Analyse

La super jolie fonction

L'énoncé

La fonction φ est définie sur ℝ par :

$$\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + 24$$

a) Le but de cette sous-partie est l'étude du signe de $\varphi(x)$ sur ℝ.

1. Calculer les valeurs exactes des images $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{4}{3}\right)$.
2. Déterminer les limites de la fonction φ aux infinis.
3. Calculer la dérivée $\varphi'(x)$, puis en déduire les variations de φ sur ℝ.
4. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans ℝ une unique solution α dont on donnera un encadrement au centième près à l'aide de la calculatrice.
5. En déduire le tableau de signe de $\varphi(x)$ sur ℝ. Celui-ci pourra contenir α.

La fonction *f* est définie sur l'union $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x - 12}{x^2 - x - 2}$$

On note (C_f) sa courbe représentative.

b) Dans cette sous-partie, nous étudions le comportement de *f* aux bornes de son ensemble de définition D_f .

1. Calculer l'image $f(0)$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers $-\infty$.

   Quelle est la conséquence graphique de cette limite sur la courbe (C_f) ?
3. Déterminer les limites de *f* à gauche et à droite de -1 .

   Quelle est la conséquence graphique de ces limites sur la courbe (C_f) ?

c) Dans cette sous-partie, nous étudions les variations de la fonction *f* sur son ensemble de définition.

1. Démontrer que pour tout réel $x \in D_f$, nous avons :

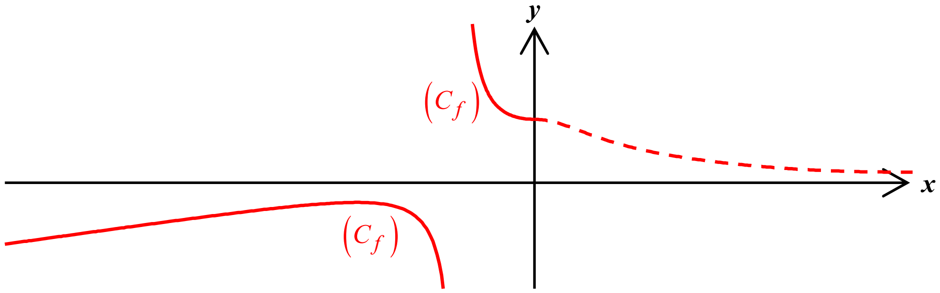
$$f'(x) = \frac{x \times \varphi(x)}{\left(x^2 - x - 2\right)^2}$$

2. En utilisant le résultat de la question **a.5**, dresser le tableau de variation de la fonction *f*. Le réel α pourra apparaître dans le tableau de variation.

On prolonge la fonction *f* à droite de 0, c'est-à-dire sur l'intervalle $]0;+\infty[$, en posant :

$$\text{Si} \quad x > 0 \quad \underline{\text{alors}} \quad f(x) = \frac{x^2 + x \times \sin(x) + 6}{x^2 + 1}$$

Au final, la courbe (C_f) est la suivante :



d) La fonction *f* est-elle continue (à droite) en 0 ? On justifiera sa réponse.

e) Dans cette question, on s'intéresse à la dérivabilité de *f* (à droite) en 0.

1. Démontrer que pour tout réel $h > 0$, nous avons :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sin(h) - 5h}{h^2 + 1}$$

2. La fonction *f* est-elle dérivable en 0 ? On justifiera sa réponse.

f) Dans cette question, on s'intéresse à la limite de *f* en $+\infty$.

1. Démontrer que pour tout réel strictement positif *x*, on a :

$$\frac{x^2 - x + 6}{x^2 + 1} \le f(x) \le \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + 1}$$

2. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque que *x* tend vers $+\infty$.

   Quelle est la conséquence graphique de cette limite sur la courbe (C_f) ?

Le corrigé

a.1) Calculons les images de 0 et $4/3$ par la fonction φ :

$$\varphi(0) = 0^3 - 2\times 0^2 + 24 = 0 - 0 + 24 = \underline{24}$$

$$\varphi\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\times\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 24 = \frac{64}{27} - 2\times\frac{16}{9} + 24 = \frac{64 - 3\times 2\times 16 + 27\times 24}{27} = \underline{\frac{616}{27}}$$

a.2) Les limites de polynômes aux infinis sont souvent synonymes de formes indéterminées du type $\infty - \infty$. Afin de les éviter, factorisons $\varphi(x)$ par son terme nous semblant le plus fort : x^3. Pour tout réel x non nul, nous pouvons écrire :

$$\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + 24 = x^3 \times \left[1 - 2\times\frac{x^2}{x^3} + \frac{24}{x^3}\right] = \underline{x^3 \times \left[1 - \frac{2}{x} + \frac{24}{x^3}\right]}$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \times\left[1 - \frac{2}{x} + \frac{24}{x^3}\right] = (-\infty)\times\left[1 - 0^- + 0^-\right] = (-\infty)\times 1 = \underline{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \times\left[1 - \frac{2}{x} + \frac{24}{x^3}\right] = (+\infty)\times\left[1 - 0^+ + 0^+\right] = (+\infty)\times 1 = \underline{+\infty}$$

a.3) La fonction polynomiale φ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 2\times 2x + 0 = 3x^2 - 4x = \underline{x(3x-4)}$$

Le signe de la dérivée $\varphi'(x)$ peut être connu. Il nous donnera les variations de φ.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ	$-\infty$	↗	24	↘	$616/27$	↗	$+\infty$

a.4) La première chose à dire est que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ car elle y est dérivable. Ensuite :

- La fonction φ est strictement croissante et continue sur l'intervalle $]-\infty;0[$.
  L'image de l'intervalle $]-\infty;0[$ par la fonction φ est l'intervalle $]-\infty;24[$.
  0 faisant partie de l'intervalle image $]-\infty;24[$, il admet un unique antécédent α dans l'intervalle $]-\infty;0[$ en vertu du «théorème de la bijection».
- Le minimum de la fonction φ sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est le positif $616/27$.
  Par conséquent, 0 ne peut avoir d'antécédents par φ dans cet intervalle.

Conclusion : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} =]-\infty;0[\cup [0;+\infty[$.

D'après la calculatrice, un encadrement au centième de cette solution α est :

$$\underline{-2{,}35 \leq \alpha \leq -2{,}34}$$

a.5) Vu les questions **a.3** et **a.4**, nous concluons que le tableau de signe de φ est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	

b.1) Calculons l'image de 0 par la fonction *f*.

$$f(0) = \frac{0^3 - 6\times 0 - 12}{0^2 - 0 - 2} = \frac{-12}{-2} = \underline{6}$$

b.2) De prime abord :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 6x - 12}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-\infty) - (-\infty) - 12}{(+\infty) - (-\infty) - 2} = \frac{\textit{Forme indéterminée}}{+\infty}$$

Pour contourner cette indétermination, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur de $f(x)$ par leurs termes nous semblant les plus forts : x^3 et x^2.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x - 12}{x^2 - x - 2} = \frac{x^3}{x^2} \times \frac{1 - 6\times\frac{x}{x^3} - \frac{12}{x^3}}{1 - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \underline{x \times \frac{1 - \frac{6}{x^2} - \frac{12}{x^3}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \times \frac{1 - \frac{6}{x^2} - \frac{12}{x^3}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = (-\infty)\times\frac{1 - 0^+ - 0^-}{1 - 0^- - 0^+} = (-\infty)\times\frac{1}{1} = \underline{-\infty}$$

Cette limite infinie à l'infini n'a aucune conséquence graphique.

b.3) Lorsque x tend vers -1 (par la gauche ou par la droite) :

$$\begin{cases} x^3-6x-12 \text{ tend vers } (-1)^3-6\times(-1)-12=-1+6-12=\underline{-7} \\ x^2-x-2 \text{ tend vers } (-1)^2-(-1)-2=1+1-2=\underline{0} \end{cases}$$

Histoires de continuité...

La nullité du dénominateur en -1 nous conduit à nous poser la question de son signe.

$D(x)=x^2-x-2$ est une forme du second degré. Aussi, calculons son discriminant :

$$\Delta_{D(x)}=(-1)^2-4\times1\times(-2)=1+8=9=(3)^2$$

Son discriminant étant strictement positif, $D(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-(-1)-3}{2\times1}=\frac{-2}{2}=\underline{-1} \qquad \underline{\text{et}} \qquad x_2=\frac{-(-1)+3}{2\times1}=\frac{4}{2}=\underline{2}$$

Et son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\underbrace{\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{-7}{0^+}=\underline{-\infty}}_{\text{A gauche de } -1} \qquad \underbrace{\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{-7}{0^-}=\underline{+\infty}}_{\text{A droite de } -1}$$

Graphiquement, la courbe (C_f) plonge à gauche de -1 alors qu'elle s'envole à sa droite le long de la droite d'équation $x=-1$ qui est donc une asymptote verticale à la courbe.

c.1) *f* est le quotient des fonctions
$\begin{cases} u(x)=x^3-6x-12 \\ u'(x)=3x^2-6 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x)=x^2-x-2 \\ v'(x)=2x-1 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \\ \text{Non nulle sur } \mathbb{R}\backslash\{-1;2\} \end{cases}$

Donc la fonction *f* est dérivable sur son ensemble de définition $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ et pour tout réel x de cet intervalle, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{[v(x)]^2}=\frac{(3x^2-6)\times(x^2-x-2)-(2x-1)\times(x^3-6x-12)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$=\frac{3x^4-3x^3-\cancel{6x^2}-\cancel{6x^2}+\cancel{6x}+\cancel{12}-2x^4+\cancel{12x^2}+24x+x^3-\cancel{6x}-\cancel{12}}{(x^2-x-2)^2}$$

Nous aboutissons alors à :

$$f'(x)=\frac{x^4-2x^3+24x}{(x^2-x-2)^2}=\frac{x\times(x^3-2x^2+24)}{(x^2-x-2)^2}=\frac{x\times\varphi(x)}{(x^2-x-2)^2}$$

d.2) Nous connaissons les signes de tous les facteurs apparaissant dans la dérivée $f'(x)$.

Nous pouvons en déduire les variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$		α		-1		0
x		$-$		$-$		$-$	0
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2-x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0
f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)\approx-1,85$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6

On détermine une valeur approchée de $f(\alpha)$ à partir de l'encadrement de la question **a.4**.

d) De par sa définition, la fonction *f* est déjà continue à gauche de 0 et $f(0)=6$.

Reste à voir ce qu'elle fait à droite de 0. Aussi Déterminons la limite de *f* à droite de 0.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x\times\sin(x)+6}{x^2+1}=\frac{0^2+0\times\overbrace{\sin(0)}^{0}+6}{0^2+1}=\frac{6}{1}=6=f(0)$$

<u>Conclusion :</u> La fonction est continue en 0. Les deux brins de courbe se rejoignent en 0.

e.1) Pour tout réel strictement positif h, nous pouvons écrire :

Factorisation par h au numérateur...

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{1}{h}\times(f(h)-6)=\frac{1}{h}\times\left[\frac{h^2+h\times\sin(h)+6}{h^2+1}-6\right]$$

$$=\frac{1}{h}\times\frac{h^2+h\sin(h)+\cancel{6}-6h^2-\cancel{6}}{h^2+1}=\frac{1}{\cancel{h}}\times\frac{\cancel{h}\sin(h)-5h^{\cancel{2}}}{h^2+1}=\frac{\sin(h)-5h}{h^2+1}$$

e.2) Nous savons déjà que *f* est dérivable à gauche de 0. D'ailleurs, d'après la question **c.2**, le nombre dérivé de *f* à gauche de 0 est égal à 0.
Pour savoir si la fonction *f* est dérivable à droite de 0, nous devons déterminer la limite à droite de 0 du quotient :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(h)-5h}{h^2+1} = \frac{0-0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Donc la fonction *f* est dérivable à droite de 0 et son nombre dérivé y est aussi égal à 0.
<u>Conclusion :</u> comme la fonction *f* est dérivable à gauche et à droite de 0 et comme les nombres dérivés à gauche et à droite sont tous deux égaux à 0, alors la fonction *f* est dérivable en 0. De plus $f'(0)=0$

f.1) Pour tout réel $x \in \left]0;+\infty\right[$, nous pouvons écrire :

$$-1 \le \sin(x) \le 1 \xrightarrow[\text{qui est positif}]{\times x} -x \le x\times\sin(x) \le x$$

$$\xrightarrow{+\left(x^2+6\right)} x^2-x+6 \le x^2+x\sin(x)+6 \le x^2+x+6$$

$$\xrightarrow[\text{qui est positif}]{\div\left(x^2+1\right)} \frac{x^2-x+6}{x^2+1} \le f(x) \le \frac{x^2+x+6}{x^2+1}$$

f.2) Déterminons les limites en $+\infty$ des membres de gauche et droite encadrant $f(x)$.

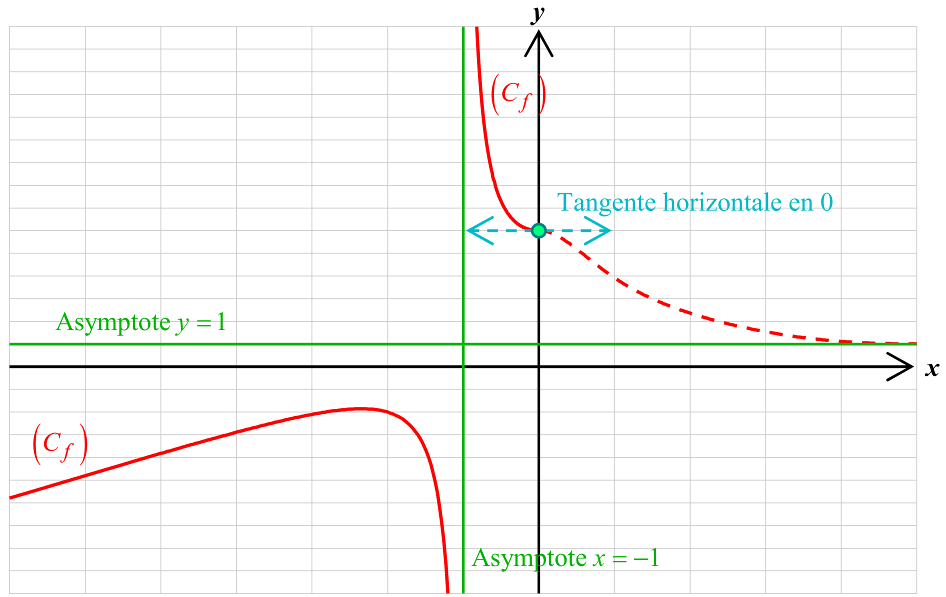
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \pm x+6}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \times \frac{1\pm\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1\pm\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1\pm 0^+ + 0^+}{1+0^+} = \frac{1}{1} = 1$$

En application du théorème des gendarmes, nous en déduisons :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

La conséquence graphique de cette limite finie à l'infinie est que la droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$

Complétée, la courbe $\left(C_f\right)$ est la suivante :



Décomposées à la dérive

L'énoncé

Pour chacune des trois fonctions suivantes, déterminer son ensemble de dérivabilité et sa dérivée.

a. $f(x)=\left(4x^2-1\right)^5$ **b.** $g(x)=\sqrt{4x^2+6x+5}$ **c.** $j(x)=\cos(5x)$

Le corrigé

a) Nous avons $f(x)=\left(4x^2-1\right)^5=u^5$ avec dans le rôle principal $\left|\begin{array}{l} u(x)=4x^2-1 \\ u'(x)=4\times 2x=8x \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R}\end{array}\right.$.

Donc la fonction *f* est dérivable sur ℝ et pour tout réel *x*, nous avons :

$$f'(x)=5\times u'\times u^{5-1}=5\times 8x\times\left(4x^2-1\right)^4=\boxed{40x\times\left(4x^2-1\right)^4}$$

b) Nous avons $g(x)=\sqrt{4x^2+6x+5}=\sqrt{u}$ avec $\left|\begin{array}{l} u(x)=4x^2+6x+5 \\ u'(x)=8x+6 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R}\end{array}\right.$.

Reste à savoir quand $u(x)$ est strictement positif. C'est une forme du second degré. Calculons son discriminant !

$$\Delta_{u(x)}=6^2-4\times 4\times 5=36-80=\boxed{-44}$$

Comme son discriminant est négatif, alors $u(x)$ est toujours du signe de son coefficient dominant 4 soit toujours positif.

Donc la fonction *g* est dérivable sur ℝ et pour tout réel *x*, il vient :

$$g(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}=\frac{8x+6}{2\sqrt{4x^2+6x+5}}=\frac{\cancel{2}\times(4x+3)}{\cancel{2}\times\sqrt{4x^2+6x+5}}=\boxed{\frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+6x+5}}}$$

c) Nous avons $j(x)=\cos(5x)=v(ax+b)$ avec $\left|\begin{array}{ll} v(t)=\cos(t) & a=5 \\ v'(t)=-\sin(t) & b=0 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} & \end{array}\right.$

Donc la fonction *j* est dérivable sur ℝ et pour tout réel *x*, nous avons :

$j'(x)=a\times v'(ax+b)=5\times(-\sin(5x))=\boxed{-5\sin(x)}$

La super jolie fraction

L'énoncé

La fonction *f* est définie par :

$$f(x)=\frac{2e^x-7x}{e^x+3x}$$

On appelle $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative.

a) On note *d* la fonction définie sur ℝ par :

$$d(x)=e^x+3x$$

1. Déterminer les limites de la fonction *d* en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Etablir que la fonction *d* est strictement croissante sur ℝ.
3. Démontrer que l'équation $d(x)=0$ admet dans ℝ une unique solution α dont on donnera un encadrement au centième près.
4. En déduire le tableau de signe de $d(x)$.
5. Justifier que l'ensemble de définition D_f de *f* est $]-\infty;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$.

b) Dans cette sous-partie, on s'intéresse aux comportements de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition D_f.

6. Calculer $f(1)$. En donner une valeur approchée au centième près.
7. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque *x* tend vers $-\infty$, puis lorsque *x* tend vers $+\infty$.
   Quelles sont les conséquences graphiques de ces deux limites ?
8. Déterminer les limites de *f* à gauche et à droite de α.
   Quelle est la conséquence graphique de ces deux limites ?

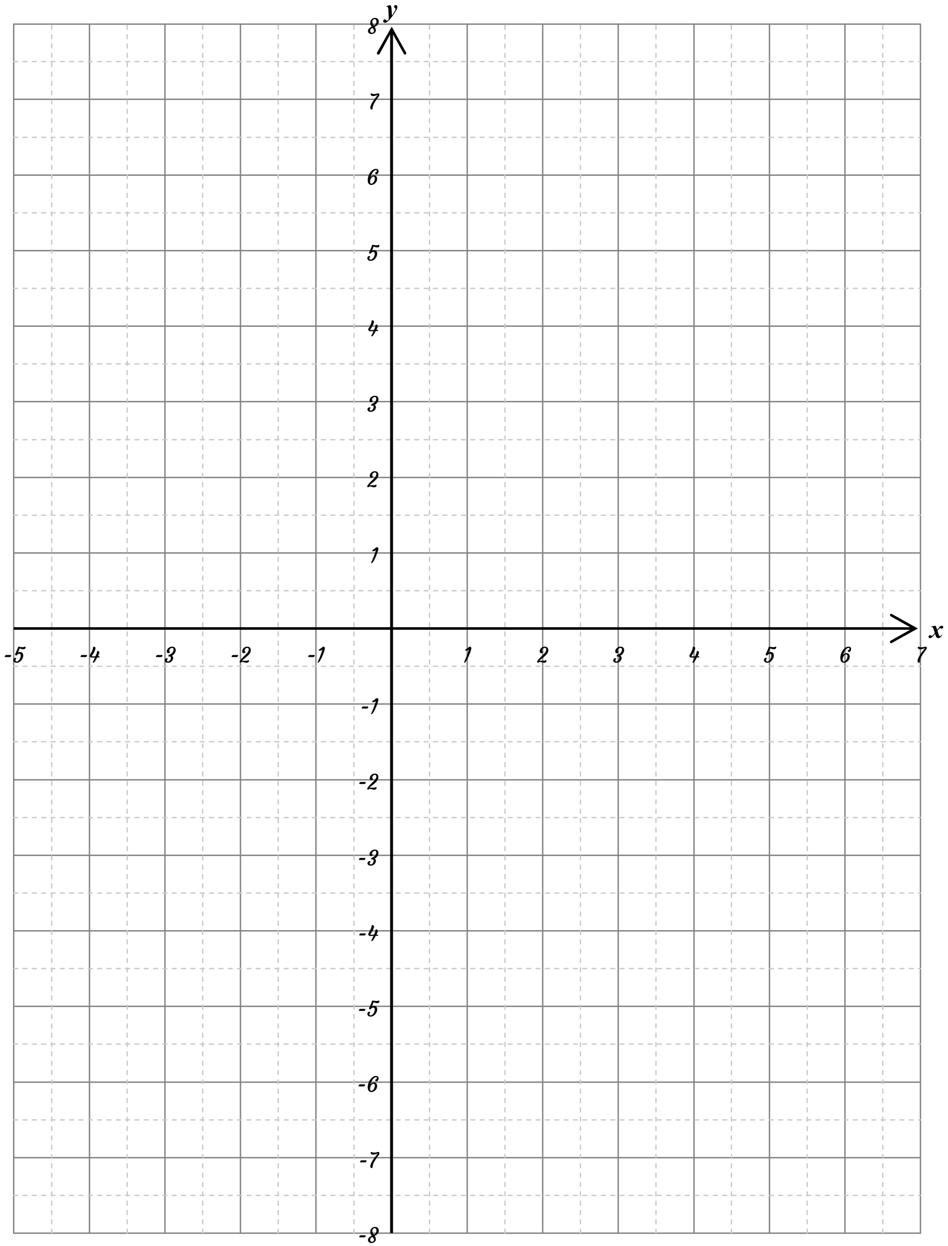
c) Dans cette sous-partie, on étudie les variations de la fonction *f*.

1. Démontrer que pour tout réel $x\in D_f$, nous avons :

$$f'(x)=\frac{e^x\times(13x-13)}{\left(e^x+3x\right)^2}$$

2. En déduire les variations de *f* sur son ensemble de définition.

d) Sur le graphique centimétrique ci-dessous, tracer la courbe $\left(C_f\right)$ accompagnée de toutes ses asymptotes. Une grande attention sera portée à la qualité du tracé.



Le corrigé

a.1) Ces deux premières limites ne posent guère de problèmes :

$$\lim_{x\to-\infty} d(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x + 3x = 0^+ + (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} d(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x + 3x = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

a.2) La fonction d étant la somme de deux fonctions dérivables sur ℝ, elle l'est elle aussi. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$d'(x) = \left(e^x\right)' + (3x)' = e^x + 3$$

Une exponentielle étant toujours positive, la dérivée $d'(x)$ est toujours strictement positive en tant que somme de deux termes positifs.
Le tableau de variation de d est celui-ci ➔

x	$-\infty$		$+\infty$
$d'(x) = e^x + 3$		$+$	
d	$-\infty$	↗	$+\infty$

a.3) Comme :

La fonction d est continue (car dérivable) sur ℝ.
La fonction d est strictement croissante sur ℝ.
L'image de ℝ par la fonction d est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.
0 appartient à l'intervalle image $]-\infty;+\infty[$.

alors, en application du théorème de la bijection, l'équation $d(x) = 0$ admet une unique solution α dans ℝ.
En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient l'encadrement demandé :

$$-0,26 \leq \alpha \leq -0,25$$

a.4) Des questions **a.3** et **a.4**, on déduit le tableau de signe de $d(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$d(x)$		$-$	0	$+$	

a.5) La fonction f est le quotient des fonctions $n(x) = 2e^x - 7x$ et $d(x) = e^x + 3x$ qui sont définies sur ℝ. En conséquence :

Le quotient $f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $d(x)$ est non nul $\Leftrightarrow$ $x \neq \alpha$

Conclusion : l'ensemble de définition de f est bien $\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$.

b.1) Calculons l'image demandée :

$$f(1)=\frac{2\times e^1-7\times 1}{e^1+3\times 1}=\frac{2e-7}{e+3}\approx \boxed{-0,27}$$

b.2) Déterminons la limite de *f* en $-\infty$. De prime abord :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x-7x}{e^x+3x}=\frac{2\times 0^+-(-\infty)}{0^++(-\infty)}=\frac{+\infty}{-\infty}=\boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

Pour lever cette indétermination, factorisons les numérateur et dénominateur de $f(x)$ par leurs termes nous paraissant les plus forts. Pour tout réel $x\in\left]-\infty;\alpha\right[$, nous avons :

$$f(x)=\frac{2e^x-7x}{e^x+3x}=\frac{\cancel{x}\times\left[2\times\frac{e^x}{x}-7\right]}{\cancel{x}\times\left[\frac{e^x}{x}+3\right]}=\boxed{\frac{2\times\frac{e^x}{x}-7}{\frac{e^x}{x}+3}}$$

Or :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x\times\frac{1}{x}=0^+\times 0^-=\boxed{0^-}$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\times\frac{e^x}{x}-7}{\frac{e^x}{x}+3}=\frac{2\times 0^--7}{0^-+3}=\frac{-7}{3}=\boxed{-\frac{7}{3}}$$

<u>Conséquence graphique :</u> la droite Δ d'équation $y=-\frac{7}{3}$ est une asymptote horizontale à la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $-\infty$.

❋ Déterminons la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers $+\infty$. De prime abord :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-7x}{e^x+3x}=\frac{2\times(+\infty)-(+\infty)}{(+\infty)+(+\infty)}=\frac{(+\infty)-(+\infty)}{+\infty}=\boxed{\text{Forme pas très déterminée}}$$

Rebelote ! Pour tout réel strictement positif *x*, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{2e^x-7x}{e^x+3x}=\frac{\cancel{e^x}\times\left[2-7\times\frac{x}{e^x}\right]}{\cancel{e^x}\times\left[1+3\times\frac{x}{e^x}\right]}=\boxed{\frac{2-7\times\frac{x}{e^x}}{1+3\times\frac{x}{e^x}}}$$

Or, d'après un résultat du cours :

$$\text{Comme}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\quad \underline{\text{alors}}\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=\boxed{0^+}$$

Nous en déduisons :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-7\times\frac{x}{e^x}}{1+3\times\frac{x}{e^x}}=\frac{2-7\times 0^+}{1+3\times 0^+}=\frac{2}{1}=\boxed{2}$$

<u>Conséquence graphique :</u> la droite Δ' d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à la courbe $\left(C_f\right)$ au voisinage de $+\infty$.

b.3) Lorsque *x* tend vers α, le numérateur $n(x)=2e^x-7x$ tend vers $n(\alpha)=2e^\alpha-7\alpha$ car la fonction *n* est continue sur $\mathbb{R}$.

Or, comme α est négatif, alors la somme $n(\alpha)=\underbrace{2e^\alpha}_{\oplus}+\underbrace{(-7\alpha)}_{\oplus}$ est positive (strictement).

En utilisant le tableau de signe de $d(x)$ établi lors de la question, nous en déduisons :

$$\overbrace{\lim_{x\to\alpha^-} f(x)=\lim_{x\to\alpha^-}\frac{n(x)}{d(x)}=\frac{\overbrace{n(\alpha)}^{\oplus}}{0^-}=\boxed{-\infty}}^{\text{Limite à gauche de }\alpha}\quad \underline{\text{et}}\quad \overbrace{\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=\frac{\overbrace{n(\alpha)}^{\oplus}}{0^+}=\boxed{+\infty}}^{\text{Limite à droite de }\alpha}$$

<u>Conséquence graphique :</u> la droite Δ'' d'équation $x=\alpha$ est une asymptote verticale à la courbe $\left(C_f\right)$.

c.1) *f* est le quotient des fonctions

$n(x)=2e^x-7x$	$d(x)=e^x+3x$
$n'(x)=2e^x-7$	$d'(x)=e^x+3$
Dérivable sur $\mathbb{R}$	Dérivable sur $\mathbb{R}$
	Non nulle sur $\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$

Donc la fonction *f* est dérivable sur son ensemble de définition $D_f=\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$ et :

$$f'(x)=\frac{n'(x)\times d(x)-d'(x)\times n(x)}{\left[d(x)\right]^2}=\frac{\left(2e^x-7\right)\times\left(e^x+3x\right)-\left(e^x+3\right)\times\left(2e^x-7x\right)}{\left(e^x+3x\right)^2}$$

$$=\frac{\cancel{2e^{2x}}+6xe^x-7e^x-\cancel{21x}-\cancel{2e^{2x}}+7xe^x-6e^x+\cancel{21x}}{\left(e^x+3x\right)^2}=\frac{13x\boxed{e^x}-13\boxed{e^x}}{\left(e^x+3x\right)^2}$$

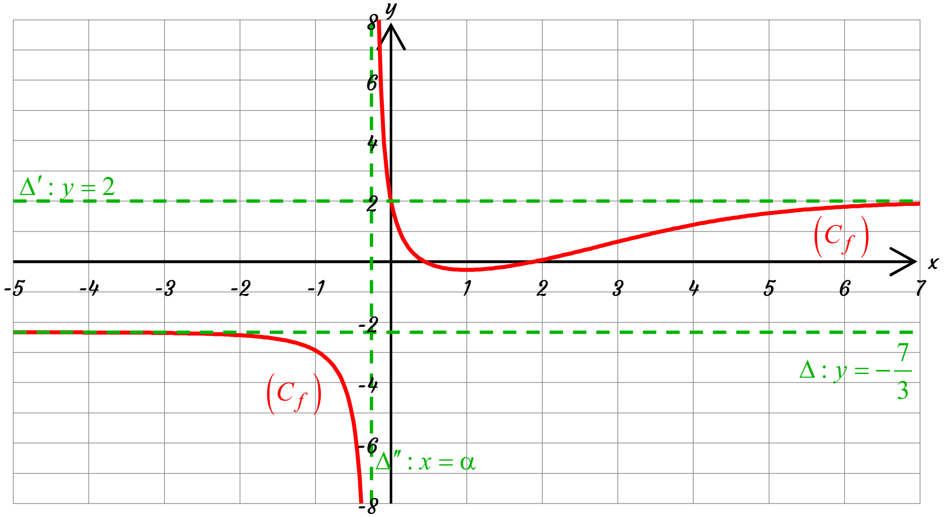
Ainsi, pour tout réel $x \neq \alpha$, avons-nous :

$$f'(x) = \frac{\boxed{e^x} \times (13x - 13)}{\left(e^x + 3x\right)^2} = \frac{13e^x \times (x-1)}{\left(e^x + 3x\right)^2}$$

c.2) Nous en déduisons que le tableau de variation de *f* est le suivant :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
e^x		$+$	|	$+$	|	$+$	
$13x-13$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\left(e^x+3x\right)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-7/3$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$f(1) \approx -0,27$	↗	2

d) La courbe $\left(C_f\right)$ accompagnée de ses trois asymptotes est représentée ci-dessous ↓



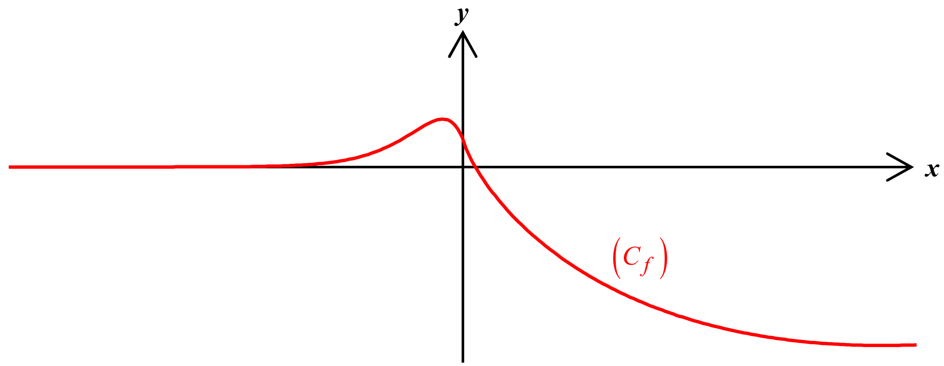
La fonction en deux morceaux

L'énoncé

La fonction *f* est définie sur ℝ par :

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x \leq 0 \quad \text{alors} \quad f(x) = e^{2x} \times (1 - 7x) \\ \text{Si} \quad x > 0 \quad \text{alors} \quad f(x) = x \times \left(\ln(x) - 3\right) + 1 \end{cases}$$

Sa courbe $\left(C_f\right)$ a été tracée sur le graphique ci-dessous dans un repère non orthonormé.



a) On étudie la fonction *f* sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ où $f(x) = e^{2x} \times (1 - 7x)$.

1. Calculer l'image $f(0)$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers $-\infty$.
   Quelle est la conséquence graphique de cette limite ?
3. Démontrer que pour tout réel $x \leq 0$, on a :
   $$f'(x) = e^{2x} \times (-14x - 5)$$
4. En déduire le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.

b) On étudie la fonction *f* sur l'intervalle $]0; +\infty[$ où $f(x) = x \times \left(\ln(x) - 3\right) + 1$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers 0 par la droite.
   Quelle est la conséquence graphique de cette limite ?
3. Calculer la dérivée $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $\ln(x) - 2 > 0$.
5. En déduire le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

c) On s'intéresse à la dérivabilité de f en 0.

1. En utilisant la question **a.3**, calculer $f_g{}'(0)$ qui est le nombre dérivé de f à gauche de 0.
2. Soit h un réel <u>strictement positif</u>. On travaille donc à droite de 0.
   Exprimer le quotient $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ en fonction de h.
3. La fonction f est-elle dérivable à droite de 0 ? On justifiera sa réponse.
4. Conclure quant à la dérivabilité de f en 0.

Le corrigé

a.1) Calculons l'image de 0 par la fonction f :

$$f(x)=e^{2\times 0}\times(1-7\times 0)=e^{0}\times(1-0)=1\times 1=\underline{1}$$

a.2) De prime abord, nous pouvons écrire :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}\times(1-7x)=e^{-\infty}\times(1-(-\infty))=0^{+}\times(+\infty)=\boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

C'est en fait une petite forme indéterminée. Juste en développant, il vient :

$$f(x)=e^{2x}-7xe^{2x}=e^{2x}-7\times xe^{x}\times e^{x}\xrightarrow[x\to-\infty]{}0^{+}-7\times 0^{-}\times 0^{+}=0^{+}-0^{-}=\underline{0^{+}}$$

La conséquence graphique de cette limite est que la droite d'équation $y=0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

a.3) La fonction f est sur l'intervalle $]-\infty;0]$ un produit $u\times v$ avec :

$u(x)=e^{2x}$ $=e^{u}$
$u'(x)=2\times e^{2x}$ $=u'\times e^{u}$
Dérivable sur ℝ

<u>et</u>

$v(x)=-7x+1$
$v'(x)=-7$
Dérivable sur ℝ

Donc la fonction f est dérivable sur $]-\infty;0]$ et sur cet intervalle :

$$\begin{aligned}f'(x)&=u'\times v+v'\times u=2e^{2x}\times(1-7x)+(-7)\times e^{2x}\\&=e^{2x}\times[2\times(1-7x)+(-7)]\\&=e^{2x}\times[2-14x-7]\\&=\underline{e^{2x}\times[-14x-5]}\end{aligned}$$

a.4) Nous en déduisons que le tableau de variation de f sur $]-\infty;0]$ est :

x	$-\infty$		$-5/14$		0
e^{2x}		$+$		$+$	
$-14x-5$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$f(-5/14)\approx 1,71$	↘	1

b.1) La limite en $+\infty$ ne pose guère de difficultés :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\times(\ln(x)-3)+1=(+\infty)\times((+\infty)-3)+1=(+\infty)\times(+\infty)+1=\underline{+\infty}$$

b.2) Sous l'écriture donnée, f est en 0^{+} une forme indéterminée. En effet :

$$\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim_{x\to 0^{+}} x\times(\ln(x)-3)+1=0^{+}\times((-\infty)-3)+1=0^{+}\times(-\infty)+1=\boxed{\text{Forme indéterminée}}$$

En fait, il s'agit là encore d'une petite indétermination car il suffit juste de développer :

$$f(x)=x\ln(x)-3x+1\xrightarrow[x\to 0^{+}]{}0^{-}-0^{+}+1=\underline{1}$$

La conséquence graphique de cette limite est que la fonction f est continue en $x=0$ et que sa courbe (C_f) ne comporte aucune rupture.

b.3) Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, la fonction f est presque un produit $u\times v$ avec :

$u(x)=x$
$u'(x)=1$
Dérivable sur ℝ

<u>et</u>

$v(x)=\ln(x)-3$
$v'(x)=1/x$
Dérivable sur $]0;+\infty[$

Donc la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sur cet intervalle, nous avons :

$$f'(x)=(u\times v)'+0=u'\times v+v'\times u=1\times(\ln(x)-3)+\frac{1}{\cancel{x}}\times\cancel{x}=\ln(x)-3+1=\underline{\ln(x)-2}$$

b.4) Résolvons dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation proposée :

$$\underbrace{\ln(x)-2}_{f'(x)}>0 \Leftrightarrow \ln(x)>2 \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{\text{Exp}} e^{\ln(x)}>e^2 \Leftrightarrow \underline{x>e^2}$$

b.5) La question précédente nous apprend que la dérivée $f'(x)=\ln(x)-2$ est positive après e^2, nul en ce point et négative avant.
Nous en déduisons que le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est ➔

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)=\ln(x)-2$		$-$	0	$+$	
f	1	↘	$1-e^2$	↗	$+\infty$

Sur cet intervalle, f atteint son minimum $x=e^2$ et vaut alors :

$$f\left(e^2\right)=e^2\times\left(\ln\left(e^2\right)-3\right)+1=e^2\times(2-3)+1=e^2\times(-1)+1=\underline{1-e^2}$$

c.1) Le nombre dérivé de f à gauche de 0 est donné par :

$$f_g{}'(0)=e^{2\times 0}\times[-14\times 0-5]=e^0\times(0-5)=1\times(-5)=\underline{-5}$$

c.2) Pour tout réel h de l'intervalle $]0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\times(\ln(h)-3)+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}=\frac{\cancel{h}\times(\ln(h)-3)}{\cancel{h}}=\underline{\ln(h)-3}$$

c.3) Pour savoir si f est dérivable à droite de 0, nous devons déterminer la limite à droite de 0 du quotient précédent.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\ln(h)-3=(-\infty)-3=\underline{-\infty}$$

La limite du quotient n'étant pas finie, la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0.
La demi-tangente à droite est verticale. Le graphique enduit dans l'erreur.

c.4) La fonction f n'est pas dérivable en 0.

Les saintes primitives

L'énoncé

a) On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{\left(e^{x+2}\right)^3\times e^{5-2x}}{\sqrt{e^{4x-6}}}$$

Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $F(14)=4$.

b) La fonction g est définie sur l'intervalle $]1,5;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{12x^2-8x-11}{2x-3}$$

1. Déterminer trois coefficients entiers a, b et c tels que pour tout réel $x>1,5$, on ait :
$$g(x)=ax+b+\frac{c}{2x-3}$$
2. En déduire une expression de la primitive G de la fonction g sur $]1,5;+\infty[$ telle que $G(2)=7$.

Le corrigé

a) Pour tout réel x, nous pouvons écrire en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$f(x)=\frac{\boxed{\left(e^{x+2}\right)^3}\times e^{5-2x}}{\boxed{\sqrt{e^{4x-6}}}}=\frac{\boxed{e^{3(x+2)}}\times e^{5-2x}}{\boxed{e^{\frac{1}{2}\times(4x-6)}}}=\frac{\boxed{e^{3x+6}\times e^{5-2x}}}{e^{2x-3}}$$

$$=\frac{\boxed{e^{(3x+6)+(5-2x)}}}{e^{2x-3}}=\boxed{\frac{e^{x+11}}{e^{2x-3}}}=\boxed{e^{(x+11)-(2x-3)}}=\underline{e^{-x+14}}$$

La fonction f est alors presque de la forme $u'e^u$ avec $\begin{cases} u(x)=-x+14 \\ n'(x)=-1 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$.

En effet :

$$f(x)=e^{-x+14}=(-1)\times(-1)\times e^{-x+14}=\underline{-u'\times e^u}$$

Par conséquent, la primitive F recherchée a une expression de la forme :

$$F(x) = -e^{u} + Cste = \boxed{-e^{14-x} + Cste}$$

On détermine la constante $Cste$ en sachant :

$$F(14) = 4 \iff -e^{14-14} + Cste = 4 \iff -e^{0} + Cste = 4 \iff Cste = 4 + 1 = \boxed{5}$$

Conclusion : la primitive recherchée est $F(x) = \boxed{5 - e^{14-x}}$.

b.1) On veut écrire $g(x)$ sous la forme :

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{2x-3}$$
$$= \frac{ax(2x-3) + b(2x-3) + c}{2x-3} = \frac{2ax^2 - 3ax + 2bx - 3b + c}{2x-3}$$
$$\frac{\boxed{12}x^2 + \boxed{(-8)}x + \boxed{-11}}{2x-3} = \frac{\boxed{2a}x^2 + \boxed{(2b-3a)}x + \boxed{(c-3b)}}{2x-3}$$

Les deux numérateurs ont des coefficients de même degré égaux. Identifions-les !

En x^2	$12 = 2a \iff a = \boxed{6}$	*Et d'un !*
En x	$-8 = 2b - 3a \iff -8 = 2b - 18 \iff 10 = 2b \iff b = \boxed{5}$	*Et de deux !*
Constants	$-11 = c - 3b \iff -11 = c - 15 \iff c = \boxed{4}$	*Et de trois !*

Conclusion : la forme décomposée de la fonction rationnelle g est $g(x) = 6x + 5 + \dfrac{4}{2x-3}$

b.2) Utilisons la forme décomposée de $g(x)$ pour déterminer une expression de G.

- Une primitive de $3 \times 2x + 5$ sur ℝ est $3x^2 + 5x$.
- Une primitive de $\dfrac{4}{2x-3} = 2 \times \dfrac{2}{2x-3} = 2 \times \dfrac{u'}{u}$ est $2 \times \ln(u) = 2 \times \ln(2x-3)$

  avec la fonction $\begin{cases} u(x) = 2x-3 \\ u'(x) = 2 \end{cases}$ qui est dérivable sur ℝ et positive sur $]1,5;+\infty[$.

Par conséquent, une expression de la primitive G recherchée est :

$$G(x) = \boxed{3x^2 + 5x + 2\ln(2x-3) + Cste}$$

On détermine la constante $Cste$ en utilisant le fait :

$$G(2) = 7 \iff 3 \times 2^2 + 5 \times 2 + 2 \times \ln(2 \times 2 - 3) + Cste = 7$$
$$\iff 12 + 10 + 2\underbrace{\ln(1)}_{0} + Cste = 7 \iff Cste = 7 - 12 - 10 = \boxed{-15}$$

Conclusion : une expression de la primitive est $G(x) = \boxed{3x^2 + 5x + 2\ln(2x-3) - 15}$

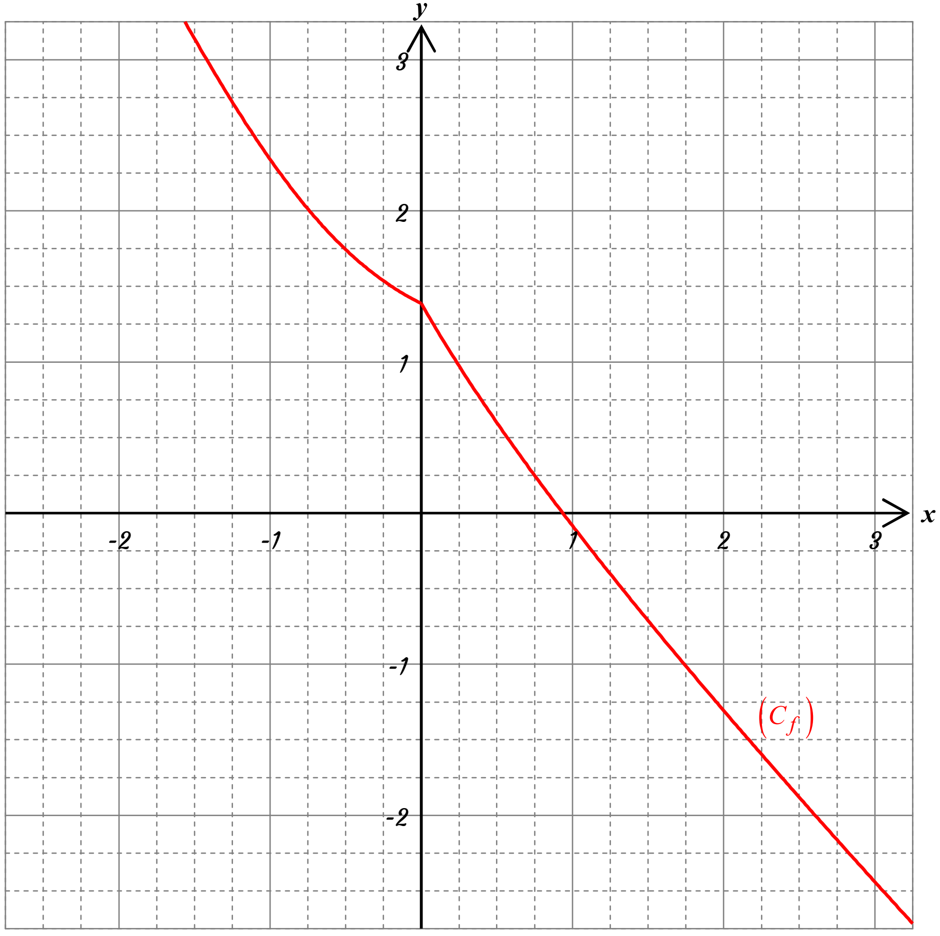
Continuité logarithmique

L'énoncé

La fonction f est définie sur ℝ par morceaux :

$$\begin{cases} \text{Si } x < 0 \text{ alors } f(x) = \ln\left(3 + e^{-2x}\right) \\ \text{Si } x \geq 0 \text{ alors } f(x) = \ln(x+4) - \ln(x+1) - x \end{cases}$$

Sa courbe (C_f) a été tracée sur le graphique ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres.



a) D'abord, on s'intéresse au comportement de la fonction *f* en 0.

1. Calculer l'image $f(0)$ que l'on exprimera en fonction de $\ln(2)$.
2. Démontrer que la fonction *f* est continue (à gauche) en 0.

b) On étudie la fonction *f* sur l'intervalle $]-\infty;0[$ où $f(x)=\ln\left(3+e^{-2x}\right)$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers $-\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel $x<0$, on a :
$$f(x)=\ln\left(3e^{2x}+1\right)-2x$$
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(3e^{2x}+1\right)$.
En déduire une valeur approchée à l'unité près de $f(-1230321)$.
4. Démontrer que pour tout réel $x<0$, nous avons :
$$f'(x)=-\frac{2}{3e^{2x}+1}$$
5. En déduire les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

c) On étudie la fonction *f* sur l'intervalle $[0;+\infty[$ où $f(x)=\ln(x+4)-\ln(x+1)-x$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel $x\geq 0$, nous avons :
$$f'(x)=-\frac{x^2+5x+7}{(x+1)(x+4)}$$
3. En déduire les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

d) La fonction *f* est-elle dérivable en 0 ? On pourra justifier sa réponse en s'appuyant sur les questions **b.4** et **c.2**.

Le corrigé

a.1) 0 appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, son image par *f* est donnée par le calcul :
$$f(0)=\ln(0+4)-\ln(0+1)-0=\ln(4)-\ln(1)=\ln(4)-0=\ln\left(2^2\right)=\underline{2\ln(2)}$$

a.2) La fonction $f(x)=\ln(x+4)-\ln(x+1)-x$ est clairement continue à droite 0.

Reste à savoir si cette même fonction $f(x)=\ln\left(3+e^{-2x}\right)$ l'est aussi à gauche de 0.

Lorsque *x* tend vers 0^- ,
- $-2x$ tend vers 0^+
- e^{-2x} tend vers $e^0=1$ car l'exponentielle est continue sur ℝ
- $3+e^{-2x}$ tend vers $3+1=4$
- $\ln\left(3+e^{-2x}\right)$ tend vers $\ln(4)$ car ln est continue sur $]0;+\infty[$

<u>Conclusion :</u> comme $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\ln(4)=f(0)$, alors la fonction *f* est continue à gauche de 0 et donc en 0.

b.1) Lorsque *x* tend vers $-\infty$,
- $-2x$ tend vers $+\infty$
- e^{-2x} tend vers $+\infty$
- $3+e^{-2x}$ tend vers $+\infty$
- $\ln\left(3+e^{-2x}\right)$ tend vers $+\infty$

Nous en concluons :
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\underline{+\infty}$$

b.2) Partons du membre de droite. Pour tout réel $x<0$, nous pouvons écrire :
$$\begin{aligned}\ln\left(3e^{2x}+1\right)-2x&=\ln\left(3e^{2x}+1\right)+\boxed{(-2x)}\\&=\ln\left(3e^{2x}+1\right)+\ln\left(e^{\boxed{-2x}}\right)\\&=\ln\left[\left(3e^{2x}+1\right)\times e^{-2x}\right]\\&=\ln\left[3\times\boxed{e^{2x}\times e^{-2x}}+e^{-2x}\right]=\ln\left[3\times\boxed{1}+e^{-2x}\right]=\underline{f(x)}\end{aligned}$$

Note : nous aurions aussi pu établir cette égalité en partant de la gauche ou en faisant la différence de ses deux membres.

b.3) Déterminons la limite demandée. Nous aurions pu écrire :
$$\overbrace{\lim_{x\to-\infty}\ln\left(3e^{2x}+1\right)=\ln\left(3e^{-\infty}+1\right)=\ln\left(3\times0^++1\right)=\underbrace{\ln\left(0^++1\right)=\ln(1)}_{\text{Car ln est continue sur }]0;+\infty[}=\underline{0}}^{\text{Ce mode de présentation est bien sûr inacceptable !}}$$

Ainsi, plus *x* est négativement grand, plus $f(x)$ se comporte comme $-2x+0=-2x$.

Par conséquent, une valeur approchée de $f(-1230321)$ est $-2\times(-1230321)=\underline{2460642}$

b.4) Comme
$u(x)=3+e^{-2x}$
$u'(x)=0+(-2)\times e^{-2x}=-2e^{-2x}$
Dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$
car c'est une somme de deux termes positifs

Une exponentielle est toujours strictement positive.

alors $f(x)=\ln(u)$ est dérivable sur $]-\infty;0[$

Il vient alors que pour tout réel $x\in]-\infty;0[$:

$$f'(x)=\frac{u'}{u}=\frac{-2e^{-2x}}{3+e^{-2x}}$$

$$=-\frac{2e^{-2x}\times e^{2x}}{\left(3+e^{-2x}\right)\times e^{2x}}=-\frac{2\times 1}{3e^{2x}+1}=\frac{-2}{3e^{2x}+1}$$

b.5) Le dénominateur $3e^{2x}+1$ est strictement positif car c'est une somme de termes positifs. Par conséquent, le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $]-\infty;0[$ est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		0
-2		$-$	
$3e^{2x}+1$		$+$	
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	↘	$\ln(4)$

c.1) Désormais, nous évoluons sur l'intervalle $[0;+\infty[$ où $f(x)=\ln(x+4)-\ln(x+1)-x$

Déterminons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

Ce n'est pas bien de présenter les choses ainsi !

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x+4)-\ln(x+1)-x$$

$$=\ln(+\infty)-\ln(+\infty)-(+\infty)=(+\infty)-(+\infty)-(+\infty)=$$

Forme indéterminée

Or, pour tout réel $x\geq 0$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\ln(x+4)-\ln(x+1)-x=\ln\left(\frac{x+4}{x+1}\right)-x$$

Justement, intéressons-nous au quotient $(x+4)/(x+1)$. Si nous arrivons à déterminer sa limite en $+\infty$, alors nous connaîtrons celle de son logarithme.
Pour tout réel $x>0$, nous pouvons écrire :

$$\frac{x+4}{x+1}=\frac{\cancel{x}\times\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\times\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}\quad\text{donc}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x+4}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1+0^+}{1+0^+}=1$$

$$\text{donc}\quad\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+4}{x+1}\right)=\ln(1)=0$$

Car ln est continue en 1.

Nous en concluons :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+4}{x+1}\right)-x=0-(+\infty)=-\infty$$

c.2) Comme
$u(x)=x+4$
$u'(x)=1$
Dérivable et positive sur $]-4;+\infty[$

et
$v(x)=x+1$
$v'(x)=1$
Dérivable et positive sur $]-1;+\infty[$

alors, la fonction $f(x)=\ln(u)-\ln(v)-x$ est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et :

$$f'(x)=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}-(x)'=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+1}-1=\frac{1\times(x+1)-1\times(x+4)-1\times(x+4)\times(x+1)}{(x+4)\times(x+1)}$$

$$=\frac{x+1-x-4-x^2-x-4x-4}{(x+4)\times(x+1)}=\frac{-x^2-5x-7}{(x+4)\times(x+1)}=-\frac{x^2+5x+7}{(x+4)\times(x+1)}$$

c.3) Seul le signe du numérateur nous demeure inconnu. Pour le trouver, calculons le discriminant de la forme du second degré $N(x)=x^2+5x+7$.

$$\Delta_{N(x)}=5^2-4\times1\times7=25-28=-3$$

Comme son discriminant est négatif, alors la forme du second degré $N(x)$ est toujours du même signe qui est celui du coefficient dominant 1. Elle est donc toujours positive.

Le signe de la dérivée $f'(x)$ va nous donner le sens de variation de la fonction *f* sur $[0;+\infty[$ ➔

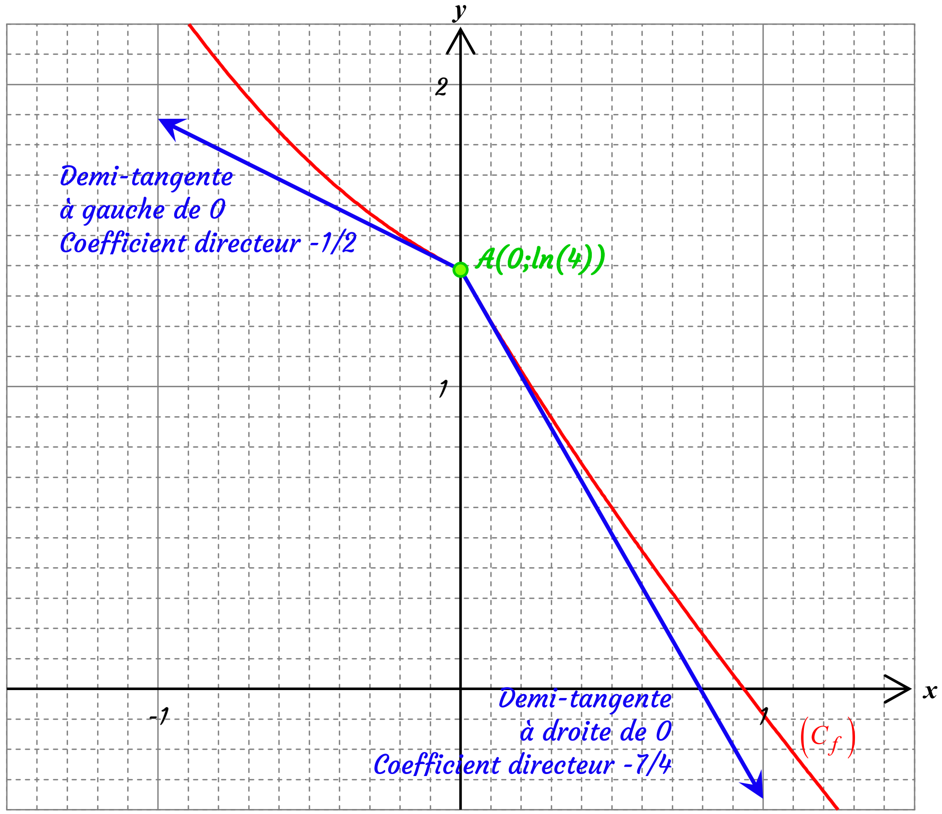
x	0		$+\infty$
-1		$-$	
$N(x)$		$+$	
$x+4$		$+$	
$x+1$		$+$	
$f'(x)$		$-$	
f	$\ln(4)$	↘	$-\infty$

d) Clairement, la fonction *f* est dérivable à gauche et à droite de 0.
Justement, calculons les nombres dérivés de *f* à gauche et à droite de 0

$$f'_g(0)=-\frac{2}{3e^{2\times0}+1}=-\frac{2}{3\times e^0+1}=-\frac{2}{3\times1+1}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$f'_d(0)=-\frac{0^2+5\times0+7}{(0+1)(0+4)}=-\frac{7}{1\times4}=-\frac{7}{4}$$

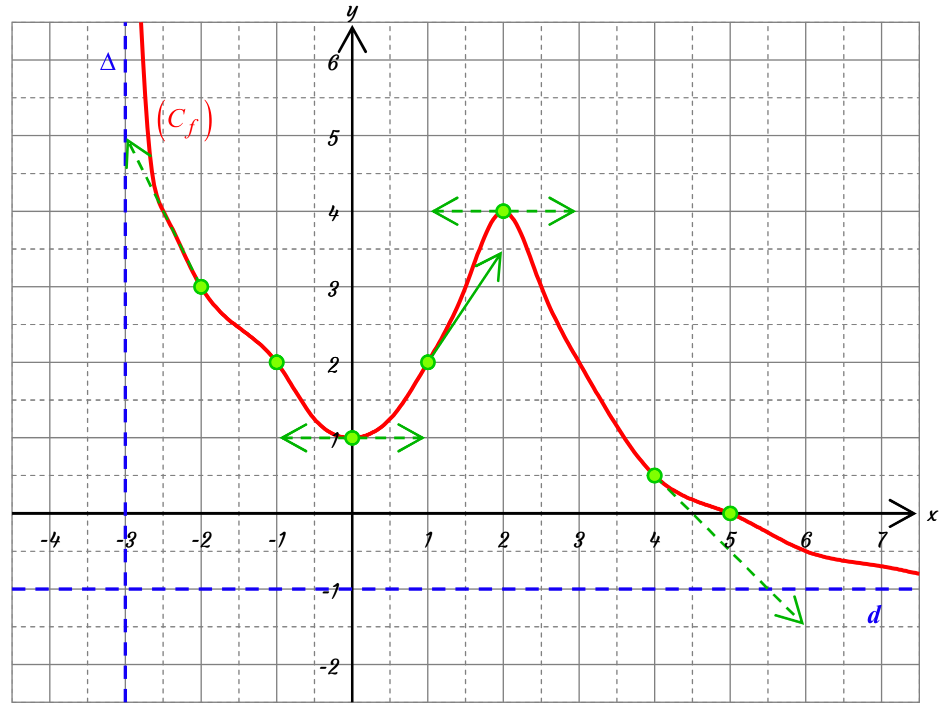
Comme les nombres dérivés à gauche et à droite de 0 sont différents, alors la fonction *f* n'est pas dérivable en 0. Les deux demi-tangentes ne s'emboitent pas.



Bonnes lectures...graphiques !

L'énoncé

f est une fonction est définie et dérivable sur l'intervalle $]-3;+\infty[$. Sa courbe représentative (C_f) a été tracée sur le graphique ci-dessous.



Sur le graphique ci-dessus, on a aussi placé quelques points de la courbe (C_f) et tracé quelques tangentes et asymptotes. De plus, on dispose des précisions suivantes :

- La droite d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).
- La droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;2[$ et est strictement décroissante sur les intervalles $]-3;0[$ et $]2;+\infty[$.

On répondra aux questions de l'exercice en utilisant ces renseignements ainsi que ceux fournis par le graphique.

a) On travaille avec la fonction *f*.

1. Compléter les égalités suivantes :

$$f(-2)=\ldots\ldots \qquad f'(-2)=\ldots\ldots \qquad f'(0)=\ldots\ldots \qquad f'(1)=\ldots\ldots$$

2. Résoudre dans l'intervalle $]-3;+\infty[$ les inéquation suivantes :

$$f(x)<0 \qquad\qquad f'(x)>0$$

3. Déterminer les limites de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition.

b) On appelle g la fonction définie par :

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction *g*.

2. Déterminer les quatre limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition D_g.

Quelles sont les conséquences graphiques éventuelles de ces limites ?

3. Compléter les égalités suivantes :

$$g(4)=\ldots\ldots \qquad\qquad g'(4)=\ldots\ldots$$

4. Résoudre dans D_g les équations suivantes :

$$g(x)=0,5 \qquad\qquad g(x)=0$$

5. Dresser le tableau de variation de la fonction *g*.

6. Sur le graphique ***b*** ci-après, tracer une esquisse de la courbe (C_g), sa tangente au point d'abscisse $x=4$ ainsi que toutes les asymptotes rencontrées.

c) On appelle h la fonction définie par :

$$h(x)=\ln(f(x))$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction *h*.

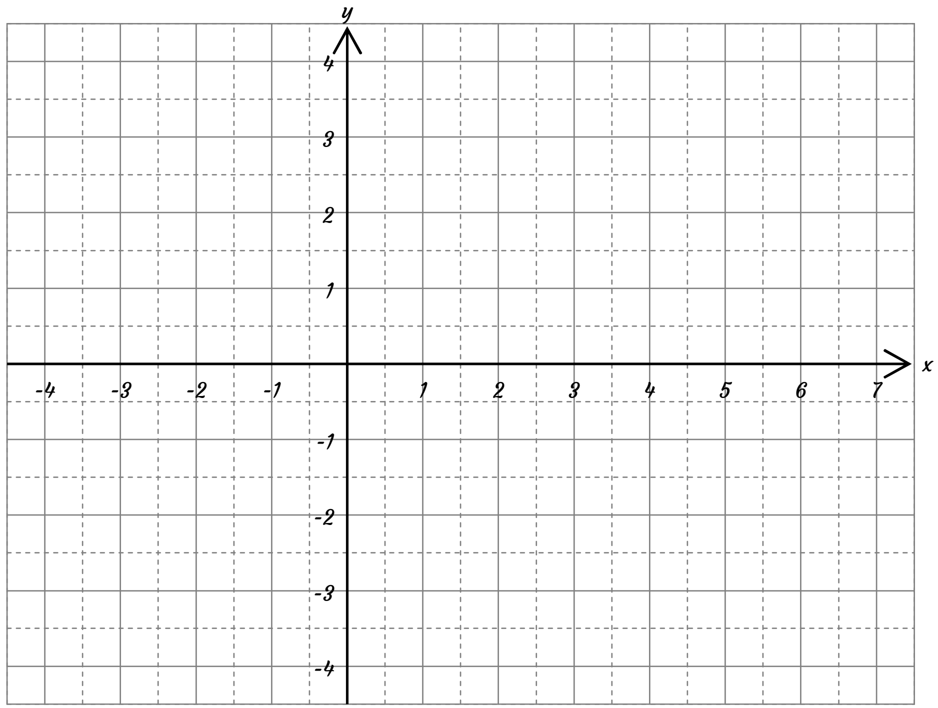
2. Déterminer les deux limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition D_h.

Quelles sont les conséquences graphiques éventuelles de ces limites ?

3. Compléter les égalités suivantes. Les résultats seront donnés sous la forme d'un entier, d'une fraction irréductible ou d'un multiple de $\ln(2)$.

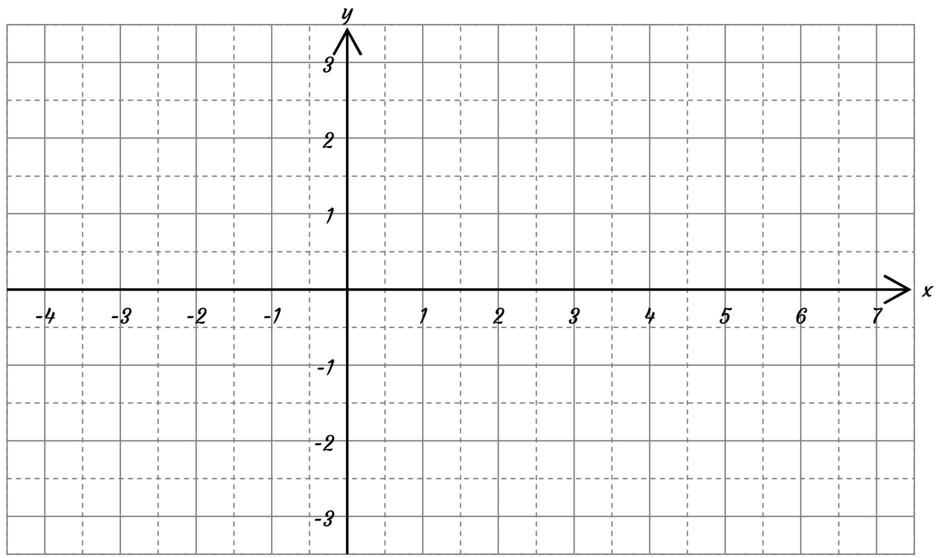
$$h(0)=\ldots\ldots \qquad h(2)=\ldots\ldots \qquad h(4)=\ldots\ldots \qquad h'(4)=\ldots\ldots$$

4. Sur le graphique ***c*** ci-après, tracer une esquisse de la courbe (C_h), la tangente à cette courbe en $x=4$ ainsi que toutes ses asymptotes rencontrées.



↑ Graphique b ↑

↓ Graphique c ↓



Le corrigé

a.1) Complétons les égalités demandées.

$$f(-2)=3 \qquad f'(0)=0 \qquad f'(1)=1{,}5 \qquad f'(4)=-1$$

Le nombre dérivé en un point est le coefficient directeur de la tangente

a.2) Les solutions de l'inéquation $f(x)<0$ sont les réels de l'intervalle $]5;+\infty[$.

➲ Pour résoudre l'inéquation $f'(x)>0$, il faut considérer les parties strictement croissantes de la courbe (C_f) . L'ensemble de solutions est l'intervalle $]0;2[$.

a.3) Comme la droite d'équation $x=-3$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f) et que la fonction *f* est décroissante à droite de -3 , alors $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=+\infty$

➲ Comme la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$

b.1) $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ existe $\Leftrightarrow$ $f(x)$ existe et est non nul

$\Leftrightarrow$ $x\in\,]-3;+\infty[$ et $x\neq 5$

Conclusion : l'ensemble de définition de *g* est : $D_g=\,]-3;+\infty[\,\setminus\{5\}=\,]-3;5[\,\cup\,]5;+\infty[$

b.2) Vu son ensemble de définition, quatre limites sont à déterminer quant à la fonction *g* :

$\lim\limits_{x\to-3} g(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{+\infty}=0^+$ $\Rightarrow$ La courbe (C_g) se prolonge par continuité en -3 en posant $g(-3)=0$

$\lim\limits_{x\to5^-} g(x)=\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ $\Rightarrow$ La droite d'équation $x=5$ est une asymptote verticale à (C_g).

$\lim\limits_{x\to5^+} g(x)=\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ $\Rightarrow$ La droite d'équation $x=5$ est encore une asymptote verticale à (C_g).

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{-1}=-1$ $\Rightarrow$ La droite d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à (C_g) au voisinage de $+\infty$.

b.3) Si une fonction *u* est dérivable et non nulle, alors la dérivée de $\dfrac{1}{u}$ est $-\dfrac{u'}{u^2}$. Ainsi :

$$g(4)=\frac{1}{f(4)}=\frac{1}{0{,}5}=2 \qquad \text{et} \qquad g'(4)=-\frac{f'(4)}{[f(4)]^2}=-\frac{(-1)}{(0{,}5)^2}=\frac{1}{0{,}25}=4$$

b.4) La première équation ne pose guère de problèmes.

$$g(x)=0{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=0{,}5 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{0{,}5}=2$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \;\text{ ou }\; x=1 \;\text{ ou }\; x=3$$

➲ La seconde équation s'écrit : $g(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}=0$

Un inverse n'étant jamais nul, elle n'admet pas de solutions...sauf éventuellement -3 .

b.5) *g* est la composée de la fonction *f* suivie de la fonction inverse qui est strictement décroissante là où elle est définie. Cette dernière inverse les variations de *f*.

x	-3		0		2		5		$+\infty$
g	0^+	↗	1	↘	$1/2$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

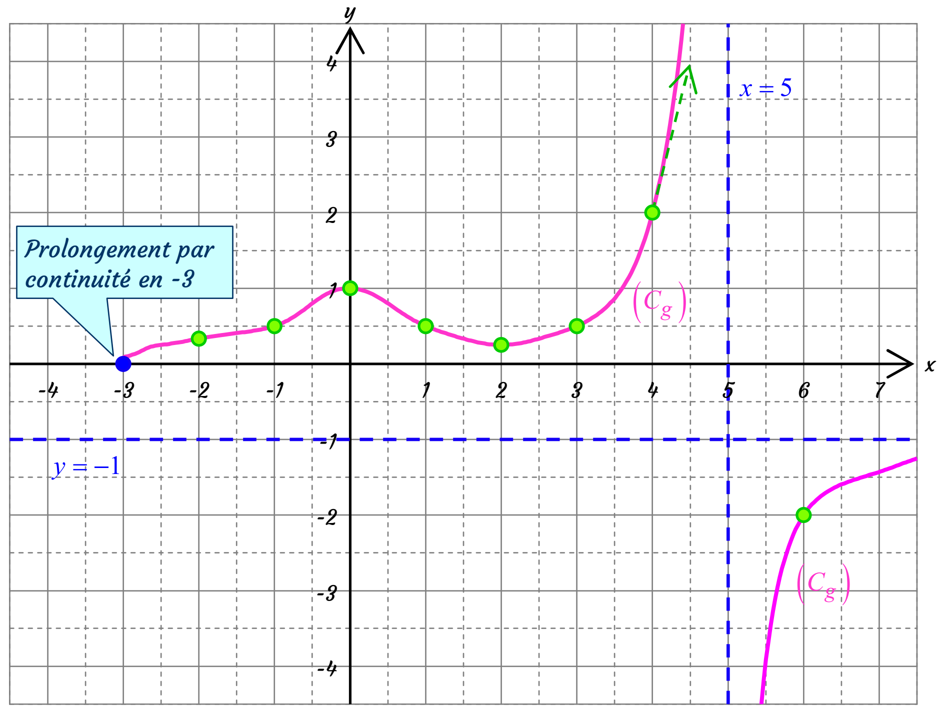
Les variations de $g=\dfrac{1}{f}$ s'obtiennent aussi à partir du signe de sa dérivée $g'=-\dfrac{f'}{f^2}$

b.6) D'abord, on trace les deux asymptotes de (C_g) d'équations $y=-1$ et $x=5$.

Puis, on place quelques points calculés de la courbe dont celui issu du prolongement par continuité qui a pour coordonnées $(-3;0)$

Enfin, on trace la tangente à la courbe au point de coordonnées $(4;2)$ qui a pour coefficient directeur 4. Cette tangente lance la courbe (C_g) vers son asymptote verticale.

Enfin, il ne reste plus qu'à dessiner une esquisse de la courbe (C_g) s'appuyant sur tous ces éléments.



Ln est définie sur $]0;+\infty[$

c.1) $h(x)=\ln(f(x))$ existe $\Leftrightarrow$ $f(x)$ existe <u>et</u> est strictement positif

$\Leftrightarrow$ $x \in]-3;+\infty[$ <u>et</u> $x \in]-3;5[$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de la fonction h est $D_h =]-3;5[$

c.2) Deux limites sont à déterminer :

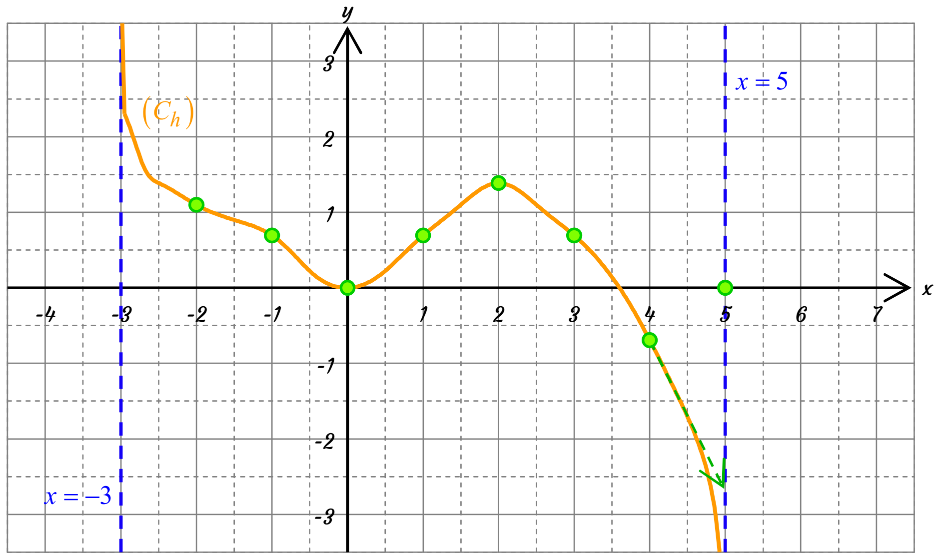
$\lim\limits_{x\to -3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \ln(f(x)) = \ln(+\infty) = +\infty$ $\Rightarrow$ La droite $x=-3$ est une asymptote verticale à (C_g).

$\lim\limits_{x\to 5^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} \ln(f(x)) = \ln(0^+) = -\infty$ $\Rightarrow$ La droite $x=5$ est une asymptote verticale à (C_g)

c.3) $h(0)=\ln(f(0))=\ln(1)=0$ $\qquad h(2)=\ln(f(2))=\ln(4)=\ln(2^2)=2\ln(2)$

$h(4)=\ln(f(4))=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\ln(2)$ $\qquad h'(4)=\dfrac{f'(4)}{f(4)}=\dfrac{-1}{0,5}=-2$

c.4) La fonction $h=\ln(f)$ étant la composée de la fonction f suivie de la fonction ln qui est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, les variations de h sont les mêmes que celles de f.
Avant de tracer la courbe, on commence par ses asymptotes d'équations $x=-3$ et $x=5$.
Puis, on place quelques points calculs et on trace la tangente à la courbe (C_h) en 4.
Enfin, on esquisse une courbe (C_h) s'appuyant sur tous ces éléments.



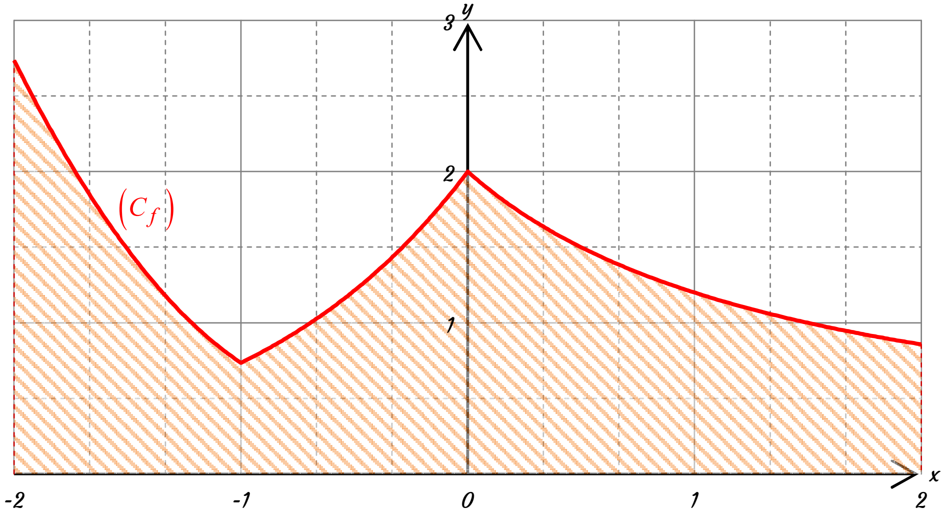
Petites intégrales

L'énoncé

a) La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2;2]$ par :

$$\begin{cases} \text{Si } x\in[-2;-1[& \text{alors} \quad f(x)=\dfrac{2}{e}+x+x^2 \\ \text{Si } x\in[-1;0[& \text{alors} \quad f(x)=2e^x \\ \text{Si } x\in[0;2] & \text{alors} \quad f(x)=\dfrac{6}{2x+3} \end{cases}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé sa courbe représentative (C_f) dans un repère seulement orthogonal où | 1 unité abscisse vaut 3 centimètres
| 1 unité ordonnée vaut 2 centimètres



Déterminer une valeur approchée au millimètre carré près de l'aire exprimée en centimètres carrés du domaine hachuré se trouvant entre l'axe (Ox), la courbe (C_f) et les droites verticales d'équation $x=-2$ et $x=2$.

b) En calculant les intégrales proposées, établir les égalités suivantes :

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\left(1-2e^{-x}\right)dx=\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3} \qquad \int_{\ln(2)}^{\ln(3)}\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}+1}}dx=\frac{4\sqrt{7}}{3}-2$$

c) Le but de ces questions est le calcul de l'intégrale $I_c=\displaystyle\int_1^2\frac{2x^3-5x^2-6x+3}{2x^3-x^2}dx$

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x\in[1;2]$, on ait :

$$\frac{2x^3-5x^2-6x+3}{2x^3-x^2}=a+\frac{b}{2x-1}+\frac{c}{x^2}$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale I_c

d) Cette question est ouverte et consiste en l'application d'un théorème non vu en cours.
L'intégration par parties est une technique d'intégration reposant sur la formule suivante :

$$\boxed{\int_a^b u(x)\times v'(x)dx=\left[u(x)\times v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)\times v(x)dx}$$

où u et v sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a;b]$.

En utilisant cette formule, calculer l'intégrale $I_e=\displaystyle\int_0^1(2x+1)\times e^x dx$

Le corrigé

a) Avant toutes choses, déterminons des primitives des trois «morceaux» de f :

- Une primitive de $\dfrac{2}{e}+x+x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{2}{e}x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3$.
- Une primitive de $2e^x$ sur $\mathbb{R}$ est $2e^x$.
- Une primitive de $\dfrac{6}{2x+3}=3\times\dfrac{2}{2x+3}=3\times\dfrac{u'}{u}$ sur $[0;2]$ est $3\ln(u)=3\ln(2x+3)$.

Il vient alors :

$$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{2}{e}+x+x^2\right)dx=\left[\frac{2}{e}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{-1}$$
$$=\left(-\frac{2}{e}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{4}{e}+\frac{4}{2}-\frac{8}{3}\right)$$
$$=\frac{2}{e}-\frac{3}{2}+\frac{7}{3}=\frac{2}{e}+\frac{-9+14}{6}=\frac{2}{e}+\frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^{0}2e^x dx=\left[2e^x\right]_{-1}^{0}=2\times e^0-2\times e^{-1}=2-\frac{2}{e}$$

$$\int_0^2\frac{6}{2x+3}dx=\left[3\times\ln(2x+3)\right]_0^2=3\times\ln(7)-3\times\ln(3)=3\times\ln\left(\frac{7}{3}\right)$$

L'aire hachurée est alors donnée par l'intégrale :

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \overbrace{\int_{-2}^{\boxed{-1}} \left(\frac{2}{e}+x+x^2\right)dx + \int_{\boxed{-1}}^{\boxed{0}} 2e^x\,dx + \int_{\boxed{0}}^{2} \frac{6}{2x+3}\,dx}^{\text{En appliquant la relation de Chasles...}}$$

$$= \left(\cancel{\frac{2}{e}}+\frac{5}{6}\right)+\left(2-\cancel{\frac{2}{e}}\right)+\left(3\times\ln\left(\frac{7}{3}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{17}{6}+3\times\ln\left(\frac{7}{3}\right) \text{ unités d'aire} = 17+18\times\ln\left(\frac{7}{3}\right)\ \text{cm}^2}_{\text{Une unité d'aire est l'aire d'un rectangle de 3 centimètres sur 2.}}$$

Conclusion : l'aire du domaine hachurée vaut environ 32,25 centimètres carrés.

b) Une primitive de la fonction $e^{-x} = -(-1)\times e^{-x} = -u'\times e^{u}$ sur ℝ est $-e^{u} = -e^{-x}$.

Il vient alors :

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \left(1-2e^{-x}\right)dx = \left[x+2e^{-x}\right]_{\ln(2)}^{\ln(3)}$$

$$= \left(\ln(3)+2\times e^{-\ln(3)}\right)-\left(\ln(2)+2\times e^{-\ln(2)}\right)$$

$$= \ln(3)-\ln(2)+2\times\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{3}-1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}$$

➲ Une primitive de $\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}+1}} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{3e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}+1}} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ sur ℝ est $\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{u} = \dfrac{2}{3}\sqrt{e^{3x}+1}$.

avec $u(x) = e^{3x}+1 \Rightarrow u'(x) = (3x)'\times e^{3x}+0 = 3e^{3x}$.
Dérivable sur et strictement positive sur ℝ

Il vient alors :

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}+1}}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{e^{3x}+1}\right]_{\ln(2)}^{\ln(3)} = \left(\frac{2}{3}\times\sqrt{e^{3\ln(3)}+1}\right)-\left(\frac{2}{3}\times\sqrt{e^{3\ln(2)}+1}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\times\sqrt{e^{\ln(27)}+1}\right)-\left(\frac{2}{3}\times\sqrt{e^{\ln(8)}+1}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\times\sqrt{27+1}\right)-\left(\frac{2}{3}\times\sqrt{8+1}\right) = \left(\frac{2}{3}\times\sqrt{28}\right)-\left(\frac{2}{3}\times\sqrt{9}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\times\sqrt{4}\times\sqrt{7}\right)-\left(\frac{2}{\cancel{3}}\times\cancel{3}\right) = \frac{4\sqrt{7}}{3}-2$$

c.1) On veut écrire la fonction rationnelle intégrée sous la forme :

$$\frac{2x^3-5x^2-6x+3}{2x^3-x^2} = a+\frac{b}{2x-1}+\frac{c}{x^2}$$

$$= \frac{a\times(2x-1)\times x^2+b\times x^2+c\times(2x-1)}{(2x+1)\times x^2}$$

$$= \frac{2ax^3-ax^2+bx^2+2cx-c}{2x^3-x^2}$$

$$\frac{\boxed{2}x^3+\boxed{(-5)}x^2+\boxed{(-6)}\times x+\boxed{3}}{2x^3-x^2} = \frac{\boxed{2a}x^3+\boxed{(b-a)}x^2+\boxed{2c}\times x+\boxed{(-c)}}{2x^3-x^2}$$

Les deux numérateurs-polynômes ont des coefficients de même degré égaux. Ainsi :

Egalité en x^3	: $2=2a$	$\Leftrightarrow$	$a=1$	
Egalité en x^2	: $-5=b-a$	$\Leftrightarrow$	$b=a-5=-4$	
Egalité en x^1	: $-6=2c$	$\Leftrightarrow$	$c=-3$	
Egalité en x^0	: $3=-c$	$\Leftrightarrow$	$c=-3$	Ca confirme !

Conclusion : pour tout réel $x\in[1;2]$, nous avons : $\dfrac{2x^3-5x^2-6x+3}{2x^3-x^2} = 1-\dfrac{4}{2x-1}-\dfrac{3}{x^2}$

c.2) Une primitive de $\dfrac{4}{2x-1} = 2\times\dfrac{2}{2x-1} = 2\times\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2x-1$
$u'(x) = 2$
Dérivable et positive sur $[1;2]$

sur l'intervalle $[1;2]$ est la fonction $2\times\ln(u) = 2\times\ln(2x-1)$.

Il vient alors :

$$I_c = \int_1^2 \frac{2x^3-5x^2-6x+3}{2x^3-x^2}\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(1-\frac{4}{2x-1}-3\times\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \left[x-2\times\ln(2x-1)+\frac{3}{x}\right]_1^2$$

$$= \left(1-2\times\ln(3)+\frac{3}{2}\right)-\left(0-2\times\ln(1)+\frac{3}{1}\right) = \frac{5}{2}-2\ln(3)-3 = -2\ln(3)-\frac{1}{2}$$

d) Appliquons la formule d'intégration par parties :

$$\boxed{\int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx = \left[u(x)\times v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx}$$

aux fonctions $\begin{cases} u(x)=2x+1 \\ u'(x)=2 \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(x)=e^x \\ v(x)=e^x \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} I_d &= \int_0^1 (2x+1)\times e^x\,dx \\ &= \left[(2x+1)\times e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2\times e^x\,dx \\ &= \left(3\times e^1\right)-\left(1\times e^0\right)-2\times\int_0^1 e^x\,dx \\ &= 3e-1-2\times\left[e^x\right]_0^1 = 3e-1-2\left(e^1-e^0\right) = 3e-1-2e+2 = \underline{e+1} \end{aligned}$$

Géométrie et nombres complexes

Cassage complexe

L'énoncé

Le polynôme P est défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = 4z^4 + 12z^3 + 21z^2 + 24z + 26$$

a) Calculer $P(\boldsymbol{i})$.

Le but des deux questions suivantes est la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

b) Déterminer quatre entiers relatifs a, b, c et d tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = \left(az^2 + bz + c\right) \times \left(z^2 + d\right)$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Le corrigé

a) Rappelons que les puissances du nombre $\boldsymbol{i}$ sont cycliques suivant une période de 4.

Puisssance…	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
…de $\boldsymbol{i}$	1	$\boldsymbol{i}$	-1	$-\boldsymbol{i}$	1	$\boldsymbol{i}$	-1	$-\boldsymbol{i}$	1	…

Il vient alors : $P(\boldsymbol{i}) = 4 \times \boldsymbol{i}^4 + 12 \times \boldsymbol{i}^3 + 21 \times \boldsymbol{i}^2 + 24 \times \boldsymbol{i} + 26$

$$= 4 \times 1 + 12 \times (-\boldsymbol{i}) + 21 \times (-1) + 24\boldsymbol{i} + 26 = 9 + 12\boldsymbol{i}$$

b) Procédons par identification. On veut écrire le polynôme P sous la forme :

$$P(z) = \left(az^2 + bz + c\right) \times \left(z^2 + d\right)$$

$$= az^4 + adz^2 + bz^3 + bdz + cz^2 + cd$$

$$\boxed{4}z^4 + \boxed{12}z^3 + \boxed{21}z^2 + \boxed{24}z + \boxed{26} = \boxed{a}z^4 + \boxed{b}z^3 + \boxed{(ad+c)}z^2 + \boxed{bd}z + \boxed{cd}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux :

En z^4	$4 = a$ soit $a = 4$	*Et d'un !*
En z^3	$12 = b$ soit $b = 12$	*Et de deux !*
En z^2	$21 = ad + c$ $\cdots$ $ad + c = 4 \times 2 + 13 = 21$	*C'est vérifié !*
En z	$24 = bd \Leftrightarrow 24 = 12d \Leftrightarrow d = 2$	*Et de trois !*
Constant	$26 = cd \Leftrightarrow 26 = 2c \Leftrightarrow c = 13$	*Et de quatre !*

Conclusion : une écriture factorisée du polynôme P est :

$$P(z) = 4z^4 + 12z^3 + 21z^2 + 24z + 26 = \left(4z^2 + 12z + 13\right) \times \left(z^2 + 2\right)$$

c) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation imposée !

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{\left(4z^2 + 12z + 13\right) \times \left(z^2 + 2\right) = 0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{4z^2 + 12z + 13 \quad \underline{\text{ou}} \quad z^2 + 2 = 0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

Résolvons séparément ces deux sous-équations du second degré :

- Calculons le discriminant de l'équation $4z^2 + 12z + 13 = 0$.

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 4 \times 13 = 144 - 208 = -64 = (8\boldsymbol{i})^2$$

Son discriminant étant négatif, cette sous-équation du second degré admet deux solutions complexes, conjuguées et non réelles.

$$z = \frac{-12 - 8\boldsymbol{i}}{2 \times 4} = -\frac{12}{8} - \frac{8}{8}\boldsymbol{i} = -\frac{3}{2} - \boldsymbol{i} \quad \underline{\text{ou}} \quad z = \frac{-12 + 8\boldsymbol{i}}{2 \times 4} = -\frac{3}{2} + \boldsymbol{i}$$

- La seconde sous-équation $z^2 + 2 = 0$ peut se résoudre via un produit nul.

$$z^2 - (-2) = 0 \Leftrightarrow z^2 - \left(\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \overbrace{\left[z + \boldsymbol{i}\sqrt{2}\right] \times \left[z - \boldsymbol{i}\sqrt{2}\right] = 0}^{\text{Un produit est nul...}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{z + \boldsymbol{i}\sqrt{2} = 0 \quad \underline{\text{ou}} \quad z - \boldsymbol{i}\sqrt{2} = 0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$z = -\boldsymbol{i}\sqrt{2} \qquad z = \boldsymbol{i}\sqrt{2}$$

Conclusion : l'équation $P(z) = 0$ admet quatre solutions complexes qui sont :

$$-\boldsymbol{i}\sqrt{2} \qquad \boldsymbol{i}\sqrt{2} \qquad -\frac{3}{2} - \boldsymbol{i} \qquad -\frac{3}{2} + \boldsymbol{i}$$

Complexes géométriques

L'énoncé

a) On appelle P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 + (4-2\boldsymbol{i})z^2 + (16-8\boldsymbol{i})z - 32\boldsymbol{i}$$

1. Calculer $P(2\boldsymbol{i})$ et justifier que $P(z)$ est factorisable par $z-2\boldsymbol{i}$.
2. Déterminer trois coefficients réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
$$P(z) = (z-2\boldsymbol{i}) \times \left(az^2 + bz + c\right)$$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Sur la figure se trouvant sur ci-contre, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$.

En tirets, on a tracé les principales radiales correspondant aux angles remarquables.

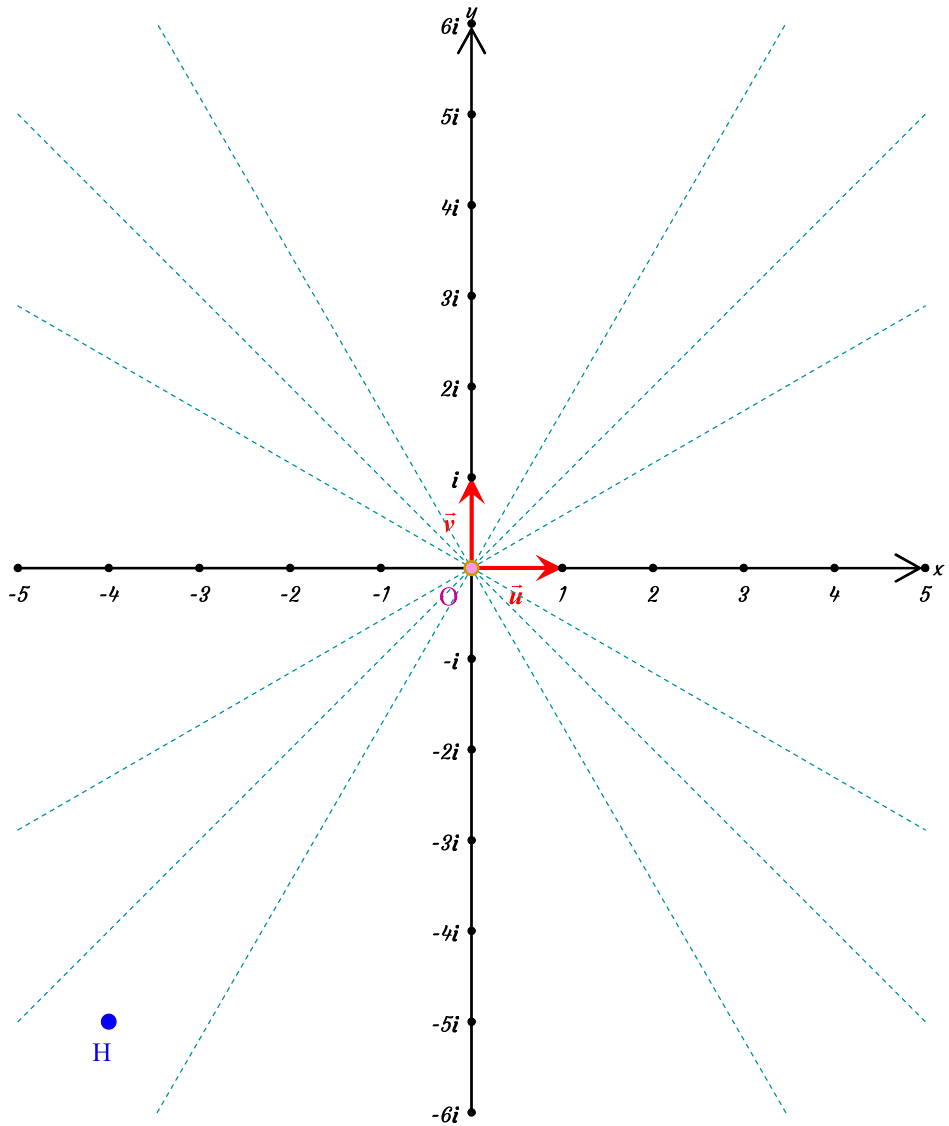
b) Les points A, B, C et D ont pour affixes :

$$z_{\mathrm{A}} = 2\boldsymbol{i} \qquad z_{\mathrm{B}} = -2-2\boldsymbol{i}\sqrt{3} \qquad z_{\mathrm{C}} = -2+2\boldsymbol{i}\sqrt{3} \qquad z_{\mathrm{D}} = 3e^{\boldsymbol{i}\pi}$$

1. Ecrire les nombres complexes z_{A}, z_{B} et z_{C} sous forme exponentielle.
2. Ecrire le nombre complexe z_{D} sous forme algébrique.
3. En utilisant les questions précédentes, construire les points A, B, C et D.
4. Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.

c) Dans ces questions, les constructions demandées seront faites aux seuls règle et compas. On laissera apparents les traits de construction.

1. Construire en vert l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M du plan d'affixe z vérifiant l'égalité
$$|z+3| = |z-2\boldsymbol{i}|$$
2. Construire en rouge l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M du plan d'affixe z vérifiant l'égalité
$$\arg(z+3) = -\frac{5\pi}{6}(2\pi)$$
3. Calculer l'affixe z_{I} du milieu I du segment [AD], puis le placer sur la figure.



d) On appelle G le point du plan d'affixe $z_G = 4$.

1. Ecrire le quotient $\dfrac{z_C - z_G}{z_B - z_G}$ sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Interpréter géométriquement les module et arguments du quotient $\dfrac{z_C - z_G}{z_B - z_G}$.

   Quelle conclusion peut-on en tirer ?

e) Sur la figure se trouvant ci-avant, on a construit le point H tel que :

$$\frac{\text{DH}}{\text{DA}} = \sqrt{2} \qquad \underline{\text{et}} \qquad \left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right) = -\frac{3\pi}{4}$$

Le but de ces questions est de déterminer par le calcul l'affixe du point H qui n'est donc pas connue.

1. Ecrire le quotient $\dfrac{z_H - z_D}{z_A - z_D}$ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.
2. En déduire par le calcul l'affixe z_H du point H.

Le corrigé

a.1) Calculons l'image de $2\boldsymbol{i}$ par le polynôme *P*.

$$P(2\boldsymbol{i}) = (2\boldsymbol{i})^3 + (4-2\boldsymbol{i})\times(2\boldsymbol{i})^2 + (16-8\boldsymbol{i})\times 2\boldsymbol{i} - 32\boldsymbol{i}$$
$$= -8\boldsymbol{i} + (4-2\boldsymbol{i})\times(-4) + \cancel{32\boldsymbol{i}} + 16 - \cancel{32\boldsymbol{i}} = -\cancel{8\boldsymbol{i}} - \cancel{16} + \cancel{8\boldsymbol{i}} + \cancel{16} = 0$$

Comme $2\boldsymbol{i}$ annule le polynôme *P*, alors c'est une racine de celui-ci.
Donc $P(z)$ est factorisable par le facteur $z - 2\boldsymbol{i}$.

a.2) On veut écrire le polynôme $P(z)$ sous la forme :

$$P(z) = (z-2\boldsymbol{i})\times\left(az^2 + bz + c\right)$$
$$= az^3 + bz^2 + cz - 2\boldsymbol{i}az^2 - 2\boldsymbol{i}bz - 2\boldsymbol{i}c$$

$$\boxed{1}z^3 + \boxed{(4-2\boldsymbol{i})}z^2 + \boxed{(16-8\boldsymbol{i})}z - \boxed{32\boldsymbol{i}} = \boxed{a}z^3 + \boxed{(b-2\boldsymbol{i}a)}z^2 + \boxed{(c-2\boldsymbol{i}b)}z - \boxed{2\boldsymbol{i}c}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux :

- $\boxed{\text{En } z^3}$ $\quad 1 = a$ soit $a = 1$ *Et d'un !*
- $\boxed{\text{En } z^2}$ $\quad 4 - 2\boldsymbol{i} = b - 2\boldsymbol{i}a \Leftrightarrow 4 - \cancel{2\boldsymbol{i}} = b - \cancel{2\boldsymbol{i}} \Leftrightarrow b = 4$ *Et de deux !*
- $\boxed{\text{En } z}$ $\quad 16 - 8\boldsymbol{i} = c - 2\boldsymbol{i}b \Leftrightarrow 16 - \cancel{8\boldsymbol{i}} = c - \cancel{8\boldsymbol{i}} \Leftrightarrow c = 16$ *Et de trois !*
- $\boxed{\text{Constant}}$ $\quad 32\cancel{\boldsymbol{i}} = 2\cancel{\boldsymbol{i}}c \Leftrightarrow 32 = 2c \Leftrightarrow c = 16$ *Ce qui vérifie !*

<u>Conclusion :</u> pour tout nombre complexe *z*, nous avons :

$$P(z) = z^3 + (4-2\boldsymbol{i})z^2 + (16-8\boldsymbol{i})z - 32\boldsymbol{i} = (z-2\boldsymbol{i})\times\left(z^2+4z+16\right)$$

a.3) Résolvons l'équation proposée dans $\mathbb{C}$.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \overbrace{(z-2\boldsymbol{i})\times\left(z^2+4z+16\right) = 0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{z - 2\boldsymbol{i} = 0 \quad \underline{\text{ou}} \quad z^2 + 4z + 16 = 0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$
$$z = 2\boldsymbol{i}$$

Calculons le discriminant de la sous-équation du second degré $z^2 + 4z + 16 = 0$.

$$\Delta = 4^2 - 4\times1\times16 = 16 - 64 = -48 = \left(\sqrt{16}\times\sqrt{3}\boldsymbol{i}\right)^2 = \left(4\sqrt{3}\boldsymbol{i}\right)^2$$

Son discriminant étant négatif, cette sous-équation admet deux solutions complexes, conjuguées et non réelles.

$$z = \frac{-4-4\sqrt{3}\boldsymbol{i}}{2\times1} = -\frac{4}{2} - \frac{4}{2}\sqrt{3}\boldsymbol{i} = -2-2\sqrt{3}\boldsymbol{i} \quad \underline{\text{ou}} \quad z = \frac{-4+4\sqrt{3}\boldsymbol{i}}{2\times1} = -2+2\sqrt{3}\boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $P(z) = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{C}$: $2\boldsymbol{i}$ $\quad -2-2\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ $\quad -2+2\sqrt{3}\boldsymbol{i}$

b.1) Ecrivons les affixes demandées sous forme exponentielle.
D'abord, il est clair :

$$z_A = 2\boldsymbol{i} = 2\times e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$$

➲ Pour trouver l'écriture exponentielle de $z_B = -2-2\boldsymbol{i}\sqrt{3}$, calculons son module.

$$|z_B| = \left|-2-2\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+4\times3} = \sqrt{16} = 4$$

Il vient alors :

$$z_B = -2-2\boldsymbol{i}\sqrt{3} = 4\times\left[-\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] == 4\times\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 4\times e^{-\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}$$

➲ Concernant $z_C = -2+2\boldsymbol{i}\sqrt{3}$, on procède de même !

$$|z_C| = \left|-2+2\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+4\times3} = 4$$

Nous en déduisons alors :

$$z_C = -2+2\boldsymbol{i}\sqrt{3} = 4\times\left[-\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] == 4\times\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 4\times e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}$$

b.2) Tout va très vite : $z_D = 3\times e^{\boldsymbol{i}\pi} = 3\times(-1) = -3$

b.3) Les points A et D se placent sur les axes, juste en utilisant les graduations.
Du fait de leurs modules, les points B et C sont les intersections de deux des radiales et du cercle de centre O et de rayon 4.

b.4) Calculons les distances existant entre le centre D et les points A, B et C.

$$\begin{cases} DA = |z_A - z_D| = |3+2\boldsymbol{i}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \\ DB = |z_B - z_D| = |1-2\sqrt{3}\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+4\times 3} = \sqrt{13} \\ DC = |z_C - z_D| = |1+2\sqrt{3}\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+4\times 3} = \sqrt{13} \end{cases}$$

Conclusion : les points A, B et C appartiennent au cercle de centre D et de rayon $\sqrt{13}$.

c.1) $M(z) \in \mathscr{E}_1 \Leftrightarrow |z-(-3)| = |z-2\boldsymbol{i}| \Leftrightarrow |z-z_D| = |z-z_A| \Leftrightarrow DM = AM$
$\Leftrightarrow$ M est équidistant des points D et A
$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment [AD].

Conclusion : l'ensemble $\mathscr{E}_1$ est la médiatrice du segment [AD] qui se construit au compas.

c.2) $M(z) \in \mathscr{E}_2 \Leftrightarrow \arg\underbrace{\left(z-(-3)\right)}_{z-z_D} = -\dfrac{5\pi}{6}(2\pi) \Leftrightarrow \left(\vec{u},\overrightarrow{DM}\right) = -\dfrac{5\pi}{6}(2\pi)$

Conclusion : $\mathscr{E}_2$ est la demi-droite d'extrémité D parallèle à la radiale d'angle $-\dfrac{5\pi}{6}$.

La construction se fait là aussi au compas.

c.3) L'affixe du milieu I du segment [AD] est donnée par :

$$z_I = \frac{z_A+z_D}{2} = \frac{2\boldsymbol{i}-3}{2} = \boldsymbol{i}-1,5$$

Le milieu I qui a pour affixe $\boldsymbol{i}-1,5$ est aussi le point d'intersection de la médiatrice $\mathscr{E}_1$ et du segment [AD].

d.1)
$$\frac{z_C-z_G}{z_B-z_G} = \frac{\left(-2+2\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)-4}{\left(-2-2\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)-4} = \frac{-6+2\boldsymbol{i}\sqrt{3}}{-6-2\boldsymbol{i}\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\left(-6+2\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)\times\left(-6+2\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)}{\left(-6-2\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)\times\left(-6+2\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)} = \frac{36-12\boldsymbol{i}\sqrt{3}-12\boldsymbol{i}\sqrt{3}-4\times 3}{(-6)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \frac{24-24\boldsymbol{i}\sqrt{3}}{36+4\times 3}$$
$$= \frac{24\times\left(1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}\right)}{48} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}}_{\text{Forme algébrique}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{\boxed{e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}}}_{\text{Forme exponentielle}}$$

d.2) Le quotient précédent s'interprète géométriquement selon deux grandeurs :

❉ Son module : $\dfrac{GC}{GB} = \left|\dfrac{z_C-z_G}{z_B-z_G}\right| = \left|e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 1 \Rightarrow GC = GB$

Donc le triangle GBC est isocèle en G.

❉ Ses arguments : $\arg\left(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}\right) = = \arg\left(\dfrac{z_C-z_G}{z_B-z_G}\right) = \arg\left(e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ modulo 2π

Donc le triangle Isocèle GBC est équilatéral indirect.

e.1) Les deux égalités définissant le point H nous renseigne aussi sur le quotient proposé :

$$\overbrace{\left|\frac{z_H-z_D}{z_A-z_D}\right| = \frac{DH}{DA} = \sqrt{2}}^{\text{Sur son module}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{\arg\left(\frac{z_H-z_D}{z_A-z_D}\right) = \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DH}\right) = -\frac{3\pi}{4} \text{ mod } 2\pi}^{\text{Sur ses arguments}}$$

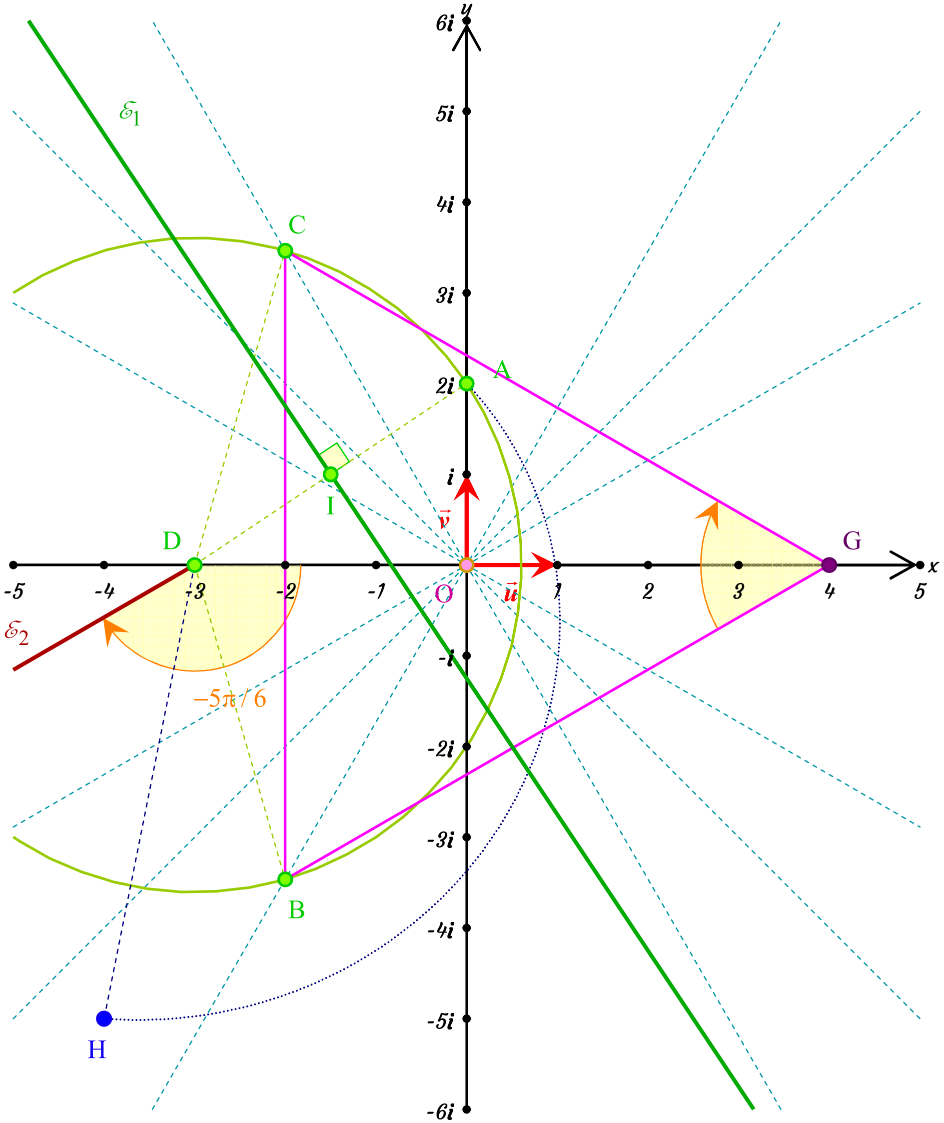
Il vient alors :

$$\frac{z_H-z_D}{z_A-z_D} = \overbrace{\boxed{\sqrt{2}\times e^{-\boldsymbol{i}\frac{3\pi}{4}}}}^{\text{Forme exponentielle}} = \sqrt{2}\times\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\times\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \underbrace{\boxed{-1-\boldsymbol{i}}}_{\text{Forme algébrique}}$$

e.2) Pour déterminer l'affixe du point H, il suffit juste de poursuivre ce qui précède :

$$\frac{z_H-z_D}{z_A-z_D} = -1-\boldsymbol{i} \Leftrightarrow z_H-z_D = (-1-\boldsymbol{i})\times(z_A-z_D)$$
$$\Leftrightarrow z_H = z_D+(-1-\boldsymbol{i})\times(z_A-z_D)$$
$$= (-3)+(-1-\boldsymbol{i})\times(2\boldsymbol{i}+3) = -3-2\boldsymbol{i}-3+2-3\boldsymbol{i} = -4-5\boldsymbol{i}$$

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Le retour des complexes géométriques

L'énoncé

Sur la figure ci-après d'unité graphique 1,5 centimètres, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

Dans ce repère, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_\mathrm{A} = 2\boldsymbol{i} \qquad z_\mathrm{B} = -2\boldsymbol{i} \qquad z_\mathrm{C} = 1-\boldsymbol{i}$$

La figure ci-contre sera complétée au fur et à mesure de l'exercice avec les points rencontrés.
On appelle ***f*** l'application du plan dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2\boldsymbol{i}z-7}{z+2\boldsymbol{i}}$$

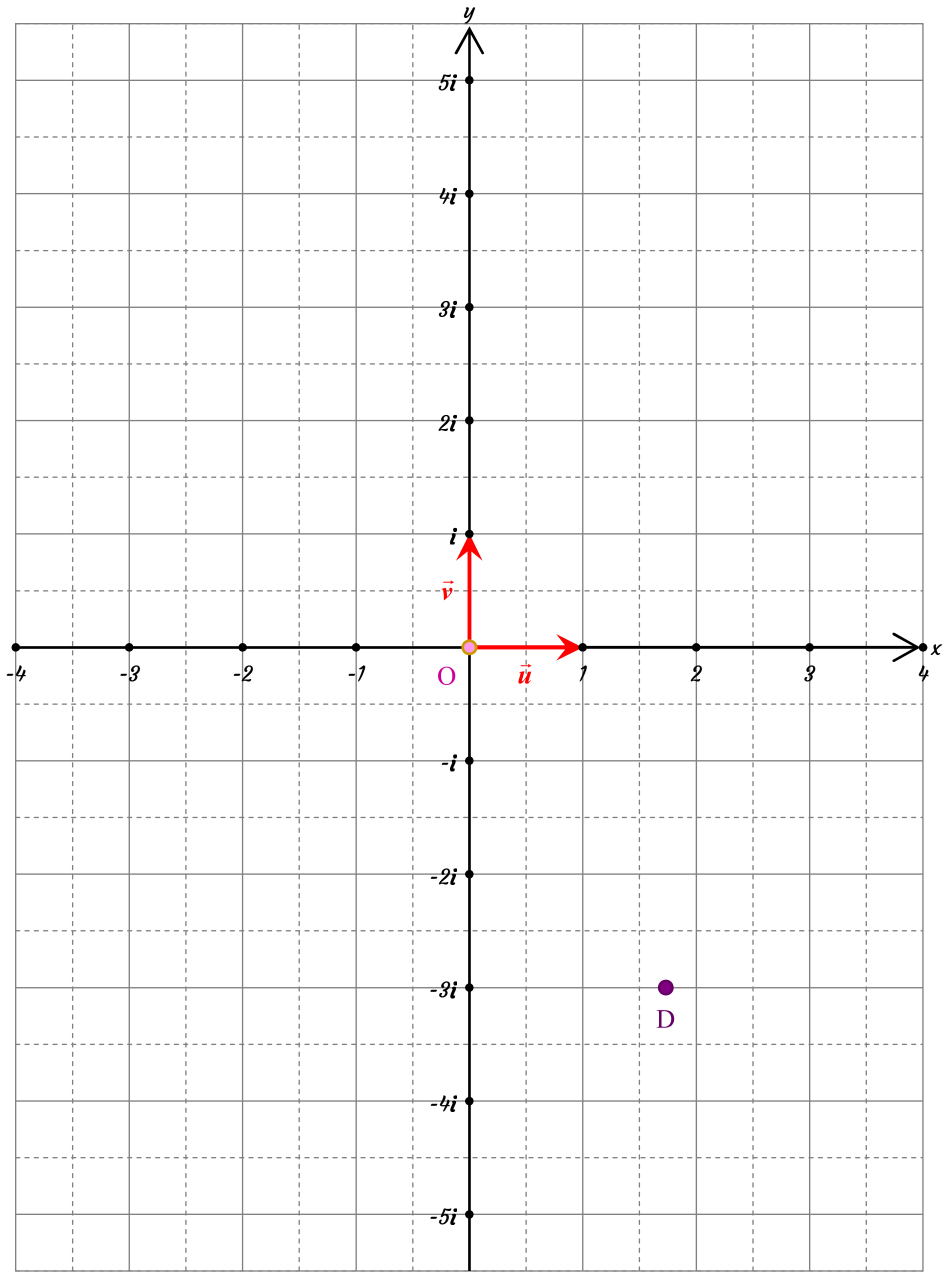
a) Dans cette partie, nous allons procéder à quelques calculs avec l'application ***f***.

1. Tous les points du plan ont-ils une image par l'application ***f***.? On justifiera sa réponse.
2. Calculer l'affixe $z_{\mathrm{C}'}$ du point C' qui est l'image du point C par l'application ***f***.
3. Déterminer l'affixe z_G du point G dont l'image par l'application ***f*** est le point G' d'affixe $z_{\mathrm{G}'} = -\boldsymbol{i}$.
4. En résolvant l'équation $z' = z$, établir que l'application ***f*** ne possède que deux points fixes E et F dont on déterminera les affixes z_E et z_F .

b) Sur la figure ci-après, on a construit le point D d'affixe $z_\mathrm{D} = \sqrt{3}-3\boldsymbol{i}$.

Le but de cette partie est de construire à la règle et au compas son image D' par l'application ***f*** sans calculer son affixe.

1. Montrer que le produit $\left(z'-2\boldsymbol{i}\right)\times\left(z+2\boldsymbol{i}\right)$ est réel et constant.
2. En déduire que $\mathrm{AM}'\times\mathrm{BM} = 3$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AM}'}\right) = \pi-\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right)$ modulo 2π
3. Déterminer les écritures algébrique et exponentielle du complexe $z_\mathrm{D}-z_\mathrm{B}$.
4. Déduire des questions précédentes une mesure de la longueur AD' et une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AD}'}\right)$.
5. En utilisant les résultats de la question **b.4**, construire à la règle et au compas le point D' . On laissera apparents les traits de construction.



Le corrigé

a.1) Les numérateur $2iz-7$ et dénominateur $z+2i$ existent quelque soit le complexe z. Par contre, il n'en va pas de même de leur quotient $z' = f(z)$.

$$\text{Le quotient } z' = f(z) \text{ existe} \Leftrightarrow \text{Son dénominateur } z+2i \text{ est non nul}$$
$$\Leftrightarrow z \neq -2i \Leftrightarrow z = z_B$$

Conclusion : à l'exception de B, tous les points du plan ont une image par l'application f. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$.

a.2) Nous pouvons écrire :

$$z_{C'} = \frac{2i \times z_C - 7}{z_C + 2i} = \frac{2i\times(1-i)-7}{(1-i)+2i} = \frac{2i+2-7}{1+i} = \frac{2i-5}{1+i}$$
$$= \frac{(2i-5)\times(1-i)}{(1+i)\times(1-i)} = \frac{2i+2-5+5i}{1^2-i^2} = \frac{-3+7i}{1-(-1)} = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$$

Le quadrillage permet de placer sans problème le point C'.

a.3) Les affixes des points G et G' vérifient l'égalité :

$$z_{G'} = \frac{2iz_G - 7}{z_G + 2i} \Leftrightarrow -i\times(z_G + 2i) = 2iz_G - 7$$
$$\Leftrightarrow -iz_G + 2 = 2iz_G - 7$$
$$\Leftrightarrow -3iz_G = -9 \Leftrightarrow z_G = \frac{-9}{-3i} = 3\times\frac{1}{i} = 3\times(-i) = -3i$$

L'inverse de i est aussi son opposé..

a.4) Résolvons dans $\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$ l'équation :

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{2iz-7}{z+2i} = z \Leftrightarrow 2iz - 7 = z\times(z+2i) \Leftrightarrow \cancel{2iz} - 7 = z^2 - \cancel{2iz}$$
$$\Leftrightarrow z^2 = -7 \Leftrightarrow z^2 = \left(i\sqrt{7}\right)^2 \Leftrightarrow z = -i\sqrt{7} \text{ ou } z = i\sqrt{7}$$

Conclusion : l'application f possède bien deux points fixes E et F qui ont pour affixes :

$$z_E = -i\sqrt{7} \quad \text{et} \quad z_F = i\sqrt{7}$$

b.1) Nous pouvons écrire :

$$(z'-2i)\times(z+2i) = \left(\frac{2iz-7}{z+2i} - 2i\right)\times(z+2i) = \frac{2iz-7-2i\times(z+2i)}{z+2i}\times(z+2i)$$
$$= \frac{\cancel{2iz}-7-\cancel{2iz}+4}{\cancel{z+2i}}\times\cancel{(z+2i)} = -7+4 = -3$$

b.2) Deux nombres complexes égaux ont mêmes modules et mêmes arguments. L'égalité démontrée précédemment devient alors :

- Concernant les modules :

$$\underbrace{\left|(z'-2\boldsymbol{i})\times(z+2\boldsymbol{i})\right|}_{\text{Le module du produit...}}=|-3| \Leftrightarrow \underbrace{|z'-2\boldsymbol{i}|\times|z+2\boldsymbol{i}|}_{\text{...le produit des modules.}}=3$$

$$\Leftrightarrow |z_{\mathrm{M}'}-z_{\mathrm{A}}|\times|z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{B}}|=3$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{AM}'\times\mathrm{BM}=3$$

- Concernant les arguments :

$$\overbrace{\underbrace{\arg\left((z'-2\boldsymbol{i})\times(z+2\boldsymbol{i})\right)}_{\text{L'argument du produit...}}=\arg(-3) \Leftrightarrow \underbrace{\arg(z'-2\boldsymbol{i})+\arg(z+2\boldsymbol{i})}_{\text{...la somme des arguments}}=\pi}^{\text{Nous travaillons modulo }2\pi\text{ bien sûr !}}$$

$$\Leftrightarrow \arg(z_{\mathrm{M}'}-z_{\mathrm{A}})=\pi-\arg(z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{B}})$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AM}'}\right)=\pi-\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right)$$

b.3) Nous pouvons écrire :

$$z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{B}}=\sqrt{3}-3\boldsymbol{i}-(-2\boldsymbol{i})=\sqrt{3}-\boldsymbol{i}$$

Ecriture algébrique.

Pour déterminer l'écriture exponentielle de ce nombre complexe, calculons son module :

$$|z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{B}}|=\left|\sqrt{3}-\boldsymbol{i}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

Il vient alors :

$$z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{B}}=\sqrt{3}-\boldsymbol{i}=2\times\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\boldsymbol{i}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=2\times\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\times e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}$$

b.4) Nous pouvons écrire :

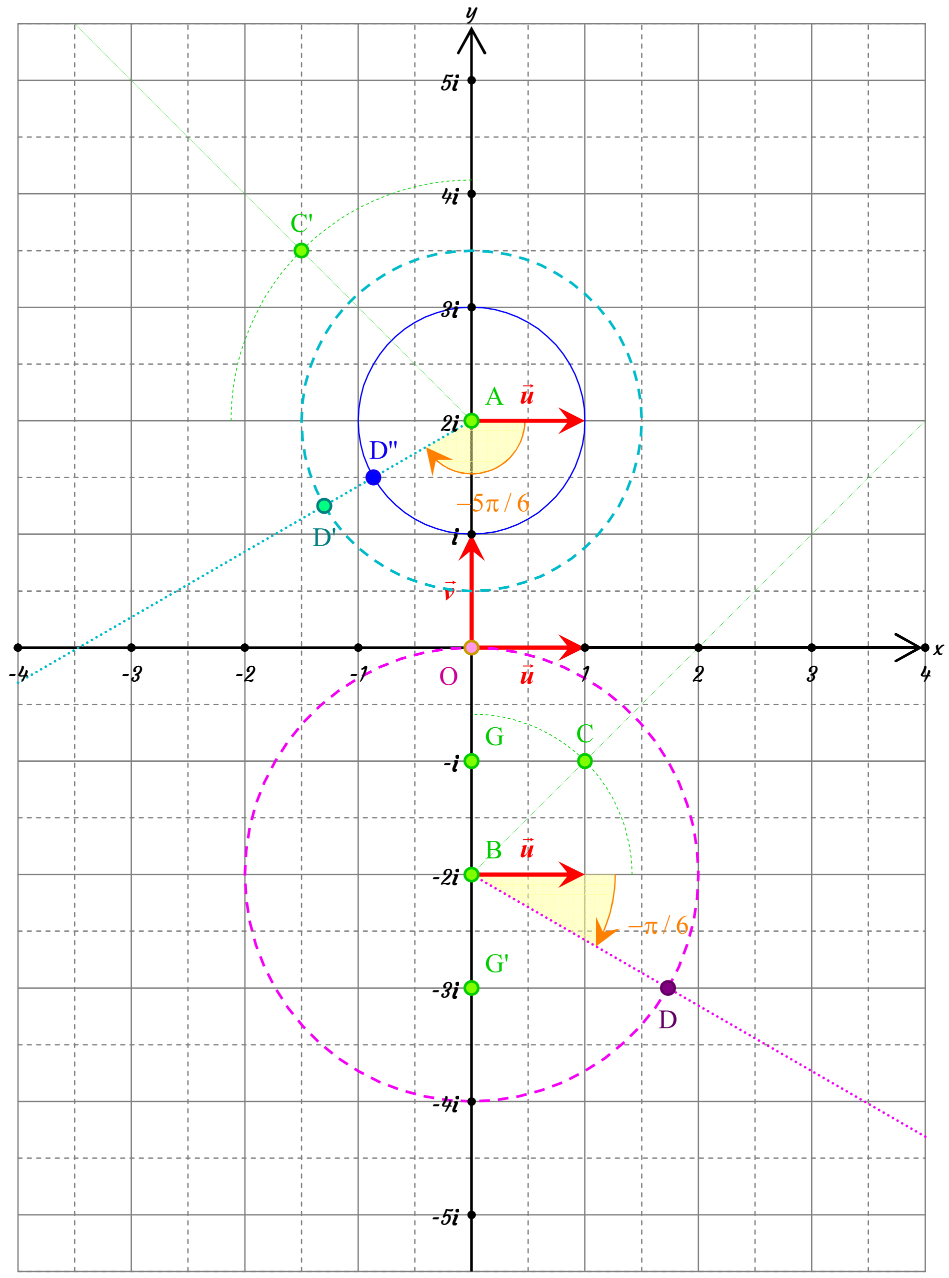
$$\mathrm{BD}=|z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{B}}|=\left|2\times e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}\right|=|2|\times\left|e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}\right|=2\times1=2$$

$$\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)=\arg(z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{B}})=\arg(z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{B}})=-\frac{\pi}{6}\quad[2\pi]$$

D′ étant l'image de D par l'application ***f***, les égalités établies lors de la question **b.2** sont applicables à ces deux points :

$$\mathrm{AD}'\times\mathrm{BD}=3 \Leftrightarrow \mathrm{AD}'\times2=3 \Leftrightarrow \mathrm{AD}'=\frac{3}{2}$$

$$\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{AD}'}\right)=\pi-\left(\vec{u},\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}\quad\text{modulo }2\pi$$



b.5) L'image D' est le point d'intersection du cercle de centre A et de rayon 1,5 et de la demi-droite d'extrémité A faisant un angle de $-\frac{5\pi}{6}$ avec le premier vecteur de base $\vec{u}$.

La demi-droite [AD') est aussi la demi-droite [AD") où D" est le point du cercle de centre A et de rayon 1 associé au réel $-\frac{5\pi}{6}$. Son ordonnée est donnée par

$$y_{D"} = y_A + \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

On observe aussi que ce qui a été fait pour le point D et son image D' aurait pu être reproduit pour les couples C et C' ainsi que G et G'.

Six questions imposables : espace et complexes

L'énoncé

Le présent exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, quatre propositions sont faites, une seule est juste. Une bonne réponse rapporte 1,75 points. Une absence de réponse ou une réponse fausse n'enlève, ni ne rajoute aucun point. Aucune justification n'est demandée. On entourera la réponse choisie.
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

Dans les trois questions suivantes, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. On appelle $\mathcal{P}$ le plan dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2 + 2u - v \\ y = 1 + 2v \\ z = 2 + 3u \end{cases} \quad \begin{matrix} u \in \mathbb{R} \\ v \in \mathbb{R} \end{matrix}$.

Parmi les quatre vecteurs suivants, lequel est un vecteur normal de $\mathcal{P}$?

a. $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\0\\-4\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}$

2. On considère les points $A(2;0;1)$ et $B(4;3;1)$.

Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est $\begin{cases} x = 16 - 6t \\ y = 4t - 18 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

a. Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires.

b. Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont sécantes mais non orthogonales.

c. Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont orthogonales mais non sécantes.

d. Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont ni sécantes, ni orthogonales.

3. Le plan $\mathcal{Q}$ a pour équation $x+y+2z+5=0$. La droite $\mathcal{D}$ est celle définie à la question **2**.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

a. La droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{Q}$.

b. La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{Q}$ mais n'y est pas incluse.

c. La droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan $\mathcal{Q}$.

d. La droite $\mathcal{D}$ est sécante au plan $\mathcal{Q}$ mais n'y est pas perpendiculaire.

Dans les trois questions suivantes, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

4. On appelle z le nombre complexe $z=\sqrt{3}-\boldsymbol{i}$.
Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

a. z^{2013} est un réel négatif.

b. z^{2013} est un réel positif

c. z^{2013} est un imaginaire pur.

d. z^{2013} est un nombre complexe qui n'est ni un réel, ni un imaginaire pur.

5. A, B et C sont trois points du plan d'affixes respectives les nombres complexes a, b et c.
Le triangle ABC est tel que :

$$\mathrm{AB}=4 \text{ centimètres} \qquad \mathrm{BC}=8 \text{ centimètres} \qquad \left(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)=-\frac{2\pi}{3} \text{ radians}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est égale au quotient $\dfrac{c-b}{a-b}$?

a. $\sqrt{3}\boldsymbol{i}-1$ **b.** $-1-\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ **c.** $-2-2\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ **d.** $-4-4\sqrt{3}\boldsymbol{i}$

6. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan d'affixe z vérifiant l'égalité $\left|\dfrac{z+2\boldsymbol{i}}{z+7}\right|=1$ est :

a. Un segment **b.** Une droite **c.** Un demi-cercle **d.** Un cercle.

Le corrigé

1. D'après sa représentation paramétrique $\begin{cases} x=2+\boxed{2}\times u+\boxed{(-1)}\times v \\ y=1+\boxed{0}\times u+\boxed{2}\times v \\ z=2+\boxed{3}\times u+\boxed{0}\times v \end{cases}$, deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$ sont $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$.

A présent, tout le problème est de savoir lequel des quatre vecteurs proposés est orthogonal aux deux vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ que sont $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. $\vec{n}\cdot\vec{u}=6\times2+3\times0+0\times3=12\neq0 \Rightarrow \vec{n}\not\perp\vec{u}$ Pas bon !
$\vec{n}\cdot\vec{v}=6\times(-1)+3\times2+0\times0=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{v}$

b. $\vec{n}\cdot\vec{u}=6\times2+0\times0+(-4)\times3=12-12=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{u}$ Pas bon !
$\vec{n}\cdot\vec{v}=6\times(-1)+0\times2+(-4)\times0=-6\neq0 \Rightarrow \vec{n}\not\perp\vec{v}$

c. $\vec{n}\cdot\vec{u}=0\times2+3\times0+(-4)\times3=-12=0 \Rightarrow \vec{n}\not\perp\vec{v}$ Pas bon du tout !
$\vec{n}\cdot\vec{v}=0\times(-1)+3\times2+(-4)\times0=6\neq0 \Rightarrow \vec{n}\not\perp\vec{v}$

d. $\vec{n}\cdot\vec{u}=6\times2+3\times0+(-4)\times3=12-12=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{v}$ Tout bon !
$\vec{n}\cdot\vec{v}=6\times(-1)+3\times2+(-4)\times0=6-6=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{v}$

Conclusion : un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}$.

2. Deux choses sont à établir. La première est de savoir si les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont orthogonales.

D'après sa représentation paramétrique, un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs directeurs des droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont-ils orthogonaux ?

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}=2\times(-6)+3\times4+0\times1=-12+12+0=\underline{0}$$

Comme leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, alors les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont orthogonales. Reste à savoir si elle sont de plus sécantes.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 2+2u \\ y = 3u \\ z = 1 \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$.

Existe-t-il deux réels t et u tels que les coordonnées d'un même point puissent vérifier simultanément les représentations paramétriques des droites $\mathcal{D}$ et (AB) ? C'est-à-dire tels que

$$\overbrace{\begin{cases} x = 16-6t \\ y = 4t-18 \\ z = t-2 \end{cases}}^{\text{Appartenance à } \mathcal{D}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{\begin{cases} x = 2+2u \\ y = 3u \\ z = 1 \end{cases}}^{\text{Appartenance à (AB)}} \quad ?$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} x = 16-6t = 2+2u \iff 6t+2u = 14 \quad \textbf{(1)} \\ y = 4t-18 = 3u \iff 4t-3u = 18 \quad \textbf{(2)} \\ z = t-2 = 1 \iff \underline{t = 3} \end{cases}$$

Si les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont sécantes, alors les équations ***(1)*** et ***(2)*** doivent nous donner la même valeur pour le paramètre u. Sinon le système n'aura pas de solution.

$$\begin{cases} \textbf{(1)} \quad 6\times 3+2u = 14 \Rightarrow 2u = -4 \Rightarrow u = \underline{-2} \\ \textbf{(2)} \quad 4\times 3-3u = 18 \Rightarrow -3u = 6 \Rightarrow u = \underline{-2} \end{cases}$$

Donc les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont sécantes au point H $\begin{cases} x_H = 16-6\times 3 = 2+2\times(-2) = -2 \\ y_H = 4\times 3-18 = 3\times(-2) = -6 \\ z_H = 3-2 = 1 = 1 \end{cases}$

<u>Conclusion :</u> les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont sécantes et orthogonales, c'est-à-dire perpendiculaires.

3. D'après son équation $x+y+2z+5=0$, un vecteur normal du plan $\mathcal{Q}$ est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Ce vecteur normal de $\mathcal{Q}$ est-il orthogonal au vecteur $\vec{w}$ directeur de la droite $\mathcal{D}$?

$$\overrightarrow{n'}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = -6\times 1+4\times 1+1\times 2 = -6+4+2 = \underline{0}$$

Le normal $\overrightarrow{n'}$ étant orthogonal au directeur $\vec{w}$, le plan $\mathcal{Q}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
Reste à savoir si le premier contient la seconde.
Si le plan contient l'un de des points de la droite, alors il contient toute la droite. Sinon, il ne contient aucun point de la droite.
D'après sa représentation paramétrique, un point de la droite $\mathcal{D}$ est $E(16;-18;-2)$.
Les coordonnées de E vérifient-elles l'équation définissant le plan $\mathcal{Q}$?

$$x_E+y_E+2z_E+5 = 16+(-18)+2\times(-2)+5 = -22+21 = -1 \neq 0$$

Comme le point E n'appartient pas au plan $\mathcal{Q}$, alors c'est toute la droite $\mathcal{D}$ qui est en dehors de ce plan.
<u>Conclusion :</u> la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{Q}$ mais n'y est pas incluse.

4. Commençons par déterminer le module du nombre complexe z :

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = \underline{2}$$

L'écriture exponentielle de z est alors :

$$z = 2\times\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\boldsymbol{i}\times\frac{-1}{2}\right] = 2\times\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\boldsymbol{i}\times\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \underline{2\times e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{cases} \left|z^{2013}\right| = |z|^{2013} = \underline{2^{2013}} \\ \arg\left(z^{2013}\right) = 2013\times\arg(z) = 2013\times\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \overbrace{= \pi\times\left(-\frac{2013}{6}\right) = \pi\times\frac{-168\times 12+3}{6} = (-168)\times 2\pi+\frac{3\pi}{6}}^{\text{On cherche la mesure principale de cet angle}} = \underline{\frac{\pi}{2}\ (2\pi)} \end{cases}$$

Nous en concluons :

$$z^{2013} = 2^{2013}\times e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} = \underline{2^{2013}\times\boldsymbol{i}}$$

<u>Conclusion :</u> z^{2013} est un imaginaire pur.

5. Les renseignements sur le triangle ABC nous renseignent aussi sur le quotient :

$$\begin{cases} \text{Son module :} \quad \left|\frac{c-b}{a-b}\right| = \frac{BC}{BA} = \frac{8}{4} = \underline{4} \\ \text{Ses arguments :} \quad \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) = \left(\overline{BA},\overline{BC}\right) = \underline{-\frac{2\pi}{3} \text{ modulo } 2\pi} \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\frac{c-b}{a-b} = 2\times e^{-\frac{2\boldsymbol{i}\pi}{3}} = 2\times\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\boldsymbol{i}\times 2\times\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \cancel{2}\times\frac{-1}{\cancel{2}}+\boldsymbol{i}\times\cancel{2}\times\frac{-\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \underline{-1-\sqrt{3}}$$

6. On appelle A et B les points affixes $z_{\mathrm{A}} = -2\boldsymbol{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = -7$. Nous pouvons alors écrire :

$$\mathrm{M} \in \mathcal{E} \iff \frac{|z+2\boldsymbol{i}|}{|z+7|} = 1$$

$$\iff \frac{|z-(-2\boldsymbol{i})|}{|z-(-7)|} = 1 \iff \frac{|z-z_{\mathrm{A}}|}{|z-z_{\mathrm{B}}|} = 1 \iff \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = 1$$

$$\iff \mathrm{AM} = \mathrm{BM} \iff \boxed{\mathrm{M} \in \text{Médiatrice du segment [AB]}}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est une droite.

Probabilités

Questions de probabilités...sans réponse

L'énoncé

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune d'entre elles, un raisonnement est attendu.

a) *La Blancoise des Jeux* vient de lancer un nouveau jeu qui fonctionne avec un jeu de trente-deux cartes classiques. Son principe est le suivant : le joueur tire au hasard et simultanément cinq cartes dans le jeu de trente-deux; si sa main contient exactement deux sept et trois carreaux, il a gagné; sinon il a perdu.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

b) On considère l'algorithme suivant :

```
a, i et n sont trois entiers naturels
n=0
Pour i=1 jusqu'à 12 faire
                                                 Inclus
    On tire un hasard un entier compris entre 1 et 7
    et on met sa valeur dans la variable a
    Si a<3  alors  n=n+1
Afficher n
```

Quelle est la probabilité que cet algorithme affiche **7** ?

Le corrigé

a) La première chose à dire est que le tirage des cinq cartes se faisant au hasard, chaque main a la même probabilité d'être tirée. De plus, le tirage des cinq cartes étant simultané, nous devons dénombrer des combinaisons.

Au total, il existe $\overbrace{\binom{32}{5}}^{\text{5 cartes parmi 32}} = \frac{32}{1}\times\frac{31}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{30}}{\cancel{3}}\times\frac{29}{4}\times\frac{28}{\cancel{5}} = 201376$ mains possibles.

Le sept de carreau compte à la fois comme sept et comme carreau. Par conséquent, il existe deux sortes de combinaisons gagnantes :

- Celles qui contiennent le sept de carreau.

  Il en existe $\overbrace{\binom{1}{1}}^{\text{1 sept de carreau}} \times \overbrace{\binom{3}{1}}^{\text{1 autre sept parmi 3}} \times \overbrace{\binom{7}{2}}^{\text{2 autre carreaux parmi 7}} \times \overbrace{\binom{21}{1}}^{\text{1 autre carte parmi 21}} = 1\times3\times21\times21 = \boxed{1323}$

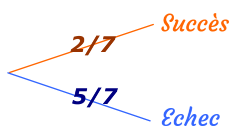
- Celles qui ne contiennent pas le sept de carreau.

  Il en existe $\overbrace{\binom{3}{2}}^{\text{2 sept parmi 3}} \times \overbrace{\binom{7}{3}}^{\text{3 carreaux parmi 7}} = 3\times35 = \boxed{105}$

<u>Conclusion :</u> la probabilité de gagner à un tel jeu est de $\frac{1323+1055}{201376} = \frac{51}{7152} \approx 0,007$

b) Chacune des douze boucles induites par l'instruction `pour i=1 jusqu'à 12` répète la même expérience de Bernoulli :

On tire au hasard un entier a compris entre 1 et 7.
Cet entier a est-il égal à 1 ou 2 ?



La répétition indépendante de ces 12 épreuves conduit à un schéma de Bernoulli.
L'entier n comptabilise le nombre de succès au cours des 12 épreuves. Sans le dire, n est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale $B\left(12;\frac{2}{7}\right)$.

La probabilité que le programme affiche 7 est donc donnée par :

$$p(n=7) = \binom{12}{7}\times\left(\frac{2}{7}\right)^7\times\left(\frac{5}{7}\right)^5 \approx 0,023$$

Ne nous fâchons plus !

L'énoncé

Après leurs traditionnels règlements de compte de la Saint-Valentin, les vingt-cinq bandits et gangsters du Blancois survivants ont décidé de mettre fin à leurs querelles sans lendemains en se regroupant au sein du *Syndicat du Crime Blancois*.

a) Les vingt-cinq membres du *Syndicat du Crime Blancois* se répartissent en trois gangs de la manière suivante :

- Douze membres appartiennent au gang *Dirty Dozen*.
  Trois de ces douze membres sont des femmes.
- Sept membres appartiennent au gang *Blancanieves*.
  Ce gang ne comporte aucune femme.
- Les six autres membres font partie du gang *Indépendants*.
  Ce gang ne comporte qu'une seule femme, Alicia Carbone, qui en est le chef.

Pour réguler ses affaires et trancher ses différents internes, le *Syndicat* a décidé de se doter d'un directoire sans ordre hiérarchique composé de cinq membres qui seront tirés au sort en une seule fois et simultanément parmi les 25 membres du *Syndicat*.
Tous les membres ont la même chance d'être choisi.
Les probabilités demandées seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Combien y a-t-il de directoires différents ?
2. Combien existe-t-il de directoires composés exclusivement de membres des *Dirty Dozen* ?
3. Quelle est la probabilité qu'un directoire soit composé de deux membres du gang *Blancanieves* et de trois membres du gang *Indépendants* ?
4. Quelle est la probabilité qu'un directoire ne soit composé que de membres des gangs *Blancanieves* ou *Indépendants* ?
5. Quelle est la probabilité qu'un directoire comprenne exactement deux femmes et trois membres du gang *Indépendants* ?

b) Pour l'une de ses machines à sous électroniques, Alicia Carbone a mis au point l'algorithme de jeu suivant :

```
                                                           Inclus
L'ordinateur tire au hasard un entier n compris entre 1 et 10
Si n=1  alors  le joueur gagne 50 euros
        sinon  si n est impair  alors  le joueur gagne 5 euros
                                sinon  le joueur a perdu.
```

Les gains donnés dans l'algorithme ne tiennent pas compte de la mise de 10 euros dont doit s'acquitter le joueur avant de jouer.
On appelle X la variable aléatoire égale au gain net du joueur exprimé en euros (c'est-à-dire mise de 10 euros déduite).

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer le nombre minimal de parties qui devront être jouées en une journée pour qu'Alicia réalise un bénéfice journalier d'au moins 100 euros.

c) Ce vendredi est jour de bilan financier pour le *Syndicat du Crime Blancois*. Devant le directoire est amassé un immense tas de billets de 5 euros qui sont les profits des deux activités illégales de l'organisation : les jeux illégaux et les divers trafics.
Dans son rapport d'activités, Alicia Carbone note :

- 60% des profits du *Syndicat* viennent du gang *Dirty Dozen*, 30% du gang *Indépendants* et le reste du gang *Blancanieves*.
- Les jeux illégaux rapportent 60% des profits de l'organisation.
- Les divers trafics représentent 30% des profits réalisés par les *Dirty Dozen* et 60% des profits réalisés par les *Indépendants*.

On tire au hasard un billet dans le tas amassé devant le directoire et on définit les événements suivants :

D = «le billet tiré vient du gang *Dirty Dozen*»
B = «le billet tiré vient du gang *Blancanieves*»
I = «le billet tiré vient du gang *Indépendant*»
J = «le billet tiré provient des jeux illégaux»
T = «le billet tiré provient des divers trafics»

1. Construire un arbre pondéré décrivant cette expérience aléatoire.
2. On sait que le billet tiré provient du gang *Blancanieves*. Calculer la probabilité qu'il soit le fruit des jeux illégaux.
3. Les événements B et T sont-ils indépendants ? On justifiera sa réponse.
4. On sait que le billet tiré provient des divers trafics. Calculer la probabilité qu'il provienne du gang *Dirty Dozen*.

d) Alicia Carbone est inquiète. Lundi, elle connaîtra le verdict de la cour concernant une vieille affaire de fraude fiscale. Le verdict de culpabilité ou d'innocence sera rendu par un jury de neuf citoyens blancois indépendants et incorruptibles choisis au hasard parmi la population.
Si au moins sept des neuf jurés disent qu'Alicia est coupable, alors la cour rendra un verdict de culpabilité et elle sera condamnée. Sinon elle sera acquittée.
Un sondage effectué après les débats du procès montre que 70% des gens pensent qu'Alicia Carbone est coupable de ce dont elle est accusée.
On fait l'hypothèse que les neuf jurés ont des opinions indépendantes.
Alicia a averti son avocat que si elle était condamnée lundi, elle lui offrirait un stage de spéléologie éternelle dès le mardi.
Quelle est la probabilité qu'Alicia soit condamnée ? Que conseiller à l'avocat ?

Le corrigé

a) Chaque directoire est le résultat d'un tirage simultané de 5 personnes à choisir parmi 25.

1. Il y a au total $\underbrace{\binom{25}{5}}_{\text{5 bandits parmi 25}} = \frac{25}{1}\times\frac{\cancel{24}}{\cancel{2}}\times\frac{23}{\cancel{3}}\times\frac{22}{\cancel{4}}\times\frac{21}{5} = 53130$ directoires possibles.

2. Il existe $\underbrace{\binom{12}{5}}_{\text{5 Dirty Dozen parmi 12}} = \frac{\cancel{12}}{1}\times\frac{11}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{10}}{\cancel{3}}\times\frac{9}{\cancel{4}}\times\frac{8}{\cancel{5}} = 792$ directoires composés exclusivement de membres du gang *Dirty Dozen*.

Dénombrons le nombre de directoires comportant exactement deux *Blanconieves* et trois *Indépendants*.

3. Il en existe $\underbrace{\binom{7}{2}}_{\text{2 Blancanieves parmi 7}} \times \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{3 Indépendants parmi 6}} = \frac{7}{1}\times\frac{6}{2}\times\frac{\cancel{6}}{1}\times\frac{5}{\cancel{2}}\times\frac{4}{\cancel{3}} = \boxed{420}$

La probabilité d'avoir un tel directoire est de $\frac{420}{53130} = \boxed{\frac{2}{253}}$

4. L'événement «que des *Blancanieves* ou *des Indépendants*» est l'événement contraire de «que des *Dirty Dozen*».

Sa probabilité est donnée par : $1-\frac{792}{53130} = \boxed{\frac{793}{805}}$

5. Les directoires comprenant exactement deux femmes et trois *Indépendants* se répartissent en deux familles distinctes :

Ceux qui comprennent Al Carbone qui compte en tant que femme et *Indépendant*.

Il en existe $\underbrace{1}_{\text{Al Carbone}} \times \underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{1 autre femme Dirty Dozen parmi 3}} \times \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{2 Indépendants hommes parmi 5}} \times \underbrace{\binom{16}{1}}_{\text{1 autre homme parmi 16}} = 1\times3\times10\times16 = \boxed{480}$

Ceux qui ne comprennent pas Al Carbone.

Il en existe $\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{2 femmes Dirty Dozen parmi 3}} \times \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{3 Indépendants hommes parmi 5}} = 3\times10 = \boxed{30}$

La probabilité que le directoire contienne exactement deux femmes et trois indépendants est donnée par $\frac{480+30}{53130} = \boxed{\frac{17}{1771}}$

b.1) La variable aléatoire X peut prendre trois valeurs :

$50-10=\boxed{40€}$ $\quad 5-10=\boxed{-5€}$ $\quad 0-10=\boxed{-10€}$

Sa loi de probabilité est donnée par :

Entier *n* tiré	1	3 5 7 9	2 4 6 8 10
Valeur de *X*	40€	−5€	−10€
Probabilité	0,1	0,4	0,5

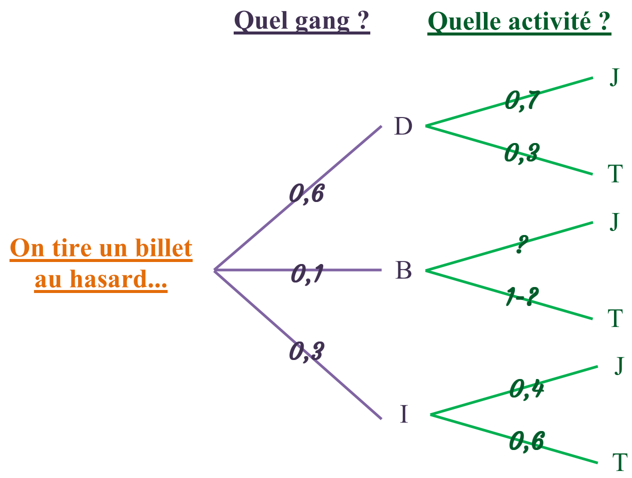
b.2) L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est donnée par :

$$E(X) = \sum \text{Proba}\times\text{Valeur de X}$$
$$= 0,1\times40+0,4\times(-5)+0,5\times(-10) = 4-2-5 = \boxed{-3€}$$

En moyenne, le joueur perd 3 euros par partie...qui finissent dans la poche d'Al.

<u>Conclusion :</u> pour réaliser un bénéfice journalier d'au moins 100 euros, au moins 34 parties devront être jouées.

c.1) L'arbre pondéré décrivant l'expérience aléatoire est le suivant :



c.2) Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement J sachant que B est réalisé qui est symbolisée par un point d'interrogation dans notre arbre.

D'après la formule des probabilités totales, nous pouvons écrire :

$$p(\text{J}) = p(\text{D}\cap\text{J}) + p(\text{B})\times p(\text{J sachant B}) + p(\text{I}\cap\text{J})$$
$$0,6 = 0,6\times0,7+0,1\times p(\text{J sachant B})+0,3\times0,4$$
$$0,6 = 0,42+0,1\times p(\text{J sachant B})+0,12$$

Il vient alors :

$$0{,}1 \times p(\text{J sachant B}) = 0{,}06 \quad \Leftrightarrow \quad p(\text{J sachant B}) = \frac{0{,}06}{0{,}1} = \underline{0{,}6}$$

c.3) En complétant l'arbre avec le résultat de la question précédente, on établit que la probabilité de l'événement T sachant que B est réalisé est égale à $1-0{,}6=0{,}4$.
Cette probabilité est égale à celle de l'événement T qui est le contraire de J.

$$p(\text{T sachant B}) = 0{,}4 = p(\text{T})$$

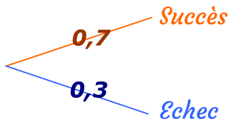
La réalisation de l'événement B n'influant pas sur la probabilité de réalisation de T, nous en déduisons que les événements B et T sont indépendants.

c.4) Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(\text{D sachant T}) = \frac{p(\text{D} \cap \text{T})}{p(\text{T})} = \frac{0{,}18}{0{,}4} = \underline{0{,}45}$$

d) Chacun des neuf jurés est pour Alicia Carbone une épreuve de Bernoulli :

Le juré pense-t-il qu'Al Carbone est coupable ?



Ces neuf jurés dont les opinions sont indépendantes est à un schéma de Bernoulli.
On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de jurés pensant qu'Al est coupable.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale $B(9;0{,}7)$.
La probabilité qu'Al soit déclaré coupable est donnée par :

$$p(X \geq 7) = p(X=7) + p(X=8) + p(X=9)$$

$$= \overbrace{\binom{9}{7}}^{36} \times 0{,}7^7 \times 0{,}3^2 + \overbrace{\binom{9}{8}}^{9} \times 0{,}7^8 \times 0{,}3 + \overbrace{\binom{9}{9}}^{1} \times 0{,}7^9 \approx \underline{0{,}463}$$

<u>Conclusion :</u> Al Carbone a moins d'une chance sur deux d'être condamné. Cela dit, son avocat est très inquiet car avec un client comme Al, tout est hélas possible !

La loi de l'ex-peau sans ciel

L'énoncé

a) Cette question est une restitution organisée des connaissances comme ils diraient.
On appelle X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans $[0;+\infty[$ et dont la loi de probabilité est la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner l'expression de la densité de probabilité $f(t)$ de X.
2. On rappelle que l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X est définie par $\boxed{E(X) = \int_0^{+\infty} t \times f(t)\,dt = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a t \times f(t)\,dt}$.

   On rappelle également la formule d'intégration par parties :

   $$\boxed{\int_0^a u(x) \times v'(x)\,dx = \left[u(x) \times v(x)\right]_0^a - \int_0^a u'(x) \times v(x)\,dx}$$

   En utilisant ces deux formules, démontrer que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

La Blancoise des Ondes vient d'acheter 176 téléphones portables bon marché d'un même modèle pour équiper tous ses employés.
On appelle T la variable aléatoire continue égale à la durée de vie exprimée en mois d'un de ces téléphones portables bon marché.
On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

b) On sait que la probabilité que cette durée de vie T soit inférieure à 6 mois est égale à 0,7.

1. Exprimer la probabilité $p(T \leq 6)$ en fonction de λ.
2. En déduire une valeur approchée du paramètre λ au dix-millième près.

Dans la suite de l'exercice, on supposera que $\lambda = 0{,}2$. Les résultats demandés seront donnés sous la forme d'une valeur approchée arrondie au millième près.

c) Quelle est l'espérance de vie d'un de ces téléphones bon marché ?

d) Calculer la probabilité que la durée de vie d'un de ces téléphones portables bon marché dépasse une année.
e) Un an après sa mise en service, le téléphone de Madame Sakoze fonctionne toujours. Calculer la probabilité qu'il cesse de fonctionner durant la seconde année de vie (du téléphone).

f) Le «responsable télécom» de l'entreprise souhaite évaluer le nombre de téléphones qui fonctionneront après six mois.
Il appelle N la variable aléatoire égale au nombre de téléphones parmi les 176 qui fonctionnent après six mois.

1. Montrer que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   Calculer son espérance mathématique $E(N)$ et son écart-type σ_N.
2. Justifier que l'on peut approximer la variable centrée réduite $Z = \dfrac{N - E(N)}{\sigma_N}$ par une loi normale centrée réduite.
3. En utilisant la loi normale centrée réduite, donner une approximation de la probabilité que le nombre N de téléphones portables fonctionnant après six mois de vie soit compris entre 45 et 55.

Le corrigé

a.1) La densité de probabilité de la variation aléatoire continue est la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(t) = \lambda \times e^{-\lambda t}$$

a.2) Pour tout réel $a \in [0;+\infty[$, nous allons calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^a t \times f(t)\,dt$ en utilisant la formule d'intégrations par parties rappelée avec $\begin{cases} u(t) = t \\ u'(t) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \\ v(t) = -e^{-\lambda t} \end{cases}$.

Nous pouvons écrire :

$$\int_0^a t \times \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[t \times \left(-e^{-\lambda t}\right)\right]_0^a - \int_0^a 1 \times \left(-e^{-\lambda t}\right)dt$$

$$= \left(-a \times e^{-\lambda a}\right) - 0 - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^a$$

$$= -a \times e^{-\lambda a} - \left(\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda}e^{0}\right)$$

$$= -a \times \frac{1}{e^{\lambda a}} - \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{e^{\lambda a}} + \frac{1}{\alpha} \times 1 = \boxed{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{e^{\lambda a}} - \frac{a}{e^{\lambda a}}}$$

Comme $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ alors $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \frac{a}{e^{\lambda \alpha}} = \overbrace{\lim_{a \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \times \frac{\boxed{\lambda a}}{e^{\boxed{\lambda a}}}}^{\text{On pose } t=\lambda a \text{ qui tend aussi vers } +\infty} = \frac{1}{\lambda} \times 0^+ = \boxed{0^+}$.

C'est une formule du cours...

Il en résulte :

$$E(X) = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a t \times f(t)\,dt$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{e^{\lambda a}} - \frac{a}{e^{\lambda a}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \times \frac{1}{+\infty} - 0^+ = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \times 0^+ - 0^+ = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

b.1) Exprimons en fonction de λ la probabilité :

$$p(T \leq 6) = \int_0^6 \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^6 = \left(-e^{-\lambda \times 6}\right) - \left(-e^{-\lambda \times 0}\right) = -e^{-6\lambda} - (-1) = \boxed{1 - e^{-6\lambda}}$$

C'est une formule du cours...

b.2) D'après l'énoncé, le réel positif λ est tel que :

$$p(T \leq 6) = 0{,}7 \iff 1 - e^{-6\lambda} = 0{,}7$$

$$\iff e^{-6\lambda} = 0{,}3 \xrightarrow{\text{Ln}} -6\lambda = \ln(0{,}3) \iff \lambda = -\frac{\ln(0{,}3)}{6} \approx \boxed{0{,}2007}$$

c) L'espérance de vie d'un de ces téléphones bon marché est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire T qui est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}2} = \boxed{5 \text{ mois}}$

d) On souhaite calculer la probabilité :

$$p(T \geq 12) = 1 - p\left(T \in [0;12]\right)$$

$$= 1 - \int_0^{12} 0{,}2 \times e^{-0{,}2t}\,dt = 1 - \left[-e^{-0{,}2t}\right]_0^{12} = 1 - \left(\left(-e^{-2{,}4}\right) - \left(-e^{0}\right)\right) = \cancel{1} + e^{-2{,}4} - \cancel{1}$$

$$= \boxed{e^{-2{,}4} \approx 0{,}091}$$

e) On veut calculer la probabilité conditionnelle :

$$p(T \leq 24 \quad \text{sachant} \quad T \geq 12) = \frac{p(T \leq 24 \text{ \underline{et} } T \geq 12)}{p(T \geq 12)} = \boxed{\frac{p\left(T \in [12;24]\right)}{p(T \geq 12)}}$$

Calculons :

$$p\left(T \in [12;24]\right) = \int_{12}^{24} 0{,}2 \times e^{-0{,}2t}\,dt = \left[-e^{-0{,}2t}\right]_{12}^{24} = \left(-e^{-4{,}8}\right) - \left(-e^{-2{,}4}\right)$$

$$= e^{-2{,}4} - e^{-4{,}8} \approx \boxed{0{,}082}$$

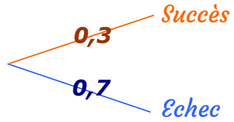
C'est une formule du cours...

Nous en déduisons :

$$p(T \leq 24 \quad \text{sachant} \quad T \geq 12) = \frac{p(T \in [12;24])}{p(T \geq 12)} \approx \frac{0,082}{0,091} \approx 0,909$$

e.1) Chaque téléphone est pour le «responsable télécom» une épreuve de Bernoulli :

Le téléphone fonctionne-t-il après 6 mois ?



Les 176 téléphones du parc forment un schéma de Bernoulli.
Par conséquent, la variable aléatoire N suit la loi binomiale $B(176;0,3)$.
Les espérance mathématique et écart-type de la variable aléatoire N sont donnés par :

$$E(N) = 176 \times 0,3 = 52,8 \qquad \text{et} \qquad \sigma_N = \sqrt{176 \times 0,3 \times 0,7} \approx 6,08$$

e.2) Trois conditions sont requises la variable centrée réduite $Z = \dfrac{N - E(N)}{\sigma_N}$ puisse être approximée par la loi normale centrée réduite :

A-t-on $n \geq 30$? Comme $n = 176$ alors ça marche !
A-t-on $n \times p \geq 5$? Comme $n \times p = 176 \times 0,3 = 52,8$, alors ça marche !
A-t-on $n \times (1-p) \geq 5$? Comme $n \times p = 176 \times 0,7 = 123,8$, alors ça marche !

L'approximation normale de la loi binomiale suivie par N est donc justifiée.

e.3) Nous avons :

$$45 \leq N \leq 55 \xrightarrow{-52,8} -7,8 \leq N - 52,8 \leq 2,2 \xrightarrow{\div\sqrt{36,96}} -1,28 \leq Z \leq 0,36$$

En conséquence du théorème de Moivre-Laplace, nous pouvons écrire :

$$p(N \in [45;55]) \approx p(Z \in [-1,28;0,36]) \approx \int_{-1,28}^{0,36} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \approx 0,540$$

*Se calcule avec la fonction **DistributionCumulativeNormale**(-1.28,0.36).*

Suivez la ligne blanche

L'énoncé

La Blancoise de la Blanche produit et vend des sachets de 450 grammes de farine.

a) Du fait de l'imprécision de la machine de remplissage, les sachets vendus ne contiennent pas exactement 450 grammes de farine.
On appelle M la variable aléatoire égale à la masse exprimée en grammes d'un sachet de farine blanche. On suppose que M suit la loi normale $\mathcal{N}(450;36)$.
Les réponses fournies seront arrondies au millième près.

1. Donner la densité de probabilité de la loi de probabilité de M.
2. On prélève au hasard un sachet dans la production.
Calculer la probabilité que ce sachet contienne entre 440 et 445 grammes de farine.
3. Déterminer un réel positif m tels que 80% des sachets aient une masse comprise entre $450 - m$ et $450 + m$ grammes.
4. Une trieuse en fin de chaine de production met de côté tous les sachets pesant plus de 456 grammes. On tire un sachet au hasard parmi ceux-ci.
Quelle est la probabilité que la masse de ce sachet soit inférieure ou égale à 460 grammes ?

b) Du fait de la compacité plus ou moins importante de la farine lors des opérations de remplissage, le volume du sachet varie entre 0,6 et 0,7 litres.
On appelle V la variable aléatoire égale au volume exprimé en litres d'un sachet de farine.
On suppose que la variable aléatoire continue V est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0,6;0,7]$.

1. Donner la densité de la loi que suit V.
2. Déterminer la probabilité que le volume d'un sachet fasse plus de 675 centimètres cubes.
3. Déterminer un réel positif v tel que 70% de la production ait un volume compris entre $0,64 - v$ et $0,64 + v$ litres.

c) On admet que les variables aléatoires M et V sont indépendantes.
Calculer la probabilité qu'un sachet ait une masse comprise entre 440 et 445 grammes et, un volume supérieur à 0,675 litres.

Le corrigé

a.1) La variable aléatoire M a pour espérance $\mu = 450$ et écart-type $\sigma = \sqrt{36} = 6$.

La densité de probabilité de M est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{12\pi}} \times e^{-\frac{(t-450)^2}{72}}$

a.2) Comme la variable aléatoire continue M suit la loi normale $\mathcal{N}(450;36)$, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{M-450}{6}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

On souhaite connaitre la probabilité de l'événement :

$$440 \leq M \leq 455 \xrightarrow{-450} -10 \leq M - 450 \leq -5 \xrightarrow{\div 6} -\frac{5}{3} \leq Z \leq -\frac{5}{6}$$

Par conséquent, nous avons

$$p\big(M \in [440;445]\big) = p\left(Z \in \left[-\frac{5}{3};-\frac{5}{6}\right]\right) = \underbrace{\Phi\left(-\frac{5}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right)}_{\text{où } \Phi \text{ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.}} \approx 0,155$$

D'après la calculatrice.

Se calcule directement avec la fonction **DistributionCumulativeNormale**$(440,445,\mu,\sigma)$

a.3) On pouvons écrire :

$$450 - m \leq M \leq 450 + m \xrightarrow{-450} -m \leq M - 450 \leq m \xrightarrow{\div 6} -\overset{u}{\boxed{\frac{m}{6}}} \leq Z \leq \overset{u}{\boxed{\frac{m}{6}}}$$

Les réels positifs m et u sont tels que :

$$p\big(M \in [450-m;450+m]\big) = 0,80 \iff p\big(Z \in [-u;u]\big) = 0,8$$
$$\iff 2 \times p\big(Z \in [0;u]\big) = 0,8$$
$$\iff \Phi(u) - \Phi(0) = 0,4$$
$$\iff \Phi(u) = 0,4 + 0,5 = 0,9 \iff u \approx 1,281$$

D'après la calculatrice.

Conclusion : l'écart de masse m recherché est égal à $1,281 \times 6 = 7,67$ grammes.

a.4) Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle :

$$p\left(M \leq 460 \ \underline{\text{sachant}} \ M \geq 456\right) = \frac{p\left(M \leq 460 \ \underline{\text{et}} \ M \geq 456\right)}{p(M \geq 456)}$$
$$= \frac{p\big(M \in [456;460]\big)}{p(M \geq 456)}$$
$$= \frac{p\left(Z \in \left[1;\frac{5}{3}\right]\right)}{p(Z \geq 1)} = \frac{\Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi(1)}{1 - \Phi(1)} \approx \frac{0,111}{0,159} \approx 0,699$$

b.1) La densité de probabilité de V est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{0,7-0,6} = \dfrac{1}{0,1} = 10 & \text{si } t \in [0,6;0,7] \\ f(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Nous pourrions restreindre la densité à cet intervalle.

b.2) 675 centimètres cubes correspondent à 0,675 litres. Nous calculons la probabilité :

$$p(V \geq 0,675) = \int_{0,675}^{+\infty} f(t)\,dt = [10t]_{0,675}^{0,7} + \int_{0,675}^{+\infty} 0\,dt = 0,7 - 0,675 + 0 = 0,25$$

b.3) Nous pouvons écrire :

$$p\big(V \in [0,64-v;0,64+v]\big) = \int_{0,64-v}^{0,64+v} 10\,dt$$
$$= [10t]_{0,64-v}^{0,64+v} = 10 \times \big((0,64+v) - (0,64-v)\big) = 20 \times v$$

Le réel positif v est tel que :

$$p\big(V \in [0,64-v;0,64+v]\big) = 0,70 \iff 20v = 0,7 \iff v = 0,035$$

c) Comme les variables M et V sont indépendantes, alors nous pouvons écrire :

$$p\left(M \in [440;445] \ \underline{\text{et}} \ V \geq 0,675\right) = p\big(M \in [440;445]\big) \times p(V \geq 0,675)$$
$$\approx 0,155 \times 0,25 \approx 0,039$$

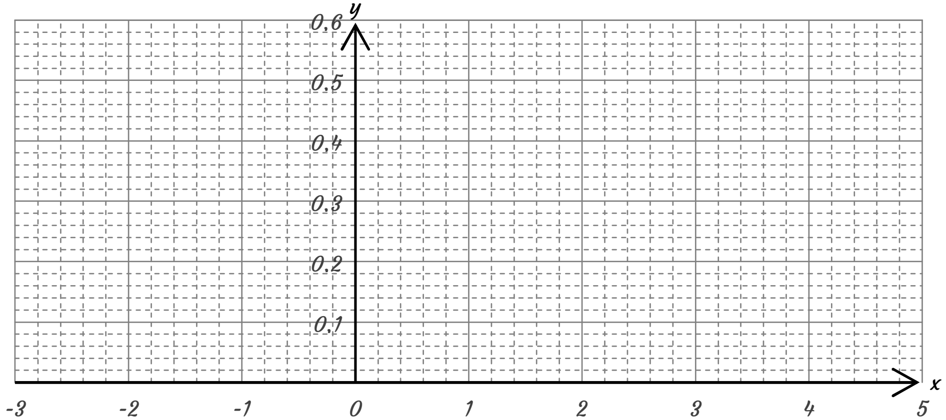
Attention au retard !

L'énoncé

La fonction f est définie sur ℝ par :

$$\begin{cases} f(t)=0 & \text{si } t\in\left]-\infty;-2\right[\\ f(t)=\dfrac{t^2}{8}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2} & \text{si } t\in\left[-2;0\right[\\ f(t)=\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{1+3e^{-t}}} & \text{si } t\in\left[0;+\infty\right[\end{cases}$$

a) Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe (C_f) représentant la fonction f.



b) Dans ces questions, nous allons établir que f est une densité de probabilité sur ℝ.

1. Montrer que pour tout réel t, on a $f(t)\geq 0$.
2. Etablir que pour tout réel $a>0$, on a :

$$\int_0^a \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+3e^{-t}}}\,dt=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{1+3e^{-a}}$$

3. En déduire que la fonction f est une densité de probabilité sur ℝ.

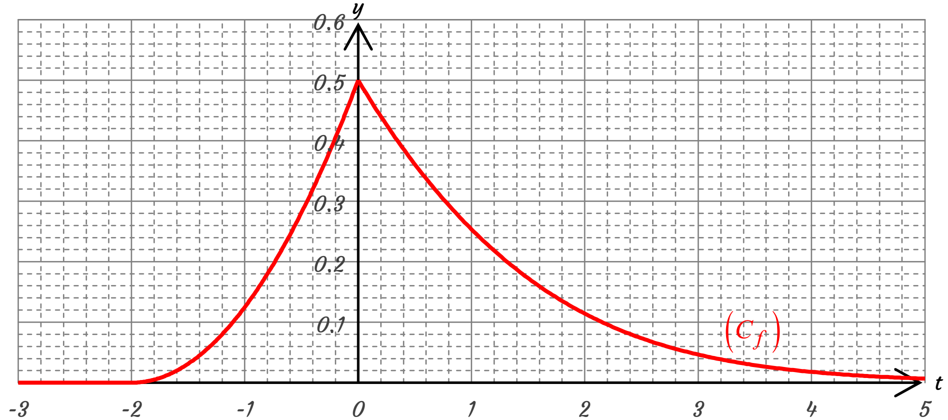
c) La *Blancoise du Rail* s'intéresse au retard de ses trains.
On appelle T la variable aléatoire continue égale au retard exprimé en minutes d'un train par rapport à son horaire normal.
T prend ses valeurs dans ℝ. Lorsque T est négatif, le train est en avance sur son horaire.
On admet que la variable aléatoire T a pour densité de probabilité la fonction f.

Les résultats seront donnés d'abord sous forme exacte, puis sous la forme d'une valeur approchée arrondie au millième près.

1. Calculer la probabilité que le train soit en avance mais d'au plus une minute.
2. Calculer la probabilité que le train ait un retard compris entre 2 et 3 minutes.
3. Calculer la probabilité que le train ait au moins 3 minute d'avance sur son horaire normal.
4. On sait que le train est en retard. Calculer la probabilité que ce retard soit supérieur à 2 minutes.

Le corrigé

a) La fonction f est constituée de trois morceaux continus qui se rejoignent en -2 et 0.
C'est pour cela que la fonction f est continue sur ℝ.



b.1) La fonction f est composée de trois morceaux :

- Sur l'intervalle $\left]-\infty;0\right[$, la quantité $f(t)=0$ est positive ou nulle.
- Sur l'intervalle $\left[-2;0\right[$, la fonction $f(t)=\dfrac{t^2}{8}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2}$ est une forme du second

  degré de discriminant : $\Delta_{f(t)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-4\times\left(\dfrac{1}{8}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=\underline{0}$

  Son discriminant étant négatif, $f(t)$ n'a sur cet intervalle qu'une seule racine :

$$x_1=-\frac{\frac{1}{2}}{2\times\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}\times\frac{4}{1}=\underline{-2}$$

  Par suite, nous en concluons que $f(t)$ est nulle lorsque $t=-2$ et est ailleurs du signe de son coefficient dominant $1/8$, c'est-à-dire positive.

- Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction $f(t)=\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{1+3e^{-t}}}$ est positive car elle est le quotient de la positive exponentielle e^{-t} et de la très positive racine $\sqrt{1+3e^{-t}}$.
  A propos de cette dernière racine, précisons qu'elle existe toujours et est toujours positive car la fonction $1+3\times e^{-t}$ $=\oplus+\oplus\times\oplus$ est toujours positive.

Conclusion : pour tout réel t, nous avons bien $f(t)\geq 0$.

b.2) Une primitive de $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{1+3e^{-t}}}=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{-3e^{-t}}{\sqrt{1+3e^{-t}}}=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est la fonction $-\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{u}=-\dfrac{2}{3}\times\sqrt{1+3e^{-t}}$ avec

$u(x)=1+3\times e^{-t}$
$u'(x)=0+3\times(-1)\times e^{-t}=-3e^{-t}$
Dérivable et positive sur ℝ

Nous pouvons alors écrire que pour tout réel $a>0$:

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+3e^{-t}}}dt &= \left[-\frac{2}{3}\times\sqrt{1+3e^{-t}}\right]_0^a\\ &=\left(-\frac{2}{3}\times\sqrt{1+3e^{-a}}\right)-\left(-\frac{2}{3}\times\sqrt{1+3e^{0}}\right)\\ &=-\frac{2}{3}\sqrt{1+3e^{-a}}+\frac{2}{3}\times\sqrt{1+3\times 1}\\ &=-\frac{2}{3}\sqrt{1+3e^{-a}}+\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{1+3e^{-a}}\end{aligned}$$

b.3) Trois conditions doivent être remplies pour que f soit une densité de probabilité sur ℝ.
La première est que *f* soit toujours positive ou nulle. Chose établie lors de la question **a.1**.
La seconde est que la fonction *f* soit continue sur ℝ. Ce qui est le cas. Voir sa courbe.
La dernière est que l'aire sous (C_f) prise sur ℝ soit égale à une unité d'aire.

Nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-2}0dt+\int_{-2}^{0}\left(\frac{t^2}{8}+\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)dt+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{1+3e^{-t}}}dt$$

avec :

$$\int_{-\infty}^{-2}0dt=0$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0}\left(\frac{t^2}{8}+\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)dt&=\left[\frac{t^3}{3\times 8}+\frac{t^2}{2\times 2}+\frac{t}{2}\right]_{-2}^{0}\\ &=\left(\frac{0}{24}+\frac{0}{4}+\frac{0}{2}\right)-\left(\frac{-8}{24}+\frac{4}{4}+\frac{-2}{2}\right)=\frac{1}{3}-1+1=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{1+3e^{-t}}}dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{e^{-t}}{\sqrt{1+3e^{-t}}}dt=\lim_{a\to+\infty}\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\times\sqrt{1+3e^{-a}}=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

car Quand $a\to+\infty$, $-a\to-\infty$
$e^{-a}\to 0^+$
$1+3e^{-a}\to 1+3\times 0^+=1$
$\sqrt{1+3e^{-a}}\to\sqrt{1}=1$

Nous en concluons :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt=0+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

La fonction racine est continue en 1.

Conclusion : la fonction *f* est une densité de probabilité sur ℝ.

c.1) Nous devons calculer la probabilité :

$$p(T\in[-1;0])=\int_{-1}^{0}f(t)\,dt=\left[\frac{t^3}{24}+\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{-1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{-1}{2}\right)=\frac{7}{24}$$

c.2) Il s'agit de calculer la probabilité :

$$\begin{aligned}p(T\in[2;3])&=\int_2^3 f(t)\,dt\\ &=\left[-\frac{2}{3}\sqrt{1+3e^{-t}}\right]_2^3=\left(-\frac{2}{3}\sqrt{1+3e^{-3}}\right)-\left(-\frac{2}{3}\sqrt{1+3e^{-2}}\right)\\ &=\frac{2}{3}\times\left(\sqrt{1+3e^{-2}}-\sqrt{1+3e^{-2}}\right)\approx 0{,}076\end{aligned}$$

c.3) Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p(T\leq -3)=\int_{-\infty}^{-3}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-3}0dt=0$$

c.4) Nous devons calculer la probabilité conditionnelle :

$$p\left(T\geq 2\ \underline{\text{sachant}}\ T\geq 0\right)=\frac{p\left(T\geq 2\ \underline{\text{et}}\ T\geq 0\right)}{p\left(T\geq 0\right)}=\frac{p\left(T\geq 2\right)}{p\left(T\geq 0\right)}$$

Depuis la question **b.3**, nous savons :

$$p\left(T\geq 0\right)=\int_0^{+\infty} f\left(t\right)dt=\frac{2}{3}$$

Il nous reste à calculer :

$$\begin{aligned} p\left(T\geq 2\right) &= p\left(T\in\left[0;+\infty\right[\right)-p\left(T\in\left[0;2\right]\right) \\ &= \frac{2}{3}-\int_0^2 \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+3\times e^{-t}}}dt \\ &= \frac{2}{3}-\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{1+3e^{-2}}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{1+3e^{-2}}-\frac{2}{3}=\underline{\frac{2}{3}\times\left(\sqrt{1+3e^{-2}}-1\right)} \end{aligned}$$

Nous en concluons :

$$p\left(T\geq 2\ \underline{\text{sachant}}\ T\geq 0\right)=\frac{\cancel{\frac{2}{3}}\times\left(\sqrt{1+3e^{-2}}-1\right)}{\cancel{\frac{2}{3}}}=\sqrt{1+3e^{-2}}-1\approx \underline{0{,}186}$$

Sept questions improbables

L'énoncé

Le présent exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, quatre propositions sont faites, une seule est juste. Une bonne réponse rapporte 0,75 points. Une absence de réponse ou une réponse fausse n'enlève, ni ne rajoute aucun point. Aucune justification n'est demandée. On entourera la réponse choisir.

La Cuisinière Blancoise est une entreprise industrielle fabriquant des plats cuisinés vendus en barquettes. Cette semaine, elle produit l'une de ses grandes spécialités : le Parmentier de sanglier.

Question 1 : une commande urgente doit être fabriquée dans la nuit. Le directeur de l'entreprise est bien embêté car il doit trouver sept personnes pour constituer l'équipe de production. Il annonce à ses employés que cette nuit de travail sera payée triple. Treize salariés dont sept femmes se portent volontaires. Pour ne léser personne, il décide de procéder à un tirage au sort simultané de sept noms parmi les 13 volontaires.
Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est une valeur approchée au millième-près de la probabilité que l'équipe de production soit constituée de 4 femmes et 3 hommes ?

a. 0,071 **b.** 0,286 **c.** 0,408 **d.** 0,538

Question 2 : on appelle D la variable aléatoire égale à la durée exprimée en années durant laquelle une barquette de Parmentier de sanglier à la bière est consommable.
Des études ont établi que cette variable aléatoire D suivait une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.
Elles ont aussi permis d'établir que 30% des barquettes avaient une durée de consommabilité supérieure à trois ans.
Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est une valeur approchée au millième-près du paramètre λ ?

a. 0,119 **b.** 0,233 **c.** 0,401 **d.** 0,900

Question 3 : les barquettes sont vendues comme contenant 300 grammes de Parmentier de sanglier. Mais, à cause de l'imprécision de la machine de remplissage, cette masse est en fait comprise entre 290 et 320 grammes.
On appelle M la variable aléatoire égale à la masse exprimée en grammes d'une barquette de Parmentier de sanglier (la masse de l'emballage n'est pas comptabilisée).
On fait l'hypothèse que M suit la loi uniforme sur l'intervalle $[290;320]$.

Le «service qualité» prélève au hasard une barquette parmi celles pesant plus de 300 grammes. Quelle est la probabilité que cette barquette pèse moins de 305 grammes ?

a. $\frac{1}{6}$ **b.** $\frac{1}{4}$ **c.** $\frac{1}{3}$ **d.** $\frac{1}{2}$

Question 4 : les variables aléatoires D définie à la **question 2** et M définie à la **question 3** sont supposées indépendantes.
On tire une barquette au hasard au bout de la chaine de production.
Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est égale à la probabilité de l'événement «la barquette a une durée de consommabilité supérieure à 3 ans <u>ou</u> une masse supérieure à 310 grammes» ?

a. $\frac{1}{10}$ **b.** $\frac{8}{15}$ **c.** $\frac{19}{30}$ **d.** $\frac{11}{15}$

Question 5 : du fait de l'imprécision de la machine de remplissage, la masse de viande varie selon les barquettes.
On appelle V la variable aléatoire égale à la masse de viande exprimée en grammes que contient une barquette de Parmentier de sanglier.
On fait l'hypothèse que la loi de probabilité de V est la loi normale $\mathcal{N}(70;25)$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est une valeur approchée au millième-près de la probabilité que la masse de viande d'une barquette soit comprise entre 67 et 77 grammes ?

a. 0,045 **b.** 0,158 **c.** 0,546 **d.** 0,645.

Question 6 : La *Cuisinière Blancoise* réalise 65% de ses ventes françaises dans les supermarchés. Cette proportion de barquettes vendues en supermarchés est de 45% pour les ventes réalisées à l'étranger.
Pour information, la *Cuisinière Blancoise* exporte 40% de sa production hors de France.
On tire au hasard une barquette sur la chaine de production.
Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est égale à la probabilité que la barquette ne soit pas vendue en supermarché ?

a. 0, 40 **b.** 0,43 **c.** 0,45 **d.** 0,50

Question 7 : le directeur de l'entreprise est catastrophé car le «service qualité» vient de lui apprendre qu'un quart de ses barquettes contenait une autre viande que du sanglier.
Imaginons qu'un client achète huit barquettes au hasard. Parmi les propositions suivantes, laquelle est une valeur approchée au millième-près de la probabilité qu'au plus deux des barquettes achetées par le client contiennent une autre viande que du sanglier ?

a. 0,504 **b.** 0,579 **c.** 0,604 **d.** 0,679

Le corrigé

1. Le tirage au sort étant simultané, le directeur constitue des combinaisons. Chaque combinaison a la même chance d'être constituée, nous sommes en situation d'équiprobabilité.

Au total, le directeur peut constitué $\binom{13}{7} = \frac{13}{1} \times \frac{\cancel{12}}{\cancel{2}} \times \frac{11}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{10}}{\cancel{4}} \times \frac{9}{\cancel{5}} \times \frac{8}{6} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{7}} = 1716$ équipes.

Il existe $\underbrace{\binom{7}{4}}_{\text{4 femmes parmi 7}} \times \underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{3 hommes parmi 6}} = \frac{7}{1} \times \frac{\cancel{6}}{\cancel{2}} \times \frac{5}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{6}}{1} \times \frac{5}{\cancel{2}} \times \frac{4}{\cancel{3}} = 700$ équipes composées de quatre femmes et trois hommes.

La probabilité d'un tel événement est égale à $\frac{700}{1716} = \frac{175}{429} \approx \boxed{0,408}$

2. L'énoncé nous apprend : $p(D \geq 3) = 0,3$

Exprimons en fonction de λ cette probabilité :

$$p(D \geq 3) = \overbrace{\int_3^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_3^{+\infty} = \left(-e^{-\lambda \times (+\infty)}\right) - \left(-e^{-3\lambda}\right)}^{\text{Pas bien !}} = -\overbrace{e^{-\infty}}^{0^+} + e^{-3\lambda} = \boxed{e^{-3\lambda}}$$

Le paramètre λ est une solution de l'équation :

$$p(D \geq 3) = 0,3 \iff e^{-3\lambda} = 0,3 \xrightarrow{\text{Ln}} -3\lambda = \ln(0,3) \iff \lambda = -\frac{\ln(0,3)}{3} \approx \boxed{0,401}$$

3. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle :

$$p(M \leq 305 \ \underline{\text{sachant}} \ M \geq 300) = \frac{p(M \leq 305 \ \underline{\text{et}} \ M \geq 300)}{p(M \geq 300)} = \boxed{\frac{p(M \in [300;305])}{p(M \geq 300)}}$$

La variable aléatoire M étant uniformément distribuée sur l'intervalle $[290;320]$, il vient :

$$p(M \in [300;305]) = \frac{305-300}{320-290} = \boxed{\frac{1}{6}} \quad p(M \geq 300) = p(M \in [300;320]) = \frac{320-300}{320-290} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Nous en concluons :

$$p\left(M \leq 305 \ \underline{\text{sachant}} \ M \geq 300\right) = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \underline{\frac{1}{4}}$$

C'est aussi le rapport des longueurs des intervalles $[300;305]$ et $[300;320]$.

4. Il s'agit de calculer la probabilité :

$$p\left(D \geq 3 \ \underline{\text{ou}} \ M \geq 310\right) = p\left(D \geq 3\right) + p\left(M \geq 310\right) - p\left(D \geq 3 \ \underline{\text{et}} \ M \geq 310\right)$$

D'après l'énoncé de la question **2**, la probabilité que la durée de consommabilité soit supérieure à 3 ans est de 0,3.

Ensuite, la variable aléatoire M étant uniformément distribuée sur l'intervalle $[290;320]$, nous pouvons écrire :

$$p\left(M \geq 310\right) = \frac{320-310}{320-290} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Enfin, les variables aléatoires D et M étant indépendantes, il vient :

$$p\left(D \geq 3 \ \underline{\text{et}} \ M \geq 310\right) = p\left(D \geq 3\right) \times p\left(M \geq 310\right) = 0{,}30 \times \frac{1}{3} = \underline{0{,}1}$$

Finalement :

$$p\left(D \geq 3 \ \underline{\text{ou}} \ M \geq 310\right) = 0{,}3 + \frac{1}{3} - 0{,}1 = 0{,}2 + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3 + 1 \times 5}{15} = \underline{\frac{8}{15}}$$

5. La variable aléatoire V suit la loi normale $\left|\begin{array}{l}\text{d'espérance } \mu = 70 \text{ grammes} \\ \text{d'écart-type } \sigma = 5 \text{ grammes}\end{array}\right.$

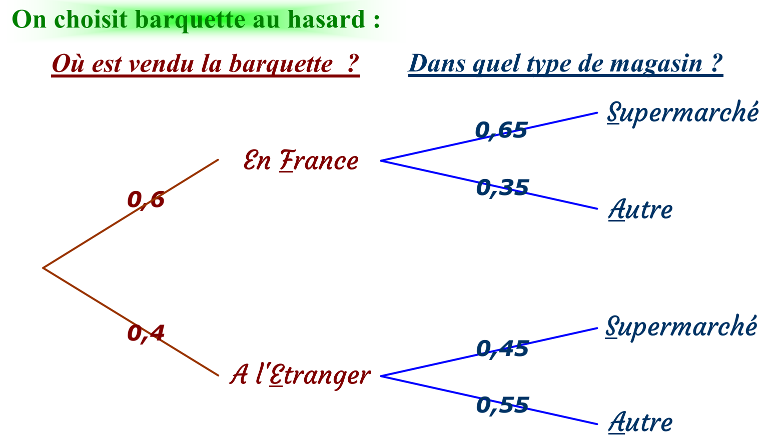
La probabilité $p\left(V \in [67;77]\right)$ peut se calculer avec la fonction de la calculatrice `DistributionCumulativeNormale(67,77,70,5)` ou en se ramenant à la variable centrée réduite $V' = \dfrac{V-70}{5}$ qui suit la loi normale centrée réduite. On a alors :

$$67 \leq V \leq 77 \xrightarrow{-70} -3 \leq V - 70 \leq 7 \xrightarrow{\div 5} \underline{-0{,}6 \leq V' \leq 1{,}4}$$

Par suite :

$$p\left(V \in [67;77]\right) = p\left(V' \in [-0{,}6;1{,}4]\right) = \overbrace{\Phi(1{,}4) - \Phi(-0{,}6)}^{\text{où } \Phi \text{ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.}} \approx \underline{0{,}645}$$

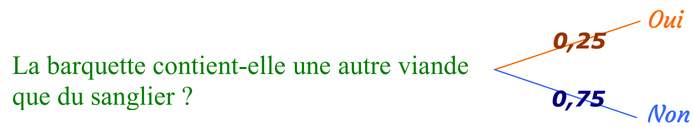
6. La situation d'une barquette peut être représentée par un arbre pondéré :



D'après la formule des probabilités totales, il vient :

$$p(A) = p(A \cap F) + p(A \cap S) = 0{,}6 \times 0{,}35 + 0{,}4 \times 0{,}55 = \underline{0{,}43}$$

7. Chaque barquette est pour le client une épreuve de Bernoulli :



Les huit barquettes forment un schéma de Bernoulli. On appelle N la variable aléatoire égale au nombre de barquettes contenant une autre viande que du sanglier.

N est une variable aléatoire discrète prenant toutes les valeurs entières entre 0 et 8, et suivant la loi binomiale $B(8;0{,}25)$.

On souhaite calculer la probabilité :

$$p(N \leq 2) = p(N=0) + p(N=1) + p(N=2)$$

$$= \overbrace{\binom{8}{0}}^{1} \times 0{,}25^0 \times 0{,}75^8 + \overbrace{\binom{8}{1}}^{8} \times 0{,}25 \times 0{,}75^7 + \overbrace{\binom{8}{2}}^{28} \times 0{,}25^2 \times 0{,}75^6$$

$$\approx \underline{0{,}679}$$

Spécialité

Quoi qui manque dans les matrices ?

L'énoncé

Compléter les opérations matricielles suivantes :

a. $3\times\begin{pmatrix}5 & \dots\\ \dots & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\dots & 6\\ 2 & \dots\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 4 & -3\\ \dots & \dots\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}3 & \dots & 5\\ 7 & -2 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\\ 4 & \dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 22\\ \dots & \dots\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}6 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dots & \dots\\ \dots & \dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 8\\ 6 & 4\end{pmatrix}$

Le corrigé

a) Six inconnues sont à trouver dans le calcul $3\times\begin{pmatrix}5 & \boxed{b}\\ \boxed{a} & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boxed{c} & 6\\ 2 & \boxed{d}\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 6\\ 4 & -3\\ \boxed{e} & \boxed{f}\end{pmatrix}$.

Justement, le calcul précédent induit six équations.

$3a-2=4$	$3b-6=6$	$3\times5-c=7$	$3\times(-2)-d=-3$	$3\times1-4=e$	$3\times0-(-3)=f$
$3a=6$	$3b=12$	$-c=-8$	$-d=3$	$e=-1$	$f=3$
$a=2$	$b=4$	$c=8$	$d=-3$		

b) Quatre inconnues sont à trouver dans le calcul $\begin{pmatrix}3 & \boxed{a} & 5\\ 7 & -2 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\\ 4 & \boxed{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 22\\ \boxed{c} & \boxed{d}\end{pmatrix}$

Ce calcul matriciel nous conduit à quatre équations :

$3\times1+a\times(-2)+5\times4=21$	$-9+1+5b=22$	$7+4+12=c$	$-21-2+18=d$
$-2a=-2$	$5b=30$	$c=23$	$d=-5$
$a=1$	$b=6$		

c) Le produit étant le double du premier facteur, le second facteur est $2\times\mathrm{Id}_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

Une autre méthode consiste à résoudre un petit système 4×4 dans lequel on s'embourbe !

Regrets sincères

L'énoncé

Les fêtes de fin d'année approchent et pour célébrer comme il se doit la fin du monde, la *Blancoise du Pétale* a décidé de lancer une gamme de couronnes composées de quatre type de fleurs : des aconits, des belladones, des chélidoines et des dauphinelles.

La gamme de couronnes est constituée de quatre modèles :

- Le modèle *Xéphichu* est composé de quatre aconits, de trois belladones, de deux chélidoines et d'une dauphinelle.
- Le modèle *Yvaquerevais* est composé de trois aconits, de deux belladones, de deux chélidoines et d'une dauphinelle.
- Le modèle *Zéphoutu* est composé de deux aconits, de deux belladones, de trois chélidoines et d'une dauphinelle.
- Le modèle *Tétraimal* est composé d'un aconit, de deux belladones, de trois chélidoines et de quatre dauphinelles.

a) Déterminer les quantités a d'aconits, b de belladones, c de chélidoines et d de dauphinelles qu'il faut pour produire x couronnes *Xéphichu*, y couronnes *Yvaquerevais*, z couronnes *Zéphoutu* et t couronnes *Tétraimal*.

b) En déduire une matrice M carrée d'ordre 4 telle que : $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=M\times\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$.

c) En déduire les quantités de fleurs nécessaires pour produire 10 couronnes *Xéphichu*, 15 couronnes *Yvaquerevais*, 12 couronnes *Zéphoutu* et 14 couronnes *Tétraimal*.

d) Combien la *Blancoise du Pétale* a-t-elle produit de couronnes de chaque modèle sachant qu'elle a utilisé précisément 68 aconits, 55 belladones, 53 chélidoines et 72 dauphinelles ?

Le corrigé

a) Pour constituer x couronnes *Xéphichu*, y couronnes *Yvaquerevais*, z couronnes *Zéphoutu* et t couronnes *Tétraimal*, il faut

$a=4x+3y+2z+t$ aconits

$b=3x+2y+2z+2t$ belladones

$c=2x+2y+3z+3t$ chélidoines

$d=x+y+z+4t$ dauphinelles

b) Nous en déduisons l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{M} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

c) Les quantités de fleurs nécessaires sont données par le calcul :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 112 \\ 128 \\ 93 \end{pmatrix}$$

Conclusion : pour produire	10 couronnes *Xéphichus*	, il faut	123 aconits	.
	15 couronnes *Yvaquerevais*		112 belladones	
	12 couronnes *Zéphoutus*		128 chélidoines	
	14 couronnes *Tétraimal*		93 dauphinelles	

d) Les quantités x, y, z et t que l'on peut produire précisément avec 68 aconits, 55 belladones, 53 chélidoines et 72 dauphinelles, sont les solutions du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 68 \\ 55 \\ 53 \\ 72 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{M} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} 68 \\ 55 \\ 53 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 27 \\ -16 \\ 15 \end{pmatrix}$$

<u>Conclusion :</u> comme il est très difficile de produire un nombre négatif de couronnes *Zéphoutus* (même après la fin du monde), le problème posé n'a pas de solution exacte.

Ils votent avec leurs pieds

L'énoncé

L'association *Unijambistes et Marcheurs de Picardie* qui compte 320 membres va bientôt élire un nouveau président.
C'est à son président actuel, Monsieur Boiteux, qu'il incombe de convoquer les élections. Il décidera seul de la date. Et chaque membre devra voter pour l'un des candidats.
Il sait déjà qu'il n'aura qu'un seul adversaire en la personne de Madame Gambette.
Il sait aussi que les membres de l'association peuvent changer d'avis.
Ainsi, 35% des membres qui auraient voté pour Monsieur Boiteux une semaine donnée voteront pour Madame Gambette la semaine suivante.
Dans le même temps, 30% des membres qui auraient voté pour Madame Gambette une semaine donnée voteront pour Monsieur Boiteux la semaine suivante.
On appelle b_n le nombre d'électeurs qui voteraient pour Monsieur Boiteux la n-ième semaine et g_n le nombre d'électeurs qui voteraient pour Madame Gambette.

a) Déterminer une matrice M carrée d'ordre 2 telle que pour tout entier naturel n, on ait :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix}$$

En déduire l'expression du vecteur-colonne $\begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} b_0 \\ g_0 \end{pmatrix}$.

b) Quelle est la proportion d'électeurs de Monsieur Boiteux qui voteront encore pour lui au bout de trois semaines ?

c) Ce jeudi 22 novembre de l'an de grâce 2012, Monsieur Boiteux sait que s'il convoque les élections aujourd'hui, seule Madame Gambette ne votera pas pour lui.
Madame Gambette a-t-elle une chance de l'emporter un jour ?

Le corrigé

a) D'une semaine n sur la suivante $n+1$:

- Monsieur Boiteux garde 65% de ses électeurs et prend 30% de ceux de Madame Gambette. Donc : $b_{n+1} = 65\%$ de $b_n + 30\%$ de $g_n = 0,65 \times b_n + 0,30 \times g_n$
- Madame Gambette prend 35% des électeurs de Monsieur Boiteux et garde 70% des siens. Ainsi : $g_{n+1} = 35\%$ de $b_n + 70\%$ de $g_n = 0,35 \times b_n + 0,70 \times g_n$

Matriciellement, il vient alors :

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65\times b_n + 0,3\times g_n \\ 0,35\times b_n + 0,7\times g_n \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0,65 & 0,3 \\ 0,35 & 0,7 \end{pmatrix}}}_{M} \times \begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix}$$

La suite de vecteurs colonnes $\left(\begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix}\right)$ est géométrique de raison $M = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,3 \\ 0,35 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, nous avons : $\begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} b_0 \\ g_0 \end{pmatrix}$

b) Entre la semaine n et la semaine $n+3$, l'évolution est donnée par :

$$\begin{pmatrix} b_{n+3} \\ g_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \times \begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,485 & 0,442 \\ 0,515 & 0,558 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0,485\times b_n} + 0,442\times g_n \\ 0,515\times b_n + 0,558\times g_n \end{pmatrix}$$

Conclusion : au bout de trois semaines, il reste à Monsieur Boiteux $48,5\%$ de son électorat initial.

c) Nous connaissons désormais $b_0 = 320 - 1 = 319$ électeurs et $g_0 = 1$ électrice.
Il s'agit de voir avec la calculatrice si à partir d'un moment n_0, g_n dépasse b_n.

Pour ce faire, il faut calculer quelques termes de la suite $\begin{pmatrix} b_n \\ g_n \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} 319 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après la machine, g_n dépasse b_n à partir du rang $n = 3$
Conclusion : Madame Gambette l'emporte à partir de la quatrième semaine par 165 voix contre155.

Un reste de puissance

L'énoncé

a) Déterminer les quotient et reste de la division euclidienne de 2012 par 7.

b) Compléter le tableau ci-dessous des sept premières puissances de 2012 modulo 7. Aucune justification n'est demandée.

n	1	2	3	4	5	6	7
2012^n							

c) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2012^{2013} modulo 7.

Le corrigé

a) La division euclidienne 2012 par 7 a pour quotient 287 et reste 3 car $\begin{cases} 2012 = 7\times 287 + 3 \\ 0 \leq 3 < 7 \end{cases}$

b) Calculons les sept premières puissances de 2012 modulo 7.

Modulo 7

$2012^1 \equiv 3^1 \equiv 3$ $\quad 2012^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \equiv 2$ $\quad 2012^3 \equiv 2012^2 \times 2012 \equiv 2\times 3 \equiv 6$

$2012^4 \equiv 2012^3 \times 2012 \equiv 6\times 3 \equiv 18 \equiv 4$ $\quad 2012^5 \equiv 2012^4 \times 2012 \equiv 4\times 3 \equiv 12 \equiv 5$ $\quad 2012^6 \equiv 2012^5 \times 2012 \equiv 5\times 3 \equiv 15 \equiv 1$

$2012^7 \equiv 2012^6 \times 2012 \equiv 1\times 3 \equiv 3$

Les puissances de 2012 modulo 7 semblent cycliques suivant une période de 6. Nous utiliserons cette constatation dans la question suivante.

c) La division euclidienne 2013 par 6 a pour quotient 334 et reste 3 car $\begin{cases} 2013 = 6\times 335 + 3 \\ 0 \leq 3 < 6 \end{cases}$

Nous pouvons alors écrire que modulo 7 :

Modulo 7

$$2012^{2013} \equiv 2012^{6\times 335+3} \equiv 2012^{6\times 335} \times 2012^3 \equiv \left(2012^6\right)^{335} \times 6 \equiv 1^{335} \times 6 \equiv 6$$

Conclusion : le reste de la division euclidienne de 2012^{2013} modulo 7 est égal à 6.

Petits secrets entre ennemis

L'énoncé

Pour communiquer entre eux, les membres du CRES (Comité Révolutionnaire de l'Enseignement Secondaire), cryptent leurs messages en utilisant un chiffrement affine.
Leurs messages sont constitués de vingt-trois lettres distinctes : les vingt-six lettres latines normales moins les lettres inutiles Q, W et Y.
Avant de procéder au cryptage, on fait correspondre à chaque lettre son rang n suivant la table de correspondance :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	R	S	T	U	V	X	Z
Rang n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Puis, à partir de la clé (a,b) constituée de deux entiers, on procède au codage de chaque lettre en calculant le rang n' de la lettre codée suivant le procédé :

$$n' \equiv a \times n + b \text{ modulo } 23$$

Par convention, les messages seront écrits en lettres majuscules.

a) Ce jour, on sait que le CRES crypte ses messages en utilisant la clé $(6;1)$.

1. Crypter le message `GENIAL`.
2. Déterminer l'entier $0 \leq n < 23$ pour lequel $5 \equiv 6n+1[23]$.
3. Sachant que $n' \equiv 6n+1[23]$, déterminer deux entiers c et d tels que
$$n \equiv c \times n' + d[23]$$
Le couple $(c;d)$ est la clé de décryptage inverse de la clé de cryptage $(a;b)$.
4. Décoder le message `FBSC`

b) Soucieux de préserver le secret de ses communications, le CRES vient de changer sa clé de cryptage. On vient d'intercepter le message codé :

`GXFSEG GO VGTDGO`

Mais on ignore la clé $(a;b)$ qui a permis de le coder.
Cependant, des indiscrétions nous ont appris que le mot `GO` codait le mot `ET`.
Retrouver le message décodé. On expliquera sa démarche.

Le corrigé

a.1) Modulo 23, nous avons :

$$\begin{array}{|lllllll} \texttt{G} & \rightarrow & n=6 & \Rightarrow & n' \equiv 6\times6+1 \equiv 37 \equiv 14 & \rightarrow & \texttt{O} \\ \texttt{E} & \rightarrow & n=4 & \Rightarrow & n' \equiv 6\times4+1 \equiv 25 \equiv 2 & \rightarrow & \texttt{C} \\ \texttt{N} & \rightarrow & n=13 & \Rightarrow & n' \equiv 6\times13+1 \equiv 79 \equiv 10 & \rightarrow & \texttt{K} \\ \texttt{I} & \rightarrow & n=8 & \Rightarrow & n' \equiv 6\times8+1 \equiv 49 \equiv 3 & \rightarrow & \texttt{D} \\ \texttt{A} & \rightarrow & n=0 & \Rightarrow & n' \equiv 6\times0+1 \equiv 1 & \rightarrow & \texttt{B} \\ \texttt{L} & \rightarrow & n=11 & \Rightarrow & n' \equiv 6\times11+1 \equiv 67 \equiv 21 & \rightarrow & \texttt{X} \end{array}$$

a.2 et 3) 4 est l'inverse de 6 modulo 23. En effet : $6\times4 \equiv 24 \equiv 1[23]$. Ainsi :

$$\text{Modulo 23} \begin{array}{|lllllll} 5 \equiv 6n+1 & \xrightarrow{-1} & 4 \equiv 6n & \xrightarrow{\times4} & 16 \equiv 24\times n & \Rightarrow & n \equiv \boxed{16} \\ n' \equiv 6n+1 & \xrightarrow{-1} & n'-1 \equiv 6n & \xrightarrow{\times4} & 4n'-4 \equiv 24\times n & \Rightarrow & n \equiv \boxed{4n'-4} \end{array}$$

a.4) Pour décoder `FBSC`, il suffit de lui appliquer la fonction de décodage $n \equiv 4n'-4[23]$.

$$\text{Modulo 23} \begin{array}{|lllllll} \texttt{F} & \rightarrow & n'=5 & \Rightarrow & n \equiv 4\times5-4 \equiv 16 & \rightarrow & \texttt{R} \\ \texttt{B} & \rightarrow & n'=1 & \Rightarrow & n \equiv 4\times1-4 \equiv 0 & \rightarrow & \texttt{A} \\ \texttt{S} & \rightarrow & n'=17 & \Rightarrow & n' \equiv 4\times17-4 \equiv 64 \equiv 18 & \rightarrow & \texttt{T} \\ \texttt{C} & \rightarrow & n'=2 & \Rightarrow & n' \equiv 4\times2-4 \equiv 4 & \rightarrow & \texttt{E} \end{array}$$

b) Ce n'est pas la clé de codage $(a;b)$ qui nous intéresse mais celle de décodage $(c;d)$.

Pour ce faire, nous savons que

$$\begin{array}{|lll} \text{G se décode en E} & \Rightarrow & 4 \equiv c\times6+d[23] \quad \textbf{\textit{(1)}} \\ \text{O se décode en T} & \Rightarrow & 18 \equiv c\times14+d[23] \quad \textbf{\textit{(2)}} \end{array}$$

En soustrayant membre à membre l'équation ***(1)*** à la ***(2)***, il vient :

$$\overbrace{18-4 \equiv 14c-6c+\cancel{d}-\cancel{d} \Leftrightarrow 14 \equiv 8c \xrightarrow{\times3} 42 \equiv 24c \Rightarrow c \equiv \boxed{19}}^{\text{Modulo 23}}$$

En remplaçant c par sa valeur dans l'équation (1), nous obtenons alors d :

$$\overbrace{4 \equiv 6\times19+d \Leftrightarrow d \equiv 4-114 \equiv -110 \equiv 5-3\times23 \equiv 5-3\times0 \equiv \boxed{5}}^{\text{Modulo 23}}$$

Lé clé de décodage est donc $(19;5)$ et la fonction de décodage $n \equiv 19n'+5[23]$.

Lettre codée	G	X	F	S	E	G	G	O	V	G	T	D	G	O
Rang n'		21	5	17	5				20		18	3		
Rang $n \equiv 19n'+5[23]$		13	8	6	12				17		2	16		
Lettre décodée	E	N	I	G	M	E	E	T	S	E	C	R	E	T

Suites

Questions de suites...sans réponse

L'énoncé

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune d'entre elles, un raisonnement est attendu.

a) Les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites dont on connaît les cinq premiers termes :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \quad u_1 = 6,5 \quad u_2 = 3 \quad u_3 = -0,5 \quad u_4 = -4 \\ v_0 = 6 \quad v_1 = 12 \quad v_2 = 24 \quad v_3 = 50 \quad v_4 = 100 \end{cases}$$

Ces deus suites peuvent-elles être arithmétiques ou géométriques ?

b) Toto travaille dans une entreprise où il perçoit son salaire quotidiennement (et non mensuellement comme il est d'usage en France).
Ce mercredi matin, il sort d'un rendez-vous avec son patron et il est bien embêté car ce dernier lui a proposé deux options de rémunération pour le mois de février.
Dans la première option, le patron propose à Toto de lui verser 100 euros le 1er février. Puis, chaque jour passant, son salaire quotidien augmentera de 4 euros par rapport à celui du jour précédent.
Dans la seconde option, le patron propose à Toto de lui verser 200 euros le 1er février. Mais, chaque jour passant, son salaire quotidien diminuera de 2% par rapport à celui du jour précédent.
Laquelle de ces deux options de rémunération est la plus intéressante pour Toto sur la totalité des 28 jours du mois de février ?

c) Démontrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a : $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n < 7^n$

Le corrigé

a) Examinons ce qui différencie deux termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$u_0 = 10 \xrightarrow{-3,5} u_1 = 6,5 \xrightarrow{-3,5} u_2 = 3 \xrightarrow{-3,5} u_3 = -0,5 \xrightarrow{-3,5} u_4 = -4$$

Les cinq premiers termes de (u_n) sont ceux d'une suite arithmétique de raison $r = -3,5$.
Par contre, la suite ne peut pas être géométrique car les rapports de deux termes consécutifs sont tous différents.

$$u_0 = 10 \xrightarrow{\times 0,65} u_1 = 6,5 \xrightarrow{\cancel{\times 0,65}} u_2 = 3 \xrightarrow{\cancel{\times 0,65}} u_3 = -0,5 \quad \ldots$$

<u>Conclusion :</u> la suite (u_n) peut être arithmétique mais n'est pas géométrique.

➲ Examinons ce qui différencie deux termes consécutifs de la suite (v_n) :

$$v_0 = 6 \xrightarrow{+6} v_1 = 12 \xrightarrow{+12} v_2 = 24 \xrightarrow{+26} v_3 = 50 \xrightarrow{+50} v_4 = 100$$

La différence entre deux termes consécutifs de la suite n'étant pas constante, la suite (v_n) ne peut pas être arithmétique.
Peut-être est-elle géométrique ?

$$v_0 = 6 \xrightarrow{\times 2} v_1 = 12 \xrightarrow{\times 2} v_2 = 24 \xrightarrow{\cancel{\times 2}} u_3 = 50 \xrightarrow{\times 2} v_4 = 100$$

Le rapport de deux termes consécutifs de la suite n'étant pas constant, la suite (v_n) ne peut pas être géométrique.
<u>Conclusion :</u> la suite (v_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

b) D'abord, intéressons-nous à la première option de rémunération.
On appelle u_n le salaire versé par le patron le $n$ième jour de février dans le cadre de cette première option.
Nous avons donc : $\begin{cases} u_1 = 100 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \quad \text{pour tout entier } n \in \{1;2;\ldots;27\} \end{cases}$

Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_1 = 100€$.
Sur l'ensemble du mois de février, Toto percevra au total dans le cadre de cette première option de rémunération :

$$\underbrace{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{28}}_{\text{Somme de 28 termes consécutifs d'une suite arithmétique}} = 28 \times \frac{u_1 + u_{28}}{2} = 28 \times \frac{100 + (100 + 27 \times 4)}{2} = 4312€$$

➲ Intéressons-nous à la seconde option de rémunération.
On appelle v_n le salaire versé par le patron le $n$ième jour de février dans le cadre de cette seconde option.
Nous avons donc :

$$\begin{cases} v_1 = 200 \\ v_{n+1} = v_n - 2\% \text{ de } v_n \qquad \text{pour tout entier } n \in \{1;2;\ldots;27\} \\ \phantom{v_{n+1}} = v_n - 0,02 \times u_n \\ \phantom{v_{n+1}} = v_n \times (1 - 0,02) = 0,98 \times v_n \end{cases}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,98$ et de premier terme $v_1 = 200€$.
Sur l'ensemble du mois de février, Toto percevra au total avec cette option :

$$\underbrace{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_{28}}_{\text{Somme de } \boxed{28} \text{ termes consécutifs d'une suite géométrique}} = v_1 \times \frac{1 - 0,98^{\boxed{28}}}{1 - 0,98} \approx 4320,24€$$

<u>Conclusion :</u> sur l'ensemble du mois de février, la seconde option est légèrement plus avantageuse que la première...de 8 euros.

c) Démontrons par récurrence sur l'entier $n \geq 4$ la propriété :

$$P_n \ : \ 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n < 7^n \ .$$

- Au premier rang $n = 4$, la propriété P_4 est-elle vraie ?

  Nous avons $\left| \begin{array}{l} 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 1 + 16 + 81 + 256 + 625 + 1296 = 2275 \\ 7^4 = 2401 \end{array} \right.$

  Comme $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 < 7^4$, alors la propriété P_4 est vraie.

- Le principe de récurrence ou de propagation

  Supposons que la propriété P_n pour un certain entier n. Nous avons alors :

  $$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n < 7^n \xrightarrow{\times 7} 7 \times \left[1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n\right] < 7^{n+1}$$

  Or, pour tout entier $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, nous avons :

  $$7 > k \xrightarrow{\times k^n} 7 \times k^n > k \times k^n = k^{n+1}$$

  L'inégalité précédente devient alors :

  $$\begin{aligned} 7^{n+1} &> 7 \times 1^n + 7 \times 2^n + 7 \times 3^n + 7 \times 4^n + 7 \times 5^n + 7 \times 6^n \\ &> 1^{n+1} + 2^{n+1} + 3^{n+1} + 4^{n+1} + 5^{n+1} + 6^{n+1} \end{aligned}$$

  Donc la propriété P_{n+1} est alors vraie. Le principe de récurrence est établi.

A la suite de la maison

L'énoncé

Les sous-parties de cet exercice sont dépendantes.

a) On appelle f la fonction définie sur ℝ par :

$$f(x) = x - \frac{3e^x - 7}{2e^x + 3}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur ℝ tout entier.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
3. Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{4e^{2x} - 11e^x + 9}{\left(2e^x + 3\right)^2}$$

4. Déterminer le signe sur ℝ de la fonction $\varphi(t) = 4t^2 - 11t + 9$.
5. En déduire le sens de variation de la fonction f sur ℝ.
6. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans ℝ une unique solution α dont on donnera un encadrement au centième-près.

b) La suite (u_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{23}{4 \times e^{u_n} + 6} \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

1. Sur le graphique ci-après, la courbe (C) a équation $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{23}{4e^x + 6}$.

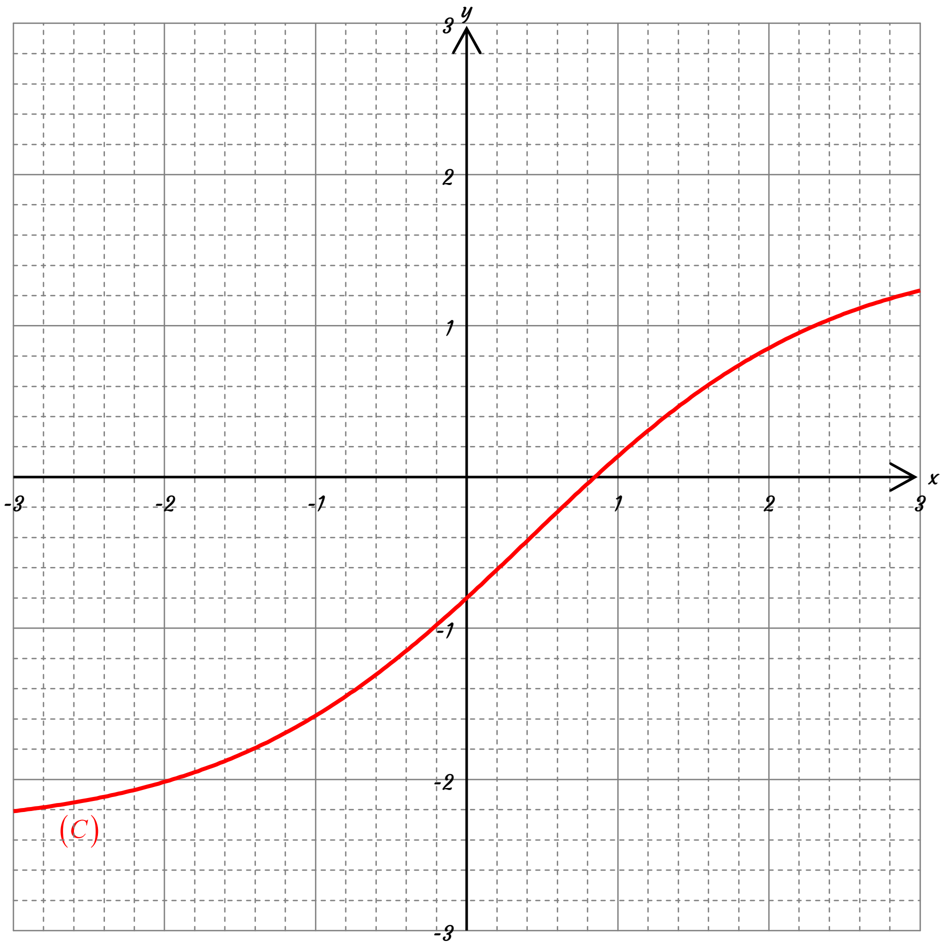
   Construire sur l'axe des abscisses (Ox) et sans aucun calcul les cinq premiers termes de la suite à savoir u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4. On laissera apparents les traits de construction.
2. Démontrer par récurrence sur l'entier n, la propriété $P_n \ : \ -3 \leq u_{n+1} < u_n$.

   On pourra recourir à des valeurs approchées lors du raisonnement.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

c) On considère l'algorithme suivant :

```
u et a sont deux réels
a=2
u=1.5-23/(4*exp(a)+6)
Tant que (a-u)>0.1 faire
    a=u
    u=1.5-23/(4*exp(a)+6)
Afficher u
```

1. Exécuter cet algorithme.
2. Pourquoi était-il évident que cet algorithme s'arrêterait ?



Le corrigé

a.1) La fonction f est un «assortiment opératoire» des fonctions de référence x et e^x qui sont toutes définies sur ℝ.

Seul le quotient $2e^x+3$ pourrait poser problème par sa nullité. Or, l'exponentielle e^x étant toujours positive, il en va de même pour cette somme de termes positifs.
C'est pour cela que la fonction f est définie sur ℝ.

a.2) La limite en $-\infty$ de la fonction f ne pose guère de problèmes.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - \frac{3e^x-7}{2e^x+3} = (-\infty) - \frac{3\times 0^+ - 7}{2\times 0^+ + 3} = (-\infty) - \left(-\frac{7}{3}\right) = \underline{-\infty}$$

➲ Au voisinage de $+\infty$, le quotient $\dfrac{3e^x-7}{2e^x+3}$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$..

Modifions l'écriture de $f(x)$. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = x - \frac{3e^x-7}{2e^x+3} = x - \frac{\cancel{e^x}\times\left(3-\frac{7}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\times\left(2+\frac{3}{e^x}\right)} = x - \frac{3-\frac{7}{e^x}}{2+\frac{3}{e^x}}$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \frac{3-\frac{7}{e^x}}{2+\frac{3}{e^x}} = (+\infty) - \frac{3-\frac{7}{+\infty}}{2+\frac{3}{+\infty}} = (+\infty) - \frac{3-0^+}{2+0^+} = (+\infty) - \frac{3}{2} = \underline{+\infty}$$

a.3) Comme $u(x) = 3e^x - 7$, $u'(x) = 3e^x$, est dérivable sur ℝ et $v(x) = 2e^x + 3$, $v'(x) = 2e^x$, est dérivable et strictement positive sur ℝ ,

alors la fonction $f = x - \dfrac{u}{v}$ est aussi dérivable sur ℝ et pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = 1 - \frac{u'\times v - v'\times u}{v^2}$$

$$= 1 - \frac{3e^x\times(2e^x+3) - 2e^x\times(3e^x-7)}{(2e^x+3)^2} = \frac{(2e^x+3)^2}{(2e^x+3)^2} - \frac{\cancel{6e^{2x}} + 9e^x - \cancel{6e^{2x}} + 14e^x}{(2e^x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4e^{2x}+12e^{x}+9}{\left(2e^{x}+3\right)^{2}}-\frac{23e^{x}}{\left(2e^{x}+3\right)^{2}}=\frac{4e^{2x}-11e^{x}+9}{\left(2e^{x}+3\right)^{2}}$$

a.4) Pour connaître le signe de la fonction du second degré $\varphi(t)=4t^2-11t+9$, calculons son discriminant.

$$\Delta_{\varphi(t)}=(-11)^2-4\times4\times9=121-144=-23$$

Son discriminant étant négatif, la forme $\varphi(t)$ est toujours du signe de son coefficient dominant $a=4$, donc toujours strictement positive.

a.5) Il vient alors que pour tout réel x :

$$f'(x)=\frac{4\times\left(e^{x}\right)^{2}-11\times\left(e^{x}\right)+9}{\left(2e^{x}+3\right)^{2}}=\frac{\varphi\left(e^{x}\right)}{\left(2e^{x}+3\right)^{2}}=\frac{\oplus}{\oplus}=\oplus$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Comme la dérivée $f'(x)$ est toujours positive sur ℝ, alors la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$.

a.6) Comme :

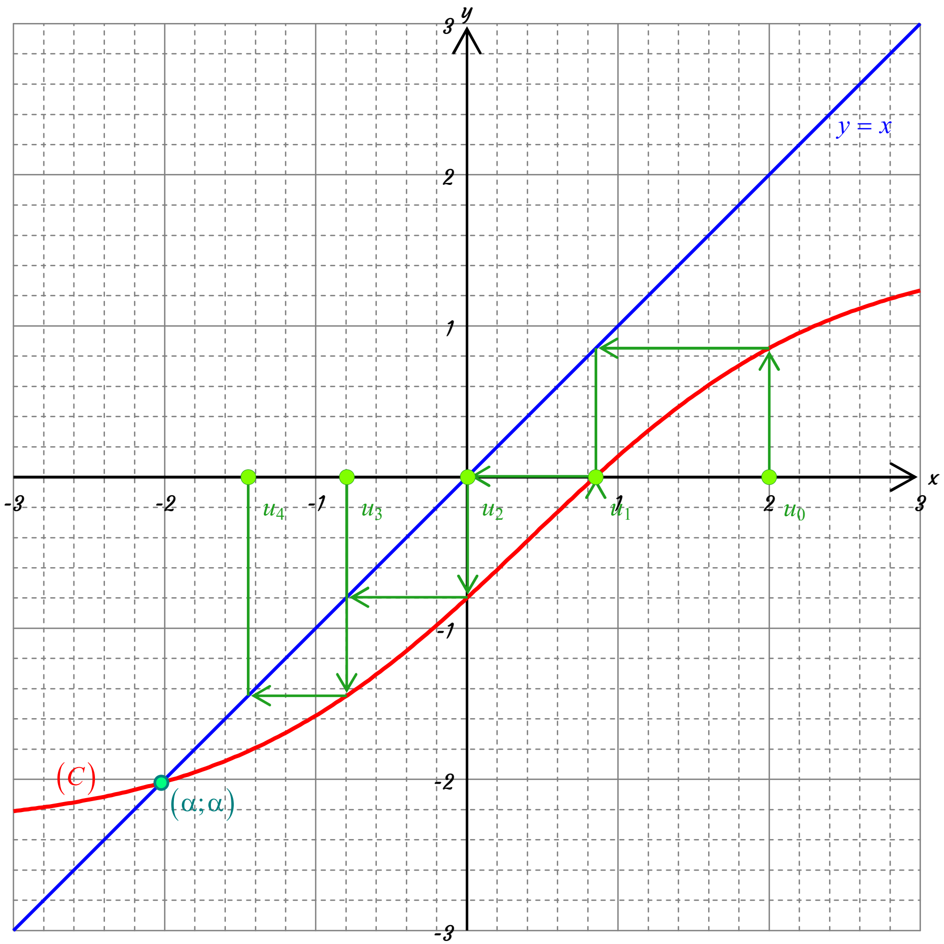
La fonction f est continue car dérivable sur $]-\infty;+\infty[$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.
L'image de l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ par la fonction f est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.
0 appartient à l'intervalle image $]-\infty;+\infty[$.

alors, l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α dans ℝ.

D'après la calculatrice, un encadrement au centième de cette solution α est :

$$-2{,}03\leq\alpha\leq-2{,}02$$

b.1) C'est une construction classique qui est demandée. D'abord, il faut tracer la droite d'équation $y=x$ qui est le lieu du plan où les points ont leur abscisse égale à leur ordonnée. Ayant positionné u_0 sur l'axe des abscisses, le point de la courbe (C) de même abscisse a pour ordonnée u_1. On ramène ce nombre u_1 sur l'axe des abscisses en «se retournant» sur la première bissectrice du plan. Puis, on recommence le processus pour obtenir u_2 .



b.2) Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété P_n : $-3\leq u_{n+1}<u_n$.

- Au premier rang $n=0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

  Nous avons $u_0=2$

  $$u_1=\frac{3}{2}-\frac{23}{4\times e^{u_1}+6}=\frac{3}{2}-\frac{23}{4\times e^{2}+6}\approx0{,}853$$

  Ayant bien $-3\leq u_1<u_0$, la propriété P_0 est donc vraie.

- Le principe de récurrence ou de propagation

  Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un certain entier n.
  Il vient alors :

$$-3 \le u_{n+1} < u_n \xrightarrow[\text{sur } \mathbb{R}]{\text{Exp Croissante}} e^{-3} \le e^{u_{n+1}} < e^{u_n}$$

$$\xrightarrow{\times 4} 4e^{-3} \le 4e^{u_{n+1}} < 4e^{u_n}$$

$$\xrightarrow{+6} 4e^{-3}+6 \le 4e^{u_{n+1}}+6 < 4e^{u_n}+6$$

$$\xrightarrow[\text{Décroissante sur } \mathbb{R}]{\text{Inverse}} \frac{1}{4e^{-3}+6} \ge \frac{1}{4e^{u_{n+1}}+6} > \frac{1}{4e^{u_n}+6}$$

$$\xrightarrow{\times(-23)} -\frac{23}{4e^{-3}+6} \le -\frac{23}{4e^{u_{n+1}}+6} < -\frac{23}{4e^{u_n}+6}$$

$$\xrightarrow{+3/2} \frac{3}{2}-\frac{23}{4e^{-3}+6} \le u_{n+2} < u_{n+1}$$

Or, une valeur approchée par défaut du minorant $\frac{3}{2}-\frac{23}{4e^{-3}+6}$ est $-2,22$.

Par conséquent, nous avons bien $-3 \le u_{n+2} < u_{n+1}$.

Donc la propriété P_{n+1} est alors vraie. Le principe de récurrence est établi.

b.3) La suite (u_n) est : décroissante car pour tout entier n, $u_n > u_{n+1}$
minorée par -3 car pour tout entier n, $u_n \ge -3$

Donc la suite (u_n) est convergente. C'est-à-dire qu'elle a une limite finie ℓ.

De plus est, comme :

La suite (u_n) est définie par récurrenceau moyen de la fonction $g(x)=\frac{3}{2}-\frac{23}{4e^x+6}$

La fonction g est continue car dérivable sur $\mathbb{R}$ (son dénominateur étant toujours positif).

Tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à $\mathbb{R}$

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ

alors, cette limite ℓ est l'une des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$g(x)=x \Leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{23}{4e^x+6}=x \Leftrightarrow \frac{3\times\left(2e^x+3\right)-23}{4e^x+6}=x$$

$$\Leftrightarrow \frac{6e^x+\overbrace{9-23}^{-14}}{4e^x+6}=x \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}\times\left(3e^x-7\right)}{\cancel{2}\times\left(2e^x+3\right)}=x \Leftrightarrow 0=\overbrace{x-\frac{3e^x-7}{2e^x+3}}^{f(x)}$$

Or, d'après la question **a.6**, l'équation $f(x)=0$ a pour seule solution α dans $\mathbb{R}$.

<u>Conclusion :</u> la suite (u_n) converge vers le réel α.

c.1) Exécutons instruction par instruction le programme proposé :

```
a=2,0
u=0,8531
Tant que : comme (a-u)=1.1468>0,1   on entre dans la boucle
      a=0,8531
      u=0,0053
Tant que : comme (a-u)=0.8478>0,1   on entre dans la boucle
      a=0,0053
      u=-0,795
Tant que : comme (a-u)=0,8004>0,1   on entre dans la boucle
      a=-0,795
      u=-1,4463
Tant que : comme (a-u)=0,6512>0,1   on entre dans la boucle
      a=-1,4463
      u=-1,8133
Tant que : comme (a-u)=0,3669>0,1   on entre dans la boucle
      a=-1,8133
      u=-1,9573
Tant que : comme (a-u)=0,144>0,1    on entre dans la boucle
      a=-1,9573
      u=-2,0034
Tant que : comme (a-u)=0,046≤0,1    on sort de la boucle
La valeur affichée de u vaut -2,0034
```

c.2) Cet algorithme s'arrête lorsque la différence entre deux termes consécutifs $\overbrace{u_n}^{a} - \overbrace{u_{n+1}}^{u}$ devient inférieure ou égale à 0,1.

Comme les termes u_n et u_{n+1} tendent tous deux vers α, leur différence tend vers 0.

Donc, si l'on considère la tolérance $\varepsilon = 0,1$, il existe un rang n_0 à partir duquel on a :

$$\overbrace{0 \le u_n - u_{n+1}}^{\text{La suite } (u_n) \text{ étant décroissante, la différence } u_n-u_{n+1} \text{ est positive.}} \le 0,1$$

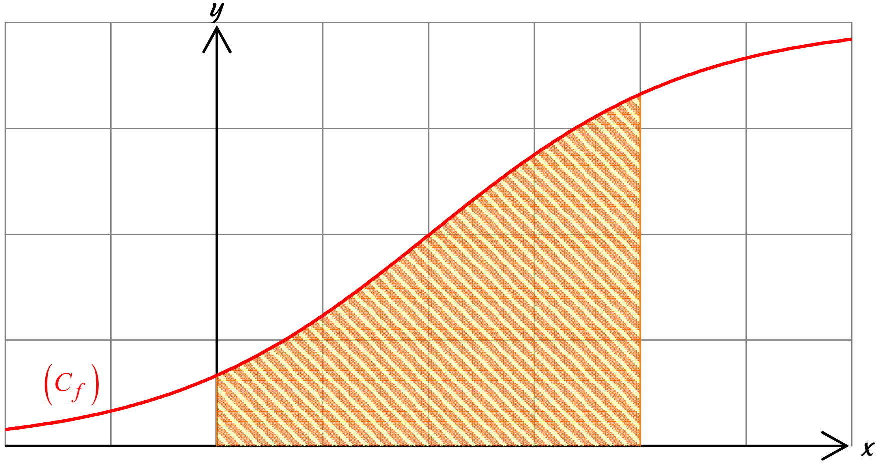
Brèves (analyses) d'un comptoir

L'énoncé

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{4}{1+5e^{-0,8x}}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé sa courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé où une unité graphique vaut 1,4 centimètres.



1. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.
   Quelles sont les conséquences graphiques de ces limites ?
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ et en déduire les variations de la fonction f.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)>3$.
4. Montrer que la fonction $F(x)=5\ln\left(e^{0,8x}+5\right)$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Calculer l'aire du domaine hachuré sur le graphique ci-dessus. On donnera la valeur exacte de l'aire exprimée en unités d'aire, puis une seconde valeur approchée au millimètre carré près qui sera exprimée en centimètres carrés.

b) On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\left|\begin{array}{l} u_0=4 \\ u_{n+1}=\dfrac{4}{1+5\times e^{-0,8\times u_n}} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

1. Sans utiliser la calculatrice ou de valeurs approchées, démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété $P_n\ :\ 0\leq u_{n+1}<u_n\leq 4$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite finie ℓ.

Donner un encadrement au centième-près de cette limite ℓ. Aucune justification n'est demandée.

Le corrigé

a.1) Lorsque x tend vers $-\infty$, $\left|\begin{array}{l} -0,8x \text{ tend vers } +\infty. \\ 1+5\times e^{-0,8x} \text{ tend vers } 1+5\times(+\infty)=+\infty \\ f(x) \text{ tend vers } \dfrac{4}{+\infty}=0^+ \end{array}\right.$

La conséquence graphique de cette limite est que l'axe des abscisses d'équation $y=0$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

➲ Lorsque x tend vers $+\infty$, $\left|\begin{array}{l} -0,8x \text{ tend vers } -\infty. \\ 1+5\times e^{-0,8x} \text{ tend vers } 1+5\times 0^+=1 \\ f(x) \text{ tend vers } \dfrac{4}{1}=4 \end{array}\right.$

La conséquence graphique de cette limite est que la droite horizontale d'équation $y=4$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

a.2) La dérivée de la fonction $e^{-0,8x}=e^{u}$ sur $\mathbb{R}$ est $u'\times e^{u}=-0,8\times e^{-0,8x}$.

Comme la fonction $\left|\begin{array}{l} u(x)=1+5\times e^{-0,8x} \\ u'(x)=5\times(-0,8)\times e^{-0,8x}=-4e^{-0,8x} \end{array}\right.$ est dérivable et positive sur $\mathbb{R}$,

alors la fonction $f(x)=4\times\dfrac{1}{u}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = 4\times\frac{-u'}{u^2}$$

$$= 4\times\frac{4e^{-0,8x}}{\left(1+5e^{-0,8x}\right)^2} = \frac{16\times e^{-0,8x}}{\left(1+5e^{-0,8x}\right)^2}$$

Tous les facteurs apparaissant dans ce dernier quotient sont positifs.

Le signe de la dérivée $f'(x)$ va nous donner les variations de la fonction f.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
16	$+$
$e^{-0,8x}$	$+$
$\left(1+5e^{-0,8x}\right)^2$	$+$
$f'(x)$	$+$
f	0 $\nearrow$ 4

a.3) Résolvons l'inéquation demandée :

$$f(x) > 3 \xrightarrow[\text{qui est positif}]{\times\left(1+5e^{-0,8x}\right)} 4 > 3\times\left(1+5e^{-0,8x}\right) \Leftrightarrow \frac{4}{3} > 1+5e^{-0,8x}$$

$$\Leftrightarrow 5e^{-0,8x} < \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,8x} < \frac{1}{15}$$

La fonction Ln est strictement croissante sur]0 ; +∞[.

$$\overset{\text{Ln}}{\Leftrightarrow} -0,8x < \ln\left(\frac{1}{15}\right)$$

$$\overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} 0,8x > \ln(15)$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{\ln(15)}{0,8}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $\left]\frac{5\ln(15)}{4};+\infty\right[$.

a.4) La fonction F est de la forme $F = 5\times\ln(u)$ avec
$u(x) = e^{0,8x}+5$
$u'(x) = 0,8\times e^{0,8x}$
Dérivable et positive sur ℝ

Par conséquent, la fonction F est dérivable sur ℝ et sa dérivée est donnée par :

$$F'(x) = 5\times\frac{u'}{u} = 5\times\frac{0,8\times e^{0,8x}}{e^{0,8x}+5} = \frac{\cancel{e^{0,8x}}\times 4}{\cancel{e^{0,8x}}\times\left(1+\dfrac{5}{e^{0,8x}}\right)} = \frac{4}{1+5\times e^{-0,8x}} = f(x)$$

Comme la fonction f est la dérivée de la fonction F sur ℝ, alors une primitive f est F.

➲ L'aire du domaine à calculer est égale à la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^4 = F(4)-F(0) = 5\times\ln\left(e^{3,2}+5\right) - 5\times\ln\left(e^0+5\right)$$

$$= 5\times\left[\ln\left(e^{3,2}+5\right)-\ln(6)\right] = 5\times\ln\left(\frac{e^{3,2}+5}{6}\right) \text{ unités d'aires}$$

$$= 5\times\ln\left(\frac{e^{3,2}+5}{6}\right)\times 1,4^2 \approx 15,62\text{ cm}^2$$

b.1) Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété P_n : $0 \le u_{n+1} < u_n \le 4$.

♥ Au premier rang $n=0$, la propriété P_0 est-elle vraie ?

Nous avons $u_0 = 4$ et $u_1 = \dfrac{1}{1+5e^{-3,2}} = f(4)$.

L'exponentielle $e^{-3,2}$ est un réel strictement positif. Par conséquent :

Le quotient $u_1 = \dfrac{4}{1+5e^{-3,2}} = \dfrac{\oplus}{\oplus+\oplus\times\oplus}$ est strictement positif

$$1+5e^{-3,2} > 1 \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]0;+\infty[]{\text{Inverse}} \frac{1}{1+5e^{-3,2}} < 1 \xrightarrow{\times 4} u_1 < 4$$

Nous en concluons : $0 \le u_1 < u_0 \le 4$. Donc la propriété P_0 est vraie.

♥ Le principe de récurrence ou de propagation

Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un certain entier n, c'est-à-dire :

$$0 \le u_{n+1} < u_n \le 4 \xrightarrow[\text{Croissante sur }\mathbb{R}]{f} f(0) < \underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}} < \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \le f(4)$$

Nous avons déjà prouvé que $f(4) = u_1 < 4$.

Ensuite, le terme $u_{n+2} = f(u_{n+1}) = \dfrac{4}{1+5e^{-0,8u_{n+1}}} = \dfrac{\oplus}{\oplus+\oplus\times\oplus}$ est positif.

Donc, la propriété P_{n+1} : $0 \le u_{n+2} < u_{n+1} \le 4$ est vraie.

Le principe de récurrence est établi.

Les minoration de $f(0)$ par 0 et majoration de $f(4)$ par 4 peuvent aussi se justifier en remarquant que d'après le tableau de variation de f établi lors de la question **a.2**, toute image $f(x)$ appartient à l'intervalle $]0;4[$.

b.2) La famille de propriétés (P_n) nous amène à deux conclusions :

Pour tout entier n, $u_n \geq 0 \Rightarrow$ La suite (u_n) est minorée par 0

Pour tout entier n, $u_n > u_{n+1} \Rightarrow$ La suite (u_n) est décroissante

Conclusion : la suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, converge vers un réel ℓ.

b.3) Comme la suite (u_n) est définie par récurrence au moyen de la fonction f ;
tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à $[0;4]$;
la fonction f est continue car dérivable sur $[0;4]$;
la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

alors, la limite ℓ est l'une des solutions de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;4]$.
A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice réglé au centième près pour la fonction $y = f(x) - x = 4/(1+5*\exp(-0.8*x)) - x$, on établit que la limite est encadrée par :

$1{,}95 \leq \ell \leq 1{,}96$ C'est le changement de signe de $y = f(x) - x$

Une autre stratégie possible est de calculer avec la calculatrice les premier termes de la suite (u_n) jusqu'à ce que la troncature au centième se stabilise et «ne bouge plus». On saisit alors :

4 Entrée	pour u_0
$4/(1+5*\exp(-0.8*\text{Ans}))$ Entrée	renvoie u_1
Entrée	renvoie les termes suivants $u_2, u_3, \ldots$

Petites suite d'intégrales

L'énoncé

On appelle (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_{-1}^{0} \left(1 - e^{nx}\right) \times \cos(x)\, dx$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq \int_{-1}^{0} e^{nx} \times \cos(x)\, dx \leq \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Le corrigé

1. La fonction cosinus étant positive sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, nous pouvons écrire que pour tout réel $x \in [-1;0]$, nous avons :

$$0 \leq \cos(x) \leq 1 \xrightarrow[\text{Cette exponentielle est Toujours positive}]{\times e^{nx}} 0 \leq e^{nx} \times \cos(x) \leq e^{nx}$$

En intégrant cette dernière inégalité sur l'intervalle $[-1;0]$, il vient :

$$\int_{-1}^{0} 0 \times dx \leq \int_{-1}^{0} e^{nx} \times \cos(x)\, dx \leq \int_{-1}^{0} e^{nx}$$

Calculons les deux intégrales encadrantes :

$$\int_{-1}^{0} 0 \times dx = 0$$

$$\int_{-1}^{0} e^{nx}\, dx = \left[\frac{1}{n} \times e^{nx}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{n} \times e^{n\times 0} - \frac{1}{n} \times e^{n\times(-1)} = \frac{1}{n} \times 1 - \frac{1}{n} e^{-n} = \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$$

Nous en concluons l'inégalité demandée :

$$\boxed{0 \leq \int_{-1}^{0} e^{nx} \times \cos(x)\, dx \leq \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)}$$

2. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_n = \int_{-1}^{0} \left(\cos(x) - e^{nx} \times \cos(x)\right) dx = \int_{-1}^{0} \cos(x)\, dx - \int_{-1}^{0} e^{nx} \times \cos(x)\, dx$$

Revenons à l'encadrement $0 \leq \int_{-1}^{0} e^{nx} \times \cos(x)\,dx \leq \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$ tend vers $0^+ \times \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) = 0^+ \times (1 - 0+) = 0^+$

En application du théorème des gendarmes, l'intégrale $\int_{-1}^{0} e^{nx} \times \cos(x)\,dx$ tend vers 0^+

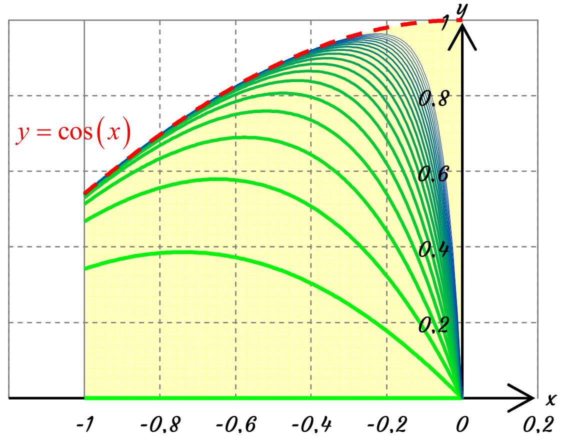
Maintenant, calculons l'intégrale :

$$\int_{-1}^{0} \cos(x)\,dx = [\sin(x)]_{-1}^{0} = \sin(0) - \sin(-1) = 0 - (-\sin(1)) = \sin(1)$$

Nous en concluons :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sin(1) - 0^+ = \sin(1)$$

Sur le graphique ci-dessous, les 21 premières courbes d'équation $y = \left(1 - e^{nx}\right) \times \cos(x)$ qui montent vers la courbe d'équation $y = \cos(x)$.



Et l'année prochaine, ce sera encore pire !

Sommaire des scandaleux exercices proposés

Un petit mot scandaleux de l'auteur

Le lecteur aura noté l'énorme différence de difficulté séparant les exercices de bac sortis à l'occasion de la session 2013 et ceux figurant dans ce recueil qui ont tous été donnés en devoir. C'est la différence qu'il existe désormais entre le nouveau «bac pour tous» et les exigences de l'enseignement supérieur auxquelles les élèves sont de moins en moins bien préparés du fait de l'affaissement des programmes et instructions officiels.
Quoique proclament les «grands esprits» qui nous dirigent, ce «bac pour tous» sans valeur intrinsèque est une escroquerie morale faite à la jeunesse française. Le travail qui n'est plus fait en terminale ne sera pas nécessairement rattrapé plus tard. Sauf éventuellement pour ceux en ayant les moyens financiers. C'est sans doute cela «l'égalité des chances».