Le mot de l'auteur

Voici la cuvée 2009-2010 des exercices d'analyse que j'ai donnés. Un «nous» serait plus exact concernant les énoncés de certains d'entre eux. Mille excuses, vénérable collègue !
Certains se demanderont ce qu'il peut y avoir «à contresens» dans ce recueil d'exercices. La réponse est sans doute rien, si ce n'est dans l'esprit. Les mathématiques sont une aventure cérébrale et non un ensemble de recettes de cuisine qu'il s'agirait de connaître par cœur sans se soucier du goût des plats réalisés.
Cette saison sera la dernière où le programme actuel de terminale S s'appliquera.
Nous allons nous endormir pour très longtemps.

Les exercices de ce volume sont classés par catégories :

La taverne de l'Irlandais
[http://www.tanopah.com]
présente

L'analyse d'une TS ...à contresens !

Le recueil des exercices donnés en devoirs de mathématiques durant la saison 2009-2010
par Jérôme ONILLON, prof. désagrégé et même pas recyclable de mathématiques

Conformité douteuse

Edition du jeudi 5 août 2010

Analyse en générale

L'une à partir de l'autre...et après

Le contexte

Voici un problème de début de terminale S des plus classiques bien qu'original. Il commence par l'étude complète d'une fonction rationnelle (limites et variations), avant de s'intéresser à des problèmes de prolongement, de continuité et de dérivabilité.

L'énoncé

La fonction φ est définie sur ℝ par :

$$\varphi(x) = x^3 - 12.x + 17$$

a) Dans ces questions, nous allons déterminer le signe de $\varphi(x)$ sur ℝ.

1. Déterminer les limites de la fonction φ aux infinis.
2. Etudier les variations de la fonction φ sur ℝ.
3. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans ℝ une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au centième près.
4. En déduire le tableau de signe de $\varphi(x)$ sur ℝ. Celui-ci pourra comporter le nombre α.

La connaissance du signe de la fonction φ nous servira lorsqu'il s'agira de déterminer les variations de la fonction f.
La fonction f est définie sur l'ensemble $]-\infty;-2[\cup]-2;1]$ par :

$$f(x) = \frac{2.x^3 - 17}{x^2 - 4}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

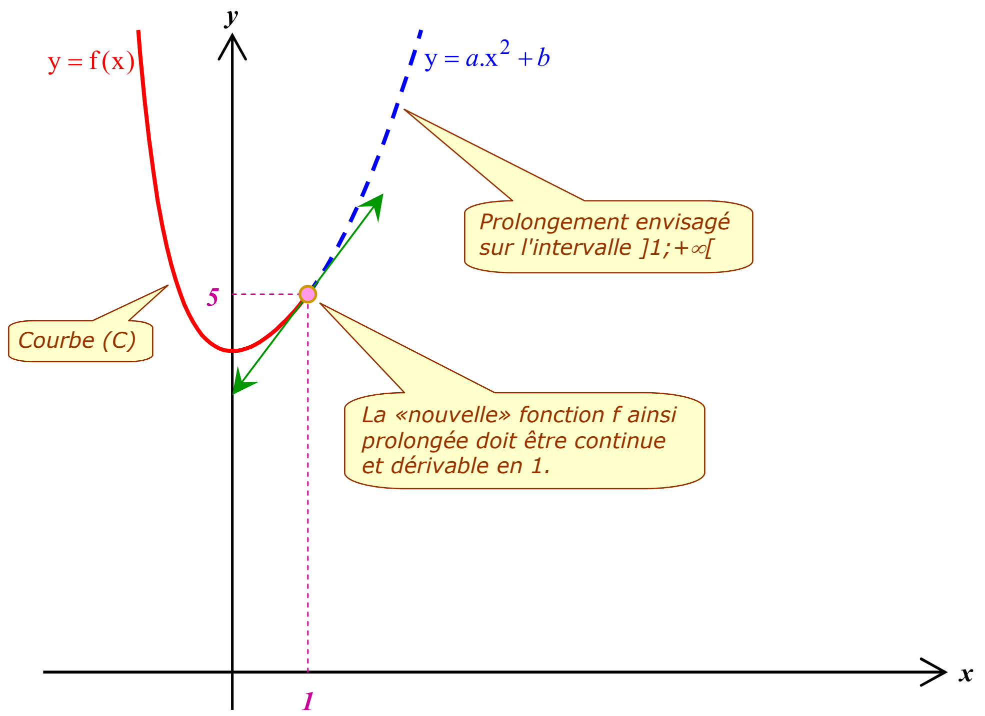
b) Dans ces questions, nous allons nous intéresser aux limites de f et aux asymptotes de la courbe (C).

1. Calculer l'image de 1 par la fonction f.
2. Déterminer les limites de f au voisinage de -2.
   On indiquera quelles sont les éventuelles conséquences graphiques de ces limites.
3. Déterminer trois coefficients réels *a*, *b* et *c* tels que pour tout réel x de l'ensemble $]-\infty;-2[\cup]-2;1]$, on ait :
$$f(x) = a.x + \frac{b.x + c}{x^2 - 4}$$
4. Démontrer que la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote Δ dont on précisera l'équation.
5. En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.
6. Etudier la position relative de la courbe (C) et de la droite Δ sur $]-\infty;-2[\cup]-2;1]$.

c) Dans ces questions, nous allons étudier les variations de la fonction f en utilisant la fonction φ.

1. Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'ensemble $]-\infty;-2[\cup]-2;1]$?
2. Démontrer que pour tout réel $x \in]-\infty;-2[\cup]-2;1]$, nous avons :
$$f'(x) = \frac{2.x \times \varphi(x)}{\left(x^2 - 4\right)^2}$$
3. En déduire les variations de la fonction f sur l'ensemble $]-\infty;-2[\cup]-2;1]$.
4. Donner une valeur approchée au centième près de $f(\alpha)$.

d) On souhaite prolonger la fonction f sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par une fonction du second degré de la forme $a.x^2 + b$ ainsi que cela est représenté sur la figure ci-après.
Déterminer deux coefficients réels *a* et *b* de telle façon que la fonction f ainsi prolongée soit continue et dérivable en $x = 1$.



Le corrigé

a.1) Aux infinis, le polynôme $\varphi(x)=x^3-12.x+17$ se comporte comme son terme dominant x^3. Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=\underline{-\infty}\qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=\underline{+\infty}$$

a.2) Parce qu'elle est une combinaison linéaire de fonctions puissances toutes dérivables sur ℝ, la fonction φ est aussi dérivable sur ℝ. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$\varphi'(x)=\left(x^3\right)'-12\times(x)'+(17)'=3.x^2-12\times1+0=3.x^2-12=\underline{3\times\left(x^2-4\right)}$$

La forme du second degré x^2-4 a deux racines évidentes qui sont -2 et 2.

Le signe de la dérivée $\varphi'(x)$ donne les variations de la fonction φ ➚

Les images de -2 et 2 par φ :

$$\varphi(-2)=(-2)^3-12\times(-2)+17=-8+24+17=\underline{33}$$

$$\varphi(2)=2^3-12\times2+17=8-24+17=\underline{1}$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
3		+		+		+	
x^2-4		+	0	−	0	+	
$\varphi'(x)$		+	0	−	0	+	
φ	$-\infty$	↗	33	↘	1	↗	$+\infty$

a.3) Comme la fonction φ est dérivable sur ℝ, alors elle y est continue.
D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

- Comme la fonction φ est strictement croissante de $]-\infty;-2[$ sur $]-\infty;33[$, <u>alors</u> 0 qui appartient à $]-\infty;33[$ a un unique antécédent α par φ dans $]-\infty;-2[$.
- Comme le minimum de la fonction φ sur l'intervalle $[-2;+\infty[$ est 1, <u>alors</u> l'équation $\varphi(x)=0$ n'a aucune solution dans l'intervalle $[-2;+\infty[$.

<u>Conclusion :</u> l'équation $\varphi(x)=0$ n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{R}=]-\infty;-2[\cup[-2;+\infty[$.
D'après la calculatrice, une valeur approchée au centième de cette solution α est $\underline{-4,03}$.

a.4) La fonction continue φ ne s'annule qu'une seule fois sur ℝ. C'est en α.
En utilisant son tableau de variation, nous en déduisons que son tableau de signe est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		−	0	+	

b.1) Calculons l'image de 1 par la fonction f.

$$f(1)=\frac{2\times1^3-17}{1^2-4}=\frac{2-17}{1-4}=\frac{-15}{-3}=\underline{5}$$

b.2) Quand x tend vers -2, le numérateur $2.x^3-17$ tend vers $2\times(-2)^3-17=\underline{-33}$.

Concernant le dénominateur x^2-4, deux cas sont à envisager car :

A gauche de -2, il tend vers 0^+.
Donc :

$$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\frac{-33}{0^+}=\underline{-\infty}$$

A droite de -2, il tend vers 0^-.
Ainsi :

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\frac{-33}{0^-}=\underline{+\infty}$$

La conséquence graphique de ces limites est que la droite verticale d'équation $x=-2$ est une asymptote à la courbe (C).

b.3) Deux méthodes permettent de décomposer la fonction rationnelle f.

La seule bonne méthode, celle par identification des coefficients de même degré

Nous recherchons trois coefficients *a*, *b* et *c* tels que pour tout réel $x \in]-\infty;-2[\cup]-2;1]$, nous ayons :

$$f(x)=a.x+\frac{b.x+c}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{2.x^3-17}{x^2-4}=\frac{a.x\times(x^2-4)+b.x+c}{x^2-4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2.x^3-17}{x^2-4}=\frac{a.x^3-4.a.x+b.x+c}{x^2-4}$$

×(x²-4)

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\times x^3++0\times x+(-17)=a\times x^3+(b-4.a)\times x+c}_{\text{Deux polynômes sont égaux si et seulement...}}$$

Comme nous travaillons sur l'ensemble]-∞ ; -2[∪]-2;1] où le dénominateur x²-4 est non nul, nous pouvons multiplier les deux membres de l'inégalité par ce facteur.

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} \text{Egalité en } x^3 & : \quad a=2 \\ \text{Egalité en } x^2 & : \quad 0=0 \\ \text{Egalité en } x & : \quad b-4.a=0 \quad \text{d'où} \quad b=4.a=8 \\ \text{Egalité en } x^0 & : \quad c=17 \end{cases}}_{\text{...si leurs coefficients de même degré le sont}}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel $x \in]-\infty;-2[\cup]-2;1]$, nous avons :

$$f(x)=2.x+\boxed{\frac{8.x-17}{x^2-4}}$$

La mauvaise méthode, celle par extraction du dénominateur de chacun des termes du numérateur

Pour tout réel $x \in]-\infty;-2[\cup]-2;1]$, nous pouvons écrire :

Combien de fois x^2-4 ?

$$f(x)=\frac{\overbrace{2.x^3}\;-17}{x^2-4}=\frac{\overbrace{2.x\times(x^2-4)}^{=2.x^3}+8.x-17}{x^2-4}=2.x\times\frac{\cancel{x^2-4}}{\cancel{x^2-4}}+\frac{8.x-17}{x^2-4}$$

$$=2.x+\boxed{\frac{8.x-17}{x^2-4}}$$

Dans le cas présent, c'est un peu plus rapide...

b.4) On appelle Δ la droite d'équation $y=2.x$.

La différence d'ordonnées entre la courbe (C) et la droite Δ pour une même abscisse x est donnée par :

$$y_{(C)}-y_\Delta=f(x)-2.x=\cancel{2.x}+\frac{8.x-17}{x^2-4}-\cancel{2.x}=\boxed{\frac{8.x-17}{x^2-4}}$$

Or, lorsque x s'en va vers $-\infty$, la fonction rationnelle $\frac{8.x-17}{x^2-4}$ se comporte comme le quotient de ses termes dominants $\frac{8.x}{x^2}=\frac{8}{x}$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to-\infty} y_{(C)}-y_\Delta=\lim_{x\to-\infty}\frac{8.x-17}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8}{x}=\frac{8}{-\infty}=\boxed{0^-}$$

<u>Conclusion :</u> en $-\infty$, la différence d'ordonnées entre (C) et Δ «devient nulle».
La droite Δ d'équation $y=2.x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b.5) Comme la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$, alors la fonction f y a même limite que la fonction $y_\Delta=2.x$. Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2.x=\boxed{-\infty}$$

b.6) La position relative de la courbe (C) vis-à-vis de la droite Δ est donnée par le signe de leur différence d'ordonnées :

$$y_{(C)}-y_\Delta=\frac{8.x-17}{x^2-4}.$$

x	$-\infty$		-2		1
$8.x-17$		$-$	|	$-$	
x^2-4		$+$	0	$-$	
$y_{(C)}-y_\Delta$		$-$	||	$+$	

<u>Conclusion :</u> sur l'intervalle $]-\infty;-2[$, la courbe (C) est au-dessous de son asymptote Δ.

Sur l'intervalle $]-2;1]$, elle est au-dessus.

c) Examinons les numérateur et dénominateur de la fonction rationnelle f.

$u(x)=2.x^3-17$
$u'(x)=2\times3.x^2-0=6.x^2$
Dérivable sur ℝ

$v(x)=x^2-4$
$v'(x)=2.x-0=2.x$
Dérivable sur ℝ et non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$

Donc la fonction $f=\frac{u}{v}$ est dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty;-2[\cup]-2;1]$.

Pour tout réel $x \in]-\infty;-2[\cup]-2;1]$, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{[v(x)]^2}=\frac{6.x^2\times(x^2-4)-2.x\times(2.x^3-17)}{(x^2-4)^2}$$

$$=\frac{6.x^4-24.x^2-4.x^4+34.x}{(x^2-4)^2}=\frac{2.x^4-24.x^2+34.x}{(x^2-4)^2}=\boxed{\frac{2.x\times\overbrace{(x^3-12.x+17)}^{\varphi(x)}}{(x^2-4)^2}}$$

Avec le résultat de la question a.4, nous connaissons les signes de tous les facteurs apparaissant dans ce quotient.

Du signe de la dérivée $f'(x)$ découlent les variations de la fonction f.

x	$-\infty$		α		-2		0		1
$2.x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x^2-4)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$4,25$	↗	5

Une valeur approchée au centième de l'image de α par f est $\dfrac{2\times(-4,03)^3-17}{(-4,03)^2-4}\approx\boxed{-12,08}$

d) Nous savons déjà que l'image de 1 par la fonction f est égal à 5.
Calculons le nombre dérivé de f à gauche de 1.

$$\underbrace{f'_g(1)}_{\text{gauche}}=\frac{2\times1^4-24\times1^2+34\times1}{(1^2-4)^2}=\frac{2-24+34}{(-3)^2}=\frac{12}{9}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

Regardons à présent ce qui se passe à droite de 1.

- **Comme la «nouvelle» fonction f est <u>continue</u> en 1, alors :**

  Quand x tend vers 1 par la droite, $a.x^2+b$ doit tendre vers 5.

  Or : $\lim\limits_{x\to1} a.x^2+b=a\times1+b=\boxed{a+b}$

  Nous en déduisons une première égalité que doivent satisfaire a et b :

  $$\boxed{a+b=5}$$

- **Comme la «nouvelle» fonction f est <u>dérivable</u> en 1, alors :**

  Le nombre dérivable à droite de 1 que nous noterons $\underbrace{f'_d(1)}_{\text{droite}}$ est égal au nombre dérivé à gauche de 1, c'est-à-dire à $f'_g(1)=\dfrac{4}{3}$.

  Or, la dérivée de la fonction $a.x^2+b$ est $2.a.x$.

  Nous en déduisons :

  $$f'_d(1)=2\times a\times1=\boxed{2.a}$$

  Et par conséquent :

  $$f'_d(1)=\frac{4}{3}\iff 2.a=\frac{4}{3}\iff a=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

  Finalement, nous obtenons b :

  $$b=5-a=5-\frac{2}{3}=\frac{15}{3}-\frac{2}{3}=\boxed{\frac{13}{3}}$$

<u>Le pourquoi du nombre dérivé à droite de 1</u>

Par définition, $f'_d(1)$ est la limite lorsque h tend vers 0 par la droite du quotient :

$$\frac{\underbrace{a.(1+h)^2+b}_{\substack{f(1+h)\\ \text{à droite de 1}}}-\underbrace{5}_{f(1)}}{h}=\frac{a.(1+2.h+h^2)+\overbrace{(5-a)}^{b}-5}{h}=\frac{\cancel{a}+2.a.h+a.h^2-\cancel{a}}{h}=\frac{\cancel{h}.(2.a+a.h)}{\cancel{h}}$$

Il vient alors :

$$f'_d(1)=\lim_{h\to0^+}\frac{a.(1+h)^2+b-5}{h}=\lim_{h\to0^+}2.a+a.h=2.a+a\times0=\boxed{2.a}$$

L'UNE À PARTIR DE L'EXPONENTIELLE

Le contexte.

Cet exercice est une étude de fonction définie à partir de l'exponentielle. Du classique de chez classique.
Dans la présentation, chaque question est suivie de son corrigé.

L'énoncé et le corrigé

La fonction f est définie sur ℝ par :

$$f(x)=x+(1-x).e^{x}$$

Partie A - Etude d'une fonction auxiliaire g

La fonction g est définie sur ℝ par :

$$g(x)=1-x.e^{x}$$

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Un résultat du cours nous enseigne :

$$\lim_{x\to-\infty} x.e^{x}=0^{-}$$

Ce qui évite la forme indéterminée $0\times\infty$.

Il vient alors :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-x.e^{x}=1-0^{-}=1$$

De l'autre côté, au voisinage de $+\infty$, il y a moins de problèmes !

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-x\times e^{x}=1-(+\infty)\times(+\infty)=1-(+\infty)=-\infty$$

2. Etudier les variations de la fonction g.

La fonction g est la différence de 1 et du produit $x\times e^{x}$.

Les fonctions $u(x)=x$, $u'(x)=1$ et $v(x)=e^{x}$, $v'(x)=e^{x}$ étant dérivables sur ℝ, leur produit l'est aussi.

Pour tout réel x, nous avons :

$$\left(x.e^{x}\right)'=(u\times v)'=u'\times v+v'\times u=1\times e^{x}+x\times e^{x}=(1+x).e^{x}$$

La fonction f est clairement dérivable sur ℝ et pour tout réel x, nous avons :

$$g'(x)=(1)'-\left(x\times e^{x}\right)'$$
$$=0-(x+1).e^{x}=(-x-1).e^{x}$$

L'exponentielle e^{x} étant toujours positive, c'est le facteur affine $-x-1$ qui donne son signe au produit $g'(x)$.

$$g(-1)=1-(-1)\times e^{-1}=1+\frac{1}{e}=\frac{e+1}{e}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		+	0	−	
e^{x}		+		+	
$g'(x)$		+	0	−	
g	1	↗	$1+e^{-1}$	↘	$-\infty$

3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans ℝ.

Résoudre cette équation, c'est se poser la question du nombre d'antécédents de 0 par g.

Comme la fonction g est dérivable sur ℝ, alors elle est continue sur ce même ensemble.

Vu le tableau de variation de g que nous venons de dresser, deux cas sont à traiter :

✈ Comme :

L'image de l'intervalle $]-\infty;-1]$ par g est l'intervalle $\left]1;1+\frac{1}{e}\right]$

0 n'appartient pas à l'intervalle $\left]1;1+\frac{1}{e}\right]$

alors l'équation $g(x)=0$ n'a aucune solution dans $]-\infty;-1]$.

✈ Comme :

La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

L'image de l'intervalle $]-1;+\infty[$ par g est l'intervalle $\left]-\infty;1+\frac{1}{e}\right[$

0 appartient à l'intervalle $\left]-\infty;1+\frac{1}{e}\right[$

C'est une version particulière du théorème des valeurs intermédiaires.

alors, en application du théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ a une unique solution dans l'intervalle $]-1;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α dans ℝ$=]-\infty;-1]\cup]-1;+\infty[$.

Un encadrement au centième de cette solution α est :

$$0,56 \le \alpha \le 0,57 .$$

4. En déduire le signe de g sur ℝ.

Le tableau de variation de la fonction g vue lors de la question A.2 et l'unique solution α de l'équation $g(x)=0$ dégotée lors de la question A.3 nous permettent de dresser le tableau de signe de $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g(x)		+	0	−	

Partie B - Etude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

De prime abord, nous avons en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+(1-x).e^x$$
$$= (-\infty) + \underbrace{(+\infty)\times 0}_{\text{Forme indéterminée}} = \text{Forme indéterminée}$$

En fait, c'est à peine une petite contrariété car il suffit juste de développer le produit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+e^x-x.e^x$$
$$=(-\infty)+0^+-0^- = -\infty$$

Comme c'est x qui fait la tendance, alors la droite d'équation y=x est une asymptote à la courbe de f au voisinage de -∞.

A présent, voyons ce qui se passe en $+\infty$. De prime abord, nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+(1-x).e^x$$
$$=(+\infty)+(-\infty)\times(+\infty)=(+\infty)+(-\infty)=\text{Forme indéterminée}$$

L'indétermination vient de l'opposition en $+\infty$ de l'exponentielle e^x et de x.
Pour peu que l'on connaissance son cours, celle-ci se lève sans problème. En effet :

$$f(x)=x+(1-x).e^x = e^x\times\left[\frac{x}{e^x}+(1-x)\right]$$

Le truc consiste à tout factoriser par le terme semblant le plus fort : e^x

Quand x tend vers $+\infty$, le quotient $\frac{e^x}{x}$ va vers $+\infty$ et son inverse $\frac{x}{e^x}$ vers $\frac{1}{+\infty}=0^+$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\times\left[\frac{x}{e^x}+(1-x)\right]=(+\infty)\times\left[0^++(-\infty)\right]=(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$$

1.X Exprimer $f(\alpha)$ en fonction de α

La question que nul n'a osé poser.

Nous savons juste que α est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$. Par conséquent :

$$g(\alpha)=0 \Leftrightarrow 1-\alpha.e^\alpha=0 \Leftrightarrow \underbrace{1=\alpha.e^\alpha \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{e^\alpha} \Leftrightarrow e^\alpha=\frac{1}{\alpha}}_{\text{Bref, } \alpha \text{ et } e^\alpha \text{ sont les inverses l'un de l'autre !}}$$

Il vient alors :

$$f(\alpha)=\alpha+(1-\alpha).e^\alpha=\alpha+e^\alpha-\alpha.e^\alpha=\alpha+\frac{1}{\alpha}-1=\frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha}$$

2. Etudier les variations de la fonction f sur ℝ.

Comme les fonctions $u(x)=1-x$, $u'(x)=-1$ et $v(x)=e^x$, $v'(x)=e^x$ sont dérivables sur ℝ, alors il en va de même pour leur produit. Pour tout réel x, nous avons :

$$\underbrace{\left((1-x).e^x\right)'}_{u\times v}=\underbrace{(-1)\times e^x+(1-x)\times e^x}_{u'\times v+v'\times u}=-\cancel{e^x}+\cancel{e^x}+x.e^x=x.e^x$$

La fonction f qui est la somme de ce produit avec x est aussi dérivable sur ℝ et il vient :

$$f'(x)=(x)'+\left[(1-x).e^x\right]'=1+x.e^x=g(x)$$

Tiens donc...

La partie A nous a livré le signe de $g(x)$. Nous pouvons donc en déduire le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)=g(x)$		+	0	−	
f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

EXPONENTIELLE DANS LES BRAS DE LN

Le contexte

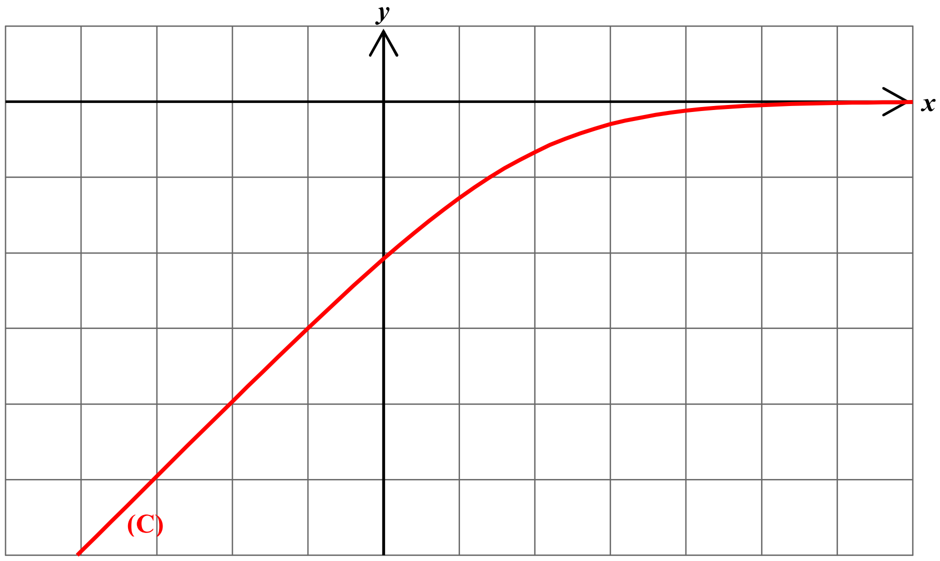
Dans cet exercice, on étudie (limites et variations) une fonction combinant logarithme népérien et exponentielle...et bien sûr on utilise leurs propriétés !

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x - \ln\left(7 + e^x\right)$$

Sa courbe représentative (C) a été tracée sur le graphique ci-dessous où une unité graphique vaut un centimètre.



a) Cette question est une restitution organisée des connaissances (question de cours).
On appelle φ la fonction définie sur ℝ par :

$$\varphi(x) = \ln\left(e^x\right)$$

Démontrer que pour tout réel x, nous avons :

$$\varphi(x) = x$$

b) Dans ces questions, nous nous intéressons à la limite de la fonction f en $+\infty$.

1. Démontrer que pour tout réel x, on a :
$$f(x) = -\ln\left(1 + 7.e^{-x}\right)$$
2. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Quelle est la conséquence graphique de cette limite ?

c) Dans ces questions, nous nous intéressons au comportement de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

1. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - \ln(7)$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
2. Etablir que la courbe (C) est toujours au-dessous de son asymptote Δ.

d) Dans ces questions, nous allons nous intéresser aux variations de la fonction f sur ℝ.

1. Calculer la dérivée de la fonction f.
2. En déduire les variations de la fonction.
3. Exprimer $f(0)$ en fonction de $\ln(2)$.

Le corrigé

a) Calculons la dérivée de la fonction φ qui est de la forme $\ln(u)$ où :

$$\begin{array}{|l} u(x) = e^x \\ u'(x) = e^x \\ \text{u est dérivable et strictement positive sur } \mathbb{R} \end{array}$$

Donc la fonction $\varphi = \ln(u)$ est dérivable sur ℝ et pour tout réel x, nous avons :

$$\varphi'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 1$$

Ainsi la fonction φ est-elle une primitive de 1 sur ℝ. Par conséquent, φ est de la forme :

$$\varphi(x) = x + \mathit{Constante}$$

Reste à connaître la valeur de la *constante*. C'est l'image de 0 qui va nous la donner.
Par définition :

$$\varphi(0) = \ln\left(e^0\right) = \ln(1) = 0$$

Avec l'autre écriture de $\varphi(x)$, il vient alors :

$$\varphi(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 + \mathit{Constante} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathit{Constante} = 0$$

Conclusion : pour tout réel x, nous venons d'établir :

$$\varphi(x)=\underbrace{\ln\left(e^x\right)=x}_{\text{La fonction logarithme népérien est la réciproque de la fonction exponentielle.}}$$

b.1) Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

ln(a×b)=ln(a)+ln(b)

$$\begin{aligned}f(x)&=x-\ln\left(7+e^x\right)\\&=x-\ln\left(e^x\times\left(\frac{7}{e^x}+1\right)\right)=x-\left[\ln\left(e^x\right)+\ln\left(\frac{7}{e^x}+1\right)\right]\\&=x-x-\ln\left(1+\frac{7}{e^x}\right)=\boxed{-\ln\left(1+7.e^{-x}\right)}\end{aligned}$$

b.2) Si nous n'avions eu que l'écriture initiale de $f(x)=x-\ln\left(7+e^x\right)$ pour déterminer sa limite en $+\infty$, nous aurions abouti à une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.

Mais avec la nouvelle écriture de $f(x)$ où la variable x n'apparait qu'une seule fois, les choses vont être beaucoup plus simples.

En effet, quand x tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty$
donc e^{-x} tend vers 0
donc $1+7.e^{-x}$ tend vers $1+7\times0=1$
donc $\ln\left(1+7.e^{-x}\right)$ tend vers $\ln(1)=0$

Car la fonction ln est continue en 1

Nous en concluons :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}-\ln\left(1+7.e^{-x}\right)=-0=\boxed{0}$$

Conséquence graphique : la droite horizontale d'équation $y=0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c.1) Déterminons la limite en $-\infty$ de la différence d'ordonnées entre la courbe (C) et la droite Δ pour une même abscisse x :

$$\begin{aligned}y_{(C)}-y_\Delta&=f(x)-\left(x-\ln(7)\right)=\cancel{x}-\ln\left(7+e^x\right)-\cancel{x}+\ln(7)\\&=\ln(7)-\ln\left(7+e^x\right)=\boxed{\ln\left(\frac{7}{7+e^x}\right)}\end{aligned}$$

ln(a/b)=ln(a)-ln(b)

Or, quand x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0
donc $7+e^x$ tend vers 7
donc $\dfrac{7}{7+e^x}$ tend vers $\dfrac{7}{7}=1$
donc $\ln\left(\dfrac{7}{7+e^x}\right)$ tend vers $\ln(1)=0$

Car la fonction ln est continue en 1

Conclusion : comme $\lim\limits_{x\to-\infty}y_{(C)}-y_\Delta=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{7}{7+e^x}\right)=\boxed{0}$

alors la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

c.2) Une exponentielle étant toujours positive, nous pouvons écrire que pour tout réel x :

$$7<7+e^x\Rightarrow\underbrace{\ln(7)<\ln\left(7+e^x\right)}_{\text{Ln est strictement croissante sur }]0;+\infty[}\Rightarrow\underbrace{\ln(7)-\ln\left(7+e^x\right)}_{y_{(C)}-y_\Delta}<0$$

Conclusion : comme leur différence d'ordonnées $y_{(C)}-y_\Delta$ est toujours négative, alors la courbe (C) est toujours au-dessous de la droite Δ.

d.1) Comme :
$u(x)=7+e^x$ donc $u'(x)=e^x$
u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

alors la fonction $\ln(u)=\ln\left(7+e^x\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\left(\ln\left(7+e^x\right)\right)'=\frac{u'}{u}=\frac{e^x}{7+e^x}.$$

Pour la même raison, la fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et il vient :

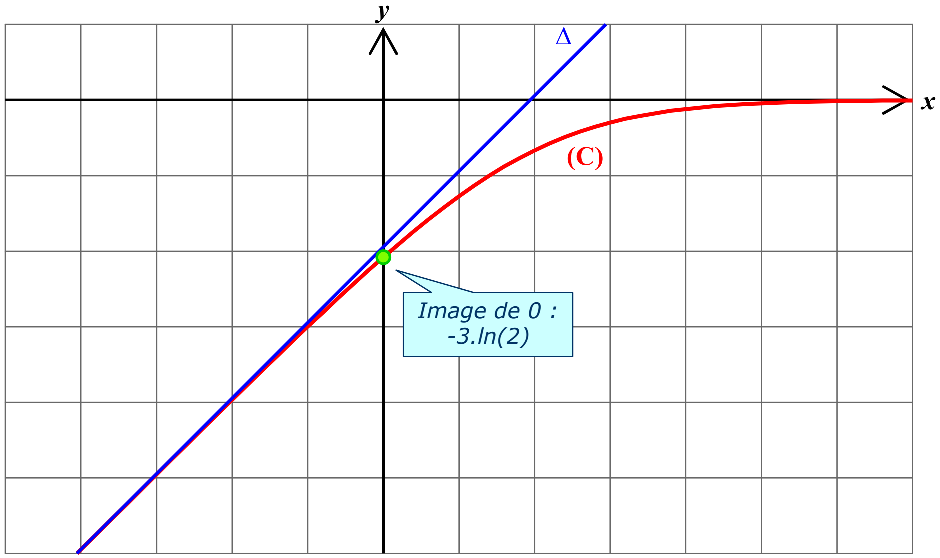
$$\begin{aligned}f'(x)&=1-\frac{e^x}{7+e^x}\\&=\frac{\left(7+e^x\right)-e^x}{7+e^x}=\frac{7+\cancel{e^x}-\cancel{e^x}}{7+e^x}=\boxed{\frac{7}{7+e^x}}\end{aligned}$$

d.2) Comme l'exponentielle e^x est toujours positive, alors la dérivée $f'(x)$ est le quotient de deux quantités positives. Le tableau de variation de f est celui-ci ↗

x	$-\infty$ $+\infty$
7	+
$7+e^x$	+
$f'(x)$	+
f	$-\infty$ ↗ 0

d.3) Exprimons l'image de 0 par f en fonction de $\ln(2)$

$$f(0) = 0 - \ln\left(7 + e^{0}\right) = -\ln(7+1) = -\ln(8) = -\ln\left(2^{3}\right) = \underline{-3 \times \ln(2)}$$



EXPONENTIELLE DANS LES BRAS DE LN...BIS

Le contexe

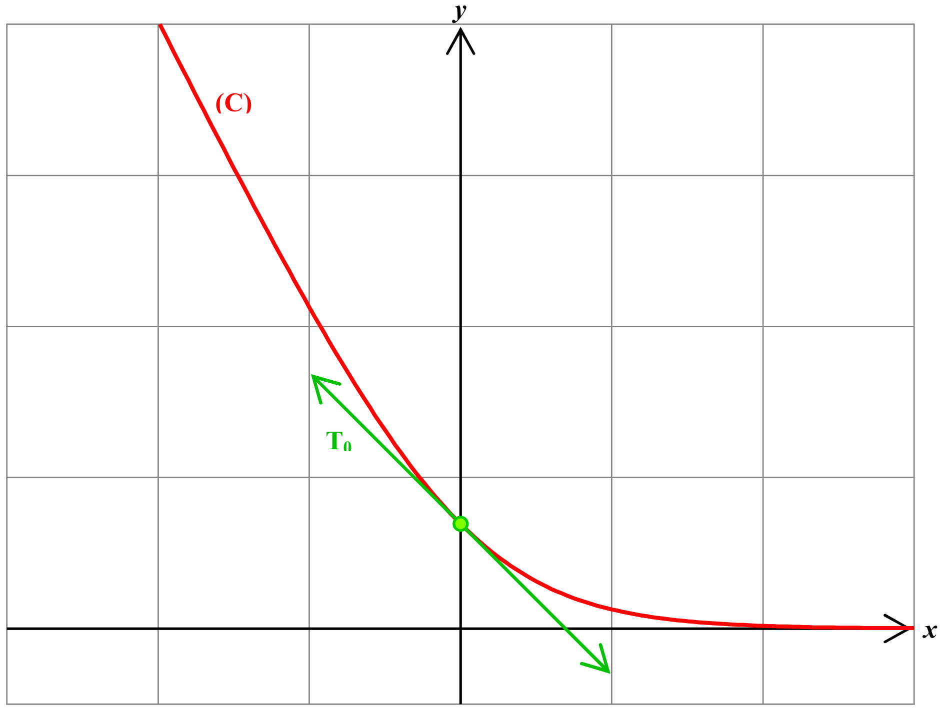
Le présent exercice reprend toutes les ficelles du précédent...mais avec beaucoup moins d'indications.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{-2.x}\right)$$

Sa courbe représentative (C) a été tracée ci-dessous accompagnée de la tangente T_0 :



a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Quelle est la possible et éventuelle conséquence graphique de cette limite ?

b) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2.x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

En déduire la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ.

c) Calculer la dérivée de la fonction f. On justifiera la dérivabilité de la fonction.
Déterminer les variations de la fonction f.

d) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0.

Le corrigé

a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ ne pose guère de difficultés.

Quand x tend vers $+\infty$, $-2.x$ tend vers $-\infty$
donc $e^{-2.x}$ tend vers 0
donc $1+e^{-2x}$ tend vers $1+0=1$
donc $\ln\left(1+e^{-2x}\right)$ tend vers $\ln(1)=0$

Un grand merci à la continuité de la fonction ln en 1.

Conséquence graphique : comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, alors la droite d'équation $y=0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote (horizontale) à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$ ...ainsi que le laisse présager le graphique.

b) Déterminons la limite en $-\infty$ de la différence d'ordonnées existant entre la courbe (C) et la droite Δ pour une même abscisse x :

$$\begin{aligned} y_{(C)}-y_{\Delta} &= f(x)-(-2.x) \\ &= \ln\left(1+e^{-2.x}\right)+2.x \\ &= \ln\left(1+e^{-2.x}\right)+\ln\left(e^{2.x}\right) \\ &= \ln\left[\left(1+e^{-2.x}\right)\times\left(e^{2.x}\right)\right]=\ln\left[e^{2.x}+e^{-2.x}.e^{2.x}\right]=\ln\left(e^{2.x}+1\right) \end{aligned}$$

Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont les réciproques l'une de l'autre Pour tout rél a, nous avons : $a=\ln(e^a)$

L'inverse de l'exponentielle e^a est e^{-a}

$\ln(a)+\ln(b)=\ln(a\times b)$

Déterminons la limite en $-\infty$ de ce dernier logarithme.

Quand x tend vers $-\infty$, $2.x$ tend vers $-\infty$
donc $e^{2.x}$ tend vers 0
donc $e^{-2x}+1$ tend vers $0+1=1$
donc $\ln\left(e^{2x}+1\right)$ tend vers $\ln(1)=0$

Encore la continuité de ln en 1 !

Conclusion : comme $\lim\limits_{x\to-\infty} y_{(C)}-y_{\Delta}=0$, alors la droite Δ d'équation $y=-2.x$ est une asymptote (oblique) à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$. Ce que laissait encore présager le graphique !

➲ Pour déterminer la position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote Δ, nous devons déterminer le signe de leur différence d'ordonnées $y_{(C)}-y_{\Delta}=\ln\left(e^{2.x}+1\right)$.

D'abord, remarquons que l'exponentielle $e^{2.x}$ est toujours strictement positive quelque soit la valeur de x.
Il vient alors pour tout réel x :

$$e^{2.x}>0 \xrightarrow{+1} \underbrace{e^{2.x}+1>1}_{\text{Deux quantités positives}} \xrightarrow[\text{Strictement croissante sur }]0;+\infty[]{\ln} \ln\left(e^{2.x}+1\right)>\ln(1)=0$$

Conclusion : comme la différence d'ordonnées $y_{(C)}-y_{\Delta}=\ln\left(e^{2.x}+1\right)$ est toujours strictement positive, alors la courbe (C) est toujours au-dessus de son asymptote Δ.

c) La fonction f est une fonction gigogne, c'est-à-dire qu'elle comporte «plusieurs étages» :

- ❤ D'abord, comme la fonction $u(x)=-2.x$ est dérivable sur ℝ, $u'(x)=-2$

  alors la fonction $e^{-2.x}=e^u$ et aussi dérivable sur ℝ et sa dérivée est :

  $$\left(e^{-2.x}\right)'=\left(e^u\right)'=u'\times e^u=-2.e^{-2.x}$$

  Somme de 1 et d'une exponentielle, deux termes strictement positifs...

- ❤ Puis, la fonction $u(x)=1+e^{-2.x}$ étant dérivable et strictement positive sur ℝ, $u'(x)=-2.e^{-2.x}$

  la fonction $f(x)=\ln\left(1+e^{-2.x}\right)=\ln(u)$ est dérivable sur ℝ et sa dérivée est :

  $$f'(x)=\frac{u'}{u}=\frac{-2.e^{-2.x}}{1+e^{-2.x}}$$

Connaissant les signes de tous les facteurs composant ce quotient, nous pouvons dresser le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$.
Ce qui nous donne le tableau de variation de f ci-après 🡻

Du fait que la droite Δ est l'asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$, nous avons :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} y_\Delta = \lim_{x\to-\infty} -2.x = +\infty$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
-2	$-$
$e^{-2.x}$	$+$
$1+e^{-2.x}$	$+$
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty$ $\searrow$ 0

d) D'après une formule du cours, l'équation réduite de la tangente T_0 est de la forme :

$$y = f'(0).(x-0)+f(0)$$

Aussi, calculons :

- L'image de f en 0 : $f(0) = \ln\left(1+e^{-2\times0}\right) = \ln\left(1+e^{0}\right) = \ln(1+1) = \ln(2)$
- Le nombre dérivé de f en 0 : $f'(0) = \dfrac{-2\times e^{-2\times0}}{1+e^{-2\times0}} = \dfrac{-2\times1}{1+1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Nous en concluons que l'équation réduite de la tangente T_0 est :

$$y = -x+\ln(2)$$

EXPONENTIELLE VS CARRÉ

Le contexte

Une étude de fonction où il est aussi question de croissances comparées entre les fonctions exponentielle et carré.

L'énoncé

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 3.x^2}{2.e^x + x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Pourquoi peut-on affirmer que la somme $2.e^x + x^2$ n'est jamais nulle sur $\mathbb{R}$?

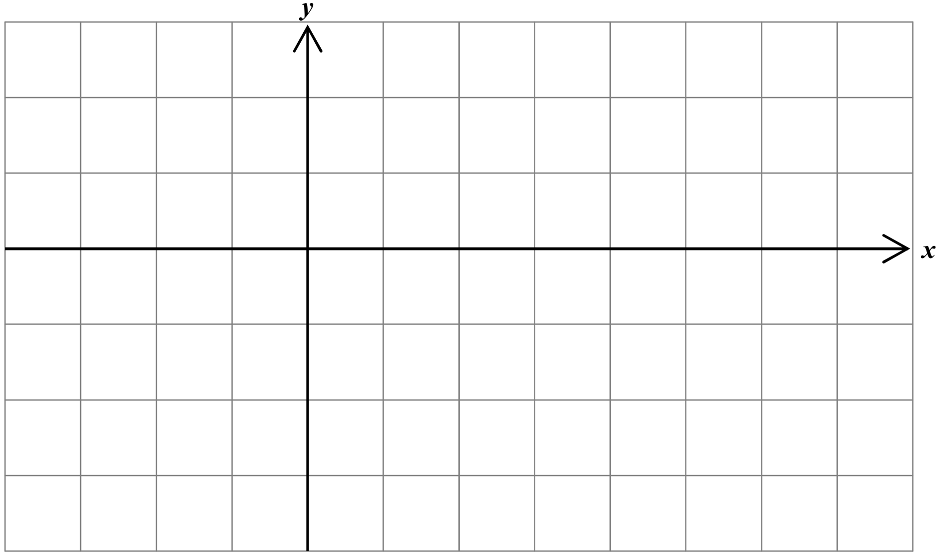
b) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
Quelles sont les éventuelles conséquences graphiques de ces deux limites ?

c) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{7.x.(x-2).e^x}{\left(2.e^x + x^2\right)^2}$$

Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction f. On calculera les valeurs des extrema locaux de la fonction f.

d) En admettant qu'une valeur approchée de $f(2)$ est $-0,25$, tracer une esquisse de la courbe (C) ainsi que ses éventuelles asymptotes vues sur le graphique ci-après où une unité vaut un centimètre.



Le corrigé

a) Le premier terme $2.e^x$ est toujours strictement positif car c'est une exponentielle.
Le second terme x^2 est toujours positif ou nul car c'est un carré.
Au final, la somme $2.e^x + x^2$ est toujours strictement positive donc n'est jamais nulle.
Et c'est parce que son dénominateur ne s'annule jamais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminons la limite de f en $-\infty$.
De prime abord :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 3.x^2}{2.e^x + x^2} = \frac{0^+ - (+\infty)}{0^+ + (+\infty)} = \frac{-\infty}{+\infty} = \text{Forme indéterminée}$$

Pour lever cette dernière, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur du quotient par les termes qui semblent faire la tendance en $-\infty$, j'ai nommé les x^2.
Pour tout réel non nul x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{e^x - 3.x^2}{2.e^x + x^2} = \frac{\cancel{x^2}.\left(\frac{e^x}{x^2} - 3\right)}{\cancel{x^2}.\left(2.\frac{e^x}{x^2} + 1\right)} = \frac{\frac{e^x}{x^2} - 3}{2.\frac{e^x}{x^2} + 1}$$

Or :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{0^+}{+\infty} = 0^+ \times \frac{1}{+\infty} = 0^+ \times 0^+ = 0^+$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2} - 3}{2.\frac{e^x}{x^2} + 1} = \frac{0^+ - 3}{2 \times 0^+ + 1} = \frac{-3}{1} = -3$$

Conséquence graphique : la droite horizontale d'équation $y = -3$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

➲ Déterminons la limite de f en $+\infty$.
De prime abord, nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 3.x^2}{2.e^x + x^2} = \frac{(+\infty) - (+\infty)}{(+\infty) + (+\infty)} = \frac{\text{Forme indéterminée}}{+\infty} = \text{Super bof !}$$

Il apparaît qu'en $+\infty$, ce sont vraisemblablement les exponentielles e^x qui font la tendance.
Aussi, factorisons les numérateur et dénominateur de $f(x)$ par e^x.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{e^x - 3.x^2}{2.e^x + x^2} = \frac{\cancel{e^x}.\left(1 - 3.\frac{x^2}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}.\left(2 + \frac{x^2}{e^x}\right)} = \frac{1 - 3.\frac{x^2}{e^x}}{2 + \frac{x^2}{e^x}}$$

Or :

$$\text{Comme} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - 3.\frac{x^2}{e^x}}{2 + \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1 - 3 \times 0^+}{2 + 0^+} = \frac{1}{2}$$

Conséquence graphique : la droite horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c) Comme :

$u(x) = e^x - 3.x^2$
$u'(x) = e^x - 6.x$
u est dérivable sur $\mathbb{R}$

et

$v(x) = 2.e^x + x^2$
$v'(x) = 2.e^x + 2.x$
v est dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$

alors leur quotient $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = \frac{u' \times v - v' \times u}{[v]^2} = \frac{\left(e^x - 6.x\right)\times\left(2.e^x + x^2\right) - \left(2.e^x + 2.x\right)\times\left(e^x - 3.x^2\right)}{\left(2.e^x + x^2\right)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2.e^{2.x}} + x^2.e^x - 12.x.e^x - \cancel{6.x^3} - \cancel{2.e^{2.x}} + 6.x^2.e^x - 2.x.e^x + \cancel{6.x^3}}{\left(2.e^x + x^2\right)^2}$$

$$= \frac{\overbrace{7.x^2.e^x - 14.x.e^x}^{\text{Facteur commun } e^x}}{\left(2.e^x + x^2\right)^2} = \frac{e^x.\overbrace{\left(7.x^2 - 14.x\right)}^{\text{Facteur commun } 7.x}}{\left(2.e^x + x^2\right)^2} = \boxed{\frac{e^x.7.x.(x-2)}{\left(2.e^x + x^2\right)^2}}$$

OUF !

Connaissant les signes de tous les facteurs apparaissant dans ce quotient, nous en déduisons le signe de la dérivée $f'(x)$ et les variations de la fonction f ➔

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$	
$7.x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(2.e^x + x^2\right)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-3	↗	$1/2$	↘	$f(2)$	↗	$1/2$

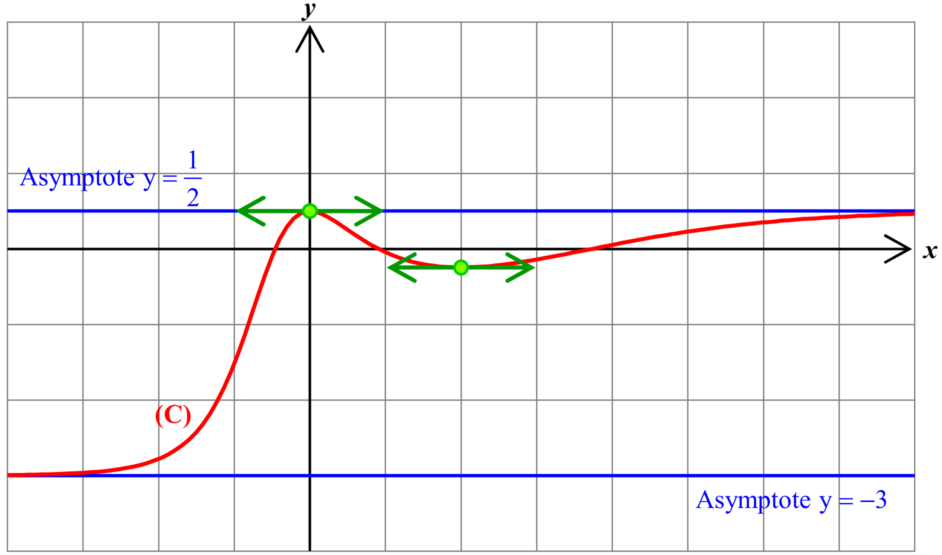
Calculons les images de 0 et 2 par la fonction f :

$$f(0) = \frac{e^0 - 3 \times 0^2}{2.e^0 + 0^2} = \frac{1-0}{2+0} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$f(2) = \frac{e^2 - 3 \times 2^2}{2.e^2 + 2^2} = \boxed{\frac{e^2 - 12}{2.e^2 + 4}}$$

On ne peut pas faire mieux !

c) La courbe (C) accompagnée de ses deux asymptotes et de ses deux tangentes horizontales en 0 et 2 est tracée ci-dessous.



Exponentielle dans les bras de ln..ter

Le contexte

Un exercice dans la lignée des deux opus éponymes précédents : l'étude d'une fonction s'appuyant sur les fonctions logarithme népérien et exponentielle.
Une fois n'est pas coutume, chaque question est suivie de son corrigé.

L'énoncé et le corrigé

La fonction f est définie sur ℝ par :

$$f(x)=\ln\left(1+e^{-3.x}\right)+x$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et montrer que la courbe (C) admet en $+\infty$ une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.

D'abord, quand x tend vers $+\infty$, $-3.x$ tend vers $-\infty$
donc $e^{-3.x}$ tend vers 0
donc $1+e^{-3x}$ tend vers $1+0=1$
donc $\ln\left(1+e^{-3x}\right)$ tend vers $\ln(1)=0$

Car la fonction ln est continue en 1.

Nous en concluons :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-3.x}\right)+x=0+(+\infty)=+\infty$$

Au vu de ce qui vient d'être fait, il apparaît clairement que la droite Δ d'équation $y=x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. En effet, nous avons bien :

$$\lim_{x\to+\infty} y_{(C)}-y_{\Delta}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\ln\left(1+e^{-3.x}\right)+\cancel{x}}_{f(x)}-\cancel{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-3.x}\right)=0$$

2. Montrer que pour tout réel x, nous avons :

$$f(x)=\ln\left(e^{3.x}+1\right)-2.x$$

Partons du membre de gauche pour établir cette égalité. Pour tout réel x, nous avons :

$$f(x)=\ln\left(1+e^{-3.x}\right)+x$$

ln(a)+ln(b)=ln(a×b) $e^a\times e^b=e^{a+b}$

$$=\ln\left(1+e^{-3.x}\right)+\ln\left(e^x\right)=\ln\left[\left(1+e^{-3.x}\right)\times e^x\right]=\ln\left(e^x+e^{-3.x+x}\right)=\ln\left(e^x+e^{-2.x}\right)$$

Nous voici bloqués. Essayons de modifier l'écriture du membre de droite.

Pour tout réel x, nous avons de l'autre côté :

$$\ln\left(e^{3.x}+1\right)-2.x=\ln\left(e^{3.x}+1\right)-\ln\left(e^{2.x}\right)$$

ln(a)-ln(b)=ln(a/b)

$$=\ln\left[\frac{e^{3.x}+1}{e^{2.x}}\right]=\ln\left[\frac{e^{3.x}}{e^{2.x}}+\frac{1}{e^{2.x}}\right]$$

$e^a/e^b=e^{a-b}$

$$=\ln\left[e^{3.x-2.x}+e^{-2.x}\right]=\ln\left[e^x+e^{-2.x}\right]$$

<u>Conclusion :</u> nous venons d'établir que pour tout réel x :

$$f(x)=\ln\left(e^{3.x}+1\right)-2.x$$

3. En déduire la limite de f en $-\infty$.

Si nous n'avions eu que la forme initiale de $f(x)$, nous aurions abouti à une forme indéterminée. En effet :

$$\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\ln\left(1+e^{-3.x}\right)+x}_{f(x)}=\ln\left(1+e^{+\infty}\right)+(-\infty)=(+\infty)+(-\infty)=\text{Forme indéterminée}$$

Heureusement, la question **2** nous a apportée une nouvelle écriture de $f(x)$.

Quand x tend vers $-\infty$, $3.x$ tend vers $-\infty$
donc $e^{3.x}$ tend vers 0
donc $e^{3x}+1$ tend vers $1+0=1$
donc $\ln\left(e^{3x}+1\right)$ tend vers $\ln(1)=0$

Toujours la continuité de ln en 1.
Et aussi le même truc : le logarithme tend vers 0

Nous en concluons :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^{3.x}+1\right)-2.x=0-(-\infty)=+\infty$$

<u>Epilogue :</u> à l'instar de ce qui a été vu en $+\infty$ lors de la question **1**, il apparaît clairement la droite ***d*** d'équation $y=-2.x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

4.a. Résoudre dans ℝ l'inéquation $e^{3.x}-2>0$

b. Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x)=\dfrac{e^{3.x}-2}{e^{3.x}+1}$

c. En déduire les variations de la fonction f.

a. Résolvons dans ℝ l'inéquation proposée :

$$e^{3.x}-2>0 \Leftrightarrow e^{3.x}>2 \Leftrightarrow \underbrace{3.x>\ln(2)}_{\text{Ln est strictement croissante sur }]0;+\infty[.} \Leftrightarrow x>\frac{\ln(2)}{3}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{3.x}-2>0$ est :

$$S=\left]\frac{\ln(2)}{3};+\infty\right[$$

On déduit de la résolution de cette inéquation le signe de la différence $e^{3.x}-2$.

x	$-\infty$		$\frac{\ln(2)}{3}$		$+\infty$
$e^{3.x}-2$		$-$	0	$+$	

b. Pour calculer la dérivée de f, nous allons partir de l'écriture de la question **2**.

D'abord, la fonction $u(x)=3.x$, $u'(x)=3$ étant dérivable sur ℝ, la fonction $e^{3.x}=e^{u}$ l'est aussi.

Nous avons :

$$\left(e^{3.x}\right)'=\left(e^{u}\right)'=u'\times e^{u}=3.e^{3.x}$$

Ce v est la somme de deux réels positifs : 1 et une exponentielle

Puis, comme la fonction $v(x)=e^{3.x}+1$, $v'(x)=3.e^{3.x}+0$ est dérivable et strictement positive sur ℝ,

alors la fonction $\ln\left(e^{3.x}+1\right)=\ln(v)$ est dérivable sur ℝ et sa dérivée est :

$$\left[\ln\left(e^{3.x}+1\right)\right]'=\frac{v'}{v}=\frac{3.e^{3.x}}{e^{3.x}+1}$$

Et comme la fonction $-2.x$ est aussi dérivable sur ℝ, alors f l'est tout autant et :

$$f'(x)=\left[\ln\left(e^{3.x}+1\right)-2.x\right]'=\frac{3.e^{3.x}}{e^{3.x}+1}-2=\frac{3.e^{3.x}-2.\left(e^{3.x}+1\right)}{e^{3.x}+1}=\frac{e^{3.x}-2}{e^{3.x}+1}$$

c. Connaissant les signes des numérateur et dénominateur du quotient $f'(x)$, on en déduit facilement les variations de la fonction f.

Calculons l'image de ln(2)/3 par f :

$$f\left(\frac{\ln(2)}{3}\right)=\ln\left(e^{\ln(2)}+1\right)-2\times\frac{\ln(2)}{3}$$
$$=\ln(2+1)-\frac{2}{3}.\ln(2)$$
$$=\ln(3)-\frac{2}{3}.\ln(2)$$
$$=\frac{1}{3}.\ln\left(3^3\right)-\frac{1}{3}.\ln\left(2^2\right)$$
$$=\frac{1}{3}.\ln\left(\frac{27}{4}\right)$$

x	$-\infty$		$\frac{\ln(2)}{3}$		$+\infty$
$e^{3.x}-2$		$-$	0	$+$	
$e^{3.x}+1$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\ln(2)/3)$	↗	$+\infty$

5. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

L'équation réduite de la tangente T_0 est de la forme :

$$y=f'(0).(x-0)+f(0)$$

Calculons les image et nombre dérivé de 0 par la fonction f :

✈ $f(0)=\ln\left(e^{3\times0}+1\right)-2\times0=\ln\left(e^{0}+1\right)-0=\ln(1+1)=\ln(2)$

✈ $f'(0)=\dfrac{e^{3\times0}-2}{e^{3\times0}+1}=\dfrac{e^{0}-2}{e^{0}+1}=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$

Conclusion : l'équation réduite de la tangente T_0 est : $y=-\dfrac{1}{2}.x+\ln(2)$

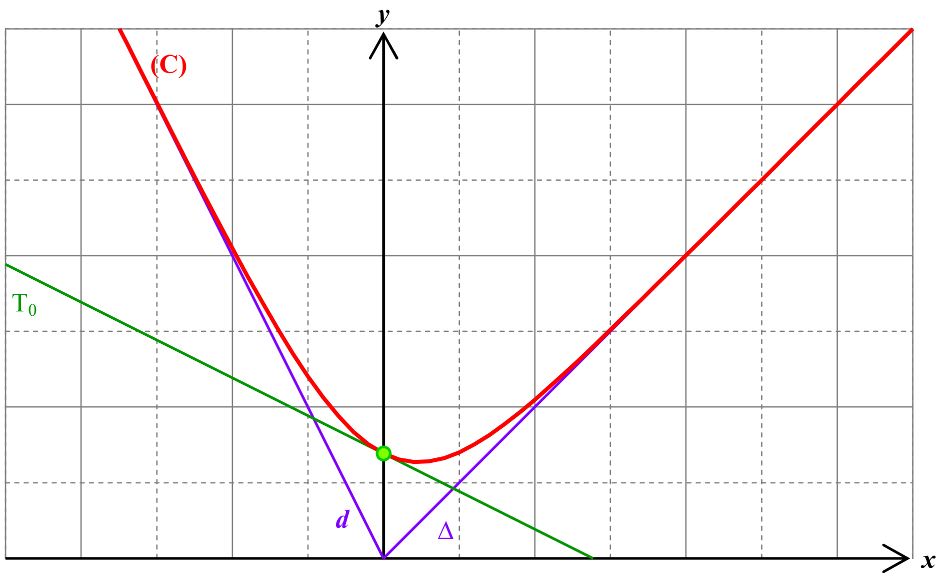
6. Soit F la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $F(0)=2$.
Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est la dérivée sur $\mathbb{R}$ de sa primitive F.
Aussi la question qui se pose est de savoir quel est le signe de $F'(x)=f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

D'après son tableau de variation, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est égal à $\frac{1}{3}\times\ln\left(\frac{27}{4}\right)$. Or :

$$\frac{27}{4}>1 \Rightarrow \overbrace{\ln\left(\frac{27}{4}\right)>\ln(1)=0}^{\text{Ln est strictement croissante sur }]0;+\infty[} \Rightarrow \frac{1}{3}\times\ln\left(\frac{27}{4}\right) \text{ est positif}$$

Conclusion : comme sa dérivée f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors la primitive F est strictement croissante sur ce même ensemble.



Trop nulles !

Le contexte

Un exercice assez technique sur la continuité et la dérivabilité d'une fonction définie avec du logarithme népérien d'un côté et de l'exponentielle de l'autre.

L'énoncé

On rappelle les deux définitions suivantes où f est une fonction définie au voisinage d'un réel a.

☑ Dire que la fonction f est continue en a signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)=f(a)$

☑ Dire que la fonction f est dérivable en a signifie que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

De plus, il a été démontré que pour tout réel $x\in\left]-\infty;0\right[$, nous avions :

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\leq e^x\leq 1+x+\frac{x^2}{2}$$

Note : ce résultat est admis et n'a pas à être redémontré.

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x<0 \quad \text{alors} \quad f(x)=1-\dfrac{e^x-1}{x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad f(0)=0 \\ \text{Si} \quad x>0 \quad \text{alors} \quad f(x)=x.(\ln(x)-1) \end{cases}$$

a) La fonction f est-elle continue en 0 ? On justifiera sa réponse.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? On justifiera aussi sa réponse.

Le corrigé

a) Savoir si la fonction f est continue en 0, c'est connaître les limites de f à gauche et à droite de 0. Déterminons les !

- ***La limite de f à gauche de 0.***

Quand on travaille à gauche de 0, on évolue sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1-\frac{e^x-1}{x} = 1-1 = 0 = f(0)$$

Donc la fonction f est continue à gauche de 0.

- ***La limite de f à droite de 0.***

Lorsque x tend vers 0^+, $\left|\begin{array}{l}\text{le facteur } x \text{ tend vers } 0^+ \\ \text{le facteur } \ln(x)-1 \text{ tend vers } -\infty\end{array}\right.$.

Donc $f(x)$ est une forme indéterminée du type $0\times\infty$.

Pour lever cette indétermination, il suffit juste de développer $f(x)$. En effet :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x.\ln(x)-x = 0^- - 0^+ = 0 = f(0)$$

Donc la fonction f est aussi continue à droite de 0.

Conclusion : étant continue à sa gauche ainsi qu'à sa droite, f est continue en 0.

b) Pour savoir si la fonction f est dérivable à gauche et à droite de 0, nous devons déterminer les limites dans ces deux cas du quotient $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)-0}{x} = \frac{f(x)}{x}$

- ***La limite de ce quotient à gauche de 0***

A gauche de 0, c'est-à-dire sur l'intervalle $]-\infty;0[$, nous avons :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1-\frac{e^x-1}{x}}{x} = \frac{\frac{x}{x}-\frac{e^x-1}{x}}{x} = \frac{\frac{(1+x)-e^x}{x}}{x} = \frac{(1+x)-e^x}{x^2}$$

Examinons la limite en 0^- de ce quotient :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(1+x)-e^x}{x^2} = \frac{1-1}{0^+} = \frac{0}{0} = \text{Forme indéterminée}$$

Pour lever l'indétermination, essayons de triturer l'encadrement fourni de e^x

Pour tout réel strictement négatif x, nous avons :

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6} \le e^x \le 1+x+\frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6} \le e^x-(1+x) \le \frac{x^2}{2}$$

On multiplie par le négatif -1

$$\Rightarrow -\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} \ge (1+x)-e^x \ge -\frac{x^2}{2}$$

On divise par le positif x²

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}-\frac{x}{6} \ge \frac{(1+x)-e^x}{x^2} \ge -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{f(x)-f(0)}{x} \le -\frac{1}{2}-\frac{x}{6}$$

Or quand x tend 0^-, le membre de droite $-\frac{1}{2}-\frac{x}{6}$ tend vers $-\frac{1}{2}$.

En application du théorème des gendarmes, nous en déduisons :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$$

Conclusion : f est dérivable à gauche de 0 et le nombre dérivé y est égal à $-\frac{1}{2}$.

- ***La limite de ce quotient à droite de 0***

Lorsque l'on travaille à droite de 0, on évolue sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et alors :

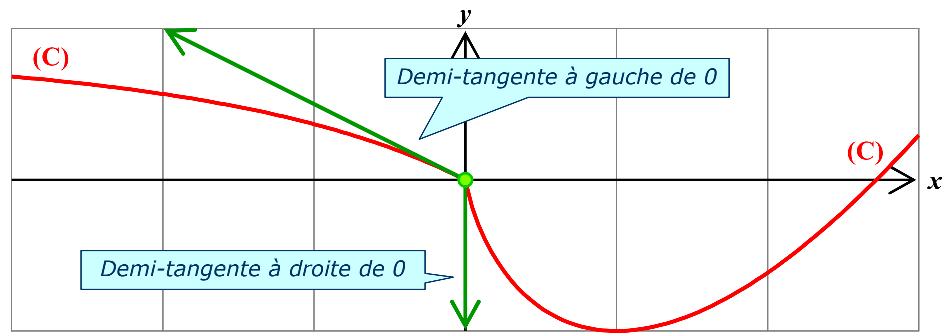
$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\cancel{x}\times[\ln(x)-1]}{\cancel{x}} = \ln(x)-1$$

Il vient alors :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln(x)-1 = (-\infty)-1 = -\infty$$

Conclusion : la limite du quotient étant infinie, f n'est pas dérivable à droite de 0.

Conclusion : la fonction f n'est pas dérivable en 0 ainsi que cela est visible ci-dessous.



Equations différentielles

Différents cieux de cinq à sept

Le contexte

Un exercice des plus classiques sur les équations différentielles : résoudre une équation différentielle à partir des équations différentielles homogènes vues en cours.

L'énoncé

On note ***(E)*** et ***(E')*** les équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} (E) & 7.y-5.y'=4.x.e^{x} \\ (E') & 7.y-5.y'=0 \end{cases}$$

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=(2.x+5).e^{x}$$

a) Montrer que la fonction f est une solution particulière de l'équation différentielle ***(E)***.

b) Montrer qu'une fonction g est solution de l'équation différentielle ***(E)*** si et seulement si la fonction $h=g-f$ est solution de l'équation différentielle ***(E')***.

c) Nous pouvons à présent résoudre l'équation différentielle ***(E)***.

1. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle ***(E')*** ?
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle ***(E)***.
3. Déterminer la solution particulière φ de l'équation différentielle ***(E)*** pour laquelle l'image de 0 est égale à 7.

Le corrigé

a) Commençons par calculer la dérivée de la fonction f. Examinons ses facteurs :

$$\begin{cases} u(x)=2.x+5 \\ u'(x)=2 \\ u \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad \underline{\text{et}} \quad \begin{cases} v(x)=e^{x} \\ v'(x)=e^{x} \\ v \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc leur produit $f=u\times v$ est aussi dérivable sur ℝ.

Pour tout réel x, nous avons :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x) \\ &= 2\times\boxed{e^{x}}+\boxed{e^{x}}\times(2.x+5)=\boxed{e^{x}}\times[2+2.x+5]=e^{x}.(2.x+7) \end{aligned}$$

A présent, nous allons pouvoir vérifier si la fonction f est bien une solution de ***(E)***.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} 7\times f(x)-5\times f'(x) &= 7\times(2.x+5).\boxed{e^{x}}-5\times(2.x+7).\boxed{e^{x}} \\ &= \boxed{e^{x}}\times[7\times(2.x+5)-5\times(2.x+7)] \\ &= e^{x}\times[14.x+35-10.x-35]=e^{x}\times 4.x \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction f est bien une solution de l'équation différentielle ***(E)***.

b) Procédons par équivalences. Nous pouvons écrire :

Valable pour tout réel x

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow 7\times g(x)-5\times g'(x)=4.x.e^{x} \\ &\Leftrightarrow 7\times g(x)-5\times g'(x)=\underbrace{7\times f(x)-5\times f'(x)}_{\substack{=4.x.e^{x} \\ \text{Car f est solution de } (E)}} \\ &\Leftrightarrow 7\times g(x)-7\times f(x)-5\times g'(x)+5\times f'(x)=0 \\ &\Leftrightarrow 7\times\underbrace{[g(x)-f(x)]}_{h(x)}-5\times\underbrace{[g'(x)-f'(x)]}_{h'(x)}=0 \\ &\Leftrightarrow 7\times h(x)-5\times h'(x)=0 \Leftrightarrow h=g-f \text{ est solution de } (E') \end{aligned}$$

A chaque étape, on s'assure que la réciproque est vraie…

c.1) D'après un théorème du cours, les solutions de l'équation différentielle :

$$(E') \qquad 7.y-5.y'=0 \Leftrightarrow -5.y'=-7.y \Leftrightarrow y'=\frac{5}{7}.y$$

sont les fonctions h dérivables sur ℝ et définies par :

$$h(x)=C\times e^{\frac{5}{7}.x}$$

où *C* est une constante à déterminer.

c.2) Compte tenue de l'équivalence établie lors de la question b, nous en déduisons que les solutions de l'équation différentielle ***(E)*** sont les fonctions g dérivables sur ℝ et définies par :

$$g(x)=h(x)+f(x)=C\times e^{\frac{5}{7}.x}+(2.x+5).e^{x}$$

c.3) Comme la fonction φ est solution de l'équation différentielle ***(E)***, alors elle est de la forme :

$$\varphi(x) = C \times e^{\frac{5}{7}.x} + (2.x+5).e^{x}$$

Nous savons également que l'image de 0 par φ est égale à 7. Il vient alors :

$$\varphi(0) = 7 \quad \Leftrightarrow \quad C \times e^{\frac{5}{7}\times 0} + (2\times 0+5).e^{0} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad C\times 1 + 5\times 1 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad C = 7-5 = 2$$

<u>Conclusion :</u> la fonction φ est définie pour tout réel x par :

$$\varphi(x) = 2.e^{\frac{5}{7}.x} + (2.x+5).e^{x}$$

Intégrales

Questions de primitives

Le contexte

Cet exercice est une partie d'un QCM. Il est constitué de quatre questions portant sur les primitives et d'une dernière question portant sur les limites.

L'énoncé et le corrigé

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer laquelle des quatre propositions est la bonne.

1. La fonction f est définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+3\right)^3}$. Une primitive de f sur ℝ est :

$-\dfrac{1}{4.\left(x^2+3\right)^2}$ | $-\dfrac{1}{2.\left(x^2+3\right)^2}$ | $-\dfrac{1}{8.\left(x^2+3\right)^2}$ | $-\dfrac{1}{4.\left(x^2+3\right)^4}$

D'après une formule du cours, si u est une fonction dérivable et non nulle, alors :

$$\boxed{\text{Une primitive de la fonction } \frac{u'}{u^n} \text{ est la fonction } -\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{u^{n-1}}}$$

Dans le cas présent, nous avons $n=3$ et $u(x)=x^2+3$ d'où $u'(x)=2.x$.
u est dérivable et non nulle sur ℝ

Modifions l'écriture de $f(x)$ pour qu'elle ait la forme désirée. Pour tout réel x, on a :

$$f(x)=\frac{x}{\left(x^2+3\right)^3}=\frac{1}{2}\times\frac{2.x}{\left(x^2+3\right)^3}=\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u^3}$$

Par conséquent, une primitive de f sur ℝ est la fonction :

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{3-1}\times\frac{1}{u^{3-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}\times\frac{1}{\left(x^2+3\right)^2}=\boxed{-\frac{1}{4.\left(x^2+3\right)^2}}$$

2. La fonction f est définie sur ℝ par $f(x)=(2.x-1)^5$. Une primitive de f sur ℝ est :

$\dfrac{1}{8}.(2.x-1)^4$ | $\dfrac{1}{4}.(2.x-1)^4$ | $\dfrac{1}{12}.(2.x-1)^6$ | $\dfrac{1}{6}.(2.x-1)^6$

D'après une formule d'intégration du cours, si u est une fonction dérivable alors :

$$\boxed{\text{Une primitive de la fonction } u'\times u^n \text{ est la fonction } \frac{1}{n+1}\times u^{n+1}}$$

Dans le cas présent, nous avons $n=5$ et $u(x)=2.x-1$ d'où $u'(x)=2$.
u est dérivable sur ℝ

Modifions l'écriture de $f(x)$ pour qu'elle ait la forme désirée. Pour tout réel x, on a :

$$f(x)=(2.x-1)^5=\frac{1}{2}\times 2\times(2.x-1)^5=\frac{1}{2}\times u'\times(2.x-1)^5$$

Nous en concluons qu'une primitive de f sur ℝ est la fonction :

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5+1}\times u^{5+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times(2.x-1)^6=\boxed{\frac{1}{12}\times(2.x-1)^6}$$

3. La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{1}{2.x-6}$. Une primitive de f sur $]-\infty;3[$ est :

$\ln(2.x-6)$ | $\ln\left(\sqrt{2.x-6}\right)$ | $\ln(6-2.x)$ | $\ln\left(\sqrt{6-2.x}\right)$

D'après une propriété du cours, si u est une fonction dérivable et positive alors :

$$\boxed{\text{Une primitive de la fonction } \frac{u'}{u} \text{ est la fonction } \ln(u)}$$

La fonction $2.x-6$ étant négative sur l'intervalle $]-\infty;3[$, la formule d'intégration précédente ne lui est pas applicable.
Mais elle l'est pour son opposé $u(x)=-2.x+6$ qui est positive sur l'intervalle $]-\infty;3[$.
$u'(x)=-2$

Pour tout réel $x\in]-\infty;3[$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{1}{2.x-6}=\frac{-1}{-2.x+6}=\frac{1}{2}\times\frac{-2}{-2.x+6}=\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u}$$

Nous en concluons qu'une primitive de f sur l'intervalle $]-\infty;3[$ est la fonction :

On applique la propriété de ln : $\boxed{\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}.\ln(a)}$

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\ln(u)=\frac{1}{2}\times\ln(-2.x+6)=\ln\left(\sqrt{-2.x+6}\right)=\boxed{\ln\left(\sqrt{6-2.x}\right)}$$

4. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{e^x}$ est :

$-e^{-x}$ e^{-x} $-e^x$ e^x

D'après une propriété du cours, si u est une fonction dérivable alors :

$$\boxed{\text{Une primitive de la fonction } u'\times e^u \text{ est la fonction } e^u}$$

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{1}{e^x}=e^{-x}=(-1)\times(-1)\times e^{-x}=(-1)\times u'\times e^u$$

où la fonction $\left|\begin{array}{l} u(x)=-x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}. \\ u'(x)=-1 \end{array}\right.$

Nous en concluons qu'une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction :

$$F(x)=(-1)\times e^{u(x)}=-e^{-x}$$

5. La limite de $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x.\ln(x)}$ lorsque x tend vers 0^+ est :

$-\infty$ 0 1 $+\infty$

Dans le cours, les trois limites suivantes ont été établies :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} x.\ln(x)=0^- \qquad \lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

Mais dans cette question, seules les deux dernières servent !

Sous l'écriture qui nous est donnée, $f(x)$ est en 0^+ une forme indéterminée. En effet :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x.\ln(x)}=\frac{e^0-1}{0^-}=\frac{1-1}{0^-}=\frac{0}{0}=\text{Forme indéterminée}$$

Mais en modifiant légèrement ce quotient, l'indétermination se lève :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x.\ln(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{\ln(x)}=1\times\frac{1}{-\infty}=1\times0^-=0$$

FONDAMENTAUX D'INTÉGRALES

Le contexte

Cet exercice aborde des points et des techniques essentiels du chapitre «intégration» : détermination de primitives, décomposition d'une fonction rationnelle, intégration par parties et encadrement d'une intégrale au moyen d'un enchaînement d'inégalités.

L'énoncé

a) Calculer l'intégrale :

$$A=\int_1^2\left(3.x^2+2.x+1\right).dx$$

b) Le but de cette question est de calculer l'intégrale :

$$B=\int_0^1\frac{10.x+1}{2.x^2-x-6}.dx$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tous réels $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$, on ait :

$$\frac{10.x+1}{2.x^2-x-6}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{2.x+3}$$

2. Calculer l'intégrale B. On donnera le résultat sous la forme $\ln(p)$ où $p\in\mathbb{Q}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$C=\int_1^2\left(9.x^2+4.x+1\right).\ln(x).dx$$

d) f est une fonction continue sur l'intervalle $[0;1]$ vérifiant pour tout réel $x\in[0;1]$:

$$\frac{x}{\sqrt{2.x^2+1}}\le f(x)\le 1-e^{-2.x}$$

En déduire un encadrement de l'intégrale $D=\int_0^1 f(x).dx$

Le corrigé

a) Une primitive du polynôme $f(x)=3.x^2+2.x+1$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x)=x^3+x^2+x$.

Par conséquent :

$$A=\int_1^2\left(3.x^2+2.x+1\right).dx=\left[x^3+x^2+x\right]_1^2=\underbrace{(8+4+2)}_{\text{Image de 2}}-\underbrace{(1+1+1)}_{\text{Image de 1}}=11$$

b.1) On veut écrire la fonction rationnelle proposée sous la forme :

$$\frac{10.x+1}{2.x^2-x-6}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{2.x+3}$$

$$=\frac{a\times(2.x+3)+b\times(x-2)}{(x-2)\times(2.x+3)}=\frac{2.a.x+3.a+b.x-2.b}{2.x^2+3.x-4.x-6}$$

$$\frac{\boxed{10}.x+\boxed{1}}{2.x^2-x-6}=\frac{\boxed{(2.a+b)}.x+\boxed{(3.a-2.b)}}{2.x^2-x-6}$$

Deux fonctions rationnelles égales et ayant le même dénominateur ont à leurs numérateurs des coefficients de même degré égaux. Nous en déduisons les équations :

$$\begin{cases}\text{Egalité des coefficients en x} & : \ 10=2.a+b \quad \textbf{\textit{(1)}}\\ \text{Egalité des coefficients constants} & : \ 1=3.a-2.b \quad \textbf{\textit{(2)}}\end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système par substitution.
A partir de l'équation ***(1)***, nous exprimons l'inconnue b en fonction de l'inconnue a :

$$10=2.a+b \quad\Leftrightarrow\quad b=10-2.a$$

Puis, nous remplaçons dans l'équation ***(2)*** b par ce qu'il vaut en a.

$$1=3.a-2\times(10-2.a) \quad\Leftrightarrow\quad 1=3.a-20+4.a \quad\Leftrightarrow\quad 21=7.a \quad\Leftrightarrow\quad a=3$$

Nous en déduisons :

$$b=10-2\times3=4$$

Conclusion : la forme décomposée de la fonction rationnelle proposée est :

$$\frac{10.x+1}{2.x^2-x-6}=\frac{3}{x-2}+\frac{4}{2.x+3}$$

b.2) La fonction $x-2$ étant négative sur l'intervalle $[0;1]$, son opposé $2-x$ est positive.

Ainsi, une primitive de $\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{3\times(-1)}{-x+2}=\dfrac{3\times u'}{u}$ sur $[0;1]$ est $3\times\ln(u)=3.\ln(2-x)$

avec

$$\left|\begin{array}{l}u(x)=-x+2\\ u'(x)=-1\\ \text{Dérivable et positive sur }[0;1]\end{array}\right.$$

Une primitive de $\dfrac{4}{2.x+3}=\dfrac{2\times2}{2.x+3}=\dfrac{2\times u'}{u}$ sur $[0;1]$ est $2\times\ln(u)=2.\ln(2.x+3)$

où :

$$\left|\begin{array}{l}u(x)=2.x+3\\ u'(x)=2\\ \text{Dérivable et positive sur }[0;1]\end{array}\right.$$

Désormais, nous disposons de tous les ingrédients permettant de calculer l'intégrale B.

$$B=\int_0^1\frac{10.x+1}{2.x^2-x-6}.dx=\left[3\times\ln(2-x)+2\times\ln(2.x+3)\right]_0^1$$

$$=\underbrace{\left(3\times\ln(1)+2\times\ln(5)\right)}_{\text{Image de 1}}-\underbrace{\left(3\times\ln(2)+2\times\ln(3)\right)}_{\text{Image de 0}}$$

$$=\ln(25)-\ln(8)-\ln(9)=\ln\left(\frac{25}{72}\right)$$

c) La formule sur laquelle repose l'intégration par parties est :

$$\boxed{\int_1^2 u'(x)\times v(x).dx=\left[u(x)\times v(x)\right]_1^2-\int_1^2 u(x)\times v'(x).dx}$$

avec dans les deux principaux rôles :

$$\left|\begin{array}{l}u'(x)=9.x^2+4.x+1\\ u(x)=3.x^3+2.x^2+x\\ \text{Dérivable sur }\mathbb{R}\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l}v(x)=\ln(x)\\ v'(x)=1/x\\ \text{Dérivable sur }]0;+\infty[\end{array}\right.$$

Il vient alors :

$$C=\int_1^2\left(9.x^2+4.x+1\right).\ln(x).dx$$

$$=\left[\left(3.x^3+2.x^2+x\right)\times\ln(x)\right]_1^2-\int_1^2\left(3.x^3+2.x^2+x\right)\times\frac{1}{x}.dx$$

$$C = \underbrace{(3\times 8+2\times 4+2)\times \ln(2)}_{\text{Image de 2}} - \underbrace{(3\times 1+2\times 1+1)\times \ln(1)}_{\text{Image de 1}} - \underbrace{\int_1^2 \left(3.x^2+2.x+1\right).dx}_{\text{On reconnaît l'intégrale A}}$$

$$= 34\times \ln(2) - 0 - 11 = 34\times \ln(2) - 11$$

d) Nous savons que pour tout réel $x \in [0;1]$, nous avons :

$$\frac{x}{\sqrt{2.x^2+1}} \leq f(x) \leq 1-e^{-2.x}$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[0;1]$, il vient :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2.x^2+1}}.dx \leq \int_0^1 f(x).dx \leq \int_0^1 \left(1-e^{-2.x}\right).dx$$

Pour encadrer l'intégrale D, nous devons calculer les intégrales de gauche et de droite.

➔ Une primitive de $\dfrac{x}{\sqrt{2.x^2+1}} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{4.x}{\sqrt{2.x^2+1}} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $\dfrac{1}{4}\times 2.\sqrt{u} = \dfrac{1}{2}.\sqrt{x^2+1}$

où :

$u(x) = 2.x^2+1$

$u'(x) = 4.x$

Dérivable et positive sur $[0;1]$

Par conséquent :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2.x^2+1}}.dx = \left[\frac{1}{2}.\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \underbrace{\frac{1}{2}.\sqrt{2+1}}_{\text{Image de 1}} - \underbrace{\frac{1}{2}.\sqrt{0+1}}_{\text{Image de 1}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

➔ Une primitive de $e^{-2.x} = -\dfrac{1}{2}\times(-2)\times e^{-2.x} = -\dfrac{1}{2}\times u'\times e^{u}$ est $-\dfrac{1}{2}.e^{u} = -\dfrac{e^{-2.x}}{2}$

avec :

$u(x) = -2.x$

$u'(x) = -2$

Dérivable sur $[0;1]$

Il vient alors :

$$\int_0^1 \left(1-e^{-2.x}\right).dx = \left[x+\frac{e^{-2.x}}{2}\right]_0^1 = \underbrace{\left(1+\frac{e^{-2}}{2}\right)}_{\text{Image de 1}} - \underbrace{\left(0+\frac{e^{0}}{2}\right)}_{\text{Image de 0}} = \frac{1}{2.e^2}+\frac{1}{2} = \frac{e^2+1}{2.e^2}$$

Conclusion : nous en déduisons l'encadrement :

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq \int_0^1 f(x).dx \leq \frac{e^2+1}{2.e^2}$$

L'AIRE DU LARGE

Le contexte

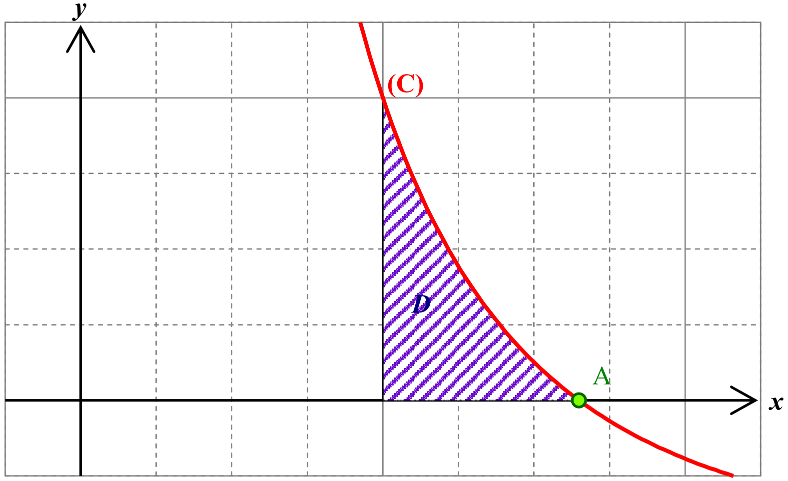
Cet exercice original débute par l'étude d'une fonction quotient à base de logarithme avant de s'intéresser à un calcul d'aire sous la courbe, c'est-à-dire au calcul d'une intégrale.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1-2.\ln(x)}{x}$$

Sa courbe représentative (C) a été tracée sur le graphique ci-dessous où une unité graphique vaut quatre centimètres.



a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$. On précisera les éventuelles conséquences graphiques sur la courbe (C).

b) Dans ces questions, nous allons étudier les variations de la fonction f.

1. Expliquer pourquoi la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout réel strictement positif x, on a :
$$f'(x)=\frac{2.\ln(x)-3}{x^2}$$
3. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c) On appelle ***D*** le domaine compris entre l'axe des abscisses (O*x*), la courbe (C) et la droite verticale d'équation $x=1$.
On note A le point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses.

1. Déterminer les coordonnées du point A.
2. Prouver que la fonction $G(x)=(\ln(x))^2$ est une primitive de $g(x)=\frac{2.\ln(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. Calculer l'aire du domaine ***D*** en centimètres carrés.

Le corrigé

a) Avant toutes choses, rappelons quelques limites issues du cours :

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0^+$$

➲ Commençons par la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par la droite :

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-2.\ln(x)}{x}=\frac{1-2\times(-\infty)}{0^+}=\frac{1+(+\infty)}{0^+}=(+\infty)\times\frac{1}{0^+}=(+\infty)\times(+\infty)=\underline{+\infty}$$

<u>Conséquence graphique :</u> l'axe des ordonnées, c'est-à-dire la droite verticale d'équation $x=0$, est une asymptote à la courbe (C).

➲ A présent, déterminons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2.\ln(x)}{x}=\frac{1-2\times(+\infty)}{+\infty}=\frac{-\infty}{+\infty}=\textbf{Forme indéterminée}$$

En fait, l'indétermination est minime car il suffit de fractionner le quotient pour la lever.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-2.\frac{\ln(x)}{x}=0^+-2\times0^+=\underline{0}$$

<u>Conséquence graphique :</u> l'axe des abscisses, c'est-à-dire la droite horizontale d'équation $y=0$, est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Examinons les numérateur et dénominateur de la fonction f.

$u(x)=1-2.\ln(x)$
$u'(x)=0-2\times\frac{1}{x}=-\frac{2}{x}$
Dérivable sur $]0;+\infty[$

$v(x)=x$
$v'(x)=1$
Dérivable et non nulle sur $]0;+\infty[$

Par conséquent, leur quotient $f=\frac{u}{v}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout réel de cet intervalle, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{\frac{-2}{\cancel{x}}\times\cancel{x}-1\times(1-2.\ln(x))}{x^2}=\frac{-2-1+2.\ln(x)}{x^2}=\frac{2.\ln(x)-3}{x^2}$$

Le signe du dénominateur ne pose aucun problème : le carré x^2 est positif sur $]0;+\infty[$.

Intéressons-nous au numérateur $N(x)=2.\ln(x)-3$ qui est la composée suivante :

$$\underset{\in]0;+\infty[}{x}\xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{\text{Ln}}\underset{\in]-\infty;+\infty[}{\ln(x)}\xrightarrow[\text{Croissante sur }\mathbb{R}]{\varphi(t)=2.t-1}\underbrace{2.\ln(x)-3}_{N(x)}$$

Donc la composée N est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Cherchons la valeur pour laquelle le numérateur $N(x)$ s'annule :

$$N(x)=0 \Leftrightarrow 2.\ln(x)-3=0 \Leftrightarrow 2.\ln(x)=3 \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{3/2}$$

La fonction N étant croissante sur $]0;+\infty[$, elle est négative avant $e^{3/2}$ et positive après.

Par conséquent, le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et celui de variation de la fonction f sont ceux ci-dessous ➜

x	0		$e^{3/2}$		$+\infty$
$N(x)$		$-$	0	$+$	
x		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-2.e^{-1,5}$	↗	0

Calculons la valeur du minimum.

$$f\left(e^{3/2}\right)=\frac{1-2.\ln\left(e^{3/2}\right)}{e^{3/2}}=\frac{1-2\times1,5}{e^{3/2}}=-2.e^{-3/2}$$

c.1) Comme le point A appartient à l'axe des abscisses, alors son ordonnée y_A est nulle.

Comme le point A fait partie de la courbe (C), alors son ordonnée y_A est l'image par la fonction f de son abscisse x_A.

Autrement dit, ces deux réels vérifient l'égalité :

$$f(x_A)=y_A \Leftrightarrow \overbrace{\frac{1-2\times\ln(x_A)}{x_A}=0}^{\text{On peut multiplié par } x_A \text{ qui est non nul sur l'intervalle }]0;+\infty[} \Leftrightarrow 1-2.\ln(x_A)=0$$

$$\Leftrightarrow -2.\ln(x_A)=-1 \Leftrightarrow \ln(x_A)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_A=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point A sont $(\sqrt{e};0)$.

c.2) La fonction G est de la forme $G(x)=(\ln(x))^2=u^2$ avec $u(x)=\ln(x)$; $u'(x)=1/x$; Dérivable sur $]0;+\infty[$

Par conséquent, la fonction G est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et nous avons :

$$G'(x)=2\times u'\times u=2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)=2.\frac{\ln(x)}{x}=g(x)$$

c.3) L'aire du domaine ***D*** va nous être donnée par l'intégrale $\int_1^{\sqrt{e}} f(x).dx$.

Une primitive de la fonction $f(x)=\frac{1}{x}-g(x)$ est la fonction $F(x)=\ln(x)-G(x)$.

Il vient alors :

$$\int_1^{\sqrt{e}} f(x).dx=\left[\ln(x)-(\ln(x))^2\right]_1^{e^{1/2}}$$

$$=\left(\ln\left(e^{1/2}\right)-\left(\ln\left(e^{1/2}\right)\right)^2\right)-\left(\ln(1)-(\ln(1))^2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\left(0-0^2\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}\text{ unité d'aire}$$

<u>Conclusion :</u> une unité de longueur valant 4 centimètres, une unité d'aire vaut $4^2=16$ centimètres carrés. Par conséquent, l'aire du domaine ***D*** est de $\frac{1}{4}\times16=4\text{ cm}^2$.

INTÉGRALES AMÉRICAINES

Le contexte

Cet exercice assez classique étudie une suite d'intégrales. Il est inspiré d'un exercice donné au bac S en Amérique du Nord en juin 2009.

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x) = e^{-x^2}$$

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x).dx = \int_0^1 e^{-x^2}.dx \\ u_n = \int_0^1 x^n.f(x).dx = \int_0^1 x^n.e^{-x^2}.dx \quad \text{pour tout entier naturel non nul } n \end{cases}$$

a) D'abord, encadrons le premier terme de la suite u_0.

1. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

2. En déduire que $\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1$

b) Ensuite, calculons les second et quatrième termes de la suite u_1 et u_3.

1. Démontrer que $u_1 = \frac{e-1}{2.e}$

2. En intégrant par parties l'intégrale $\int_0^1 x^n \times e^{-x^2}.dx$, établir l'égalité

$$(n+1) \times u_n = \frac{1}{e} + 2 \times u_{n+2}$$

3. En déduire la valeur du terme u_3.

c) Puis, étudions les variations de la suite (u_n).

On appelle φ la fonction définie pour tout réel $x \in [0;1]$ par :

$$\varphi(x) = x^n.(x-1).e^{-x^2}$$

1. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \varphi(x).dx$$

3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

d) Enfin, on cherche à déterminer l'éventuelle limite de la suite (u_n).

1. Démontrer que pour tout entier naturel *n* , on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Le corrigé

a.1) La fonction f est de la forme $f(x) = e^{-x^2} = e^u$ avec $\left| \begin{array}{l} u(x) = -x^2 \\ u'(x) = -2.x \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{array} \right.$

Donc la fonction f est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout réel x de cet intervalle, nous avons :

$$f'(x) = u' \times e^u = \underline{-2.x \times e^{-x^2}}$$

Calculons les images de 0 et 1 par la fonction f:

$$f(0) = e^{-0^2} = e^0 = \underline{1}$$

$$f(1) = e^{-1^2} = e^{-1} = \underline{\frac{1}{e}}$$

Finalement, le tableau de variation de la fonction f est celui ci-contre ➚

x	0		1
-2.x		−	
e^{-x^2}		+	
$f'(x)$		−	
f	1	↘	1 / e

a.2) D'après le tableau de variation de f, nous pouvons dire que pour tout réel $x\in[0;1]$:

$$\frac{1}{e}\le f(x)\le 1$$

Intégrons cette inégalité sur l'intervalle $[0;1]$. En application du théorème de l'inégalité de la moyenne, il vient :

C'est aussi... $\int_0^1 \frac{1}{e}.dx=\left[\frac{1}{e}.x\right]_0^1$

$$\frac{1}{e}\times(1-0)\le\int_0^1 f(x).dx\le 1\times(1-0)$$

C'est aussi... $\int_0^1 1.dx=[x]_0^1$

$$\boxed{\frac{1}{e}\le u_0\le 1}$$

b.1) Une primitive de la fonction $x.e^{-x^2}=-\frac{1}{2}\times(-2x)\times e^{-x^2}=-\frac{1}{2}\times u'\times e^{u}$ sur l'intervalle $[0;1]$ est la fonction $-\frac{1}{2}\times e^{u}=\boxed{-\frac{1}{2}.e^{-x^2}}$.

Il vient alors :

$$u_1=\int_0^1 x.e^{-x^2}.dx=\left[-\frac{1}{2}.e^{-x^2}\right]_0^1$$

$$=\left(-\frac{1}{2}.e^{-1}\right)-\left(-\frac{1}{2}.e^{0}\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{e}+\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2.e}=\boxed{\frac{e-1}{2.e}}$$

b.2) La formule sur laquelle repose l'intégration par parties est :

$$\boxed{\int_0^1 u'(x)\times v(x).dx=\left[u(x)\times v(x)\right]_0^1-\int_0^1 u(x)\times v'(x).dx}$$

Avec dans les deux principaux rôles :

$u'(x)=x^n$
$u(x)=\frac{1}{n+1}\times x^n$
Dérivable sur ℝ

$v(x)=e^{-x^2}$
$v'(x)=\left(-x^2\right)'\times e^{-x^2}=-2.x.e^{-x^2}$
Dérivable sur ℝ

Il vient alors :

$$\int_0^1 x^n\times e^{-x^2}.dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\times e^{-x^2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}\times(-2.x).e^{-x^2}.dx$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}\times e^{-1}\right)-\left(\frac{0}{n+1}\times e^{0}\right)-\int_0^1\left(-\frac{2}{n+1}\right)\times x^{n+2}\times e^{-x^2}.dx$$

$$=\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{e}-0+\frac{2}{n+1}\times\int_0^1 x^{n+2}\times e^{-x^2}.dx$$

En remplaçant les deux intégrales par les termes de la suite (u_n) qu'elles représentent, il vient alors :

$$u_n=\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{e}+\frac{2}{n+1}\times u_{n+2}\Leftrightarrow\boxed{(n+1)\times u_n=\frac{1}{e}+2\times u_{n+2}}$$

Après multiplication par n+1

b.3) Appliquons la formule précédente pour $n=1$.

$$(1+1)\times u_1=\frac{1}{e}+2\times u_{1+2}\Leftrightarrow\cancel{2}\times\frac{e-1}{\cancel{2}.e}=\frac{1}{e}+2\times u_3$$

$$\Leftrightarrow 2\times u_3=\frac{e-1}{e}-\frac{1}{e}=\frac{e-2}{e}\Leftrightarrow\boxed{u_3=\frac{e-2}{2.e}}$$

c.1) Le tableau de signe du produit $\varphi(x)$ est celui-ci contre ➔

x	0		1
x^n	0	+	
$x-1$		−	0
e^{-x^2}		+	
Leur produit		−	

Conclusion : pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, nous avons :

$$\boxed{\varphi(x)=x^n.(x-1).e^{-x^2}\le 0}$$

c.2) Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_{n+1}-u_n=\overbrace{\int_0^1 x^{n+1}.e^{-x^2}.dx-\int_0^1 x^n.e^{-x^2}.dx=\int_0^1\left(x^{n+1}.e^{-x^2}-x^n.e^{-x^2}\right).dx}^{\text{Linéarité de l'intégrale}}$$

$$=\int_0^1\left(x^n.x.e^{-x^2}-x^n.e^{-x^2}\right).dx=\int_0^1 e^{-x^2}.x^n.(x-1).dx=\boxed{\int_0^1\varphi(x).dx}$$

c.3) Pour connaître le sens de variation de la suite (u_n), nous allons nous intéresser au signe de la différence de deux de ses termes consécutifs $u_{n+1}-u_n$.

Comme la fonction φ est négative ou nulle sur l'intervalle $[0;1]$, alors il en va de même pour son intégrale $\int_0^1\varphi(x).dx$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, nous venons d'établir :

$$u_{n+1}-u_n\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{u_{n+1}\leq u_n}$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

d.1) La question a.1 nous a appris que l'exponentielle e^{-x^2} était comprise entre $\frac{1}{e}$ et 1 lorsque x appartenait à l'intervalle $[0;1]$. Plus largement, elle est comprise entre 0 et 1.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, nous avons alors :

$$0\leq e^{-x^2}\leq 1 \xrightarrow[\text{qui est positif ou nul sur l'intervalle }[0;1].]{\times x^n} \boxed{0\leq x^n.e^{-x^2}\leq x^n}$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[0;1]$, il vient :

$$\boxed{\int_0^1 0.dx\leq\int_0^1 x^n.e^{-x^2}.dx\leq\int_0^1 x^n.dx}$$

Or :

- Toute intégrale de la fonction nulle est nulle. Ainsi : $\int_0^1 0.dx=\boxed{0}$.
- Une primitive de la fonction puissance x^n sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{n+1}.x^{n+1}$. Par conséquent :

$$\int_0^1 x^n.dx=\left[\frac{1}{n+1}.x^{n+1}\right]_0^1=\left(\frac{1}{n+1}\times 1\right)-\left(\frac{1}{n+1}\times 0\right)=\boxed{\frac{1}{n+1}}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, nous avons :

$$\boxed{0\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}}$$

d.2) Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, alors, en application du «théorème des gendarmes» :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=0}$$

Suites

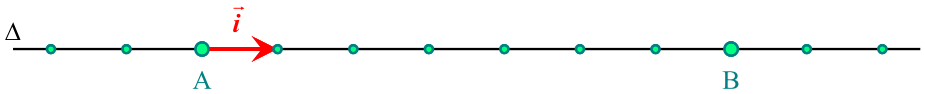
Les barycentres adjacents bis

Le contexte

Cet exercice issu de mon diabolique cerveau est inspiré d'un exercice de bac mèle suites adjacentes, géométrie analytique et barycentres. Tout un programme !

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, la droite Δ est muni d'un repère centimétrique $\left(A;\vec{i}\right)$.



Dans ce repère, le point B a pour abscisse 7.

Question préliminaire :

Soient C et D deux points de la droite Δ d'abscisses respectives c et d dans le repère $\left(A;\vec{i}\right)$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$.

Dans cet exercice, on pourra choisir de travailler avec des abscisses plutôt qu'avec les vecteurs auxquels ils se rapportent.

On appelle :

- A_1 le barycentre des points pondérés $(A;4)$ et $(B;3)$.
- B_1 le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;5)$

a) Construire les points A_1 et B_1 sur la figure ci-dessus.

En répétant le processus, on construit deux suites de points (A_n) et (B_n) définies par :

A_0 est confondu avec le point A.
A_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n;4)$ et $(B_n;3)$

B_0 est confondu avec le point B.
B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n;2)$ et $(B_n;5)$

Pour tout entier naturel n, on note alors :

- a_n l'abscisse du point A_n dans le repère $\left(A;\vec{i}\right)$.
- b_n l'abscisse du point B_n dans le repère $\left(A;\vec{i}\right)$.

b) Donner les valeurs des termes a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 et b_2.

Démontrer que pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_{n+1} = \frac{4.a_n + 3.b_n}{7} \quad \underline{\text{et}} \quad b_{n+1} = \frac{2.a_n + 5.b_n}{7}$$

Ces deux relations pourront être utilisées dans la suite de l'exercice même si elles n'ont pas été démontrées. Les questions à venir ne concernent que les suites numériques.

On appelle (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = b_n - a_n$$

c) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

Exprimer le terme u_n en fonction de l'entier naturel n.

Que peut-on en déduire quant au signe des termes de la suite (u_n).

d) Démontrer que la suite (a_n) est strictement croissante et que la suite (b_n) est strictement décroissante.

e) Pourquoi les suites (a_n) et (b_n) convergent-elles vers une même limite ℓ ?

On appelle (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = 2 \times a_n + 3 \times b_n$$

f) Démontrer que la suite (v_n) est constante.

En déduire la valeur de la limite ℓ.

Conclure quant aux suites de points (A_n) et (B_n).

Le corrigé

Question préliminaire : comme C et D ont pour abscisses c et d dans le repère $\left(A;\vec{i}\right)$, alors ces points vérifient les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{AC}=c\times\vec{i} \qquad \underline{\text{et}} \qquad \overrightarrow{AD}=d\times\vec{i}$$

Il vient alors :

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=-c\times\vec{i}+d\times\vec{i}=\boxed{(d-c)\times\vec{i}}$$

a) Pour placer le point A_1, exprimons le vecteur $\overrightarrow{AA_1}$ en fonction du vecteur $\vec{i}$.

Comme A_1 est le barycentre des points pondérés $(A;4)$ et $(B;3)$, alors ces trois points vérifient la relation vectorielle :

$$4.\overrightarrow{AA_1}+3.\overrightarrow{BA_1}=\vec{0} \Leftrightarrow 4.\overrightarrow{AA_1}+\underbrace{3.\overrightarrow{BA}+3.\overrightarrow{AA_1}}_{2.\overrightarrow{BA_1}}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AA_1}=3.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1}=\frac{3}{7}.\overrightarrow{AB}=\frac{3}{\cancel{7}}\times\cancel{7}.\vec{i}=\boxed{3.\vec{i}}$$

De même, comme B_1 est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;5)$, alors :

$$2.\overrightarrow{AB_1}+5.\overrightarrow{BB_1}=\vec{0} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{AB_1}+\underbrace{5.\overrightarrow{BA}+5.\overrightarrow{AB_1}}_{5.\overrightarrow{BB_1}}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AB_1}=5.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB_1}=\frac{5}{7}.\overrightarrow{AB}=\frac{5}{\cancel{7}}\times\cancel{7}.\vec{i}=\boxed{5.\vec{i}}$$

b) Sans le dire, on construit les suites (a_n) et (b_n) par une double récurrence croisée. Nous connaissons déjà les deux premiers termes de chacune des deux suites. En effet :

Comme $\overrightarrow{AA_0}=\overrightarrow{AA}=0\times\vec{i}$, alors $a_0=\boxed{0}$ | Comme $\overrightarrow{AB_0}=\overrightarrow{AB}=7\times\vec{i}$, alors $b_0=\boxed{7}$

Comme $\overrightarrow{AA_1}=3\times\vec{i}$, alors $a_1=\boxed{3}$ | Comme $\overrightarrow{AB_1}=5\times\vec{i}$, alors $b_1=\boxed{5}$

Pour connaître la valeur de a_2, nous devons exprimer le vecteurs $\overrightarrow{AA_2}$ en fonction de $\vec{i}$.

Comme A_2 est le barycentre des points pondérés $(A_1;4)$ et $(B_1;3)$, nous avons :

$$4.\overrightarrow{A_1A_2}+3.\overrightarrow{B_1A_2}=\vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{4.\overrightarrow{A_1A}+4.\overrightarrow{AA_2}}_{5.\overrightarrow{A_1A_2}}+\underbrace{3.\overrightarrow{B_1A}+3.\overrightarrow{AA_2}}_{2.\overrightarrow{B_1A_2}}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\times\underbrace{\left(-3.\vec{i}\right)}_{\overrightarrow{A_1A}}+3\times\underbrace{\left(-5.\vec{i}\right)}_{\overrightarrow{B_1A}}+7.\overrightarrow{AA_2}=\vec{0}$$

Le raisonnement avec les vecteurs est assez lourd...

$$\Leftrightarrow -12.\vec{i}-15.\vec{i}+7.\overrightarrow{AA_2}=\vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AA_2}=\frac{27}{7}.\vec{i}}$$

Nous en déduisons :

$$\boxed{a_2=\frac{27}{7}}$$

Passons à présent au terme b_2 qui est l'abscisse du point B_2.

Les calculs ayant été relativement «lourds» avec les vecteurs, nous allons opter cette fois-ci pour une voie analytique dans le repère $\left(A;\vec{i}\right)$.

Comme le point B_2 est le barycentre des points pondérés $(A_1;2)$ et $(B_1;5)$, alors ces trois points vérifient la relation vectorielle :

$$2.\overrightarrow{A_1B_2}+5.\overrightarrow{B_1B_2}=\vec{0} \Leftrightarrow \overbrace{2\times(b_2-a_1)+5\times(b_2-b_1)=0}^{\text{On remplace chaque vecteur par son abscisse dans le repère }\left(A;\vec{i}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\times(b_2-3)+5\times(b_2-5)=0$$

Avec les abscisses, c'est plus facile !

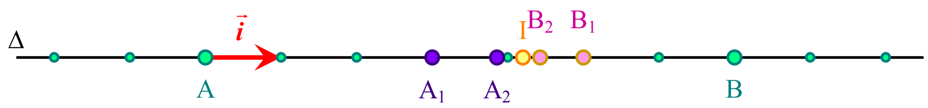
$$\Leftrightarrow 2\times b_2-6+5\times b_2-25=0$$

$$\Leftrightarrow 7\times b_2-31=0 \Leftrightarrow 7\times b_2=31 \Leftrightarrow \boxed{b_2=\frac{31}{7}}$$

Nous en déduisons :

$$\boxed{b_2=\frac{31}{7}}$$

A l'issue de l'exercice et même largement après, la figure est la suivante :



➲ De manière plus générale, comme A_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n;4)$ et $(B_n;3)$, alors nous avons la relation vectorielle :

$$4.\overrightarrow{A_nA_{n+1}}+3.\overrightarrow{B_nA_{n+1}}=\vec{0} \Leftrightarrow \overbrace{4\times(a_{n+1}-a_n)+3\times(a_{n+1}-b_n)=0}^{\text{On remplace chaque vecteur par son abscisse dans le repère }\left(A;\vec{i}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 4\times a_{n+1}-4\times a_n+3\times a_{n+1}-3\times b_n=0$$

$$\Leftrightarrow 7\times a_{n+1}=4\times a_n+3\times b_n \Leftrightarrow \boxed{a_{n+1}=\frac{4\times a_n+3\times b_n}{7}}$$

Et comme B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n;2)$ et $(B_n;5)$, alors :

On remplace toujours chaque vecteur par son abscisse dans le repère $(A;\vec{i})$

$$2.\overrightarrow{A_nB_{n+1}} + 5.\overrightarrow{B_nB_{n+1}} = \vec{o} \Leftrightarrow 2\times(b_{n+1}-a_n)+5\times(b_{n+1}-b_n)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\times b_{n+1}-2\times a_n+5\times b_{n+1}-5\times b_n=0$$
$$\Leftrightarrow 7\times b_{n+1}=2\times a_n+5\times b_n \Leftrightarrow b_{n+1}=\frac{2\times a_n+5\times b_n}{7}$$

c) Nous allons chercher à exprimer le terme u_{n+1} en fonction du terme u_n.
Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{2.a_n+5.b_n}{7}-\frac{4.a_n+3.b_n}{7}=\frac{2.b_n-2.a_n}{7}=\frac{2}{7}\times(b_n-a_n)=\frac{3}{7}\times u_n$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{2}{7}$ et de premier terme :

$$u_0=b_0-a_0=7-0=7$$

Nous en déduisons que pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_n=u_0\times raison^n=7\times\left(\frac{2}{7}\right)^n$$

Le terme u_n est strictement positif car il est le produit de deux facteurs strictement positifs.

d) Comme la différence $u_n=b_n-a_n$ est toujours strictement positive, alors pour tout entier naturel n, nous avons :

$$b_n-a_n>0 \Rightarrow b_n>a_n \xrightarrow{\times 3} 3\times b_n>3\times a_n$$
$$\xrightarrow{+4\times a_n} 4\times a_n+3\times b_n>7\times a_n$$
$$\xrightarrow{\div 7} a_{n+1}>a_n$$

Donc la suite (a_n) est strictement croissante.

➲ Mais l'inégalité initiale permet aussi d'aboutir sur le sens de variation de l'autre suite.
En effet, pour tout entier naturel n, nous pouvons aussi écrire :

$$b_n-a_n>0 \Rightarrow b_n>a_n \xrightarrow{\times 5} 5\times b_n>5\times a_n$$
$$\xrightarrow{+2\times b_n} 7\times b_n>2\times a_n+5\times b_n$$
$$\xrightarrow{\div 7} b_{n+1}>b_n$$

Nous en déduisons que la suite (b_n) est strictement décroissante.

Une autre méthode : nous aurions aussi pu nous intéresser à la différence de deux termes consécutifs de la suite.

$$b_{n+1}-b_n=\frac{2\times a_n+5\times b_n}{7}-\frac{7\times b_n}{7}=\frac{2\times a_n-2\times b_n}{7}=\frac{2}{7}\times\underbrace{(a_n-b_n)}_{\substack{=-u_n\\ \text{Négatif}}}$$

Comme la différence de deux termes consécutifs $b_{n+1}-b_n$ est toujours strictement négative, alors la suite (b_n) est strictement décroissante.

e) Résumons ce que nous savons des deux suites (a_n) et (b_n) :

1. D'abord, pour tout entier naturel n, $a_n<b_n$.
2. Ensuite, la suite (a_n) est strictement croissante.
3. Puis, la suite (b_n) est strictement décroissante.
4. Pour pouvoir affirmer que ces deux suites sont adjacentes, il ne reste plus à établir que leur différence $u_n=b_n-a_n$ tend vers 0.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} b_n-a_n = \lim_{n\to+\infty} 7\times\left(\frac{2}{7}\right)^n = 7\times 0^+ = 0^+$$

<u>Conclusion :</u> les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Donc elles convergent vers une même limite finie ℓ.

f) Si la suite (v_n) est constante, alors tous ses termes sont égaux à son premier v_0.
Calculons le !

$$v_0=2\times a_0+3\times b_0=2\times 0+3\times 7=0+21=21$$

A présent, nous allons prouver par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$\boxed{P_n \quad : \quad v_n=21}$$

- **Au premier rang pour $n = 0$**
  La propriété P_0 est bien évidemment vraie car la valeur 21 vient du terme v_0.
- **Le principe de récurrence ou de propagation.**
  Supposons que la propriété P_n soit vraie, c'est-à-dire que $v_n=21$.
  Au rang suivant, il vient alors :

$$v_{n+1}=2\times a_{n+1}+3\times b_{n+1}=2\times\frac{4.a_n+3.b_n}{7}+3\times\frac{2.a_n+5.b_n}{7}$$
$$=\frac{8.a_n+6.b_n+6.a_n+15.b_n}{7}=\frac{14.a_n+21.b_n}{7}=\frac{\cancel{7}\times(2.a_n+3.b_n)}{\cancel{7}}=v_n=7$$

Donc la propriété P_{n+1} est alors vraie. Le principe de récurrence est établi.

Conclusion : la suite (v_n) est constante et toujours égale à 7.

➲ Comme les suites (a_n) et (b_n) convergent toutes deux vers ℓ, alors leur somme (v_n) converge vers $2\times\ell+3\times\ell=5\times\ell$.
Or, comme la suite (v_n) est constante et toujours égale à 21, alors cette limite $5\times\ell$ est aussi égale à 21.
Nous en déduisons :

$$5\times\ell=21 \quad\Leftrightarrow\quad \ell=\frac{21}{5}=\boxed{4,2}$$

Conclusion : les suites de points (A_n) et (B_n) convergent toutes deux vers un point I situé à 4,2 centimètres de A sur le segment [AB].

La suite par sa racine affine

Le contexte

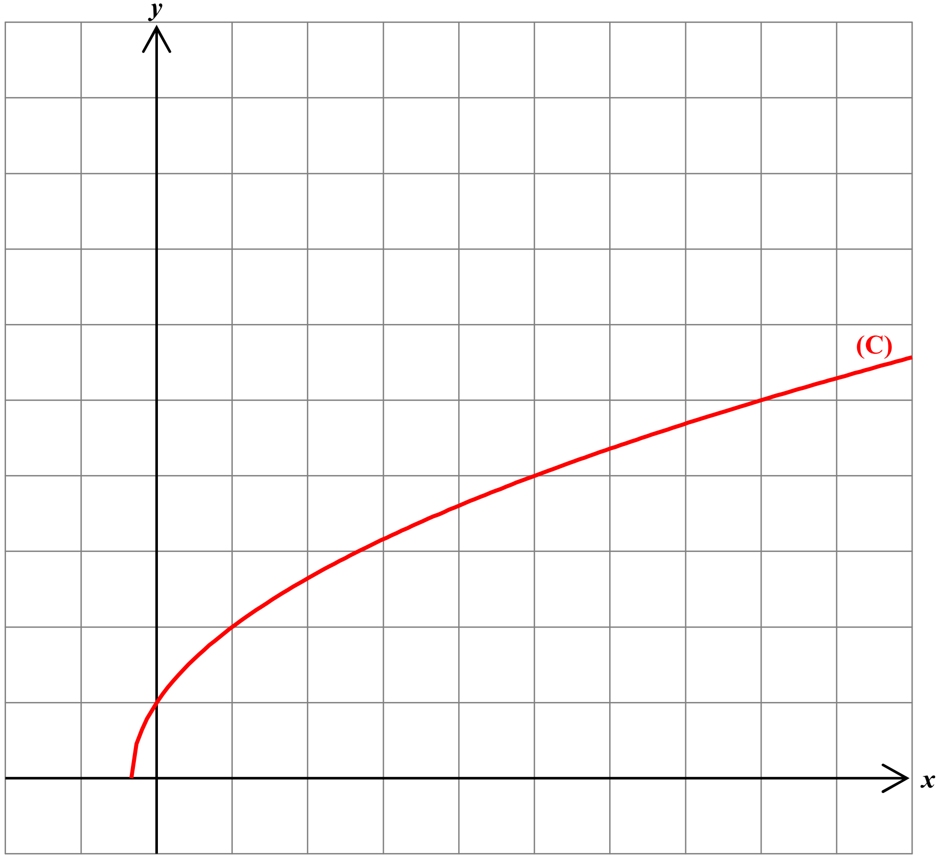
Cet exercice des plus classiques qui commence par l'étude d'une fonction, puis qui enchaîne sur l'étude de la convergence d'une suite définie par récurrence à partir de cette fonction.

L'énoncé

La fonction f est définie par :

$$f(x)=\sqrt{3.x+1}$$

Sa courbe représentative (C) a été tracée sur le graphique ci-dessous.



a) Dans ces premières questions, nous allons étudier la fonction f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Etudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \sqrt{3\times u_n + 1} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

b) Dans ces questions, nous allons nous intéresser à la suite (u_n).

1. Construire sur le graphique ci-contre les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$3 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 8$$
3. Pourquoi peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ ?
4. Déterminer la valeur de cette limite ℓ.

Le corrigé

a.1) La fonction racine n'est définie que pour les réels positifs et 0. Par conséquent :

$$\sqrt{3.x+1} \text{ existe} \iff 3.x+1 \geq 0 \iff 3.x \geq -1 \iff x \geq -\frac{1}{3}$$

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction f est $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

a.2) Lorsque x tend vers $+\infty$, $3.x+1$ tend aussi vers $+\infty$

Donc $f(x)=\sqrt{3.x+1}$ tend aussi vers $+\infty$

a.3) Les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ peuvent être établies de deux manières :

- **Classiquement en allant chercher la dérivée et en étudiant son signe...**

Comme la fonction $\left| \begin{array}{l} u(x) = 3.x+1 \\ u'(x) = 3 \end{array}\right.$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, alors la fonction $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur cet ensemble.

$$f'(x) = \frac{u'}{2.\sqrt{u}} = \frac{3}{2\times\sqrt{3.x+1}} = \frac{\oplus}{\oplus\times\oplus} = \oplus$$

Tous les facteurs composant le quotient $f'(x)$ étant positifs sur $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, il en va de même pour la dérivée. Donc la fonction f est croissante sur cet intervalle.

- **...ou en composant.**

Sur son intervalle de définition, la fonction f est la composée suivante :

$$\underbrace{x}_{\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[} \xrightarrow[\text{Strictement croissante sur } \mathbb{R}]{u(t)=3.t+1} \underbrace{3.x+1}_{\in[0;+\infty[} \xrightarrow[\text{Strictement croissante sur } [0;+\infty[]{\text{Racine}} \underbrace{\sqrt{3.x+1}}_{f(x)}$$

Conclusion : en tant que composée de deux fonctions strictement croissantes, la fonction f est elle-même strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

En conclusion, le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ est celui ci-contre ➔

x	$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
f	0	↗	$+\infty$

De plus :

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\cancel{3}\times\left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right)+1} = \sqrt{-1+1} = \sqrt{0} = 0$$

b.1) On construit les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 en s'appuyant sur la courbe (C) et sur la droite d'équation $y = x$. La construction est faite à la fin du corrigé :

Vu la construction ci-dessous, il semble que la suite (u_n) soit décroissante et converge vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite d'équation $y = x$.

b.2) Démontrons par récurrence sur l'entier n la propriété :

$$P_n \quad : \quad 3 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 8$$

- **Au premier rang pour *n* = 0**

Nous savons déjà que $u_0 = 8$.

Calculons le terme suivant u_1

$$u_1 = \sqrt{3\times u_0 + 1} = \sqrt{3\times 8+1} = \sqrt{25} = 5$$

Comme $3 \leq \underbrace{u_1}_{5} \leq \underbrace{u_0}_{8} \leq 8$, alors la propriété P_0 est vraie.

- **Le principe de récurrence ou de propagation.**

Supposons que la propriété P_n soit vraie, c'est-à-dire que :

$$3 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 8$$

$$f(3) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(8)$$

f

Strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$

$$\sqrt{10} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 5$$

Or $\sqrt{10} \geq \sqrt{9} = 3$ et $5 \leq 8$. Nous en déduisons :

$$\boxed{3 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 8}$$

Donc la propriété P_{n+1} est alors vraie. Le principe de récurrence est établi.

Conclusion : pour tout entier naturel n, nous venons de prouver :

$$3 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 8$$

Cette triple inégalité a plusieurs conséquences :

$\Rightarrow$ D'abord, la suite (u_n) est décroissante.

$\Rightarrow$ Ensuite, elle est minorée par 3.

$\Rightarrow$ Enfin, elle est majorée par 8.

b.3) Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente vers un réel ℓ.

b.4) Et comme f est continue sur $[3;8]$, intervalle auquel appartiennent tous les termes de la suite (u_n), alors ce réel est l'une des solutions de l'équation :

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3.x+1} = x \quad \Rightarrow \quad 3.x+1 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3.x - 1 = 0$$

En élevant l'équation au carré, nous perdons l'équivalence.

Pour résou

$$\boxed{\Delta = (-3)^2 - 4\times 1\times(-1) = 9+4 = 13 = \left(\sqrt{13}\right)^2}$$

Comme son discriminant est strictement positif, alors l'équation a deux solutions :

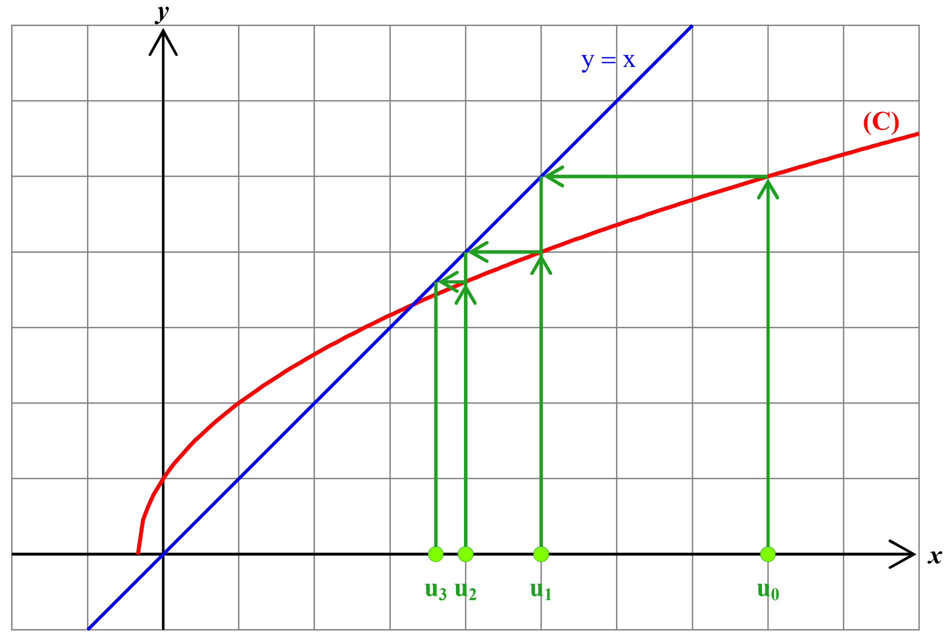
$$x = \frac{-(-3)-\sqrt{13}}{2\times 1} = \boxed{\frac{3-\sqrt{13}}{2}} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-(-3)+\sqrt{13}}{2\times 1} = \boxed{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

Or, comme $3 = \sqrt{9} \leq \sqrt{13} \leq \sqrt{16} = 4$, alors :

- La première solution $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ est négative. Elle est hors de l'intervalle $[3;8]$
- La seconde solution $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ est comprise entre 3 et 3,5. Donc elle appartient bien à l'intervalle $[3;8]$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

La construction des quatre premiers termes de la suite est la suivante :



LES PLATITUDES INDIENNES

Le contexte

cet exercice assez général parle aussi bien de suites que d'équations différentielles.
Il est inspiré d'un exercice donné à Pondichéry en avril 2008.

L'énoncé

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Un modèle discret

On appelle u_n le nombre, exprimé en millions de foyers, possédant un téléviseur à écran plat l'année $2005+n$.
Par conséquent, u_0 correspond au nombre de millions de foyers équipés d'un téléviseur à écran plat en 2005.
Des études ont montré que la suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{10} \times u_n \times (20 - u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;20]$ par :

$$f(x) = 2.x - \frac{1}{10}.x^2$$

Sa courbe représentative (C) a été tracée en annexe dans un repère orthonormé où 1 unité graphique vaut 0,5 centimètres.

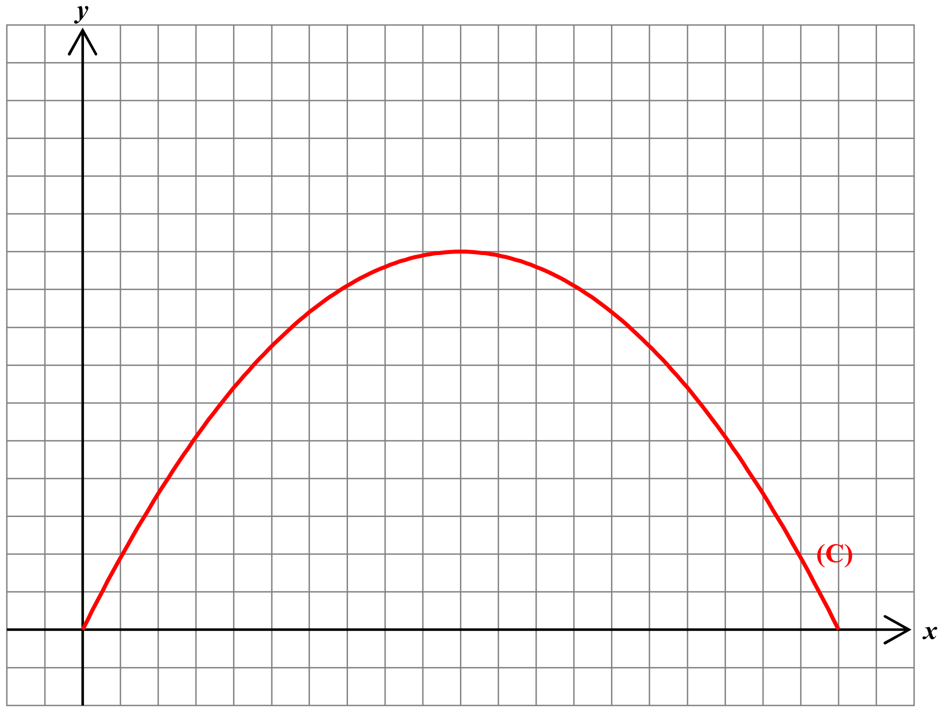
1. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;20]$.

2. Sur le graphique représentant la courbe (C), construire les cinq premiers termes $u_0; u_1; u_2; u_3$ et u_4 de la suite. On laissera apparents les traits de construction.

3. Montrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$P_n \quad : \quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$$

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.



Partie B - Un modèle continu

On appelle $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un écran plat l'année $2005+x$.
Par conséquent, $g(0)=1$ correspond au nombre de millions de foyers possédant un écran plat le premier janvier 2005.
On sait que la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et qu'elle est une solution de l'équation différentielle :

$$\textit{(E)} \quad : \quad y' = \frac{1}{20}.y.(10-y)$$

1. Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

On appelle alors v l'inverse de cette fonction u. Autrement dit, pour tout réel $x \in [0;+\infty[$:

$$v(x) = \frac{1}{u(x)}$$

Exprimer la fonction u en fonction de v.
Exprimer sa dérivée u' en fonction de la fonction v et de sa dérivée v'.

Montrer que u est solution de l'équation différentielle **(E)** si et seulement si v est solution de l'équation différentielle :

$$\textbf{(E')} \quad : \quad y' = -\frac{1}{2}.y + \frac{1}{20}$$

Résoudre l'équation différentielle **(E')** et en déduire les solutions de l'équation différentielle **(E)**.

2. Montrer que pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, nous avons :

$$g(x) = \frac{10}{9.e^{-\frac{1}{2}.x} + 1}$$

3. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

4. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et interpréter ce résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un téléviseur à écran plat dépassera-t-il les 5 millions d'unités ?
Pour aide, on donne les valeurs de quelques logarithmes :
$\ln(2) \approx 0,7$ $\quad \ln(3) \approx 1,1$ $\quad \ln(5) \approx 1,6$ $\quad \ln(7) \approx 1,9$ $\quad \ln(11) \approx 2,4$

Le corrigé

Partie A - Un modèle discret

1. La fonction du second degré f est clairement dérivable sur ℝ et donc sur l'intervalle $[0;20]$ comme tous les polynômes. Sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = 2\times 1 - \frac{1}{10}\times 2.x = 2 - \frac{1}{5}.x$$

Le signe de la dérivée $f'(x)$ donne les variations de la fonction f.

Calculons quelques images utiles :

$$f(0) = 2\times 0 - \frac{1}{10}\times 0 = 0 - 0 = 0$$

$$f(10) = 2\times 10 - \frac{1}{10}\times 100 = 20 - 10 = 10$$

$$f(20) = 2\times 20 - \frac{1}{10}\times 400 = 40 - 40 = 0$$

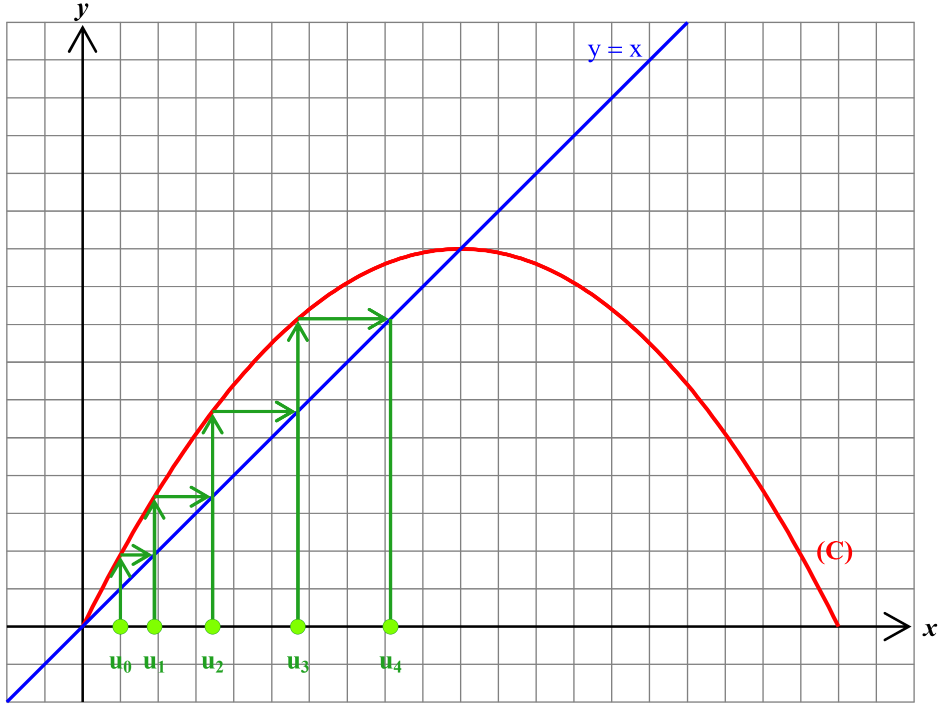
x	0		10		20
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	10	↘	0

2. Chacun aura remarqué que pour tout entier naturel n, nous avions :

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}\times u_n \times (20 - u_n)$$
$$= \frac{20}{10}\times u_n - \frac{1}{10}\times (u_n)^2 = 2\times u_n - \frac{1}{10}\times (u_n)^2 = f(u_n)$$

Autrement dit, la suite (u_n) est définie par récurrence à partir de la fonction f.

➲ Les cinq premiers termes de la suite (u_n) se construisent l'un à la suite de l'autre en s'appuyant sur la courbe (C), puis en se rétablissant sur la droite d'équation $y = x$, celle que l'on appelle la première bissectrice du plan.



3. Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n, la propriété :

$$P_n \quad : \quad 0 \le u_n \le u_{n+1} \le 10$$

- **Au premier rang pour $n = 0$**

  Nous savons déjà que $u_0 = 1$.

  Calculons le terme suivant u_1

$$u_1 = \frac{1}{10} \times u_0 \times (20 - u_0) = \frac{1}{10} \times 1 \times (20-1) = \frac{1}{10} \times 19 = 1{,}9$$

  Comme $0 \le \underbrace{u_0}_{1} \le \underbrace{u_1}_{1{,}9} \le 10$, alors la propriété P_0 est vraie.

- **Le principe de récurrence ou de propagation.**

  Supposons que la propriété P_n soit vraie, c'est-à-dire que :

$$0 \le u_n \le u_{n+1} \le 10$$

$$f(0) \le f(u_n) \le f(u_{n+1}) \le f(10)$$

$$0 \le u_{n+1} \le u_{n+2} \le 10$$

f

Strictement croissante sur $[0;10]$

  Donc la propriété P_{n+1} est alors vraie. Le principe de récurrence est établi.

Conclusion : pour tout entier naturel n, nous venons de prouver :

$$0 \le u_n \le u_{n+1} \le 10$$

4. La propriété précédente nous enseigne deux choses :

- D'abord, comme pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_n \le u_{n+1},$$

  alors la suite (u_n) est croissante.

- Ensuite, comme pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_n \le 10$$

  alors la suite (u_n) est majorée.

Conclusion : étant croissante et majorée, la suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ.

➲ Comme la fonction f est dérivable donc continue sur $[0;10]$, intervalle auquel appartient la suite (u_n), alors cette limite ℓ est l'une des solutions de l'équation :

$$f(x) = x \iff 2.x - \frac{1}{10}.x^2 = x \iff x - \frac{1}{10}.x^2 = 0 \iff$$

$$\iff \overbrace{x \times \left(1 - \frac{1}{10}.x\right) = 0}^{\text{Un produit est nul...}} \iff \overbrace{x = 0 \quad \underline{\text{ou}} \quad 1 - \frac{1}{10}.x = 0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$-\frac{1}{10}.x = -1$$

$$x = 10$$

Comme tous les termes de la suite croissante (u_n) sont supérieurs à $u_0 = 1$, alors cette limite ne peut pas être égale à 0. Nous en concluons :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 10$$

Partie B - Un modèle continu

1.a. D'abord, si la fonction u est dérivable et non nulle sur l'intervalle $[0;+\infty[$, alors il en va de même pour son inverse v. Nous avons alors :

$$v = \frac{1}{u} \iff u = \frac{1}{v}$$

Les inverses vont par paires comme les chaussettes.

Et aussi :

$$u' = \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Formule de dérivation de l'inverse d'une fonction.

1.b. Procédons par équivalences :

Valable pour tout réel $x \in [0;+\infty[$

$$u \text{ est solution de } (E) \iff u' = \frac{1}{20}.u.(10 - u) \iff -\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{20} \times \frac{1}{v} \times \left(10 - \frac{1}{v}\right)$$

On développe...

$$\iff -\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{v} - \frac{1}{20} \times \frac{1}{v^2}$$

On a multiplié l'égalité par v² qui est non nul.

$$\iff -\frac{v'}{\cancel{v^2}} = \frac{1}{2} \times \frac{v}{\cancel{v^2}} - \frac{1}{20} \times \frac{1}{\cancel{v^2}} \iff -v' = \frac{1}{2} \times v - \frac{1}{20}$$

On a multiplié l'égalité par -1

$$\iff v' = -\frac{1}{2} \times v + \frac{1}{20} \iff v \text{ est solution de } (E')$$

1.c. Les solutions de l'équation différentielle ***(E')*** : $y' = -\frac{1}{2}.y + \frac{1}{10}$ sont les fonctions v de la forme :

$$v(x) = Cste\times e^{-\frac{1}{2}.x} - \frac{1/20}{-1/2} = Cste\times e^{-\frac{1}{2}.x} - \frac{1}{20}\times\frac{2}{-1} = \boxed{Cste\times e^{-\frac{1}{2}.x} + \frac{1}{10}}$$

➲ Nous en déduisons que les solutions de l'équation différentielle **(E)** sont les fonctions u de la forme :

$$u(x) = \frac{1}{v(x)} = \boxed{\frac{1}{Cste\times e^{-\frac{1}{2}.x} + \frac{1}{10}}}$$

***Cste** comme Constante*

2. Comme la fonction g est une solution de l'équation différentielle **(E)**, alors elle est de la forme :

$$g(x) = \frac{1}{Cste\times e^{-\frac{1}{2}.x} + \frac{1}{10}}$$

Or, nous savons aussi que l'image de 0 par g est égale à 1. Il vient alors :

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{Cste\times e^{-\frac{1}{2}\times 0} + \frac{1}{10}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{Cste\times 1 + \frac{1}{10}} = 1$$

Les inverses vont par paires...

$$\Leftrightarrow \frac{1}{Cste + \frac{1}{10}} = 1 \Leftrightarrow Cste + \frac{1}{10} = 1 \Leftrightarrow Cste = 1 - \frac{1}{10} = \boxed{\frac{9}{10}}$$

Il vient alors que pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, on a :

$$g(x) = \frac{1}{\frac{9}{10}\times e^{-\frac{1}{2}.x} + \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{1}{10}} \times \frac{1}{9\times e^{-\frac{1}{2}.x} + 1} = 10\times\boxed{\frac{1}{9\times e^{-\frac{1}{2}.x} + 1}}$$

Attention, il ne s'agit pas des fonctions u et v de la question B.1

3. Déterminons la dérivée de la fonction g.

D'abord, la dérivée de la fonction $e^{-\frac{1}{2}.x} = e^{u}$ est $u'\times e^{u} = \boxed{-\frac{1}{2}\times e^{-\frac{1}{2}.x}}$

Donc, la dérivée de la fonction $v(x) = 9.e^{-\frac{1}{2}.x} + 1$ est $v'(x) = 9\times\frac{-1}{2}.e^{-\frac{1}{2}.x} = \boxed{-\frac{9}{2}.e^{-\frac{1}{2}.x}}$

Et comme cette fonction v est dérivable et non nulle (somme de deux termes positifs) sur l'intervalle $[0;+\infty[$, alors il en va de même pour son inverse $g = 10\times\frac{1}{v}$.

Il vient alors :

$$g'(x) = -10\times\frac{v'}{v^2} = -10\times\frac{-4{,}5\times e^{-\frac{1}{2}.x}}{v^2} = \boxed{\frac{45\times e^{-\frac{1}{2}.x}}{v^2}}$$

Conclusion : tous les facteurs apparaissant dans la dérivée étant strictement positifs, nous en déduisons que $g'(x)$ l'est aussi. Donc g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Une méthode moins...compliquée

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction g est la composée suivante :

$$\underset{\in[0;+\infty[}{x} \xrightarrow[\text{Décroissante sur } \mathbb{R}]{\alpha(t)=-t/2} \underset{\in]-\infty;0]}{-\frac{x}{2}} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{\text{Exponentielle}} \underset{\in]0;1]}{e^{-\frac{x}{2}}} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{\beta(t)=9.t+1} \ldots$$

$$\ldots\ldots \underset{\in]1;10]}{9.e^{-\frac{x}{2}}+1} \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]0;+\infty[]{\text{Inverse}} \frac{1}{9.e^{-\frac{x}{2}}+1} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{\alpha(t)=10.t} g(x)$$

Conclusion : la composée g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$

4. Lorsque x tend vers $+\infty$, $-\frac{x}{2}$ tend vers $-\infty$

donc $e^{-\frac{x}{2}}$ tend vers 0^{+}

donc $g(x)$ tend vers $\frac{10}{9\times 0^{+}+1} = \frac{10}{0^{+}+1} = \boxed{10}$

Conclusion : le nombre de foyers équipés d'un téléviseur à écran plat croîtra vers les 10 millions mais ne dépassera jamais cette limite.

Finalement, le tableau de variation de g est celui ci-contre➔

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
g	1 ↗	10

5. Pour connaître l'année durant laquelle le nombre de foyers français équipés d'un téléviseur à écran plat dépassera les cinq millions, nous devons résoudre l'inéquation :

$$g(x) \geq 5 \Leftrightarrow 10 \times \frac{1}{9 \times e^{-\frac{1}{2}.x} + 1} \geq 5 \Leftrightarrow \overbrace{\frac{1}{9 \times e^{-\frac{1}{2}.x} + 1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 9 \times e^{-\frac{1}{2}.x} + 1 \leq 2}^{\text{La fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[}$$

$$\Leftrightarrow 9 \times e^{-\frac{1}{2}.x} \leq 1 \Leftrightarrow \overbrace{e^{-\frac{1}{2}.x} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}.x \leq \ln\left(\frac{1}{9}\right)}^{\text{Ln est croissante sur }]0;+\infty[}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}.x \leq -\ln(9) \Leftrightarrow x \geq 2 \times \ln\left(3^2\right) = 2 \times 2 \times \ln(3) = 4 \times \ln(3) \approx 4,4$$

<u>Conclusion :</u> le nombre de foyers équipés d'un écran plat dépassera les 5 millions vers la fin du premier semestre de l'année 2009.