Algèbre, équations et inéquations

Les produits innés

L'énoncé

Résoudre par le calcul les inéquations suivantes. On conclura chaque résolution en donnant l'ensemble des solutions.

a. $(4x+8)\times(3-x)<0$ **b.** $16x^2+8>24x+3$ **c.** $49x \leq 4x^3$

Le corrigé

a) Résoudre cette inéquation, c'est savoir quand le produit $(4x+8)\times(3-x)$ est négatif ou nul. Examinons les deux facteurs affines composant ce produit.

$4x+8$: $a=4$ positif et s'annule lorsque $4x+8=0 \Leftrightarrow 4x=-8 \Leftrightarrow x=-2$

$-x+3$: $a=-1$ négatif et s'annule lorsque $3-x=0 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$

Le tableau de signe de ce produit est :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$4x+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les solutions de cette inéquation sont les réels x pour lesquels le produit est négatif ou nul.
Nous en déduisons :
$S = \left]-\infty;-2\right[\cup \left]3;+\infty\right[$

b) Cette seconde résolution repose sur une factorisation via la forme canonique :

$$16x^2+8>24x+3 \Leftrightarrow 16x^2+8-24x-3>0 \Leftrightarrow 16x^2-24x+5>0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(4x)^2-2\times4x\times3+5>0 \Leftrightarrow (4x-3)^2-3^2+5>0}^{\text{Nous avons le début d'une identité remarquable..}}$$

$$16x^2+8>24x+3 \Leftrightarrow (4x-3)^2-9+5>0 \Leftrightarrow (4x-3)^2-4>0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(4x-3)^2-2^2>0 \Leftrightarrow \left[(4x-3)+2\right]\times\left[(4x-3)-2\right]>0}^{\text{Puis la différence de deux carrés : } a^2-b^2=(a+b)\times(a-b)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(4x-1)\times(4x-5)}_{\text{Quand ce produit est-il positif ?}}>0$$

Le tableau de signe de ce produit est le suivant :

x	$-\infty$		$1/4$		$5/4$		$+\infty$
$4x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquation sont les réels x pour lesquels le produit est positif.
Nous en déduisons :
$S = \left]-\infty;0,25\right[\cup \left]1,25;+\infty\right[$

c) Cette troisième résolution repose sur une double factorisation et une étude de signe.

$$49x \leq 4x^3 \Leftrightarrow 49x-4x^3 \leq 0 \Leftrightarrow \overbrace{49\times\boxed{x}-4x^2\times\boxed{x} \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{x}\times\left(49-4x^2\right) \leq 0}^{\text{Première factorisation : facteur commun } x}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{x\times\left[7^2-(2x)^2\right] \leq 0 \Leftrightarrow x\times(7+2x)\times(7-2x) \leq 0}^{\text{Seconde factorisation : } a^2-b^2=(a+b)\times(a-b)}$$

$$\underbrace{x\times(7+2x)\times(7-2x)}_{\text{Quand ce produit est-il négatif ou nul ?}}$$

Avant toute chose, examinons les trois facteurs affines composant ce produit :

x : $a=1$ est positif et s'annule lorsque $x=0$

$2x+7$: $a=2$ est positif et s'annule lorsque $2x+7=0 \Leftrightarrow 2x=-7 \Leftrightarrow x=-3,5$

$-2x+7$: $a=-2$ négatif et s'annule lorsque $-2x+7=0 \Leftrightarrow -2x=-7 \Leftrightarrow x=3,5$

Le tableau de signe du produit de ces trois facteurs est alors le suivant :

x	$-\infty$		$-3,5$		0		$3,5$		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-2x+7$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Les solutions de l'inéquation sont les réels x pour lesquels le produit est négatif ou nul.

$S = \left[-3,5;0\right] \cup \left[3,5;+\infty\right[$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Ces si chers tableaux de signe

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a. $5(x+2)-7x \geq 3-(x+1)$ **b.** $\dfrac{(5-x)(6-2x)}{4x+8} \leq 0$ **c.** $\dfrac{3x-1}{x+7} \leq 5$

d. $\dfrac{2}{x+5} > \dfrac{5}{x+2}$ **e.** $1-\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x+5}$

Le corrigé

a. Cette inéquation peut se résoudre classiquement sans recours aux tableaux de signe.

$$5(x+2)-7x \geq 3-(x+1) \Leftrightarrow 5x+10-7x \geq 3-x-1$$
$$\Leftrightarrow -2x+10 \geq -x+2 \Leftrightarrow -2x+x \geq 2-10$$
$$\Leftrightarrow -x \geq -8 \xrightarrow{\times(-1)} x \leq 8$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $]-\infty;8]$.

b. Résoudre l'inéquation $\dfrac{(5-x)(6-2x)}{4x+8} \leq 0$, c'est déterminer quand le quotient est positif ou nul. Bref, c'est étudier son signe. D'abord, regardons où ses facteurs affines s'annulent :

$$5-x=0 \Leftrightarrow -x=-5 \Leftrightarrow x=5$$
$$6-2x=0 \Leftrightarrow -2x=-6 \Leftrightarrow x=\frac{-6}{-2}=3$$
$$4x+8=0 \Leftrightarrow 4x=-8 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{4}=-2$$

Le tableau de signe du quotient est alors le suivant :

x	$-\infty$		-2		3		5		$+\infty$
$-x+5$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$-2x+6$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$4x+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquation sont les réels x pour lesquels le quotient est négatif ou nul.

$$S =]-\infty;-2[\cup [3;5]$$

c. Cette troisième inéquation se résout aussi par l'étude du signe d'un quotient.

$$\frac{3x-1}{x+7} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+7}-5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-1)-5\times(x+7)}{x+7} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x-1-5x-35}{x+7} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-36}{x+7} \leq 0$$

Regardons où les deux facteurs affines s'annulent :

$$-2x-36=0 \Leftrightarrow -2x=36 \Leftrightarrow x=\frac{36}{-2}=-18 \quad \text{et} \quad x+7=0 \Leftrightarrow x=-7$$

Le tableau de signe du dernier quotient est :

x	$-\infty$		-18		-7		$+\infty$
$-2x-36$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x+7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur quotient		$-$	0	$+$	||	$-$	

Les solutions de l'inéquation sont les réels x pour lesquels le quotient est négatif ou nul.

$$S =]-\infty;-18] \cup]-7;+\infty[$$

d. Cette quatrième inéquation se résout comme la précédente avec un dénominateur de deux facteurs.

$$\frac{2}{x+5} > \frac{5}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2}{x+5}-\frac{5}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\times(x+2)-5\times(x+5)}{(x+5)(x+2)} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x+4-5x-25}{(x+5)(x+2)} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-3x-21}{(x+5)(x+2)} > 0$$

Déterminons les valeurs pour lesquelles les facteurs affines du quotient s'annulent :

$$-3x-21=0 \Leftrightarrow -3x=21 \Leftrightarrow x=\frac{21}{-3}=-7$$
$$x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$$
$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

Le tableau de ce dernier quotient est :

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

x	$-\infty$		-7		-5		-2		$+\infty$
$-3x-21$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$x+5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur quotient		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	

Les solutions de l'inéquation sont les réels x pour lesquels le quotient est positif.

$$S =]-\infty;-7[\cup]-5;-2[$$

e. Cette inéquation se résout comme les précédentes : tout ramener dans le membre de gauche, mise au même dénominateur et signe d'un quotient.

$$1-\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x+5} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x+5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\times(x+1)(x+5)-1\times(x+5)-3\times(x+1)}{(x+1)(x+5)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+5x+\cancel{x}+\cancel{5}-\cancel{x}-\cancel{5}-3x-3}{(x+1)(x+5)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{(x+1)(x+5)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overbrace{x^2+2\times x\times 1}^{a^2+2\times a\times b}-3}{(x+1)(x+5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\overbrace{(x+1)^2-1^2}^{(a+b)^2-b^2}-3}{(x+1)(x+5)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overbrace{(x+1)^2-4}^{a^2-b^2}}{(x+1)(x+5)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\overbrace{[(x+1)-2]}^{(a-b)}\times\overbrace{[(x+1)+2]}^{(a+b)}}{(x+1)(x+5)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x+5)} \geq 0$$

Le tableau de signe de ce dernier quotient est :

x	$-\infty$		-5		-3		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquation sont les réels x pour lesquels le quotient est positif ou nul

$$S =]-\infty;-5[\cup [-3;-1[\cup [1;+\infty[$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Chacun choisit son système !

L'énoncé

Question 1 : Il n'aime que les bonbons à l'orange. Hélas pour lui, aucun fabricant ne vend de sachets exclusivement constitués de bonbons à l'orange. Il y a toujours d'autres parfums dans le sachet.
Son supermarché favori vend deux sortes de sachets : les *Dankarié* et les *Malobide*.
Dans un sachet de *Dankarié*, il y a 12 bonbons à l'orange et 22 bonbons à d'autres parfums.
Dans un sachet de *Malobide*, il ya 28 bonbons à l'orange et 10 bonbons à d'autres parfums.
A la fin de l'année, Il fait ses comptes : il a consommé exactement 740 bonbons à l'orange et il lui reste 654 bonbons d'autres parfums.
Combien a-t-il acheté de sachets de *Dankarié* et de *Malobide* ?

Question 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système de trois équations à trois inconnues x, y et z :

$$(S')\begin{cases} x+3y-2z=31 & \textit{(1)} \\ x+3y+z=22 & \textit{(2)} \\ 2x+7y+4z=45 & \textit{(3)} \end{cases}$$

Indication : les trois inconnues x, y et z sont des entiers relatifs.

Le corrigé

Question 1 : On appelle x le nombre de sachets de *Dankarié* et y celui de *Malobide*.
Ces deux quantités x et y vérifient les contraintes suivantes :

- Il a consommé 740 bonbons à l'orange :

$$\overbrace{12x}^{\text{Dankarié}} + \overbrace{28y}^{\text{Malobide}} = 740 \xrightarrow{\div 4} 3x+7y=185 \quad \textit{(1)}$$

- Il lui reste 654 autres bonbons :

$$\overbrace{22x}^{\text{Dankarié}} + \overbrace{10y}^{\text{Malobide}} = 654 \xrightarrow{\div 2} 11x+5y=327 \quad \textit{(2)}$$

Il ne nous reste plus qu'à résoudre par combinaisons linéaires le système :

$$\begin{cases} 3x+7y=185 & \textit{(1)} \\ 11x+5y=327 & \textit{(2)} \end{cases}$$

Pour obtenir x, nous multiplions l'équation ***(1)*** par 5 et l'équation ***(2)*** par 7 de façon à éliminer y par soustraction.	Pour déterminer y, nous multiplions l'équation ***(1)*** par 11 et l'équation ***(2)*** par 3, puis nous les soustrairons pour éliminer x.
$\textit{(1)} \xrightarrow{\times 5} 15x+35y=925$ $\textit{(2)} \xrightarrow{\times 7} 77x+35y=2289$ $\ominus$ $-62x=-1364$ $x=\dfrac{-1364}{-62}=22$	$\textit{(1)} \xrightarrow{\times 11} 33x+77y=2035$ $\textit{(2)} \xrightarrow{\times 3} 33x+15y=981$ $\ominus$ $62y=1054$ $y=\dfrac{1054}{62}=17$

Conclusion : il a acheté 22 sachets de *Dankarié* et 17 sachets de *Malobide*.

Question 2 : Vu la morphologie du système, il est assez aisé d'obtenir l'inconnue z.

$$\textit{(1)}-\textit{(2)} \longrightarrow (\cancel{x}+\cancel{3y}-2z)-(\cancel{x}+\cancel{3y}+z)=31-22 \Leftrightarrow -3z=9 \Leftrightarrow z=-3$$

A partir de là, le système (S') devient :

$$(S')\begin{cases} x+3y-2\times(-3)=31 & \Leftrightarrow & x+3y=25 & \textit{(1)} \\ x+3y+(-3)=22 & \Leftrightarrow & x+3y=25 & \textit{(2)} \\ 2x+7y+4\times(-3)=45 & \Leftrightarrow & 2x+7y=57 & \textit{(3)} \end{cases}$$

Procédons par substitution. A partir de l'équation ***(1)***, on exprime x en fonction de y :

$$x=25-3y$$

Puis, on remplace dans l'équation ***(3)*** l'inconnue x par ce qu'elle vaut en y.

$$2\times(25-3y)+7y=57 \Leftrightarrow 50-6y+7y=57 \Leftrightarrow y=57-50=7$$

Finalement :

$$x=25-3\times 7=25-21=4$$

Conclusion : le système (S') admet une seule solution qui est le triplet $(4;7;-3)$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Algorithmique

Deux algues au rythme !

L'énoncé

Cet exercice est composé de deux programmes (ou algorithmes) à exécuter. On se contentera juste de répondre aux questions posées introduites par une flèche ➔.

a) Le premier programme est le suivant :

```
a et b sont deux entiers
a=0
b=1
Tant que a<25 faire :
      Si a<12  alors  b=b+3
               sinon  b=b+2
      a=a+b
```
➔ Question : que valent les variables *a* et *b*?

```
b=a+b
```
➔ Question : que valent les variables *a* et *b* ?

b) Le second programme est le suivant :

```
a, b, c et i sont quatre entiers
a=2
b=1
c=0
Pour i=2 jusqu'à 5 faire :
      c=a
      a=2*a+b-i
      b=c
```
➔ Question : que valent les variables *a*, *b* et *c* ?

```
c=a+b
```
➔ Question : que valent les variables *a, b* et *c* ?

Le corrigé

a) Exécutons ce premier programme instruction par instruction.

Instruction et commentaire	*a*	*b*
a=0 b=1	0	1
Tant que : comme a<25, on entre dans la boucle	0	1
Comme a<12 alors b=b+3 $=1+3=4$	0	4
a=a+b $=0+4=4$	4	4
Réponse : $a=4$ $b=4$		
Tant que : comme a<25, on entre dans la boucle	4	4
Comme a<12 alors b=b+3 $=4+3=7$	4	7
a=a+b $=4+7=11$	11	7
Réponse : $a=11$ $b=7$		
Tant que : comme a<25, on entre dans la boucle	11	7
Comme a<12 alors b=b+3 $=7+3=10$	11	10
a=a+b $=11+10$	21	10
Réponse : $a=21$ $b=10$		
Tant que : comme a<25, on entre dans la boucle	21	10
Comme a⩾12 sinon b=b+2 $=10+2=12$	21	12
a=a+b $=21+12=33$	33	12
Réponse : $a=33$ $b=12$		
Tant que : comme a⩾25, on quitte la boucle	33	12
b=a+b	33	45
Réponse : $a=33$ $b=45$		

b) Exécutons ce second programme instruction par instruction, ligne après ligne.

Instruction et commentaire	*a*	*b*	*c*	*i*
a=2 b=1 c=0	2	1	0	?
Pour i=2	2	1	0	2
c=a $=2$	2	1	2	2
a=2*a+b-i $=2\times2+1-2=3$	3	1	2	2
b=c $=2$	3	2	2	2
Réponse : $a=3$ $b=2$ $c=2$				
Pour i=3	3	2	2	3
c=a $=3$	3	2	3	3
a=2*a+b-i $=2\times3+2-3=5$ b=c $=3$	5	3	3	3
Réponse : $a=5$ $b=3$ $c=3$				
Pour i=4	5	3	3	4
c=a $=5$ a=2*a+b-i $=2\times5+3-4=9$	9	3	5	4
b=c $=5$	9	5	5	4
Réponse : $a=9$ $b=5$ $c=5$				
Pour i=5	9	5	5	5
c=a $=9$ a=2*a+b-i $=2\times9+5-5=18$	18	5	9	5
b=c $=9$	18	9	9	5
Réponse : $a=18$ $b=9$ $c=9$				
c=a+b $=18+9=27$	18	9	27	5
Réponse : $a=18$ $b=9$ $c=27$				

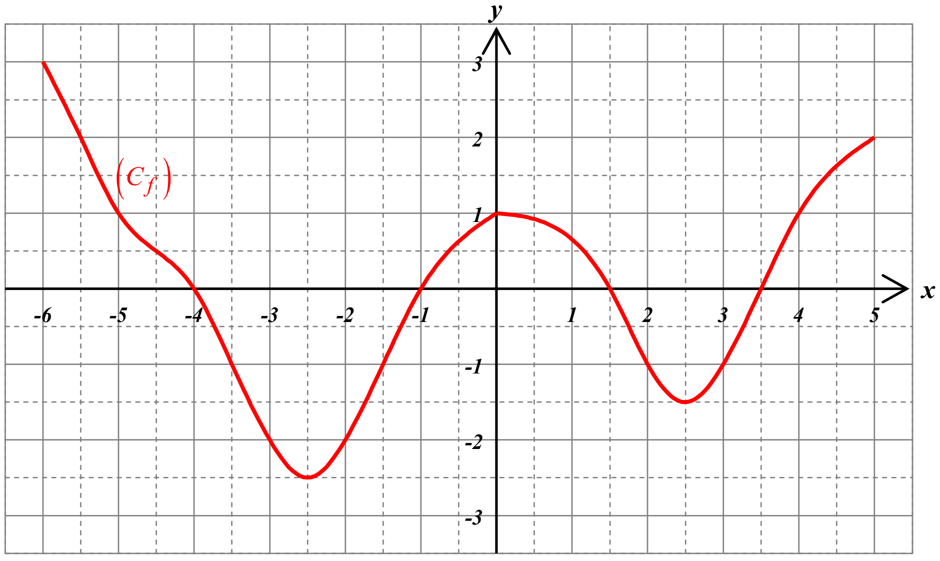
Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Fonctions

Petites lectures fonctionnelles

L'énoncé

f est une fonction dont la courbe $\left(C_f\right)$ a été tracée sur le graphique ci-dessous :



On répondra aux questions suivantes directement sur la feuille en s'aidant de la courbe ci-dessus. Le cas échéant, les réponses fournies pourront faire appel à des valeurs approchées .

a) Compléter les phrases suivantes :

L'ensemble de la définition de la fonction f est ....

L'image de -3 par la fonction f est..

Les antécédents de -3 par la fonction f sont..

Le maximum de f sur l'intervalle $[-2;2]$ est........ Il est atteint en $x =$ ....

$f(2) =$ ....

Le minimum de f sur l'intervalle $[-6;5]$ est........ Il est atteint en $x =$ ....

b) Compléter le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition se trouvant ci-dessous :

x	
f	

c) Compléter le tableau de signe de $f(x)$ se trouvant ci-dessous.

x	
$f(x)$	

d) A l'aide de la courbe ci-contre, résoudre graphiquement les équations et les inéquations suivantes :

$f(x)=1$ S = ...	$f(x) \leq 2$ S = ...
$-2 < f(x) \leq -1$ S = ...	$f(x) \geq 3$ S = ...

Le corrigé

a) Les points de la courbe $\left(C_f\right)$ ont leurs abscisses comprises entre -6 et 5. Et réciproquement ! Donc l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = [-6;5]$

❋ L'ordonnée du point de la courbe $\left(C_f\right)$ d'abscisse -3 vaut -2 . Donc $f(-3) = -2$

❋ Aucun point de la courbe $\left(C_f\right)$ n'a pour ordonnée -3 . Donc -3 n'a pas d'antécédent par la fonction f.

❋ Si l'on considère la portion de la courbe $\left(C_f\right)$ tracée sur l'intervalle $[-2;2]$, son plus haut point a pour coordonnées $(0;1)$. Ainsi, le maximum de f sur l'intervalle $[-2;2]$ est égal à 1. Il est atteint en $x = 0$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

❋ Le point de la courbe (C_f) d'abscisse 2 a pour ordonnée -1 . Donc $f(2) = \underline{-1}$

❋ Le point le plus bas de la courbe (C_f) a pour coordonnées $(-2,5;-2,5)$.

Le minimum de la fonction *f* sur l'intervalle $[-6;5]$ est $-2,5$. Il est atteint en $x = \underline{-2,5}$.

b) D'après sa courbe représentative (C_f), le tableau de variation de la fonction *f* est :

x	-6		$-2,5$		0		$2,5$		5
f	3	↘	$-2,5$	↗	1	↘	$-1,5$	↗	2

c) D'après la courbe représentative (C_f), le tableau de signe de $f(x)$ est :

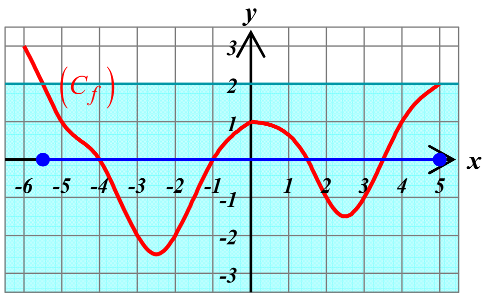
x	-6		-4		-1		$1,5$		$3,5$		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

d) Tout point de la courbe (C_f) a des coordonnées de la forme $(x; f(x))$.

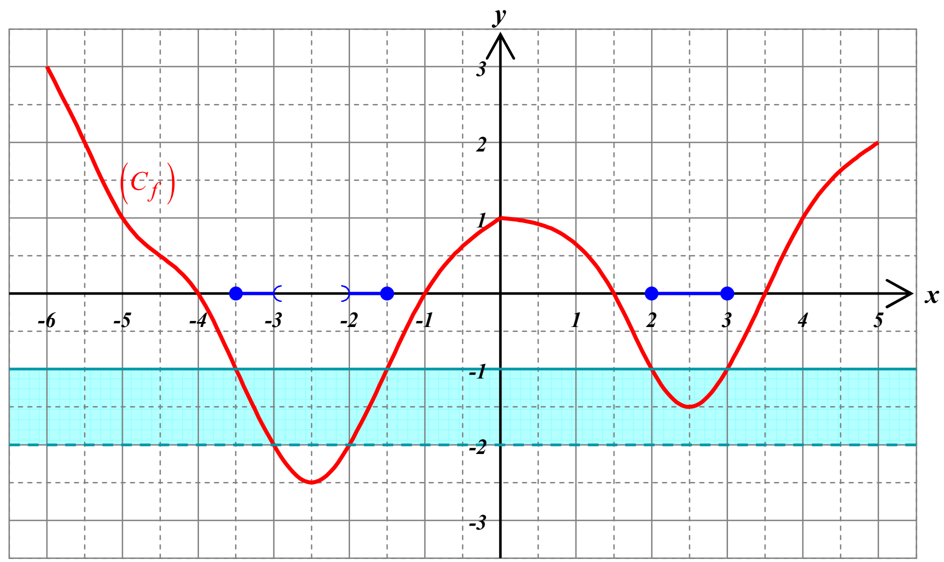
❋ Pour résoudre l'équation $f(x) = 1$, il faut considérer les points de la courbe (C_f) dont l'ordonnée est égale à 1. Il en existe trois. Leurs abscisses sont -5 ; 0 et 4 .

Ce sont les trois solutions de notre équation. On résume cela par : $S = \underline{\{-5;0;4\}}$

❋ Pour solutionner l'inéquation $f(x) \leq 2$, il faut considérer les points de la courbe (C_f) dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 2. Leurs abscisses appartiennent à l'intervalle $[-5,5;5]$. C'est l'ensemble des solutions de notre inéquation.



❋ Pour résoudre l'inéquation $-2 < f(x) \leq -1$, il faut considérer les points de la courbe (C_f) dont l'ordonnée est comprise entre -2 strictement et -1 . Les abscisses de ces points sont les solutions de l'inéquation.

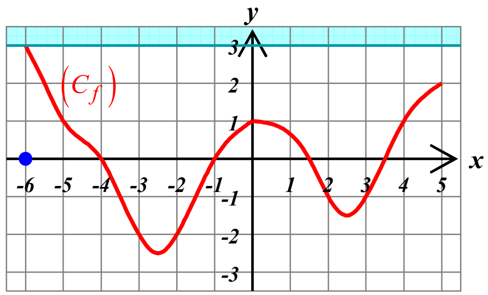


L'ensemble des solutions de l'inéquation est la réunion d'intervalles :

$S = \underline{[-3,5;-3[\cup]-2;-1,5] \cup [2;3]}$

❋ Un seul point de la courbe (C_f) a son ordonnée supérieure ou égale à 3. Il a pour abscisse -6 . C'est la seule solution.

$S = \underline{\{-6\}}$



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

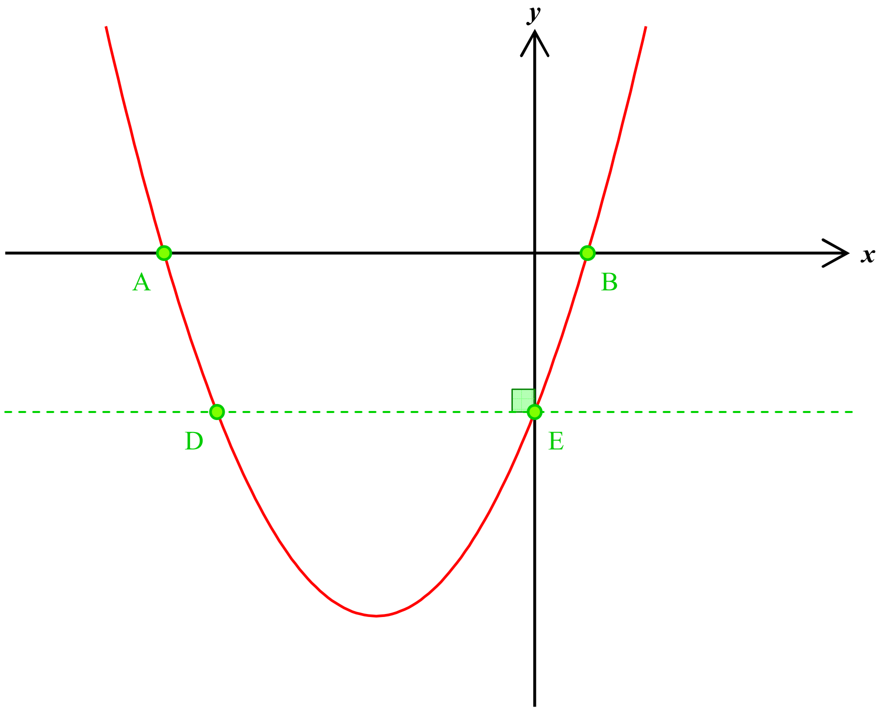
Images, antécédents et conséquences

L'énoncé

La fonction *f* est définie pour tout réel *x* par :

$$f(x) = 4x^2 + 12x - 7$$

Sa courbe représentative (C_f) a été tracée ci-dessous dans un repère orthogonal, non orthonormé et non centimétrique.



a) Calculer les images $f(0)$; $f(3)$ et $f\left(-\frac{3}{2}\right)$.

b) Déterminer les antécédents de -7 par la fonction *f*.

c) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction *f*.

d) En déduire les coordonnées des points A, B, D et E

Le corrigé

a) Calculer les images demandées :

$$f(0) = 4\times 0^2 + 12\times 0 - 7 = 4\times 0 + 0 - 7 = \underline{-7}$$

$$f(3) = 4\times 3^2 + 12\times 3 - 7 = 4\times 9 + 36 - 7 = 36 + 29 = \underline{65}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 4\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 12\times\left(-\frac{3}{2}\right) - 7 = \cancel{4}\times\frac{9}{\cancel{4}} - \frac{36}{2} - 7 = 9 - 18 - 7 = \underline{-16}$$

b) Déterminer les antécédents de -7 par la fonction *f*, c'est chercher les réels *x* dont l'image par *f* est égale à -7 . Pour ce faire, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x) = -7 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x \cancel{-7} = \cancel{-7}$$

Ce genre d'équation ne peut se résoudre que via un produit nul. Il nous faut factoriser.

$$\Leftrightarrow 4\times \overset{\text{Facteur...}}{\boxed{x}} \times x + 12\times \overset{\text{...commun}}{\boxed{x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\boxed{x}\times(4x+12) = 0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x = \underline{0} \quad \text{ou} \quad 4x + 12 = 0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$4x = -12$$

$$x = \frac{-12}{4} = \underline{-3}$$

Conclusion : -7 a deux antécédents par la fonction *f*. Il s'agit de 0 et -3 .

c) Pour trouver les antécédents de 0 par *f*, il nous faut résoudre l'équation :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x - 7 = 0$$

On factorise en utilisant la forme canonique.

$$\Leftrightarrow \overbrace{(2x)^2}^{a^2} + \overbrace{2\times 2x\times 3}^{2\times a\times b} - 7 = 0 \Leftrightarrow \overbrace{(2x+3)^2 - 3^2}^{(a+b)^2 - b^2} - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)^2 - 9 - 7 = 0 \Leftrightarrow (2x+3)^2 - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(2x+3)^2 - 4^2}^{a^2 - b^2} = 0 \Leftrightarrow \overbrace{\left[(2x+3)+4\right]\times\left[(2x+3)-4\right]}^{(a+b)\times(a-b)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(2x+7)\times(2x-1) = 0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{2x + 7 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 1 = 0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$2x = -7 \qquad 2x = 1$$

$$x = \underline{-3{,}5} \qquad x = \underline{0{,}5}$$

Conclusion : 0 a deux antécédents par la fonction *f* qui sont $-3{,}5$ et 0,5.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

d) les points A et B se trouvant sur l'axe des abscisses, leurs ordonnées sont égales à 0. Donc leurs abscisses sont les antécédents de 0 par *f*. Par conséquent, nous en déduisons :

$\boxed{A(-3,5;0)}$ et $\boxed{B(0,5;0)}$

Le point E se trouvant sur l'axe des ordonnées, son abscisse est égale à 0.
Comme il appartient aussi à la courbe (C_f) , son ordonnée y_E est l'image de son abscisse 0. Par conséquent, les coordonnées du point E sont $\boxed{(0;-7)}$.

L'ordonnée de D est aussi égale à -7. Son abscisse x_D est l'autre antécédent de -7 par la fonction *f*. Donc les coordonnées du point D sont $\boxed{(-3;-7)}$.

Affines et de droites !

L'énoncé

a) La fonction *f* est définie sur ℝ par :

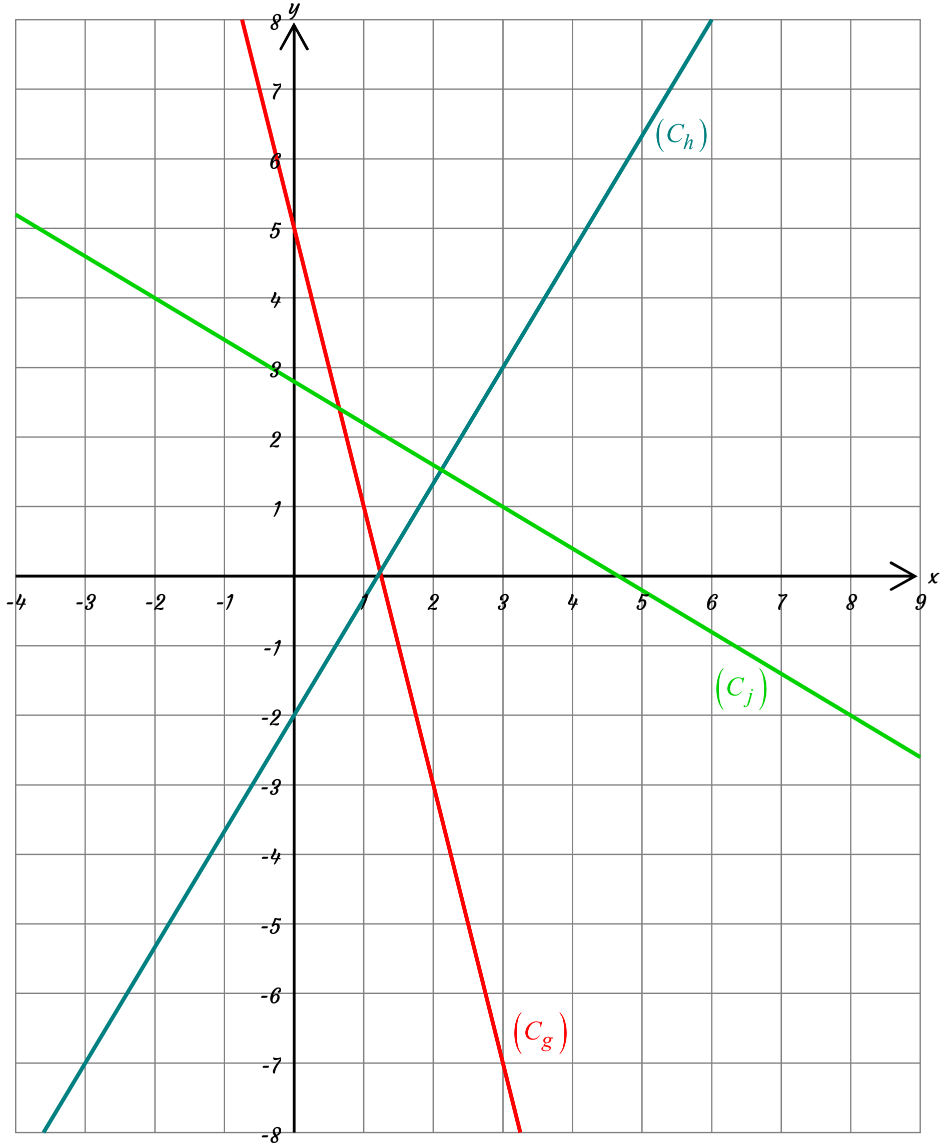
$$f(x)=\frac{7-5x}{6}$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

1. Justifier que *f* est une fonction affine de la forme $ax+b$. On donnera la valeur de son coefficient directeur *a* et de son ordonnée à l'origine *b*.
2. Calculer l'image de -1 par la fonction *f*.
3. Déterminer le ou les antécédents de -3 par la fonction *f*.
4. Sur le graphique ci-après, tracer la courbe (C_f).
5. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur ℝ.
6. Au moyen d'un enchaînement d'inégalités, démontrer que la fonction *f* est strictement décroissante sur ℝ

b) Sur le graphique ci-après, on a tracé les droites (C_g), (C_h) et (C_j) représentant les trois fonctions *g*, *h* et *j*.
Déterminer les expressions de ces trois fonctions *g*, *h* et *j*.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.



Le corrigé

a.1) Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{7-5x}{6}=\frac{7}{6}-\frac{5}{6}x=\underbrace{\boxed{-\frac{5}{6}}}_{a}\times x+\underbrace{\boxed{\frac{7}{6}}}_{b}$$

Conclusion : la fonction f est affine avec pour coefficient directeur $a=-\frac{5}{6}$ et ordonnée à l'origine $b=\frac{7}{5}$

a.2) Calculons l'image de -1 par la fonction f.

$$f(-1)=\frac{7-5\times(-1)}{6}=\frac{7+5}{6}=\frac{12}{6}=2$$

a.3) Pour déterminer le ou les antécédents de -3 par la fonction f, résolvons l'équation :

$$\overset{f(x)}{\boxed{\frac{7-5x}{6}}}=-3 \Leftrightarrow \frac{7-5x}{\cancel{6}}\times\cancel{6}=-3\times 6 \Leftrightarrow 7-5x=-18 \Leftrightarrow -5x=-18-7$$

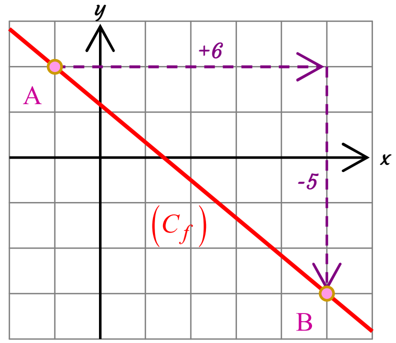
$$\Leftrightarrow -5x=-25 \Leftrightarrow x=\frac{-25}{-5}=5$$

Conclusion : -3 a un seul antécédent par la fonction f qui est 5.

a.4) La courbe (C_f) représentant la fonction affine f est une droite passant par les points :

$\underbrace{A(-1;2)}_{\text{car } f(-1)=2}$ et $\underbrace{B(5;-3)}_{\text{car } f(5)=-3}$

Ayant un point, on peut en trouve le second en utilisant le coefficient directeur $a=-5/6$.



a.5) La fonction f est affine et son coefficient directeur $a=-\frac{5}{6}$ est négatif.

Déterminons la valeur de x pour laquelle f s'annule !

$$\overset{f(x)}{\boxed{\frac{7-5x}{6}}}=0 \Leftrightarrow \frac{7-5x}{\cancel{6}}\times\cancel{6}=0\times 6 \Leftrightarrow 7-5x=0 \Leftrightarrow -5x=-7 \Leftrightarrow x=\frac{-7}{-5}=\frac{7}{5}$$

Autre méthode : on peut aussi se souvenir que $ax+b$ s'annule en $-b/a$ ...

Par conséquent, le tableau de signe de $f(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$7/5$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

*On termine toujours par le signe du coefficient directeur **a**.*

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

a.6) Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.

Comment leurs images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont-elles rangées ?

$$\begin{array}{ccc} \alpha & < & \beta \\ -\dfrac{5}{6}\times\alpha & > & -\dfrac{5}{6}\times\beta \\ -\dfrac{5}{6}\times\alpha+\dfrac{7}{6} & > & -\dfrac{5}{6}\times\beta+\dfrac{7}{6} \\ f(\alpha) & > & f(\beta) \end{array}$$

$\times(-5/6)$

On multiplie par un négatif. L'ordre change.

$+7/6$

f change l'ordre sur]-∞ ; +∞[

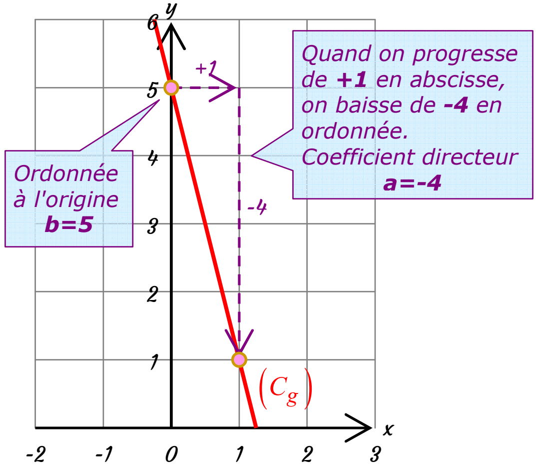
Conclusion : la fonction f changeant l'ordre, elle est strictement décroissante sur ℝ.

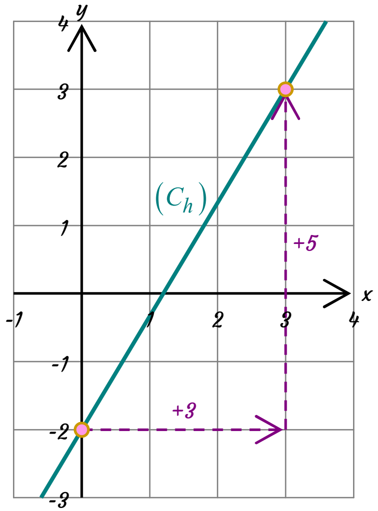
b) Sa courbe (C_g) étant une droite, la fonction g est affine et l'une de ses écritures est de la forme $g(x) = ax + b$.

Ses coefficient directeur a et ordonnée à l'origine b sont lisibles directement. ➔

Pour tout réel x, nous obtenons :

$g(x) = -4x + 5$





🡐 Concernant la fonction affine $h(x) = ax + b$, son ordonnée à l'origine b est égale à -2.

De plus, quand on progresse de $+3$ en abscisse, on monte de $+5$ en ordonnée.

Donc son coefficient directeur est $a = \dfrac{+5}{+3} = \dfrac{5}{3}$

En conclusion : $h(x) = \dfrac{5}{3}x - 2$

Sa courbe représentative étant une droite, la fonction j est aussi affine et l'une de ses écritures est de la forme $j(x) = ax + b$.

Lorsque l'on progresse de $+5$ en abscisse,

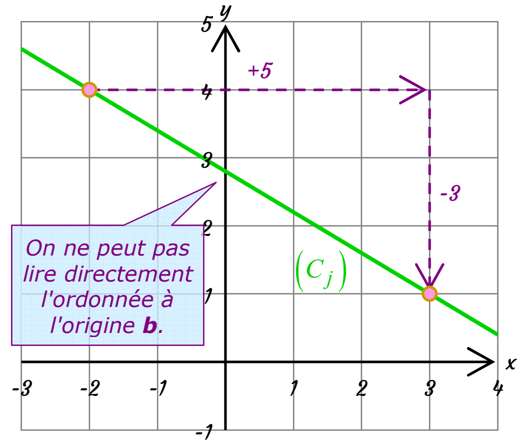
on baisse de -3 en ordonnée. Donc, son coefficient directeur est

$a = \dfrac{-3}{5} = -\dfrac{3}{5}$.

Ainsi savons-nous que

$j(x) = -\dfrac{3}{5}x + b$.

Reste à déterminer l'ordonnée à l'origine b.



La droite (C_j) passant par le point de coordonnées $(-2;4)$, nous pouvons écrire :

$$j(-2) = 4 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}\times(-2) + b = 4 \Leftrightarrow \frac{6}{5} + b = 4 \Leftrightarrow b = 4 - \frac{6}{5} = \frac{20}{4} - \frac{6}{5} = \frac{14}{5}$$

En conclusion, l'expression de la fonction affine j est $j(x) = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{14}{5} = \dfrac{14-3x}{5}$

L'heure homographique

L'énoncé

a) Dans cette question, quatre affirmations sont proposées. On entourera celles qui sont vraies. Les réponses considérées comme fausses seront laissées non entourées.
Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapporte 0,75 points.

La fonction carré $\varphi(x)=x^2$ est croissante sur $]-\infty;0[$.	La fonction racine carrée $\varphi(x)=\sqrt{x}$ est croissante sur $]0;+\infty[$.
La fonction carré $\varphi(x)=x^2$ est croissante sur $]0;+\infty[$.	La fonction inverse $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ est croissante sur $]0;+\infty[$.

La fonction *f* est définie par :

$$f(x)=\frac{2x+7}{x+5}$$

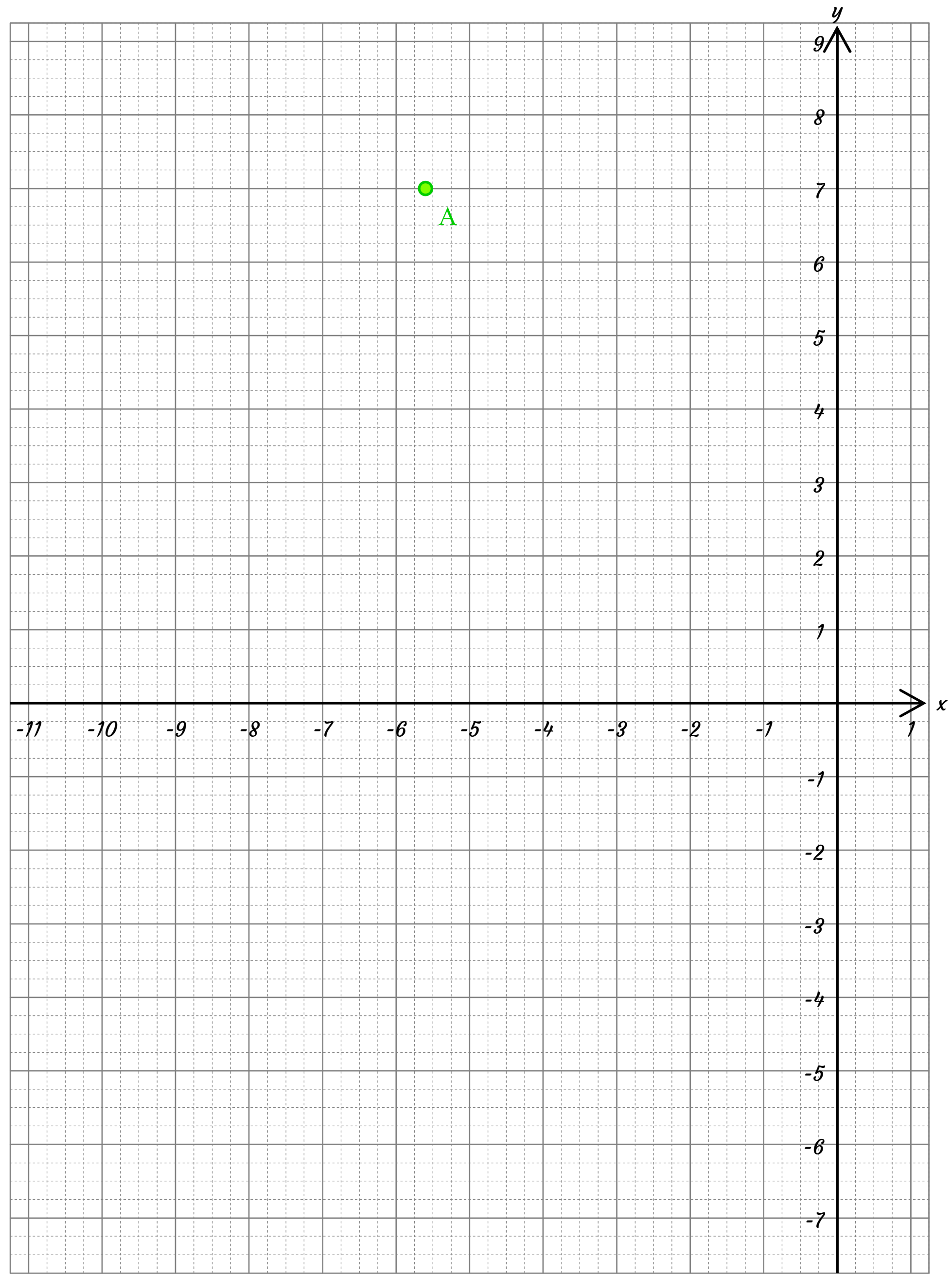
On appelle (C_f) sa courbe représentative qui sera tracée lors de la question **d** sur le graphique ci-contre muni d'un repère orthonormé centimétrique.

b) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction *f*. On justifiera sa réponse.

c) Dresser le tableau de signe de la fonction *f*.

d) Déterminer l'abscisse x_A du point A de la courbe (C_f) dont l'ordonnée y_A vaut 7.

e) Sur le graphique ci-contre, tracer la courbe (C_f). Pour ce faire, on utilisera un tableau de valeurs que l'on laissera sur la copie.
On tracera également les deux droites asymptotes sur lesquelles s'appuie la courbe (C_f) et on précisera sa nature.
Une grande attention sera portée à la qualité de la construction. On attire l'attention de l'aimable participant sur le fait que cette courbe passe par le point A.



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

f) Le but de ces questions est l'étude des variations de la fonction *f* sur $\left]-\infty;-5\right[$.

1. Déterminer deux entiers relatifs *a* et *b* tels que pour tout réel $x \in D_f$, on ait :
$$f(x) = a + \frac{b}{x+5}$$
2. Etablir le sens de variation de *f* sur l'intervalle $\left]-\infty;-5\right[$ au moyen d'un enchainement d'inégalités débutant par l'inégalité $\alpha < \beta < -5$.

g) Dans ces questions, α et β sont deux réels de l'intervalle $\left]-5;+\infty\right[$ tels que $\alpha < \beta$.

1. Etablir que $f(\alpha) - f(\beta) = \dfrac{3\times(\alpha-\beta)}{(\alpha+5)\times(\beta+5)}$
2. Laquelle des deux images $f(\alpha)$ ou $f(\beta)$ est la plus grande ? On justifiera sa réponse.
Que peut-on en conclure ?

h) Conclure ce problème en dressant le tableau de variation de *f* sur son ensemble de définition D_f.

Le corrigé

a) Les propositions ont été vues en cours :

- La fonction carré $\varphi(x) = x^2$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$, puis strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.
- La fonction racine carrée $\varphi(x) = \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.
- La fonction inverse $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$ mais aussi sur $\left]0;+\infty\right[$.

b) La fonction $f(x)$ est un quotient de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Par conséquent :

Le quotient $f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $x+5$ est non nul

$\Leftrightarrow \quad x+5 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -5$

Conclusion : à l'exception de -5, tous les réels ont une image par la fonction *f*. Ainsi :

$$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-5\} = \left]-\infty;-5\right[\cup \left]-5;+\infty\right[$$

c) Le tableau de signe de la fonction homographique *f* est le suivant :

x	$-\infty$		-5		$-3,5$		$+\infty$
$2x+7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

d) Comme le point A appartient à la courbe (C_f), alors son ordonnée y_A est l'image de son abscisse x_A par la fonction *f*. Autrement dit :

$$y_A = f(x_A) \Leftrightarrow 7 = \frac{2x_A+7}{x_A+5} \Leftrightarrow 7\times(x_A+5) = 2x_A+7$$
$$\Leftrightarrow 7x_A + 35 = 2x_A + 7 \Leftrightarrow x_A = -\frac{28}{5} = -5,6$$

e) La courbe (C_f) représentant la fonction homographique *f* est une hyperbole s'appuyant sur les deux droites (qui sont ses asymptotes) verticale d'équation $x = -5$ et horizontale d'équation $y = 2$. Elles sont tracées sur le graphique ci-après.

f.1) Pour tout réel $x \in D_f$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{\boxed{2x}+7}{x+5} = \frac{\boxed{2\times(x+5)-10}+7}{x+5} = \frac{2\times\cancel{(x+5)}}{\cancel{x+5}} + \frac{-3}{x+5} = 2 - \frac{3}{x+5}$$

f.2) Enchainons les inégalités !

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & < & \beta & < & -5 \\ & & \text{Deux réels négatifs} & & \\ \alpha+5 & < & \beta+5 & < & 0 \\ \dfrac{1}{\alpha+5} & > & \dfrac{1}{\beta+5} & & \\ \dfrac{-3}{\alpha+5} & < & \dfrac{-3}{\beta+5} & & \\ \underbrace{2-\dfrac{3}{\alpha+5}}_{f(\alpha)} & < & \underbrace{2-\dfrac{3}{\beta+4}}_{f(\beta)} & & \end{array}$$

+5

Inverse

×(-3)

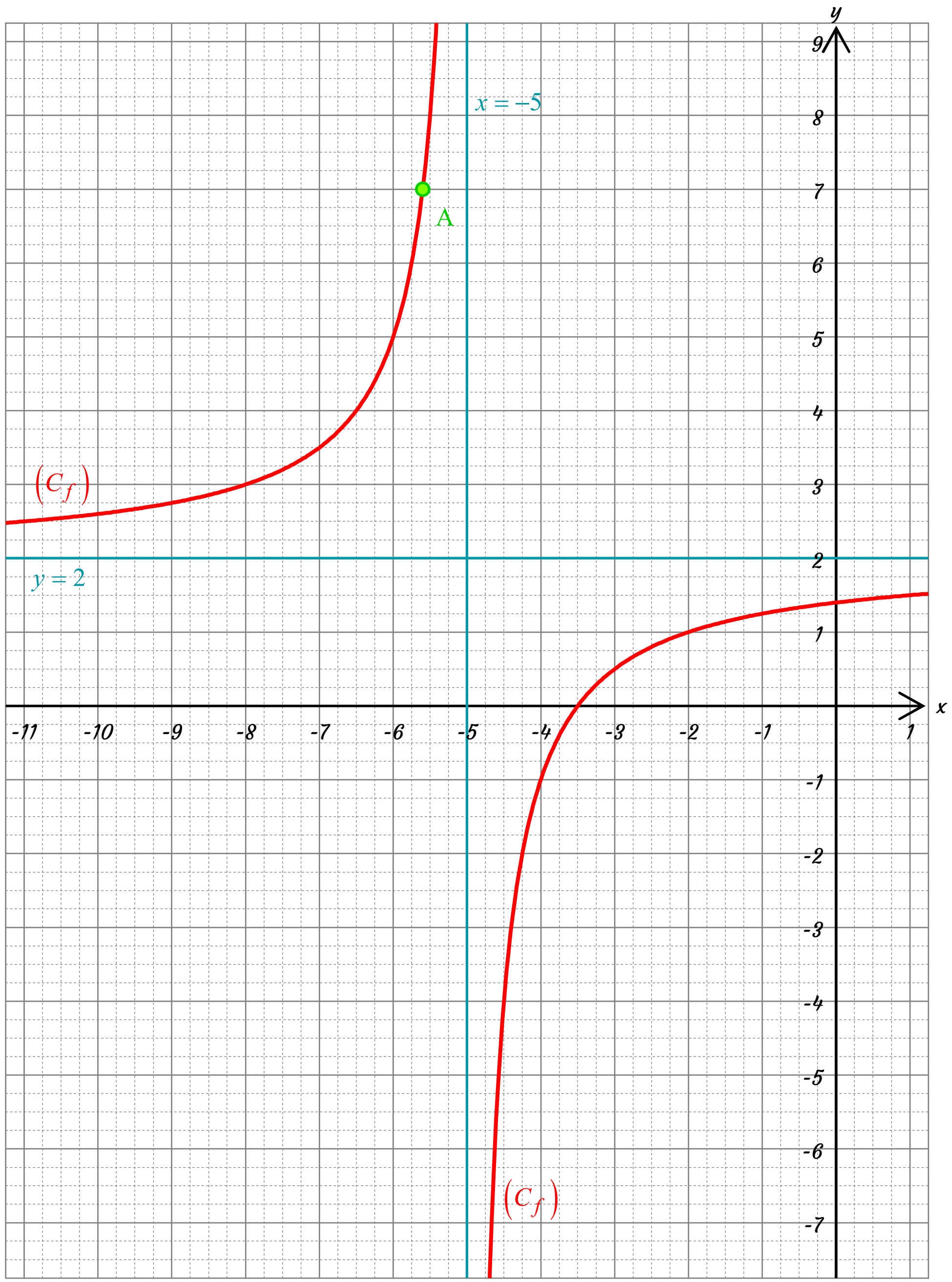
+2

La fonction inverse est décroissante sur]-∞ ; 0[

La fonction *f* conserve l'ordre sur]-∞ ; -5 [

Conclusion : la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-5\right[$.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.



g.1) Nous pouvons écrire :

$$f(\alpha)-f(\beta)=\frac{2\alpha+7}{\alpha+5}-\frac{2\beta+7}{\beta+5}$$
$$=\frac{(2\alpha+7)\times(\beta+5)-(2\beta+7)\times(\alpha+5)}{(\alpha+5)\times(\beta+5)}$$
$$=\frac{\cancel{2\alpha\beta}+10\alpha+7\beta+\cancel{35}-\cancel{2\alpha\beta}-10\beta-7\alpha-\cancel{35}}{(\alpha+5)\times(\beta+5)}$$
$$=\frac{3\alpha-3\beta}{(\alpha+5)\times(\beta+5)}=\frac{3\times(\alpha-\beta)}{(\alpha+5)\times(\beta+5)}$$

g.2) Examinons les facteurs composant le quotient $f(\alpha)-f(\beta)$.

- ♥ $\alpha-\beta$ est négatif car $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$.
- ♥ $\alpha+5$ et $\beta+5$ sont positifs car $\alpha>-5 \xrightarrow{+5} \alpha+5>0$; $\beta>-5 \xrightarrow{+5} \beta+5>0$

Donc le quotient $f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{3\times(\alpha-\beta)}{(\alpha+5)\times(\beta+5)}=\dfrac{\oplus\times\ominus}{\oplus\times\oplus}$ est négatif.

Conclusion : sur l'intervalle $]-5;+\infty[$, si $\alpha<\beta$ alors $f(\alpha)-f(\beta)<0$; $f(\alpha)<f(\beta)$

La fonction *f* conservant l'ordre sur $]-5;+\infty[$, elle est strictement croissante sur cet intervalle.

h) Finalement, le tableau de variation de la fonction *f* est le suivant :

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
f	2^+	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2^-

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Géométrie analytique

L'heure analytique

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ où une unité graphique vaut un centimètre. L'unité de longueur par défaut est le centimètre.
Dans ce repère, on a placé les points :

$$A(-5;-2) \qquad B(2;-5) \qquad C(-2;3) \qquad D(3;-5,4)$$

a) Le point D appartient-il à la droite (AB) ? On justifiera sa réponse.

b) Le point E est le quatrième sommet du parallélogramme CADE.

1. Calculer les coordonnées du point E.
2. Construire au compas le point E sur la figure ci-contre.

c) On appelle I le milieu du segment [BC] et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre I passant par A.

1. Calculer les coordonnées du point I.
2. Calculer le rayon du cercle $(\mathscr{C})$.
3. Le point D appartient-il au cercle $(\mathscr{C})$? On justifiera sa réponse.
4. Déterminer l'ordonnée y_F du point F tel que
   F appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
   Son ordonnée y_F est positive.
   Son abscisse x_F est égale à 3.

d) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BG} + 4\times\overrightarrow{CG} = 3\times\overrightarrow{AB}$$

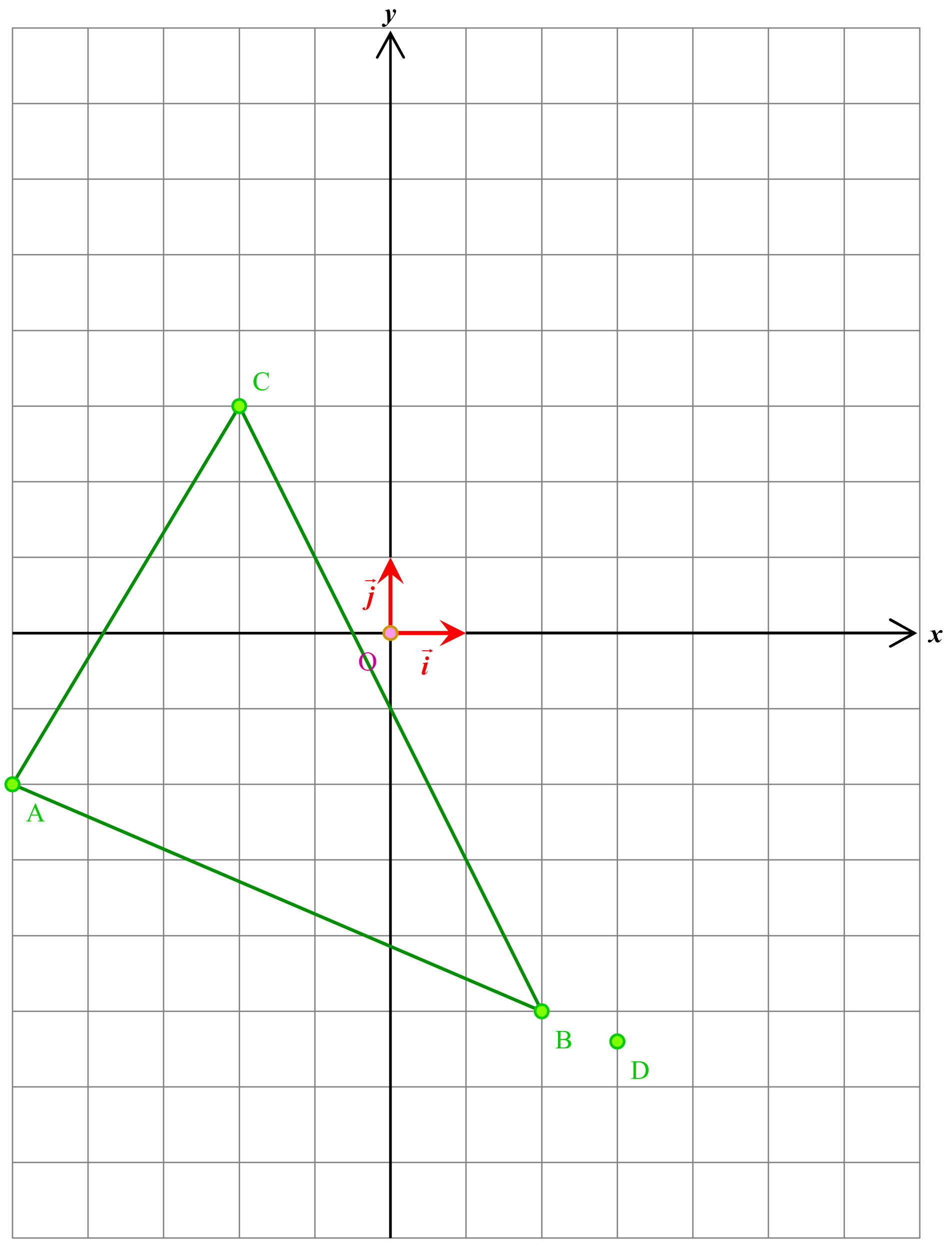
1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G.
2. Vérifier que le point G appartient à la droite (AI).
3. Placer le point G sur la figure ci-contre.

e) On appelle H le point d'abscisse 3 tel que les droites (AB) et (IH) sont parallèles.

1. Construire le point H sur la figure ci-contre.
2. Déterminer par le calcul l'ordonnée y_H du point H.

f) On appelle Δ la médiatrice du segment [AB]. Le point L est le point de la droite Δ d'ordonnée 5.

1. Construire le point L.
2. Calculer les coordonnées du milieu J du segment [AB].
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point L.



Le corrigé

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 3-(-5)=8 \\ -5,4-(-2)=-3,4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-5)=7 \\ -5-(-2)=3 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ -3,4 & -3 \end{vmatrix}=8\times(-3)-(-3,4)\times 7=-24+23,8=\underline{-0,2\neq 0}$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.
Conclusion : le point D n'appartient pas à la droite (AB).

b) Le quatrième sommet E du parallélogramme CADE vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_E-3 \\ y_E-(-5,4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-(-5) \\ 3-(-2) \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{x_E-3=4}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{y_E+5,4=5}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$x_7=\underline{7} \qquad y_E=\underline{-0,4}$$

Conclusion : le point E a pour coordonnées $(7;-0,4)$.

c.1) Les coordonnées du milieu I de [BC] sont données par :

$$x_I=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{2+(-2)}{2}=\frac{0}{2}=\underline{0} \quad \text{et} \quad y_I=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{(-5)+3}{2}=\frac{-2}{2}=\underline{-1}$$

Conclusion : le milieu I a pour coordonnées $(0;-1)$.

c.2) Le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ est égale à la distance IA.

$$IA=\sqrt{(-5-0)^2+(-2-(-1))^2}=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}=\sqrt{25+1}=\underline{\sqrt{26}\text{ cm}}$$

Conclusion : le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ vaut $\sqrt{26}$ centimètres.

c.3) Calculons la distance existant entre le centre I et le point D.

Comme $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} 3 \\ -4,4 \end{pmatrix}$ alors $ID=\sqrt{3^2+(-4,4)^2}=\sqrt{9+19,36}=\underline{\sqrt{28,36}\text{ cm}\neq\sqrt{26}\text{ cm}}$

Conclusion : la distance ID n'étant pas égale au rayon du cercle, D n'appartient pas à $(\mathscr{C})$.

c.4) Le point F a des coordonnées de la forme $(3;y_F)$ où y_F est un réel positif.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IF}$ sont $\begin{pmatrix} 3-0=3 \\ y_F-(-1)=y_F+1 \end{pmatrix}$.

Comme F appartient au cercle $(\mathscr{C})$, alors la distance IF est égale à son rayon $\sqrt{26}$ centimètres. Il vient alors :

$$IF=\sqrt{26} \Leftrightarrow \sqrt{3^2+(y_F+1)^2}=\sqrt{26} \xrightarrow{\text{Carré}} 9+(y_F+1)^2=26$$

$$\Leftrightarrow (y_F+1)^2=17 \Leftrightarrow y_F+1=\sqrt{17} \quad \text{ou} \quad y_F+1=-\sqrt{17}$$

$$y_F=\underline{\sqrt{17}-1} \qquad y_F=\underline{-\sqrt{17}-1}$$

Conclusion : seule la première solution étant positive, nous en déduisons que les coordonnées du point F sont $(3;\sqrt{17}-1)$.

d.1) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BG}+4\times\overrightarrow{CG}=3\times\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G-2 \\ y_G+5 \end{pmatrix}+4\times\begin{pmatrix} x_G+2 \\ y_G-3 \end{pmatrix}=3\times\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G-2 \\ y_G+5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4x_G+8 \\ 4y_G-12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 5x_G+6 \\ 5y_G-7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 \\ -9 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{5x_G+6=21}^{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \overbrace{5y_G-7=-9}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$5x_G=15 \qquad 7y_G=-2$$

$$x_G=\frac{15}{5}=\underline{3} \qquad y_G=\underline{-0,4}$$

Conclusion : le point G a pour coordonnées $(3,4;-0,4)$.

d.2) Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AG}\right)=\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1,6 \end{vmatrix}=5\times 1,6-1\times 8=8-8=\underline{0}$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ étant colinéaires, le point G appartient à la droite (AI).

d.3) Le point G se construit comme étant l'intersection de la droite (AI) et de la droite verticale d'équation $x=3$.

e.1) D'abord, on construit au compas la parallèle à la droite (AB) passant par C. Le point H est l'intersection de cette dernière avec la verticale d'équation $x=6$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

e.2) Les coordonnées du point H sont de la forme $(6; y_H)$.

De plus, comme les droites (IH) et (AB) sont parallèles, alors les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Par conséquent, leur déterminant est nul et il vient alors :

$$\det\left(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{AB}\right) = 0 \iff \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ y_H + 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 3 \times (-3) - (y_H + 1) \times 7 = 0$$

$$\iff -9 - 7y_H - 7 = 0 \iff -7y_H = 16 \iff y_H = -\frac{16}{7}$$

Conclusion : les coordonnées du point H sont $\left(3; -\frac{16}{7}\right)$.

f.1) La médiatrice Δ du segment AB se construit au compas.
Le point L est son intersection avec la droite horizontale d'équation $y = 5$.

f.2) Les coordonnées du milieu J du segment [AB] sont données par :

$$x_J = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{(-5) + 2}{2} = -1{,}5 \qquad \text{et} \qquad y_J = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(-2) + (-5)}{2} = -3{,}5$$

f.3) Les coordonnées du point L sont de la forme $(x_L; 5)$.
La médiatrice Δ est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le milieu J.
Comme le point L appartient à la droite Δ, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix} x_L + 1{,}5 \\ 8{,}5 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. Donc leur test d'orthogonalité est nul.

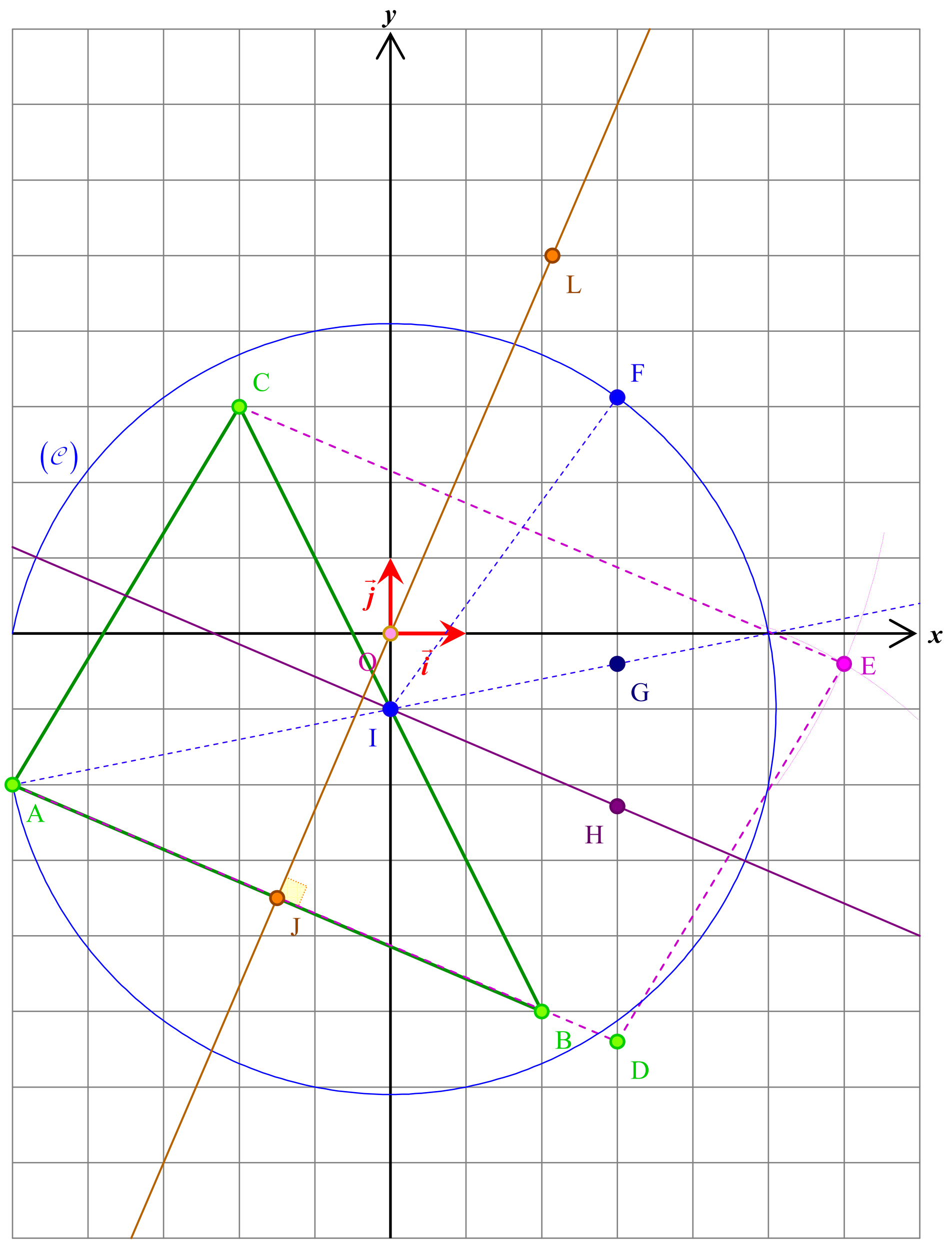
$$x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{JL}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{JL}} = 0 \iff 7 \times (x_L + 1{,}5) + (-3) \times 8{,}5 = 0$$

$$\iff 7x_L + 10{,}5 - 25{,}5 = 0$$

$$\iff 7x_L = 15 \iff x_L = \frac{15}{7}$$

Conclusion : les coordonnées du point L sont $\left(\frac{15}{7}; 5\right)$.

A l'issue du problème, la figure est celle ci-contre ➢



Ultra-droites !

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ où une unité graphique vaut un centimètre. Dans ce repère, on a placé les points :

$A(-1;-1)$ $B(6;3)$ $C(1;4)$ $D(2;2)$ $E(5;-3)$

a) On appelle I et J les milieux respectifs des segments [BC] et [AC].

1. Calculer les coordonnées des points I et J.
2. Démontrer que le point D appartient aux droites (AI) et (BJ).
3. Que peut-on en déduire quant au point D ?

b) On appelle Δ la droite d'équation $2x+5y=27$.

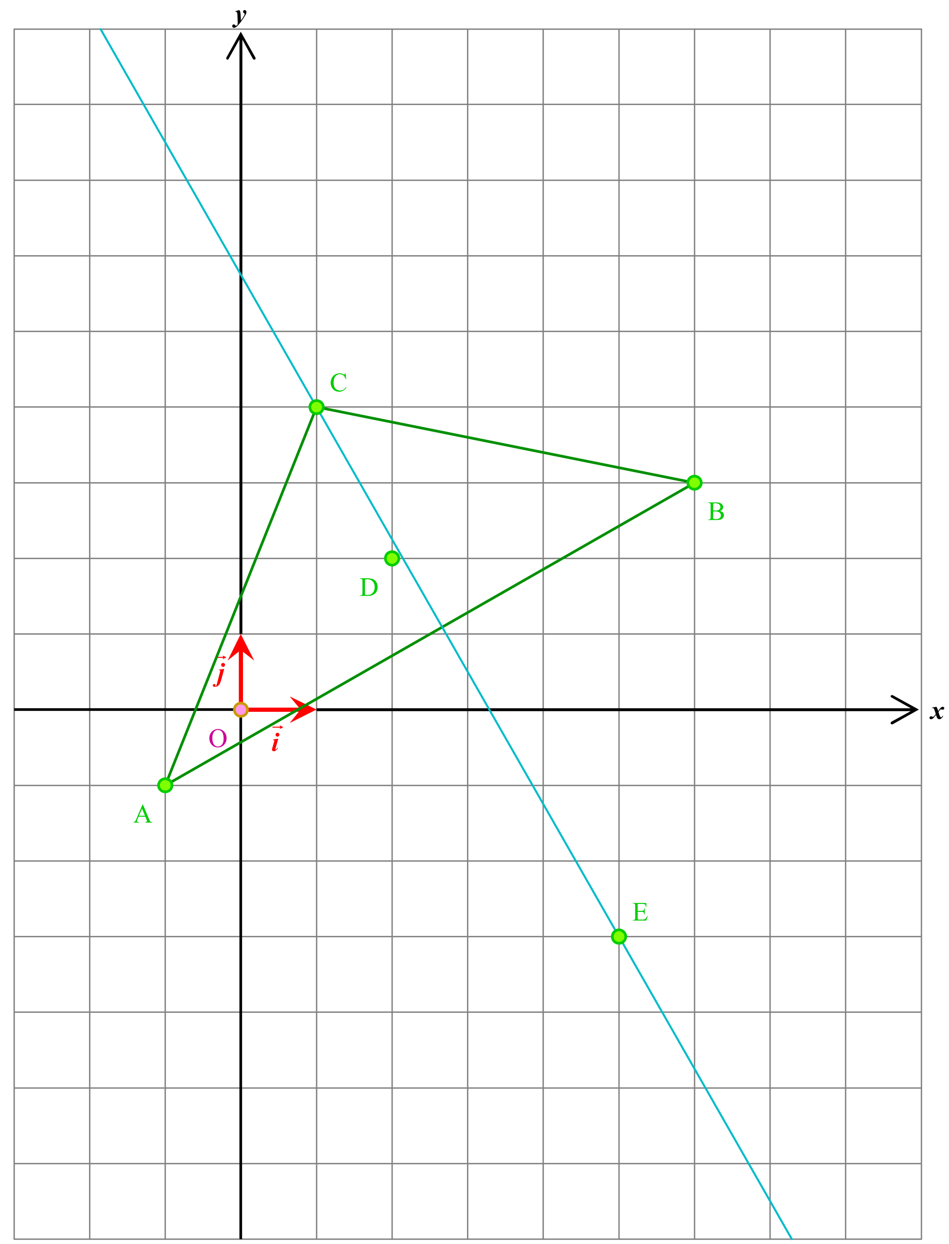
1. Le point B appartient-il à la droite Δ ? On justifiera sa réponse.
2. Donner un vecteur directeur de la droite Δ.
3. Tracer la droite Δ sur la figure ci-contre.
4. La droite Δ est-elle perpendiculaire à la droite (AC) ? On justifiera sa réponse.
5. Déterminer une équation de la droite Δ' qui est la parallèle à la droite Δ passant par J.
6. Que sont les droites Δ et Δ' par rapport au triangle ABC ?

c) On s'intéresse à l'intersection des droites Δ et (CE).

1. Démontrer que les droites Δ et (CE) ne sont pas parallèles.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CE).
3. Déterminer les coordonnées du point H qui est l'intersection des droites (CE) et Δ.
4. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

d) On appelle d la médiatrice du segment [BC].

1. Déterminer une équation de la droite d.
2. Déterminer les coordonnées du point K qui est l'intersection des droites Δ' et d.
3. Etablir que les points D, H et K sont alignés.



Le corrigé

a.1) Comme I est le milieu du segment [BC], alors ses coordonnées sont données par :

$$x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{6+1}{2} = \boxed{3{,}5} \quad \underline{\text{et}} \quad y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3+4}{2} = \boxed{3{,}5}$$

De même, les coordonnées du point J milieu du segment [AC] sont données par :

$$x_J = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{(-1)+1}{2} = \boxed{0} \quad \underline{\text{et}} \quad y_J = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{(-1)+4}{2} = \boxed{1{,}5}$$

a.2) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 4{,}5 \\ 3 & 4{,}5 \end{vmatrix} = 3\times 4{,}5 - 3\times 4{,}5 = 13{,}5 - 13{,}5 = \boxed{0}$$

Leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et le point D appartient à la droite (AI).

De même, les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BJ}\right) = \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -1 & -1{,}5 \end{vmatrix} = (-4)\times(-1{,}5) - (-1)\times(-6) = 6 - 6 = \boxed{0}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires, alors les point B, D et J sont alignés.

a.3) D étant le point d'intersection des médianes (AI) et (BJ), il est le centre de gravité du triangle ABC.

b.1) Les coordonnées du point B vérifient-elles l'équation de la droite Δ ?

$$2x_B + 5y_B = 2\times 6 + 5\times 3 = 12 + 15 = 27 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Equation vérifiée !}}$$

<u>Conclusion :</u> ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point B appartient à la droite Δ.

b.2) D'après son équation $\boxed{2}\times x + \boxed{5}\times y = 27$, un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -\boxed{5} \\ \boxed{2} \end{pmatrix}$.

b.3) La droite Δ se trace en démarrant le vecteur $\vec{u}$ au départ du point B.

b.4) Regardons si le vecteur $\vec{u}$ directeur pour Δ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AC}$ avec notre test d'orthogonalité :

$$x_{\vec{u}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\vec{u}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = (-5)\times 2 + 2\times 5 = -10 + 10 = \boxed{0} \quad \boxed{\text{Test d'orthogonalité vérifié !}}$$

<u>Conclusion :</u> comme les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, alors les droites Δ et (AC) sont perpendiculaires.

b.5) La droite Δ′ étant parallèle à la droite Δ d'équation $\boxed{2x+5y} = 27$ admet elle aussi une équation de la forme $\boxed{2x+5y} = c$ où c est une constante à déterminer.

Comme le point J appartient à la droite Δ′, alors les coordonnées du premier vérifient l'équation de la seconde.

$$c = 2x_J + 5y_J = 2\times 0 + 5\times 1{,}5 = 0 + 7{,}5 = \boxed{7{,}5}$$

<u>Conclusion :</u> une équation de la droite Δ′ est $2x + 5y = 7{,}5$.

b.6) La droite Δ est la perpendiculaire à la droite (AC) passant par B. Donc Δ est la hauteur du triangle ABC issue de B.

La droite Δ′ est la perpendiculaire au segment [AC] passant par son milieu J. Autrement dit, la droite Δ′ est la médiatrice du segment [AC].

c.1) Les vecteurs $\vec{u}$ directeur pour Δ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\vec{u}, \overrightarrow{CE}\right) = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = (-5)\times(-7) - 2\times 4 = 35 - 8 = \boxed{27 \neq 0}$$

Comme leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas colinéaires, alors les droites Δ et (CE) ne sont pas parallèles mais sécantes.

c.2) Déterminons une équation de la droite (CE).

$$\begin{aligned} M(x;y) \in (CE) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Les vecteurs } \overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{CE} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CE}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ y-4 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\times(-7) - (y-4)\times 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -7x + 7 - 4y + 16 = 0 \quad \xrightarrow{\times(-1)} \quad \boxed{7x + 4y - 23 = 0} \end{aligned}$$

c.3) Comme le point H appartient aux droites Δ et (CE), alors les coordonnées du premier vérifient les équations des secondes :
$$\begin{cases} 2x_H + 5y_H = 27 & \textit{(1)} \quad \leftarrow H \in \Delta \\ 7x_H + 4y_H = 23 & \textit{(2)} \quad \leftarrow H \in (CE) \end{cases}$$

Résolvons ce système par un double coup de combinaisons linéaires !

Pour obtenir x_H, on élimine y_H.

$$\begin{aligned} \textit{(1)} \xrightarrow{\times 4} \quad 8x_H + 20y_H &= 108 \\ \textit{(2)} \xrightarrow{\times 5} \quad 35x_H + 20y_H &= 115 \quad \ominus \\ \hline -27x_H &= -7 \\ x_H = \frac{-7}{-2} &= \boxed{\frac{7}{27}} \end{aligned}$$

Pour obtenir y_H, on élimine x_H.

$$\begin{aligned} \textit{(1)} \xrightarrow{\times 7} \quad 14x_H + 35y_H &= 189 \\ \textit{(2)} \xrightarrow{\times 2} \quad 14x_H + 8y_H &= 46 \quad \ominus \\ \hline 27y_H &= 143 \\ y_H &= \boxed{\frac{143}{27}} \end{aligned}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

c.4) Les droites (CE) et (AB) sont perpendiculaires car les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. En effet :

$$x_{\overrightarrow{CE}} \times x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{CE}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = 4 \times 7 + (-7) \times 4 = 28 - 28 = 0 \quad \boxed{\text{Test d'orthogonalité vérifié !}}$$

Par conséquent, la droite (CE) est la hauteur du triangle ABC issue de C.

Conclusion : le point H étant l'intersection des hauteurs Δ et (CE), est l'orthocentre du triangle ABC.

d.1) La médiatrice d est la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point I. Ainsi :

$$\begin{aligned} M(x;y) \in d &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{IM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{IM}} \times x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{IM}} \times y_{\overrightarrow{BC}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3{,}5)\times(-5) + (y-3{,}5)\times 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -5x + 17{,}5 + y - 3{,}5 = 0 \Leftrightarrow \underline{-5x + y + 14 = 0} \end{aligned}$$

d.2) Comme le point K appartient aux deux droites Δ′ et d, alors ses coordonnées en vérifient les deux équations :

$$\begin{cases} 2x_K + 5y_K = 7{,}5 & \textit{(1)} \quad \leftarrow K \in \Delta' \\ -5x_K + y_K = -14 & \textit{(2)} \quad \leftarrow K \in d \end{cases}$$

Procédons par substitution. A partir de l'équation ***(2)***, on exprime y_K en fonction de x_K.

$$y_K = 5x_K - 14$$

Puis, on remplace y_K par ce qu'il vaut en x_K dans l'équation ***(1)***.

$$2x_K + 5(5x_K - 14) = 7{,}5 \Leftrightarrow 2x_K + 25x_K - 70 = 7{,}5 \Leftrightarrow 27x_K = 77{,}5$$

$$\Leftrightarrow x_K = \frac{77{,}5}{27} = \underline{\frac{155}{54}}$$

Nous en déduisons que :

$$y_K = 5 \times \frac{155}{54} - 14 = \frac{775}{54} - \frac{756}{54} = \underline{\frac{19}{54}}$$

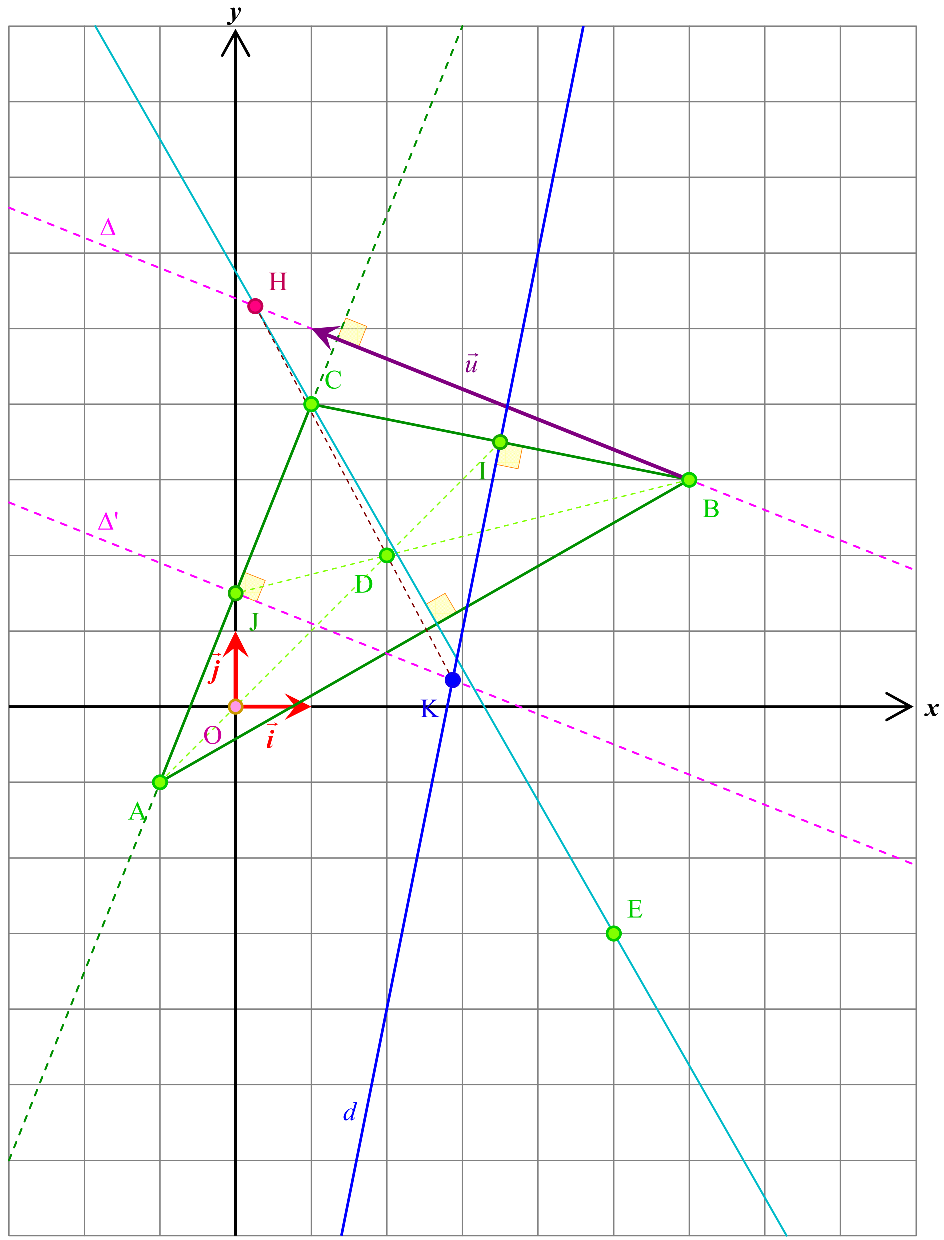
d.3) Les vecteurs $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DK}\right) = \begin{vmatrix} -47/27 & 47/54 \\ 89/27 & -89/54 \end{vmatrix} = \frac{-47}{27} \times \frac{-89}{54} - \frac{89}{27} \times \frac{47}{54} = \frac{4183}{1458} - \frac{4183}{1458} = \underline{0}$$

Comme leur déterminant est nul, alors $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires.

Conclusion : le centre de gravité D, l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit K du triangle ABC sont alignés. Il en est toujours ainsi. Ces trois points appartiennent à une même droite appelée «droite d'Euler».

A l'issue du problème, la figure est la suivante :



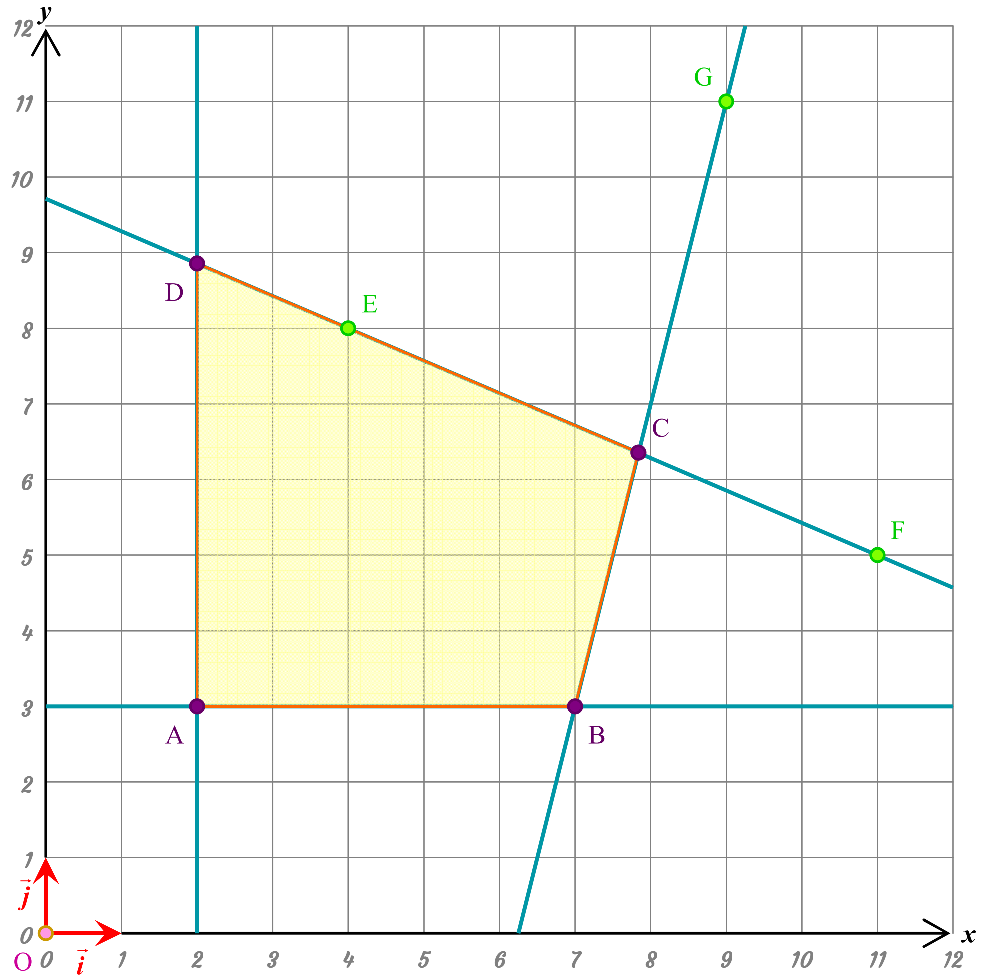
Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Les droites, frontières d'un polygone

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ où une unité graphique vaut un centimètre. Dans ce repère, on a placé les points :

$A(2;3)$ $B(7;3)$ $E(4;8)$ $F(11;5)$ $G(9;11)$



a) On appelle C le point d'intersection des droites (EF) et (BG).

1. Déterminer une équation de la droite (EF).
2. Déterminer une équation de la droite (BG).
3. En déduire les coordonnées du point C.

b) Déterminer les coordonnées de D qui est le point de la droite (EF) dont l'abscisse est égale à 2.

c) Déterminer un système d'inéquations que doivent vérifier les coordonnées $(x;y)$ d'un point M pour qu'il appartienne à l'intérieur du polygone ABCD.

d) On appelle Δ la droite d'équation $2x+3y=20$.

1. Tracer la droite Δ sur le graphique ci-contre.
2. A partir du graphique, donner les coordonnées de tous les points à coordonnées entières de la droite Δ se trouvant à l'intérieur du polygone ABCD.
3. Soit Δ' une parallèle quelconque à la droite Δ.
   Au maximum, combien de points à coordonnées entières de cette droite Δ' peuvent-ils se situer à l'intérieur du polygone ABCD ? On expliquera sa démarche.

Le corrigé

a.1) La droite (EF) est définie par son point $E(4;8)$ et son vecteur directeur $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}M(x;y)\in(EF) &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{EM} \text{ et } \overrightarrow{EF} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EF}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-4 & 7\\ y-8 & -3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-4)\times(-3)-(y-8)\times 7=0\\ &\Leftrightarrow -3x+12-7y+56=0 \xrightarrow{\times(-1)} \underline{3x+7y-68=0}\end{aligned}$$

a.2) La droite (BG) est définie par son point $B(7;3)$ et son vecteur directeur $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}M(x;y)\in(BG) &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BG} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BG}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-7 & 2\\ y-3 & 8\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-7)\times 8-(y-3)\times 2=0\\ &\Leftrightarrow 8x-56-2y+6=0 \xrightarrow{\div 2} \underline{4x-y-50=0}\end{aligned}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

a.3) C étant le point d'intersection des droites (EF) et (BG), ses coordonnées sont les solutions du système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 3x_C + 7y_C = 68 & \textit{(1)} \quad \leftarrow C \in (EF) \\ 2x_C - y_C = 50 & \textit{(2)} \quad \leftarrow C \in (BG) \end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système 2×2 par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour obtenir x_C, on élimine y_C.	Pour obtenir y_C, on élimine x_C.
(1) $\xrightarrow{\quad}$ $3x_H + 7y_C = 68$ $\oplus$	*(1)* $\xrightarrow{\times 4}$ $12x_C + 28y_C = 272$ $\ominus$
(2) $\xrightarrow{\times 7}$ $28x_H - 7y_C = 175$	*(2)* $\xrightarrow{\times 3}$ $12x_C - 3y_C = 75$
$31x_C = 243$	$31y_C = 197$
$x_C = \boxed{\dfrac{243}{31}}$	$y_C = \boxed{\dfrac{197}{31}}$

b) Comme le point D appartient à la droite (EF), alors ses coordonnées $(2; y_E)$ en vérifient l'équation :

$$3 \times 2 + 7y_E = 68 \quad \Leftrightarrow \quad 7y_E = 68 - 6 = 62 \quad \Leftrightarrow \quad y_E = \boxed{\frac{62}{7}}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point D sont $\left(2; \dfrac{62}{7}\right)$.

c) Rappelons qu'une droite ***d*** d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans :

> Sur l'un de ces demi-plans, l'expression $ax + by + c$ est toujours positive.
> Sur l'autre demi-plan, l'expression $ax + by + c$ est toujours négative.

Pour connaître quel demi-plan est négatif ou positif, le mieux est encore de regarder le cas de l'origine. L'expression $ax + by + c$ devient alors $a \times 0 + b \times 0 + c = c$.
Le demi-plan contenant l'origine appartient toujours au demi-plan du signe de c.

En conséquence, le système d'inéquations linéaires caractérisant l'appartenance au polygone ABCD est :

$$\begin{cases} x \geq 2 & \leftarrow \text{A gauche de la droite verticale (AD).} \\ y \geq 3 & \leftarrow \text{Au dessus de la droite horizontale (AB).} \\ 2x - y - 25 \leq 0 & \leftarrow \text{Demi-plan négatif à gauche de la droite (BC).} \\ 3x + 7y - 68 \leq 0 & \leftarrow \text{Demi-plan négatif au dessous de la droite (CD).} \end{cases}$$

d.1) Un point de la droite Δ est le point $K(4;4)$ car $2 \times 4 + 3 \times 4 = 8 + 12 = 20$

D'après son équation $\boxed{2} \times x + \boxed{3} \times y = 20$, un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -\boxed{3} \\ \boxed{2} \end{pmatrix}$.

Utilisant ce point K et la direction fourni par $\vec{u}$, on trace la droite Δ.

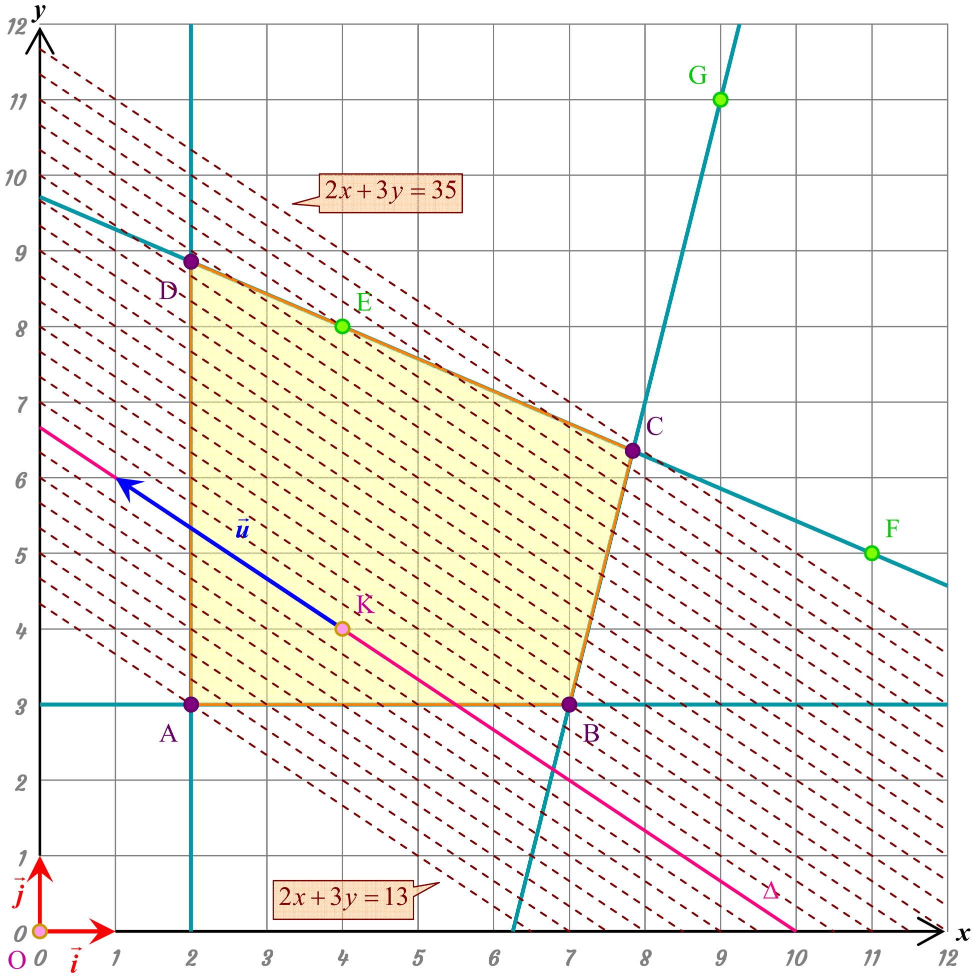
d.2) Graphiquement, on observe que la droite Δ n'accroche qu'un seul point à coordonnées entières à l'intérieur du polygone ABCD. Il s'agit du point K.

d.3) Du fait de l'abscisse -3 de son vecteur directeur $\vec{u}$, deux points à coordonnées entières de la parallèle Δ' ont leurs abscisses distantes d'au moins trois unités.
Or, dans sa plus grande «largeur d'abscisse», le polygone ABCD mesure moins de 6 unités.
Par conséquent, une parallèle Δ' accroche au plus deux points à coordonnées entières à l'intérieur du polygone ABCD.
C'est par exemple le cas de la parallèle passant par B qui a pour équation $2x + 3y = 23$.

Toute parallèle Δ' à la droite Δ qui passe par un point à coordonnées entières a une équation de la forme $2x + 3y = c$ où c est un entier relatif.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé toutes ces parallèles Δ' recouvrant le polygone ABCD. Elles accrochent au mieux deux points à coordonnées entières à l'intérieur du polygone.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

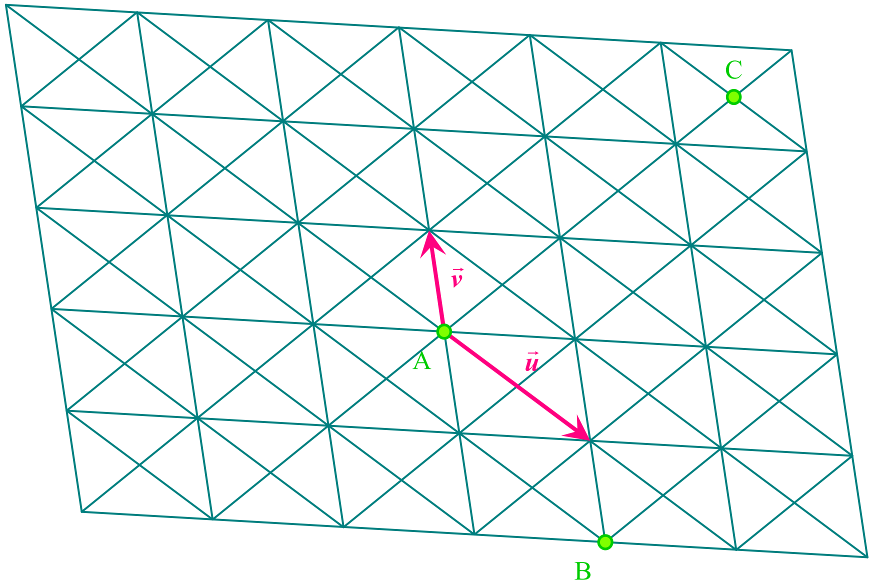
Géométrique classique

Les sentiers vectoriels

L'énoncé

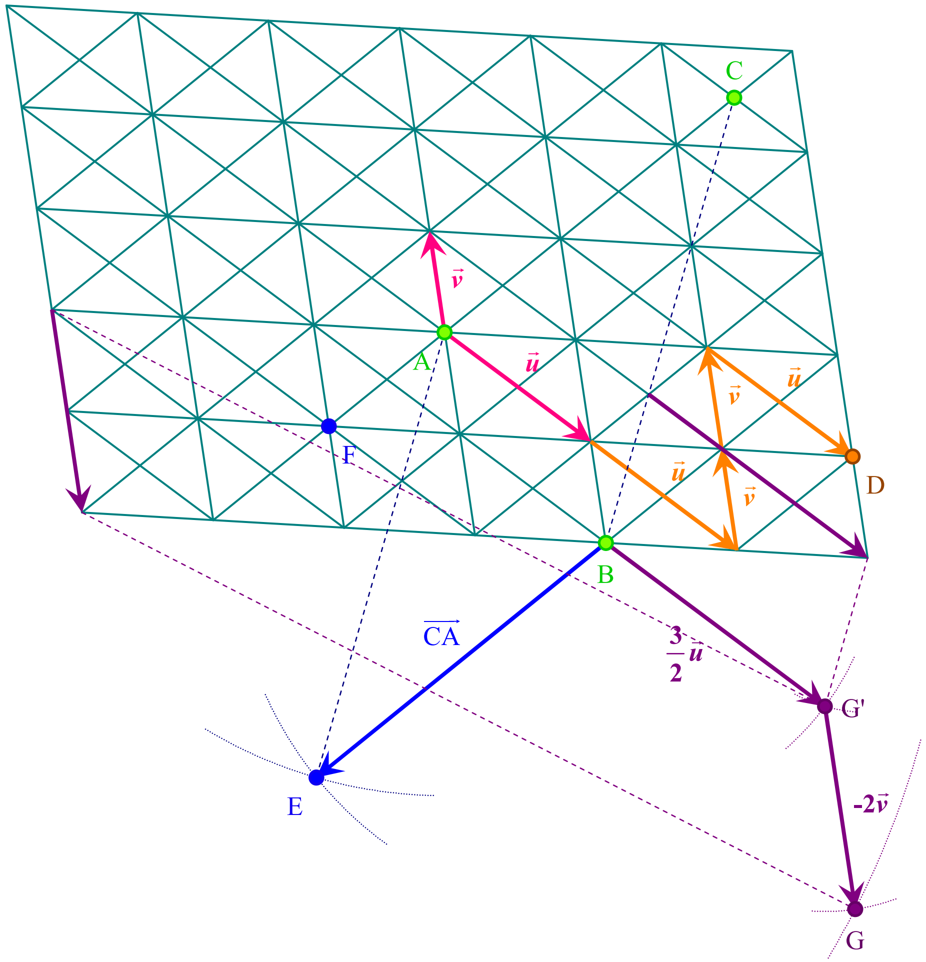
En recourant au pavage ou en utilisant le compas, construire sur le graphique ci-dessous les points D, E, F et G définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{AD} = 3\vec{u} + 2\vec{v} \qquad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA} \qquad \overrightarrow{CF} = \frac{7}{5}\overrightarrow{CA} \qquad \overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$$



Le corrigé

La figure finale avec les quatre points construits avec le quadrillage et au compas est celle ci-contre ➔

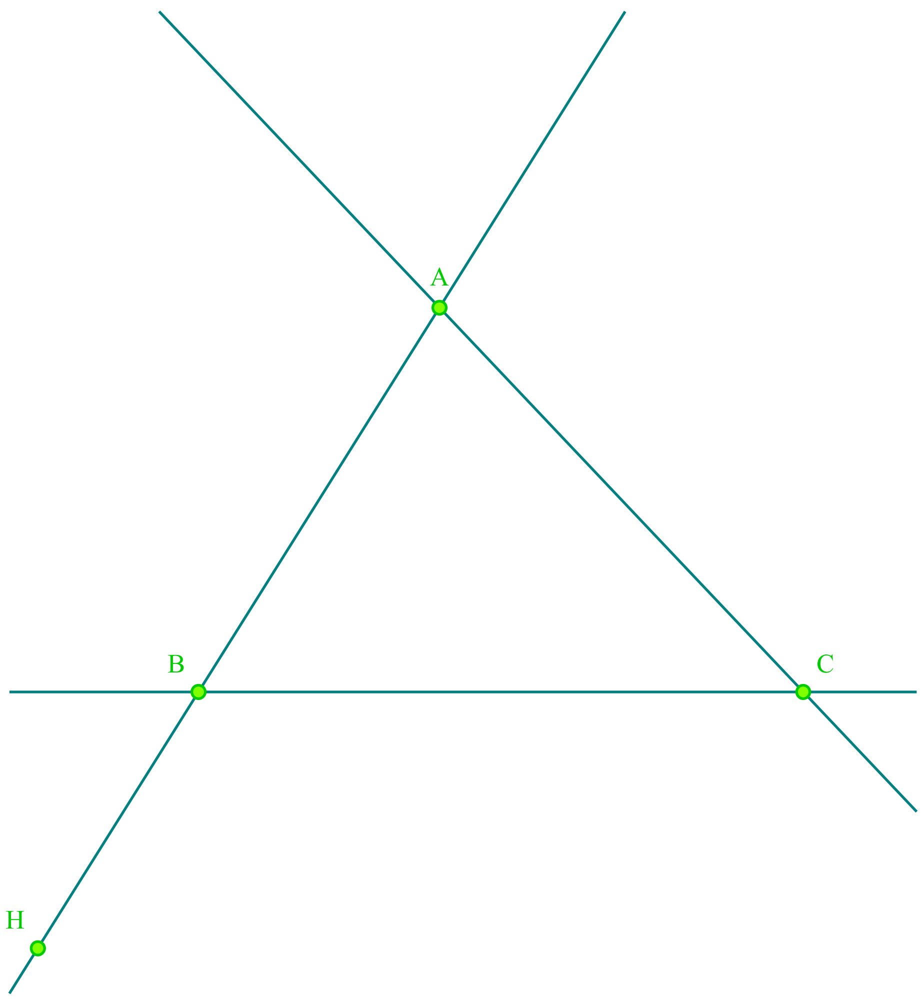


Les nouveaux sentiers vectoriels !

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle tel que :

AB = 6 cm AC = 7 cm BC = 8 cm



a) Sur la figure ci-contre, placer les points D et E définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = \frac{2}{5}\times\overrightarrow{CA}$$

b) Le point H est situé sur la droite (AB) à 4 centimètres du point B à l'opposé de A.
Sans justifications, compléter les deux relations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{BH} = \ldots\ldots\times\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \ldots\ldots\times\overrightarrow{AH} + \ldots\ldots\times\overrightarrow{BH} = \vec{o}$$

c) Le point F est défini par la relation vectorielle :

$$5\times\overrightarrow{BF} + 3\times\overrightarrow{CF} = \vec{o}$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
   Autrement dit, il s'agit d'établir une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{BF} = \ldots\times\overrightarrow{BC}$
2. Placer le point F sur la figure ci-contre.

d) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$2\times\overrightarrow{AG} + 5\times\overrightarrow{BG} + 3\times\overrightarrow{CG} = \vec{o}$$

1. Compléter avec les points adéquats, l'égalité vectorielle suivante :
   $$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{B\ldots} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{\ldots G}$$
2. En utilisant la question précédente, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AF}$.
   Autrement dit, il s'agit d'établir une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{AG} = \ldots\times\overrightarrow{AF}$
3. Placer le point G sur la figure. On vérifiera graphiquement que le point G est le milieu du segment [BE].

Le corrigé

a) Le point D se construit au compas comme étant le quatrième sommet du parallélogramme ABDC.
Le point E se positionne aux trois cinquièmes du segment [CA], soit 2,8 cm de C.

b) Comparons les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BA}$.

Ils ont même direction
Ils sont de sens opposés
Le rapport des normes BH/BA est 4/6

$$\Rightarrow \overrightarrow{BH} = -\frac{4}{6}\times\overrightarrow{BA} = \boxed{-\frac{2}{3}\times\overrightarrow{BA}}$$

Il vient alors :

$$\overrightarrow{BH} = -\frac{2}{3}\times\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} + \frac{2}{3}\times\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}\right) = \vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} + \frac{2}{3}\times\overrightarrow{BH} + \frac{2}{3}\times\overrightarrow{HA} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}\times\overrightarrow{BH} - \frac{2}{3}\times\overrightarrow{AH} = \vec{o} \xrightarrow{\times 3} \boxed{5\times\overrightarrow{BH} - 2\times\overrightarrow{AH} = \vec{o}}$$

En fait, tout couple multiple de $(-2;5)$ satisfait l'égalité vectorielle.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

c.1) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$

$$5\times\overrightarrow{BF}+3\times\overrightarrow{CF}=\vec{o} \Leftrightarrow 5\times\overrightarrow{BF}+3\times\overbrace{\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}\right)}^{\text{Chasles}}=\vec{o}$$
$$\Leftrightarrow 5\times\overrightarrow{BF}+3\times\overrightarrow{CB}+3\times\overrightarrow{BF}=\vec{o}$$
$$\Leftrightarrow 8\times\overrightarrow{BF}=3\times\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{BF}=\frac{3}{8}\times\overrightarrow{BC}}$$

c.2) Le point F se situe à 3 centimètres de B sur le segment [BC].

d.1) L'application de la relation de Chasles en passant par les points F et A nous donne :

$$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AG}$$

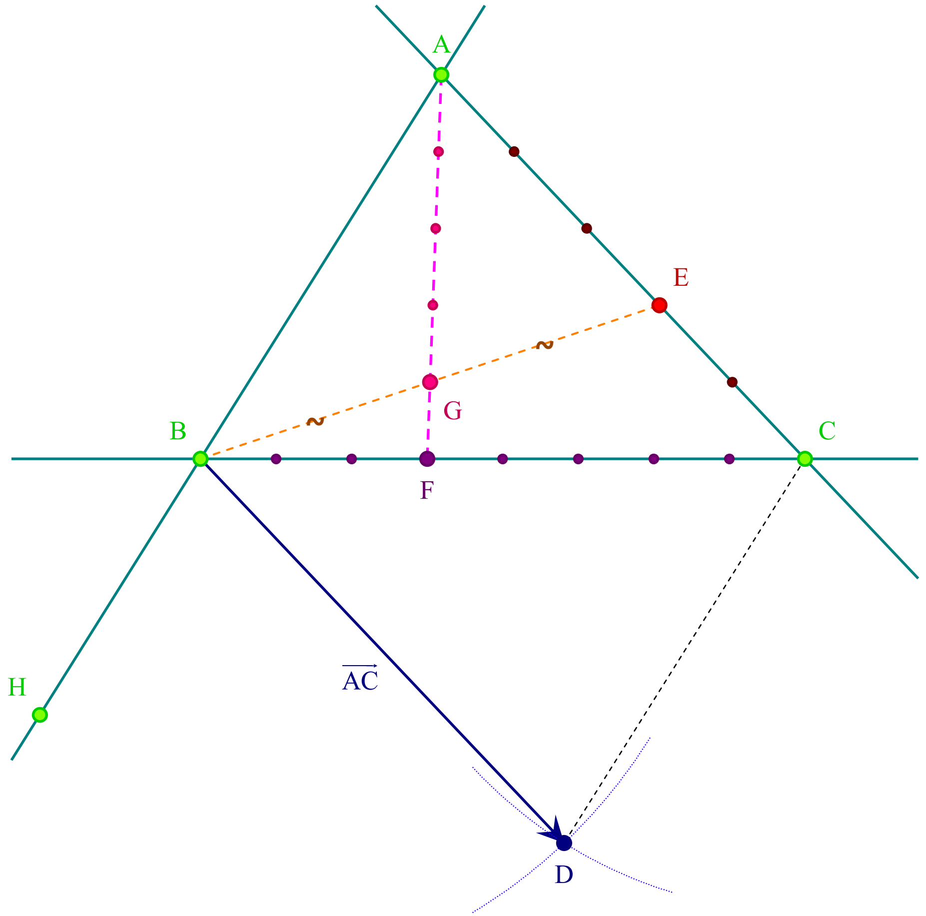
d.2) La question précédente s'étend aussi au vecteur $\overrightarrow{CG}$. Il vient alors :

$$2\times\overrightarrow{AG}+5\times\overrightarrow{BG}+3\times\overrightarrow{CG}=\vec{o}$$
$$\Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{AG}+5\times\overbrace{\left(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AG}\right)}^{\text{Chasles}}+3\times\overbrace{\left(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AG}\right)}^{\text{Chasles}}=\vec{o}$$
$$\Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{AG}+5\times\overrightarrow{BF}+5\times\overrightarrow{FA}+5\times\overrightarrow{AG}+3\times\overrightarrow{CF}+3\times\overrightarrow{FA}+3\times\overrightarrow{AG}=\vec{o}$$
$$\Leftrightarrow 10\times\overrightarrow{AG}+8\times\overrightarrow{FA}+\underbrace{5\times\overrightarrow{BF}+3\times\overrightarrow{CF}}_{=\vec{o}}=\vec{o}$$

Finalement :

$$10\times\overrightarrow{AG}+8\times\overrightarrow{FA}=\vec{o} \Leftrightarrow 10\times\overrightarrow{AG}=8\times\overrightarrow{AF} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{8}{10}\times\overrightarrow{AF}=\frac{4}{5}\times\overrightarrow{AF}}$$

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre ➔

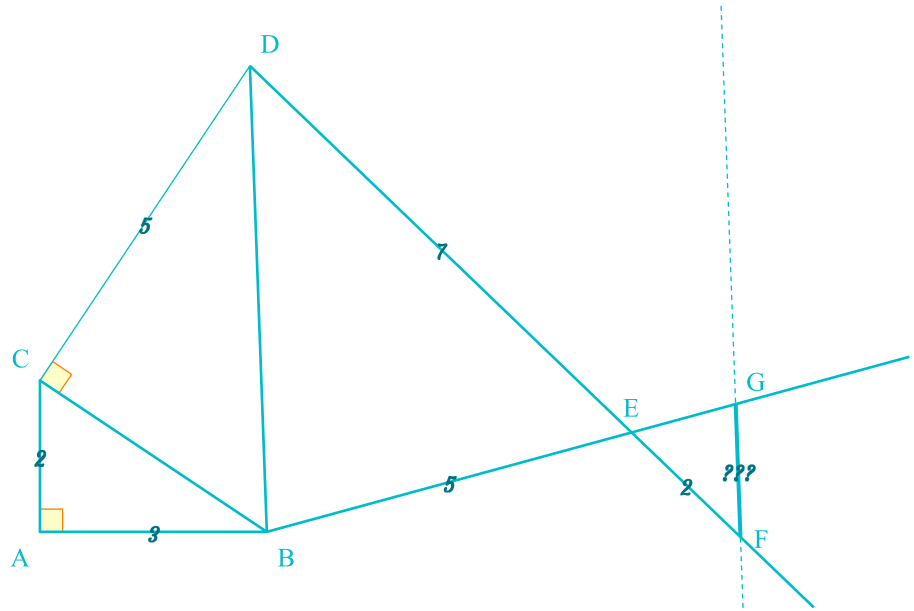


Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Déchaînement géométrique

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, les distances entre deux points consécutifs sont exprimées en centimètres. De plus, on sait que les droites (FG) et (BD) sont parallèles.
Calculer la valeur exacte de la longueur FG.



Le corrigé

Comme le triangle ABC est rectangle en A, alors, en application du théorème de Pythagore, il vient :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 \text{ cm}^2$$

Ensuite, le théorème de Pythagore s'applique aussi dans le triangle BCD rectangle en B :

$$CD^2 = CB^2 + BD^2 = 13 + 5^2 = 13 + 25 = 38 \text{ cm}^2$$

Donc la longueur CD mesure exactement $\sqrt{38}$ centimètres.

Enfin, comme | les droites (FG) et (BD) sont parallèles,
| les droites (BG) et (FD) sont sécantes en E,

alors, en application du théorème de Thalès appliqué depuis le point E, nous pouvons écrire :

$$\frac{EF}{ED} = \frac{EG}{EB} = \frac{FG}{BD} \Leftrightarrow \frac{2}{7} = \frac{EG}{5} = \frac{FG}{\sqrt{38}} \Leftrightarrow FG = \frac{2}{7}\sqrt{38} \text{ centimètres}$$

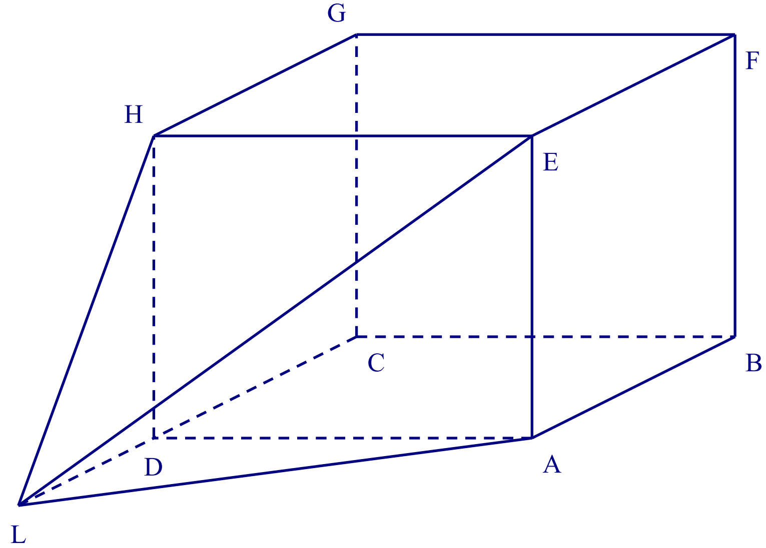
L'heure spatiale

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, on a représenté en perspective cavalière le pavé droit ABCDEFGH dont les dimensions sont :

AB = 3 centimètres AE = 4 centimètres AD = 5 centimètres

On a complété la figure avec le point L se trouvant sur la droite (CD) à 2 centimètres de D.



a) Cette sous-partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, trois propositions sont faites mais une seule est juste. Mais laquelle ? On entourera la proposition choisie.
Chaque bonne réponse rapporte 0,75 points. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rajoute, ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

a.1. Les droites (AH) et (CF) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

a.2. La droite (AL) et le plan (CFG) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse.	La droite est incluse dans le plan.

a.3. Les plans (ADL) et (EFG) sont :

Sécants	parallèles distincts	Confondus

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

a.4. La droite (BC) et le plan (HEL) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse	La droite est incluse dans le plan

a.5. Les droites (CH) et (EB) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

a.6. La droite (BL) et le plan (ACD) sont :

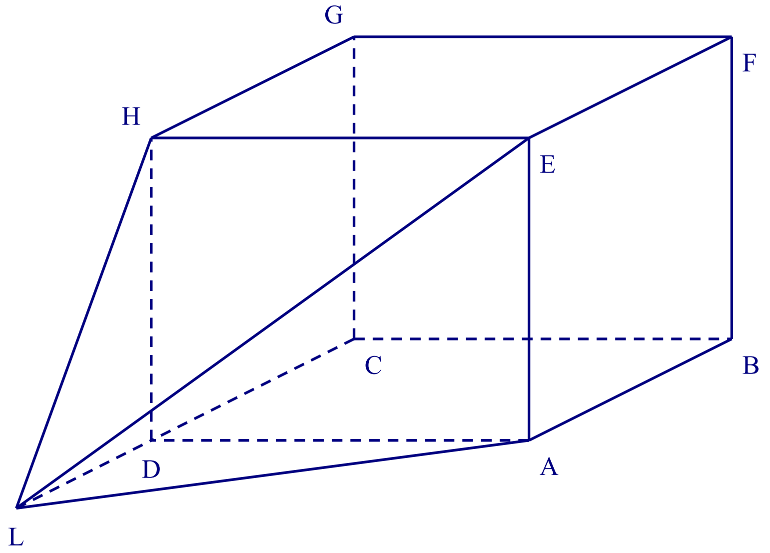
Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse	La droite est incluse dans le plan

b) Calculer les volumes en centimètres cube du pavé droit ABCDEFGH et de la pyramide LBCGF.

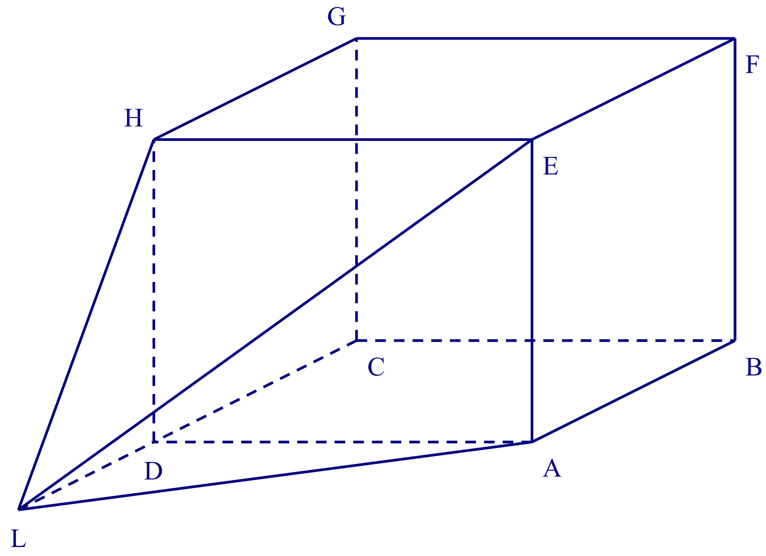
c) Calculer la longueur LF.

d) Sur la figure ci-dessous, placer les points U et V définis par les relations vectorielles suivantes :

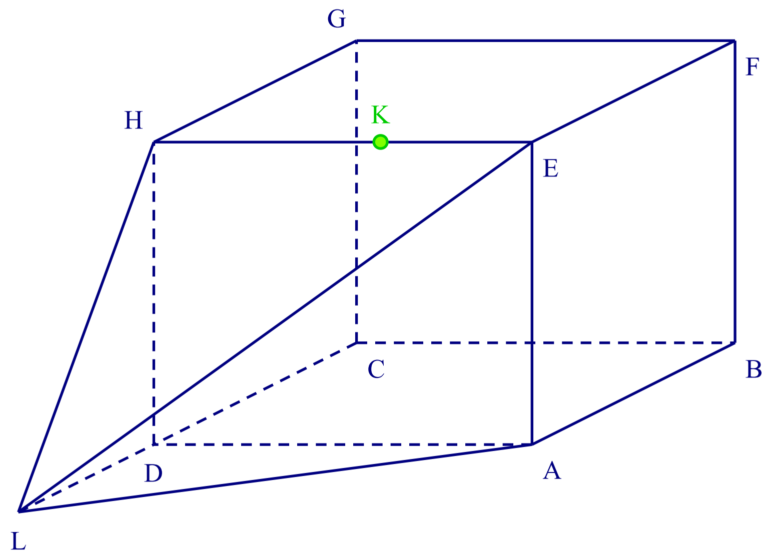
$$\overrightarrow{AU} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AE} \qquad \underline{\text{et}} \qquad \overrightarrow{BV} = \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{CF}$$



e) Sur la figure ci-dessous, tracer l'intersection des plans (LAE) et (LBF). On expliquera sa construction.



f) Sur la figure ci-dessous, K est un point du segment [HE].
Sur la figure ci-dessous, tracer l'intersection des plans (BLK) et (CGF). On expliquera sa construction.

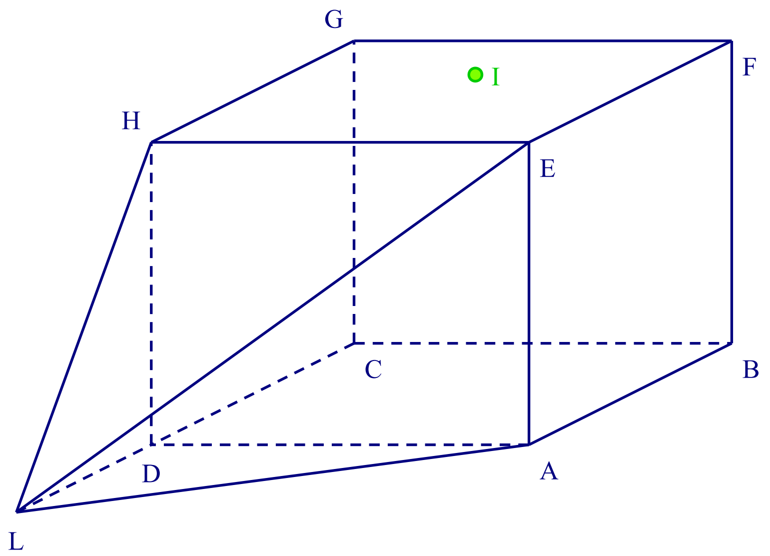


Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

g) Sur la figure ci-dessous, I est un point du plan (GFE) défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{GF} + \frac{1}{3} \times \overrightarrow{FE}$$

Sur la figure ci-dessous, tracer l'intersection des plans (HEL) et (GCI). On expliquera sa construction.



Le corrigé

a) Examinons les questions :

1. Comme le point H n'appartient pas au plan (ACF), alors les droites (AH) et (CF) sont non coplanaires.
2. Les droites (AL) et (BC) sont sécantes dans le plan de base (ABC) en un point M.
   Or, la droite (BC) est incluse dans le plan (CFG).
   Par conséquent, la droite (AL) est sécante à ce plan (CFG) en ce point M.
3. Le plan (ADL) est aussi le plan (ABC) qui est clairement parallèle distinct au plan (EFG).
4. La droite (BC) est parallèle à la droite (EH) qui est incluse dans le plan (HEL).
   Par conséquent, la droite (BC) est parallèle au plan (HEL) mais n'y est pas incluse car les points B et C n'en font pas partie.
5. Les droites (CH) et (EB) sont parallèles distinctes. Ce sont deux diagonales de deux rectangles verticaux superposables.
6. Les points B et L faisant partie du plan (ACD), la droite qu'ils définissent est incluse dans ce plan.

b) Le volume du pavé droit ABCDEFGH est donné par :

$$\text{Volume}\left(\text{Pavé ABCDEFGH}\right) = AB \times AD \times AE = 3 \times 5 \times 4 = \underline{60 \text{ cm}^3}$$

➲ Une base de la pyramide LBCGF est le rectangle BCGF et sa hauteur relative est CL. Par conséquent, le volume de ce solide est donné par :

$$\text{Volume}\left(\text{pyramide LBCGF}\right) = \frac{1}{3} \times \text{base BCGF} \times \text{hauteur CL}$$
$$= \frac{1}{3} \times 5 \times 4 \times \left(3+2\right) = \underline{\frac{100}{3} \text{ cm}^3}$$

c) D'abord, plaçons-nous dans le triangle BCL qui est rectangle en C et où le théorème de Pythagore s'applique :

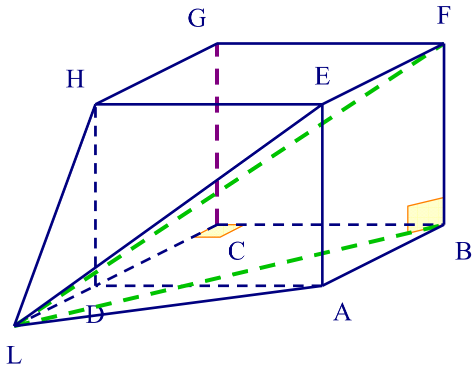
$$LB^2 = LC^2 + CB^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

Donc $LB = \sqrt{50} = \underline{5\sqrt{2} \text{ cm}}$

Le triangle LBF étant lui aussi rectangle en B, Pythgore s'applique encore et :

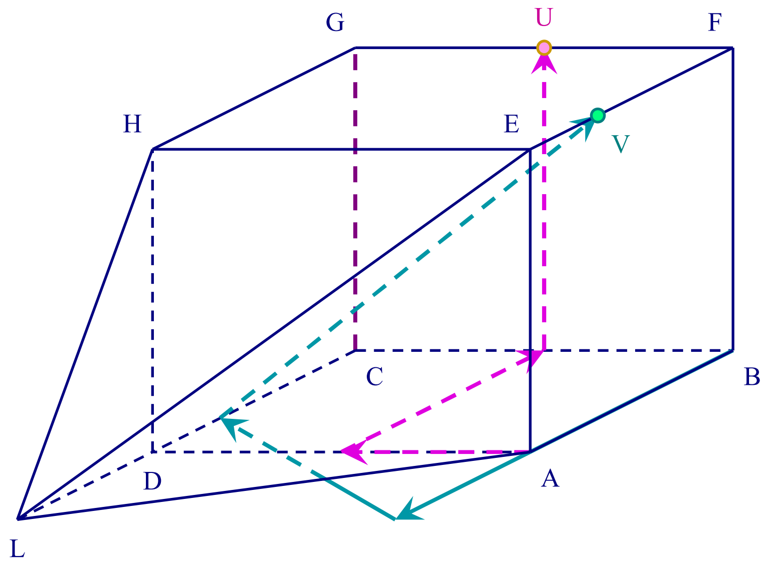
$$LF^2 = LB^2 + BF^2 = 50 + 16 = 66$$

Donc $LF = \underline{\sqrt{66} \text{ cm}}$

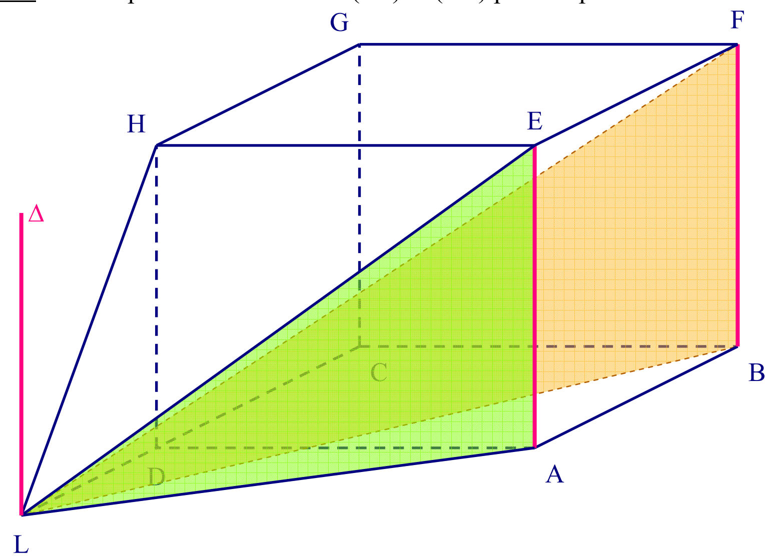


d) Après constructions, le point U s'avère être le milieu du segment [FG], alors que le point V se trouve au tiers du segment [EF] à partir E ainsi que cela a été fait sur la figure ci-après.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

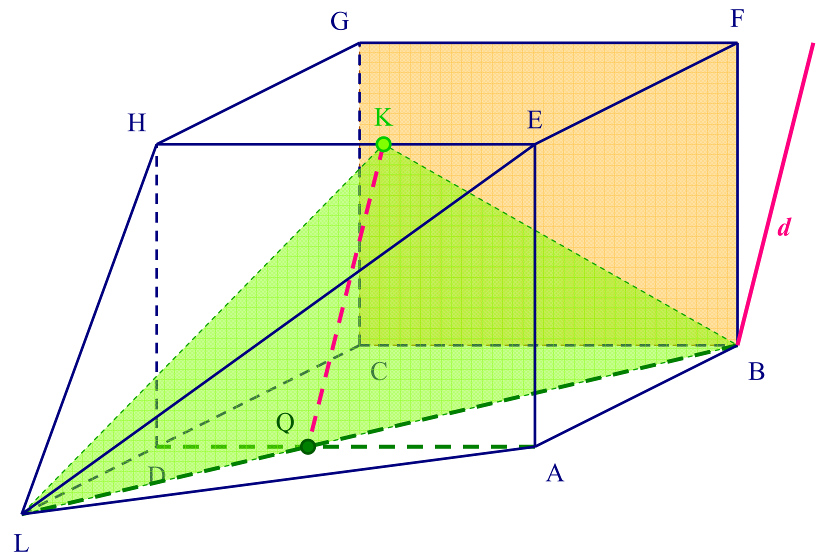


e) Les deux plans (LAE) et (LBF) ayant en commun le point L mais n'étant pas confondus sont par conséquent sécants suivant une droite Δ.
Evidemment, cette droite Δ passe par le point L.
De plus, comme la droite (BF) du plan (LBF) est parallèle à la droite (AE) du plan (LAE), alors, en application du théorème «du toit», l'intersection Δ est parallèle à ces deux droites.
Conclusion : Δ est la parallèle aux droites (BF) et (AE) passant par L.



f) L'intersection des plans sécants (BLK) et (CGF) est une droite ***d*** passant par le point B.
D'après le théorème d'incidence, le plan (BLK) coupe les plans parallèles (CGF) et (DHE) suivant deux droites parallèles.
Reste à déterminer l'intersection des plans (BLK) et (DHE). qui est une droite que nous appellerons ***d'***.
Cette droite ***d'*** passe par leur point commun K. Mais ce n'est pas tout !
En effet, les droites (BL) et (AD) sont sécantes dans le plan (ABC) en un point que nous baptiserons Q. Il est clair : $\left.\begin{array}{l} Q \in \text{droite}(AD) \subset \text{plan}(DHE) \\ Q \in \text{droite}(BL) \subset \text{plan}(BLI) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{Q \in \boldsymbol{d'}}$

Conclusion : l'intersection ***d*** recherchée est la parallèle à la droite $\boldsymbol{d'} = (QK)$ passant par le point B.

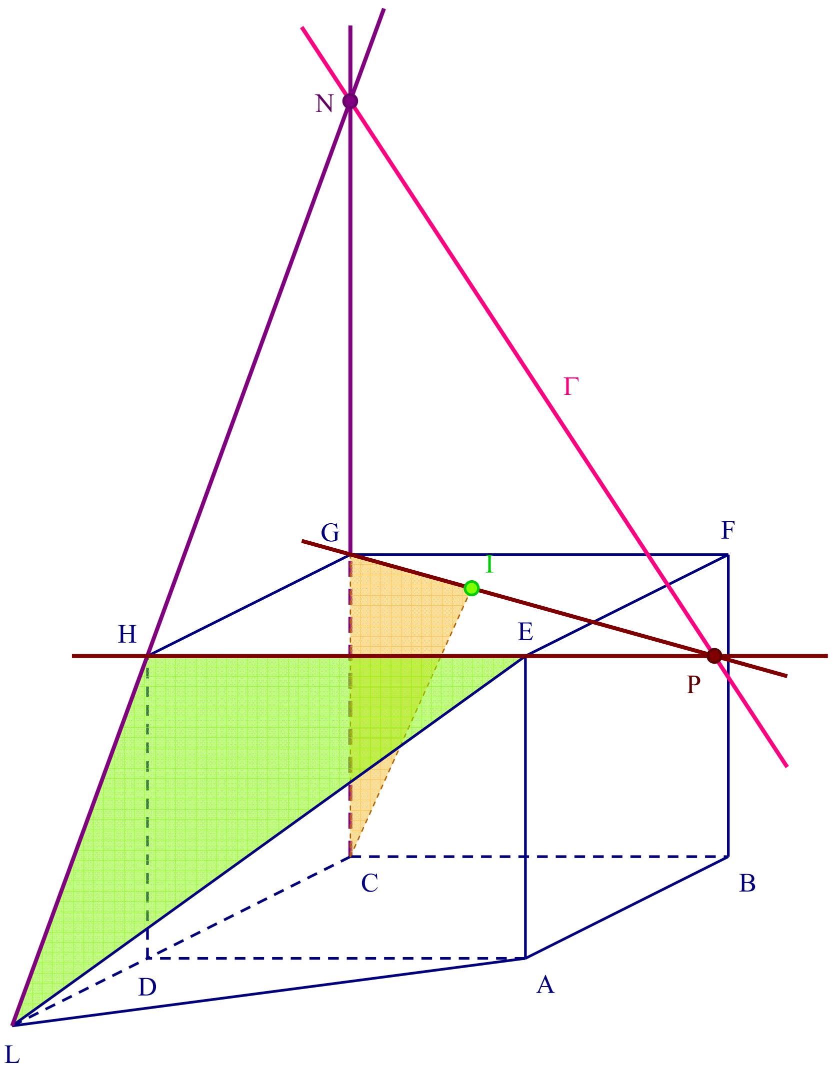


g) Les plans (HEL) et (CGI) n'étant clairement pas parallèles, leur intersection est une droite Γ que nous allons tracer en construisant deux de ses points.
D'abord, les droites (LH) et (CG) sont sécantes dans le plan (LCG) en un point que nous appellerons N. Nous avons alors : $\left.\begin{array}{l} N \in \text{droite}(LH) \subset \text{plan}(HEL) \\ N \in \text{droite}(CG) \subset \text{plan}(CGI) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{N \in \Gamma}$

Ensuite, les droites (GI) et (HE) sont sécantes dans le plan (GFE) en un point que nous baptiserons P. Ce point appartient à Γ car : $\left.\begin{array}{l} P \in \text{droite}(HE) \subset \text{plan}(HEL) \\ P \in \text{droite}(GI) \subset \text{plan}(CGI) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{P \in \Gamma}$

Conclusion : l'intersection Γ recherchée est aussi la droite (NP) ➔

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.



Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Statistiques et probabilités

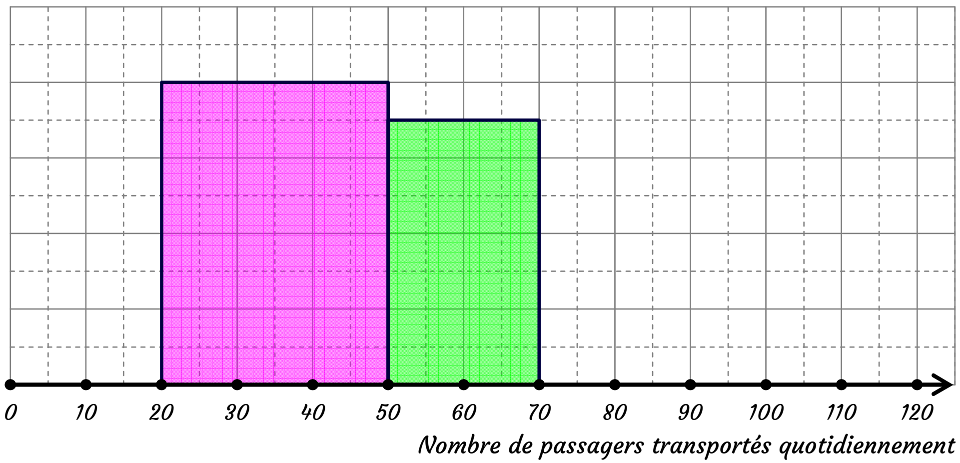
En voiture pour les stats !

L'énoncé

Le comptable des *Tacauds Blancois* vient de comptabiliser le nombre de passagers transportés par les taxis de son entreprise pour chaque jour de l'année 2011.
Pour que son travail soit plus compréhensible par son patron, il a rassemblé ses données en classes de nombres passagers transportés quotidiennement. Il en a résulté la série statistique suivante qui, malheureusement, n'est que partielle.

Classe : nombre de passagers transportés quotidiennement	$[5;20[$	$[20;50[$	$[50;70[$	$[70;100[$	$[100;120[$
Effectif : nombre de jours	30			55	90

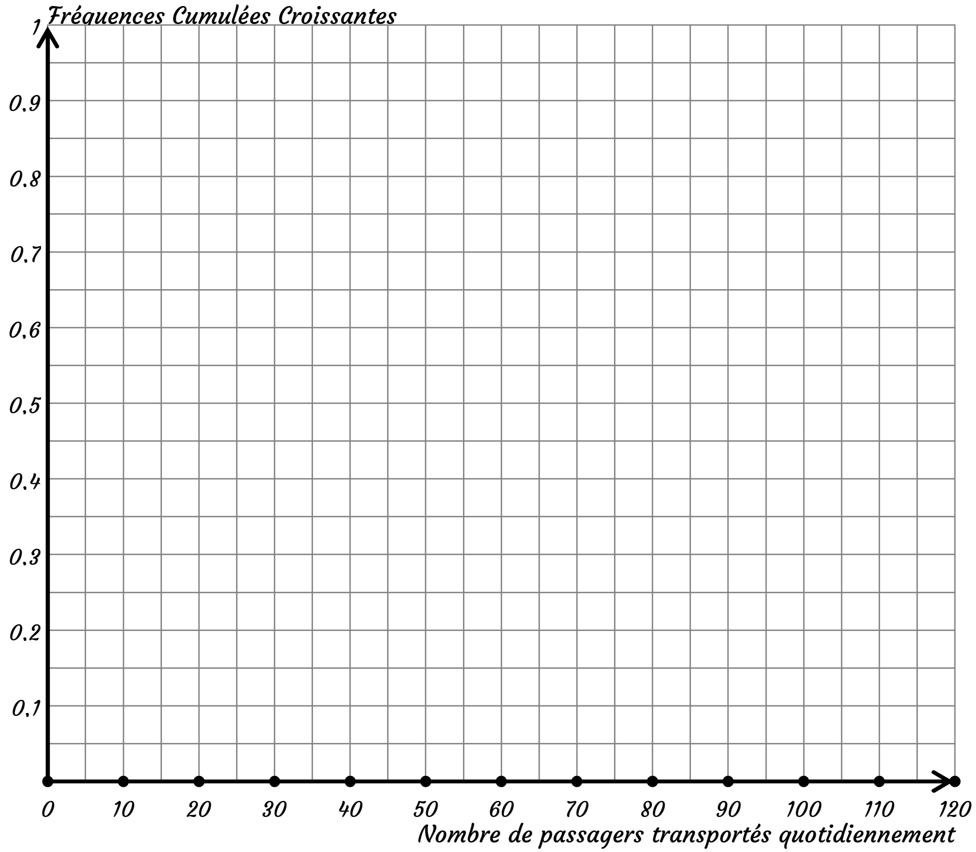
Heureusement, le tableau ci-dessus est complété par l'histogramme ci-dessous où un centimètre carré représente 10 jours.



a) Compléter le tableau et l'histogramme ci-dessus.
On vérifiera qu'il y a autant de jours dans le tableau que dans l'année 2011, soit 365.

b) Calculer le nombre moyen de passagers transportés quotidiennement en 2011.

c) Sur le graphique ci-après, construire le polygone (ou courbe) des fréquences cumulées croissantes correspondant à la série statistique précédente.



d) A partir du graphique ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

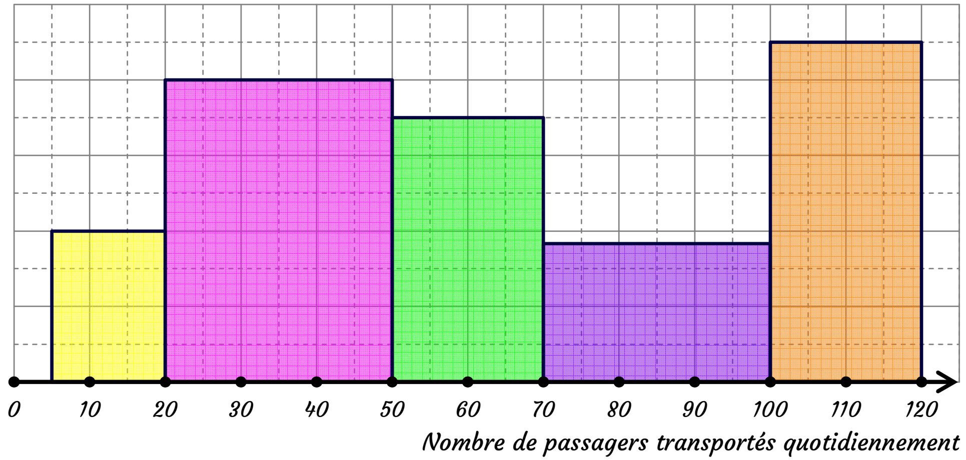
1. Déterminer la médiane M_e ainsi que les deux quartiles Q_1 et Q_3.
2. Se basant sur les données de l'année 2011, le comptable affirme qu'un jour sur trois, les *Tacauds Blancois* ont transporté entre 40 et 80 passagers quotidiennement. Cette affirmation est-elle fondée ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a) Complétés, le tableau et l'histogramme sont les suivants :

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Classe : nombre passagers transportés quotidiennement	$[5;20[$	$[20;50[$	$[50;70[$	$[70;100[$	$[100;120[$
Effectif : nombre de jours	30	120	70	55	90
Aire du rectangle en cm²	3	12	7	5,5	9
Dimensions en centimètres	$1,5\times 2$	3×4	$2\times 3,5$	$3\times 1,83$	$2\times 4,5$



On vérifie qu'il y a $30+120+70+55+90=365$ jours dans le tableau. Autant qu'en 2011.

b) En supposant que dans une même classe, les jours sont répartis de manière homogène, le nombre moyen de passagers transportés quotidiennement en 2011 est donné par :

$$\frac{\sum \text{effectif}\times\text{Milieu de la classe}}{\text{Effectif total}}=\frac{30\times 12,5+120\times 35+70\times 60+55\times 85+90\times 110}{365}$$

$$=\frac{23350}{365}\approx 64 \text{ passagers par jour}$$

c) Pour construire la courbe en question, il faut au préalable calculer les fréquences, puis les fréquences cumulées croissantes de la série statistique.

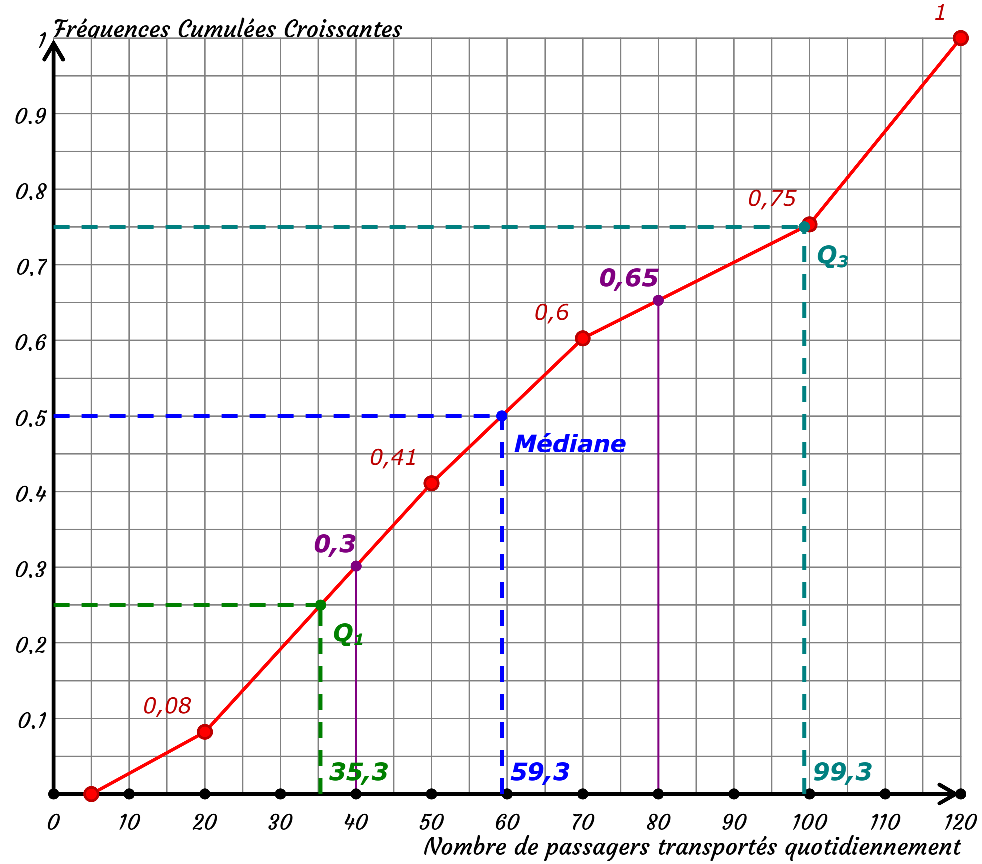
Classe : nombre de passagers transportés quotidiennement	$[5;20[$	$[20;50[$	$[50;70[$	$[70;100[$	$[100;120[$
Effectif : nombre de jours	30	120	70	55	90
Fréquence	0,08	0,33	0,19	0,15	0,25
Fréq. cumulées croissantes	0,08	0,41	0,60	0,75	1

Le polygone (ou courbe) des fréquences cumulées croissantes est construit au verso.

d.1) La médiane est la modalité prise pour une fréquence cumulée croissante de 0,5. D'après le graphique, le nombre médian de passagers est de $M_e = 59$ passagers

Les quartiles Q_1 et Q_3 correspondent aux modalités prises lorsque les fréquences cumulées croissantes valent respectivement 0,25 et 0,75. D'après le graphique, on trouve :

$Q_1 = 35$ passagers et $Q_3 = 99$ passagers



d.2) Les fréquences cumulées croissantes correspondant à 40 et 80 passagers transportés quotidiennement sont respectivement égales à 0,3 et 0,65 .
Cela signifie que $0,65-0,3=0,35=35\%$ des jours de l'année 2011, la compagnie a transporté entre 40 et 80 passagers. L'affirmation «Un jour sur trois» n'est pas erronée.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Bonne pêche et mauvaise pioche

L'énoncé

Piètre croyant mais grand pêcheur, Bobby a décidé ce matin d'aller pêcher un poisson dans l'étang communal en vue de son déjeuner, histoire de garder la ligne.
Il y a dans cet étang trois types de gros poissons :

- Les carpes constituent 50% des gros poissons présents dans l'étang.
  Mais du fait d'une pollution, seules 60% des carpes sont comestibles.
- Les tanches constituent 40% des gros poissons présents dans l'étang.
  Toujours à cause de la pollution, seules 70% des tanches sont comestibles.
- Les autres gros poissons sont impropres à la consommation pour 80% d'entre eux.

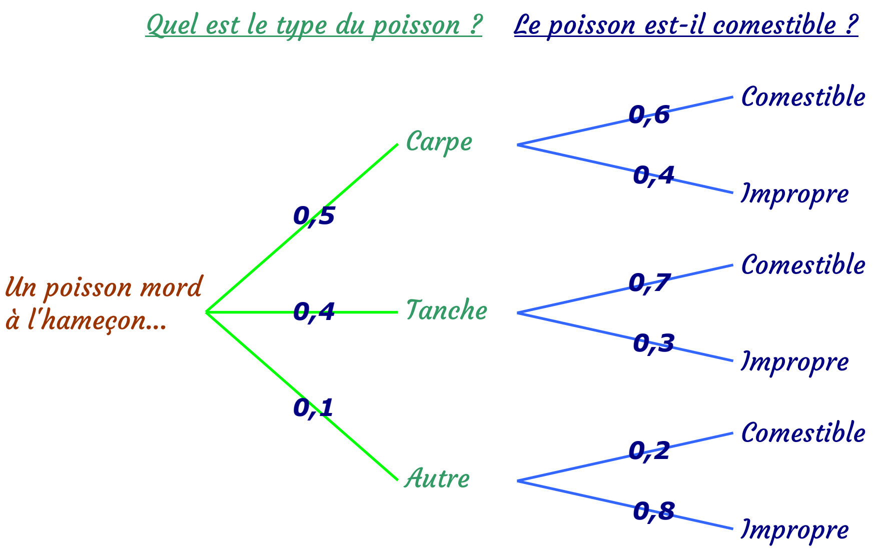
Bobby jette sa ligne dans l'étang et attend qu'un gros poisson morde à son hameçon. On fait l'hypothèse que chaque gros poisson a la même probabilité de mordre à l'hameçon de Bobby. Cette pêche étant à vocation alimentaire, la question est de savoir si le gros poisson pris par Bobby sera comestible ou impropre à la consommation.

a) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation énoncée.

b) Calculer la probabilité que le gros poisson pris par Bobby soit comestible.

Le corrigé

a) La situation est la suivante :



b) La probabilité que le poisson pris soit comestible est donnée par :

$$p(\text{Comestible}) = p(\text{Carpe } \underline{\text{et}} \text{ Comes.}) + p(\text{Tanche } \underline{\text{et}} \text{ Comes.}) + p(\text{Autre } \underline{\text{et}} \text{ Comes.})$$
$$= 0,5\times 0,6 + 0,4\times 0,7 + 0,1\times 0,2 = \underline{0,6}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Loutres mères

L'énoncé

Les *Loutres Blancoises* sont une équipe de foudebol mixte. C'est-à-dire qu'elle est constituée d'hommes et de femmes.
Cinq postes sont à pourvoir dans une équipe de foudebol mixte.

Avant-gauche Avant-droit

Arrière-gauche Arrière-droit

Gardien de but

Pour constituer son équipe, le sélectionneur des *Loutres Blancoises* dispose d'un effectif de 10 joueurs ou joueuses qui se répartissent de la manière suivante :

- Deux gardiens dont l'une est une femme.
- Trois arrières dont deux sont des femmes.
- Cinq avants dont trois sont des femmes.

Dans le foudebol, les règles sont très strictes. Un gardien ne peut jouer que gardien, un arrière ne peut jouer qu'arrière et un avant ne peut jouer qu'avant. Par contre, un arrière (ou un avant) peut jouer aussi bien à gauche qu'à droite.
On appelle équipe toute sélection de cinq personnes précises affectées à des postes précis.
Ainsi, pour un joueur donné, jouer avant-gauche ou jouer avant-droit conduit à deux équipes différentes.

a) Etablir qu'il y a 240 équipes possibles.

b) Le sélectionneur étant un incompétent convaincu et un égalitariste stupide, il décide de procéder à un tirage au sort parmi ses joueurs pour l'attribution des cinq postes en respectant les règles du foudebol bien sûr !
Déterminer les probabilités des événements suivants. Les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

A = «L'équipe ne comporte que des femmes»
B = «L'équipe ne comporte que des hommes»
C = «Les avants sont des hommes, les arrières sont des femmes mais aucune condition de sexe n'est fixée pour le gardien»
D = «L'équipe comporte au moins un homme»
E = «L'équipe comporte exactement un homme»

Le corrigé

a) Dénombrons les équipes possibles en donnant poste par poste le nombre de candidats possibles :

Gardien de but		Arrière gauche		Arrière droit		Avant gauche		Avant droit		
2	×	3	×	2	×	5	×	4	=	240 équipes

Conclusion : il y a bien 240 équipes possibles.

b) Déterminons le nombre d'équipes favorables à l'événement A en dénombrant le nombre de candidats par poste une fois encore.

Gardien de but		Arrière gauche		Arrière droit		Avant gauche		Avant droit		
1 femme	×	2 femmes	×	1 femme	×	3 femmes	×	2 femmes	=	12 équipes

Toutes les équipes étant équiprobables, nous en déduisons :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{Nombre d'équipes A}}{\text{Nombre total d'équipes}} = \frac{12}{240} = \frac{1}{20}$$

➲ Il est impossible de constituer une équipe avec cinq hommes car il n'y en a que quatre de l'effectif. Notamment, il manque au moins un arrière. Par conséquent :

$$p(\mathrm{B}) = \frac{\text{Nombre d'équipes B}}{\text{Nombre total d'équipes}} = \frac{0}{240} = 0$$

➲ Dénombrons le nombre d'équipes favorables à l'événement C.

Gardien de but		Arrière gauche		Arrière droit		Avant gauche		Avant droit		
2 candidats	×	2 femmes	×	1 femme	×	2 hommes	×	1 homme	=	8 équipes

Toutes les équipes étant équiprobables, nous en déduisons :

$$p(\mathrm{C}) = \frac{\text{Nombre d'équipes C}}{\text{Nombre total d'équipes}} = \frac{8}{240} = \frac{1}{30}$$

➲ L'événement D = «L'équipe comporte au moins un homme» est l'événement contraire de «aucun homme» = «que des femmes» = A . Par conséquent :

$$p(\mathrm{D}) = 1 - p(\mathrm{A}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

➲ Un homme pouvant occuper les cinq postes, il y a cinq types d'équipes qui sont favorables à E à dénombrer :

Gardien de but		Arrière gauche		Arrière droit		Avant gauche		Avant droit		
1 homme	×	2 femmes	×	1 femme	×	3 femmes	×	2 femmes	=	12
1 femme	×	1 homme	×	2 femmes	×	3 femmes	×	2 femmes	=	12
1 femme	×	2 femmes	×	1 homme	×	3 femmes	×	2 femmes	=	12
1 femme	×	2 femmes	×	1 femme	×	2 hommes	×	3 femmes	=	12
1 femme	×	2 femmes	×	1 femme	×	3 femmes	×	2 hommes	=	12
									=	60

Etant toujours en situation équiprobabilité, la probabilité de l'événement E est donnée par :

$$p(\mathrm{E})=\frac{\text{Nombre d'équipes E}}{\text{Nombre total d'équipes}}=\frac{60}{240}=\frac{1}{4}$$

Options de caisses

L'énoncé

Bobby est un vendeur de voitures. Sur un véhicule qu'il achète, le client peut opter pour une ou plusieurs des trois options suivantes :

- La roue de secours.
- La peinture métallisée.
- Le siège conducteur éjectable.

Bien sûr, le client peut très bien choisir d'acheter un véhicule dépourvu de ces trois options.
Cette année 2012, Bobby a vendu au total 100 véhicules (avec ou sans options).
Parmi ceux-ci :

- 15 véhicules disposent des trois options.
- 24 véhicules ont la roue de secours et la peinture métallisée.
- 7 véhicules ont seulement la peinture métallisée et le siège conducteur éjectable.
- 23 véhicules ont une roue de secours et un siège conducteur éjectable.
- 4 véhicules ont un siège conducteur éjectable mais n'ont ni roue de secours, ni peinture métallisée.
- 48 véhicules ont la peinture métallisée.
- 52 véhicules ont une roue de secours.

Bobby rencontre au hasard l'un de ses clients. Quelle est la probabilité que la voiture qu'il lui a vendu ne dispose d'aucune des trois options ? On expliquera sa réponse.

Le corrigé

La solution de cet exercice repose sur le nombre de voitures avec options qui ont été vendues. Pour les dénombrer, le meilleur outil est le diagramme ensembliste plus connu sous le sobriquet de «schéma de patates».
On commence par placer sur le schéma ci-dessous les trois renseignements des parties connexes donnés par l'énoncé :

15 véhicules disposent des trois options.
7 véhicules ont la roue de secours, la peinture métallisée mais pas le siège éjectable
4 véhicules ont seulement le siège éjectable.

On déduit alors :

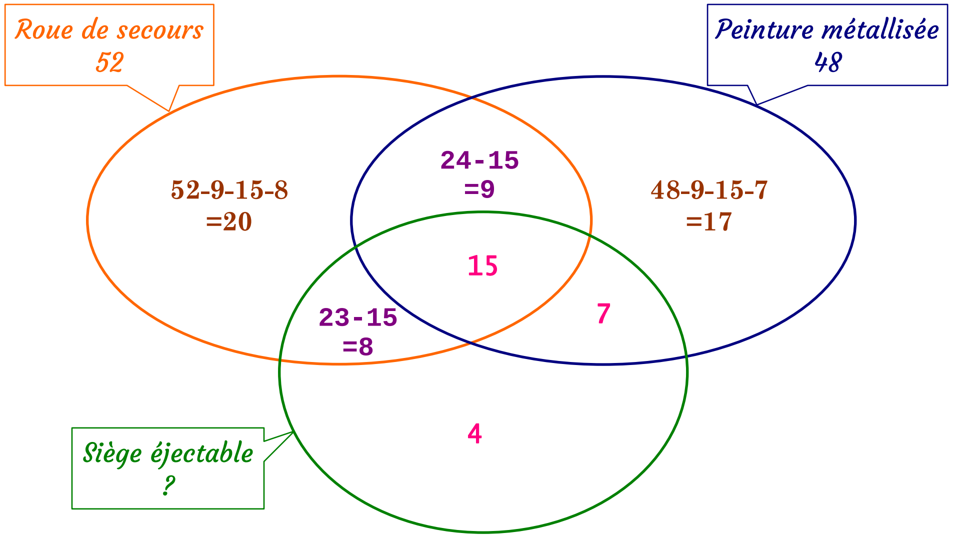
$23-15=8$ véhicules ont juste la roue de secours et le siège éjectable.
$24-15=9$ véhicules ont juste la roue de secours et la peinture métallisée.

Enfin :

$52-9-15-8=20$ véhicules ont juste la roue de secours.
$48-9-15-7=17$ véhicules ont juste la peinture métallisée.

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.

Les véhicules avec options



Le nombre total d'une voiture avec options est de $20+9+17+8+15+7+4=80$.
La probabilité que la voiture vendue par Bobby ne dispose d'aucune des trois options est :

$$\frac{\text{Nombre de voitures sans options}}{\text{Nombre total de voiture}}=\frac{20}{100}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

Mieux qu'un placébo

L'énoncé

Un laboratoire pharmaceutique met en place un test pour estimer l'efficacité d'un nouveau médicament contre les migraines.
Deux groupes de 125 patients souffrant de migraines, considérés comme des échantillons aléatoires, participent à ce test.
On administre aux patients du ***groupe A*** le nouveau médicament, alors que les patients du ***groupe B*** reçoivent un placebo (médicament inactif).
Au bout de 4 jours de traitement, 73 patients du ***groupe A*** et 64 patients du ***groupe B*** déclarent ressentir une diminution de l'intensité de leurs migraines.

1. Déterminer les intervalles de confiance au seuil de 95% des proportions de patients déclarant ressentir une diminution de l'intensité de leurs migraines, dans chaque échantillon (***groupe A*** et ***groupe B***). On arrondira les bornes au millième-près.
2. Les intervalles de confiance permettent-ils, au niveau de confiance 0,95, de considérer que le médicament est plus efficace que le placebo ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

1. Si on appelle f la fréquence d'un caractère dans un échantillon comptant n individus, alors l'intervalle de confiance au seuil de 95% est $I=\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Dans le ***groupe A***, 73 des 125 individus déclarent ressentir une amélioration. L'intervalle de confiance au seuil de 95% est $I_A=\left[\frac{73}{125}-\frac{1}{\sqrt{125}};\frac{73}{125}+\frac{1}{\sqrt{125}}\right]=\boxed{[0,494;0,674]}$

Dans le ***groupe B***, 64 des 125 individus déclarent ressentir une amélioration. L'intervalle de confiance au seuil de 95% est $I_B=\left[\frac{64}{125}-\frac{1}{\sqrt{125}};\frac{64}{125}+\frac{1}{\sqrt{125}}\right]=\boxed{[0,422;0,602]}$

Note : lors de l'arrondi, il faut toujours minorer les bornes inférieures et majorer les bornes supérieures des intervalles de confiance...pour être sûr d'avoir au moins 95%...

2. Si l'on considère la population (immense) des gens utilisant le médicament, alors la proportion p_A de ceux qui déclareraient ressentir une amélioration se situe dans l'intervalle de confiance $I_A=[0,494;0,674]$ avec une probabilité de 95%.

Si l'on considère la population (immense) des gens n'utilisant pas le médicament, alors la proportion p_B de ceux qui déclareraient ressentir une amélioration se situe dans l'intervalle de confiance $I_B = [0,422;0,602]$ avec une probabilité de 95%.

Les deux intervalles se chevauchant, il n'est absolument pas assuré que la proportion p_A soit supérieure à la proportion p_B.

L'efficacité du médicament n'est pas établie par ce test sur deux échantillons de 125 individus.

Et l'année prochaine, ce sera encore pire !

Sommaire des scandaleux exercices proposés

Un petit mot scandaleux de l'auteur

Dans une certaine académie et dans une certaine discipline, on a récemment appris que les copies du bac faisaient l'objet, à l'initiative des inspecteurs de la discipline, d'une notation assez particulière car les professeurs de cette discipline étaient jugés comme étant trop exigeants et qu'il fallait garantir l'équité nationale quant à l'épreuve. Certains mauvais esprits ont alors émis l'idée saugrenue que la notation et le barème étaient tripatouillés en vue de gonfler les taux de réussite. Vraiment, qu'est-ce qu'on n'entend pas !

Ainsi qu'un «grand esprit» l'a dit, le problème de l'Education Nationale n'est ni philosophique, ni politique, mais pédagogique. D'ailleurs, si les professeurs de cette discipline avaient eu une meilleure pédagogie, ils auraient obtenu de meilleures notes. Car c'est la hauteur de la note qui valide la pédagogie mise en œuvre.

Sauf qu'il est un fait qu'il faut **du temps, du travail et de la rigueur** pour maitriser correctement une discipline exigeante. Ce que l'on fait trop peu, on le fait très mal.

Nos «grands esprits» s'étonnent de l'effondrement des résultats des élèves français aux tests de mathématiques PISA, alors que depuis deux décennies, ils cassent soigneusement cette discipline qu'ils jugeaient naguère trop sélective. Qu'ils se rassurent, elle ne l'est plus !

Ce document est exclusivement mis en ligne par la Taverne de l'Irlandais (www.tanopah.com). Tous droits réservés. Edition du vendredi 21 juin 2013.