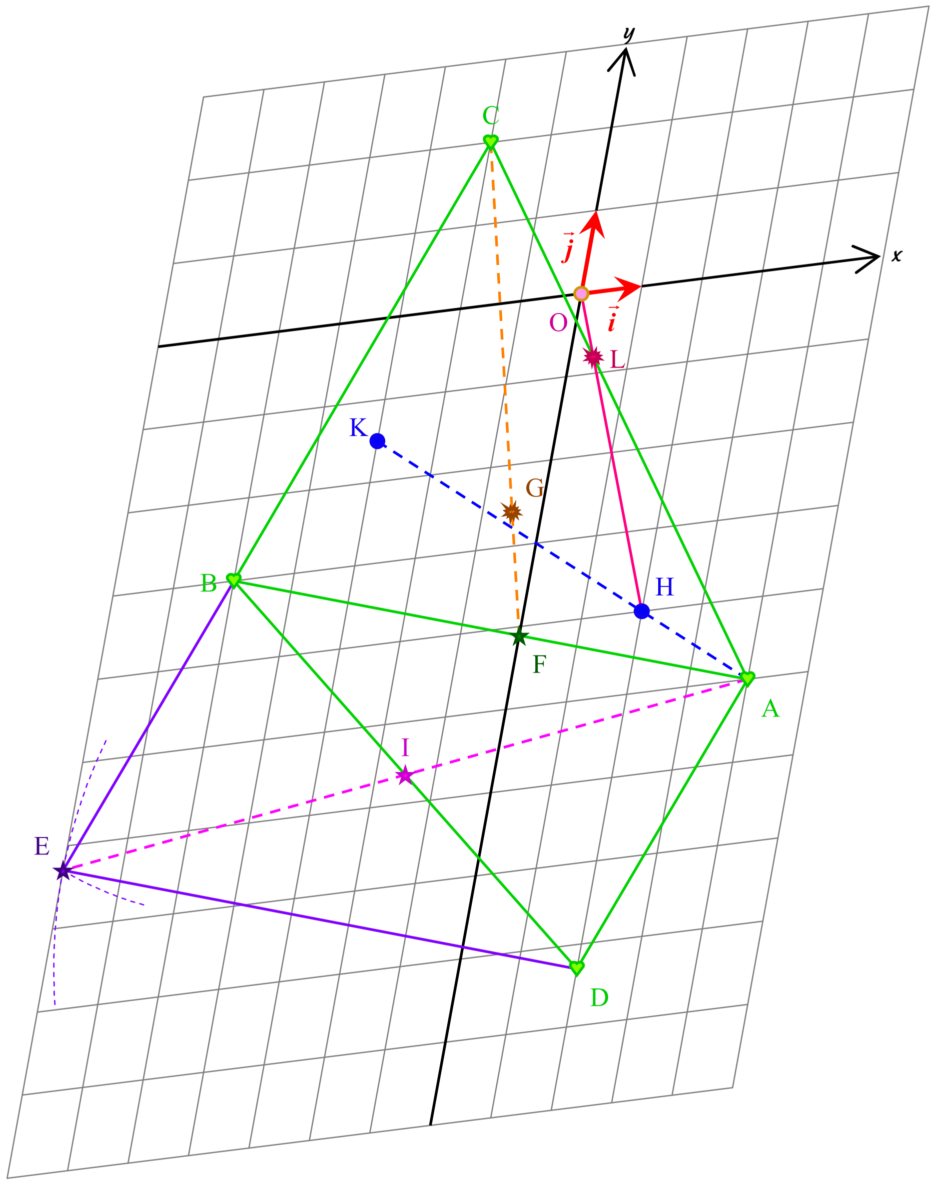
$$\begin{aligned}7x_L+6y_L+2=0 &\Rightarrow 7x_L+6\times(-2x_L)+2=0\\ &\Rightarrow 7x_L-12x_L+2=0 \Rightarrow -5x_L=-2 \Rightarrow x_L=\frac{-2}{-5}=\underline{0,4}\end{aligned}$$

L'ordonnée de L se déduit alors sans problèmes :

$$y_L=-2x_L=-2\times 0,4=\underline{-0,8}$$

Conclusion : le point L a pour coordonnées $(0,4;-0,8)$.

A l'issue de l'exercice, la figure complétée est la suivante :



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Les droites attaquent !

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, la plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dans ce repère, on a placé les points de coordonnées suivants :

$$A(4;3) \qquad B(1;-2) \qquad C(-3;6) \qquad D(2;3,7)$$

a. On s'intéresse à la droite (AB).

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Déterminer les coordonnées du point E qui est le point de la droite (AB) dont l'ordonnée est égale à l'ordonnée est égale à 1.

b. On appelle $\mathscr{D}$ la droite dont une équation est $7x+4y=3$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

2. Démontrer que le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$.

3. Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique ci-contre.

4. Démontrer que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ sont sécantes.
Sont-elles aussi perpendiculaires ? On justifiera sa réponse.

5. Déterminer les coordonnées du point F qui est l'intersection des droites $\mathscr{D}$ et (AB).

c. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par le point A.

1. Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

2. Le point D appartient-il au cercle $\mathscr{C}$? On justifiera sa réponse.

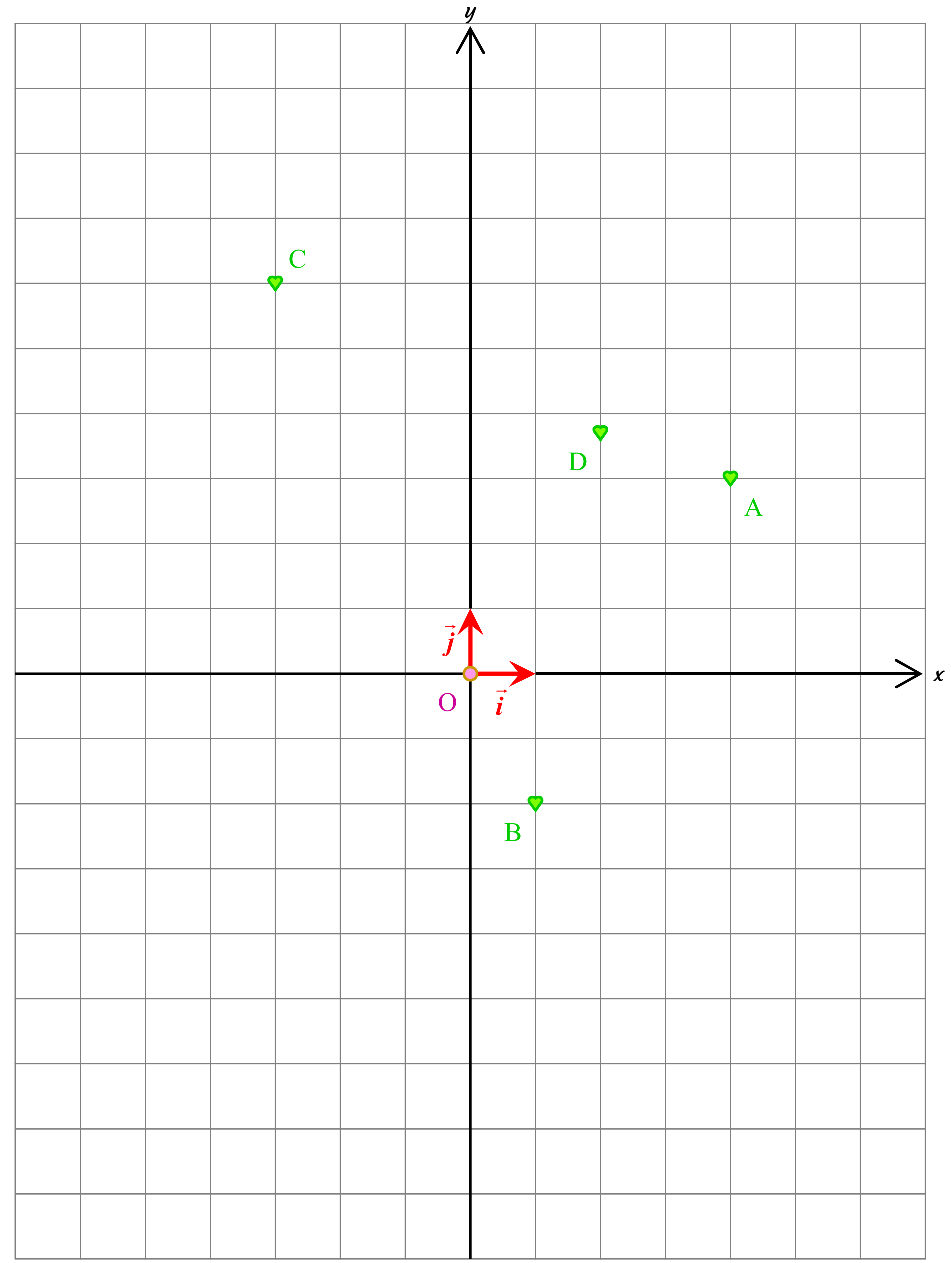
3. Déterminer les coordonnées du point G qui est le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées dont l'ordonnée y_G est négative.

d. On appelle Δ la perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ.

2. En déduire les coordonnées de H qui le point d'intersection de la droite Δ et de l'axe des ordonnées.

3. Le point H est-il aussi le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$? On justifiera sa réponse.



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Le corrigé

a.1. Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB).

$$M(x;y)\in(AB) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-3\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-4=-3\\-2-3=-5\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-4 & -3\\ y-3 & -5\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\times(-5)-(y-3)\times(-3)=0$$

$$\Leftrightarrow -5x+20+3y-9=0 \Leftrightarrow \boxed{-5x+3y+11=0}$$

Note : on valide l'équation trouvée en remarquant que les coordonnées des points A et B doivent la vérifier.

a.2. Les coordonnées du point E sont de la forme $(x_E;1)$

Comme le point E appartient à la droite (AB), alors les coordonnées du premier vérifient l'équation de la seconde. Ainsi :

$$-5x_E+3y_E+11=0 \Leftrightarrow -5x_E+3\times1+11=0 \Leftrightarrow -5x_E=-14 \Leftrightarrow x_E=\frac{-14}{-5}=\boxed{2,8}$$

Conclusion : les coordonnées du point E sont $(2,8;1)$.

b.1. Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\boxed{7}x+\boxed{4}y-3=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-\boxed{4}\\ \boxed{7}\end{pmatrix}$.

b.2. Regardons si les coordonnées du point C vérifient l'équation de la droite $\mathcal{D}$.

$$7x_C+4y_D=7\times(-3)+4\times6=-21+24=3 \quad \boxed{Ok!}$$

Conclusion : le point C appartient bien à la droite $\mathcal{D}$.

b.3. La droite $\mathcal{D}$ se trace en positionnant le vecteur directeur $\vec{u}$ arrivant au point C.

b.4. Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ de (AB) et $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)=\begin{vmatrix}-3 & -4\\ -5 & 7\end{vmatrix}=(-3)\times7-(-5)\times(-4)=-21-20=\boxed{-41\neq0}$$

Leurs vecteurs directeurs n'étant pas colinéaires, les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles mais sécantes.

Regardons si ces vecteurs directeurs sont orthogonaux.

$$\text{Test d'orthogonalité}\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)=(-3)\times(-4)+(-5)\times7=12-35=\boxed{-23\neq0}$$

Leurs vecteurs directeurs n'étant pas orthogonaux, les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas perpendiculaires.

Conclusion : les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont simplement sécantes en un point appelé F.

A l'issue de l'exercice, la figure complétée est la suivante :

b.5. Comme F appartient aux droites (AB) et $\mathcal{D}$, alors ses coordonnées en vérifient les deux équations et, par conséquent, elles sont les solutions du système :

$$\begin{cases}-5x+3y+11=0 & \Leftrightarrow & F\in(AB) & \textit{(1)}\\ 7x+4y-3=0 & \Leftrightarrow & F\in\mathcal{D} & \textit{(2)}\end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour obtenir x, on anéantit y.	Pour déterminer y, on élimine x.
(1) $\xrightarrow{\times4}$ $-20x+12y+44=0$ $\ominus$	*(1)* $\xrightarrow{\times7}$ $-35x+21y+77=0$ $\oplus$
(2) $\xrightarrow{\times3}$ $21x+12y-9=0$	*(2)* $\xrightarrow{\times5}$ $35x+20y-15=0$
$-41x+53=0$	$41x+62=0$
$\boxed{x=\frac{53}{41}}$	$\boxed{y=-\frac{62}{41}}$

Conclusion : le point d'intersection F a pour coordonnées $\left(\frac{53}{41};-\frac{62}{41}\right)$.

c.1. Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est égal à la longueur BA.

Comme $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ alors $\text{Rayon}(\mathcal{C})=BA=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{9+25}=\boxed{\sqrt{34}}$

Conclusion : le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est égal à $\sqrt{34}$ unités de longueur.

c.2. Calculons la distance séparant le centre B du point D.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD}$ sont $\begin{pmatrix}2-1=1\\3,7-(-2)=5,7\end{pmatrix}$. Il vient alors :

$$BD=\sqrt{1^2+5,7^2}=\sqrt{1+32,49}=\boxed{\sqrt{33,49}\neq\sqrt{34}}$$

Conclusion : la distance BD étant différente du rayon du cercle, le point D n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$.

c.3. Le point G appartenant à l'axe des ordonnées $(O;\vec{j})$, son abscisse x_G est nulle.

Comme G fait également partie du cercle $\mathcal{C}$, alors la distance BG mesure $\sqrt{34}$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BG}$ sont $\begin{pmatrix}0-1=-1\\y_G-(-2)=y_G+2\end{pmatrix}$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Il vient alors :

$$BG=\sqrt{34} \Rightarrow \sqrt{(-1)^2+(y_G+2)^2}=\sqrt{34}$$

$$\Rightarrow 1+(y_G+2)^2=34$$

$$\Rightarrow \overbrace{(y_G+2)^2}^{\text{Deux nombres ayant des carrés égaux...}}=33 \Leftrightarrow \overbrace{y_G+2=-\sqrt{33} \quad \text{ou} \quad y_G+2=\sqrt{33}}^{\text{...sont opposés ou égaux.}}$$

$$y_G=\underbrace{-2-\sqrt{33}}_{\approx -7{,}74} \qquad y_G=\underbrace{-2+\sqrt{33}}_{\approx 3{,}74}$$

Conclusion : seule la première solution étant négative, nous en déduisons que les coordonnées du point G sont $(0;-2-\sqrt{33})$.

d.1. Déterminons une équation cartésienne de la droite Δ.

$$M(x;y)\in\Delta \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-3\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\Leftrightarrow \text{Test d'orthogonalité}\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\times(-4)+(y-3)\times 7=0$$

$$\Leftrightarrow -4x+16+7y-21=0 \Leftrightarrow -4x+7y-5=0$$

d.2. Le point H faisant partie de l'axe des ordonnées $(O;\vec{j})$, son abscisse x_H est nulle.

Ensuite, le point H appartenant à la droite Δ, ses coordonnées en vérifient l'équation :

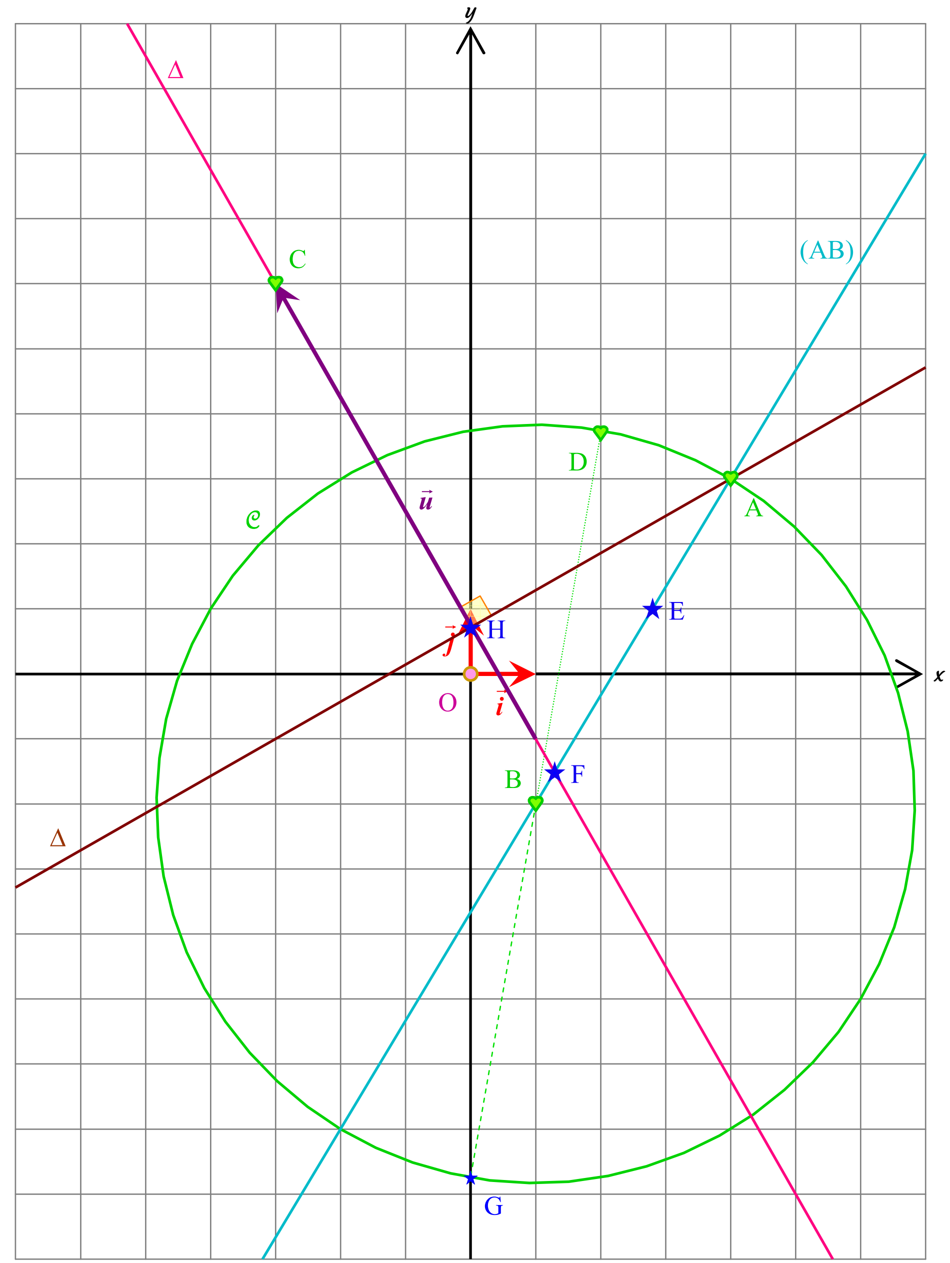
$$-4x_H+7y_H-5=0 \Leftrightarrow -4\times 0+7y_H-5=0 \Leftrightarrow 7y_H=5 \Leftrightarrow y_H=\frac{5}{7}$$

Conclusion : le point H a pour coordonnées $\left(0;\frac{5}{7}\right)$.

d.3. Nous savons déjà que la droite (AH), c'est-à-dire Δ, est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$. Pour faire de H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, il suffit juste qu'il appartienne à cette droite. Une seule question se pose : les coordonnées de H vérifient-elles l'équation de $\mathcal{D}$?

$$7x_H+4y_H=7\times 0+4\times\frac{5}{7}=\frac{20}{7}\neq 3$$

Conclusion : le point H n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, il n'est pas le projeté orthogonal du point A sur cette droite.

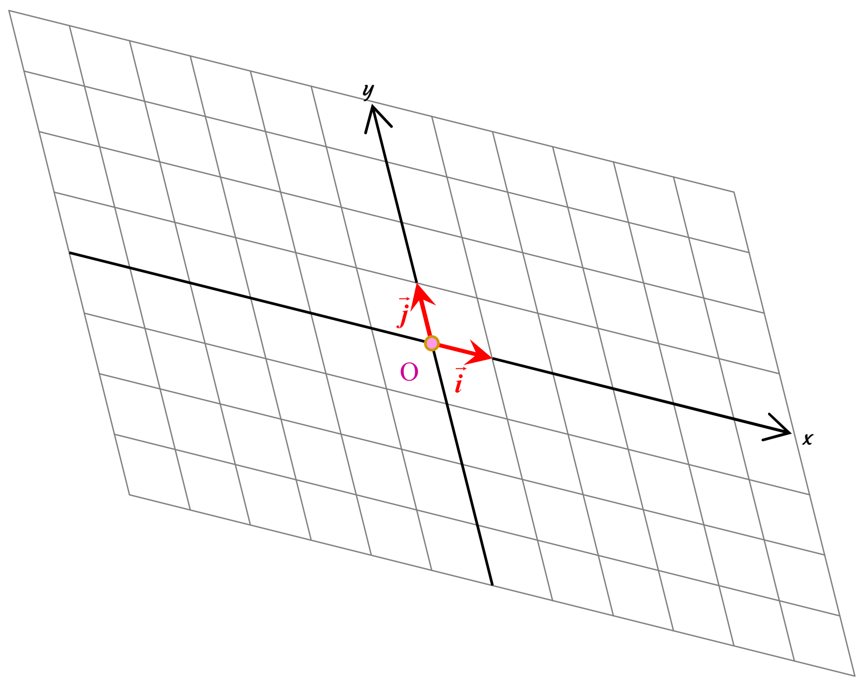


Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

A droite toutes !

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est rapporté à un repère simplement normé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.



a. Sur la figure ci-dessus, tracer la droite $\mathfrak{D}$ passant par le point $\mathrm{A}(4;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation de la droite $\mathfrak{D}$.

b. Sur la figure ci-dessus, tracer la droite Δ d'équation $3x+4y=7$.

c. Démontrer que les droites $\mathfrak{D}$ et Δ sont sécantes, puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H.

Le corrigé

a. Il est difficile de positionner le vecteur $\vec{u}$ au départ du point A pour tracer la droite $\mathfrak{D}$ car l'on sort du graphique. Mais utiliser le vecteur $-\vec{u}$ nous donne un second point B.

Déterminons une équation cartésienne de la droite $\mathfrak{D}$.

$$\mathrm{M}(x;y)\in\mathfrak{D} \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-4\\y-2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\vec{u}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-4 & 7\\ y-2 & 4\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\times4-(y-2)\times7=0$$

$$\Leftrightarrow 4x-16-7y+14=0 \Leftrightarrow 4x-7y=2$$

Conclusion : une équation de la droite $\mathfrak{D}$ est $4x-7y=2$.

b. La droite Δ d'équation $3x+4y=7$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et passe par les points

$\mathrm{E}(1;1)$ car $3\times1+4\times1=3+4=7$ ☑

$\mathrm{F}(5;-2)$ car $3\times5+4\times(-2)=15-8=7$ ☑

C'est avec deux de ces trois données que l'on trace la droite Δ.

c. Regardons si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ directeurs pour les droites $\mathfrak{D}$ et Δ sont colinéaires.

$$\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}7 & -4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=7\times3-4\times(-4)=21+16=37\neq0$$

Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, les droites $\mathfrak{D}$ et Δ ne sont pas parallèles mais sécantes en un point H dont les coordonnées sont la solution du système :

$$\begin{cases}4x-7y=2 & \Leftrightarrow \mathrm{H}\in\mathfrak{D} \quad \textit{(1)}\\ 3x+4y=7 & \Leftrightarrow \mathrm{H}\in\Delta \quad \textit{(2)}\end{cases}$$

Résolvons ce système linéaire 2×2 par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour obtenir x, on anéantit y.

$$\begin{array}{lr} \textit{(1)} \xrightarrow{\times4} & 16x-28y=8 \\ \textit{(2)} \xrightarrow{\times7} & 21x+28y=49 \\ \hline & 37x=57 \\ & x=\dfrac{57}{37}\end{array} \quad \oplus$$

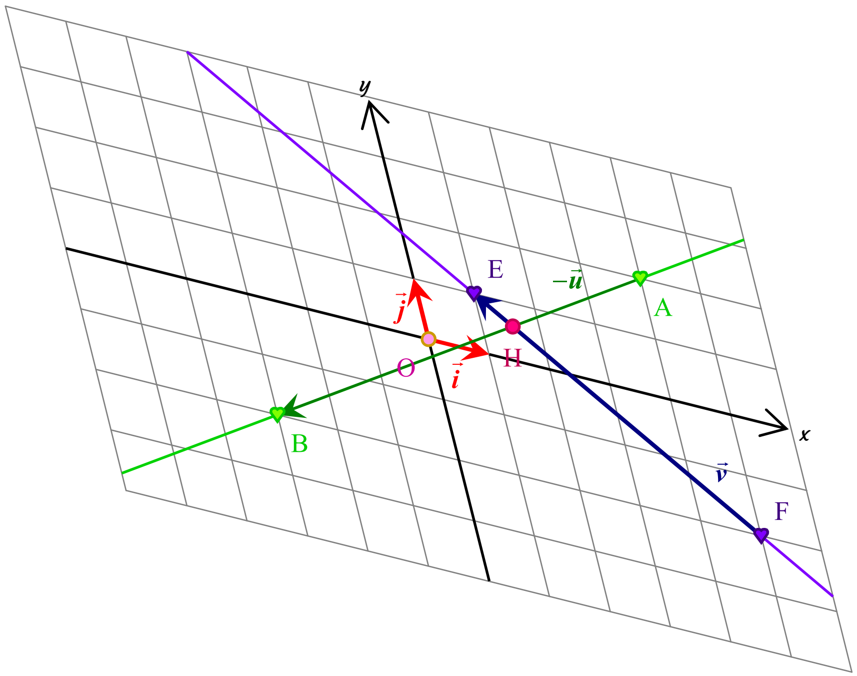
Pour déterminer y, on élimine x.

$$\begin{array}{lr} \textit{(1)} \xrightarrow{\times3} & 12x-21y=6 \\ \textit{(2)} \xrightarrow{\times4} & 12x+16y=28 \\ \hline & -37y=-22 \\ & y=\dfrac{22}{37}\end{array} \quad \ominus$$

Conclusion : les coordonnées du point H sont $\left(\dfrac{57}{37};\dfrac{22}{37}\right)$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Géométrique classique

Des points et des vecteurs

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le triangle ABC dont on a gradué les trois côtés tous les centimètres a pour dimensions
$AB = 9\text{cm}$
$AC = 10\text{cm}$
$BC = 8\text{cm}$

a. Sur la figure ci-contre, placer les points suivants :

1. Le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{CD} = \frac{5}{8} \times \overrightarrow{CB}$
2. Le point E défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2} \times \overrightarrow{AC}$
3. Le point F défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \times \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \times \overrightarrow{AC}$

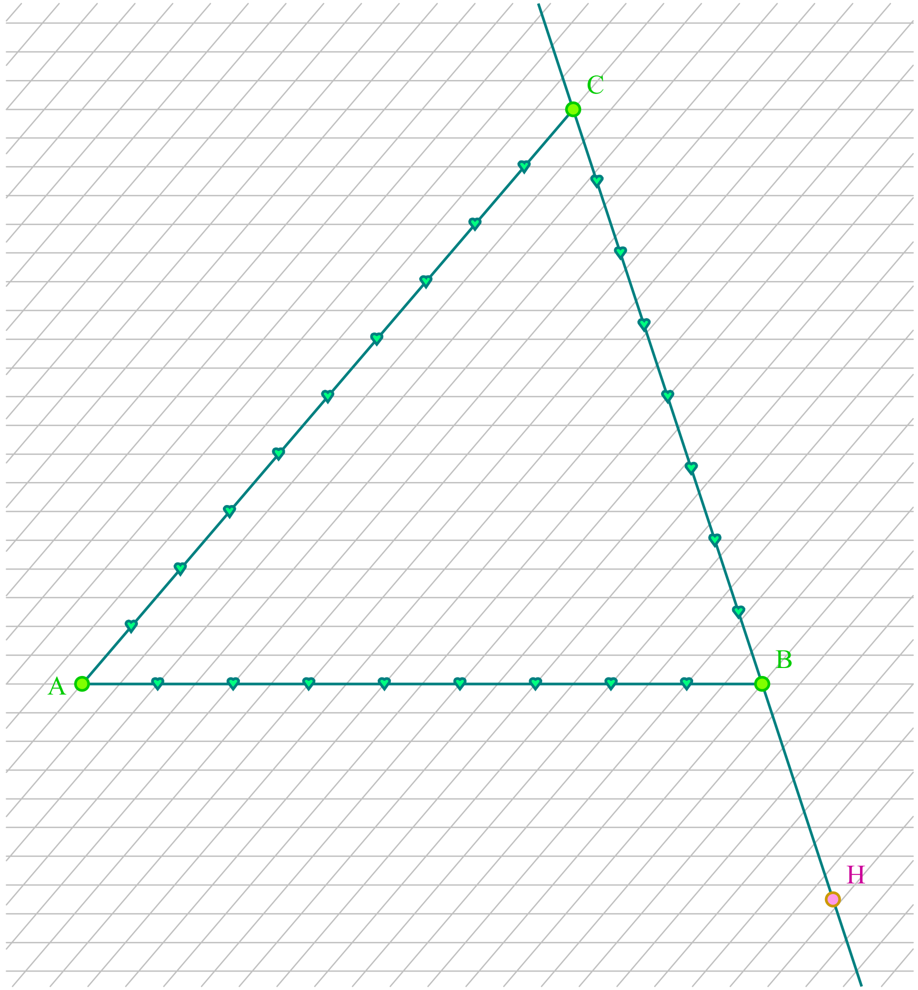
b. Sur la figure ci-contre, le point H est situé à 3 centimètres de B sur la droite (BC).
Sans justification, compléter les trois égalités vectorielles suivantes avec les coefficients réels adéquats.

$\overrightarrow{CH} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CH} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{CB}$ et $\ldots\ldots \times \overrightarrow{BH} + \ldots\ldots \times \overrightarrow{CH} = \vec{o}$

c. On appelle I le point défini par la relation vectorielle :

$$7 \times \overrightarrow{AI} + 5 \times \overrightarrow{BI} = \vec{o}$$

1. En partant de la relation précédente et à l'aide d'un calcul vectoriel, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire aboutir à une égalité de la forme $\overrightarrow{AI} = \ldots\ldots \times \overrightarrow{AB}$.
2. Placer le point I sur la figure.



Le corrigé

b. Le point H se trouvant à 11 centimètres de C et [CB] en mesurant 8, nous en déduisons :

$$\overrightarrow{BH} = -\frac{3}{8} \times \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{CH} = \frac{11}{8} \times \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 8 \times \overrightarrow{CH} = \overbrace{11 \times \overrightarrow{CH} + 11 \times \overrightarrow{HB}}^{\text{Chasles via H}}$$

$$\Leftrightarrow 8 \times \overrightarrow{CH} - 11 \times \overrightarrow{CH} - 11 \times \overrightarrow{HB} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow -3 \times \overrightarrow{CH} + 11 \times \overrightarrow{BH} = \vec{o}$$

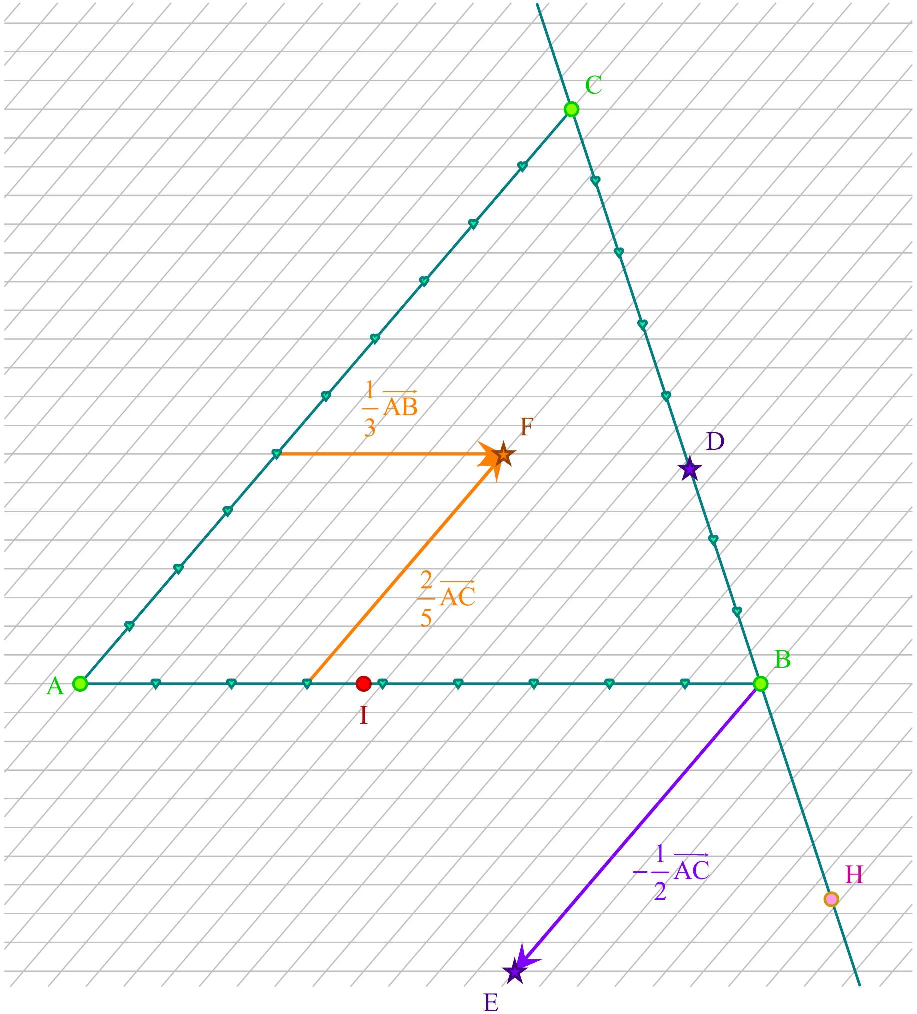
Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

c.1. En utilisant la relation de Chasles, nous pouvons écrire :

$$7\times\overrightarrow{AD}+5\times\overrightarrow{BD}=\vec{o} \Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{AD}+\underbrace{5\times\overrightarrow{BA}+5\times\overrightarrow{AD}}_{5\overrightarrow{BD}\text{ par Chasles !}}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 12\times\overrightarrow{AD}=5\times\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AD}=\frac{5}{12}\times\overrightarrow{AB}}$$

c.2. Le point D se situe sur le segment [AB] à $\frac{5}{12}\times 9=\frac{15}{4}=3,75\text{cm}$ du point A.



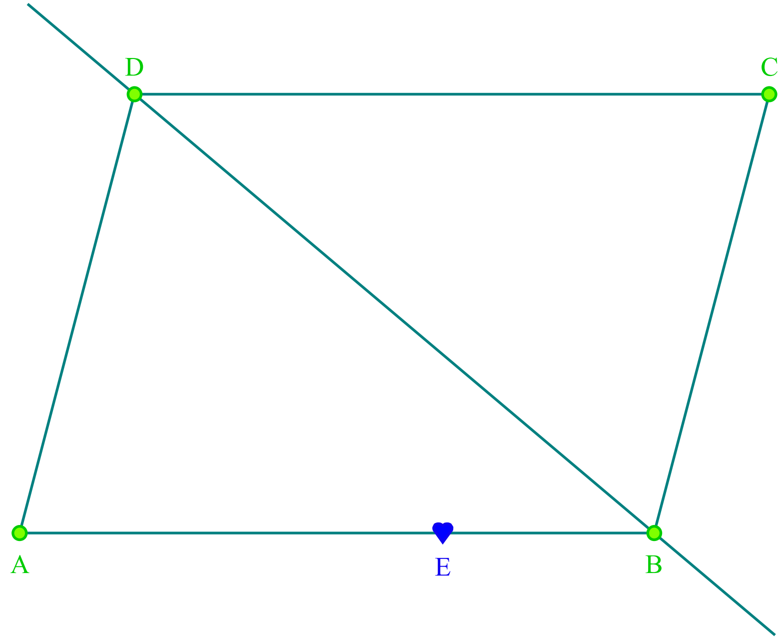
Les mauvais 'cteurs

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme tel que :

$AB=8,4\text{cm}$ $AD=6\text{cm}$ $BD=9\text{cm}$

E est le point du segment [AB] situé à 5,6 centimètres du point A.



a. Parmi les six égalités vectorielles suivantes, entourer celles qui sont vraies. Chaque bonne réponse rapporte 0,5 points. Aucune justification n'est demandée.

1. $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ **2.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}$ **3.** $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AC}$

4. $\overrightarrow{AE}=-\frac{2}{3}\times\overrightarrow{AB}$ **5.** $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\times\overrightarrow{BA}$ **6.** $\overrightarrow{AE}+2\times\overrightarrow{BE}=\vec{o}$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

b. On appelle F le point défini par la relation vectorielle :

$$3\times\overrightarrow{CF}+4\times\overrightarrow{DF}=\vec{o}$$

1. En partant de la relation précédente et à l'aide d'un calcul vectoriel, exprimer le vecteur $\overrightarrow{CF}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire aboutir à une égalité de la forme $\overrightarrow{CF}=\ldots\ldots\times\overrightarrow{CD}$.
2. Placer le point F sur la figure.

c. On appelle L le point défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AL}+2\times\overrightarrow{BL}+3\times\overrightarrow{CL}+4\times\overrightarrow{DL}=\vec{o}$$

1. Démontrer l'égalité vectorielle $3\times\overrightarrow{CL}+4\times\overrightarrow{DL}=7\times\overrightarrow{FL}$.
2. En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{EL}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{EF}$.
3. Placer le point L sur la figure.

Le corrigé

a. Examinons les propositions une par une.

1. Comme ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ $\boxed{\textit{Fausse}}$
2. Cette égalité s'écrit aussi : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
   C'est la règle du parallélogramme s'appliquant dans ABCD. $\boxed{\textit{Vraie}}$
3. Les vecteurs diagonaux $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ayant pas la même direction, ils ne peuvent être opposés. $\boxed{\textit{Fausse}}$
4. Le point E se trouve aux $\dfrac{5,6}{8,4}=\dfrac{2\times\cancel{2,8}}{3\times\cancel{2,8}}=\dfrac{2}{3}$ du segment [AB] à partir de A.
   Par conséquent, nous avons : $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\times\overrightarrow{AB}$ $\boxed{\textit{Fausse}}$
5. E se trouve au tiers du segment [BA] à partir de A. Donc $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\times\overrightarrow{BA}$ $\boxed{\textit{Vraie}}$
6. Modifions cette dernière égalité !
   $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\times\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow 3\times\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}+2\times\overrightarrow{BE}=\vec{o}$ $\boxed{\textit{Vraie}}$

b.1. En utilisant la relation de Chasles, nous pouvons écrire :

$$3\times\overrightarrow{CF}+4\times\overrightarrow{DF}=\vec{o} \Leftrightarrow 3\times\overrightarrow{CF}+\overbrace{4\times\overrightarrow{DC}+4\times\overrightarrow{CF}}^{4\overrightarrow{DF}\text{ par Chasles !}}=\vec{o}$$
$$\Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{CF}=4\times\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{CF}=\frac{4}{7}\times\overrightarrow{CD}}$$

b.2. Le point F se situe aux $\dfrac{4}{7}\times 8,4=4,8$ centimètres sur le segment [CD] à partir de C.

c.1. Introduisons le point F dans les vecteurs $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{DL}$

$$3\times\overrightarrow{CL}+4\times\overrightarrow{DL}=\overbrace{3\times\overrightarrow{CF}+3\times\overrightarrow{FL}}^{3\overrightarrow{CL}\text{ par Chasles !}}+\overbrace{4\times\overrightarrow{DF}+4\times\overrightarrow{FL}}^{4\overrightarrow{DL}\text{ par re-Chasles !}}$$
$$=\underbrace{3\times\overrightarrow{CF}+4\times\overrightarrow{DF}}_{=\vec{o}}+7\times\overrightarrow{FL}=\vec{o}+7\times\overrightarrow{FL}=\boxed{7\times\overrightarrow{FL}}$$

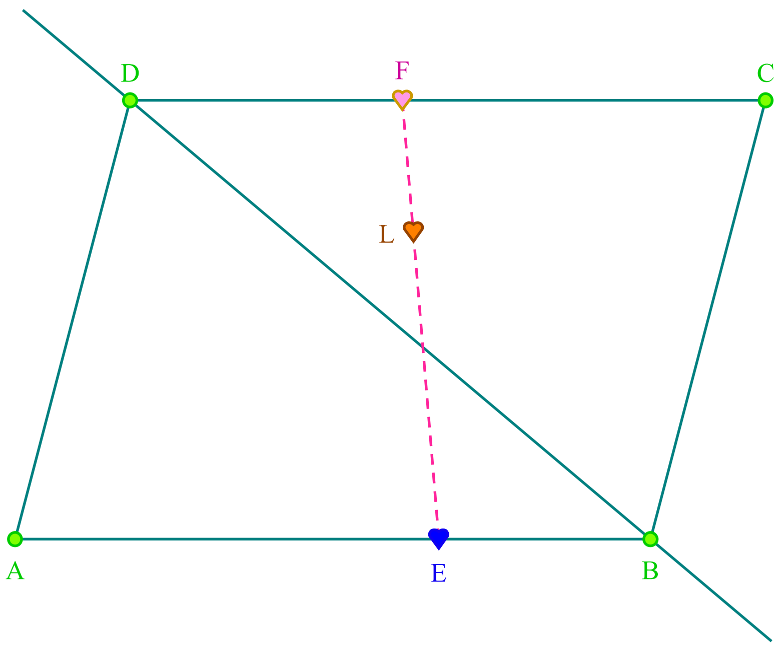
c.2. De la même façon, en introduisant le point E dans les vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{BL}$, il vient :

$$\overrightarrow{AL}+2\times\overrightarrow{BL}=\overbrace{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EL}}^{\overrightarrow{AL}\text{ par Chasles !}}+\overbrace{2\times\overrightarrow{BE}+2\times\overrightarrow{EL}}^{2\overrightarrow{BL}\text{ par re-Chasles !}}=\overbrace{\overrightarrow{AE}+2\times\overrightarrow{BE}}^{=\vec{o}}+3\times\overrightarrow{EL}=\boxed{3\times\overrightarrow{EL}}$$

La relation définissant le point L devient alors :

$$\overbrace{\overrightarrow{AL}+2\times\overrightarrow{BL}}+\overbrace{3\times\overrightarrow{CL}+4\times\overrightarrow{DL}}=\vec{o} \Leftrightarrow \overbrace{3\times\overrightarrow{EL}}+\overbrace{7\times\overrightarrow{FL}}=\vec{o}$$
$$\Leftrightarrow 3\times\overrightarrow{EL}+\overbrace{7\times\overrightarrow{FE}+7\times\overrightarrow{EL}}^{7\overrightarrow{FL}\text{ par Chasles !}}=\vec{o}$$
$$\Leftrightarrow 10\times\overrightarrow{EL}=7\times\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{EL}=\frac{7}{10}\times\overrightarrow{EF}}$$

c.3. Le point L se situe aux sept dixièmes du segment [EF] à partir de E.

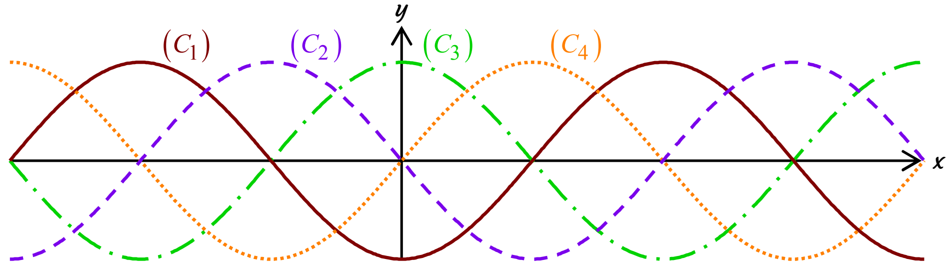


Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

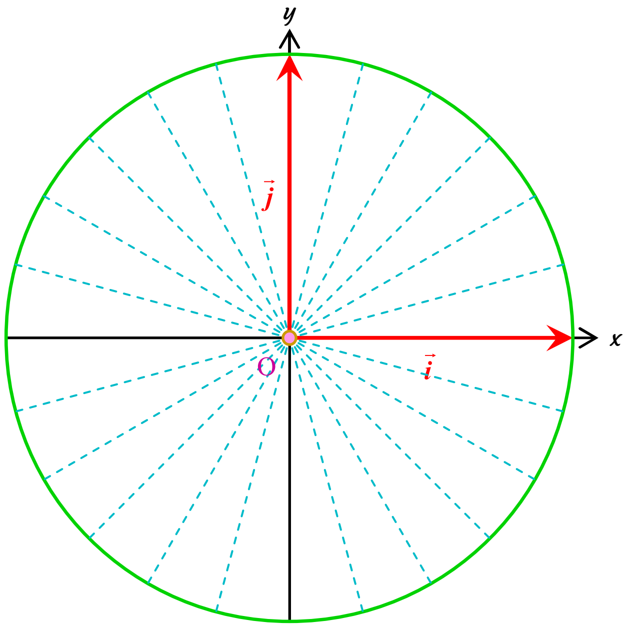
Des angles et des ronds

L'énoncé

a. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé quatre courbes dans un repère simplement orthogonal. Deux d'entre elles représentent les courbes des fonctions cosinus et sinus. Lesquelles ? Aucune justification n'est demandée.



b. Sur la figure ci-dessous, on a représenté le cercle trigonométrique d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$. Ce cercle a été partagé en 24 parties égales.



Sans justifications, placer les points suivants sur le cercle trigonométrique ci-avant :

A associé à $\dfrac{5\pi}{12}$ B associé à $-\dfrac{\pi}{3}$ C associé à $\dfrac{5\pi}{6}$ D associé à $-\dfrac{3\pi}{4}$

E associé à 5π F associé à $-\dfrac{17\pi}{12}$ G associé à $-\dfrac{9\pi}{2}$ H associé à $\dfrac{9\pi}{4}$

Le corrigé

a. Les quatre courbes représentent des fonctions périodiques.

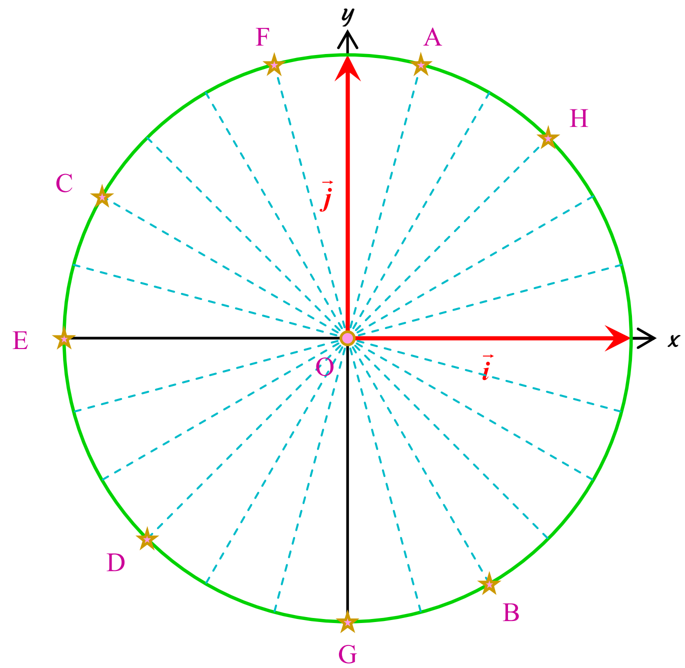
La fonction cosinus vaut 1 en 0 et est décroissante après 0. Seule la courbe verte (C_3) a ces caractéristiques.

La fonction sinus passe par l'origine (car $\sin(0)=0$) et est croissante après 0. Seule la courbe orange (C_4) est dans ce cas.

b. Le cercle trigonométrique est gradué tous les $\dfrac{1 \text{ tour}}{24}=\dfrac{2\pi}{24}=\dfrac{\pi}{12}$ radians.

A est le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$ mesure $\dfrac{5\pi}{12}$ radians.

B est le point du cercle tel que l'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ mesure $-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{4\pi}{12}$ radians.



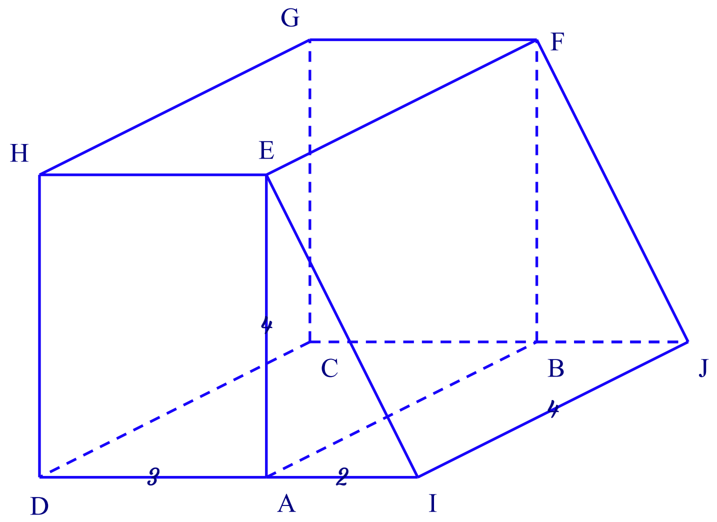
Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Trapézoïdes

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, AIJBCDEFGH est un trapézoïde constitué du pavé droit ABCDEFGH auquel on a collé le prisme droit AIJBEF.
On donne les longueurs suivantes :

AD = 3 cm AI = 2 cm AE = 4 cm IJ = 4 cm



a. Calculer le volume en millimètres cubes du trapézoïde AIJBCDEFGH.

b. Cette sous-partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, trois propositions sont faites mais une seule est juste. Laquelle ? On entourera la proposition choisie.

b.1. Les droites (BI) et (GE) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

b.2. Les plans (FIJ) et (DCG) sont :

Sécants	parallèles distincts	Confondus

b.3. La droite (DF) et le plan (GEI) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse.	La droite est incluse dans le plan.

b.4. Les droites (BH) et (AG) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

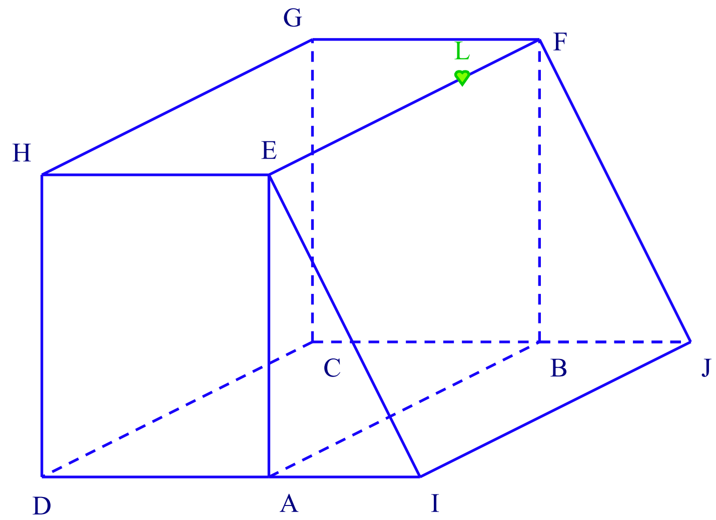
b.5. Les plans (BIJ) et (FGH) sont :

Sécants	parallèles distincts	Confondus

b.6. La droite (AJ) et le plan (EFG) sont :

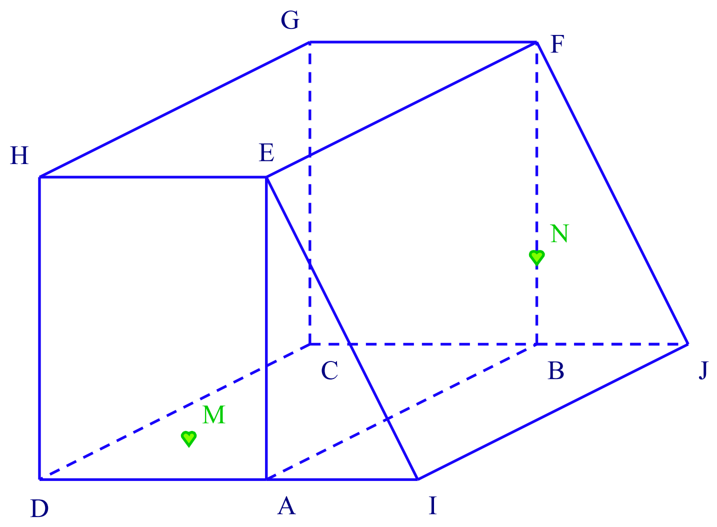
Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse	La droite est incluse dans le plan

c. L est un point de la droite (EF).
Sur la figure ci-dessous, tracer l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (LIH) et (LJG). On expliquera sa construction.

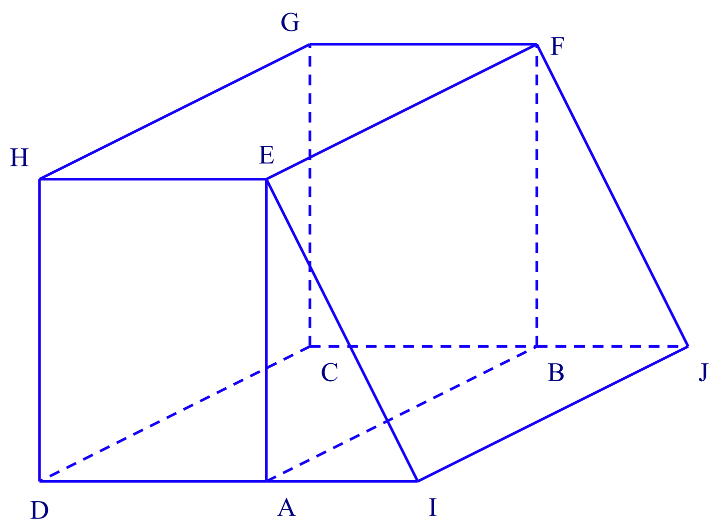


Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

d. M est un point du plan (ABC) et N un point du segment [BF].
Sur la figure ci-dessous, tracer l'intersection Δ des plans (MIN) et (CGH). On expliquera sa construction.



e. Sur la figure ci-dessous, tracer l'intersection Γ des plans (FCI) et (DEJ). On expliquera sa construction.



Le corrigé

a. Le trapézoïde AIJBCDEFGH est constitué de deux polyèdres :

$$\text{Volume}\left(\text{Pavé ABCDEFGH}\right) = \text{AB} \times \text{AD} \times \text{AE} = 4 \times 3 \times 4 = \underline{48 \text{ cm}^3}$$

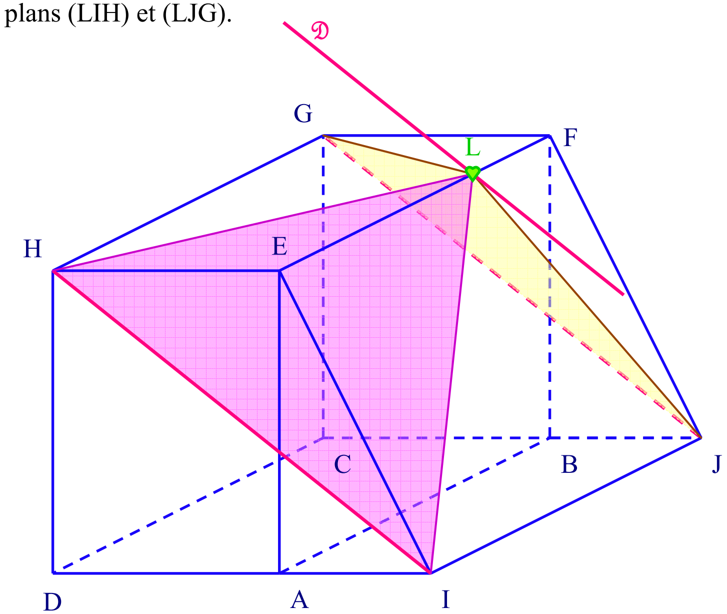
$$\text{Volume}\left(\text{Prisme AIJBEF}\right) = \frac{\text{base AIJB} \times \text{hauteur AE}}{2} = \frac{2 \times 4 \times 4}{2} = \underline{16 \text{ cm}^3}$$

<u>Conclusion :</u> le trapézoïde AIJBCDEFGH a pour volume $48 + 16 = 64 \text{ cm}^3 = \underline{64000 \text{ mm}^3}$

b. Examinons les diverses questions :

1. Les droites (BI) et (GE) se trouvant les plans parallèles (EFGH) et (ABCD), elles ne peuvent être sécantes.
   Ensuite, les droites (GE) et (CA) étant parallèles mais (BI) n'étant pas parallèle avec la droite (CA), les droites (GE) et (BI) ne sont pas parallèles.
   Par conséquent, les droites (BI) et (GE) sont non coplanaires.
2. Les plans (FIJ) et (DCG) sont sécants et leur intersection est une droite située au-dessus du trapézoïde parallèle aux droites (IJ) et (DC).
3. La droite (DF) est sécante au plan (GEI) à l'intérieur du pavé droit ABCDEFGH.
4. Les deux diagonales [BH] et [AG] du pavé droit ABCDEFGH se rencontre au centre de celui-ci. Les droites (BH) et (AG) sont sécantes.
5. Les plans (BIJ) [qui est aussi le plan (ABCD)] et (FGH) sont parallèles distinctes.
6. La droite (AJ) est parallèle au plan (EFG) mais n'y est pas incluse.

c. D'abord, cette intersection $\mathcal{D}$ est une droite qui passe par le point L car celui-ci est commun aux plans (LIH) et (LJG).



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

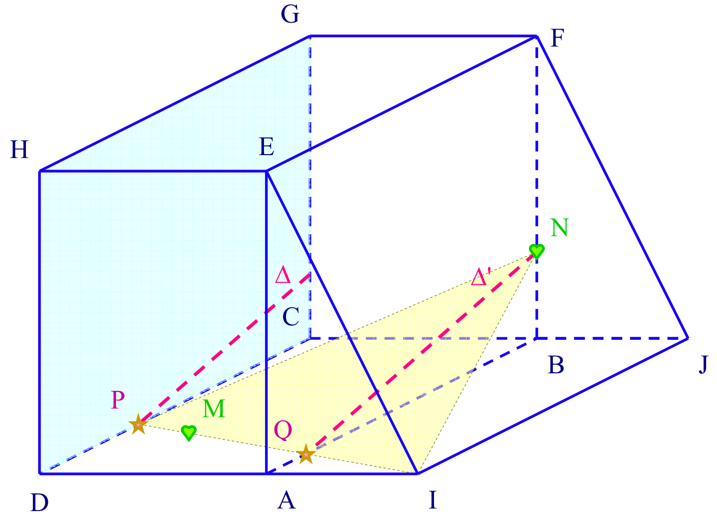
Ensuite, comme la droite (IH) du plan (LIH) est parallèle à la droite (JG) du plan (LJG), alors, en application du théorème du toit, l'intersection $\mathcal{D}$ est parallèle aux droites (IH) et (JG).

Conclusion : l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (LIH) et (LJG) est la droite passant par L et parallèle aux droites (IH) et (JG).

d. L'intersection Δ des deux plans sécants (MIN) et (CGH) est encore une droite.
D'abord, les droites (IM) et (CD) sont sécantes dans le plan (ABC) en un point que nous appellerons P.

Comme $\left|\begin{array}{l} P \in \text{droite (IM)} \subset \text{plan (MIN)} \\ P \in \text{droite (CD)} \subset \text{plan (CGH)} \end{array}\right.$ alors $P \in \Delta = (MIN) \cap (CGH)$

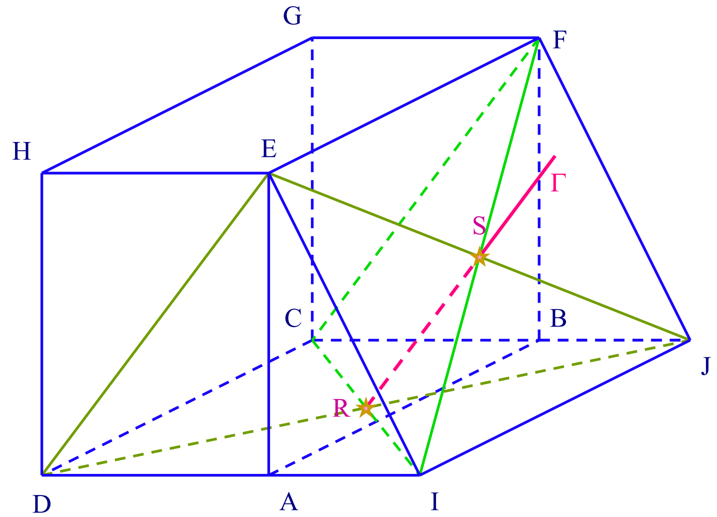
Ensuite, d'après le théorème d'incidence, le plan (MIN) coupe les plans parallèles (BFE) et (CGH) suivant deux droites parallèles.
Δ est l'intersection des plans (MIN) et (CGH). Quelle est celle des plans (MIN) et (BFE) ?
Déjà, il s'agit d'une droite que nous noterons Δ' qui passe par le point N qui est commun aux deux plans.
De plus, la droite (IM) est aussi sécante à la droite (AB) toujours dans le plan (ABC). On appelle Q leur point d'intersection. Q appartient clairement à la droite Δ'.
Conclusion : l'intersection Δ est la parallèle à la droite $\Delta' = (QN)$ passant par le point P.



e. D'abord, l'intersection Γ des plans (FCI) et (DEJ) est une droite.
Ensuite, la droite (CI) est sécante à la droite (DJ) dans le plan (ABC). On appelle R leur point d'intersection.

Comme $\left|\begin{array}{l} R \in \text{droite (CI)} \subset \text{plan (FCI)} \\ R \in \text{droite (DJ)} \subset \text{plan (DEJ)} \end{array}\right.$ alors $R \in \Gamma = (FCI) \cap (DEJ)$

Puis, les droites (FI) et (EJ) sont sécantes dans le plan (FEI) en un point S qui lui aussi fait partie de la droite Γ.
Conclusion : l'intersection Γ des plans (FCI) et (DEJ) est la droite (RS).



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Statistiques et probabilités

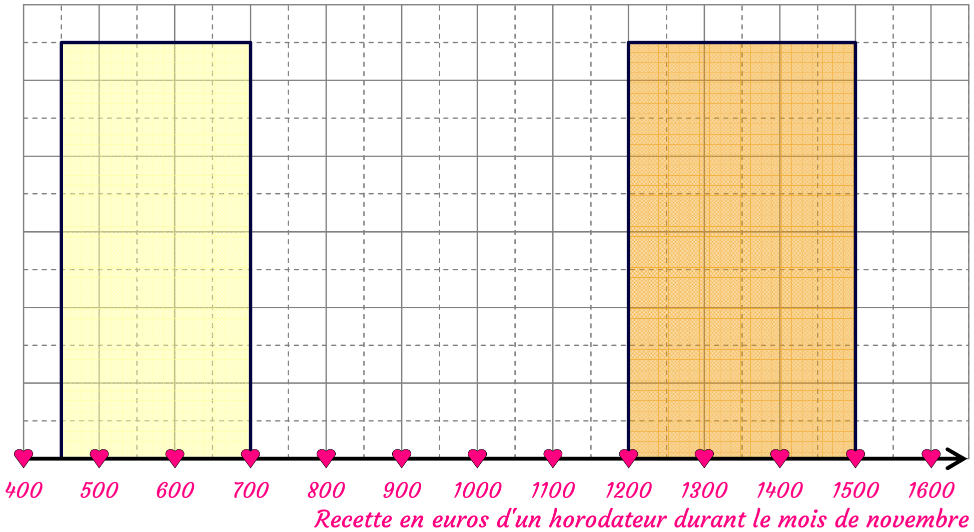
Horreurs datées

L'énoncé

A des fins de régulation circulatoire et budgétaire, la *Blancoise du Parcmètre*, entreprise d'extraction de richesses bien connue, exploite un certain nombre d'horodateurs.
Le comptable de la compagnie vient d'achever les résultats du mois de novembre qu'il s'apprête à envoyer aux autorités municipales.
Plus exactement, le comptable a comptabilisé pour chaque horodateur la recette exprimée en euros réalisée par celui-ci durant le mois de novembre.
Puis, il a rassemblé ces résultats en classes. Enfin, il a expédié aux autorités municipales les données suivantes qui sont des plus incomplètes.
Elles se composent du tableau ci-après, incomplet...

Classe : recette en euros de novembre par horodateur	$[450;700[$	$[700;850[$	$[850;1100[$	$[1100;1200[$	$[1200;1500[$
Effectif : nombre d'horodateurs		36	88	56	

...ainsi que l'histogramme suivant tout aussi incomplet où un centimètre carré représente 16 horodateurs.



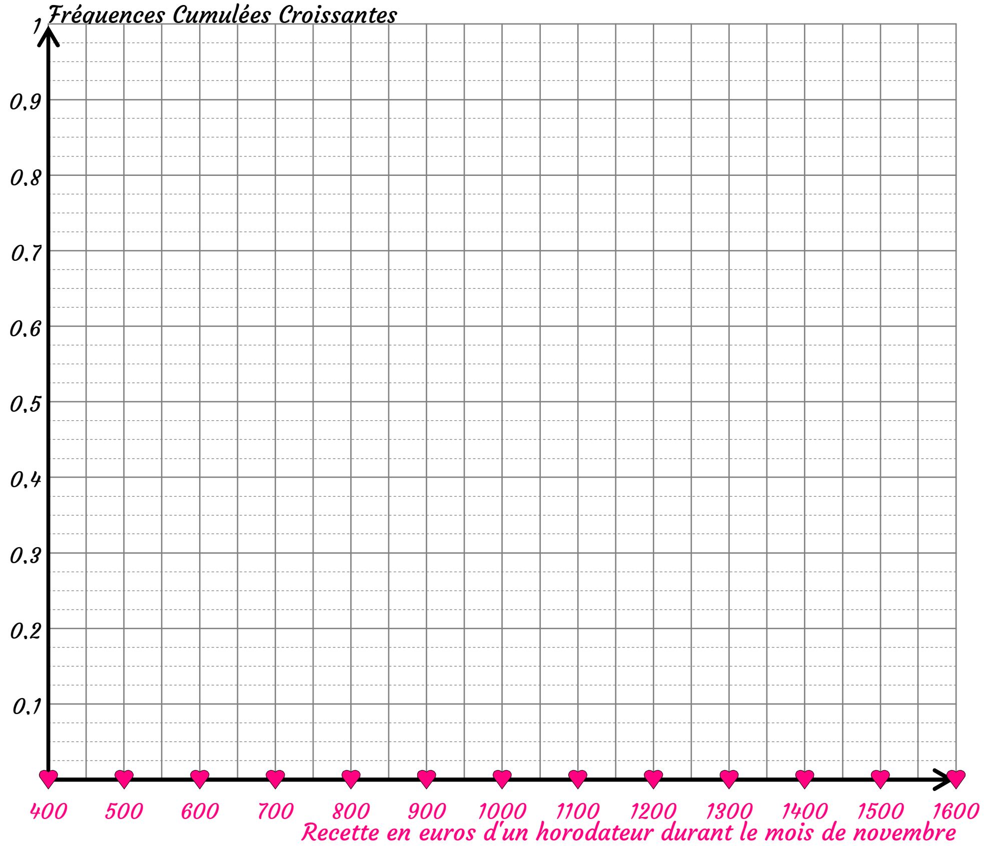
a. Compléter le tableau et l'histogramme précédents.

b. Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle correspond au nombre total d'horodateurs exploités par l'entreprise ? On entourera simplement la bonne réponse.

584 624 664 704

c. Calculer la recette mensuelle moyenne en euros par horodateur.

d. Sur le graphique ci-après, construire la courbe des fréquences cumulées croissantes correspondant à la série statistique précédente.



e. A l'aide du graphique précédent :

1. Déterminer la médiane Me ainsi que les deux quartiles Q_1 et Q_3 de la série statistique précédente.
2. Dans son document, le comptable indique : «durant le mois de novembre, plus de la moitié des horodateurs ont eu une recette mensuelle supérieure à la recette moyenne».
Que faut-il penser de cette affirmation ? On justifiera sa réponse.

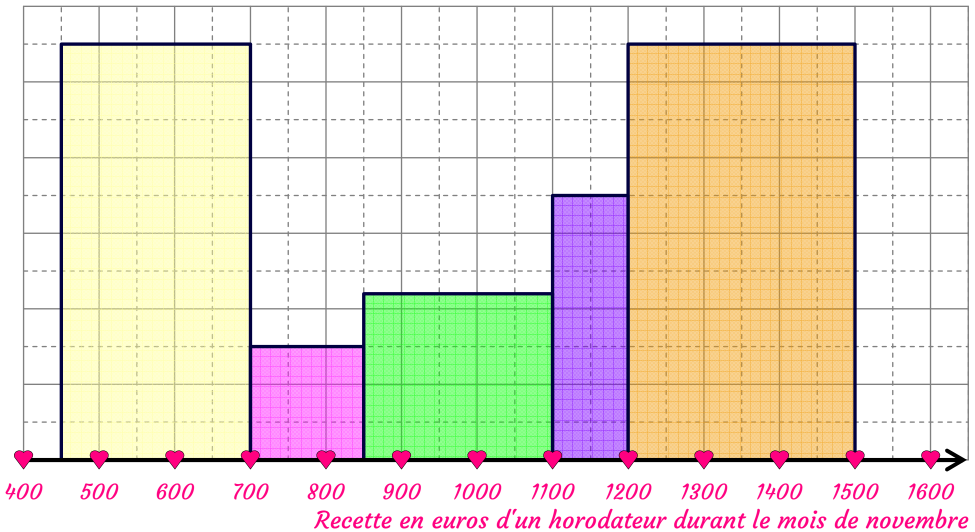
Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

Le corrigé

a. Complété, le tableau des effectifs est le suivant :

Classe : recette en euros de novembre par horodateur	$[450;700[$	$[700;850[$	$[850;1100[$	$[1100;1200[$	$[1200;1500[$
Effectif : nombre d'horodateurs	220	36	88	56	264
Aire du rectangle en cm²	13,75	2,25	5,5	3,5	16,5
Dimensions en centimètres	$2,5\times5,5$	$1,5\times1,5$	$2,5\times2,2$	$1\times3,5$	$3\times5,5$

Et l'histogramme associé est le suivant :



b. Au total, la compagnie exploite $220+36+88+56+264=664$ horodateurs.

c. La recette mensuelle moyenne par horodateur est donnée par :

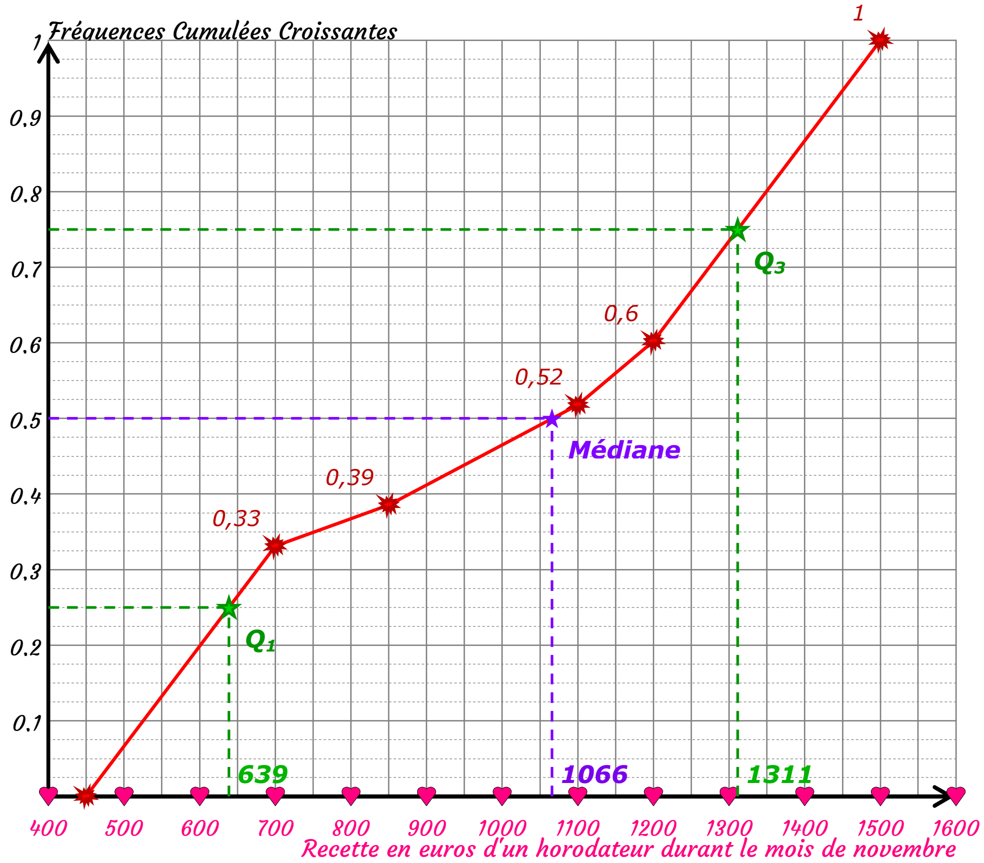
$$\text{Moyenne} = \frac{\sum\overbrace{\text{effectif}\times\text{Milieu}}^{\text{Pour chaque classe}}}{\text{Effectif total}} = \frac{220\times575+36\times775+88\times975+56\times1150+264\times1350}{664}$$

$$= \frac{661000}{664} \approx 995{,}48 \text{ euros par horodateur}$$

d. Afin de construire la courbe des fréquences cumulées croissantes, nous devons d'abord calculer les fréquences, puis les fréquences cumulées croissantes de chaque classe.

Classe : recette en euros de novembre par horodateur	$[450;700[$	$[700;850[$	$[850;1100[$	$[1100;1200[$	$[1200;1500[$
Effectif : nombre d'horodateurs	220	36	88	56	264
Fréquence	0,33	0,05	0,13	0,08	0,40
Fréquence cumulée croissante	0,33	0,39	0,52	0,60	1

La courbe (ou polygone) des fréquences cumulées croissantes est la suivante :



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

e.1. D'après le graphique, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\overbrace{Q_1 = 639€}^{FCC=0,25} \quad \overbrace{M_e = 1066€}^{FCC=0,5} \quad \overbrace{Q_1 = 639€}^{FCC=0,75}}_{\text{FCC comme Fréquence Cumulée Croissante}}$$

e.2. La médiane est une modalité qui partage l'effectif en deux parties égales. Par conséquent, la moitié des horodateurs ont une recette mensuelle supérieure à 1066€. La recette moyenne mensuelle étant de 995,48 euros, l'affirmation du comptable est vraie.

Pour un filtre avec toi (remix)

L'énoncé

Donna Laischrault est une célèbre maraboute du Blancois qui, aux hommes seuls et désespérés qui viennent la voir, vend des filtres d'amour afin de leur faire trouver l'amour. Des études menées sur la clientèle de Donna ont donné les résultats suivants :

- 10% des clients ont un pris un filtre d'amour complet, 30% un demi-filtre d'amour et le restant rien.
- 70% des clients qui ont pris un filtre complet n'ont pas trouvé l'amour.
- Tous les clients qui ont pris un demi-filtre ont trouvé l'amour.
- 40% des clients qui n'ont pris aucun filtre ont trouvé l'amour.

On rencontre un client de Donna au hasard et on définit les événements suivants :

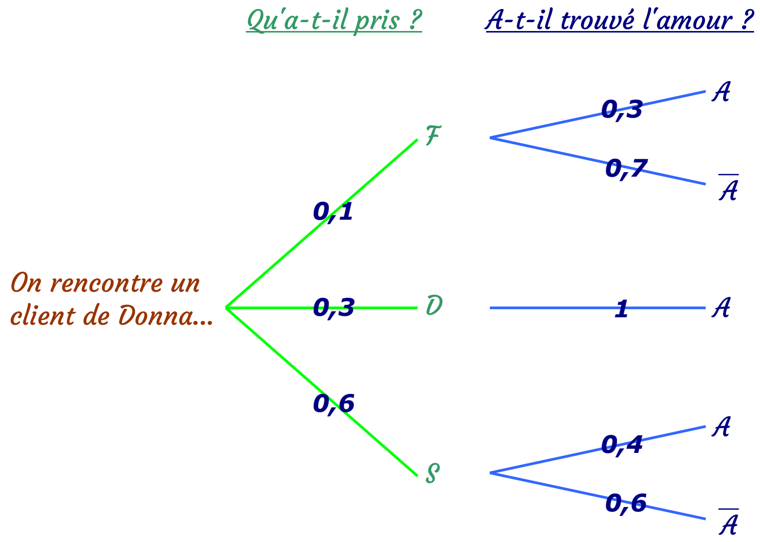
$$\begin{array}{|lcl} A & = & \text{«le client rencontré a trouvé l'amour»} \\ F & = & \text{«le client rencontré a pris un filtre d'amour complet»} \\ D & = & \text{«le client rencontré a pris un demi-filtre d'amour»} \\ S & = & \text{«le client rencontré n'a rien pris du tout»} \end{array}$$

a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation d'un client rencontré.

b. Calculer la probabilité de l'événement A.

Le corrigé

a. La situation d'un client rencontré peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

b. Utilisant l'arbre précédent, la probabilité de l'événement A est donnée par :

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{F}\cap\mathrm{A}) + p(\mathrm{D}\cap\mathrm{A}) + p(\mathrm{S}\cap\mathrm{A})$$
$$= 0,1\times 0,3 + 0,3\times 1 + 0,6\times 0,4 = 0,03 + 0,3 + 0,24 = \underline{0,57}$$

Lancer ou courir, il faut choisir !

L'énoncé

Le *quadriathlon blancois* est une discipline sportive composée de quatre épreuves d'athlétisme : un lancer et trois épreuves de courses à pied.

Lancer d'enclume | Course de 3 km | Course de 10 km | Course de 20 km

Les *Bécasses Blancoises* sont un club pratiquant le *quadriathlon blancois*. Ses membres se répartissent entre séniors (moins de 40 ans) et vétérans (plus de 40 ans).
Très exactement, cette association sportive est constituée de :

- 5 lanceurs d'enclume dont deux sont des séniors et les autres des vétérans. Ces athlètes ne peuvent pas pratiquer la course à pied.
- 7 coureurs à pied dont quatre sont des vétérans et les autres des séniors. Ces athlètes ne peuvent pas lancer l'enclume mais ils peuvent indistinctement s'aligner sur les trois distances proposées : 3, 10 et 20 kilomètres.

Enfin, précisons que lors d'une compétition, une équipe de *quadriathlon blancois* est composée exactement de quatre athlètes distincts, chacun ne participant qu'à une seule épreuve. Ainsi, celui qui court le 3 kilomètres ne peut pas courir le 10 dans la foulée.

C'est bientôt le Championnat intergalactique de *quadriathlon blancois* et l'entraineur des *Bécasses Blancoises* doit composer une équipe qui y défendra les couleurs du club.
Désireux d'éviter les contestations et les ennuis, il décide de procéder à un tirage au sort parmi ses 12 athlètes pour constituer son équipe.
On reprécise qu'une équipe est constituée de quatre personnes qui ne participent chacune qu'à une épreuve déterminée : lancer d'enclume, 3 km, 10 km ou 20 km.

a. Combien d'équipes peut-il faire avec ses 12 athlètes ?

b. Déterminer les probabilités des événements suivantes. Les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

A = «l'équipe constituée ne comporte que des séniors».
B = «le lanceur d'enclume est sénior et les trois coureurs sont vétérans».
C = «l'équipe constituée comporte au moins un vétéran».
D = «l'équipe ne comporte qu'un seul vétéran et il ne court pas le 3 kilomètres».

Le corrigé

a. Constituons notre équipe !

Lancer d'enclume		Course de 3 km		Course de 10 km		Course de 20 km		
5 lanceurs	×	7 coureurs	×	6 coureurs	×	5 coureurs	=	1050 équipes possibles

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

b. Dénombrons le nombre d'équipes favorables à l'événement A, c'est-à-dire qui ne sont constitués que de séniors.

Lancer d'enclume		Course de 3 km		Course de 10 km		Course de 20 km		
2 lanceurs séniors	×	3 coureurs séniors	×	2 coureurs séniors	×	1 coureurs séniors	=	12 équipes A

Il vient alors : $p(\text{A})=\dfrac{\text{Equipes favorables à A}}{\text{Nombre total d'équipes}}=\dfrac{12}{1050}=\dfrac{2\times\cancel{6}}{175\times\cancel{6}}=\dfrac{2}{175}$

✍ Dénombrons le nombre d'équipes favorables à l'événement B, c'est-à-dire où le lanceur d'enclume est sénior et les trois coureurs sont vétérans.

Lancer d'enclume		Course de 3 km		Course de 10 km		Course de 20 km		
2 lanceurs séniors	×	4 coureurs vétérans	×	3 coureurs vétérans	×	2 coureurs vétérans	=	48 équipes B

Nous en déduisons : $p(\text{B})=\dfrac{\text{Equipes favorables à B}}{\text{Nombre total d'équipes}}=\dfrac{48}{1050}=\dfrac{8\times\cancel{6}}{175\times\cancel{6}}=\dfrac{8}{175}$

✍ L'événement C «au moins un vétéran» est l'événement contraire d'«aucun vétéran », c'est-à-dire «que des séniors» soit l'événement A. Par conséquent :

$$p(\text{C})=1-p(\text{A})=1-\frac{2}{175}=\frac{175}{175}-\frac{2}{175}=\frac{173}{175}$$

✍ Pour dénombrer les équipes favorables à l'événement D, nous devons envisager les trois positions que peut occuper le vétéran de l'équipe et compléter les autres épreuves par trois séniors.

	Lancer d'enclume		Course de 3 km		Course de 10 km		Course de 20 km		
Le vétéran lance.	3 **lanceurs vétérans**	×	3 coureurs séniors	×	2 coureurs séniors	×	1 coureurs séniors	=	18 éq.
Le vétéran court 10 km.	2 lanceurs séniors	×	3 coureurs séniors	×	4 **coureurs vétérans**	×	2 coureurs séniors	=	48 éq.
Le vétéran court 20 km.	2 lanceurs séniors	×	3 coureurs séniors	×	2 coureurs séniors	×	4 **coureurs vétérans**	=	48 éq.

Au total, $18+48+48=114$ équipes sont favorables à l'événement D. Nous en concluons :

$$p(\text{D})=\frac{\text{Equipes favorables à D}}{\text{Nombre total d'équipes}}=\frac{114}{1050}=\frac{19\times\cancel{6}}{175\times\cancel{6}}=\frac{19}{175}$$

Méchantillons

L'énoncé

Dans l'exercice, les résultats donnés seront arrondis au millième près.

a. La paresse est un mal terrible qui touche 69% de la population des Indres Occidentales. Heureusement, la *Marabouteuse Blancoise* vient de mettre au point un nouveau traitement pour soigner la paresse. Elle décide de l'expérimenter sur un échantillon de 732 personnes touchées ou pas par la paresse et prélevées au hasard dans la population des Indres Occidentales.

1. Donner l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% sur un échantillon de 732 individus auquel doit appartenir la fréquence observée de gens paresseux (avant traitement).
2. A la fin du traitement que prennent assidument tous les individus de l'échantillon, elle mesure que 484 d'entre eux sont encore touchés par la paresse. Le traitement contre la paresse est-il efficace au seuil de confiance 95% ? On argumentera sa réponse.

b. La grossièreté est l'une des plaies de notre époque qui, selon la croyance populaire, touche les trois quarts des gens. A l'occasion d'une étude réalisée sur un échantillon de 378 individus choisis au hasard dans la population Indres Occidentales, on a compté 267 individus grossiers.

1. Donner l'intervalle de confiance au seuil de 95% de la proportion de gens grossiers sur cet échantillon de 378 individus.
2. La croyance populaire est-elle validée par cette étude au seuil de confiance 95% ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a.1. La proportion de gens de la population totale atteint par la paresse est de $p=0,69$.

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% sur un échantillon de 732 individus est :

$$\underbrace{\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,69-\frac{1}{\sqrt{732}};0,69+\frac{1}{\sqrt{732}}\right]=[0,653;0,727]}_{}$$

On minore la borne inférieure et on majore la borne supérieure pour avoir au moins 95% de l'effectif dans cet intervalle.

a.2. La fréquence de gens paresseux après le traitement est de $f_{Après}=\dfrac{484}{732}\approx 0,661$

Avant le traitement, cette fréquence faisait partie avec une probabilité de 95% de l'intervalle de fluctuation $[0,653;0,727]$.

Au seuil de risque 5%, on ne peut pas considérer que le traitement soit efficace.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition corrigée du samedi 14 mars 2015.

b.1. La fréquence de gens grossiers dans l'échantillon est de $f = \dfrac{267}{378} \approx 0,706$.

L'intervalle de confiance au seuil de 95% auquel appartient la proportion globale p est donné par la formule :

$$\underbrace{\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,706 - \frac{1}{\sqrt{378}} ; 0,706 + \frac{1}{\sqrt{378}}\right] = [0,654; 0,758]}_{\text{Encore une fois, on minore la borne inférieure et on majore la borne supérieure pour avoir au moins 95\% de l'effectif dans cet intervalle.}}$$

b.2. La proportion $p = 0,75$ appartenant à l'intervalle de confiance, la croyance populaire est validée au seuil de risque 5%.

Et l'année prochaine, ce sera vachement plus pire !

Au sommaire du rodéo :

Tous les exercices présents dans ce recueil, énoncés et corrigés, ont été conçus et mis en forme par Jérôme ONILLON, professeur (dés)-agrégé de mathématiques. L'auteur ne saurait garantir la conformité du programme de mathématiques de seconde à ces exercices. Aucune exploitation commerciale n'est autorisée.