Analyse

Les primitives s'en vont en paire.

L'énoncé

a. Déterminer la primitive F de la fonction $f(x)=24x^5-12x^3+2x-5$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1)=0$.

b. Déterminer la primitive G de la fonction $g(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}$ définie sur $]0;+\infty[$ telle que $G(1)=8$.

Le corrigé

a. La primitive F est de la forme :

$$F(x)=24\times\frac{1}{6}x^6-12\times\frac{1}{4}x^4+2\times\frac{1}{2}x^2-5x+Cste=4x^6-3x^4+x^2-5x+Cste$$

Il nous reste à déterminer la valeur de la constante $Cste$ qui fait la particularité de cette primitive F. Pour ce faire, nous savons :

$$F(1)=0 \Leftrightarrow 4\times1^6-3\times1^4+1^2-5\times1+Cste=0$$
$$\Leftrightarrow -3+Cste=0 \Leftrightarrow Cste=0+3=3$$

Conclusion : la primitive F a pour expression $F(x)=4x^6-3x^4+x^2-5x+3$

b. La primitive G est de la forme :

$$G(x)=2\times2\sqrt{x}-\left(-\frac{1}{x}\right)-4\times\left(-\frac{1}{2x^2}\right)+Cste=4\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+Cste$$

On détermine la valeur de la constante $Cste$ en sachant que :

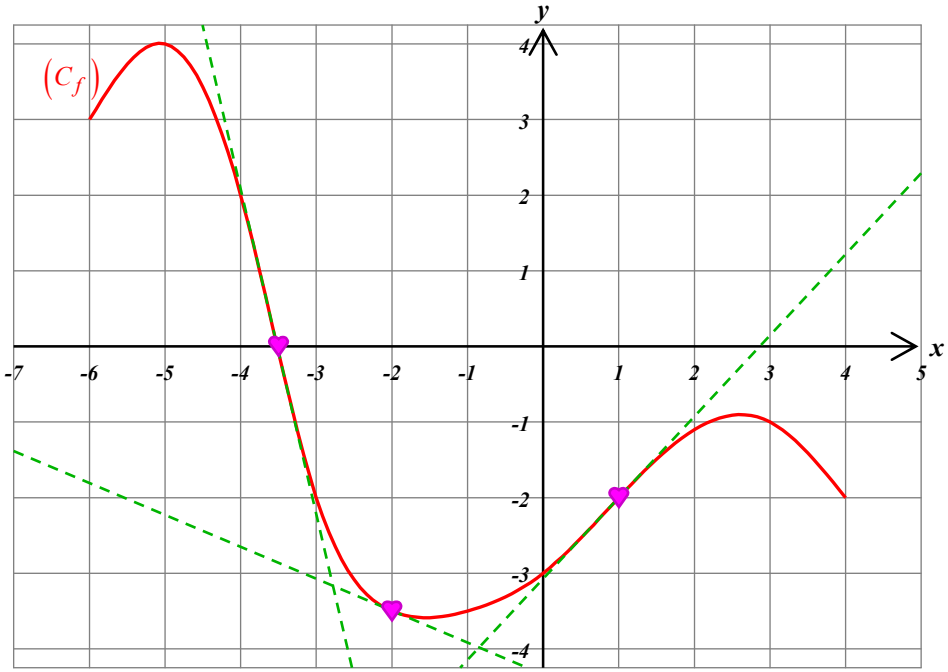
$$G(1)=8 \Leftrightarrow 4\times\sqrt{1}+\frac{1}{1}+\frac{2}{1^2}+Cste=8 \Leftrightarrow 7+Cste=8 \Leftrightarrow Cste=1$$

Conclusion : la primitive G a pour expression $G(x)=4\sqrt{x}+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+1$

Ce qu'on vexe et ce qu'on cave

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-6;4]$. Sa courbe représentative (C_f) a été tracée sur le graphique ci-dessous ainsi qu'en tirets verts, ses tangentes en $-3,5$; -2 et 1.



A partir de graphique ci-contre, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

La courbe (C_f) admet un point d'inflexion en $x=-2$	Vraie	Fausse
La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-6;-4]$.	Vraie	Fausse
La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3;1]$.	Vraie	Fausse
La courbe (C_f) admet un point d'inflexion en $x=1$	Vraie	Fausse
Le nombre dérivé $f'(-3,5)$ est proche de 4.	Vraie	Fausse
La fonction f est concave sur l'intervalle $[1;4]$.	Vraie	Fausse

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Le corrigé

- La courbe (C_f) ne «traversant pas sa tangente» au point d'abscisse $x=-2$, ce dernier ne peut pas être un point d'inflexion pour cette première. *Affirmation fausse !*

- Sur l'intervalle $[-6;-4]$, la courbe (C_f) se trouve toujours au-dessous de chacune de ses tangentes. La fonction *f* est donc concave sur cet intervalle et non convexe.
Une autre justification possible est de remarquer que, sur cet intervalle, la courbe (C_f) est au-dessus de chaque segment joignant deux de ses points. . *Affirmation fausse !*

- Sur l'intervalle $[-3;1]$, la courbe (C_f) est toujours au-dessus de chacune de ses tangentes. Donc la fonction *f* est convexe sur cet intervalle.
Une autre justification possible est de remarquer que, sur cet intervalle, la courbe (C_f) est au-dessous de chaque segment joignant deux de ses points. *Affirmation vraie !*

- La courbe (C_f) «traversant sa tangente» au point d'abscisse $x=1$, ce dernier est un point d'inflexion pour cette première. *Affirmation vraie !*

- Le nombre dérivé $f'(-3,5)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x=-3,5$. Cette droite étant descendante, son coefficient directeur est négatif et il est même proche de -4.
Par conséquent, nous avons $f'(-3,5)\approx \underline{-4}$ *Affirmation fausse !*

- Sur l'intervalle $[1;4]$, la courbe (C_f) est toujours au-dessous de chacune de ses tangentes ou toujours au-dessus de chaque segment joignant deux de ses points.
Par conséquent, la fonction *f* est concave sur cet intervalle. *Affirmation vraie !*

A faire une famille

L'énoncé

a. La fonction *f* est définie pour tout réel *x* par :

$$f(x)=4x^3-9x^2+6x-1$$

1. Calculer les images $f(0,5)$ et $f(1)$.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction *f* sur ℝ.
3. Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions dans ℝ ?
   Donner cette ou ces éventuelles solutions.
4. En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur ℝ.

b. On appelle *F* la primitive de la fonction *f* définie sur ℝ telle que $F(0)=1$.

1. Déterminer l'expression de cette primitive $F(x)$.
2. Déterminer les variations de la fonction *F* sur ℝ.
3. Déterminer les intervalles où la fonction *F* est convexe ou concave. On précisera également ses points d'inflexion.

Le corrigé

a.1. Calculons les images demandées.

$$f(0,5)=4\times 0,5^3-9\times 0,5^2+6\times 0,5-1=0,5-2,25+3-1=\underline{0,25}$$
$$f(1)=4\times 1^3-9\times 1^2+6\times 1-1=4-9+6-1=\underline{0}$$

a.2. Calculons la dérivée de la fonction *f*.

$$f'(x)=4\times 3x^2-9\times 2x+6-0=\underline{12x^2-18x+6}$$

C'est le signe de sa dérivée qui va nous donner les variations de la fonction *f*.
$f'(x)$ étant une forme du second degré, calculons son discriminant :

$$\Delta_{f'(x)}=(-18)^2-4\times 12\times 6=324-288=\underline{36=6^2}$$

Son discriminant étant négatif, $f'(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-(-18)-6}{2\times 12}=\frac{12}{24}=\underline{0,5} \qquad \underline{\text{et}} \qquad x_2=\frac{-(-18)+6}{2\times 12}=\frac{24}{24}=\underline{1}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Le tableau de signe de $f'(x)$ et celui de variation de f sont ceux ci-contre ➔

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$0{,}25$	↘	0	↗	$+\infty$

a.3. La première chose à dire est que la fonction polynomiale f est dérivable et donc continue sur $\mathbb{R}$.
Ensuite, appliquant la Propriété des Valeurs Intermédiaires au tableau de variation de la fonction f, il vient :

L'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans l'intervalle $]-\infty;0,5[$
L'équation admet une seule solution sur l'autre intervalle $[0,5;+\infty[$. Il s'agit de 1.

Avec le tableau de valeurs de la calculatrice, on détermine que $\alpha = 0,25$.

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

$$S=\{0,25;1\}$$

a.4. Tenant compte des questions **a.2** et **a.3**, le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

b.1. La primitive F a une expression de la forme :

$$F(x)=4\times\frac{1}{4}x^4-9\times\frac{1}{3}x^3+6\times\frac{1}{2}x^2-x+Cste=x^4-3x^3+3x^2-x+Cste$$

On détermine la valeur de la constante $Cste$ en sachant que :

$$F(0)=1 \quad\Leftrightarrow\quad 0^4-3\times0^3+3\times0^2-0+Cste=1 \quad\Leftrightarrow\quad 0+Cste=1 \quad\Leftrightarrow\quad Cste=1$$

Conclusion : la primitive F a pour expression $F(x)=x^4-3x^3+3x^2-x+1$.

b.2. Comme F est une primitive de f, alors f est la dérivée de F. Le signe de $F'(x)=f(x)$ établi lors de la question **a.4** va nous donner les variations de F.

x	$-\infty$		$1/4$		1		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
F	$+\infty$	↘	$229/256$	↗			$+\infty$

b.3. C'est le signe de sa dérivée seconde qui permet de se prononcer sur la concavité ou la convexité d'une fonction. Or, la dérivée seconde de F est $f'(x)$. En effet :

$$f'=F'' \;\underset{\text{Dérivée}}{\overset{\text{Primitive}}{\rightleftarrows}}\; f=F' \;\underset{\text{Dérivée}}{\overset{\text{Primitive}}{\rightleftarrows}}\; F$$

Nous en déduisons :

- La fonction F est convexe sur les intervalles $]-\infty;0,5[$ et $]1;+\infty[$.
- La fonction F est concave sur l'intervalle $]0,5;1[$.
- La courbe (C_F) admet deux points d'inflexion en $x=0,5$ et en $x=1$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

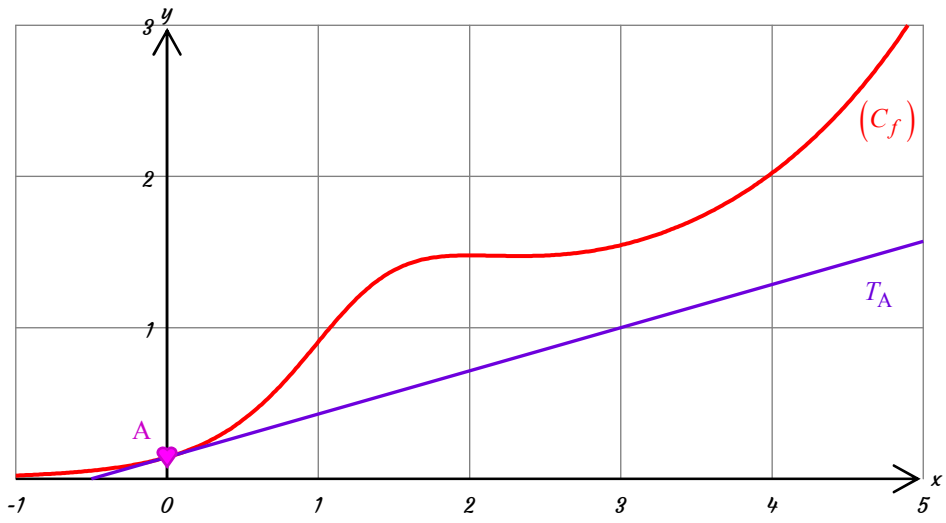
Quotient, exponentielle et tangente

L'énoncé

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{e^x}{3x^2-7x+7}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé sa courbe représentative (C_f) ainsi que sa tangente T_A en son point A d'abscisse 0.



a. Démontrer que le dénominateur $d(x)=3x^2-7x+7$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

b. En dérivant la fonction f, montrer que pour tout réel x, on a

$$f'(x)=\frac{e^x\times\left(3x^2-13x+14\right)}{\left(3x^2-7x+7\right)^2}$$

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Etablir l'équation réduite de la tangente T_A.

Le corrigé

a. Calculons le discriminant de la forme du second degré $d(x)=3x^2-7x+7$.

$$\Delta_{d(x)}=(-7)^2-4\times3\times7=49-84=\underline{-35}$$

Comme son discriminant est négatif, alors la forme du second degré $d(x)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction $f=\frac{u}{v}$ est un quotient où $u(x)=e^x$, $u'(x)=e^x$, Dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v(x)=3x^2-7x+7$, $v'(x)=6x-7$, Dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}$$

$$=\frac{\boxed{e^x}\times\left(3x^2-7x+7\right)-(6x-7)\times\boxed{e^x}}{\left(3x^2-7x+7\right)^2}=\frac{\boxed{e^x}\times\left[\left(3x^2-7x+7\right)-(6x-7)\right]}{\left(3x^2-7x+7\right)^2}$$

$$=\frac{e^x\times\left[3x^2-7x+7-6x+7\right]}{\left(3x^2-7x+7\right)^2}=\underline{\frac{e^x\times\left[3x^2-13x+14\right]}{\left(3x^2-7x+7\right)^2}}$$

c. C'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction f.

L'exponentielle e^x est toujours positive tout comme le dénominateur $\left(3x^2-7x+7\right)^2$ qui est le carré d'une quantité qui ne s'annule jamais.

Reste à déterminer le signe de la forme du second degré $n(x)=3x^2-13x+14$. Calculons son discriminant !

$$\Delta_{n(x)}=(-13)^2-4\times3\times14=169-168=\underline{1=1^2}$$

Son discriminant étant positif, la forme $n(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-(-13)-1}{2\times3}=\frac{12}{6}=\underline{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-13)+1}{2\times3}=\frac{14}{6}=\underline{\frac{7}{3}}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Nous en déduisons que le tableau de signe de $g'(x)$ et celui de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$	
$3x^2-13x+14$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(3x^2-7x+7)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0^+	$\nearrow$	$f(2)\approx 1,48$	$\searrow$	$f(7/3)\approx 1,47$	$\nearrow$	$+\infty$

d. L'équation réduite de la tangente T_A est de la forme $y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$.
Calculons l'image de 0 par f ainsi que son nombre dérivé.

$$f(0)=\frac{e^0}{3\times 0^2-7\times 0+7}=\boxed{\frac{1}{7}} \quad \text{et} \quad f'(0)=\frac{e^0\times(3\times 0^2-13\times 0+14)}{(3\times 0^2-7\times 0+7)^2}=\frac{1\times 14}{7^2}=\boxed{\frac{2}{7}}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation réduite de la tangente T_A est $y=\frac{2x+1}{7}$.

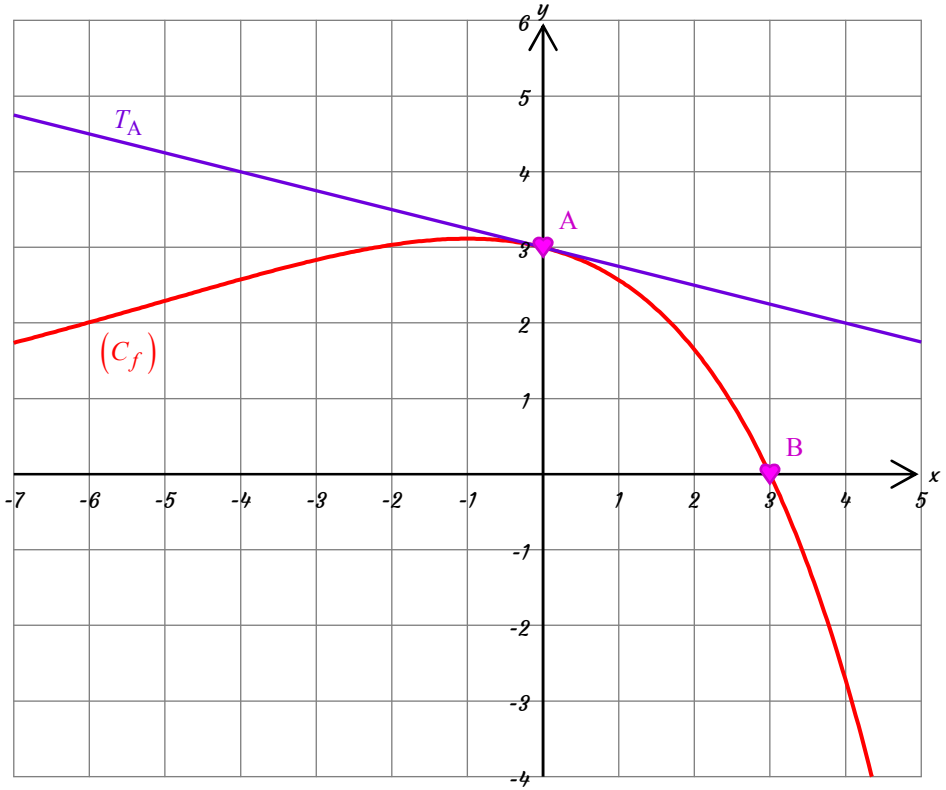
Fonction affino-exponentielle

L'énoncé

a. La fonction f dont la courbe représentative (C_f) a été tracée sur le graphique ci-dessous est définie sur $\mathbb{R}$ et est de la forme :

$$f(x)=(a-x)\times e^{bx}$$

où les coefficients a et b sont deux réels positifs.



Sur le graphique ci-dessus, on a aussi placé les points $A(0;3)$ et $B(3;0)$ qui appartiennent à la courbe (C_f) et tracé la tangente T_A à la courbe en A.

1. A partir du graphique, déterminer les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$ et $f(3)$.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de coefficients a et b ainsi que de la variable x.
3. En déduire les valeurs des coefficients a et b.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

b. On appelle g la fonction dérivable sur ℝ et définie par :

$$g(x)=(4-x)\times e^{0,5x}-1$$

1. Calculer la valeur exacte de l'image $g(2)$.
   A l'aide de la calculatrice, donner des valeurs approchées au centième-près des images $g(-5)$ et $g(5)$.
2. Calculer la dérivée $g'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction g sur ℝ.
4. Combien l'équation $g(x)=0$ admet-elle de solutions dans ℝ ? On justifiera sa réponse. Donner des valeurs approchées au centième-près de ces solutions.
5. En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur ℝ.

c. On appelle G la primitive sur ℝ de la fonction g telle que $G(0)=7$.

1. Comment démontrerait-on que la fonction $H(x)=(12-2x)e^{05x}$ est une primitive sur ℝ de la fonction $h(x)=(4-x)e^{0,5x}$? On ne demande pas d'effectuer l'opération mais d'indiquer ce qu'elle serait.
2. Déterminer une expression de la fonction G.
3. Donner les variations de la fonction G sur ℝ.
4. Déterminer les intervalles où la fonction G est convexe ou concave. Préciser ses éventuels points d'inflexion.

Le corrigé

a.1. A l'aide du graphique, nous déterminons :

$$f(0)=\text{Ordonnée de A}=3$$
$$f'(0)=\text{Coefficient directeur de la tangente } T_A=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$$
$$f(3)=\text{Ordonnée de B}=0$$

a.2. f est un produit de la forme $u\times v$ avec $u(x)=a-x$, $u'(x)=-1$, Dérivable sur ℝ et $v(x)=e^{bx}$, $v'(x)=be^{bx}$, Dérivable sur ℝ

Par conséquent, la fonction f est aussi dérivable sur ℝ et pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)=u'\times v+v'\times u$$
$$=(-1)\times e^{bx}+b\,e^{bx}\times(a-x)$$
$$=e^{bx}\times\left[(-1)+b\times(a-x)\right]=e^{bx}\times\left[-1+ab-bx\right]=e^{bx}\times(-bx+ab-1)$$

a.3. Exploitons les résultats de la question **a.1** à l'aune de ceux de la question **a.2**.

$$f(0)=3 \Leftrightarrow (a-0)\times e^{b\times 0}=3 \Rightarrow a\times e^0=3 \Rightarrow a\times 1=3 \Rightarrow a=3$$
$$f'(0)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{b\times 0}\times(-b\times 0+3b-1)=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow 1\times(3b-1)=-\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 3b-1=-0,25$$
$$\Leftrightarrow 3b=-0,25+1=0,75$$
$$\Leftrightarrow b=\frac{0,75}{3}=0,25$$

Conclusion : une expression de la fonction f est $f(x)=(3-x)e^{0,25x}$

b.1. Calculons les images demandées :

$$g(2)=(4-2)\times e^{0,5\times 2}-1=2\times e^1-1=2e-1$$
$$g(-5)=(4-(-5))\times e^{0,5\times(-5)}-1=9\times e^{-2,5}-1\approx -0,26$$
$$g(5)=(4-5)\times e^{0,5\times 5}-1=-e^{2,5}-1\approx -13,18$$

b.2. g est de la forme $g=u\times v-1$ avec $u(x)=4-x$, $u'(x)=-1$, Dérivable sur ℝ et $v(x)=e^{0,5x}$, $v'(x)=0,5\times e^{0,5x}$, Dérivable sur ℝ

Donc g est dérivable sur ℝ et pour tout réel x, nous avons :

$$g'(x)=u'\times v+v'\times u-0=(-1)\times e^{0,5x}+0,5\times e^{0,5x}\times(4-x)$$
$$=e^{0,5x}\times\left[(-1)+0,5\times(4-x)\right]=e^{0,5x}\times\left[-1+2-0,5x\right]=e^{0,5x}\times(1-0,5x)$$

b.3. C'est le signe de la dérivée $g'(x)$ qui va nous donner le sens de variation de la fonction g.

Déjà, l'exponentielle $e^{0,5x}$ est toujours strictement positive.

L'autre facteur s'annule en...

$$1-0,5x=0$$
$$-0,5x=-1$$
$$x=\frac{-1}{-0,5}=2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^{0,5x}$		+	|	+	
$-0,5x+1$		+	0	−	
$g'(x)$		+	0	−	
g		↗	$2e-1$	↘	

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

b.4. D'abord, comme la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors g est continue sur cet ensemble. Donc la propriété des valeurs intermédiaires lui est applicable.

Ensuite, comme $\left| \begin{array}{l} g \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;2] \text{, alors l'équation } g(x)=0 \text{ admet} \\ g(-5) \text{ est négatif et } g(2) \text{ est positif} \end{array} \right.$

une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty;2]$. Plus précisément $\alpha \in]-5;2[$

Enfin, comme $\left| \begin{array}{l} g \text{ est strictement décroissante sur }]2;+\infty[\text{, alors l'équation } g(x)=0 \text{ admet} \\ g(2) \text{ est positif et } g(5) \text{ est négatif} \end{array} \right.$

une unique solution β dans l'intervalle $]2;+\infty[$. Plus précisément $\beta \in]2;5[$.

Conclusion : l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont on détermine deux valeurs approchées au centième-près à l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice.

$$\alpha \approx -4,21 \qquad \text{et} \qquad \beta \approx 3,85$$

b.5. On déduit des questions **b.3** et **b.4** le tableau de signe de $g(x)$ suivant :

x	$-\infty$		$\alpha \approx -4,21$		$\beta \approx 3,85$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c.1. On démontrerait que H est une primitive de h en dérivant $H(x)=(12-2x)e^{05x}$ et en prouvant que cette dérivée est égale à $h(x)$ comme suit :

$$H'(x)=\overbrace{\left[(12-2x)e^{05x}\right]'}^{(u\times v)'}=\overbrace{(-2)\times \boxed{e^{0,5x}}+0,5\times \boxed{e^{0,5x}}\times(12-2x)}^{u'\times v+v'\times u}$$

$$=\boxed{e^{0,5x}}\times\left[-2+0,5\times(12-2x)\right]=e^{0,5x}\times\left[-2+6-x\right]=e^{0,5x}(4-x)=h(x)$$

c.2. La primitive G de la fonction $g(x)=h(x)-1$ est de la forme :

$$G(x)=H(x)-x+Cste=(12-2x)\times e^{0,5x}-x+Cste$$

Il nous reste à déterminer la constante $Cste$ sachant que :

$$G(0)=7 \quad \Leftrightarrow \quad (12-2\times 0)\times e^{0,5\times 0}-0+Cste=7$$

$$\Leftrightarrow \quad 12\times e^{0}+Cste=7 \quad \Leftrightarrow \quad 12\times 1+Cste=7 \quad \Leftrightarrow \quad Cste=7-12=-5$$

c.3. Les variations de la fonction G sont données par le signe de sa dérivée $G'(x)=g(x)$.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$G'(x)=g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
G		↘	$G(\alpha)\approx 1,69$	↗	$G(\beta)\approx 20,63$	↘	

c.4. C'est le signe de sa dérivée seconde qui permet de se prononcer sur la concavité ou la convexité d'une fonction. Or, la dérivée seconde de G est $g'(x)$. En effet :

$$g'=G'' \underset{\text{Dérivée}}{\overset{\text{Primitive}}{\rightleftarrows}} g=G' \underset{\text{Dérivée}}{\overset{\text{Primitive}}{\rightleftarrows}} G$$

Nous en déduisons :

- La fonction G est convexe sur l'intervalle $]-\infty;2[$.
- La fonction G est concave sur l'intervalle $]2;+\infty[$.
- La courbe (C_G) admet un seul point d'inflexion en $x=2$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Quand un polynôme se finit en ln...

L'énoncé

La fonction *f* est définie pour tout réel *x* de l'intervalle $\left[\frac{1}{2};4\right]$ par :

$$f(x)=2x^2-17x+16+15\times\ln(x)$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

a. Calculer $f(0,5)$ et $f(4)$. On écrira chacune de ces images sous la forme $a+b\times\ln(2)$ où *a* et *b* sont deux entiers relatifs.

b. Dans ces questions, nous allons étudier le signe de la fonction *f* sur son ensemble de définition.

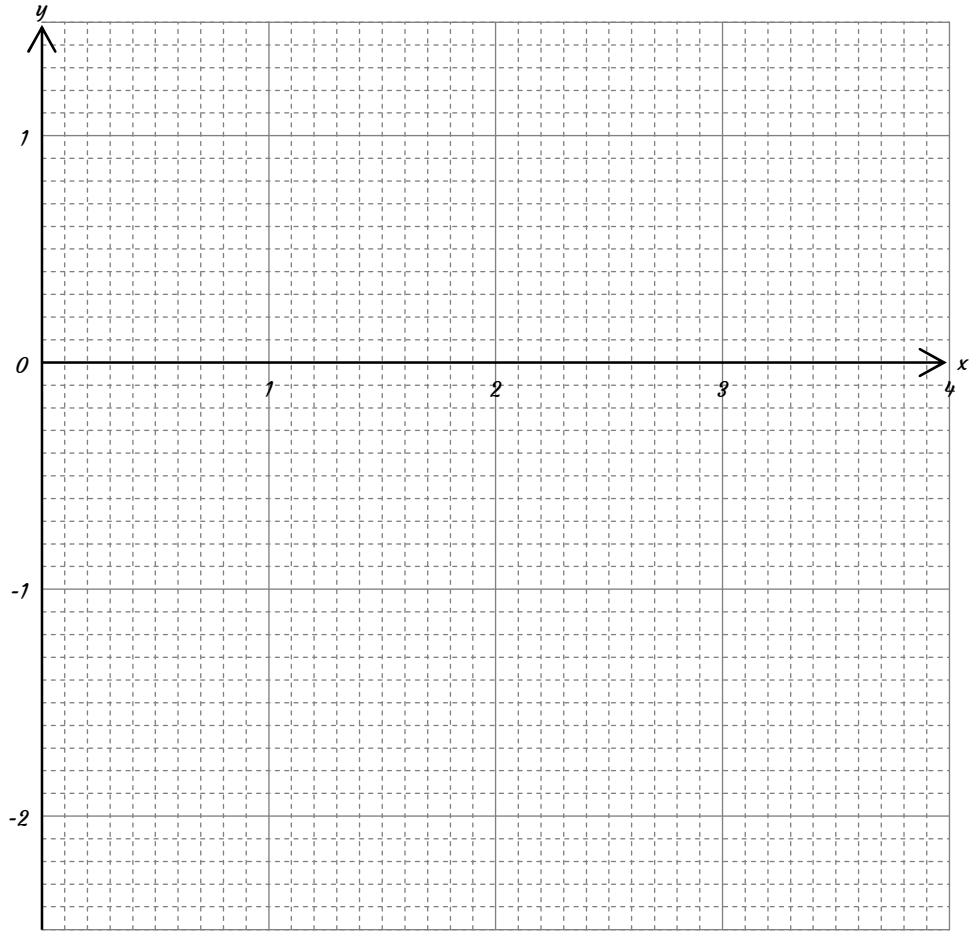
1. Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction *f*.
2. En déduire les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};4\right]$.
3. Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};4\right]$?

   On justifiera sa réponse. Donner des valeurs approchées au centième-près de ces éventuelles solutions.
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};4\right]$.

c. On appelle T_1 la tangente à la courbe (C_f) en son point d'abscisse 1.

1. Montrer que pour tout réel $x\in\left[\frac{1}{2};4\right]$, on a $f''(x)=\frac{4x^2-15}{x^2}$
2. En déduire les intervalles de l'ensemble $\left[\frac{1}{2};4\right]$ où la fonction *f* est convexe ou concave. On précisera ses éventuels points d'inflexion.
3. Laquelle de la tangente T_1 ou de la courbe (C_f) est au-dessus de l'autre ? On justifiera brièvement sa réponse.
4. Déterminer une équation réduite de la tangente T_1.

d. Sur le graphique ci-dessous, tracer avec soin la tangente T_1 et la courbe (C_f) représentant la fonction *f*. On tracera en rouge les parties convexes de la courbe (C_f) et en bleu ses parties concaves.



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Le corrigé

a. Calculons les deux images demandées :

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-17\times\frac{1}{2}+16+15\times\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=0,5-8,5+16+15\times\left[-\ln(2)\right]=8-15\times\ln(2)\approx-2,4$$
$$f(4)=2\times4^2-17\times4+16+15\times\ln(4)$$
$$=32-68+16+15\times\ln\left(2^2\right)=-20+15\times2\times\ln(2)=30\times\ln(2)-20\approx0,8$$

b.1. A l'exception de ln qui ne l'est que sur $]0;+\infty[$, f est une somme de fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est bien dérivable sur son ensemble de définition et pour tout réel $x\in[0,5;4]$, nous avons :

$$f'(x)=2\times2x-17\times1+0+15\times\frac{1}{x}=4x\times\frac{x}{x}-17\times\frac{x}{x}+\frac{15}{x}=\frac{4x^2-17x+15}{x}$$

b.2. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};4\right]$, le dénominateur x est évidemment positif.

Pour connaître le signe de son numérateur $N(x)=4x^2-17x+15$ qui est une forme du second degré, calculons son discriminant :

$$\Delta_{N(x)}=(-17)^2-4\times4\times15=289-240=49=7^2$$

Son discriminant étant positif, le numérateur $N(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-(-17)-7}{2\times4}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}=1,25 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-17)+7}{2\times4}=\frac{24}{8}=3$$

Le signe de la dérivée $f'(x)$ donne le sens de variation de la fonction f ci-contre ➔

x	0,5		1,25		3		4
$N(x)$		+	0	−	0	+	
x		+		+		+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	$8-15\times\ln(2)$	↗	$f(1,25)\approx1,22$	↘	$f(3)\approx-0,52$	↗	$30\ln(2)-20$

Calculons les deux extrema manquants :

$$f\left(\frac{5}{4}\right)=2\times\left(\frac{5}{4}\right)^2-17\times\frac{5}{4}+16+15\times\ln\left(\frac{5}{4}\right)=15\times\ln(5)-30\times\ln(2)-\frac{17}{8}\approx1,22$$
$$f(3)=2\times3^2-17\times3+16+15\times\ln(3)=15\times\ln(2)-17\approx-0,52$$

b.3. La première chose à dire est que la fonction f étant dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};4\right]$, elle y est continue. Donc la Propriété des Valeurs Intermédiaires lui est applicable.

- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right[$, la fonction f est strictement croissante et 0 appartient à l'intervalle image $\left[f(0,5);f(1,25)\right[$. Donc l'équation $f(x)=0$ y admet une solution α dont une valeur approchée au centième-près est $\alpha\approx0,74$.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{5}{4};3\right[$, la fonction f est strictement décroissante et 0 appartient à l'intervalle image $\left]f(3);f(1,25)\right]$. Par conséquent, l'équation $f(x)=0$ admet dans cet ensemble une solution β dont une valeur approchée est $\beta\approx2,28$.
- Enfin, l'équation $f(x)=0$ admet une troisième solution γ dans l'intervalle $]3;4]$ dont une valeur approchée au centième-près est $\gamma\approx3,64$.

b.4. Compte tenu des questions **b.2** et **b.3**, nous en déduisons que le tableau de signe de la fonction f est :

x	$\frac{1}{2}$		α		β		γ		4
$f(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

c.1. La dérivée seconde f'' est la dérivée de la dérivée première $f'(x)=4x-17+15\times\frac{1}{x}$.

Pour tout réel $x\in\left[\frac{1}{2};4\right]$, nous avons :

$$f''(x)=4\times1-0+15\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=4\times\frac{x^2}{x^2}-\frac{15}{x^2}=\frac{4x^2-15}{x^2}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

c.2. La convexité ou la concavité de la fonction f vont nous être données par le signe de sa dérivée seconde $f''(x)$.

Le dénominateur qui est le carré x^2 est toujours positif sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};4\right]$.

Le numérateur $N(x)=4x^2+0x-15$ est une forme du second degré. Discriminant !

$$\Delta_{N(x)}=0^2-4\times4\times(-15)=240=\left(\sqrt{16}\times\sqrt{15}\right)^2=\left(4\sqrt{15}\right)^2$$

Son discriminant étant positif, le numérateur $N(x)$ admet deux racines réelles :

$$x_1=\frac{-0-4\sqrt{15}}{2\times4}=-\frac{\cancel{4}\sqrt{15}}{2\times\cancel{4}}=-\frac{\sqrt{15}}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-0+4\sqrt{15}}{2\times4}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Son coefficient dominant 4 étant positif, la forme du second degré $N(x)$ est positive avant x_1 et après x_2. Elle est négative sur l'intervalle $]x_1;x_2[$.

Nous en déduisons :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{15}}{2}$		4
$N(x)=4x^2-15$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		f est concave		f est convexe	

Enfin, f admet un point d'inflexion en $x=\frac{\sqrt{15}}{2}\approx1,94$.

c3. 1 appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right[$ où f est concave, la tangente T_1 se trouve au-dessus de la courbe (C_f).

c.4. L'équation réduite de la tangente T_1 est de la forme $y=f'(1)\times(x-1)+f(1)$ avec :

$$f(1)=2\times1^2-17\times1+16+15\times\ln(1)=2-17+16+15\times0=1$$

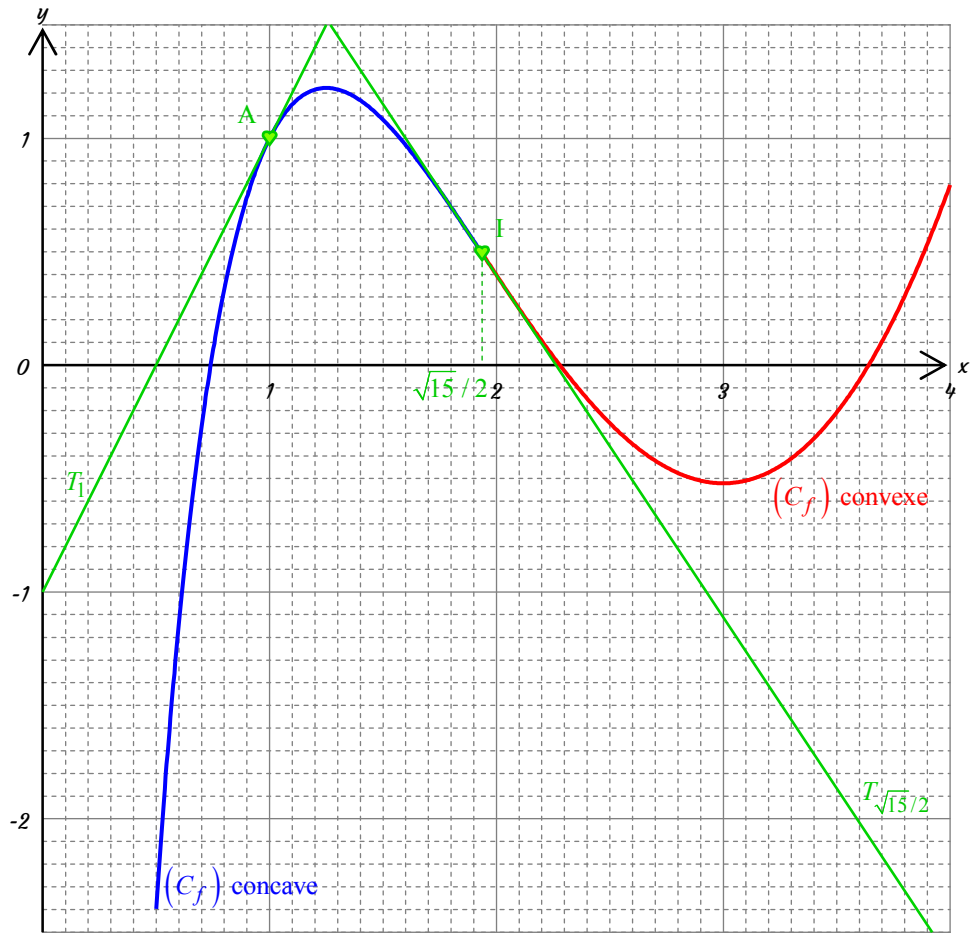
$$f'(1)=\frac{4\times1^2-17\times1+15}{1}=\frac{2}{1}=2$$

Il vient alors :

$$T_1 \quad : \quad y=2\times(x-1)+1 \quad \Leftrightarrow \quad y=2x-2+1 \quad \Leftrightarrow \quad y=2x-1$$

d. La courbe (C_f) accompagnée de sa tangente T_1 sont tracées sur le graphique ci-dessous.

Partie concave en bleue jusqu'au point d'inflexion I d'abscisse $x=\frac{\sqrt{15}}{2}$, partie convexe rouge à partir de ce point.



Le point d'inflexion I est le seul point de la courbe (C_f) où cel

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

La bonne réponse...

L'énoncé

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, trois propositions sont faites mais une seule est juste. Une bonne réponse rapporte 0,5 points. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse n'enlève, ni ne rajoute aucun point. On entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a. Parmi les propositions suivantes, laquelle est une primitive sur $]0;+\infty[$ de $f(x)=\frac{1}{x}$?

1. $F(x)=-\frac{1}{x^2}$ *2.* $F(x)=e^x$ *3.* $F(x)=\ln(x)$

b. Dans cette question, x est un réel appartenant à l'intervalle $[1;4]$.
Parmi les égalités proposées suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?

1. $\frac{\ln(5)}{\ln(x)}=\ln(5-x)$ *2.* $\ln(5)-\ln(x)=\ln(5-x)$ *3.* $\frac{e^5}{e^x}=e^{5-x}$

c. Dans cette question, x est un réel strictement positif.
Parmi les égalités proposées suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?

1. $\sqrt{\ln(x)}=\frac{\ln(x)}{2}$ *2.* $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$ *3.* $\sqrt{e^x}=\frac{e^x}{2}$

d. Parmi les propositions suivantes, laquelle est la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2^x=6$?

1. $x=\ln(3)$ *2.* $x=\frac{\ln(6)}{\ln(2)}$ *3.* $x=\ln(12)$

e. Parmi les propositions, laquelle est la solution dans $]0;+\infty[$ de l'équation $x^5=7$?

1. $x=e^{\frac{1}{7}\times\ln(5)}$ *2.* $x=e^{\frac{1}{5}\times\ln(7)}$ *3.* $x=e^{5\times\ln(7)}$

f. Parmi les propositions suivantes, laquelle est une primitive de la fonction $f(x)=e^{-x}$?

1. $F(x)=2+e^{-x}$ *2.* $F(x)=2-e^{-x}$ *3.* $F(x)=2-e^x$

Le corrigé

a. La primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction inverse $f(x)=\frac{1}{x}$ est évidemment la fonction logarithme népérien $F(x)=\ln(x)$. Réponse correcte : *3*

b. Le logarithme du quotient est égal à la différence des logarithmes et le quotient des exponentielles est égal à l'exponentielle de la différence.

$\ln\left(\frac{5}{x}\right)=\ln(5)-\ln(x)$ et $\frac{e^5}{e^x}=e^{5-x}$ Réponse correcte : *3*

c. Seule la seconde proposition est juste : $\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x)$ Réponse correcte : *2*

d. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation proposée :

$$2^x=6 \xrightarrow{\ln} \ln(2^x)=\ln(6) \Leftrightarrow x\ln(2)=\ln(6) \Leftrightarrow x=\frac{\ln(6)}{\ln(2)}$$

Réponse correcte : *2*

e. Là encore, résolvons dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation proposée :

$$x^5=7 \xrightarrow{\ln} 5\times\ln(x)=\ln(7) \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{1}{5}\ln(7) \xrightarrow{\exp} x=e^{\frac{1}{5}\ln(7)}$$

Réponse correcte : *2*

f. La fonction f est presque de la forme $u'\times e^u$ avec $\begin{cases} u(x)=-x \\ u'(x)=-1 \end{cases}$

En fait : $f(x)=e^{-x}=(-1)\times(-1)\times e^{-x}=-u'\times e^u$

Donc toutes les primitives de f sont de la forme $F(x)=-e^u+Cste=-e^{-x}+Cste$

Une seule fonction proposée est de cette forme : $F(x)=2-e^{-x}$ Réponse correcte : *2*

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Quand un autre polynôme se finit en ln...

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $\left[\frac{1}{4};1\right]$ par :

$$f(x)=x^2+5x-5-3\times\ln(x)$$

a. Calculer les images $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(1)$. On écrira chacune de ces images sous la forme $a+b\times\ln(2)$ où a est un rationnel (éventuellement un décimal) et b est un entier relatif éventuellement nul.

b. On appelle f' la dérivée de la fonction f.

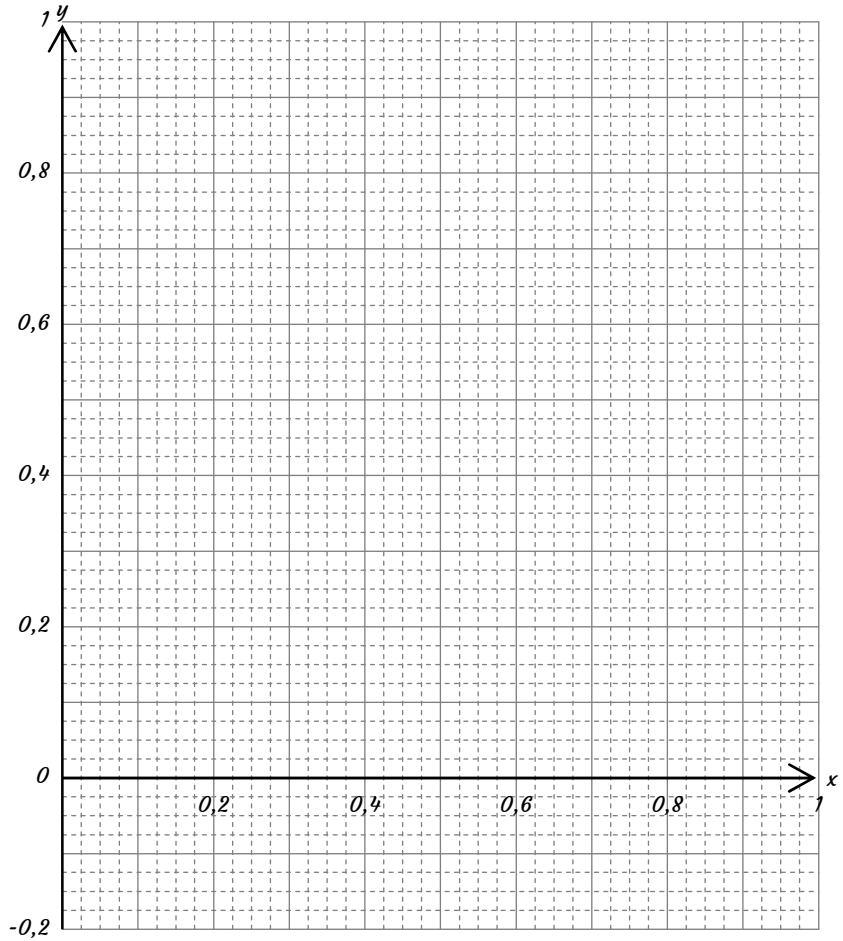
1. Etablir que pour tout réel $x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$, nous avons $f'(x)=\frac{2x^2+5x-3}{x}$
2. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};1\right]$.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ dans $\left[\frac{1}{4};1\right]$. On justifiera sa réponse.
   Donner des valeurs approchées au centième-près de ces éventuelles solutions.
4. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

c. On appelle F la primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};1\right]$ telle que $F(1)=0$.

1. Démontrer que la fonction $H(x)=x\times(\ln(x)-1)$ est une primitive de la fonction $h(x)=\ln(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. En déduire l'expression de la primitive F.
3. Donner le tableau de variation de la fonction F sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

d. On appelle (C_f) la courbe représentative de la fonction f et T_1 la tangente à cette courbe au point A d'abscisse $x=1$.

1. Montrer que pour tout réel $x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$, nous avons $f''(x)=2+\frac{3}{x^2}$.
2. En déduire les intervalles de l'ensemble $\left[\frac{1}{4};1\right]$ où la fonction f est convexe ou concave. On précisera ses éventuels points d'inflexion.
   La tangente T_1 est-elle au-dessus ou au-dessous de la courbe (C_f) ?
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 .
4. Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe (C_f) ainsi que la tangente T_1 .



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Le corrigé

a. Calculons les deux images demandées :

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2+5\times\frac{1}{4}-5-3\times\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{5\times4}{4\times4}-\frac{5\times16}{16}+3\times\ln\left(2^{\boxed{2}}\right)$$
$$=\frac{1+20-80}{16}+3\times\boxed{2}\times\ln(2)=-\frac{59}{16}+6\times\ln(2)\approx0,47$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\times\frac{1}{2}-5-3\times\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{5\times2}{2\times2}-\frac{5\times4}{4}+3\times\ln(2)$$
$$=\frac{1+10-20}{4}+3\times\ln(2)=-\frac{9}{4}+3\times\ln(2)\approx0,17$$

$$f(1)=1^2+5\times1-5-3\times\ln(1)=1+5-5-3\times0=1$$

b.1. Tous les termes composant la fonction étant dérivables au minimum sur $]0;+\infty[$, f est clairement dérivable sur son ensemble de définition $\left[\frac{1}{4};1\right]$ et pour tout réel x de cet intervalle, nous avons :

$$f'(x)=\left(x^2+5x-5-3\times\ln(x)\right)'$$
$$=2x+5+0-3\times\frac{1}{x}=2x\times\frac{x}{x}+5\times\frac{x}{x}-\frac{3}{x}=\frac{2x^2+5x-3}{x}$$

b.2. Le dénominateur est évidemment positif sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

Pour connaître le signe de son numérateur $N(x)=2x^2+5x-3$ qui est une forme du second degré, calculons son discriminant :

$$\Delta_{N(x)}=5^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=7^2$$

Son discriminant étant positif, le numérateur $N(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-5-7}{2\times2}=\frac{-12}{4}=-3 \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-5+7}{2\times2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Seule la seconde racine appartient à l'intervalle de définition de la fonction f.

Nous en déduisons que le tableau de signe de $f'(x)$ et de variation de f est le suivant :

x	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1
$N(x)=2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	
x		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$6\ln(2)-59/16$	↘	$3\ln(2)-9/4$	↗	1

b.3. D'abord, la fonction f étant dérivable sur $\left[\frac{1}{4};1\right]$, elle est continue sur cet intervalle.

Nous allons pouvoir appliquer la Propriété des Valeurs Intermédiaires.

- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right[$, la fonction f est strictement décroissante et 0 appartient à l'intervalle image $]f(0,5);f(0,25)]$.
  Par conséquent, la fonction f passe une seule fois par le niveau 0 lorsque x décrit l'intervalle $[0,25;0,5[$.
  Donc l'équation $f(x)=0$ admet dans cet intervalle une unique solution α dont une valeur approchée au centième-près est $\alpha\approx0,35$.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$, la fonction f est strictement croissante et 0 appartient à l'intervalle image $[f(0,5);f(1)]$.
  Par suite, l'équation $f(x)=0$ admet dans cet ensemble une seule solution β dont une valeur approchée est $\beta\approx0,67$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

b.4. Vu les deux précédentes questions, le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	$\frac{1}{4}$		α		β		1
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c.1. Dérivons la fonction produit $H(x)=x\times\left[\ln(x)-1\right]=u\times v$ où

$$\begin{cases} u(x)=x \\ u'(x)=1 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(x)=\ln(x)-1 \\ v'(x)=1/x+0=1/x \\ \text{Dérivable sur }]0;+\infty[\end{cases}$$

Donc la fonction H est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel strictement positif x, nous avons :

$$\begin{aligned} H'(x) &= u'\times v+v'\times u \\ &= 1\times\left(\ln(x-1)\right)+\frac{1}{\cancel{x}}\times\cancel{x}=\ln(x)-1+1=\ln(x)=h(x) \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction $H(x)=x\times\left[\ln(x)-1\right]$ est une primitive de $\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.

c.2. La primitive F de la fonction $f(x)=x^2+5\times x-5-3\times h(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};1\right]$ a une expression de la forme $F(x)=\frac{1}{3}x^3+5\times\frac{1}{2}x^2-5x-3\times H(x)+Cste$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-5x-3x\times\left[\ln(x)-1\right]+Cste \\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x-3x\times\ln(x)+Cste \end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer la constante $Cste$ sachant que :

$$\begin{aligned} F(1)=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}\times1^3+\frac{5}{2}\times1^2-2\times1-3\times1\times\ln(1)+Cste=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}+\frac{5}{2}-2-3\times+Cste=0 \Leftrightarrow \frac{1\times2}{3\times2}+\frac{5\times3}{2\times3}-\frac{2\times6}{6}+Cste=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2+15-12}{6}+Cste=0 \Leftrightarrow \frac{5}{6}+Cste=0 \Leftrightarrow Cste=-\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Conclusion : $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x-\frac{5}{6}-3x\times\ln(x)$

c.3. Etant la dérivée de sa primitive, c'est le signe de $f(x)$ qui va nous donner les variations de F. En application de la question **b.4**, il vient :

x	$\frac{1}{4}$		α		β		1
$F'(x)=f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
F	$F(0,25)\approx-0,132$	$\nearrow$	$F(\alpha)\approx-0,110$	$\searrow$	$F(\beta)\approx-0,146$	$\nearrow$	0

d.1. La dérivée seconde f'' est la dérivée de la dérivée première $f'(x)=2x+5-\frac{3}{x}$.

Pour tout réel $x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$, nous avons :

$$f''(x)=2\times1-0-3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2+\frac{3}{x^2}$$

d.2. C'est le signe de sa dérivée seconde qui donne la convexité ou la concavité d'une fonction.

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};1\right]$, la somme $f''(x)=2+\frac{3}{x^2}=\oplus+\oplus$ est positive.

Par conséquent, la fonction f n'est que convexe sur tout son intervalle de définition et toutes les tangentes, en particulier T_1, sont toujours au-dessous de la courbe (C_f).

d.3. L'équation réduite de la tangente T_1 est de la forme $y=f'(1)\times(x-1)+f(1)$ avec :

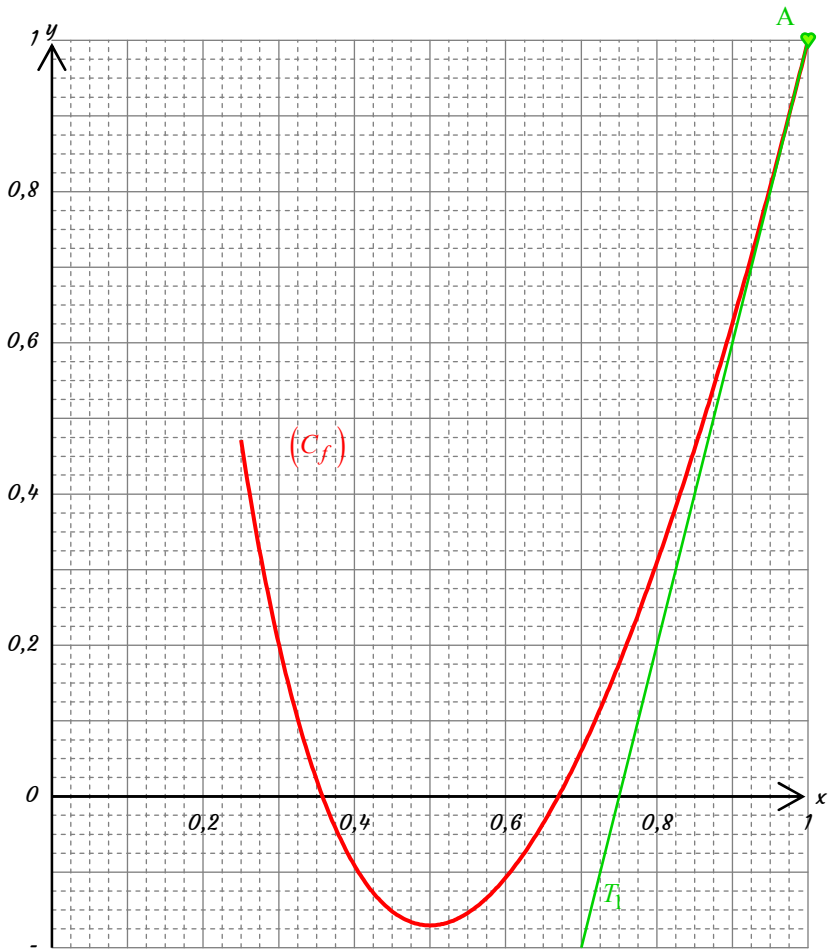
$$f(1)=1 \quad \text{et} \quad f'(1)=2\times1+5-\frac{3}{1}=2+5-3=4$$

Il vient alors :

$$T_1 \ : \ y=4\times(x-1)+1 \Leftrightarrow y=4x-4+1 \Leftrightarrow y=4x-3$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

d.4. La courbe (C_f) ainsi que la tangente T_1 ont été tracées ci-après.

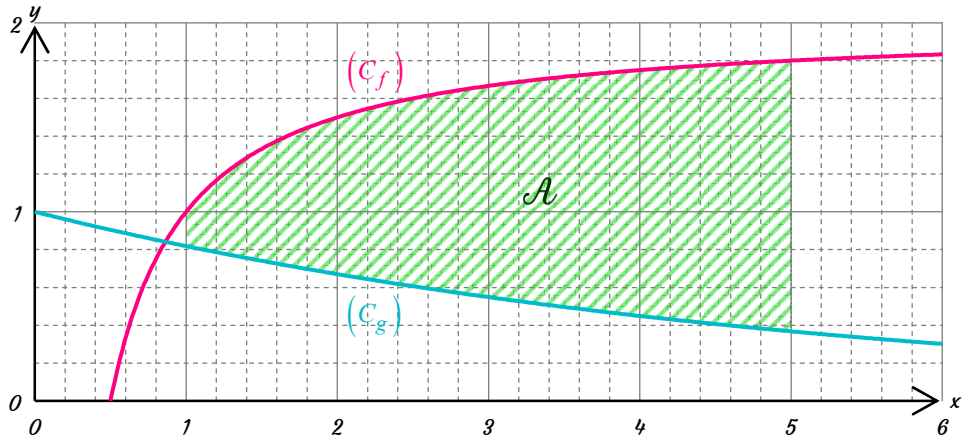


L'aire de rien

L'énoncé

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère simplement orthogonal d'unité graphique 2 centimètres en abscisse et 2,5 centimètres en ordonnée les courbes des fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=2-\frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x)=e^{-0,2\times x}$$



1. Calculer l'intégrale $I=\int_1^5 f(x)\,dx$.

   On vérifiera avec la calculatrice que $I\approx 6,3906$.

2. Calculer l'intégrale $J=\int_1^5 g(x)\,dx$.

   On vérifiera avec la calculatrice que $J\approx 2,2543$.

3. En déduire l'aire en centimètres carrés arrondie au millimètre carré près du domaine hachuré $\mathcal{A}$ compris entre les courbes (C_f) et (C_g) ainsi que les droites verticales d'équation $x=1$ et $x=5$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Le corrigé

1. Une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f(x)=2-\frac{1}{x}$ est $F(x)=2x-\ln(x)$.

Il vient alors :

$$I=\int_1^5 f(x)\,dx$$
$$=\left[F(x)\right]_1^5=F(5)-F(1)$$
$$=\left(2\times5-\ln(5)\right)-\left(2\times1-\ln(1)\right)=\left(10-\ln(5)\right)-(2-0)=8-\ln(5)\approx 6,3906$$

2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g(x)=e^{-0,2\times x}=e^{ax}$ est la fonction :

$$G(x)=\frac{1}{a}\times e^{ax}=\frac{1}{-0,2}\times e^{-0,2\times x}=-5\times e^{-0,2\times x}$$

Nous en déduisons alors :

$$J=\int_1^5 g(x)\,dx$$
$$=\left[G(x)\right]_1^5=G(5)-G(1)$$
$$=\left(-5\times e^{-0,2\times5}\right)-\left(-5\times e^{-0,2\times1}\right)=-5e^{-1}+5e^{-0,2}=5e^{-0,2}-\frac{5}{e}\approx 2,2543$$

3. L'aire du domaine $\mathcal{A}$ est égale à l'aire I sous la courbe (C_f) prise sur l'intervalle $[1;5]$ diminuée de l'aire J sous la courbe (C_g) calculée sur le même ensemble. Autrement dit :

$$Aire(\mathcal{A})=I-J\approx 4,1363 \text{ unités d'aire}\approx 20,68 \text{ cm}^2$$

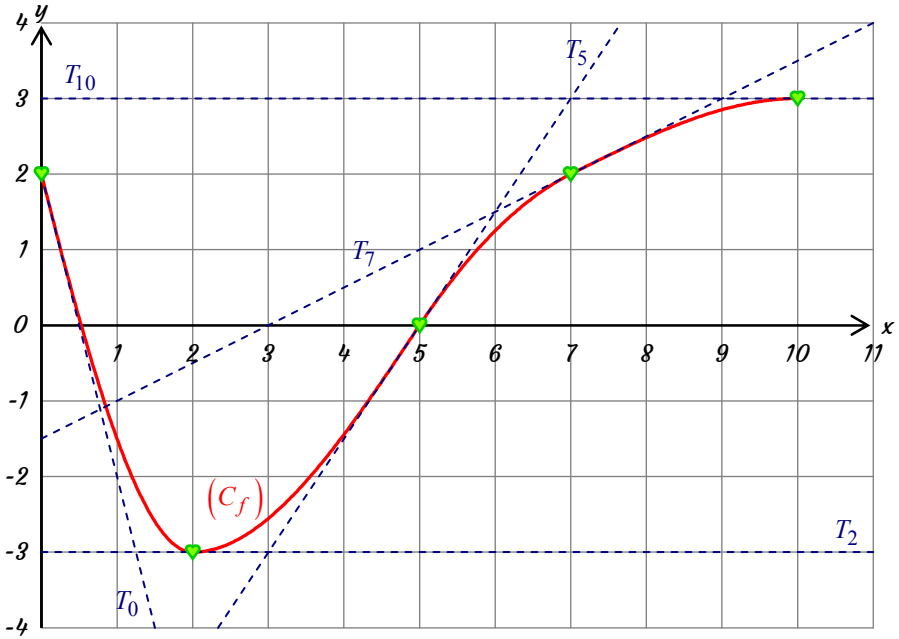
Une unité d'aire est l'aire d'un rectangle de 2 cm sur 2,5 soit 5 cm^2.

Analyse graphique en six questions

L'énoncé

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions, trois propositions sont faites mais une seule est juste. On entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé la courbe (C_f) représentant la fonction f qui est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;10]$.



On a également tracé les tangentes T_0, T_2, T_5, T_7 et T_{10} à la courbe (C_f) en ses points d'abscisses respectives 0, 2, 5, 7 et 10.

1. Parmi les trois égalités suivantes, une seule est fausse. Laquelle ?

$f(0)=2$	$f'(0)=-4$	$f'(2)=-3$

2. Parmi les trois égalités suivantes, une seule est fausse. Laquelle ?

$f'(5)=1,5$	$f'(7)=2$	$f'(10)=0$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

3. Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?

f est convexe sur $[0;10]$	f est concave sur $[0;10]$	f admet un point d'inflexion en $x=5$

4. On appelle F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;10]$.
Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?

F est croissante sur l'intervalle $]2;5[$	F est décroissante sur l'intervalle $]2;5[$	On ne peut pas se prononcer sur la variation de F sur $]2;5[$

5. Parmi les trois intégrales suivantes, laquelle est la plus petite c'est-à-dire est inférieure aux deux autres ?

$\int_2^4 f(x)dx$	$\int_5^7 f(x)dx$	$\int_8^{10} f(x)dx$

6. Parmi les trois valeurs suivantes, laquelle est une valeur approchée au dixième près de l'intégrale $\int_6^9 f(x)dx$?

4,6 unités d'aire	6,6 unités d'aire	8,6 unités d'aire

Le corrigé

L'image $f(a)$ est l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe (C_f).

Le nombre dérivé $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T_a à (C_f) en a.

Le coefficient directeur d'une droite est égal au quotient $\dfrac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}}$ entre deux points de la droite.
Ces rappels faits, nous pouvons répondre aux deux premières questions :

Cd comme Coefficient Directeur.

1. $f(0)=2$ $\quad f'(0)=\text{Cd } T_0=\dfrac{-4}{+1}=-4$ $\quad$ Faux ! $f'(2)=\text{Cd } T_2=0$

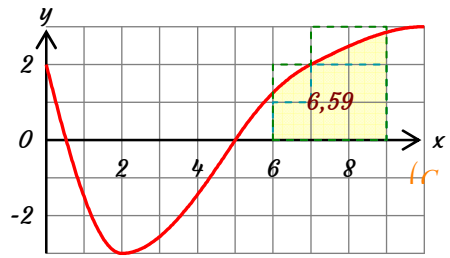
2. $f'(5)=\text{Cd } T_0=\dfrac{+3}{+2}=1{,}5$ $\quad$ Faux ! $f'(7)=\text{Cd } T_7=\dfrac{+1}{+2}=0{,}5$ $\quad f'(10)=\text{Cd } T_{10}=0$

3. La fonction f n'est pas convexe sur l'intervalle $[0;10]$ car, par exemple, sa courbe (C_f) est au-dessous de sa tangente T_7. En fait, f est n'est convexe que sur l'intervalle $[0;5]$.
La fonction f n'est pas non plus concave sur l'intervalle $[0;10]$ car sa courbe (C_f) est au-dessus de sa tangente T_0. En fait, f n'est concave que sur l'intervalle $[5;10]$.
Par contre, la courbe (C_f) traversant sa tangente T_5, f admet un point d'inflexion en 5.

4. La fonction f est la dérivée de sa primitive F sur l'intervalle $[0;10]$.
Comme sa dérivée $F'=f$ est négative sur $]2;5[$, alors la fonction F est décroissante sur cet intervalle.

5. La fonction f étant négative sur l'intervalle $[2;4]$, l'intégrale $\int_2^4 f(x)dx$ est négative.
f étant positive sur l'intervalle $[5;10]$, les intégrales $\int_5^7 f(x)dx$ et $\int_8^{10} f(x)dx$ sont positives.
La plus petite des trois est donc la première qui est négative.

6. Le domaine sous la courbe (C_f) pris sur l'intervalle $[6;9]$ contient un polygone de 5 carreaux et est contenu dans un polygone de 8 carreaux.



Donc, l'intégrale $\int_6^9 f(x)dx$ qui est l'aire de ce domaine est comprise entre 5 et 8 unités d'aire.
Les réponses 4,6 et 8,6 ne sont pas possibles. Une valeur approchée de cette intégrale est 6,6 unités d'aire.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Levant se lève

L'énoncé

a. On appelle *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=5x\times e^{5x}-e^{5x}-2$$

1. Calculer les images $f(0)$ et $f(1)$. On donnera d'abord les valeurs exactes, puis des valeurs approchées au dixième près.
2. En dérivant la fonction *f*, établir que $f'(x)=25xe^{5x}$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur $[0;+\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $[0;+\infty[$ une unique solution α dont on déterminera une valeur approchée au centième près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0;+\infty[$.

b. On appelle *g* la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{e^{5x}+2}{x}$$

1. En dérivant la fonction *g*, établir que $g'(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$.
2. En déduire les variations de la fonction *g* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au dixième près du minimum de la fonction *g* sur $]0;+\infty[$

Le corrigé

a.1. Calculons les images demandées :

$$f(0)=5\times 0\times e^{5\times 0}-e^{5\times 0}-2=0-e^{0}-2=0-1-2=-3$$
$$f(1)=5\times 1\times e^{5\times 1}-e^{5\times 1}-2=5e^{5}-e^{5}-2=4e^{5}-2\approx 591,7$$

a.2. La fonction *f* est de la forme :

$$f(x)=u\times v-e^{ax}-2$$

où :

$u(x)=5x$
$u'(x)=5$
Dérivable sur ℝ

et

$v(x)=e^{5x}=e^{ax}$
$v'(x)=\left(e^{ax}\right)'=a\times e^{ax}=5e^{5x}$
Dérivable sur ℝ

Donc la fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et pour tout réel *x* de cet ensemble, nous avons :

$$f'(x)=u'\times v+v'\times u-a\times e^{ax}+0$$
$$=\cancel{5\times e^{5x}}+5e^{5x}\times 5x-\cancel{5\times e^{5x}}=25x\times e^{5x}$$

a.3. Le signe de la dérivée $f'(x)$ va nous donner les variations de la fonction *f*.

x	0		$+\infty$
$25x$		$+$	
e^{5x}		$+$	
$f'(x)$		$+$	
f	-3	↗	

a.4. D'abord, comme la fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$, alors elle y est continue. La Propriété des Valeurs Intermédiaires lui est donc applicable sous conditions...

Ensuite, comme
- f est strictement croissante sur $[0;1]$,
- $f(0)=-3$ est négative
- $f(1)=4e^{5}-2$ est positive

alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0;1]$.

Après 1, la fonction *f* est strictement positive car elle croît depuis l'image $f(1)$ qui est positive. Donc l'équation $f(x)=0$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $]1;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $[0;+\infty[=[0;1]\cup]1;+\infty[$

✎ En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, on détermine qu'un encadrement au centième de cette solution α est :

$$0,29\leq\alpha\leq 0,3$$

a.5. Nous déduisons des deux questions précédentes le signe de $f(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

b.1. La fonction $g=\dfrac{u}{v}$ est un quotient où :

$u(x)=e^{5x}+2$
$u'(x)=5\times e^{5x}-0=5e^{5x}$
Dérivable sur $]0;+\infty[$

<u>et</u>

$v(x)=x$
$v'(x)=1$
Dérivable et non nulle sur $]0;+\infty[$

Donc la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel strictement positif x, nous avons :

$$g'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}$$

$$=\frac{5e^{5x}\times x-\left(e^{5x}+2\right)\times 1}{x^2}=\frac{5x\times e^{5x}-e^{5x}-2}{x^2}=\boxed{\frac{f(x)}{x^2}}$$

b.2. Le signe du numérateur de $g'(x)$ nous est donné par le résultat de la question **a.5**.

Le dénominateur x^2 est lui toujours positif sur $]0;+\infty[$.

Le tableau de variation de la fonction g est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	|	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘		↗	

b.3. Vu son tableau de variation, la fonction g atteint son minimum en $x=\alpha$ dont une valeur approchée est $0,29$ ou $0,3$.

Par conséquent, ce minimum est voisin de $g(0,29)$ ou $g(0,3)$ soit 21,6.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Général

Quand ça m...

L'énoncé

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de huit questions. Pour chacune d'elles, quatre propositions sont faites mais une seule d'entre elles est juste. On entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a. On appelle f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction f ?

1	2	3	4
$-\frac{1}{2x}$	$-\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$	$\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

b. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3e^{x^2+1}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction f ?

1	2	3	4
$3e^{2x}$	$3e^{x^2+1}$	$(3x^2+3)e^{2x}$	$6xe^{x^2+1}$

c. Les quatre premiers termes de la suite (u_n) sont :

$u_0=-1,5$ $\quad u_1=3$ $\quad u_2=-4.5$ $\quad u_3=9$

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

1. La suite (u_n) peut être arithmétique et peut être géométrique.
2. La suite (u_n) peut être arithmétique mais n'est pas géométrique.
3. La suite (u_n) peut être géométrique mais n'est pas arithmétique.
4. La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

d. La suite (u_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_1=4 \\ u_{n+1}=2\times u_n+n+1 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Parmi les affirmations propositions suivantes, laquelle est la valeur du quatrième terme de la suite ?

1	2	3	4
$u_4=43$	$u_4=50$	$u_4=53$	$u_4=57$

e. L'heure des comptes est venue pour Toto. La semaine de la rentrée, sa môman lui avait donné 45 euros d'argent de poche. Elle lui avait également dit que s'il travaillait bien à l'école, alors l'argent de poche qu'elle lui donnait chaque semaine serait augmenté de 2,30 euros par rapport à la somme de la semaine précédente.
Cela fait 14 semaines que Toto est rentré et contrairement à certaines personnes, il a été exemplaire à l'école. Parmi les propositions suivantes, laquelle correspond à la somme totale perçue par Toto sur ces 14 semaines ?

1	2	3	4
662,20€	839,30€	855,40€	916,50€

f. Parmi les propositions suivantes, laquelle est la limite de la suite $u_n=\frac{1-0,9^n}{1-1,1^n}$?

1	2	3	4
$-\infty$	0	1	$+\infty$

g. Parmi les propositions suivantes, laquelle est égale au nombre $A=\frac{e^{7x-1}\times\sqrt{e^{8-4x}}}{\left(e^{2x+1}\right)^3}$?

1	2	3	4
$\frac{1}{e^x}$	1	e^x	e^{2x}

h. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=12x^3+12x^2-12x+12$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f ?

1	2
$4x^2+6x-12$	$36x^2+24x-12$
3	**4**
$4x^4+6x^3-12x^2+12x$	$3x^4+4x^3-6x^2+12x+\sqrt{2}$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Le corrigé

a. La fonction f est de la forme $f(x)=\frac{1}{u}$ avec $\begin{cases} u(x)=x^2+1 \\ u'(x)=2x \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}=-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Conclusion : la bonne réponse est la **3**.

b. La fonction f est de la forme $f(x)=3\times e^u$ avec $\begin{cases} u(x)=x^2+1 \\ u'(x)=2x \\ \text{Dérivable et non nulle sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)=3\times u'\times e^u=3\times 2x\times e^{x^2+1}=6xe^{x^2+1}$$

Conclusion : la bonne réponse est la **4**.

c. Examinons la façon dont on passe d'un terme à l'autre de la suite (u_n) parmi ceux qui nous sont proposés.

$$\boxed{\begin{matrix} u_0 \\ -1,5 \end{matrix}} \xrightarrow[\times(-2)]{+4,5} \boxed{\begin{matrix} u_1 \\ 3 \end{matrix}} \xrightarrow[\times(-1,5)]{-7,5} \boxed{\begin{matrix} u_2 \\ -4,5 \end{matrix}} \xrightarrow[\times(-2)]{+13,5} \boxed{\begin{matrix} u_3 \\ 9 \end{matrix}}$$

Conclusion : la suite (u_n) peut géométrique de raison $q=-2$ mais ne peut pas être arithmétique. La bonne réponse est la **4**.

d. Pour connaître la valeur du quatrième terme de la suite, il faut calculer en cascade tous ceux qui le précèdent.

$$\begin{cases} u_1=4 \\ u_2=u_{1+1}=2\times u_1+1+1=2\times 4+1+1=10 \\ u_3=u_{2+1}=2\times u_2+2+1=2\times 10+2+1=23 \\ u_4=u_{3+1}=2\times u_3+3+1=2\times 23+3+1=50 \end{cases}$$

Conclusion : la bonne réponse est la **2**.

e. On appelle u_n la somme perçue par Toto la n-ième semaine de cours depuis la rentrée.

Nous avons :

$$\begin{cases} u_1=45€ \\ u_2=u_1+2,3=47,3€ \\ u_3=u_2+2,3=49,6€ \\ \quad\dots \\ u_{n+1}=u_n+2,3 \end{cases}$$

Clairement, la suite (u_n) est arithmétique de raison $r=2,3$ et de premier terme $u_1=47$.

Par conséquent, la somme perçue par Toto sur les 14 premières semaines est donnée par :

$$\underbrace{u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{14}}_{\text{Somme de 14 termes consécutifs d'une suite arithmétique}}=14\times\frac{u_1+u_{14}}{2}=14\times\frac{45+(45+13\times 2,3)}{2}=839,30€$$

Conclusion : la bonne réponse est la **2**.

f. Nous pouvons écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\boxed{0,9^n}}{1-\boxed{1,1^n}}=\frac{1-\boxed{0^+}}{1-\boxed{(+\infty)}}=\frac{1}{(-\infty)}=0^-$$

Conclusion : la bonne réponse est la **2**.

g. Appliquant les propriétés de l'exponentielle, nous pouvons écrire :

$$A=\frac{e^{7x-1}\times\sqrt{e^{8-4x}}}{\left(e^{2x+1}\right)^3}=\frac{e^{7x-1}\times e^{\frac{1}{2}\times(8-4x)}}{e^{3\times(2x+1)}}$$

$$=\frac{e^{7x-1}\times e^{4-2x}}{e^{6x+3}}=\frac{e^{(7x-1)+(4-2x)}}{e^{6x+3}}=\frac{e^{5x+3}}{e^{6x+3}}=e^{(5x+3)-(6x+3)}=e^{-x}=\frac{1}{e^x}$$

Conclusion : la bonne réponse est la **1**.

h. Toutes les primitives F de la fonction $f(x)=12\times x^3+12\times x^2-12\times x+12$ sont de la forme :

$$F(x)=12\times\frac{1}{4}x^4+12\times\frac{1}{3}x^3-12\times\frac{1}{2}x^2+12x+Cste=3x^4+4x^3-6x^2+12x+Cste$$

Cette constante *Cste* qui différencie deux primitives peut éventuellement être égale à $\sqrt{2}$.

Conclusion : la bonne réponse est la **4**.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Probabilités

Pour un filtre avec toi...

L'énoncé

Donna Laischrault est une célèbre maraboute du Blancois qui, aux hommes seuls et désespérés qui viennent la voir, vend des filtres d'amour afin de leur faire trouver l'amour.
Des études menées sur la clientèle de Donna ont donné les résultats suivants :

- 32% des clients ont trouvé l'amour.
- 10% des clients ont un pris un filtre d'amour complet, 30% un demi-filtre d'amour et le restant rien.
- 60% des clients qui ont pris un demi-filtre n'ont pas trouvé l'amour.
- 30% des clients qui n'ont pris aucun filtre ont trouvé l'amour.

On rencontre un client de Donna au hasard et on définit les événements suivants :

A = «le client rencontré a trouvé l'amour»
F = «le client rencontré a pris un filtre d'amour complet»
D = «le client rencontré a pris un demi - filtre d'amour»
S = «le client rencontré n'a rien pris du tout»

a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation d'un client.

b. Calculer les probabilités $p(\mathrm{D}\cap\mathrm{A})$, $p(\mathrm{D}\cup\mathrm{A})$, puis $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D})$.

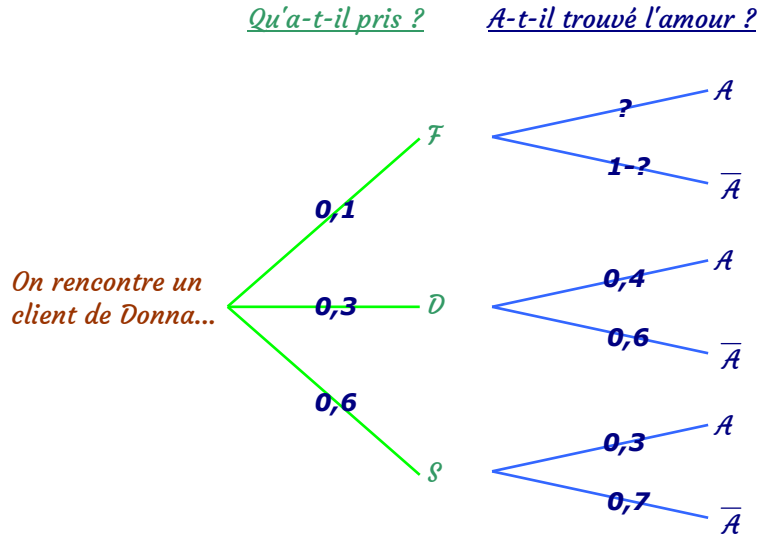
c. On rencontre un client ayant pris un filtre d'amour complet. Calculer la probabilité qu'il ait trouvé l'amour.

d. On réunit dans une même pièce 20 clients de Donna choisis au hasard et ne se connaissant pas. On note N le nombre d'entre eux ayant trouvé l'amour.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire N ? On justifiera sa réponse.
2. Calculer la probabilité pour qu'exactement 7 clients sur les 20 aient trouvé l'amour.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 clients sur les 20 aient trouvé l'amour.

Le corrigé

a. La situation d'un client rencontré peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :



b. Calculons les probabilités demandées :

$$p(\mathrm{D}\cap\mathrm{A}) = p(\mathrm{D})\times p_{\mathrm{D}}(\mathrm{A}) = 0,3\times 0,4 = \underline{0,12}$$
$$p(\mathrm{D}\cup\mathrm{A}) = p(\mathrm{D})+p(\mathrm{A})-p(\mathrm{D}\cap\mathrm{A}) = 0,3+0,32-0,12 = \underline{0,5}$$
$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{D}) = \frac{p(\mathrm{D}\cap\mathrm{A})}{p(\mathrm{A})} = \frac{0,12}{0,32} = \underline{0,375}$$

c. Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement A sachant que l'événement F est réalisé. En d'autres termes, il s'agit de compléter notre arbre.
Les événements F, D et S formant une partition de l'univers des possibles, en application de la formule des probabilités totales, nous pouvons écrire :

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F})+p(\mathrm{A}\cap\mathrm{D})+p(\mathrm{A}\cap\mathrm{S}) \Leftrightarrow 0,32 = p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F})+0,12+0,6\times 0,3$$
$$\Leftrightarrow p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F}) = 0,32-0,12-0,18 = \underline{0,02}$$

Il vient alors :

$$p_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A}\cap\mathrm{F})}{p(\mathrm{F})} = \frac{0,02}{0,1} = \underline{0,2}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

d.1. Chaque client de Donna est une épreuve de Bernoulli.

Les 20 clients indépendants les uns des autres forment un schéma de Bernoulli de 20 épreuves. La variable aléatoire N comptant le nombre de «succès» parmi les 20 clients suit donc la loi binomiale $B(20;0,32)$.

d.2. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(N=7)=\underbrace{\binom{20}{7}\times 0,32^7\times 0,68^{13}}_{\text{ou directement avec la fonction distribution particulière binomiale de la calculatrice.}}\approx 0,177$$

d.3. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(N\geq 10)=\underbrace{1-p(N\leq 9)=1-0,928}_{\text{Avec la fonction distribution cumulative binomiale de la calculatrice.}}=0,072$$

La vie continue de Patrick Ronald

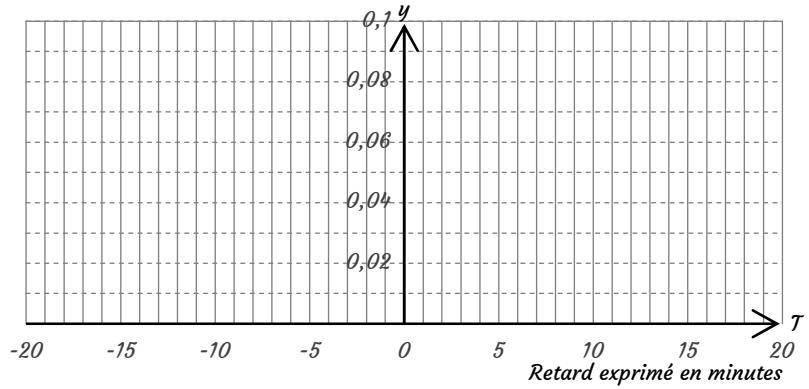
L'énoncé

Le présent exercice est constitué de quatre sous-parties indépendantes.

a. Patrick Ronald, dirigeant de la *Blancoise du soda* que ses employés appelle par son diminutif Pat Ron, a décidé de faire réaliser une étude sur la ponctualité de ses salariés. Celle-ci lui a appris que si on appelle T la variable aléatoire égale au retard exprimé en minute sur l'horaire d'embauche d'un de ses employés, alors T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-10;15]$ où :

-10 correspond à une avance de 10 minutes sur l'horaire d'embauche.
15 correspond à un retard de 15 minutes sur l'horaire d'embauche.

1. Représenter sur le graphique ci-dessous la densité de probabilité de la loi uniforme suivie par T.



2. On rencontre un salarié au hasard qui vient d'arriver au boulot. Calculer la probabilité qu'il ait entre 5 et 10 minutes de retard.
3. On rencontre un salarié au hasard qui vient d'arriver au boulot. Calculer la probabilité qu'il ait au moins 2 minutes d'avance, c'est-à-dire que ce soit un bon salarié.
4. Calculer le retard moyen par employé.

b. Patrick Ronald s'intéresse à présent à la teneur en sucre de son principal produit : le *Cola Blancois*.
On appelle M la variable aléatoire égale à la masse de sucre exprimée en grammes contenue dans une canette de *Cola Blancois*.
Des études ont montré que cette variable aléatoire M suivait la loi normale de paramètres d'espérance $\mu=32$ grammes et d'écart-type $\sigma=1,7$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

On prélève au hasard une canette dans la production. Les probabilités demandées seront arrondies au millième près.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait moins de 30 grammes de sucres dans la canette.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait entre 31 et 34 grammes de sucre dans la canette.
3. Comme argument publicitaire, Patrick Ronald souhaite indiquer sur ses emballages de *Cola Blancois* :
   «80% de nos canettes contiennent moins de x grammes de sucre».
   Déterminer la plus petite valeur de x qu'il puisse choisir. On arrondira celle-ci au dixième de grammes près.

c. Patrick Ronald est furieux : l'un de ses plus gros clients vient de l'appeler pour lui apprendre que 98 des 697 canettes qu'il lui avait achetées n'avaient pas assez de bulles.
Séance tenante, Pat convoque le responsable de la production qui lui annonce qu'en moyenne, 11% des canettes n'ont pas assez de bulles.
Les valeurs données seront arrondies au millième près.

1. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de canettes n'ayant pas assez de bulles.
2. Patrick Ronald hésite : doit-il annoncer à son client qu'il s'agit là d'un défaut normal ou bien changer son responsable de production pour incompétence ?
   Au seuil de risque 5%, quelle décision conseillez-vous à Patrick ? On motivera sa recommandation.
3. Patrick Ronald souhaite avoir une estimation précise de cette proportion de canettes n'ayant pas assez de bulles. Pour ce faire, il doit constituer un échantillon de canettes à analyser
   Quelle devrait être la taille de cet échantillon pour obtenir un intervalle de confiance au niveau de 95% d'amplitude ou de longueur inférieure à 0,025 ?

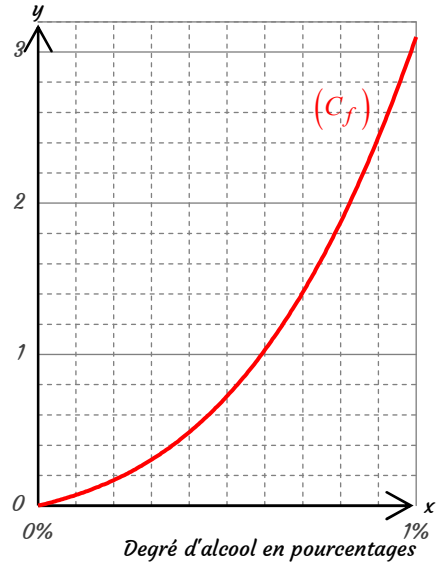
d. Un cri aussi aigu que désespéré déchire cette matinée si calme. Patrick Ronald vient d'apprendre de son service qualité qu'à cause de machines mal nettoyées, les canettes de *Cola Blancois* sont légèrement alcoolisées. Elles pourraient contenir jusqu'à 1% d'alcool.
On appelle X la variable aléatoire égale au degré d'alcool (pourcentage d'alcool) d'une canette de *Cola Blancois*. X prend ses valeurs entre 0 et 1 (pourcent d'alcool).
Des études ont montré que la loi de probabilité de X a pour densité de probabilité la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x) = 1,6x^3 + 0,9x^2 + 0,6x$$

Cette fonction f a été représentée sur le graphique ci-après.

1. Enoncer les trois critères qui font de la fonction f une densité de probabilité sur l'intervalle $[0;1]$.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. On prélève au hasard une canette dans la production. Calculer la probabilité que son degré d'alcool soit compris entre 0,5% et 1%.

Représenter cette probabilité sur le graphique ci-dessous.

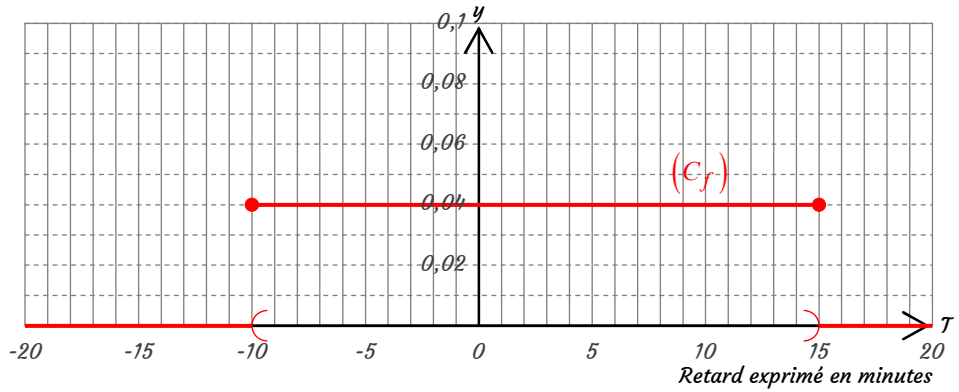


Le corrigé

a.1. La densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle $[-10;15]$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{15-(-10)} = \dfrac{1}{25} = 0,04 & \text{sur l'intervalle } [-10;15] \\ f(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

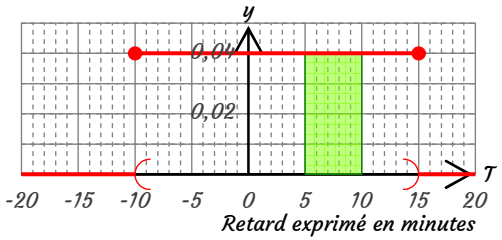
Sa courbe représentative est la suivante :



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

a.2. La probabilité que le salarié ait entre 5 et 10 minutes de retard est donnée par :

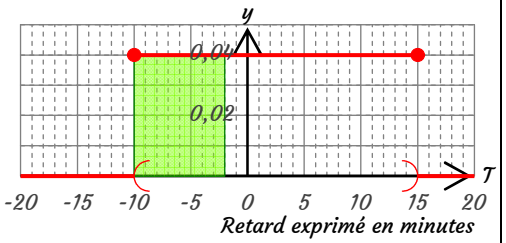
$$p\left(T \in [5;10]\right) = \frac{10-5}{15-(-10)} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0,2$$



a.3. La probabilité que le salarié ait au moins deux minutes d'avance est donnée par :

$$p(T \le -2) = p\left(T \in]-\infty;10[\right) + p\left(T \in [-10;-2]\right)$$

$$= 0 + \frac{-2-(-10)}{15-(-10)} = \frac{8}{25} = 0,32$$



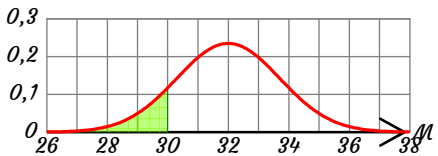
a.4. Le retard moyen par employé est égal à l'espérance mathématique de la variable *T*. Celle-ci suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[-10;15]$, cette espérance est donnée par :

$$E(T) = \frac{(-15)+10}{2} = -\frac{5}{2} = -2,5 \text{ minutes}$$

Conclusion : le retard moyen par employé est de 2 minutes et 30 secondes.

b.1. La probabilité que la masse *M* de sucre soit inférieure à 30 grammes est donnée par :

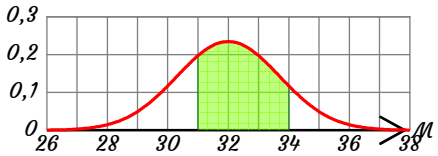
$$p\left(M \in]-\infty;30]\right) \approx 0,120$$



S'obtient avec la fonction de la calculatrice ***DistributionCumulativeNormale****(-1×10⁹⁹,30,μ,σ)*

b.2. La probabilité que la masse *M* de sucre soit comprise entre 31 et 34 grammes est donnée par :

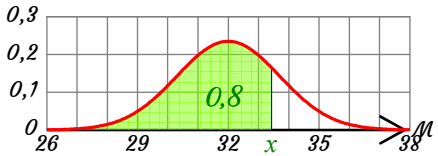
$$p\left(M \in [31;34]\right) \approx 0,602$$



S'obtient avec la fonction de la calculatrice ***DistributionCumulativeNormale****(31,34,μ,σ)*

b.3. Il s'agit de trouver la valeur de *x* telle que :

$$p(M \le x) = 0,8 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx 33,43 \text{ grammes}$$



S'obtient avec la fonction ***InversionNormale****(0.8,μ,σ)*

Conclusion : pour ne pas être pris en défaut, Pat Ron devra indiquer que 80% de ses canettes contiennent moins de 33,5 grammes de sucre.

c.1. La proportion supposée de canettes n'ayant pas assez de bulles est de $p = 0,11$.

Pour un échantillon de $n = 697$ canettes, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est donné par la formule :

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p \times (p-1)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p \times (p-1)}{n}}\right] = [0,086;0,134]$$

Cette formule est applicable car les trois conditions pré-requises sont remplies :

$n = 697 \ge 30$ **Ok!** $n \times p = 76,67 \ge 5$ **Ok!** $n \times (1-p) = 620,33 \ge 5$ **Ok!**

c.2. La fréquence de canettes n'ayant pas assez de bulles dans l'échantillon des 697 canettes du client est de $f = \frac{98}{697} \approx 0,141$

Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique précédent.
Au seuil de risque 5%, on peut donc considérer que le responsable de production n'a pas dit toute la vérité. Incompétence ou malveillance, son changement est souhaitable.

c.3. La longueur de l'intervalle de confiance au niveau de 95% est égale à $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

On souhaite que celle-ci soit inférieure à 0,025. Nous devons résoudre l'inéquation :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \le 0,025 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{0.025} \le \sqrt{n} \quad \xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Carré}} \quad n \ge 80^2 = 6400$$

Conclusion : pour obtenir l'intervalle de confiance au niveau de 95% qu'il vise, Patrick Ronald devra constituer un échantillon d'au moins 6400 canettes.

d.1. La fonction *f* est une densité sur l'intervalle $[0;1]$ car elle remplit trois conditions :

1. f est continue sur $[0;1]$
2. f est positive ou nulle sur $[0;1]$
3. $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

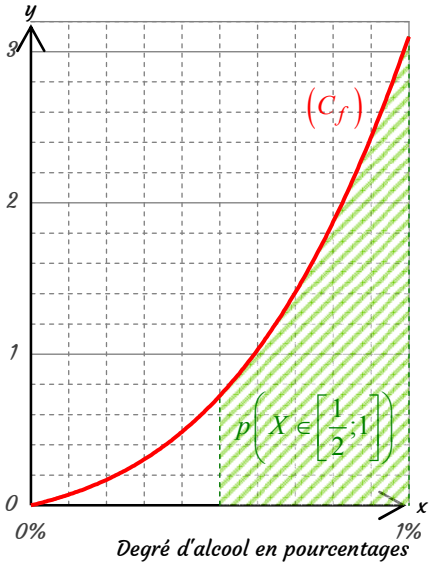
d.2. Une primitive de la fonction $f(x) = 1,6 \times x^3 + 0,9 \times x^2 + 0,6 \times x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

$$F(x) = 1,6 \times \frac{1}{4}x^4 + 0,9 \times \frac{1}{3}x^3 + 0,6 \times \frac{1}{2}x^2$$

$$= 0,4x^4 + 0,3x^3 + 0,3x^2$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

d.3. La probabilité que le degré d'alcool d'une canette soit compris entre 0,5% et 1% correspond à l'aire sous la courbe $\left(C_f\right)$ calculée sur l'intervalle $\left[0,5;1\right]$ représentée ci-dessous...



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Suites

Viens boire un p'tit coup à la maison !

L'énoncé

La Blancoise du π&Art exploite deux distributeurs automatiques de jus de raisin plus ou moins fermenté : l'un de raisin noir et l'autre de raisin blanc. On s'intéresse aux chiffres d'affaire hebdomadaire générés par ces deux distributeurs.

Commençons par le distributeur de jus de raisin noir.
La première semaine d'exploitation, la compagnie au nom si incompréhensible réalise un chiffre d'affaire de $u_0 = 6200€$.
Mais, chacune des semaines suivantes, ce chiffre d'affaire hebdomadaire baisse de 7% par rapport à celui de la semaine précédente.
On appelle u_n le chiffre d'affaire hebdomadaire réalisé par le distributeur de jus de raisin noir la $n+1$-ième semaine.

a. Dans les questions suivantes, nous étudions la suite (u_n).

1. Calculer les termes u_1 u_2 u_3
2. En déduire la nature de la suite (u_n). On précisera ses attributs.
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, le terme u_n en fonction de n.
4. Calculer le chiffre d'affaire réalisé par le distributeur de jus de raisin noir la 20ème semaine.
5. Donner la semaine à partir de laquelle le chiffre d'affaire hebdomadaire réalisé par le distributeur de jus de raisin noir passe sous la barre des 1000€.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

   En théorie, que peut-on en déduire quant au chiffre d'affaire hebdomadaire du distributeur de jus de raisin noir ?
7. Calculer le chiffre d'affaire total sur la période des 34 premières semaines.

Intéressons-nous au chiffre d'affaire hebdomadaire du distributeur de jus de raisin blanc.
La première semaine d'exploitation, la compagnie réalise sur celui-ci un chiffre d'affaire de $v_0 = 4000€$.
Les semaines suivantes, ce chiffre d'affaire hebdomadaire subit deux actions contraires :

- ✧ Primo, du fait du bon positionnement du distributeur, il augmente de 4% par rapport à celui de la semaine précédente.
- ✧ Secundo, le distributeur se trouvant dans un lycée, l'entreprise doit amputer ce résultat d'un loyer de 220€ chaque fin de semaine qu'elle reverse à... **Censuré**

On appelle v_n le chiffre d'affaire hebdomadaire réalisé sur le distributeur de jus de raisin blanc la $n+1$-ème semaine.

b. Dans les questions suivantes, nous étudions la suite (v_n).

1. Vérifier que $v_1 = 3940€$, puis calculer les termes v_2 et v_3.
2. Justifier que la suite (v_n) ne peut pas être géométrique.
3. Sans justification, compléter l'égalité suivante :

   Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \ldots\ldots \times v_n - \ldots\ldots$
4. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier par $a_n = v_n - 5500$.

   Calculer le premier terme a_0, puis compléter le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= v_{n+1} - \ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots \times v_n - \ldots\ldots - \ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots \times v_n - \ldots\ldots = \ldots\ldots \times (a_n + \ldots\ldots) - \ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots \times a_n + \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots \times a_n \end{aligned}$$

   En déduire l'expression de a_n, puis celle de v_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de la suite (v_n).

   Que peut-on en déduire quant au chiffre d'affaire hebdomadaire généré par le distributeur de jus de raisin blanc ?

c. On considère l'algorithme suivant :

```
n est un entier naturel et v un réel
n prend la valeur 0
v prend la valeur 4000
Tant que v > 0
    n prend la valeur n+1
    v prend la valeur 1,04×v−220
Fin du Tant que
En sortie, afficher la valeur de n
```

Expliquer ce que permet de déterminer cet algorithme et donner ce qu'il affiche en sortie.

d. Sur les 34 premières semaines d'exploitation, lequel des deux distributeurs de jus de raisin a le plus grand chiffre d'affaire total ? On justifiera sa réponse.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Le corrigé

a.1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - 7\% \text{ de } u_0 = \boxed{u_0} - 0,07\times\boxed{u_0} = \boxed{u_0}\times(1-0,07) = 0,93\times u_0 = \underline{5766€} \\ u_2 &= u_1 - 7\% \text{ de } u_1 = u_1 - 0,07\times u_1 = 0,93\times u_1 = \underline{5362,38€} \\ u_3 &= u_2 - 7\% \text{ de } u_2 = 0,93\times u_2 = \underline{4987,01€} \end{aligned}$$

a.2. De manière générale, on établit que, d'une semaine n sur la suivante $n+1$, on a :

$$u_{n+1} = u_n - 7\% \text{ de } u_n = \boxed{u_n} - 0,07\times\boxed{u_n} = \boxed{u_n}\times(1-0,07) = \underline{0,93\times u_n}$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,93$ et de premier terme $u_0 = 6200€$.

a.3. D'après un résultat du cours, pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_n = u_0\times q^n = \underline{6200\times 0,93^n}$$

a.4. Le chiffre d'affaire réalisé la vingtième semaine par le distributeur de jus de raisin est donné par :

$$u_{19} = 6200\times 0,93^{19} \approx \underline{1561,59€}$$

a.5. D'après le tableau de valeurs de la calculatrice, on observe que la suite (u_n) qui est décroissante, passe sous la barre de 1000€ entre les termes $u_{25} \approx 1010,3$ et $u_{26} \approx 939,6$.
Le chiffre d'affaire hebdomadaire du distributeur de jus de raisin noir devient inférieur à 1000€ la vingt-septième semaine.

a.6. La limite de la suite (u_n) est donnée par :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 6200\times\boxed{0,93^n} = 6200\times 0^+ = \underline{0^+}$$

Le chiffre d'affaire hebdomadaire du distributeur de jus de raisin noir va devenir de plus en plus petit mais il ne sera jamais nul.

a.7. Le chiffre d'affaire total réalisé sur les 34 premières semaines par le distributeur de jus de raisin noir est donné par :

$$\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{33}}_{\text{Somme de } \boxed{34} \text{ termes consécutifs d'une suite géométrique}} = u_0\times\frac{1-0,93^{\boxed{34}}}{1-0,93} = 6200\times\frac{1-0,93^{34}}{0,07} \approx \underline{81060,15€}$$

b.1. Intéressons-nous aux quatre premiers termes de la suite (v_n).

$$\begin{aligned} v_1 &= \underbrace{v_0 + 4\% \text{ de } v_0}_{\text{Augmentation de 4\%}} - \underbrace{220}_{\text{Loyer}} \\ &= \boxed{v_0} + 0,04\times\boxed{v_0} - 220 = \boxed{v_0}\times(1+0,04) - 220 = 1,04\times v_0 - 220 = \underline{3940€} \\ v_2 &= \underbrace{v_1 + 4\% \text{ de } v_1}_{\text{Augmentation de 4\%}} - \underbrace{220}_{\text{Loyer}} = 1,04\times v_1 - 220 = \underline{3877,60€} \\ v_3 &= \underbrace{1,04\times v_2}_{\text{Augmentation de 4\%}} - \underbrace{220}_{\text{Loyer}} \approx \underline{3812,70€} \end{aligned}$$

b.2. En effectuant les quotients de deux termes consécutifs sur les quatre premiers termes, on établit :

v_0	$\xrightarrow{\times 0,985}$	v_1	$\xrightarrow{\approx\times 0,984}$	v_2	$\xrightarrow{\approx\times 0,983}$	v_3
4000		3940		3877,6		3812,704

La «raison» n'étant pas constante, la suite (v_n) ne peut pas être géométrique.

b.3. De manière générale, on établit que, d'une semaine n sur la suivante $n+1$, on a :

$$v_{n+1} = \underbrace{v_n + 4\% \text{ de } v_n}_{\text{Augmentation de 4\%}} - \underbrace{220}_{\text{Loyer}} = v_n + 0,04\times v_n - 220 = \underline{1,04\times v_n - 220}$$

b.4. Le premier terme de la suite auxiliaire (a_n) est donné par :

$$a_0 = v_0 - 5500 = 4000 - 5500 = \underline{-1500}$$

Ensuite, pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \underbrace{v_{n+1}} - 5500 \\ &= \underbrace{1,04\times v_n - 220}_{v_{n+1}} - 5500 \\ &= 1,04\times \underbrace{v_n} - 5720 \\ &= 1,04\times\underbrace{(a_n + 5500)}_{v_n} - 5720 = 1,04\times a_n + \cancel{5720} - \cancel{5720} = 1,04\times a_n \end{aligned}$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $a_0 = -1500$.
Nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_n = a_0\times q^n = \underline{-1500\times 1,04^n} \quad\Rightarrow\quad v_n = a_n + 5500 = \underline{5500 - 1500\times 1,04^n}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

b.5. La limite de la suite (v_n) est donnée par :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 5500-1500\times\boxed{1,04^n} = 5500-1500\times(+\infty) = 5500-\infty = -\infty$$

Il vient un moment où les termes de la suite décroissante (v_n) sont tous négatifs. Or, un chiffre d'affaire ne peut être négatif. Par conséquent, le modèle induit par la suite (v_n) devient inopérant à partir de ce moment.

c. Exécutons les premiers pas de cet algorithme.

$n=0 \quad v=4000$

Comme $v=4000>0$, on effectue la boucle

$n=n+1=1$

$v=1,04\times v-220=3940 = v_1$

Comme $v=3940>0$, on effectue la boucle

$n=n+1=2$

$v=1,04\times v-220=3877,6 = v_2$

Comme $v=3877,6>0$, on effectue la boucle

$n=n+1=3$

$v=1,04\times v-220=3812,704 = v_3$

…

On sort de la boucle lorsque les termes v_n deviennent négatifs

On affiche le rang n

L'algorithme proposé détermine le rang à partir duquel les termes de la suite (v_n) deviennent négatifs.

En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice ou en calculant successivement tous les termes $\left(4000 \quad \boxed{\text{Exe}} \quad 1.04\times\text{Ans}-220 \quad \boxed{\text{Exe}} \quad \boxed{\text{Exe}} \quad \ldots\right)$, on trouve que les termes de la suite (v_n) deviennent négatifs lorsque $n\geq 34$.

Conclusion : l'algorithme retourne 34.

d. Depuis la question **a.7**, nous savons que le distributeur de jus de raisin noir génère un chiffre d'affaire total de $81060,15€$ sur les 34 premières semaines.

Le chiffre d'affaire total réalisé par le distributeur de jus de raisin blanc est donné par :

$$\begin{aligned}
v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{33} &= \underbrace{5500-1500\times 1}_{v_0}+\underbrace{5500-1500\times 1,04}_{v_1}+\underbrace{5500-1500\times 1,04^2}_{v_2} \\
&\quad +\ldots\ldots+\underbrace{5500-1500\times 1,04^{33}}_{v_{33}} \\
&= 34\times 5500-1500\times \underbrace{\left[1+1,04+1,04^2+\ldots+1,04^{33}\right]}_{\text{Somme de 34 puissances consécutives de 1,04}} \\
&= 187000-1500\times\frac{1-1,04^{34}}{1-1,04} \approx 82213,14€
\end{aligned}$$

Conclusion : sur les 34 première semaines, c'est le distributeur de jus de raisin blanc qui génère le plus gros chiffre d'affaire.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Petites questions d'argent

L'énoncé

Monsieur Terry Bak, biologiste de son état, vient d'inventer et de breveter un procédé permettant de produire un nouveau plastique à partir de plantes.
Ne disposant pas de partenaires, il décide de vendre une licence d'exploitation à un industriel qui lui propose deux options de rémunérations hebdomadaires.
Dans la première option, Monsieur Bak toucherait 100€ la première semaine d'exploitation du brevet. Puis, chacune des semaines suivantes, cette rémunération hebdomadaire serait augmentée de 6% par rapport à la rémunération de la semaine précédente.
Dans la seconde option, Monsieur Bak toucherait toujours 100€ la première semaine d'exploitation du brevet. Mais, chacune des semaines suivantes, cette rémunération hebdomadaire subirait deux augmentations successives : d'abord une augmentation de 3% par rapport à la rémunération de la semaine précédente; puis une augmentation fixe de 7€.
On appelle a_n et b_n les rémunérations hebdomadaires versées respectivement dans les cadres des première et seconde options de rémunération lors de la semaine $n+1$ d'exploitation du brevet.
Dans les deux cas, la première semaine, nous avons :

$$\overbrace{a_0 = 100€}^{\text{Première option}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{b_0 = 100€}^{\text{Seconde option}}$$

a. On s'intéresse à la première option de rémunération. Nous étudions la suite (a_n).

1. Calculer les termes a_1 a_2 a_3
2. En déduire la nature de la suite (a_n). On précisera ses attributs.
3. En déduire l'expression du terme a_n en fonction de l'entier naturel n.
4. Calculer la rémunération hebdomadaire perçue la 15ème semaine d'exploitation du brevet dans le cadre de la première option.
5. A partir de quelle semaine, la rémunération hebdomadaire versée dans le cadre de la première option dépasse-t-elle les 500€ pour la première fois ?
6. Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   Que peut-on en déduire quant à la rémunération hebdomadaire dans le cadre de la première option ?

b. On s'intéresse à la seconde option de rémunération. On étudie la suite (b_n).

1. Calculer les termes b_1 b_2 et vérifier que $b_3 \approx 131€$.
2. La suite (b_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? On justifiera sa réponse.
3. Compléter l'égalité suivante :
   Pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = \ldots\ldots \times b_n + \ldots\ldots$
4. On appelle (u_n) la suite définie pour tout entier par $u_n = b_n + \dfrac{700}{3}$.
   Calculer le premier terme u_0, puis compléter le raisonnement très parcellaire suivant :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= b_{n+1} + \ldots\ldots = \ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots \times b_n + \ldots\ldots = \ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots \times u_n \end{aligned}$$
5. En déduire la nature de la suite (u_n). On précisera ses attributs
6. En déduire les expressions de u_n, puis celle de b_n en fonction de n.
7. Déterminer la limite de la suite (b_n).
   Que peut-on en déduire quant à la rémunération hebdomadaire dans le cadre de la seconde option ?

c. On considère l'algorithme suivant :

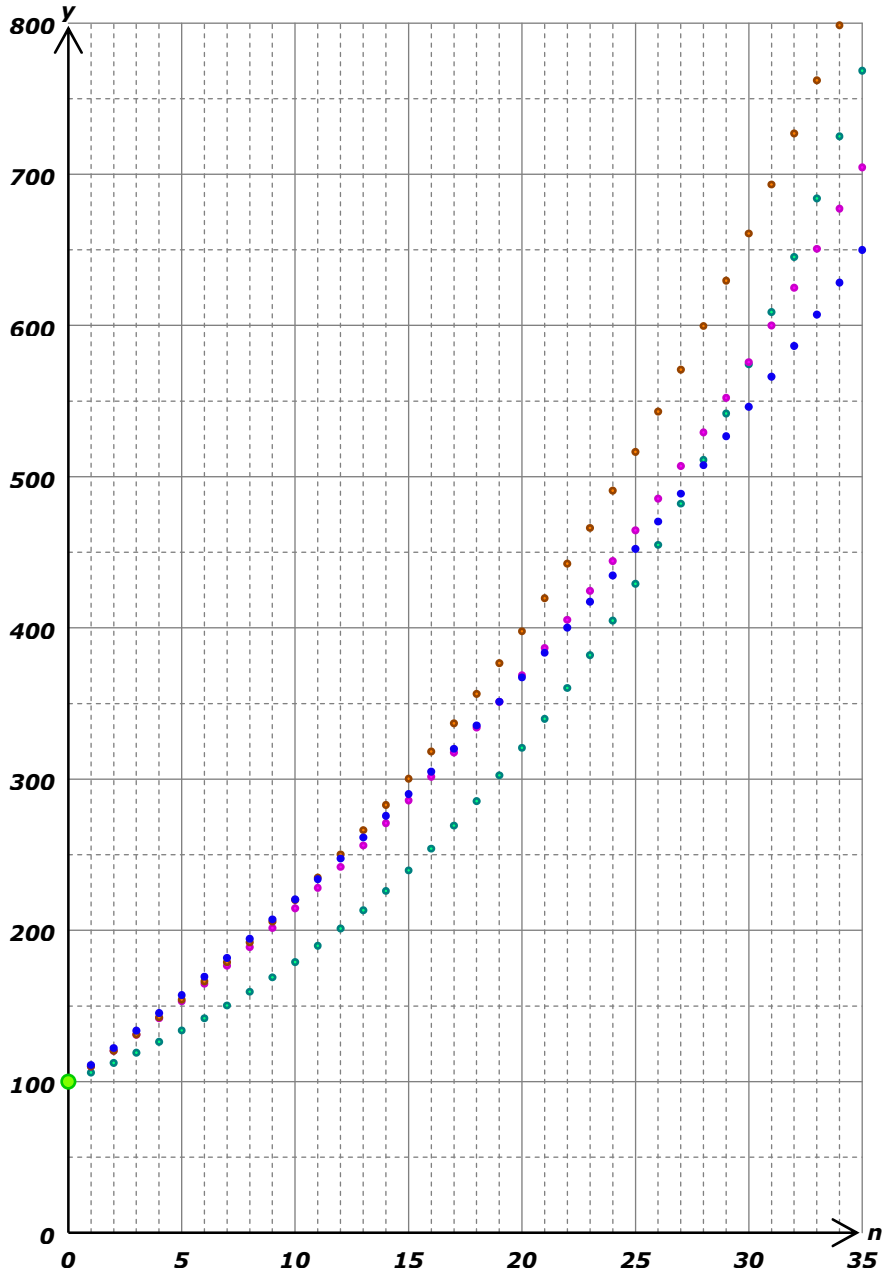
```
n est un entier naturel, a et b sont deux réels
n prend la valeur 0
a et b prennent tous deux la valeur 100
Tant que a ≤ b
    a prend la valeur 1,06 × a
    b prend la valeur 1,03 × b + 7
    n prend la valeur n + 1
Fin du Tant que
En sortie, afficher la valeur de n
```

Expliquer ce que permet de déterminer cet algorithme et donner ce qu'il affiche en sortie.

d. Sur le graphique ci-après, on a représenté quatre suites de points. Deux d'entre elles représentent les suites (a_n) et (b_n). Les identifier. Aucune justification n'est demandée.

e. Sur une année complète, c'est-à-dire sur 52 semaines, laquelle des deux options de rémunération est la plus intéressante pour Monsieur Bak ? On justifiera sa réponse.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.



Le corrigé

a.1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (a_n).

$$a_1 = a_0 + 6\% \text{ de } a_0 = \boxed{a_0} + 0,06 \times \boxed{a_0} = \boxed{a_0} \times (1+0,06) = 1,06 \times a_0 = \underline{106€}$$
$$a_2 = a_1 + 6\% \text{ de } a_1 = 1,06 \times a_1 = \underline{112,36€}$$
$$a_3 = a_2 + 6\% \text{ de } a_2 = 1,06 \times a_2 = \underline{119,1016€}$$

a.2. De manière générale, on établit que, d'une semaine n sur la suivante $n+1$, on a :

$$a_{n+1} = a_n + 6\% \text{ de } a_n = \boxed{a_n} + 0,06 \times \boxed{a_n} = \underline{1,06 \times \boxed{a_n}}$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q = 1,06$ et de premier terme $a_0 = 100€$.

a.3. Nous en déduisons que pour tour entier naturel n, nous avons :

$$a_n = a_0 \times q^n = \underline{100 \times 1,06^n}$$

a.4. La rémunération hebdomadaire perçue la 15ème semaine d'exploitation du brevet dans le cadre de la première option est donnée par :

$$a_{14} = 100 \times 1,06^{14} \approx \underline{226,09€}$$

a.5. D'après le tableau de valeurs de la calculatrice, la suite croissante (a_n) devient définitivement supérieure à 500 à partir de $n = 28$.
La rémunération hebdomadaire versée dans le cadre de la première option dépasse les 500€ pour la première fois lors de la 29ème semaine.

a.6. La limite de la suite (a_n) est donnée par :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 100 \times \boxed{1,06^n} = 100 \times (+\infty) = \underline{+\infty}$$

Au fil des semaines, la rémunération hebdomadaire dans le cadre de la première option deviendra de plus en plus grande sans aucun plafond.

b.1. Intéressons-nous aux quatre premiers termes de la suite (b_n).

$$b_1 = \underbrace{b_0 + 3\% \text{ de } b_0}_{\text{Augmentation de 3\%}} + \underbrace{7}_{\text{Augmentation fixe}} = \boxed{b_0} + 0,03 \times \boxed{b_0} + 7 = 1,03 \times \boxed{b_0} + 7 = \underline{110€}$$
$$b_2 = \underbrace{b_1 + 3\% \text{ de } b_1}_{\text{Augmentation de 3\%}} + \underbrace{7}_{\text{Augmentation fixe}} = 1,03 \times b_1 + 7 = \underline{120,30€}$$
$$b_3 = \underbrace{b_2 + 3\% \text{ de } b_2}_{\text{Augmentation de 3\%}} + \underbrace{7}_{\text{Augmentation fixe}} = 1,03 \times b_2 + 7 = \underline{130,909€}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

b.2. Examinons les premiers termes de la suite (b_n) :

$$\boxed{b_0 \; 100} \xrightarrow[\times 1{,}1]{+10} \boxed{b_1 \; 110} \xrightarrow[\approx\times 1{,}094]{+10{,}3} \boxed{b_2 \; 120{,}3} \xrightarrow[\approx\times 1{,}088]{+10{,}609} \boxed{b_3 \; 130{,}909}$$

Ses «raisons» n'étant pas constantes sur ses quatre premiers termes, la suite (b_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

b.3. En s'inspirant de la question **b.1**, nous établissons que pour tout entier naturel n :

$$b_{n+1} = \underbrace{b_n + 3\% \text{ de } b_n}_{\text{Augmentation de 3\%}} + \underbrace{7}_{\text{Augmentation fixe}} = \boxed{1{,}03 \times b_n + 7}$$

b.4. Le premier terme de la suite auxiliaire (u_n) est donné par :

$$u_0 = b_0 + \frac{700}{3} = \frac{300}{3} + \frac{700}{3} = \boxed{\frac{1000}{3}}$$

Ensuite, pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_{n+1} = b_{n+1} + \frac{700}{3}$$

$$= 1{,}03 \times b_n + 7 + \frac{700}{3} = 1{,}03 \times b_{n+1} + \frac{21}{3} + \frac{700}{3}$$

$$= 1{,}03 \times b_n + \frac{721}{3}$$

$$= 1{,}03 \times \left(u_n - \frac{700}{3}\right) + \frac{721}{3} = 1{,}03 \times u_n - \cancel{\frac{721}{3}} + \cancel{\frac{721}{3}} = 1{,}03 \times u_n$$

b.5. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $u_0 = \frac{1500}{3}$.

b.6. Nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_n = u_0 \times q^n = \boxed{\frac{1000}{3} \times 1{,}03^n} \quad \Rightarrow \quad b_n = u_n - \frac{700}{3} = \boxed{\frac{1000}{3} \times 1{,}03^n - \frac{700}{3}}$$

b.7. La limite de la suite (b_n) est donnée par :

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1000}{3} \times \boxed{1{,}03^n} - \frac{700}{3} = \frac{1000}{3} \times (+\infty) - \frac{700}{3} = (+\infty) - \frac{700}{3} = \boxed{+\infty}$$

Au fil des semaines, la rémunération hebdomadaire dans le cadre de la seconde option deviendra de plus en plus grande sans aucun plafond.

c. Exécutons les premiers pas de cet algorithme.

$n = 0 \quad a = 100 \quad b = 100$

Comme $a = 100 \leq b = 100$, on effectue la boucle

$a = 1{,}06 \times a = 106 = a_1$

$b = 1{,}03 \times b + 7 = 110 = b_1$

$n = n + 1 = 1$

Comme $a = 106 \leq b = 110$, on effectue la boucle

$a = 1{,}06 \times a = 112{,}36 = a_2$

$b = 1{,}03 \times b + 7 = 120{,}3 = b_2$

$n = n + 1 = 2$

…

On sort de la boucle lorsque le terme a_n devient supérieur au terme b_n

On affiche le rang n

Cet algorithme affiche la plus petite valeur de n pour laquelle on a $a_n > b_n$.

Connaissant les expressions des suites (a_n) et (b_n), on détermine à l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice que l'algorithme affiche pour valeur 31.

La rémunération hebdomadaire perçue dans le cadre de la première option devient plus grande que celle perçue dans le cadre de la seconde option lors de la 32ème semaine.

d. A l'occasion de la question **a.4**, nous avions calculé le terme $a_{14} \approx 226{,}09$.

Sur le graphique, seule la suite de points en vert-émeraude présente ce caractère. La suite de points vert-émeraude représente la suite (a_n).

Pour savoir laquelle des trois autres suites de points représente la suite (b_n), nous allons calculer un terme où les trois suites de points sont éloignées. Par exemple :

$$b_{30} = \frac{1000}{3} \times 1{,}03^{30} - \frac{700}{3} \approx \boxed{575{,}75}$$

Seule la suite de points fuchsia satisfait à cette condition. Elle représente la suite (b_n).

e. Dans le cadre de la première option de rémunération, Monsieur Bak toucherait au total sur une année :

$$\underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{51}}_{\text{Somme de } \boxed{52} \text{ termes consécutifs d'une suite géométrique}} = a_0 \times \frac{1 - 1{,}06^{\boxed{52}}}{1 - 1{,}06} = 100 \times \frac{1 - 1{,}06^{52}}{-0{,}06} \approx \boxed{32828{,}14€}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Dans le cadre de la seconde option de rémunération, le biologiste toucherait au total sur une année :

$$b_0+b_1+b_2+\ldots+b_{51}=\underbrace{\frac{1000}{3}\times 1-\frac{700}{3}}_{b_0}+\underbrace{\frac{1000}{3}\times 1,03-\frac{700}{3}}_{b_1}+\underbrace{\frac{1000}{3}\times 1,03^2-\frac{700}{3}}_{b_2}+\ldots$$

$$\ldots+\underbrace{\frac{1000}{3}\times 1,03^{51}-\frac{700}{3}}_{b_{51}}$$

$$=\frac{1000}{3}\times\underbrace{\left[1+1,03+1,03^2+\ldots+1,03^{51}\right]}_{\text{Somme de } \boxed{52} \text{ premières puissances consécutives de 1,04}}-52\times\frac{700}{3}$$

$$=\frac{1000}{3}\times\frac{1-1,03^{\boxed{52}}}{1-1,03}-\frac{36400}{3}\approx \underline{28432,07€}$$

<u>Conclusion :</u> sur une année complète, la première option de rémunération est la plus intéressante.

L'étang sont durs

L'énoncé

Toto possède un étang qui, au premier matin de l'été, contient 3000 mètres cubes d'eau. Mais, l'été est beau et chaque jour de celui-ci, l'étang perd 12% de son volume d'eau du fait de l'évaporation due au soleil resplendissant, à la chaleur accablante et à l'aridité ambiante. Pour compenser cette perte d'eau, Toto a été autorisé par décision préfectorale à rajouter chaque soir dans son étang exactement 240 mètres cubes d'eau qu'il puise dans la rivière longeant son étang.

On appelle v_n le volume d'eau exprimé en mètres cubes contenu dans l'étang au soir du jour n de l'été après le rajout quotidien de $240\ \text{m}^3$ autorisé par la préfecture.

Pour note, le volume initial d'eau est de $v_0=3000\ \text{m}^3$.

a. Calculer les termes v_1 et v_2, puis vérifier que v_3 est «proche» de 2680 mètres cubes.

Sans justifications, compléter, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante :

$$v_{n+1}=\ldots\ldots\times v_n+\ldots\ldots$$

b. On appelle (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$a_n=v_n-2000$$

1. Calculer le terme a_0.
2. Démontrer que la suite (a_n) est géométrique. On précisera sa raison.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, nous avons $v_n=1000\times 0,88^n+2000$
4. Déterminer la limite de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

   Toto craint que son étang soit totalement asséché à la fin de l'été. Ses craintes sont-elles fondées ? On justifiera sa réponse.

c. On considère l'algorithme suivant :

```
n est un entier naturel et v un réel
n prend la valeur 0
v prend la valeur 3000
Tant que v > 2200
    n prend la valeur n+1
    v prend la valeur 0,88×v+240
Fin du Tant que
En sortie, afficher la valeur de n
```

Que permet de faire cet algorithme ? Quelle est la valeur de n affichée à son issue ?

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Le corrigé

a. Calculons les premiers termes de la suite.

$$v_1 = v_0 - \overbrace{12\% \text{ de } v_0}^{\text{Evaporation}} + \overbrace{240}^{\text{Rajout}}$$
$$= \boxed{v_0} - 0{,}12 \times \boxed{v_0} + 240 = \boxed{v_0} \times (1 - 0{,}12) + 240 = 0{,}88 \times v_0 + 240 = \underline{2880 \text{ m}^3}$$

$$v_2 = v_1 - \overbrace{12\% \text{ de } v_1}^{\text{Evaporation}} + \overbrace{240}^{\text{Rajout}} = 0{,}88 \times v_1 + 240 = \underline{2774{,}4 \text{ m}^3}$$

$$v_3 = v_2 - \overbrace{12\% \text{ de } v_2}^{\text{Evaporation}} + \overbrace{240}^{\text{Rajout}} = 0{,}88 \times v_2 + 240 = \underline{2681{,}472 \text{ m}^3}$$

De manière générale, nous pouvons écrire que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$v_{n+1} = v_n - \overbrace{12\% \text{ de } v_n}^{\text{Evaporation}} + \overbrace{240}^{\text{Rajout}} = \boxed{v_n} - 0{,}12 \times \boxed{v_n} + 240 = \underline{0{,}88 \times \boxed{v_n} + 240}$$

b.1. Calculons le premier terme de la suite annexe (a_n).

$$a_0 = 3000 - 2000 = \underline{1000}$$

b.2. Pour entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$a_{n+1} = \underbrace{v_{n+1}} - 2000$$
$$= \underbrace{0{,}88 \times v_n + 240} - 2000$$
$$= 0{,}88 \times v_n - 1760$$
$$= 0{,}88 \times (a_n + 2000) - 1760 = 0{,}88 \times a_n + \cancel{1760} - \cancel{1760} = \underline{0{,}88 \times a_n}$$

Donc la suite annexe (a_n) est géométrique de raison $q = 0{,}88$.

b.3. La suite (a_n) étant géométrique de raison $q = 0{,}88$ et de premier terme $a_0 = 1000$, nous avons pour tout entier naturel n :

$$a_n = a_0 \times q^n = \underline{1000 \times 0{,}88^n}$$

Il vient alors :

$$a_n = v_n - 2000 \quad \Leftrightarrow \quad v_n = a_n + 2000 = \underline{1000 \times 0{,}88^n + 2000}$$

b.4. La limite de la suite (v_n) est donnée par :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} 1000 \times \boxed{0{,}88^n} + 2000 = 1000 \times 0^+ + 2000 = 0^+ + 2000 = \underline{2000}$$

La limite précédente est très claire : le volume d'eau de l'étang va tendre vers 2000 mètres cubes. Par conséquent, l'étang sera loin d'être asséché à la fin de l'été. Les craintes de Toto sont infondées.

c. Exécutons cet algorithme !

$n = 0 \quad v = 3000$

Comme $v = 3000 > 2000$, on effectue la boucle

$n = n + 1 = 1$

$v = 0{,}88 \times v + 240 = 2880 = v_1$

Comme $v = 2880 > 2000$, on effectue la boucle

$n = n + 1 = 2$

$v = 0{,}88 \times v + 240 = 2774{,}4 = v_2$

Comme $v = 2774{,}4 > 2000$, on effectue la boucle

$n = n + 1 = 3$

$v = 0{,}88 \times v + 240 = 2681{,}472 = v_3$

…

On sort de la boucle lorsque le terme v_n devient inférieur ou égal à 2200

On affiche le rang n

L'algorithme affiche le numéro du jour à partir duquel le volume d'eau v_n de l'étang devient inférieur à 2200 mètres cubes.
En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, on détermine que l'algorithme retourne $n = 13$ et donc, c'est au soir du treizième jour que le volume d'eau de l'étang passera sous la barre des 2200 mètres cubes.

Et l'année prochaine, ce sera vachement plus pire !

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

A retenir

Des signes qui ne trompent pas

Le signe du facteur affine $ax+b$ dépend du signe de son coefficient directeur a.

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		Signe contraire de a	0	Signe de a	

Le signe de $f(x)=ax^2+bx+c$, forme du second degré, dépend du signe de son discriminant $\Delta=b^2-4\times a\times c$.

⇨ Si $\Delta>0$, alors $f(x)$ a deux racines $x_i=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ et :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a	

⇨ Si $\Delta=0$, alors $f(x)$ a une seule racine $x_1=-\dfrac{b}{2a}$ et :

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

⇨ Si $\Delta<0$, alors $f(x)$ n'a pas de racine et :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

Une exponentielle est toujours strictement positive.

Le signe de $\ln(t)$ dépend de la position de t envers 1 :

t	0		1		$+\infty$
$\ln(t)$		$-$	0	$+$	

Exponentielle et logarithme

L'exponentielle e^x est la seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est sa propre dérivée et telle que $e^0=1$.

La fonction e^x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

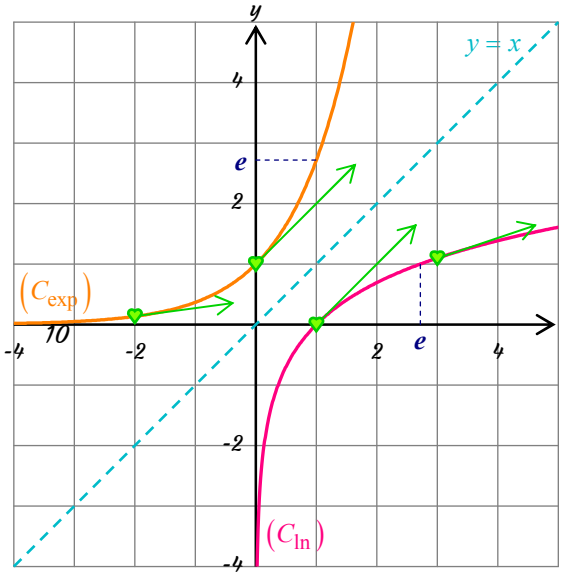
Le logarithme népérien est la primitive définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de $\dfrac{1}{x}$ telle que $\ln(1)=0$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Exp et ln sont les réciproques l'une de l'autre.

$$\underbrace{e^{\ln(x)}=x}_{x\text{ quelconque}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\ln\left(e^x\right)=x}_{x\text{ positif}}$$

Leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$ (appelée «première bissectrice du plan»).



$e^{-1}=1/e \quad e^0=1 \quad e^1=e\approx 2,718 \quad \ln(1)=0 \quad \ln(e)=1$

Exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, ln est concave sur $]0;+\infty[$.

Exp et ln ont des propriétés algébriques symétriques.

a et b quelconques		a et b positifs
$e^a\times e^b=e^{a+b}$	⇄	$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$
$e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$	⇄	$\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$
$\dfrac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$	⇄	$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
$\left(e^a\right)^n=e^{n\times a}$	⇄	$\ln\left(a^n\right)=n\times\ln(a)$
$\sqrt{e^a}=e^{a/2}$	⇄	$\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\times\ln(a)$

Formules de dérivation

u et v sont deux fonctions dérivables, λ est un réel.

$$(u+v)'=u'+v' \qquad (\lambda u)'=\lambda\times u'$$

$$(u\times v)'=u'\times v+v'\times u \qquad \left(u^n\right)'=n\times u'\times u^{n-1}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \qquad \left(e^u\right)'=u'\times e^u$$

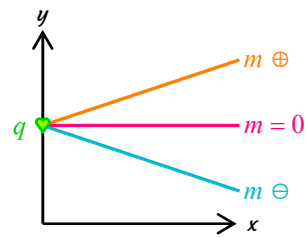
Dérivées et primitives usuelles

0	⇄ Primitive / Dérivée	$Cste$	⇄ Primitive / Dérivée	$Cste\times x$
1	⇄ Primitive / Dérivée	x	⇄ Primitive / Dérivée	$\frac{1}{2}x^2$
$2x$	⇄ Primitive / Dérivée	x^2	⇄ Primitive / Dérivée	$\frac{1}{3}x^3$
$n\times x^{n-1}$	⇄ Primitive / Dérivée	x^n	⇄ Primitive / Dérivée	$\frac{1}{n+1}\times x^{n+1}$
$\frac{2}{\sqrt{x}}$	⇄ Primitive / Dérivée	$\sqrt{x}$	⇄ Primitive / Dérivée	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$-\frac{1}{x^2}$	⇄ Primitive / Dérivée	$\frac{1}{x}$	⇄ Primitive / Dérivée	$\ln(x)$
$a\times e^{ax}$	⇄ Primitive / Dérivée	e^{ax}	⇄ Primitive / Dérivée	$\frac{1}{a}\times e^{ax}$

Tangente, variations et convexité

$\mathcal{D}$ est la droite d'équation réduite $y=mx+p$

L'orientation de $\mathcal{D}$ dépend du signe du coefficient directeur $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



$\mathcal{D}$ franchit l'axe des ordonnées au point d'ordonnée q qui est l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

L'équation réduite de la tangente à la courbe (C_f) en son point $A(a;f(a))$ est $y=f'(a)\times(x-a)+f(a)$

Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction.

$$\overbrace{f'\oplus \Rightarrow f\nearrow \quad \underline{\text{et}} \quad f'\ominus \Rightarrow f\searrow}^{\text{Dérivée éventuellement nulle en quelques points....}}$$

f est convexe si (C_f) est au-dessus de chaque tangente.

f est concave si (C_f) est au-dessous de chaque tangente.

Le signe de la dérivée seconde donne cette «concavexité».

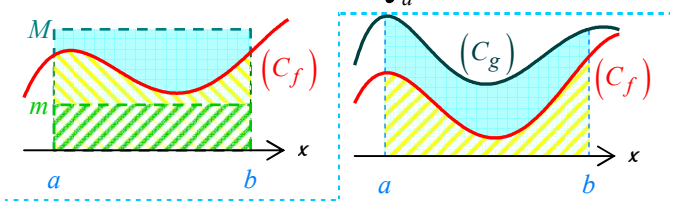
$$\overbrace{f''\oplus \Rightarrow f \text{ convexe} \quad \underline{\text{et}} \quad f''\ominus \Rightarrow f \text{ concave}}^{\text{Dérivée seconde éventuellement nulle en quelques points....}}$$

Un point d'inflexion est une valeur de a où la courbe (C_f) traverse sa tangente T_a. La dérivée seconde f'' change alors de signe en a.

Sur une aire d'intégrale

Théorème de l'inégalité de la moyenne :

$$\overbrace{m\le f(x)\le M}^{\text{sur } [a;b]} \Rightarrow \overbrace{m\times(b-a)}^{\text{Petit rectangle } m}\le\int_a^b f(x)dx\le \overbrace{M\times(b-a)}^{\text{Grand rectangle } M}$$



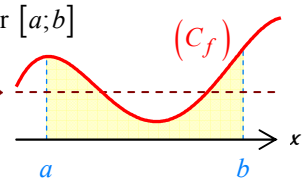
Intégration d'une inégalité entre deux fonctions :

$$\overbrace{f(x)\le g(x)}^{\text{sur } [a;b]} \Rightarrow \overbrace{\int_a^b f(x)dx}^{\text{Aire sous } (C_f)} \le \overbrace{\int_a^b g(x)dx}^{\text{Aire sous } (C_g)}$$

Aire entre (C_f) et $(C_g)=\int_a^b (g-f)=\int_a^b g-\int_a^b f$

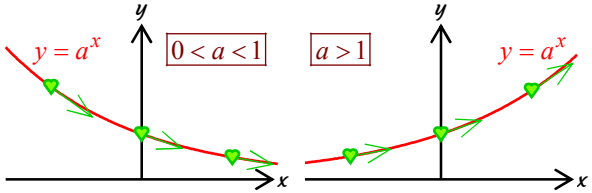
Valeur moyenne de f sur $[a;b]$

$$\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)dx \rightarrow$$



Exponentielle de base a (a réel positif)

La fonction $f(x)=a^x=e^{x\times\ln(a)}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.



Suites arithmétiques et géométriques

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si...

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \ \dots\ u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

⇨ Différence de deux termes consécutifs $u_{n+1}-u_n$ toujours constant et égale à la raison r.

⇨ Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1}=u_n+r \qquad u_n=u_0+n\times r \qquad u_n=u_1+(n-1)\times r$$

⇨ Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$u_n+u_{n+1}+\dots+u_p=\text{Nombre de termes}\times\frac{u_n+u_p}{2}$$

Une suite (u_n) est géométrique de raison q si...

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \ \dots\ u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

⇨ Quotient de deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ constant.

⇨ Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1}=u_n\times q \qquad u_n=u_0\times q^n \qquad u_n=u_1\times q^{n-1}$$

⇨ Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\underbrace{u_0+u_1+\dots+u_n}_{n+1 \text{ termes}}=u_0\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

La limite de la suite q^n dépend de la valeur de q :

$$\overbrace{\lim_{n\to+\infty} q^n=0^+}^{\text{Si } q\in]0;1[} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty}^{\text{Si } q>1}$$

Probabilités

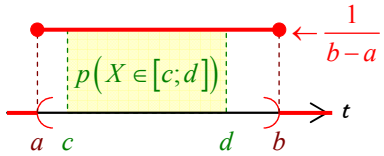
Conditionnelle : $p_B(A)=p(A \text{ sachant } B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$

X suit la loi uniformément distribuée sur $[a;b]$.

Sa densité ↘

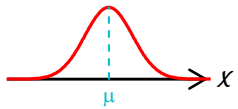
$$p(X\in[c;d])=\frac{d-c}{b-a}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$



X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.

Sa densité est une courbe en cloche symétrique par rapport à μ.



$$p(X\in[\mu-\sigma;\mu+\sigma])\approx 0{,}683$$
$$p(X\in[\mu-2\times\sigma;\mu+2\times\sigma])\approx 0{,}954$$
$$p(X\in[\mu-3\times\sigma;\mu+3\times\sigma])\approx 0{,}997$$

Une population présente un caractère avec une proportion p. Ce caractère est observé sur un échantillon de taille n avec une fréquence égale à f

⇨ Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% :

$$\left[p-1{,}96\times\sqrt{\frac{p\times(1-p)}{n}};p+1{,}96\times\sqrt{\frac{p\times(1-p)}{n}}\right]$$

⇨ Intervalle de confiance au seuil de 95% :

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

⇨ Largeur ou amplitude de l'intervalle de confiance : $\frac{2}{\sqrt{n}}$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.

Sommaire du rodéo :

Analyse 1
Les primitives s'en vont en paire. 1
Ce qu'on vexe et ce qu'on cave 1
A faire une famille 2
Quotient, exponentielle et tangente 4
Fonction affino-exponentielle 5
Quand un polynôme se finit en ln... 8
La bonne réponse... 11
Quand un autre polynôme se finit en ln... 12
L'aire de rien 15
Analyse graphique en six questions 16
Levant se lève 18
Général 20
Quand ça m... 20
Probabilités 22
Pour un filtre avec toi... 22
La vie continue de Patrick Ronald 23
Suites 27
Viens boire un p'tit coup à la maison ! 27
Petites questions d'argent 30
L'étang sont durs 33
A retenir 35

Tous les exercices présents dans ce recueil, énoncés et corrigés, ont été conçus et mis en forme par Jérôme ONILLON, professeur (dés)-agrégé de mathématiques.
L'auteur ne saurait garantir la conformité du programme de mathématiques de terminale L/ES sans spécialité à ces exercices.
Aucune exploitation commerciale n'est autorisée.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du mardi 3 juin 2014.