Le mot de l'auteur

Comme chaque été, je publie sur le site [La tavene de l'Irlandais](http://www.tanopah.com) l'ensemble des exercices que j'ai donnés en devoirs durant l'année. Voici la cuvée 2009-2010 des exercices hors analyse infligés à ces pauvres élèves de terminale S...avec spécialité.
Certains exercices sont des reprises plus ou moins trafiquées d'exerices de bac, d'autres sont des créations originales. En règle générale, ce sont les pires !
Pour la première fois de ma vie, j'ai corrigé le bac cette année. Pourtant, je pensais être à l'abri d'un tel honneur, que nos hautes instances m'évitaient pour eviter une catastrophe dans la notation. Mais cette année, ils ont osé sortit la bête de son antre. Pas de chance !
Comme nombre de mes collègues, j'ai eu à corriger une quarantaine de copies. A de très rares exceptions, elles ne furent pas mauvaises car j'oeuvrais dans un jury S spécialité maths. Ce sont rarement les plus mauvais. Peu de cas de consciences !
Le barème appliqué était stupide, injuste et ne mesurait rien...une fois encore. Il me semble que son objet était juste de produire une bonne moyenne pour agrémenter les statistiques du rectorat, les maths ne devant pas être une matière plus sélective que les autres...
Comme tous les correcteurs, je suis soumis à un certain secret donc je ne m'étendrai pas sur le sujet. Surtout qu'il ne m'a pas passionné. Cela dit, rarement dans ma carrière, je n'ai eu le sentiment d'une telle inutilité, ni d'une telle injustice.
Ce fut un vrai bonheur que de partir en vacances...

Les exercices de ce volume sont classés par catégories :

La taverne de l'Irlandais
[http://www.tanopah.com]
présente

Le reste d'une TS ...à contresens !

Le recueil des exercices donnés en devoirs de mathématiques durant la saison 2009-2010
par Jérôme ONILLON, prof. désagrégé et même pas recyclable de mathématiques

Conformité douteuse

Edition du mercredi 4 août 2010

Nombres complexes

Le complexe des équations

Le contexte

Ce premier exercice aborde la résolution d'équations dans $\mathbb{C}$, du premier et du second degré après factorisation.

L'énoncé

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(3+\boldsymbol{i}).z-1-\boldsymbol{i}=z$$

b) On appelle P le polynôme à coefficients réels :

$$P(z)=z^4-4.z^3+10.z^2-20.z+25$$

Le but de cette question est la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

1. Déterminer trois coefficients réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$$P(z)=(z^2+a)\times(z^2+b.z+c)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Le corrigé

a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée :

$$(3+\boldsymbol{i}).z-1-\boldsymbol{i}=z \Leftrightarrow 3.z+\boldsymbol{i}.z-z=1+\boldsymbol{i} \Leftrightarrow (2+\boldsymbol{i}).z=1+\boldsymbol{i}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1+\boldsymbol{i}}{2+\boldsymbol{i}}=\frac{(1+\boldsymbol{i})\times(2-\boldsymbol{i})}{(2+\boldsymbol{i})\times(2-\boldsymbol{i})}=\frac{2-\boldsymbol{i}+2.\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}^2}{(2)^2-\boldsymbol{i}^2}$$

$$=\frac{2+\boldsymbol{i}-(-1)}{4-(-1)}=\frac{3+\boldsymbol{i}}{5}$$

Conclusion : l'équation $(3+\boldsymbol{i}).z-1-\boldsymbol{i}=z$ a une unique solution complexe : $\frac{3+\boldsymbol{i}}{5}$

b.1) La méthode par identification des coefficients de même degré est la seule possible ici. Nous voulons écrire le polynôme $P(z)$ sous la forme :

On développe, puis on ordonne...

$$P(z)=(z^2+a)\times(z^2+b.z+c)$$
$$=z^4+b.z^3+c.z^2+a.z^2+a.b.z+a.c$$

$$z^4+(-4)\times z^3+10\times z^2+(-20)\times z+25=z^4+b\times z^3+(a+c)\times z^2+a.b\times z+a.c$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux. Il vient alors :

Coefficients en z^4 égaux : $1=1$

Coefficients en z^3 égaux : $-4=b$ soit $b=-4$

Coefficients en z^2 égaux : $10=a+c$ ***(3)***

Coefficients en z égaux : $-20=a.b \Leftrightarrow -20=-4.a \Leftrightarrow a=\frac{-20}{-4}=5$

Coefficients constants égaux : $25=a.c$ ***(5)***

Il ne reste plus qu'à trouver le dernier coefficient c avec l'une des deux équations restantes.

♥ Soit en utilisant l'équation ***(3)*** :

$$10=a+c \Leftrightarrow c=10-a=10-5=5$$

♥ Soit en utilisant l'équation ***(5)*** :

$$25=a.c \Leftrightarrow c=\frac{25}{a}=\frac{25}{5}=5$$

Conclusion : pour tout nombre complexe z, nous avons :

$$P(z)=z^4-4.z^3+10.z^2-20.z+25=(z^2+5)\times(z^2-4.z+5)$$

b.2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \underbrace{(z^2+5)\times(z^2-4.z+5)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{z^2+5=0 \text{ ou } z^2-4.z+5=0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

Résolvons séparément ces deux sous-équations du second degré :

♥ La première sous-équation $z^2+5=0$ peut se résoudre sans avoir recours au discriminant.

$$z^2+5=0 \Leftrightarrow z^2=-5 \Leftrightarrow \underbrace{z^2=(\boldsymbol{i}.\sqrt{5})^2}_{\text{Deux nombres ayant même carré...}} \Leftrightarrow \underbrace{z=\boldsymbol{i}.\sqrt{5} \text{ ou } z=-\boldsymbol{i}.\sqrt{5}}_{\text{...sont égaux ou opposés}}$$

♥ Pour résoudre la seconde sous-équation $z^2-4.z+5=0$ qui est du second degré, calculons son discriminant :

$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=16-20=-4=(2.\boldsymbol{i})^2$$

Comme son discriminant est négatif, cette équation admet deux racines complexes et conjuguées :

$$z=\frac{-(-4)-2.\boldsymbol{i}}{2\times 1}=\frac{4-2.\boldsymbol{i}}{2}=2-\boldsymbol{i} \qquad \text{ou} \qquad z=\frac{-(-4)+2.\boldsymbol{i}}{2\times 1}=2+\boldsymbol{i}$$

Conclusion : l'équation $P(z)=0$ admet quatre solutions complexes mais aucune réelle.

$$S=\left\{-\boldsymbol{i}.\sqrt{5} \;;\; \boldsymbol{i}.\sqrt{5} \;;\; 2-\boldsymbol{i} \;;\; 2+\boldsymbol{i}\right\}$$

Les complexes transformés

Le contexte

Cet exercice traite des écritures complexes des transformations classiques du plan.

L'énoncé

Sur la figure ci-après, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On appelle A, B et C les points d'affixes :

$z_A=\boldsymbol{i}$ | $z_B=\sqrt{3}$ | $z_C=-2-2\boldsymbol{i}$

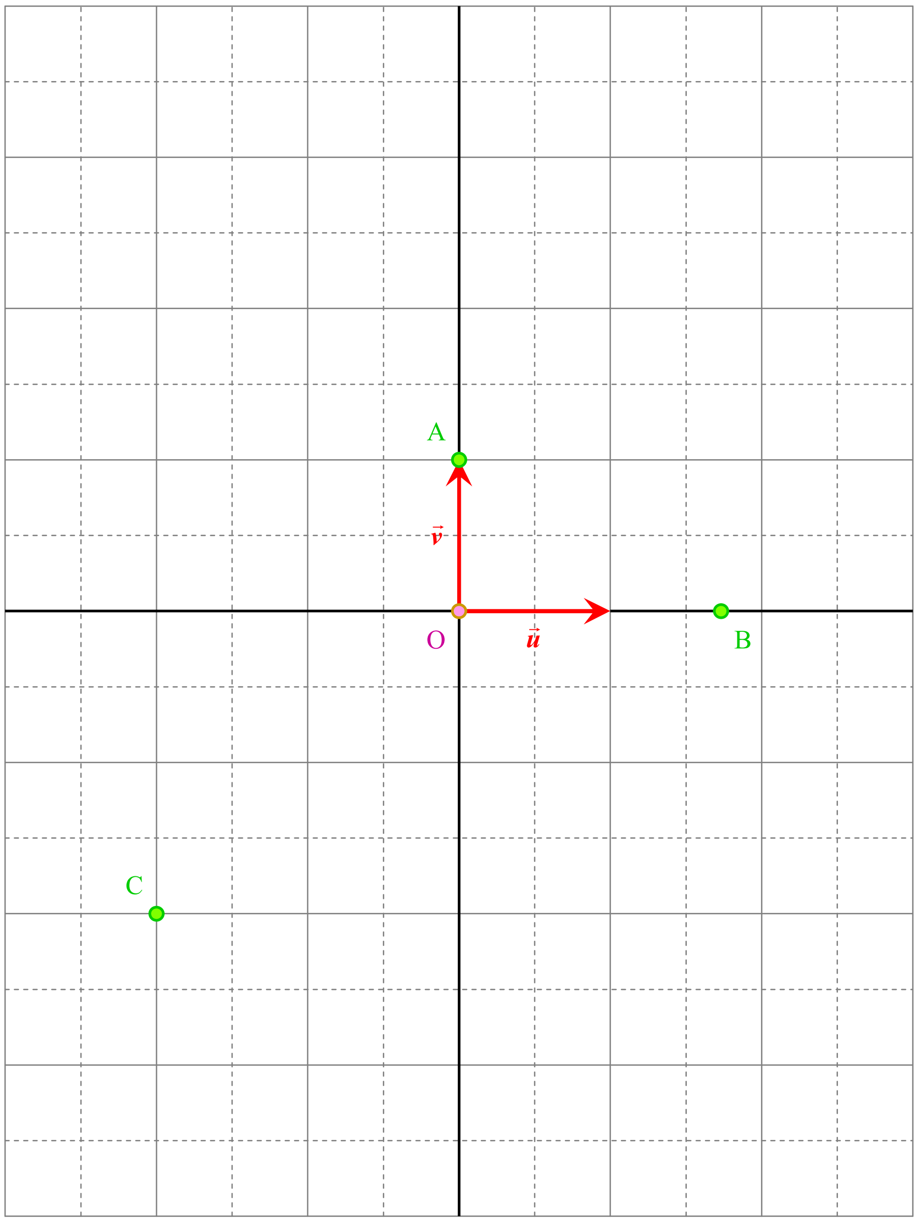
a) Déterminer l'affixe z_E du point E qui est l'image du point B par la rotation ***r*** de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) On appelle ***h*** l'homothétie de rapport 4 qui transforme A en C. Le complexe ω désigne l'affixe du centre Ω de cette homothétie ***h***.

1. Donner la forme générale de l'écriture complexe de l'homothétie ***h***.
2. Déterminer l'affixe ω du centre Ω de l'homothétie ***h***.
3. En déduire l'écriture complexe de l'homothétie ***h***.

c) Dans ce qui suit, le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la transformation indiquée.

1. Quelle transformation ***f*** du plan a pour écriture complexe $z'=z+\boldsymbol{i}$?
2. Quelle transformation ***g*** du plan a pour écriture complexe $z'+z=2.\sqrt{3}$?



Le corrigé

a) Comme le point E est l'image du point B par la rotation ***r*** de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors les affixes de tous ces points vérifient la relation complexe :

$$z_E - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} \times (z_B - z_A) \Leftrightarrow z_E - i = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \times \left(\sqrt{3} - i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_E - i = \left[\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \times \left(\sqrt{3} - i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_E - i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + i.\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.i^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i - \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-1)$$

$$\Leftrightarrow z_E = \frac{\sqrt{3}}{2} + i + \frac{\sqrt{3}}{2} + i = \sqrt{3} + 2i$$

Quelques petits rappels quant à l'égalité complexe dont nous sommes partis...

Comme le point E est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors

$$\underbrace{\frac{AE}{AB} = \left|\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \text{ et } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \arg\left(\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}}_{\text{E est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle } \pi/3} \Leftrightarrow \frac{z_E - z_A}{z_B - z_A} = 1 \times e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Deux complexes ayant mêmes modules et mêmes arguments sont égaux.

b.1) Si on a

centre $\Omega(\omega)$, alors les affixes de ceux-ci vérifient la relation :

$$z' - \omega = 4 \times (z - \omega) \Leftrightarrow z' = 4 \times z - 4.\omega + \omega = 4 \times z - 3.\omega$$

Si on veut aller un peu plus loin...

Quelques petits rappels quant cette égalité complexe...

Comme le point M' est l'image du point M par l'homothétie ***h*** de centre Ω et de rapport 4, alors :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = 4 \times \overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = 4 \times z_{\overrightarrow{\Omega M}} \Leftrightarrow z' - \omega = 4 \times (z - \omega)$$

b.2) En particulier, comme le point $C(-2-2i)$ est l'image du point $A(i)$, alors cette égalité complexe vectorielle peut aussi s'écrire :

$$z_C - \omega = 4 \times (z_A - \omega) \Leftrightarrow -2 - 2i - \omega = 4i - 4.\omega$$

$$\Leftrightarrow -\omega + 4.\omega = 4i + 2 + 2i \Leftrightarrow 3.\omega = 2 + 6i \Leftrightarrow \omega = \frac{2}{3} + 2.i$$

b.3) Nous en déduisons que l'écriture complexe de l'homothétie ***h*** est :

$$z'-\omega = 4\times(z-\omega) \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{z'}_{h(z)} = 4\times z-3.\omega = 4\times z-3\times\left(\frac{2}{3}+2i\right) = 4\times z-2-6.i$$

c) Dans ce qui suit, le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la transformation indiquée.

➲ L'écriture complexe de la transformation ***f*** peut aussi s'écrire :

$$z'=z+i \quad\Leftrightarrow\quad z'-z=i \quad\Leftrightarrow\quad z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\overrightarrow{OA}} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OA}$$

$\Leftrightarrow$ M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$

Conclusion : la transformation ***f*** est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$

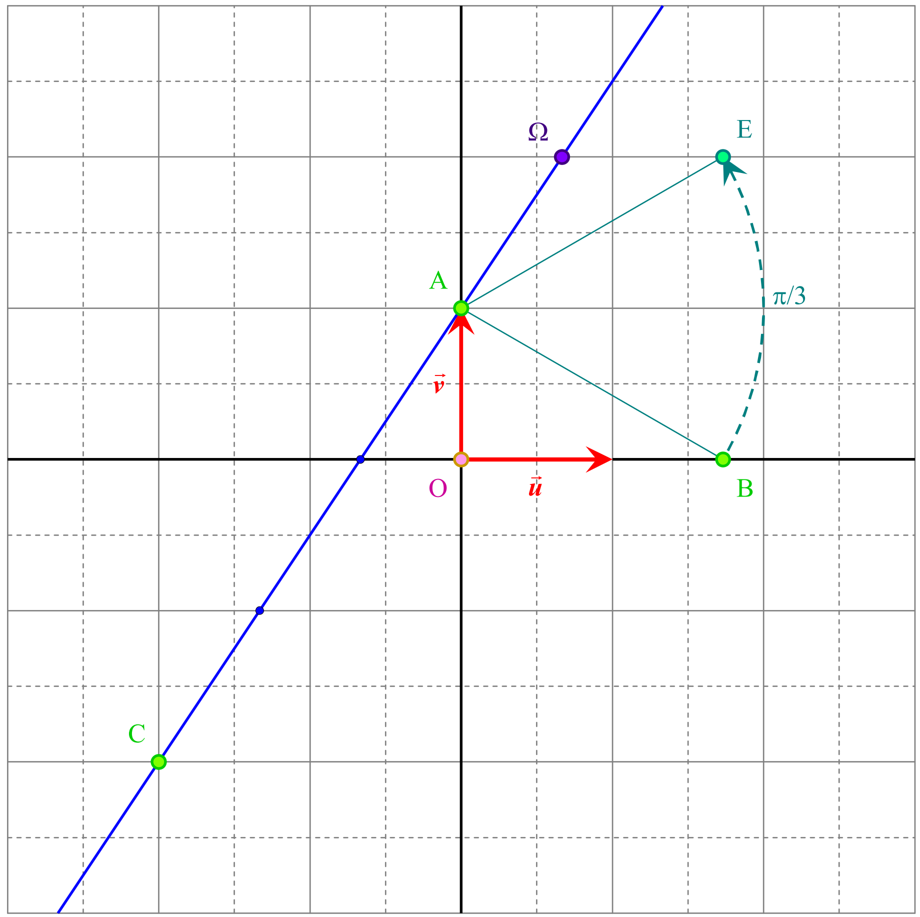
➲ L'écriture complexe de la transformation ***g*** peut aussi s'écrire :

$$z'+z = 2.\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{z'+z}{2} = \sqrt{3} = z_B \quad\Leftrightarrow\quad \text{B est le milieu du segment } [MM']$$

$\Leftrightarrow$ M' est le symétrique de M par rapport à B

Conclusion : la transformation ***g*** est la symétrie de centre B.

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre➔



LES COMPLEXES EN ACTION !

Le contexte

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes. La première est une résolution classique d'équation du troisième degré. La seconde est une application géométrique des nombres complexes.
Une fois n'est pas coutûme, chaque question est suivie de son corrigé. Version originale !

L'énoncé et le corrigé

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A - La résolution d'une équation du troisième degré

Le polynôme P est défini pour tout nombre complexe z par :

$$\mathrm{P}(z)=z^3+(4+\boldsymbol{i}).z^2+(13+4.\boldsymbol{i}).z+13.\boldsymbol{i}$$

1. Calculer $\mathrm{P}(-\boldsymbol{i})$.

D'abord, calculons les puissances seconde et troisième de $-\boldsymbol{i}$.

$$(-\boldsymbol{i})^2=(-1)^2\times \boldsymbol{i}^2=1\times(-1)=\underline{-1} \qquad \text{et} \qquad (-\boldsymbol{i})^3=(-\boldsymbol{i})^2\times(-\boldsymbol{i})=-1\times(-\boldsymbol{i})=\underline{\boldsymbol{i}}$$

Ces petites choses faites, le calcul de l'image de $-\boldsymbol{i}$ par P s'annonce des plus simples :

$$\mathrm{P}(-\boldsymbol{i})=(-\boldsymbol{i})^3+(4+\boldsymbol{i})\times(-\boldsymbol{i})^2+(13+4\boldsymbol{i})\times(-\boldsymbol{i})+13.\boldsymbol{i}$$
$$=\boldsymbol{i}+(4+\boldsymbol{i})\times(-1)-13.\boldsymbol{i}-4.\boldsymbol{i}^2+13.\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}-4-\boldsymbol{i}-13.\boldsymbol{i}-4\times(-1)+13.\boldsymbol{i}$$
$$=\cancel{\boldsymbol{i}}-\cancel{4}-\cancel{\boldsymbol{i}}-\cancel{13.\boldsymbol{i}}+\cancel{4}+\cancel{13.\boldsymbol{i}}=\underline{0}$$

Conclusion : comme son image par le polynôme est nulle, alors $-\boldsymbol{i}$ est une racine du polynôme P. Par conséquent, $\mathrm{P}(z)$ est factorisable par le facteur $z-(-\boldsymbol{i})=z+\boldsymbol{i}$.

2. Déterminer trois réels *a*, *b* et *c* tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$$\mathrm{P}(z)=(z+\boldsymbol{i})\times(a.z^2+b.z+c)$$

Procédons par identification des coefficients de même degré.
On veut écrire le polynôme $\mathrm{P}(z)$ sous la forme :

$$\mathrm{P}(z)=(z+\boldsymbol{i})\times(a.z^2+b.z+c)$$

Voilà la "bonne" méthode !

$$z^3+(4+\boldsymbol{i}).z^2+(13+4\boldsymbol{i}).z+13\boldsymbol{i}=a.z^3+b.z^2+c.z+\boldsymbol{i}.a.z^2+\boldsymbol{i}.b.z+\boldsymbol{i}.c$$
$$\underbrace{z^3+(4+\boldsymbol{i}).z^2+(13+4\boldsymbol{i}).z+13\boldsymbol{i}=a.z^3+(b+\boldsymbol{i}.a).z^2+(c+\boldsymbol{i}.b).z+\boldsymbol{i}.c}_{\text{Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux}}$$

Nous en déduisons :

Les coefficients en z^3 sont égaux : $a=\underline{1}$

Les coefficients en z^2 sont égaux : $b+\boldsymbol{i}.a=4+\boldsymbol{i} \Rightarrow b+\cancel{\boldsymbol{i}}=4+\cancel{\boldsymbol{i}}=\underline{4}$

Les coefficients en z sont égaux : $c+\boldsymbol{i}.b=13+4.\boldsymbol{i} \Rightarrow c+\cancel{4.\boldsymbol{i}}=13+\cancel{4.\boldsymbol{i}}=\underline{13}$

Les coefficients constants sont égaux : $\cancel{\boldsymbol{i}}.c=13.\cancel{\boldsymbol{i}} \Rightarrow c=\underline{13}$

Ca confirme !

Conclusion : pour tout nombre complexe z, nous avons :

$$\mathrm{P}(z)=z^3+(4+\boldsymbol{i}).z^2+(13+4.\boldsymbol{i}).z+13.\boldsymbol{i}=\underline{(z+\boldsymbol{i})\times(z^2+4.z+13)}$$

Une autre méthode consiste à extraire successivement le facteur $z+\boldsymbol{i}$ de chacun des termes du polynôme P.

Combien de fois z+*i* ?

$$\mathrm{P}(z)= z^3 +(4+\boldsymbol{i}).z^2+(13+4\boldsymbol{i}).z+13\boldsymbol{i}$$

$$=\overbrace{z^2\times(z+\boldsymbol{i})-\cancel{\boldsymbol{i}.z^2}}^{=z^3}+4.z^2+\cancel{\boldsymbol{i}.z^2}+13.z+4\boldsymbol{i}.z+13\boldsymbol{i}$$

Voilà la mauvaise méthode !

C'est une version pa... théorème des valeur... ...ires.

Combien de fois z+*i* ?

$$=z^2\times(z+\boldsymbol{i})+ 4.z^2 +13.z+4\boldsymbol{i}.z+13\boldsymbol{i}$$

$$=z^2\times(z+\boldsymbol{i})+\overbrace{4.z\times(z+\boldsymbol{i})-\cancel{4\boldsymbol{i}.z}}^{=4.z^2}+13.z+\cancel{4\boldsymbol{i}.z}+13\boldsymbol{i}$$

$$=z^2\times\underbrace{(z+\boldsymbol{i})}_{\text{Fact...}}+4.z\times\underbrace{(z+\boldsymbol{i})}_{\text{...eur co...}}+13\times\underbrace{(z+\boldsymbol{i})}_{\text{...mmun.}}=\underline{(z+\boldsymbol{i})\times(z^2+4.z+13)}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.

Lors de la question précédente, nous avons cassé le polynôme $\mathrm{P}(z)$. Il vient :

$$\mathrm{P}(z)=0 \Leftrightarrow \underbrace{(z+\boldsymbol{i})\times(z^2+4.z+13)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{z+\boldsymbol{i}=0 \ \underline{\text{ou}}\ z^2+4.z+13=0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$

L'équation du troisième degré s'est transformée en deux sous-équations.

La première sous-équation ne pose guère de problème. C'est du déjà vu !

$$z+\boldsymbol{i}=0 \Leftrightarrow z=\underline{-\boldsymbol{i}}$$

Pour résoudre la seconde sous-équation $z^2+4.z+13=0$ qui est du second degré, nous allons calculer son discriminant.

$$\Delta=4^2-4\times1\times13=16-52=\underline{-36=(6.\boldsymbol{i})^2}$$

Comme son discriminant Δ est négatif, alors cette seconde sous-équation admet deux solutions complexes et conjuguées.

$$z_1 = \frac{-4-6\boldsymbol{i}}{2\times 1} = \frac{-4-6\boldsymbol{i}}{2} = -2-3\boldsymbol{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-4-6\boldsymbol{i}}{2\times 1} = -2+3\boldsymbol{i}$$

Conclusion : l'équation $P(z)=0$ a trois solutions complexes:

$$S = \{-\boldsymbol{i} \quad -2-3\boldsymbol{i} \quad -2+3\boldsymbol{i}\}$$

Mais elle n'a aucune solution réelle.

Partie B - Dans le plan complexe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A, B et C désignent les points d'affixes respectives :

$$a = -2.\sqrt{3} \qquad b = \sqrt{3}-3\boldsymbol{i} \qquad c = 2\boldsymbol{i}$$

1.a Ecrire b sous forme exponentielle.

Commençons par calculer le module de b.

$$|b| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = \sqrt{4}\times\sqrt{3} = 2.\sqrt{3}$$

Il vient alors :

$$\frac{b}{|b|} = \frac{\sqrt{3}-3\boldsymbol{i}}{2.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2.\sqrt{3}} - \boldsymbol{i}.\frac{3}{2.\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \boldsymbol{i}.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{3}}$$

Conclusion : l'écriture exponentielle du nombre complexe b est :

$$b = \sqrt{3}-3\boldsymbol{i} = 2.\sqrt{3}\times e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{3}}$$

1.b Les points A et C sont représentés sur la figure.
Construire à la règle et au compas le point B sur la figure.

Intéressons-nous au point A d'affixe $a = -2.\sqrt{3}$.

Le module du nombre complexe a est égal à $2.\sqrt{3}$, c'est-à-dire au module de b.
Or, les modules des nombres complexes a et b sont égales aux distances OA et OB.
Ainsi, nous avons :

$$OA = |a| = 2.\sqrt{3} = |b| = OB$$

Donc le point B appartient au cercle de centre O et passant par le point A.

Conclusion : le point B est l'un des deux points d'intersection du cercle de centre O passant par A et de la droite horizontale d'équation $y=-3$. C'est ainsi que nous le construisons.

Soit E le barycentre du système $\{(A;1),(C;3)\}$ et F celui du système $\{(A;2),(B;1)\}$

2.a Etablir que l'affixe e du point E est égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}.\boldsymbol{i}$

Comme E est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(C;3)$, alors :

$$e = \frac{1\times a + 3\times c}{1+3} = \frac{-2.\sqrt{3}+3\times 2\boldsymbol{i}}{4} = -\frac{2.\sqrt{3}}{4} + \frac{6}{4}.\boldsymbol{i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}.\boldsymbol{i}$$

2.b Montrer que l'affixe f du point F est égale à $-\sqrt{3}-\boldsymbol{i}$.

Comme F est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;1)$, alors :

$$f = \frac{2\times a + 1\times b}{2+1} = \frac{-4.\sqrt{3}+\sqrt{3}-3\boldsymbol{i}}{3} = \frac{-\cancel{3}.\sqrt{3}-\cancel{3}\boldsymbol{i}}{\cancel{3}} = -\sqrt{3}-\boldsymbol{i}$$

3.a Déterminer la forme algébrique de $\frac{e-c}{e-b}$.
En déduire que, dans le triangle ABC, le point E est le pied de la hauteur issue de B.
Placer le point E sur la figure.

Nous pouvons écrire :

$$\frac{e-c}{e-b} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{i}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\boldsymbol{i}-\left(\sqrt{3}-3\boldsymbol{i}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}-\frac{1}{\cancel{2}}\boldsymbol{i}}{-\frac{3.\sqrt{3}}{\cancel{2}}+\frac{9}{\cancel{2}}\boldsymbol{i}} = \frac{-\sqrt{3}-\boldsymbol{i}}{-3.\sqrt{3}+9\boldsymbol{i}}$$

On a multiplié numérateur et dénominateur par 2

$$= \frac{\left(-\sqrt{3}-\boldsymbol{i}\right)\times\left(-3.\sqrt{3}-9\boldsymbol{i}\right)}{\left(-3.\sqrt{3}+9\boldsymbol{i}\right)\times\left(-3.\sqrt{3}-9\boldsymbol{i}\right)} = \frac{9+9.\sqrt{3}.\boldsymbol{i}+3.\sqrt{3}.\boldsymbol{i}+9.\boldsymbol{i}^2}{\left(-3.\sqrt{3}\right)^2-(9\boldsymbol{i})^2}$$

$$= \frac{\cancel{9}+12.\sqrt{3}.\boldsymbol{i}-\cancel{9}}{9\times 3-(-81)} = \frac{12.\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{27+81} = \frac{12.\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{108} = \frac{\cancel{12}.\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{9\times\cancel{12}} = \frac{\sqrt{3}}{9}.\boldsymbol{i}$$

Interviennent dans le quotient $\frac{e-c}{e-b}$ les affixes des points B, C et E.

Interprétons ce quotient complexe en termes de module...

$$\frac{CE}{BE} = \left|\frac{e-c}{e-b}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{9}.\boldsymbol{i}\right| = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

On ne peut trop rien en déduire...

...et aussi d'arguments :

$$\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CE}\right)=\arg\left(\frac{e-c}{e-b}\right)=\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\boldsymbol{i}\right)=\frac{\pi}{2}\quad\text{modulo } 2\pi$$

Donc les droites (BE) et (CE) sont orthogonales.

Le barycentre de deux points distincts appartient à la droite définie par ceux-ci.
Par conséquent, comme E est un barycentre pour les points A et C, alors il appartient à la droite (AC). Ainsi, une autre appellation de la droite (AC) est (CE).

<u>Conclusion :</u> E est le pied de la hauteur du triangle ABC issue de B.

3.b Démontrer que le point F possède une propriété analogue.
Placer le point F sur la figure.

D'abord, comme le point F est un barycentre pour les points A et B, alors il appartient à la droite (AB).
Maintenant, écrivons sous forme algébrique le quotient suivant :

$$\frac{f-c}{f-a}=\frac{-\sqrt{3}-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{i}}{-\sqrt{3}-\boldsymbol{i}-\left(-2.\sqrt{3}\right)}=\frac{-\sqrt{3}-3\boldsymbol{i}}{\sqrt{3}-\boldsymbol{i}}$$

Nous cherchons à établir une orthogonalité...

$$=\frac{\left(-\sqrt{3}-3\boldsymbol{i}\right)\times\left(\sqrt{3}+\boldsymbol{i}\right)}{\left(\sqrt{3}-\boldsymbol{i}\right)\times\left(\sqrt{3}+\boldsymbol{i}\right)}=\frac{-3-\sqrt{3}.\boldsymbol{i}-3.\sqrt{3}.\boldsymbol{i}-3.\boldsymbol{i}^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\boldsymbol{i}\right)^2}$$

$$=\frac{\cancel{-3}-4.\sqrt{3}.\boldsymbol{i}-\left(\cancel{-3}\right)}{3-(-1)}=\frac{-\cancel{4}.\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{\cancel{4}}=-\sqrt{3}.\boldsymbol{i}$$

Le quotient $\frac{f-c}{f-a}$ va nous renseigner sur les positions relatives des points A, C et F.

D'abord, par son module...

$$\frac{CF}{AF}=\left|\frac{f-c}{f-a}\right|=\left|-\sqrt{3}.\boldsymbol{i}\right|=\sqrt{3}$$

On ne peut pas en déduire grand chose.

...et ensuite par ses arguments :

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CF}\right)=\arg\left(\frac{f-c}{f-a}\right)=\arg\left(-\sqrt{3}.\boldsymbol{i}\right)=-\frac{\pi}{2}\quad\text{modulo } 2\pi$$

Donc les droites (AF) et (CF) sont orthogonales.
<u>Conclusion :</u> le point F est le pied de la hauteur du triangle (ABC) issue du point C.

<u>Note :</u> pour parvenir à nos fins, nous aurions aussi pu nous intéresser aux points B, C et F et établir (par exemple) que $\frac{f-c}{f-b}=\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$

4. On désigne par H le barycentre du système $\{(A;2),(B;1),(C;6)\}$.
Démontrer que le point H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF).
Que peut-on en déduire pour le point H ?

Cette question peut être résolue avec les seules propriétés du barycentre.

Comme E est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(C;3)$, alors :

$$1\times\overrightarrow{AE}+3\times\overrightarrow{CE}=\vec{o}\ \xrightarrow{\times 2}\ 2\times\overrightarrow{AE}+6\times\overrightarrow{CE}=\vec{o}$$

Propriété d'homogénéité du barycentre.

Donc E est aussi le barycentre des deux points pondérés $(A;2)$ et $(C;6)$.

A présent, nous allons utiliser une autre propriété du barycentre : l'associativité.
D'après celle-ci :

Comme H est le barycentre des points $\underbrace{(A;2)\quad(C;6)}_{\downarrow}$ et $(B;1)$
alors H est aussi le barycentre des points $(E;2+6=8)$ et $(B;1)$

Avant d'aller plus loin et pour ceux qui hibernaient en première S, établissons cette règle d'associativité dans ce cas particulier...avec les vecteurs :

$$\underbrace{2.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}+6.\overrightarrow{CH}=\vec{o}}_{\text{H est le barycentre de }(A;2),\ (B;1)\text{ et }(C;6)}\Leftrightarrow\underbrace{2.\overrightarrow{AE}+2.\overrightarrow{EH}}_{2.\overrightarrow{AH}}+\overrightarrow{BH}+\underbrace{6.\overrightarrow{CE}+6.\overrightarrow{EH}}_{6.\overrightarrow{CH}}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{2.\overrightarrow{AE}+6.\overrightarrow{CE}}_{=\vec{o}\text{ car E est le barycentre de }(A;2)\text{ et }(C;6)}+8.\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{BH}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 8.\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{BH}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow\text{H est barycentre de }(E;8)\text{ et }(B;1)$$

Du classique de première S !

Reprenons ! Le barycentre de deux points distincts appartenant à la droite définie par ceux-ci, nous en déduisons que le point H appartient à la droite (BE).

De la même façon, F est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;1)$. En vertu de la règle d'associativité, nous pouvons écrire :

Comme H est le barycentre des points $\underbrace{(A;2)\quad(B;1)}_{\downarrow}$ et $(C;6)$
alors H est aussi le barycentre des points $(F;2+1=3)$ et $(C;6)$

Nous en déduisons que le point H appartient aussi à la droite (CF).

<u>Conclusion :</u> les droites (BE) et (CF) étant distinctes, nous en déduisons que leur point commun H est leur (unique) point d'intersection.

Mais ce n'est pas tout car les droites (BE) et (CF) sont également deux hauteurs du triangle ABC. Leur point d'intersection H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

Une autre manière de faire pour le point H : avec les nombres complexes.

Comme le point H d'affixe h est le barycentre du système $\{(\mathrm{A};2),(\mathrm{B};1),(\mathrm{C};6)\}$, alors :

$$h=\frac{2\times a+1\times b+6\times c}{2+1+6}=\frac{2\times\left(-2.\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-3\boldsymbol{i}\right)+6\times 2\boldsymbol{i}}{9}=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}+\boldsymbol{i}}$$

Ensuite, nous avons vu les affixes e et f des barycentres E et F vérifiaient les relations :

$$e=\frac{a+3.c}{4}\Leftrightarrow 4.e=a+3.c \quad \text{et} \quad f=\frac{2.a+b}{3}\Leftrightarrow \boxed{3.f=2.a+b}$$

$$\boxed{8.e=2.a+6.c}$$

La relation définissant l'affixe h devient alors :

$$9.h=2.a+6.c+b \Leftrightarrow 8.h+h=8.e+b \Leftrightarrow 8.(h-e)=b-h$$
$$\Leftrightarrow 8.\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}$$

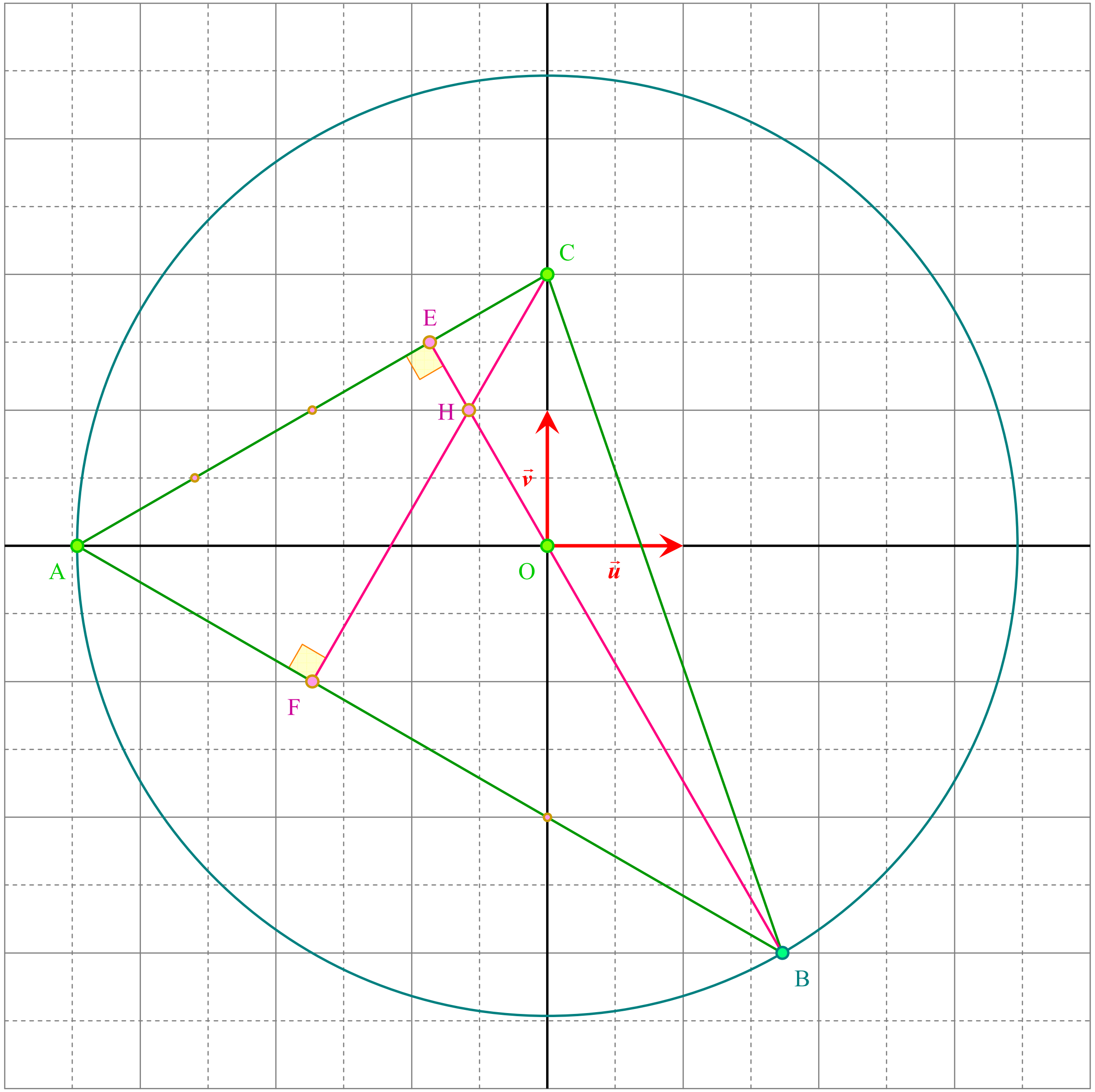
Donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ sont colinéaires. Les points E, H et B sont alignés.

Cette même relation définissant l'affixe h peut également devenir :

$$9.h=2.a+b+6.c \Leftrightarrow 3.h+6.h=3.f+6.c \Leftrightarrow 3.(h-f)=6.(c-h)$$
$$\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{\mathrm{FH}}=6.\overrightarrow{\mathrm{HC}}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{FH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ sont colinéaires. Les points F, H et C sont alignés.

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre ➔



QUESTIONS POUR DES COMPLEXES

Le contexte

Cet exercice est une partie qu'un gigantesque QCM de dix questions indépendantes. Seules celles sur les complexes ont été reproduites.
Chaque question est immédiatement suivie de son corrigé.

L'énoncé et le corrigé

Pour chaque question, quatre propositions sont faites. Laquelle est la bonne ?

1. Soit z le nombre complexe $z=1+\boldsymbol{i}$. Alors z^{14} :

est un réel positif | est un réel négatif | est un imaginaire pur | a pour module 2^{14}

L'écriture d'un nombre complexe la plus adaptée à la manipulation puissance est sa forme exponentielle. Or, nous savons :

$$z=1+\boldsymbol{i}=\sqrt{2}\times\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\sqrt{2}\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\boldsymbol{i}.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\times e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{4}}$$

Il vient alors :

$$z^{14}=\left(\sqrt{2}\right)^{14}\times\left(e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{4}}\right)^{14}=2^{7}\times e^{14\times\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{4}}=\underbrace{128\times e^{\boldsymbol{i}.\frac{7.\pi}{2}}=128\times e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}}_{\text{L'exponentielle imaginaire est } 2\pi\text{-périodique}}=128\times(-\boldsymbol{i})=-128.\boldsymbol{i}$$

Donc z^{14} est un imaginaire pur.

2. Soit z un nombre complexe d'argument θ. Un argument de $\frac{\boldsymbol{i}-1}{\overline{z}}$ est :

$\frac{3\pi}{4}-\theta$ | $\frac{3\pi}{4}+\theta$ | $-\frac{\pi}{4}-\theta$ | $-\frac{\pi}{4}+\theta$

$$\arg\left(\frac{\boldsymbol{i}-1}{\overline{z}}\right)=\arg(-1+\boldsymbol{i})-\arg(\overline{z})=\arg\left(\sqrt{2}.e^{\boldsymbol{i}.\frac{3.\pi}{4}}\right)-\left(-\arg(z)\right)=\frac{3.\pi}{4}+\theta$$

L'argument se comporte comme ln — *$-1+\boldsymbol{i}$* — *Argument du conjugué*

3. Soit z un nombre complexe non nul. Alors, modulo 2π, on a :

$\arg(z)=\arg(\overline{z})$ | $\arg(z)=\arg(-z)$ | $\arg(z)=\arg\left(\frac{1}{z}\right)$ | $\arg(\overline{z})=\arg\left(\frac{1}{z}\right)$

Cette question repose sur les trois propriétés suivantes de l'argument vues en cours :

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)\qquad \arg(-z)=\arg(z)+\pi\qquad \arg(\overline{z})=-\arg(z)$$

Fort logiquement, nous en déduisons que seule l'égalité $\arg(\overline{z})=\arg\left(\frac{1}{z}\right)$ est vraie.

Dans les questions suivantes, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Les points A et B ont pour affixes respectives :

$$z_A=\boldsymbol{i}\qquad\text{et}\qquad z_B=-1$$

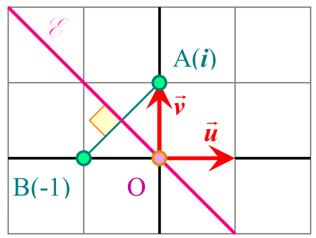
4. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\boldsymbol{i}|=|z+1|$ est :

La droite (AB) | La droite perpendiculaire à (AB) passant par O
Le segment $[AB]$ | Le cercle de diamètre $[AB]$

L'égalité définissant l'ensemble que nous appellerons $\mathscr{E}$ peut aussi s'écrire :

$$|z-\boldsymbol{i}|=|z+1|\Leftrightarrow|z-\boldsymbol{i}|=|z-(-1)|\Leftrightarrow|z-z_A|=|z-z_B|\Leftrightarrow AM=BM$$
$$\Leftrightarrow \text{M appartient à la médiatrice du segment } [AB]$$

Cette réponse ne figure pas parmi les quatre possibilités.
En fait, elle est bien cachée.
Comme le point O est équidistant de 1 des points A et B, alors il appartient à la médiatrice du segment [AB].
Conclusion : l'ensemble $\mathscr{E}$ est la droite perpendiculaire à (AB) et passant par le point O.



5. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\boldsymbol{i}|=|-1-\boldsymbol{i}|$ est :

La médiatrice de $[AB]$ | La droite (AB)
Le cercle de centre A passant par B | Le cercle de centre B passant par A

L'égalité définissant l'ensemble s'écrit aussi :

$$|z-\boldsymbol{i}|=|-1-\boldsymbol{i}|\Leftrightarrow|z-z_A|=|z_B-z_A|\Leftrightarrow AM=AB$$
$$\Leftrightarrow \text{M appartient au cercle de centre A passant par B}$$

RÉFLEXIONS COMPLEXES

Le contexte

Cet exercice issu de mon cerveau diabolique aborde de manière complexe une transformation du plan très particulière : une symétrie axiale. Il est assez long et difficile.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Dans celui-ci, les points A, B, C et D ont pour affixes respectives :

$$z_A = \boldsymbol{i} \qquad z_B = -1 \qquad z_C = -2-\frac{\boldsymbol{i}}{2} \qquad z_D = -\frac{3}{2}-\boldsymbol{i}$$

a) Montrer que le point B est le barycentre des points pondérés $\left\{(O;1),(A;1),(C;2)\right\}$

On appelle $\boldsymbol{s}$ la transformation du plan qui, à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \boldsymbol{i}\times\overline{z}-1+\boldsymbol{i}$$

b) Vérifier que les images des points A, B et C par la transformation $\boldsymbol{s}$ sont respectivement les points A, B et D.

c) On appelle E le point d'affixe $z_E = \sqrt{3}+\boldsymbol{i}$.

1. Ecrire z_E sous forme exponentielle.
2. Vérifier que le point F qui est l'image du point E par la transformation $\boldsymbol{s}$, a pour affixe :

$$z_F = \left(1+\sqrt{3}\right).\boldsymbol{i}$$

3. Ecrire sous forme algébrique le quotient complexe $\dfrac{z_F - z_E}{z_B - z_A}$.

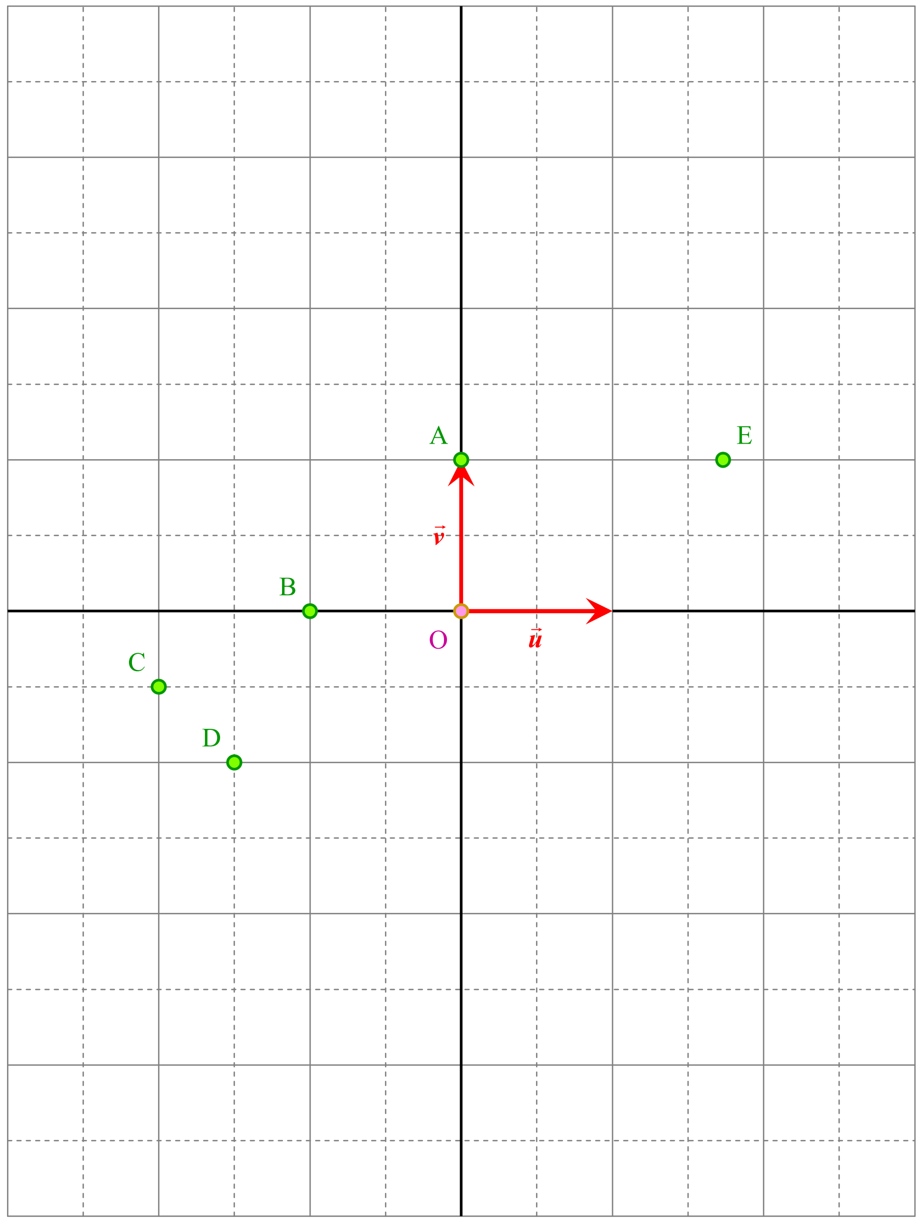
   En déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF}\right)$.

   Construire de manière précise le point F. On laissera apparents les traits de construction.

4. On appelle H l'image du point F par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   En calculant l'affixe du point H, montrer qu'il est le symétrique du point E par rapport à l'axe des réels $\left(O;\vec{u}\right)$.

   Construire précisément le point H.



d) Déterminer l'ensemble des points fixes de la transformation $\boldsymbol{s}$.

e) Dans ces questions, nous allons déterminer la nature de la transformation ***s***.

1. Démontrer que :
$$\overline{z'+1} = -i\times(z+1) \qquad \underline{\text{et}} \qquad \overline{z'-i} = -i\times(z-i)$$
2. En déduire :
$$AM' = AM \qquad \underline{\text{et}} \qquad BM' = BM$$
3. Que peut-on en déduire quant à la droite (AB) ?
Conclure quant à la nature de la transformation ***s***.

Le corrigé

a) On appelle G le barycentre des points pondérés $(O;1)$, $(A;1)$ et $(C;2)$. Son affixe z_G est donnée par :

$$z_G = \frac{1\times z_O + 1\times z_A + 2\times z_C}{1+1+2} = \frac{0+i+2\times\left(-2-\frac{i}{2}\right)}{4} = \frac{\cancel{i}-4-\cancel{i}}{4} = \frac{-4}{4} = -1 = z_B$$

<u>Conclusion :</u> le barycentre du système de points pondérés $\{(O;1),(A;1),(C;2)\}$ est le point B.

b) Calculons les affixes des images des points A, B et C par la transformation ***s***.

- $s(z_A) = i\times\overline{i} - 1 + i = i\times(-i) - 1 + i = -i^2 - 1 + i = -(-1) - 1 + i = i = z_A$
  Donc le point A est sa propre image par la transformation ***s***.
- $s(z_B) = i\times\overline{-1} - 1 + i = i\times(-1) - 1 + i = -i - 1 + i = -1 = z_B$
  Par conséquent, le point B est aussi sa propre image par la transformation ***s***.
- $$s(z_C) = i\times\overline{\left(-2-\frac{i}{2}\right)} - 1 + i$$
  $$= i\times\left(-2+\frac{i}{2}\right) - 1 + i = -2i + \frac{i^2}{2} - 1 + i = -2i - \frac{1}{2} - 1 + i = -\frac{3}{2} - i = z_D$$
  Donc l'image du point C par la transformation ***s*** est le point D.

c.1) Commençons par calculer le module du nombre complexe $z_E = \sqrt{3} + i$.

$$|z_E| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Il vient alors :

$$z_E = \sqrt{3} + i = 2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\times e^{i\frac{\pi}{6}}$$

c.2) Comme le point F est l'image de E par la transformation ***s***, alors son affixe est donnée par :

$$z_F = s(z_E) = i\times\overline{\left(\sqrt{3}+i\right)} - 1 + i$$
$$= i\times\left(\sqrt{3}-i\right) - 1 + i = \sqrt{3}.i - i^2 - 1 + i = \sqrt{3}.i + 1 - 1 + i = \left(1+\sqrt{3}\right).i$$

c.3) Nous pouvons écrire :

$$\frac{z_F - z_E}{z_B - z_A} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)i - \left(\sqrt{3}+i\right)}{(-1)-i} = \frac{\cancel{i} + \sqrt{3}.i - \sqrt{3} - \cancel{i}}{-1-i} = \frac{\sqrt{3}.i - \sqrt{3}}{-1-i} = \frac{-\sqrt{3}.i + \sqrt{3}}{1+i}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}.i\right)\times(1-i)}{(1+i)\times(1-i)} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}.i - \sqrt{3}.i + \sqrt{3}.i^2}{1-i^2}$$
$$= \frac{\cancel{\sqrt{3}} - 2.\sqrt{3}.i - \cancel{\sqrt{3}}}{1-(-1)} = -\frac{\cancel{2}.\sqrt{3}.i}{\cancel{2}} = -\sqrt{3}.i$$

➲ Concernant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$, il vient alors :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF}\right) = \arg\left(\frac{z_F - z_E}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(-\sqrt{3}.i\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Donc les droites (AB) et (EF) sont perpendiculaires.

Un argument et un angle sans simplifier le quotient

Un argument du quotient $\frac{z_F - z_E}{z_B - z_A}$ pouvait être trouvé sans avoir simplifié celui-ci.

Modulo 2π bien sûr !

$$\arg\left(\frac{z_F - z_E}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_F - z_E) - \arg(z_B - z_A)$$
$$= \arg\left(\sqrt{3}\times(-1+i)\right) - \arg(-1-i) = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

➲ Le point F est l'intersection de l'axe des imaginaires $(O;\vec{v})$ et de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par E. C'est ainsi qu'on le construit de manière précise.

Une manière de positionner le point F

Le point F est aussi le point d'intersection supérieur de l'axe des imaginaires $(O;\vec{v})$ et du cercle de centre A, passant par E et dont l'un des rayons est $\sqrt{3}$.

c.4) Comme le point H est l'image du point F par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, alors les affixes de ces trois points vérifient l'égalité :

$$z_H - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times (z_F - z_B) \Leftrightarrow z_H - (-1) = (-i)\times\left(\left(1+\sqrt{3}\right).i - (-1)\right)$$

$$\Leftrightarrow z_H = -1 - i^2 \times \left(1+\sqrt{3}\right) - i$$

$$= -1 + \left(1+\sqrt{3}\right) - i = \sqrt{3} - i = \overline{z_E}$$

<u>Conclusion :</u> comme leurs affixes sont conjuguées, alors les points E et H sont symétriques par rapport à l'axe des réels $(O;\vec{u})$. C'est ainsi que l'on construit H.

Une manière de positionner le point H
Le point H est aussi l'un des points d'intersection de la droite horizontale d'équation $y = -1$ et du cercle de centre O passant par le point E...et aussi le point F.

d) Nous savons déjà que les points A et B sont invariants par la transformation. Mais peut-être ***s*** a-t-elle d'autres points fixes.
Pour connaître l'ensemble des points M d'affixe z invariants par ***s***, nous allons résoudre l'équation :

$$M(z) \text{ est invariant par } s \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow i\times\bar{z} - 1 + i = z$$

On appelle alors x et y les parties réelle et imaginaire du complexe z. Nous avons alors :

$$z = x + i.y \quad \underline{\text{et}} \quad \bar{z} = x - i.y$$

Reprenons la résolution de l'équation :

$$M(z) \text{ est invariant par } s \Leftrightarrow i\times\bar{z} - 1 + i = z \Leftrightarrow \underbrace{i\times(x - i.y) - 1 + i = x + i.y}$$

Deux quantités complexes sont égales...

$$\Leftrightarrow i.x + y - 1 + i = x + i.y$$

...parties réelles égales... ...parties imaginaires égales

$$\Leftrightarrow y - 1 = x \quad \underline{\text{et}} \quad x + 1 = y$$

$$y = x + 1 \qquad\qquad y = x + 1$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des points fixes par ***s*** est la droite d'équation $y = x + 1$. Autrement dit, il s'agit de la droite (AB).

e.1) Pour tout nombre complexe z, nous pouvons écrire :

$$\overline{z'+1} = \overline{i\times\bar{z} - \cancel{1} + i + \cancel{1}} \qquad \underline{\text{et}} \qquad \overline{z'-i} = \overline{i\times\bar{z} - 1 + \cancel{i} - \cancel{i}}$$

$$= \overline{i\times\bar{z} + i} = \bar{i}\times\bar{\bar{z}} + \bar{i} \qquad\qquad = \overline{i\times\bar{z} + 1} = \bar{i}\times\bar{\bar{z}} - \bar{1}$$

$$= (-i)\times z + (-i) \qquad\qquad = (-i)\times z - 1$$

$$= (-i)\times(z+1) \qquad\qquad = (-i)\times z - i\times(-i) = (-i)\times(z-i)$$

e.2) Deux nombres complexes égaux ayant des modules égaux, les deux égalités précédentes deviennent :

$$\left|\overline{z'+1}\right| = \left|-i\times(z+1)\right| \qquad \underline{\text{et}} \qquad \left|\overline{z'-i}\right| = \left|-i\times(z-i)\right|$$

$$\left|\overline{z'+1}\right| = |-i|\times|z+1| \qquad\qquad \left|\overline{z'-i}\right| = |-i|\times|z-i|$$

$$\left|\overline{z'+1}\right| = 1\times|z+1| \qquad\qquad \left|\overline{z'-i}\right| = 1\times|z-i|$$

Or, un nombre complexe et son conjugué ont des modules égaux. Nous en déduisons :

$$|z'+1| = \left|\overline{z'+1}\right| = |z+1| \qquad \underline{\text{et}} \qquad |z'-i| = \left|\overline{z'-i}\right| = |z-i|$$

Pour conclure, il ne nous reste plus qu'à remarquer que les différences complexes apparaissant dans ces égalités sont aussi des affixes de vecteurs. En effet :

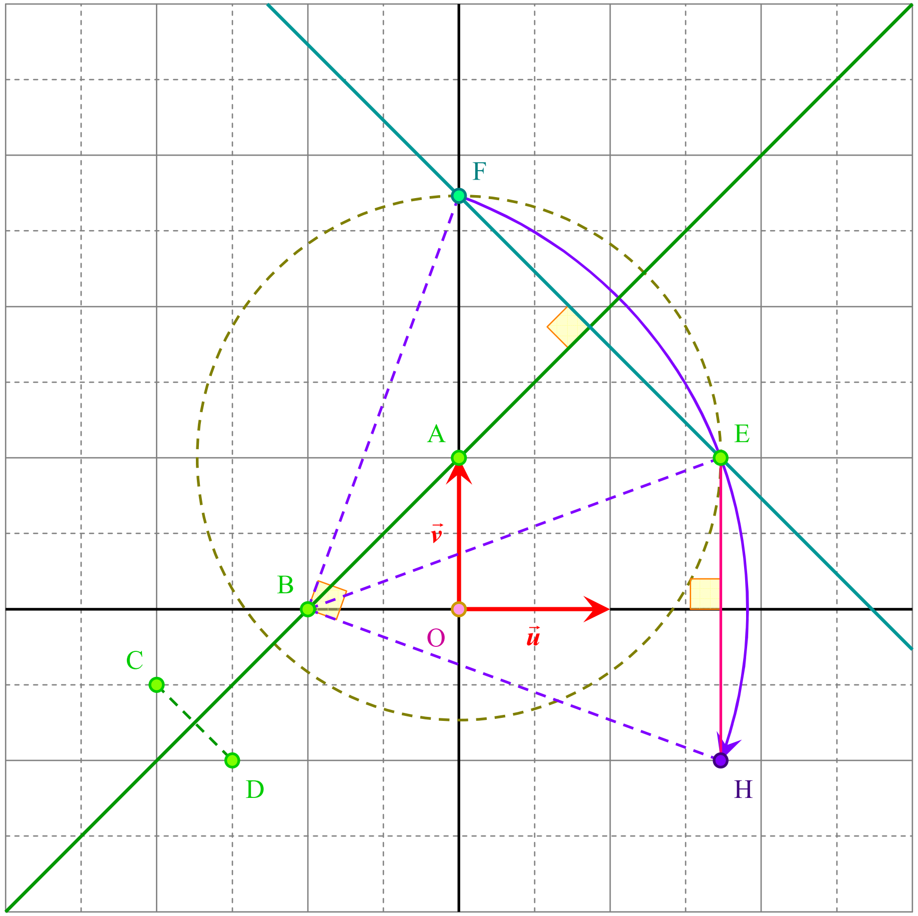
$$z_M - z_A = z - i \qquad z_{M'} - z_A = z' - i \qquad z_M - z_B = z - (-1) \qquad z_{M'} - z_B = z' - (-1)$$

Finalement, nous aboutissons bien à :

$$BM' = BM \qquad \underline{\text{et}} \qquad AM' = AM$$

e.3) Comme les points M et M' sont équidistants des points A et B, alors la droite (AB) est la médiatrice du segment [MM'].
Par conséquent, M' est l'image de M par la réflexion (symétrie axiale) d'axe (AB). Telle est la nature de la transformation ***s***.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Géométrie dans l'espace

L'espace nord-américain, juin 2008

Le contexte

Cet exercice assez classique est une version légèrement modifiée de celui donné en Amérique du Nord en juin 2008.

L'énoncé

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1. Démontrer que pour tout point M de l'espace, on a :
$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$$
2. En déduire la nature et les attributs de l'ensemble ***(E)*** des points M de l'espace tels que :
$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = 0$$

Partie B

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$A(3;0;0) \qquad B(0;6;0) \qquad C(0;0;4) \qquad D(-5;0;1)$$

1.a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés et qu'ainsi, ils définissent un plan.

1.b. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

1.c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2.a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ qui est la perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point D.

2.b. En déduire les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

2.c. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

2.d. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [AD].

Démontrer que le point H appartient à l'ensemble ***(E)*** défini dans la **partie A**.

Le corrigé

1. En fait, il s'agit de redémontrer une des variantes du théorème de la médiane.
D'abord, comme I est le milieu du segment [AD], alors nous avons la relation vectorielle :
$$\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IA}$$
Ensuite, décomposons chaque vecteur composant le produit scalaire en introduisant I.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} &= \overbrace{\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)}^{\overrightarrow{MD}}\cdot\overbrace{\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)}^{\overrightarrow{MA}} = \overbrace{\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IA}}^{\text{On double développe le produit scalaire...}}\\ &= \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}\cdot\left(-\overrightarrow{IA}\right)+\left(-\overrightarrow{IA}\right)\cdot\overrightarrow{IA}\\ &= \overrightarrow{MI}^2+\cancel{\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}}-\cancel{\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}}-\overrightarrow{IA}^2 = MI^2-IA^2\end{aligned}$$

2. En utilisant la variante du théorème de la médiane précédemment établie, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}M\in(E) &\Leftrightarrow \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA}=0 \Leftrightarrow MI^2-IA^2=0\\ &\Leftrightarrow IM^2=IA^2 \Leftrightarrow IM=IA\\ &\Leftrightarrow \text{M appartient à la sphère de centre I passant par le point A.}\end{aligned}$$

Une autre manière de voir les choses
Point n'était besoin de recourir car de par sa définition, ***(E)*** est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MD}$ soient orthogonaux, c'est-à-dire tels que le triangle AMD soit rectangle en M. Autrement dit, ***(E)*** est la sphère de diamètre [AD].

Partie B

1.a. Comparons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

	$\overrightarrow{AB}$		$\overrightarrow{AC}$
Abscisse	-3	$\xrightarrow{\times 1}$	-3
Ordonnée	6	$\xrightarrow{\times 0}$	0
Cote	0	$\xleftarrow{\times 0}$	4

<u>Conclusion :</u> comme leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points A, B et C ne sont pas alignés et ils définissent un plan.

1.b. Calculons les produits scalaires du vecteur $\vec{n}$ avec deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC).

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}=4\times(-3)+2\times6+3\times0=-12+12+0=0 \quad \text{donc} \quad \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}=4\times(-3)+2\times0+3\times4=-12+0+12=0 \quad \text{donc} \quad \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$$

Conclusion : le vecteur $\vec{n}$ étant orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ directeurs du plan (ABC), alors il est normal à ce plan.

1.c. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux.

$$M(x;y;z)\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-3\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\times4+y\times2+z\times3=0 \Leftrightarrow 4.x+2.y+3.z-12=0$$

Conclusion : une équation du plan (ABC) est $4.x+2.y+3.z-12=0$.

Une autre méthode plus...directe ?

Comme le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), alors une équation de celui-ci est de la forme :

$$4.x+2.y+3.z+d=0$$

Il reste à déterminer le coefficient constant d.
Comme le point $A(3;0;0)$ appartient au plan (ABC), alors les coordonnées du premier vérifient l'équation du second. Il vient alors :

$$4.x_A+2.y_A+3.z_A+d=0 \Leftrightarrow 4\times3+2\times0+3\times0+d=0 \Leftrightarrow d=-12$$

Conclusion : une équation du plan (ABC) est $4.x+2.y+3.z-12=0$.

2.a. Comme la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC), alors un vecteur directeur de la droite Δ est le vecteur $\vec{n}$ qui est normal au plan (ABC).

Nous pouvons alors écrire :

$$M(x;y;z)\in\Delta \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x+5\\y\\z-1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe un réel t tel que } \overrightarrow{DM}=t.\vec{n} \quad \text{soit} \quad \begin{cases}x=4.t-5\\y=2.t\\z=3.t+1\end{cases}$$

Voilà une représentation paramétrique de Δ !

2.b. Le projeté orthogonal H est l'intersection du plan (ABC) et de sa perpendiculaire Δ.

Comme H appartient à la droite Δ, alors il existe un réel t_H tel que $\begin{cases}x_H=4.t_H-5\\y_H=2.t_H\\z_H=3.t_H+1\end{cases}$

Comme le point H appartient au plan (ABC), alors les coordonnées du premier vérifient l'équation du second.

$$4.x_H+2.y_H+3.z_H-12=0 \Leftrightarrow 4.(4.t_H-5)+2.(2.t_H)+3.(3.t_H+1)-12=0$$
$$\Leftrightarrow 16.t_H-20+4.t_H+9.t_H+3-12=0$$
$$\Leftrightarrow 29.t_H-29=0 \Leftrightarrow t_H=\frac{29}{29}=1$$

Nous en déduisons les coordonnées du point H.

$$x_H=4\times1-5=-1 \qquad y_H=2\times1=2 \qquad z_H=3\times1+1=4$$

2.c. Il y a deux méthodes pour calculer la distance entre le point D et le plan (ABC).

- **Avec la formule vue en cours et l'équation cartésienne du plan (ABC).**

$$distance(D;\text{plan }(ABC))=\frac{|4\times(-5)+2\times0+3\times1-12|}{\sqrt{4^2+2^2+3^2}}=\frac{|-20+0+3-12|}{\sqrt{16+4+9}}=\frac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$$

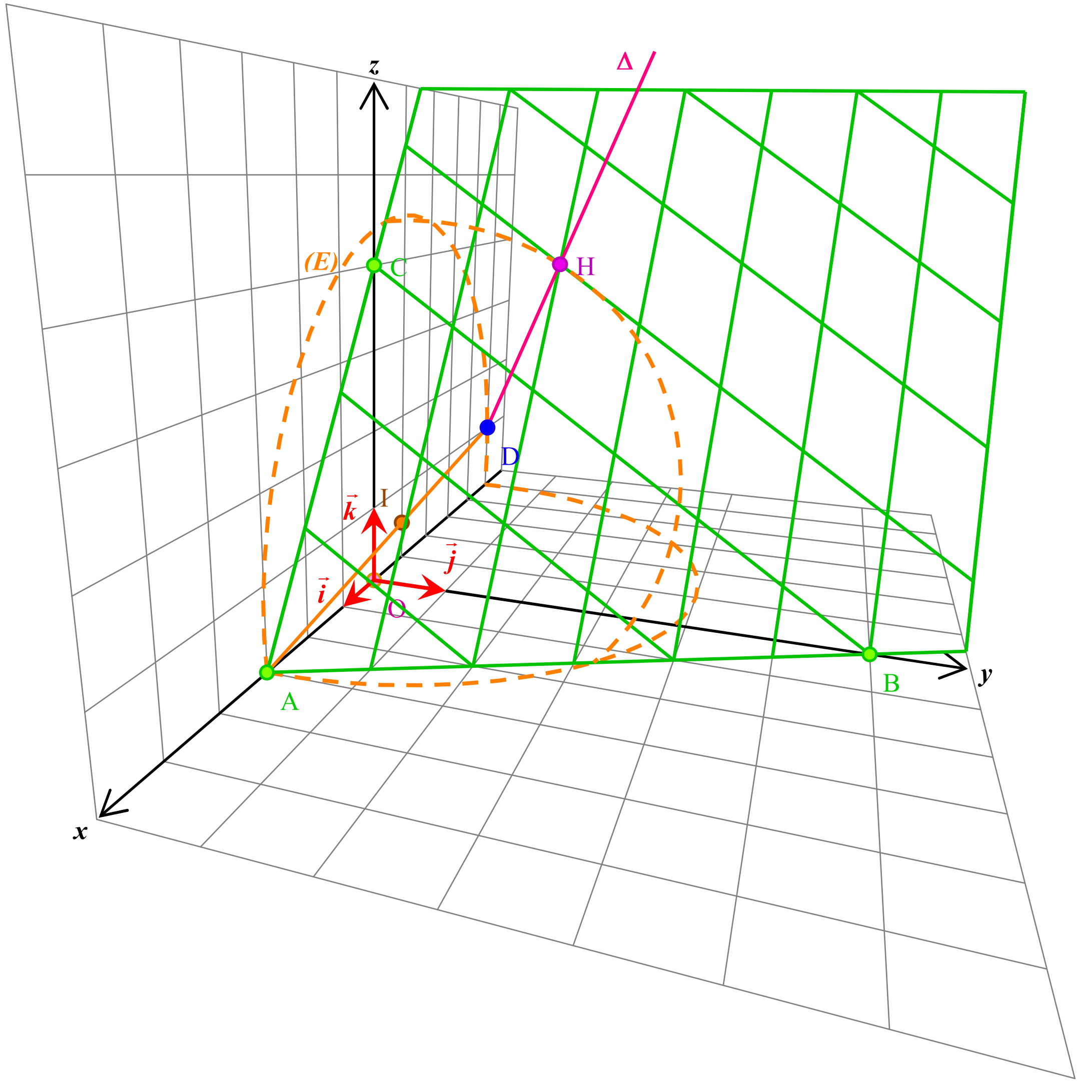
Valeur absolue de l'équation du plan divisée par norme du vecteur normal

- **En utilisant le projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC)**

$$distance(D;\text{plan }(ABC))=DH=\sqrt{((-1)-(-5))^2+(2-0)^2+(4-1)^2}$$
$$=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{16+4+9}=\sqrt{29}$$

2.d. Les coordonnées du milieu I du segment [AD] sont données par :

$$x_I = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{3+(-5)}{2} = \frac{-2}{2} = \underline{-1}$$
$$y_I = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{0+0}{2} = \frac{0}{2} = \underline{0}$$
$$z_I = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = \underline{0{,}5}$$



2.e. Il existe plusieurs façons de prouver que le point H appartient à l'ensemble ***(E)***.

- **On peut calculer le produit scalaire qui définit l'ensemble *(E)*.**

$$\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HA} = \begin{pmatrix} -1-(-5) \\ 2-0 \\ 4-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = 4\times(-4)+2\times2+3\times4 = -16+4+12 = \underline{0}$$

Donc le point H appartient bien à la sphère ***(E)*** de diamètre [AD].

- ***On peut calculer les longueurs IH et IA.***

$$IH = \sqrt{((-1)-(-1))^2 + (2-0)^2 + (4-0{,}5)^2}$$
$$= \sqrt{0^2 + 2^2 + 3{,}5^2} = \sqrt{0+4+12{,}25} = \underline{\sqrt{16{,}25}}$$
$$IA = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-0)^2 + (0-0{,}5)^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + 0^2 + (-0{,}5)^2} = \sqrt{16+0+0{,}25} = \underline{\sqrt{16{,}25}}$$

Comme $IH = IA$, alors le point H appartient à la sphère de centre I passant par A, autrement dit à l'ensemble ***(E)***.

Probabilités

Des probabilités si discrètes : la totale

Le contexte

Cet exercice original aborde à peu près tout ce qui est au programme des probabilités non continues : les combinaisons, les probabilités conditionnelles, les événements indépendants et les schémas de Bernoulli.

L'énoncé

Les trois parties composant cet exercice sont indépendantes.

Partie 1 - Quelques petites questions de cours

n et p désignent deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

a) Rappeler l'expression de $\binom{n}{p}$ en fonction des entiers n et p.

b) Appliquer la formule précédente au calcul de $\binom{12}{3}$ et effectuer celui-ci.

c) Démontrer que les «*p* parmi *n*» sont symétriques, c'est-à-dire que :

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

Partie 2 - Le cœur en tête...et le pognon dans les poches.

La *Blancoise des Jeux*, célèbre entreprise d'extorsion de richesses, vient de créer un nouveau jeu : le *cœur en tête*. Son principe est le suivant :

> Dans une urne, se trouvent les douze têtes couronnées d'un jeu de cartes : rois, dames et valets de cœur, de carreau, de pique et de trèfle.
> Ces douze cartes sont indiscernables au toucher et à la vue du joueur.
> Le joueur tire simultanément une main de trois cartes dans l'urne.
> Si cette main est constituée de trois cœurs, alors il a gagné et le jeu s'arrête.
> S'il n'a aucun cœur ou s'il a un seul cœur dans sa main, il a perdu et le jeu s'arrête aussi.
> Par contre, s'il a deux cœurs dans sa main de trois cartes, alors il tire une quatrième carte bonus parmi celles restant dans l'urne.
> Si cette quatrième carte est un cœur, il a gagné. Sinon il perdu.

On définit les événements suivants :

- C_3 = «la main de trois cartes est composée de trois coeurs»
- C_2 = «la main de trois cartes contient exactement deux coeurs»
- A = «la main de trois cartes contient au plus un coeur»
- G = «le joueur gagne la partie»

a) Déterminer :
1. Le nombre de mains de trois cartes possibles.
2. Le nombre de mains favorables à l'événement C_3.
3. Le nombre de mains favorables à l'événement C_2.
4. Le nombre de mains favorables à l'événement A.

b) Représenter la situation d'une partie par un arbre pondéré. On prendra soin de bien le légender.

c) Démontrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{1}{55}$.

d) Le joueur gagne sa partie. Calculer la probabilité que sa main de trois cartes contienne exactement deux cœurs.

Partie 3 - Par dessus la troisième corde !

L'Atomiseur est un catcheur de la *BAC* (*Blancoise Association de Catch*).
La Blancoise des Jeux organise des paris sur les matchs de *L'Atomiseur*.
La probabilité que *L'Atomiseur* gagne un match quelconque est de 0,4. Quoiqu'en fait, tout dépende du calibre de l'adversaire qui lui est opposé ! Car ses adversaires se répartissent en trois catégories :

- Les catcheurs classés *poids lourds* représentent 20% de ses adversaires.
  S'il affronte un *poids lourd*, la probabilité qu'il le batte est de 0,1.
- Les *poids moyens* représentent 50% de ses adversaires.
- Les *poids plumes* représentent 30% de ses adversaires.
  S'il affronte un *poids plume*, la probabilité qu'il le batte est de 0,6.

Dans un match, *L'Atomiseur* affronte un adversaire tiré au sort.
On définit les événements suivants :

- L = «*L'Atomiseur* affronte un *poids lourd*» .
- M = «*L'Atomiseur* affronte un *poids moyen*»
- U = «*L'Atomiseur* affronte un *poids plume*»
- G = «*L'Atomiseur* gagne son match»

a) Démontrer que les événements M et G sont indépendants.

b) Au cours du premier semestre 2010, *L'Atomiseur* livrera 13 matchs contre des adversaires à chaque fois tirés au sort. Il peut donc rencontrer le même adversaire plusieurs fois au cours du semestre.
Les parieurs peuvent parier sur le nombre de matchs qu'il remportera durant ce semestre.
Un parieur hésite : doit-il parier que *L'Atomiseur* remportera exactement 3 matchs sur les 13 ou doit-il parier qu'il remportera exactement 6 matchs sur les 13 ?

Le corrigé

Partie 1 - Quelques petites questions de cours

a) Par définition, l'expression du «*p* parmi *n*» est donnée par :

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)}^{\text{Au total } p \text{ facteurs}}}{\underbrace{1\times2\times3\times\ldots\times p}_{\text{Là encore, } p \text{ facteurs}}} = \frac{n!}{p!\times(n-p)!}}$$

b) Nous en déduisons :

$$\binom{12}{3} = \frac{12\times11\times10}{1\times2\times3} = \frac{\cancel{6}\times2\times11\times10}{\cancel{6}} = 220$$

c) L'entier $\binom{n}{p}$ comptabilise le nombre de sous-ensembles de *p* éléments dans un grand ensemble en comptant *n*. Autrement dit, il comptabilise le nombre de façons de choisir *p* éléments parmi *n* possibles.
Or, quand on choisit *p* éléments parmi *n*, on en délaisse ou on en choisit par défaut $n-p$.

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{\text{Les } p \text{ éléments choisis}}}_{\text{Un sous-ensemble...}}\ \underbrace{\boxed{\text{Les } n-p \text{ éléments délaissés}}}_{\text{...et son complémentaire.}}}^{\text{Les } n \text{ éléments parmi lesquels s'effectue le choix}}$$

Ainsi, dans un ensemble comportant *n* éléments, il existe autant de sous-ensembles à *p* éléments que de sous-ensembles à $n-p$ éléments. C'est pour cela que nous avons :

$$\overbrace{\binom{n}{p}}^{\text{Nombre de sous-ensembles de } p \text{ éléments}} = \overbrace{\binom{n}{n-p}}^{\text{Nombre de sous-ensembles de } n-p \text{ éléments}}$$

Partie 2 - Le cœur en tête...et le pognon dans les poches.

a) Le tirage des trois cartes est simultané.

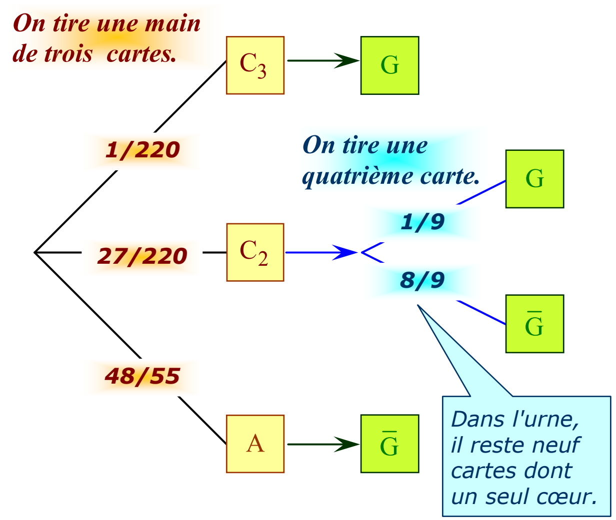
1. Il s'agit de choisir 3 cartes parmi 12. Donc il y a $\binom{12}{3} = 220$ mains possibles.

2. Pour réaliser l'événement C_3, il faut tirer 3 cœurs parmi les 3 dans l'urne.
Donc il y a $\binom{3}{3} = 1$ main favorable à l'événement C_3

3. Pour réaliser l'événement C_2, il faut tirer 2 cœurs parmi les 3 dans l'urne et une troisième carte parmi les 9 autres dans l'urne.
Donc il y a $\binom{3}{2}\times\binom{9}{1} = 3\times9 = 27$ mains favorables à l'événement C_2.

4. L'événement A est le contraire de l'événement $C_2 \cup C_3$.
Par conséquent, le nombre de mains favorables à l'événement A est de :
$$220-27-1=192$$

b) Une partie de *cœur en tête* peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



c) En application de l'arbre et de la formule des probabilités totales, nous avons :

$$p(G) = p(C_3) + p(C_2 \cap G)$$

$$= p(C_3) + p(C_2) \times p(G \underline{\text{ sachant }} C_2) = \frac{1}{220} + \frac{27}{220} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{220} + \frac{3}{220} = \frac{4}{220} = \frac{1}{55}$$

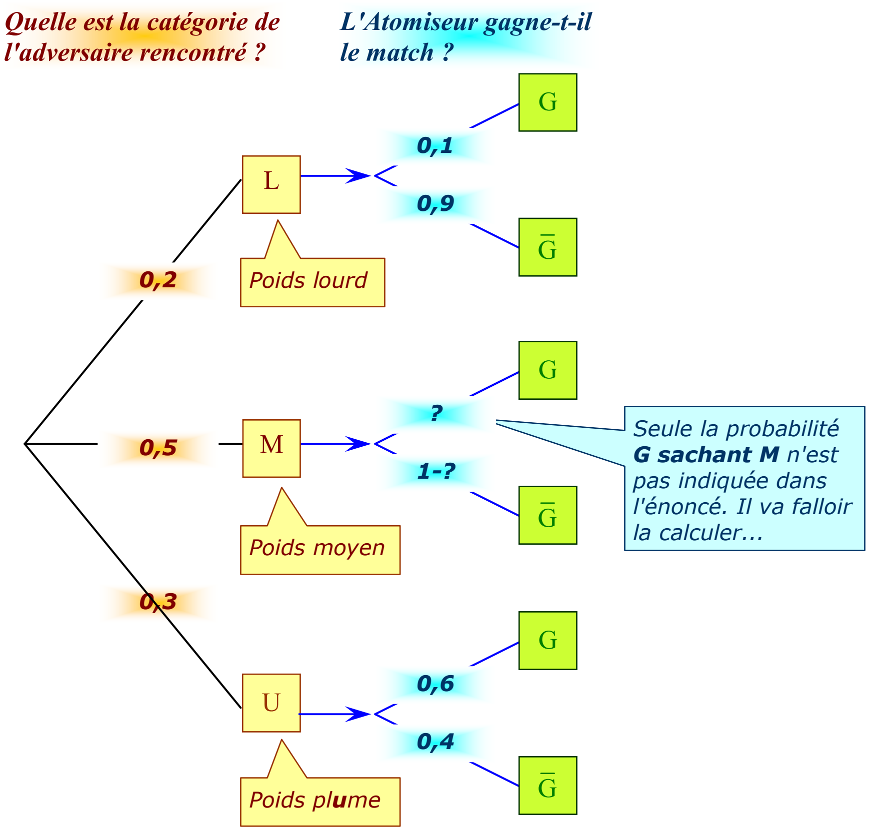
d) Calculons la probabilité conditionnelle :

$$p(C_2 \underline{\text{ sachant }} G) = \frac{p(C_2 \cap G)}{p(G)} = \frac{\frac{3}{220}}{\frac{4}{220}} = \frac{3}{\cancel{220}} \times \frac{\cancel{220}}{4} = \frac{3}{4}$$

<u>Conclusion :</u> lorsque le joueur gagne, il y a trois chances sur quatre que sa main contienne exactement deux cœurs.

Partie 3 - Par dessus la troisième corde !

a) La situation d'un match de *L'Atomiseur* peut être représentée par l'arbre pondéré :



Calculons la probabilité conditionnelle de l'événement G sachant M.
Comme les événements L, M et P forment une partition de l'univers des possibles, alors, en application de la formule des probabilités totales, nous pouvons écrire :

$$p(G) = p(G \cap L) + p(G \cap M) + p(G \cap U)$$

$$= p(L) \times p(G \underline{\text{ sachant }} L) + p(M) \times p(G \underline{\text{ sachant }} M) + p(U) \times p(G \underline{\text{ sachant }} U)$$

$$0,4 = 0,2 \times 0,1 + 0,5 \times p(G \underline{\text{ sachant }} M) + 0,3 \times 0,6$$

$$0,4 = 0,02 + 0,5 \times p(G \underline{\text{ sachant }} M) + 0,18$$

Il vient alors :

$$0,5 \times p(G \underline{\text{ sachant }} M) = 0,4 - 0,2 \quad \Leftrightarrow \quad p(G \underline{\text{ sachant }} M) = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

<u>Conclusion :</u> comme

$$\boxed{p(G \underline{\text{ sachant }} M) = p(G) = 0,4},$$

alors la réalisation de l'événement M n'influe pas sur la réalisation de l'événement G. Donc les événements M et G sont indépendants.

Une méthode peut-être un peu plus rapide ?
Nous aurions pu aussi nous contenter de calculer la probabilité de l'événement $G \cap M$.
Avec la formule des probabilités totales, nous aurions pu écrire :

$$p(G \cap M) = p(G) - p(G \cap L) - p(G \cap U) = 0,4 - 0,02 - 0,18 = 0,2$$

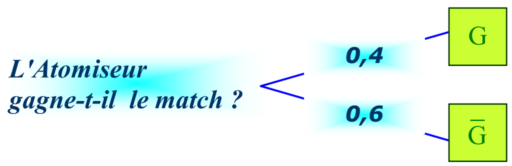
Et alors, comme :

$$p(G) \times p(M) = 0,4 \times 0,5 = 0,20 = p(G \cap M)$$

Autre caractérisation de l'indépendance.

nous en aurions déduit que les événements G et M sont bien indépendants.

b) Les 13 matchs de *L'Atomiseur* forment un schéma de Bernoulli de 13 épreuves :



On appelle X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de victoires de *L'Atomiseur* au cours des 13 matchs.
La loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres 13 et 0,4.

Par conséquent :

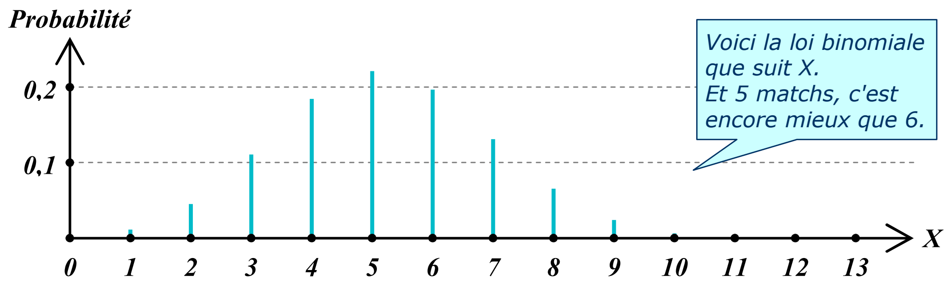
- La probabilité que *L'Atomiseur* gagne 3 matchs sur les 13 est donnée par :

$$p(X=3)=\binom{13}{3}\times 0,4^3\times 0,6^{10}\approx \underline{0,111}$$

- La probabilité que *L'Atomiseur* gagne 6 matchs sur les 13 est donnée par :

$$p(X=6)=\binom{13}{6}\times 0,4^6\times 0,6^7\approx \underline{0,197}$$

Conclusion : s'il veut maximiser ses chances de gain, le parieur doit parier que *L'Atomiseur* gagnera 6 matchs sur les 13 qu'il livrera au cours du premier semestre 2010.



Probabilités françaises, septembre 2009

Le contexte

Cet exercice a été donné en septembre 2009 lors de la session française de rattrapage. C'est un classique du genre avec probabilité conditionnelle, schéma de Bernoulli et loi exponentielle.

L'énoncé

Un réparateur de vélos a acheté 30% de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40% à un second et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80% de pneus sans défaut, le second 95% et le troisième 85%.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu dans son stock.

a. Construire un arbre de probabilité traduisant la situation et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.

b. Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du second fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat au millième.

2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.
Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie du résultat au millième près.

3. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit la loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle que, pour tout nombre réel positif k :

$$p(X\le k)=\int_0^k \lambda.e^{-\lambda.x}.dx$$

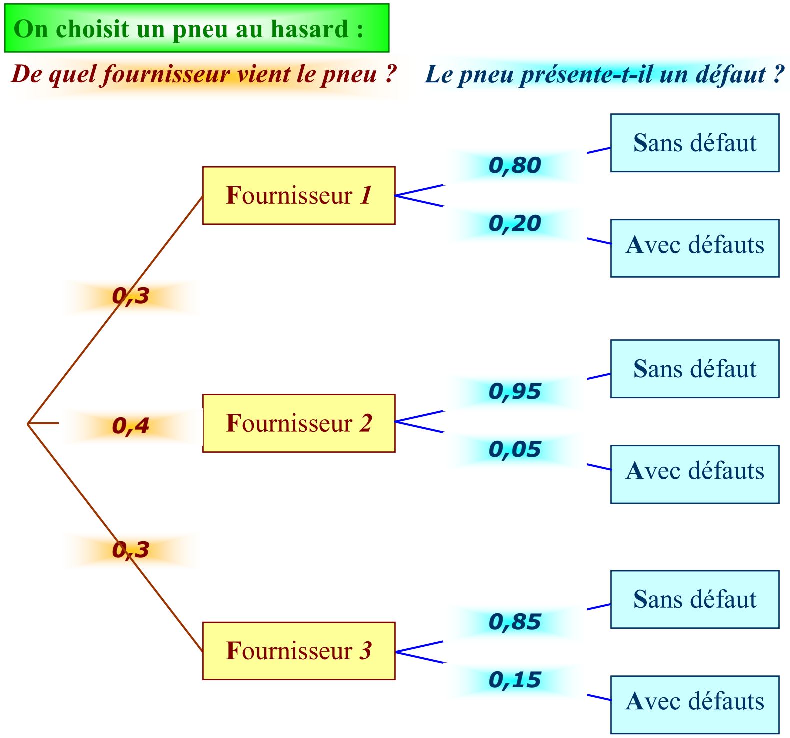
a. Montrer que :

$$p(500\le X\le 1000)=e^{-500\lambda}-e^{-1000\lambda}$$

b. La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1000 kilomètres sans crevaison est égale à $\frac{1}{4}$. Déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} près du paramètre λ.

Le corrigé

1.a. L'arbre pondéré traduisant la situation est le suivant :



➲ On définit les événements suivants :

F_1 = «Le pneu vient du fournisseur *1*» F_3 = «Le pneu vient du fournisseur *3*»

F_2 = «Le pneu vient du fournisseur *2*» S = «Le pneu ne présente aucun défaut»

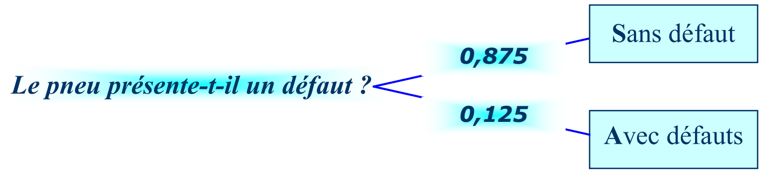
D'après la formule des probabilités totales, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(F_1 \cap S) + p(F_2 \cap S) + p(F_3 \cap S) \\ &= p(F_1)\times p(S \text{ \underline{sachant} } F_1) + p(F_2)\times p(S \text{ \underline{sachant} } F_2) + p(F_3)\times p(S \text{ \underline{sachant} } F_3) \\ &= 0{,}3\times 0{,}8 + 0{,}4\times 0{,}95 + 0{,}3\times 0{,}85 = \underline{0{,}875} \end{aligned}$$

1.b. On veut calculer la probabilité conditionnelle suivante :

$$p(F_2 \text{ \underline{sachant} } S) = \frac{p(F_2\cap S)}{p(S)} = \frac{p(F_2)\times p(S \text{ \underline{sachant} } F_2)}{p(S)} = \frac{0{,}4\times 0{,}95}{0{,}875} \approx \underline{0{,}434}$$

2. Les dix pneus forment un schéma de Bernoulli de dix épreuves :



On appelle N la variable aléatoire comptabilisant le nombre de pneus avec défauts.
La loi de probabilité de N est la loi binomiale de paramètres 10 et 0,125.
On souhaite calculer la probabilité :

$$\begin{aligned} p(N\le 1) &= p(N=0) + p(N=1) \\ &= \binom{10}{0}\times 0{,}125^0\times 0{,}875^{10} + \binom{10}{1}\times 0{,}125^1\times 0{,}875^9 \\ &\approx \underline{0{,}639} \end{aligned}$$

3.a. Une primitive sur ℝ de $\lambda.e^{-\lambda x} = -(-\lambda).e^{-\lambda.x} = -u'\times e^u$ où $\left| \begin{array}{l} u(x) = -\lambda.x \\ u'(x) = -\lambda \\ \text{Dérivable sur } \mathbb{R} \end{array} \right.$

est la fonction $-e^u = \underline{-e^{-\lambda.x}}$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} p\left(X\in[500;1000]\right) &= p\left(X\in[0;1000]\right) - p\left(X\in[0;500[\right) \\ &= \int_0^{1000} \lambda.e^{-\lambda x}.dx - \int_0^{500} \lambda.e^{-\lambda x}.dx \\ &= \underbrace{\int_{\boxed{0}}^{1000} \lambda.e^{-\lambda x}.dx + \int_{500}^{\boxed{0}} \lambda.e^{-\lambda x}.dx = \int_{500}^{1000} \lambda.e^{-\lambda x}.dx}_{\text{Merci Chasles !}} \\ &= \left[-e^{-\lambda x}\right]_{500}^{1000} = \left(-e^{-\lambda\times 1000}\right) - \left(-e^{-\lambda\times 500}\right) = \underline{e^{-500.\lambda} - e^{-1000.\lambda}} \end{aligned}$$

Avec les variables aléatoires continues, peu importent les bornes !

3.b. Comme suggéré par l'indication, résolvons l'équation du second degré d'inconnue t :

$$t - t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4.t - 4.t^2 = 1 \Leftrightarrow \underline{0 = 4.t^2 - 4t + 1}$$

C'est aussi l'identité remarquable (2.t-1)²...

Calculons le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = (-4)^2 - 4\times 4\times 1 = 16 - 16 = 0$$

Comme son discriminant est nul, alors cette équation n'admet qu'une seule solution :

$$t = -\frac{(-4)}{2\times 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Revenons à la question principale. On souhaite déterminer le réel λ tel que :

$$p(500 \le X \le 1000) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{-500\lambda} - e^{2\times(-500\lambda)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{e^{-500\lambda}} - \left(\boxed{e^{-500\lambda}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow t - t^2 = \frac{1}{4}$$

En posant : $t = e^{-500\lambda}$

Nous retombons sur notre équation du second degré qui n'a qu'une seule solution.

$$p(500 \le X \le 1000) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t - t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-500.\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -500.\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -500.\lambda = -\ln(2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{500} \approx 0{,}0014$$

Spécialité

ROC COMME ILS DISENT

Le contexte

Une question de cours : démontrer que l'ensemble des nombres premiers dans $\mathbb{N}$ compte une infinité d'éléments

L'énoncé

On rappelle la définition et le théorème suivants :

- «Un entier naturel supérieur ou égal à 2 est dit premier s'il n'est divisible que par 1 et lui-même»
- «Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est divisible par (au moins) un nombre premier.»

En utilisant ces deux énoncés, démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers dans $\mathbb{N}$.

Le corrigé

Procédons par l'absurde et supposons que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ ne contienne qu'un nombre fini d'entiers premiers. Disons qu'il en a n et nous les noterons $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
On appelle alors K l'entier naturel défini par :

$$K = \overbrace{p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n}^{\text{Le produit des } n \text{ entiers premiers}} + 1$$

Cet entier K est clairement plus grand que les n entiers naturels premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
Par conséquent, il ne peut être l'un d'entre eux et ne peut pas être premier.
En application du second énoncé, K est donc divisible par (au moins) un entier premier.
Nous noterons p_i ce diviseur premier.
Or, le facteur p_i divise aussi et de facto le produit des premiers $p_1 \times \ldots \times p_i \times \ldots \times p_n$.
En divisant ses deux termes, l'entier p_i divise la différence $K - p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n = 1$.
Or, le seul diviseur de 1 dans $\mathbb{N}$ est...1. Nous en déduisons donc :

$$p_i = 1$$

Cela dit, p_i étant un entier premier, il est strictement plus grand que 1. **BEUG !**

Conclusion : la supposition faite était erronée. $\mathbb{N}$ contient un nombre infini d'entiers premiers.

ROC COMME ILS DISENT ENCORE

Le contexte

Encore une question de cours et des plus classiques ! Etablir le théorème de Gauss à partir de celui de l'identité de Bezout.

L'énoncé

a) Rappeler les énoncés suivants :

1. La définition de deux entiers relatifs a et b premiers entre eux.
2. Le théorème de l'identité de Bezout.
3. Le théorème de Gauss.

b) Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de l'identité de Bezout.

Le corrigé

a) D'après le cours :

1. Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux lorsque et seulement lorsque leur plus grand diviseur commun est 1.
2. Le théorème de l'identité de Bezout prescrit que si on appelle δ le PGCD de deux entiers relatifs a et b, alors il existe deux autres entiers relatifs u et v tels que :
$$a \times u + b \times v = \delta$$
3. Le théorème de Gauss énoncé que pour trois entiers relatifs quelconques a, b et c :
$$\boxed{\text{Si } \left| \begin{array}{l} a \text{ divise le produit } b \times c \\ a \text{ est premier avec le facteur } b \end{array} \right. \quad \underline{\text{alors}} \quad a \text{ divise l'autre facteur } c}$$

b) Soient a, b et c sont trois entiers tels que $\left| \begin{array}{l} a \text{ divise le produit } b \times c \\ a \text{ est premier avec le facteur } b \end{array} \right.$.

Comme a et b sont premiers entre deux, alors leur PGCD est égal à 1 et en application du théorème de l'identité de Bezout, il existe deux entiers u et v tels que :

$$a \times u + b \times v = 1$$

Multiplions cette égalité par c. Il vient alors :

$$\underbrace{a}_{} \times c \times u + \underbrace{b \times c}_{\text{Divisible par } a} \times v = c$$

Comme a divise le produit $b \times c$, alors il divise de facto son multiple $b \times c \times v$.
Comme a divise aussi le produit $a \times c \times u$, alors il divise la somme $a \times c \times u + b \times c \times v = c$
Conclusion : l'entier a divise c.

Deux équations diophantiennes

Le contexte

Voici un grand classique du genre spécialité : la résolution d'équations diophantiennes.

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les deux équations diophantiennes suivantes d'inconnues les entiers relatifs x et y.

$$14.x-7.y=4 \qquad\qquad 11.x-5.y=1$$

Le corrigé

➲ Résolvons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation diophantienne :

$$14.x-7.y=4$$

Pour tous entiers relatifs x et y, 7 est un diviseur commun des produits $14.x$ et $7.y$.
Donc 7 est de facto un diviseur de leur différence $14.x-7.y$.

Comme 7 ne divise pas 4, alors il ne peut pas exister de couples d'entiers relatifs $(x;y)$ vérifiant l'égalité :

$$14.x-7.y=4$$

<u>Conclusion :</u> la première équation diophantienne n'a pas de solution.

➲ Résolvons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation diophantienne :

$$11.x-5.y=1$$

Première chose à faire : trouver une solution particulière.
Le couple $(1;2)$ est une solution particulière de cette équation. En effet :

$$11\times1-5\times2=11-10=1$$

Ensuite, de quelle forme sont les solutions de cette équation ?
Soit $(u;v)$ un couple d'entiers relatifs solution de notre éqution diophantienne. Il vient :

$$11\times u-5\times v=1=11\times1-5\times2 \quad\Leftrightarrow\quad 11\times(u-1)=5\times(v-2)$$

Nous déduisons de cette dernière égalité que 11 divise le produit $5\times(v-2)$.

Mais, comme 11 est premier avec 5, alors, en application du théorème de Gauss, il divise nécessairement le second facteur $v-2$.
Donc il existe un entier relatif λ tel que :

$$v-2=11\times\lambda \quad\Leftrightarrow\quad v=2+11\times\lambda$$

Il vient alors pour l'autre entier u :

$$11\times(u-1)=5\times(v-2) \quad\Leftrightarrow\quad \cancel{11}\times(u-1)=5\times\cancel{11}\times\lambda \quad\Leftrightarrow\quad u=1+5\times\lambda$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation diophantienne sont de la forme $(1+5\times\lambda;2+11\times\lambda)$ où λ est un entier relatif.

Enfin, se pose la question de la réciproque : tous les couples d'entiers $(1+5\times\lambda;2+11\times\lambda)$ sont-ils des solutions de l'équation diophantienne. Vérifions !

$$11\times(1+5\times\lambda)-5\times(2+11\times\lambda)=11+\cancel{55\times\lambda}-\cancel{55\times\lambda}-10=1$$

La réponse est oui !

<u>Conclusion :</u> les solutions de la seconde équation diophantienne sont les couples d'entiers relatifs de la forme $(1+5\times\lambda;2+11\times\lambda)$ où λ est un entier relatif.

LE DÉBUT DU RATTRAPAGE

Le contexte

Cet exercice de congruence est le début de l'exercice de spécialité donnée en France en septembre 2009. Il n'est pas très difficile et d'une facture assez classique.

L'énoncé

Les trois questions de cette partie sont le début de l'exercice de spécialité donné en septembre dernier.

a. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009 par 11.

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{10} par 11

c. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{2009}+2009$ par 11.

Le corrigé

a) Comme $2009 = 182\times 11 + \overset{0\leq\ldots<11}{\boxed{7}}$, alors le reste de la division euclidienne de 2009 modulo 11 est égal à 7. En termes de congruence, cela s'écrit :

$$\underline{2009 \equiv 7 \quad \text{modulo } 11}$$

b) Les mordus d'informatique savent que 2^{10} est égal à 1024.

Comme $2^{10} = 93\times 11 + \overset{0\leq\ldots<11}{\boxed{1}}$, alors le recte de la division euclidinne de 2^{10} modulo 11 est égal à 1. En termes de congruence, cela se traduit par :

$$\underline{2^{10} \equiv 1 \quad \text{modulo } 11}$$

c) Utilisons ce qui précède ! Modulo 11, nous pouvons écrire :

$$2^{2009} \equiv 2^{200\times 10+9} \equiv 2^{200\times 10}\times 2^9 \equiv \left(2^{10}\right)^{200}\times 2^9 \equiv 1^{200}\times 2^9 \equiv \underline{2^9 \quad \text{modulo } 11}$$

Les passionnés de la puce (toujours eux) savent que 2^9 est égal à 512. Et alors :

$$\text{Comme} \quad 2^9 = 512 = 46\times 11 + \overset{0\leq\ldots<11}{\boxed{6}} \quad \underline{\text{alors}} \quad \underline{2^9 \equiv 6 \quad \text{modulo } 11}$$

Finalement, nous en concluons que modulo 11 :

$$2^{2009}+2009 \equiv 6+7 \equiv 13 \equiv \underline{2 \quad \text{modulo } 11}$$

CONGRU À SON CARRÉ

Le contexte

Voici un exercice issu de mon petit cerveau mais certainement pas si original que cela. Il mèle congruence et théorème de Gauss.

L'énoncé

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la résolution dans $\mathbb{Z}$ des équations de la forme :

$$n^2 \equiv n \quad \text{modulo } p$$

où n est l'inconnue et p un entier naturel fixé qui est supérieur ou égal à 2.

a. Déterminer les entiers naturels compris entre 0 et 11 solutions de l'équation :

$$n^2 \equiv n \quad \text{modulo } 12$$

En déduire les solutions de cette équation dans $\mathbb{Z}$.

b. Un corollaire du théorème de Gauss énonce :
«Si un nombre premier divise un produit, alors il divise nécessairement l'un de ses facteurs».
Démontrer que si p est premier, alors nous avons l'équivalence :

$$n^2 \equiv n \quad \text{modulo } p \quad \Leftrightarrow \quad n \equiv 0 \quad \text{modulo } p \quad \underline{\text{ou}} \quad n \equiv 1 \quad \text{modulo } p$$

Note : on établira séparément chaque implication où l'on pourra utiliser le théorème de Gauss.
En déduire, lorsque p est premier, les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation

$$n^2 \equiv n \quad \text{modulo } p$$

Le corrigé

a) Examinons les carrés modulo 12 des douze premiers entiers :

$0^2 \equiv 0$ mod 12 **Ok!**	$1^2 \equiv 1$ mod 12 **Ok!**	$2^2 \equiv 4$ mod 12 **No!**
$3^2 \equiv 9$ mod 12 **No!**	$4^2 \equiv 16 \equiv 4$ mod 12 **Ok!**	$5^2 \equiv 25 \equiv 1$ mod 12 **No!**
$6^2 \equiv 36 \equiv 0$ mod 12 **No!**	$7^2 \equiv 49 \equiv 1$ mod 12 **No!**	$8^2 \equiv 64 \equiv 4$ mod 12 **No!**
$9^2 \equiv 81 \equiv 9$ mod 12 **No!**	$10^2 \equiv 100 \equiv 4$ mod 12 **No!**	$11^2 \equiv 121 \equiv 1$ mod 12 **No!**

<u>Conclusion :</u> les entiers compris entre 0 et 11 solutions de l'équation

$$n^2 \equiv n \quad \text{modulo } 12$$

sont 0; 1 et 4.

b) Démontrer une équivalence, c'est établir une double implication.

($\Rightarrow$) : Soit n un entier naturel solution de l'équation $n^2 \equiv n \text{ modulo } p$.

L'entier naturel p divise alors la différence $n^2 - n = n\times(n-1)$.

Comme le diviseur p est premier, alors, en application de la variante du théorème de Gauss citée par l'énoncé, soit p divise le premier facteur n, soit p divise le second facteur $n-1$.
Autrement dit :

$$n^2 \equiv n \text{ modulo } p \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \text{Soit } p \text{ divise } n-0 \quad \Leftrightarrow \quad n\equiv 0 \text{ modulo } p \\ \text{Soit } p \text{ divise } n-1 \quad \Leftrightarrow \quad n\equiv 1 \text{ modulo } p \end{array} \right.$$

La première implication est établie !

($\Leftarrow$) : La réciproque sera plus facile à établir ! En effet :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Si} \quad n\equiv 0 \text{ modulo } p \quad \underline{\text{alors}} \quad n^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \text{ modulo } p \quad \underline{\text{donc}} \quad n^2 \equiv n \text{ modulo } p \\ \text{Si} \quad n\equiv 1 \text{ modulo } p \quad \underline{\text{alors}} \quad n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \text{ modulo } p \quad \underline{\text{donc}} \quad n^2 \equiv n \text{ modulo } p \end{array} \right.$$

<u>Conclusion :</u> si p est un entier naturel premier, nous avons bien l'équivalence :

$$n^2 \equiv n \text{ modulo } p \quad \Leftrightarrow \quad n\equiv 0 \text{ modulo } p \quad \underline{\text{ou}} \quad n\equiv 1 \text{ modulo } p$$

Par conséquent, les solutions entières de l'équation $n^2 \equiv n \text{ modulo } p$ sont les entiers naturels de la forme $\underbrace{\lambda\times p}_{n\equiv 0(p)}$ et $\underbrace{\lambda\times p+1}_{n\equiv 1(p)}$ où λ est un entier relatif quelconque.

Le pourquoi du corollaire du théorème de Gauss !

Le théorème de Gauss que nous connaissons tous s'énonce ainsi :

$$\boxed{\text{Si} \left| \begin{array}{l} a \text{ divise le produit } b\times c \\ a \text{ est premier avec le facteur } b \end{array} \right. \quad \underline{\text{alors}} \quad a \text{ divise l'autre facteur } c}$$

où a, b et c sont trois entiers naturels quelconques.

Intéressons-nous au cas où l'entier a soit premier. Cela signifie qu'il n'admet pour diviseurs que 1 et lui-même.

<u>Question :</u> si l'entier a ne divise pas le facteur b, peut-on dire qu'il est premier avec lui ?
Pour le savoir, il suffit de connaître le PGCD de a et b.
PGCD comme Plus Grand Diviseur Commun.
L'entier a qui est premier n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même !
Comme a ne divise pas b, alors le seul diviseur commun à a et b ne peut être que 1.
Comme leur unique plus grand diviseur commun est égal à 1, alors les entiers a et b sont premiers entre eux.
Le théorème de Gauss s'applique alors et a divise nécessairement l'autre facteur c.
D'où la variante !

L'insoutenable question qui fait bouillir le cerveau

Le contexte

Un petit exercice de congruence reposant sur une astuce que l'on voit ou pas !

L'énoncé

L'entier naturel n vérifie les deux égalités de congruence suivantes :

$n\equiv 3 \text{ modulo } 5$ ⋮ $n^2 \equiv 2 \text{ modulo } 7$

Déterminer le reste de la division euclidienne de n^2 par 35. On justifiera sa réponse.

Le corrigé

D'abord, comme $n\equiv 3 \text{ modulo } 5$ alors $n^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \text{ modulo } 5$.

Donc 5 divise la différence $n^2 - 9$.
Ensuite, modulo 7, nous avons :

$$n^2 \equiv 2 \equiv 9 \text{ modulo } 7$$

Donc 7 divise aussi la différence $n^2 - 9$.

Nous sommes en position d'appliquer une variante du théorème de Gauss :

$$\text{Comme} \left| \begin{array}{l} 5 \text{ divise } n^2-9 \\ 7 \text{ divise } n^2-9 \\ 5 \text{ et } 7 \text{ sont premiers entre eux} \end{array} \right. \quad \underline{\text{alors}} \quad \text{le produit } 7\times 5 = 35 \text{ divise } n^2-9$$

Nous déduisons la congruence :

$$n^2 \equiv 9 \text{ modulo } 35$$

La preuve de cette variante du théorème de Gauss

La variante du théorème de Gauss que nous appliquons peut s'énoncer ainsi :

$$\boxed{\text{Si} \left| \begin{array}{l} a \text{ et } b \text{ divisent le produit } c \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{array} \right. \quad \underline{\text{alors}} \quad \text{le produit } a\times b \text{ divise } c}$$

Comme a et b divisent c, alors il existe deux entiers λ et μ tels que $c = \lambda\times a = \mu\times b$
Ensuite, comme a et b sont premiers entre eux, alors, d'après le théorème de l'identité de Bezout, il existe deux entiers u et v tels que :

$$a\times u + b\times v = 1 \quad \Rightarrow \quad a\times u\times c + b\times v\times c = c \quad \Rightarrow \quad a\times b\times(u\times\mu + a\times\lambda) = c$$

Donc le produit $a\times b$ divise c.

ARITHMÉTIQUE CALÉDONNIENNE

Le contexte

Cet exercice est celui donné en spécialité en Nouvelle-Calédonie en novembre 2009.

L'énoncé

Les questions **1** et **2** sont indépendantes.
Soit n un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée ***(E)*** :

$$3\times x+7\times y=10^{2.n}$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

a. Déterminer un couple $(u;v)$ d'entiers relatifs tels que $3.u+7.v=1$.

En déduire une solution particulière $(x_0;y_0)$ de l'équation ***(E)***.

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x;y)$ solutions de ***(E)***.

2. On considère l'équation notée ***(G)*** :

$$3\times x^2+7\times y^2=10^{2.n}$$

où x et y sont deux entiers relatifs.

a. Montrer que $100\equiv 2$ modulo 7

Démontrer que si $(x;y)$ est solution de l'équation ***(G)***, alors

$$3.x^2\equiv 2^n \text{ modulo } 7$$

b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3\times x^2$ par 7							

c. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation ***(G)*** n'admet pas de solution.

Le corrigé

1.a. Après quelques instants de réflexions, on remarque que les entiers $\begin{cases}u=5\\v=-2\end{cases}$ marchent.

En effet :

$$3\times 5+7\times(-2)=15-14=1$$

Si on multiplie cette dernière égalité par $10^{2.n}$, il vient alors :

$$3\times 5+7\times(-2)=1 \xrightarrow{\times 10^{2.n}} 3\times\underbrace{\left(5\times 10^{2.n}\right)}_{x_0}+7\times\underbrace{\left(-2\times 10^{2.n}\right)}_{y_0}=10^{2.n}$$

Conclusion : une solution particulière de l'équation ***(E)*** est le couple $\left(5\times 10^{2.n};-2\times 10^{2.n}\right)$

1.b. Cette équation ***(E)*** est diophantienne. Un bonheur à résoudre !

Première phase : de quelle forme sont les solutions de l'équation diophantienne ***(E)*** ?

Soit $(u;v)$ un couple d'entiers relatifs solution de ***(E)***. Il vérifie l'égalité :

$$3\times u+7\times v=10^{2.n}=\underbrace{3\times\left(5\times 10^{2.n}\right)+7\times\left(-2\times 10^{2.n}\right)}_{\text{D'après 1.a}}$$

$$3\times\left(u-5\times 10^{2.n}\right)=7\times\left(-v-2\times 10^{2.n}\right)$$

D'après cette dernière égalité, 7 divise le produit $3\times\left(u-5\times 10^{2.n}\right)$.

Or, 7 est premier avec le premier facteur 3.

D'après le théorème de Gauss, 7 divise nécessairement le second facteur $u-5\times 10^{2.n}$.
Donc il existe un entier relatif k tel que :

$$u-5\times 10^{2.n}=7\times k \Leftrightarrow u=5\times 10^{2.n}+7\times\lambda$$

Il vient alors pour l'autre inconnue v :

$$3\times\left(u-5\times 10^{2.n}\right)=7\times\left(-v-2\times 10^{2.n}\right) \Leftrightarrow 3\times\cancel{7}\times k=\cancel{7}\times\left(-v-2\times 10^{2.n}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\times k=-v-2\times 10^{2.n}$$

$$\Leftrightarrow v=-2\times 10^{2.n}-3\times k$$

Ainsi, toutes les solutions de ***(E)*** sont de la forme $\left(5\times 10^{2.n}+7\times k;-2\times 10^{2.n}-3\times k\right)$ où k est un entier relatif quelconque.

Seconde phase : réciproquement, tout couple $\left(5\times10^{2.n}+7\times k;-2\times10^{2.n}-3\times k\right)$ est-il solution de ***(E)*** ?

Pour tout entier relatif k, nous pouvons écrire :

$$3\times\left(5\times10^{2.n}+7\times k\right)+7\times\left(-2\times10^{2.n}-2\times k\right)=15\times10^{2.n}+\cancel{21\times k}-14\times10^{2.n}-\cancel{21\times k}$$
$$=10^{2.n}\times(15-14)=10^{2.n}\times1=10^{2.n}$$

Donc, c'est bien le cas !

Conclusion : les solutions de l'équation diophantienne ***(E)*** $:3\times x+7\times y=10^{2.n}$ sont les couples d'entiers de la forme $\left(5\times10^{2.n}+7\times k;-2\times10^{2.n}-3\times k\right)$ où k est un entier relatif.

2.a. Comme $\begin{cases}100=14\times7+2\\0\le2<7\end{cases}$, alors le reste de la division euclidienne de 100 par 7 est 2.

Nous en déduisons :

$$100\equiv2\ \text{modulo } 7$$

Et par conséquent, modulo 7, il vient :

$$10^{2.n}\equiv\left(10^2\right)^n\equiv(100)^n=2^n\ \text{modulo } 7$$

➲ Si le couple d'entiers relatifs $(x;y)$ est solution de l'équation ***(G)***, alors il vérifie :

$$3\times x^2+7\times y^2=10^{2.n}$$

Modulo 7, cette égalité devient :

$$\underbrace{3\times x^2+7\times y^2\equiv10^{2.n}\Leftrightarrow3\times x^2+0\times y^2\equiv2^n\Leftrightarrow3\times x^2\equiv2^n}_{\text{Car 7 et } 10^{2.n} \text{ sont respectivement congrus à 0 et } 2^n \text{ modulo 7}}$$

2.b. Modulo 7, un entier relatif x ne peut être congru qu'à 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou bien 6.

$x=0$ modulo 7 $\Rightarrow$ $3.x^2\equiv3\times0^2\equiv0$ modulo 7

$x=1$ modulo 7 $\Rightarrow$ $3.x^2\equiv3\times1^2\equiv3$ modulo 7

$x=2$ modulo 7 $\Rightarrow$ $3.x^2\equiv3\times2^2\equiv12\equiv7+5\equiv5$ modulo 7

$x=3$ modulo 7 $\Rightarrow$ $3.x^2\equiv3\times3^2\equiv3\times9=27=3\times7+6\equiv6$ modulo 7

$x=4$ modulo 7 $\Rightarrow$ $3.x^2\equiv3\times4^2\equiv3\times16\equiv48\equiv6\times7+6\equiv6$ modulo 7

$x=5$ modulo 7 $\Rightarrow$ $3.x^2\equiv3\times5^2\equiv3\times25\equiv75\equiv10\times7+5\equiv5$ modulo 7

$x=6$ modulo 7 $\Rightarrow$ $3.x^2\equiv3\times6^2\equiv3\times36\equiv108\equiv15\times7+3\equiv3$ modulo 7

2.c. Voyons ce que donnent les premières puissances de 2 modulo 7.

$n=1\Rightarrow2^1\equiv2$ modulo 7 $\qquad n=2\Rightarrow2^2\equiv4$ modulo 7

$n=3\Rightarrow2^3\equiv8\equiv1$ modulo 7 $\qquad n=4\Rightarrow2^4\equiv16\equiv2$ modulo 7

$n=5\Rightarrow2^5\equiv32\equiv4$ modulo 7 $\qquad\ldots$

Modulo 7, les puissances 2^n semblent suivre toujours le même cycle : 1, puis 2, puis 4.

Montrons que pour tout entier positif n, la puissance 2^n est congru modulo 7 soit à 1, soit à 2 ou bien soit à 4.

Pour ce faire, on appelle q et r les quotient et reste de la division euclidienne de n par 3. Ces deux entiers naturels vérifient les deux conditions :

$$n=3\times q+r \quad \text{et} \quad 0\le r<3$$

Modulo 7, nous pouvons alors écrire :

$$2^n\equiv2^{3.q+r}\equiv2^{3.q}\times2^r\equiv\left(2^3\right)^q\times2^r\equiv(1)^q\times2^r\equiv1\times2^r\equiv2^r\ \text{modulo } 7$$

A partir de là, seuls trois cas sont possibles suivant la valeur du reste r :

Si $r=0$ alors $2^n\equiv2^0\equiv1$ modulo 7

Si $r=1$ alors $2^n\equiv2^1\equiv2$ modulo 7

Si $r=2$ alors $2^n\equiv2^2\equiv4$ modulo 7

Conclusion : modulo 7, la puissance 2^n ne peut être congrue qu'à 1 ; 2 ou 4.

➲ Résumons ce que nous ont appris les questions précédentes :

D'abord, la question 2.b nous a appris que quelque soit l'entier relatif x, le produit $3.x^2$ ne peut être congru modulo 7 qu'à 0 ; 3 ; 5 ou 6.

Ensuite, quelque soit l'entier naturel n, la puissance 2^n ne peut être congrue modulo 7 qu'à 1 ; 2 ou 4.

Donc il n'existe pas d'entier relatif x et d'entier naturel n pour lesquels :

$$3.x^2\equiv2^n\ \text{modulo } 7$$

Or, la question 2.a nous a montré que si un couple $(x;y)$ était solution de l'équation ***(G)***, alors les entiers x et n vérifiaient la relation de congruence :

$$3.x^2\equiv2^n\ \text{modulo } 7\ .$$

Cette dernière équation n'ayant pas de solution, il en va alors de même pour ***(G)***.

LES SIMILITUDES...À L'ÉPREUVE

Le contexte

Un exercice original et assez complet sur les similitudes où elles sont abordées à la fois sous l'angle géoémétrique et sous l'angle complexe. Assez difficile à faire sans calculatrice.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Les points A, B et C ont pour affixes :

$$z_A = 2+\boldsymbol{i} \qquad z_B = 3-3\boldsymbol{i} \qquad z_C = -3+4\boldsymbol{i}$$

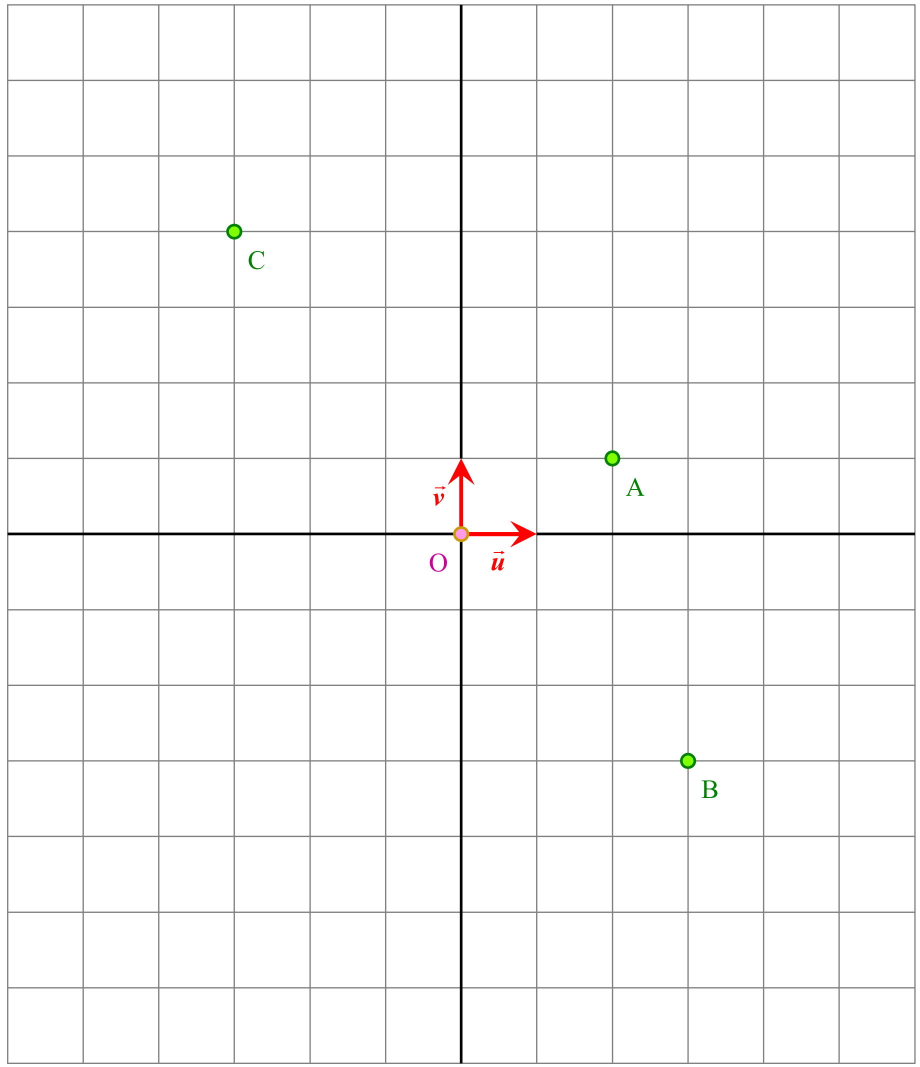
a) On appelle ***f*** la <u>similitude directe</u> de centre A par laquelle B a pour image C.
On appelle I le milieu du segment [AC] et on note D l'antécédent de B par la similitude directe ***f***.

1. Sans utiliser le résultat de la question **a.3** c'est-à-dire l'expression complexe de ***f***, donner le rapport et un angle de la similitude directe ***f***.
2. Sans utiliser les nombres complexes, démontrer que le triangle AID est isocèle et rectangle en A.
3. Déterminer l'expression complexe de la similitude directe ***f***.
4. Déterminer les affixes des points I et D.
5. Simplifier le quotient $\dfrac{z_I - z_A}{z_D - z_A}$. Que confirme ce résultat ?
6. On appelle ***r*** la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

   Démontrer que la composée $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{f}$ est une homothétie dont on précisa le rapport et le centre.

b) On appelle ***g*** la <u>similitude indirecte</u> par laquelle A est invariant et le point B a pour image C.
On appelle E l'antécédent du point B par la similitude indirecte ***g***.

1. Déterminer le rapport de la similitude indirecte ***g***.
2. Démontrer que la similitude indirecte ***g*** n'a aucun autre point fixe en dehors de A.
3. Démontrer que le point E appartient à la droite (AC).
4. Déterminer l'expression complexe de la similitude indirecte ***g***.
5. Calculer l'affixe du point E.



Le corrigé

a.1) D'abord, comme la similitude directe ***f*** a (au moins) un point fixe en la personne de A, alors ce n'est pas une translation (aucun point fixe) et ***f*** est parfaitement définie par son centre (le point A), son rapport et un de ses angles (qui diffèrent d'un multiple de 2π).

Pour connaître ces deux derniers, simplifions le quotient complexe :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-3+4\boldsymbol{i})-(2+\boldsymbol{i})}{(3-3\boldsymbol{i})-(2+\boldsymbol{i})} = \frac{-5+3\boldsymbol{i}}{1-4\boldsymbol{i}}$$

$$= \frac{(-5+3\boldsymbol{i})\times(1+4\boldsymbol{i})}{1^2-(4\boldsymbol{i})^2} = \frac{-5-20\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{i}-12}{1-(-16)} = \frac{-\cancel{17}-\cancel{17}\boldsymbol{i}}{\cancel{17}} = -1-\boldsymbol{i}$$

Comme les points A et B ont pour images respectives A et C par la similitude directe ***f***, alors :

- $\text{Rapport}(f) = \frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |-1-\boldsymbol{i}| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\text{Angle}(f) = \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(-1-\boldsymbol{i}) = -\frac{3\pi}{4}$ modulo 2π

a.2) Comme $\begin{cases} f(A) = A \\ f(D) = B \end{cases}$ alors $\begin{cases} \frac{AB}{AD} = \text{Rapport}(f) = \sqrt{2} \Rightarrow AB = \sqrt{2}\times AD \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right) = \text{Angle}(f) = -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$

Comme I est le milieu du segment [AC], il vient alors :

$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}\times AC = \frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times AB = \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{\sqrt{2}}\times\cancel{\sqrt{2}}\times AD = AD$

Donc le triangle AID est isocèle en A.

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI}\right) = \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)$

$$= \underbrace{\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}_{\text{Merci Chasles !}} = -\frac{3\pi}{4}+\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{6\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi$$

Donc le triangle AID est rectangle direct en A.

Conclusion : le triangle AID est isocèle, rectangle direct en A.

a.3) La similitude directe ***f*** a une expression complexe de forme affine, c'est-à-dire telle que :

$$z' = f(z) = a\times z + b$$

Les coefficients complexes a et b déterminent entièrement la similitude directe ***f***.

Comme $\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = C \end{cases}$ alors les affixes de ces points vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} z_A = a\times z_A + b & \textbf{(1)} \\ z_C = a\times z_B + b & \textbf{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\boldsymbol{i} = a\times(2+\boldsymbol{i})+b & \textbf{(1)} \\ -3+4\boldsymbol{i} = a\times(3-3\boldsymbol{i})+b & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Pour obtenir a, nous allons soustraire l'équation ***(1)*** à l'équation ***(2)***. Il vient alors :

$$z_C - z_A = (a\times z_B + b)-(a\times z_A+b) \Leftrightarrow z_C - z_A = a\times z_B - a\times z_A$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -1-\boldsymbol{i}$$

*Inutile de refaire des choses déjà faites lors de la question **a.1**.*

Pour obtenir le coefficient b, nous allons remplacer a par sa valeur dans l'équation ***(1)***.

$$2+\boldsymbol{i} = (-1-\boldsymbol{i})\times(2+\boldsymbol{i})+b \Leftrightarrow 2+\boldsymbol{i} = -2-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{i}+1+b$$

$$\Leftrightarrow 2+\boldsymbol{i} = -1-3\boldsymbol{i}+b \Leftrightarrow b = 3+4\boldsymbol{i}$$

Conclusion : l'écriture complexe de la similitude directe ***f*** est :

$$z' = f(z) = (-1-\boldsymbol{i})\times z+3+4\boldsymbol{i}$$

a.4) Comme le point I est le milieu du segment [AC], alors son affixe est donnée par :

$$z_I = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{(2+\boldsymbol{i})+(-3+4\boldsymbol{i})}{2} = \frac{-1+5\boldsymbol{i}}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\boldsymbol{i}$$

➲ Comme D est l'antécédent de B par la similitude directe ***f***, alors son affixe est la solution de l'équation :

$$z_B = f(z_D) \Leftrightarrow 3-3\boldsymbol{i} = (-1-\boldsymbol{i})\times z_D+3+4\boldsymbol{i} \Leftrightarrow (-1-\boldsymbol{i})\times z_D = -7\boldsymbol{i}$$

$$\Leftrightarrow z_D = \frac{-7\boldsymbol{i}}{-1-\boldsymbol{i}} = \frac{-7\boldsymbol{i}\times(-1+\boldsymbol{i})}{(-1)^2-\boldsymbol{i}^2} = \frac{7\boldsymbol{i}+7}{1-(-1)} = \frac{7}{2}+\frac{7}{2}\boldsymbol{i}$$

a.5) Simplifions le quotient complexe :

$$\frac{z_I - z_A}{z_D - z_A} = \frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\boldsymbol{i}\right)-(2+\boldsymbol{i})}{\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\boldsymbol{i}\right)-(2+\boldsymbol{i})} = \frac{-\frac{5}{\cancel{2}}+\frac{3}{\cancel{2}}\boldsymbol{i}}{\frac{3}{\cancel{2}}+\frac{5}{\cancel{2}}\boldsymbol{i}} = \frac{-5+3\boldsymbol{i}}{3+5\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{i}\times\cancel{(5\boldsymbol{i}+3)}}{\cancel{3+5\boldsymbol{i}}} = \boldsymbol{i}$$

Nous retrouvons bien alors :

$\Rightarrow \frac{AI}{AD} = |\boldsymbol{i}| = 1$ donc le triangle AID est isocèle en A.

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI}\right) = \arg(\boldsymbol{i}) = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle AID est rectangle (direct) en A.

a.6) La rotation ***r*** est aussi la similitude directe de centre A, de rapport 1 et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

En tant que composée des deux similitudes directes ***f*** et ***r***, la similitude ***h*** est directe.

Déterminons l'image du point A par $\boldsymbol{h}$.

$$\boldsymbol{h}(\mathrm{A}) = \boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{f}(\mathrm{A}) = \underbrace{\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{f}(\mathrm{A})\right) = \boldsymbol{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}}_{\text{Car A est sa propre image par les similitudes directes } \boldsymbol{f} \text{ et } \boldsymbol{r}.}$$

Comme la similitude directe $\boldsymbol{h}$ a (au moins) un point fixe, alors ce n'est pas une translation. Elle est donc définie par un centre qui est nécessairement son point fixe A, un rapport et un angle. Déterminons ces deux dernières caractéristiques :

- $\text{Rapport}(\boldsymbol{h}) = \text{Rapport}(\boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{f}) = \text{Rapport}(\boldsymbol{r}) \times \text{Rapport}(\boldsymbol{f}) = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$
- $\text{Angle}(\boldsymbol{h}) = \text{Angle}(\boldsymbol{r} \circ \boldsymbol{f}) = \text{Angle}(\boldsymbol{r}) + \text{Angle}(\boldsymbol{f}) = -\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\cancel{4}\pi}{\cancel{4}} = -\pi$

Conclusion : $\boldsymbol{h}$ est l'homothétie de centre A et de rapport $-\sqrt{2}$.

b.1) Comme les images respectives des points A et B par la similitude $\boldsymbol{g}$ sont A et C, alors le rapport de cette dernière est donné par :

$$\text{Rapport}(\boldsymbol{g}) = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$$

b.2) Si la similitude indirecte $\boldsymbol{g}$ avait un autre point fixe en dehors de A, alors, en application d'un théorème du cours, ce serait soit une réflexion, soit l'application identique du plan. Dans les deux cas, $\boldsymbol{g}$ serait une isométrie, c'est-à-dire une similitude rapport 1.
Or le rapport de $\boldsymbol{g}$ est égal à $\sqrt{2}$.
Conclusion : $\boldsymbol{g}$ n'a qu'un seul point fixe : il s'agit de A.

b.3) La similitude indirecte $\boldsymbol{g}$ inverse l'orientation des angles. Ainsi :

$$\text{Comme } \left|\begin{array}{l} \boldsymbol{g}(\mathrm{A}) = \mathrm{A} \\ \boldsymbol{g}(\mathrm{E}) = \mathrm{B} \\ \boldsymbol{g}(\mathrm{B}) = \mathrm{C} \end{array}\right. \quad \underline{\text{alors}} \quad \underbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\left(\overrightarrow{\mathrm{AE}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)}_{\text{L'angle et son image ont des mesures opposées.}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$$

Nous en déduisons que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ ont la même direction et le même sens.
Conclusion : le point E appartient à la demi-droite [AC).

b.4) La similitude indirecte $\boldsymbol{g}$ a une expression complexe de la forme :

$$z' = \boldsymbol{g}(z) = a \times \overline{z} + b$$

Les coefficients complexes a et b déterminent entièrement la similitude indirecte $\boldsymbol{g}$.

Comme $\begin{cases} \boldsymbol{g}(\mathrm{A}) = \mathrm{A} \\ \boldsymbol{g}(\mathrm{B}) = \mathrm{C} \end{cases}$ alors les affixes de ces points vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} z_{\mathrm{A}} = a \times \overline{z_{\mathrm{A}}} + b & \textbf{\textit{(1)}} \\ z_{\mathrm{C}} = a \times \overline{z_{\mathrm{B}}} + b & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \boldsymbol{i} = a \times (2 - \boldsymbol{i}) + b & \textbf{\textit{(1)}} \\ -3 + 4\boldsymbol{i} = a \times (3 + 3\boldsymbol{i}) + b & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

Pour obtenir a, soustrayons l'équation ***(1)*** à l'équation ***(2)*** :

$$(-3 + 4\boldsymbol{i}) - (2 + \boldsymbol{i}) = \left(a \times (3 + 3\boldsymbol{i}) + b\right) - \left(a \times (2 - \boldsymbol{i}) + b\right) \Leftrightarrow -5 + 3\boldsymbol{i} = a \times (1 + 4\boldsymbol{i})$$

Nous en déduisons :

$$a = \frac{-5 + 3\boldsymbol{i}}{1 + 4\boldsymbol{i}} = \frac{(-5 + 3\boldsymbol{i}) \times (1 - 4\boldsymbol{i})}{1^2 - (4\boldsymbol{i})^2} = \frac{-5 + 20\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{i} + 12}{1 - (-16)} = \frac{7 + 23\boldsymbol{i}}{17}$$

Pour trouver b, nous allons remplacer a par sa valeur dans l'équation ***(2)***.

$$b = -3 + 4\boldsymbol{i} - \frac{7 + 23\boldsymbol{i}}{17} \times (3 + 3\boldsymbol{i}) = -3 + 4\boldsymbol{i} - \frac{21 + 21\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}69 - 69}{17}$$
$$= -3 + 4\boldsymbol{i} - \frac{-48 + 90\boldsymbol{i}}{17} = \frac{-51 + 68\boldsymbol{i} + 48 - 90\boldsymbol{i}}{17} = \frac{-3 - 22\boldsymbol{i}}{17}$$

Sans machine,
c'est pas simple !

Conclusion : une expression de la similitude indirecte $\boldsymbol{g}$ est :

$$z' = \boldsymbol{g}(z) = \frac{7 + 23\boldsymbol{i}}{17}.\overline{z} - \frac{3 + 22\boldsymbol{i}}{17}$$

b.5) Comme le point E est l'antécédent de B par la similitude $\boldsymbol{g}$, alors leurs affixes vérifient

$$z_{\mathrm{B}} = \frac{7 + 23\boldsymbol{i}}{17}.\overline{z_{\mathrm{E}}} - \frac{3 + 22\boldsymbol{i}}{17} \Leftrightarrow 51 - 51\boldsymbol{i} = (7 + 23\boldsymbol{i}).\overline{z_{\mathrm{E}}} - (3 + 22\boldsymbol{i})$$
$$\Leftrightarrow (7 + 23\boldsymbol{i}).\overline{z_{\mathrm{E}}} = 54 - 29\boldsymbol{i}$$

Sans machine ?!?
Le prof est fou !

Nous en déduisons :

$$\overline{z_{\mathrm{E}}} = \frac{54 - 29\boldsymbol{i}}{7 + 23\boldsymbol{i}} = \frac{(54 - 29\boldsymbol{i}) \times (7 - 23\boldsymbol{i})}{7^2 - (23\boldsymbol{i})^2} = \frac{378 - 1242\boldsymbol{i} - 203\boldsymbol{i} - 667}{49 - (-529)} = \frac{-289 - 1445\boldsymbol{i}}{578} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\boldsymbol{i}$$

Conclusion : Comme $z_{\mathrm{E}} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\boldsymbol{i}$, alors l'antécédent de B par $\boldsymbol{g}$ n'est rien d'autre que I.

L'autre méthode vraiment plus simple...sans utiliser l'écriture complexe
La question **b.3** nous a appris que le point E appartenait à la demi-droite [AC).
Mais il y a mieux car :

$$\left|\begin{array}{l} \boldsymbol{g}(\mathrm{A}) = \mathrm{A} \\ \boldsymbol{g}(\mathrm{E}) = \mathrm{B} \\ \boldsymbol{g}(\mathrm{B}) = \mathrm{C} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \text{Rapport}(\boldsymbol{g}) = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \times \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

Conclusion : le point E est le milieu I du segment [AC].

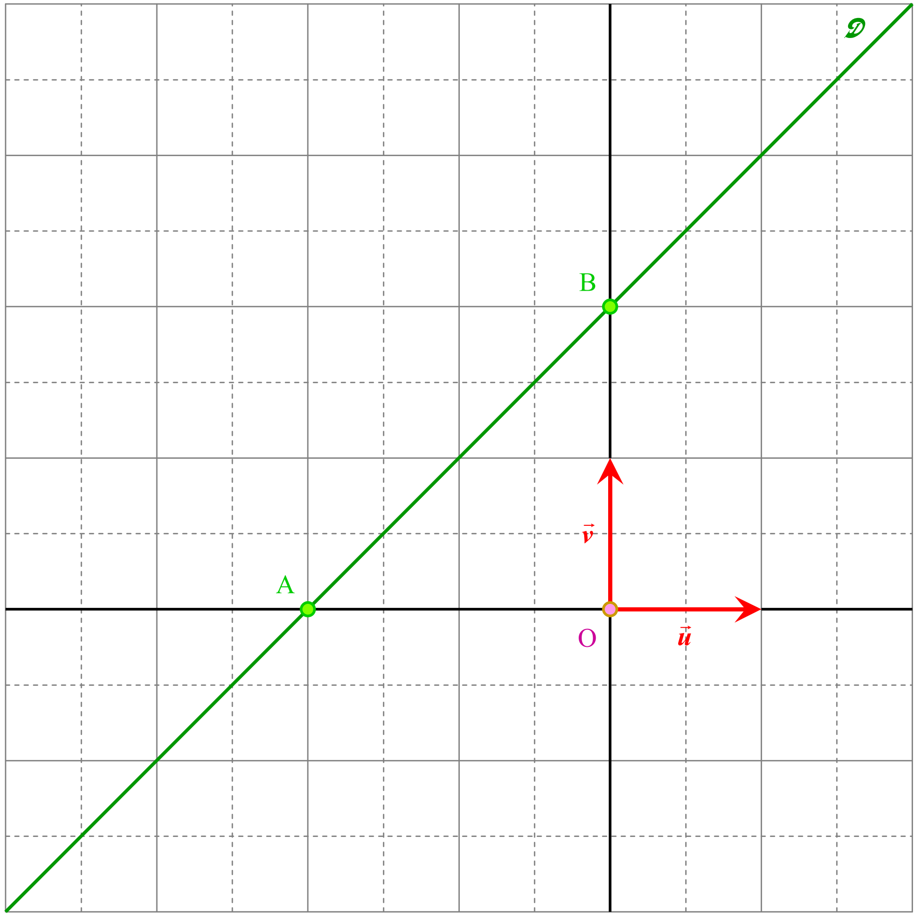
LES SIMILITUDES ÉTRANGÈRES

Le contexte

Cet exercice est une version modifiée de l'exercice de spécialité donné dans les Centres Etrangers en juin 2007. Il porte sur les similitudes.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ où une unité graphique vaut deux centimètres.



Les points A et B ont pour affixes respectives :

$$z_A = -2 \qquad z_B = 2i$$

L'objet de cet exercice est l'étude de la similitude plane indirecte f d'écriture complexe :

$$z' = f(z) = i\sqrt{2}\times\overline{z} + 2i.\sqrt{2} - 2$$

et d'en donner deux décompositions.

Partie A - Restitution organisée des connaissances

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe φ autre qu'une translation est de la forme :

$$z' = \varphi(z) = a\times z + b$$

où a et b sont deux nombres complexes, a étant différent de 1.

Déterminer en fonction de a et b l'affixe du centre d'une telle similitude directe φ.

Partie B - Première décomposition de f

Soit g la similitude plane directe d'écriture complexe :

$$z' = g(z) = i\sqrt{2}\times z + 2i.\sqrt{2} - 2$$

1. Préciser les éléments caractéristiques de g : centre C, rapport et angle.

2. Déterminer une réflexion s telle que $f = g\circ s$.

3. Sans utiliser les nombres complexes mais en utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que la similitude indirecte f admet un unique point fixe.

Partie C - Seconde décomposition de f

1. En utilisant les nombres complexes et sans utiliser les résultats de la partie B, montrer que la similitude f admet au plus un unique point invariant noté Ω dont on déterminera l'affixe ω.

2. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x + 2$.

Montrer que pour tout point M appartenant à $\mathscr{D}$, le point $M' = f(M)$ appartient aussi à $\mathscr{D}$

Indication : dans un premier temps, on pourra chercher à exprimer les parties réelle et imaginaire de l'affixe $z' = x' + i.y'$ de l'image M' en fonction de celles de l'affixe $z = x + i.y$ du point M.

3. Soit $\boldsymbol{\sigma}$ la réflexion d'axe $\mathscr{D}$ et $\boldsymbol{h}$ la transformation définie par :

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\sigma}$$

a. Donner une écriture complexe de $\boldsymbol{\sigma}$.

b. En déduire qu'une écriture complexe de $\boldsymbol{h}$ est :

$$z' = \boldsymbol{h}(z) = \sqrt{2} \times z + 2.\sqrt{2} - 2$$

c. Donner la nature de la transformation $\boldsymbol{h}$ et préciser ses éléments caractéristiques.

4. Déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte $\boldsymbol{f}$ comme composée d'une réflexion et d'une homothétie.

Le corrigé

Partie A - Restitution organisée des connaissances

Lorsqu'une similitude directe n'est pas une translation, elle n'a qu'un seul point fixe qui est son centre.

Un point est dit fixe par une transformation s'il est sa propre image par celle-ci. Donc, les affixes des points fixes de la similitude directe φ sont les solutions de l'équation :

$$\varphi(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad a \times z + b = z \quad \Leftrightarrow \quad b = z - a \times z \quad \Leftrightarrow \quad b = z \times (1-a) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{b}{1-a}$$

Possible car a≠1

Conclusion : l'affixe du centre de la similitude directe φ est $\frac{b}{1-a}$

Partie B - Première décomposition de *f*

1. Comme le coefficient directeur $\boldsymbol{i}\sqrt{2}$ de la similitude directe $\boldsymbol{g}$ est différent de 1, alors celle-ci n'est pas une translation. Par conséquent, elle est entièrement définie par :

☒ **Son centre C** dont l'affixe est donnée par :

$$z_C = \frac{2\boldsymbol{i}\sqrt{2} - 2}{1 - \boldsymbol{i}\sqrt{2}} = \frac{\left(2\boldsymbol{i}\sqrt{2} - 2\right) \times \left(1 + \boldsymbol{i}\sqrt{2}\right)}{1^2 - \left(\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2\boldsymbol{i}\sqrt{2}} + 2.\left(\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right)^2 - 2 - \cancel{2\boldsymbol{i}\sqrt{2}}}{1 - (-2)} = \frac{-4-2}{1+2} = \frac{-6}{3} = -2 = z_A$$

Donc le centre de la similitude $\boldsymbol{g}$ est le point A.

☒ **Son rapport** qui est le module du coefficient directeur $\boldsymbol{i}.\sqrt{2}$.

$$\text{Rapport}(\boldsymbol{g}) = \left|\boldsymbol{i}.\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$$

☒ **Un de ses angles** qui est un argument du coefficient directeur $\boldsymbol{i}.\sqrt{2}$.

$$\text{Angle}(\boldsymbol{g}) = \arg\left(\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{modulo } 2\pi$$

2. La réflexion $\boldsymbol{s}$ d'axe $\left(O, \vec{u}\right)$ a pour expression complexe :

$$z' = \boldsymbol{s}(z) = \overline{z}$$

Il vient alors que pour tout nombre complexe z :

$$\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{s}(z) = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{s}(z)\right) = \boldsymbol{i}\sqrt{2} \times \boldsymbol{s}(z) + 2\boldsymbol{i}.\sqrt{2} - 2 = \boldsymbol{i}\sqrt{2} \times \overline{z} + 2\boldsymbol{i}.\sqrt{2} - 2 = \boldsymbol{f}(z)$$

Conclusion : la similitude $\boldsymbol{f}$ est la composée de la symétrie $\boldsymbol{s}$ d'axe celui des réels, suivie de la similitude directe $\boldsymbol{g}$.

3. La première chose à dire, c'est que la similitude indirecte $\boldsymbol{f}$ n'est pas une isométrie car son rapport est différent de 1. En effet, le rapport de f est égale à $\sqrt{2} = \left|\boldsymbol{i}\sqrt{2}\right|$.

Ensuite, le point A d'affixe $z_A = -2$ appartenant à l'axe des réels, il est invariant par la symétrie axiale $\boldsymbol{s}$.

Comme il l'est aussi par la similitude directe $\boldsymbol{g}$, alors il l'est par leur composée $\boldsymbol{f}$.

Ainsi la similitude indirecte $\boldsymbol{f}$ a au moins un point fixe qui est A.

Une question se pose désormais : peut-elle en avoir plus ?

Si la similitude $\boldsymbol{f}$ admettait au moins deux points fixes, alors en vertu d'un théorème du cours, elle serait soit une symétrie axiale, soit l'application identique du plan. Dans les deux cas, $\boldsymbol{f}$ serait une isométrie, c'est-à-dire une similitude de rapport 1.

Or le rapport de la similitude $\boldsymbol{f}$ est $\sqrt{2}$. Donc ce n'est pas possible.

Conclusion : la similitude indirecte $\boldsymbol{f}$ admet un unique point fixe : il s'agit de A.

Partie C - Seconde décomposition de *f*

1. Les affixes des points fixes de la similitude indirecte $\boldsymbol{f}$ sont solutions de l'équation :

$$\boldsymbol{f}(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{i}\sqrt{2} \times \overline{z} + 2\boldsymbol{i}.\sqrt{2} - 2 = z$$

On appelle alors x et y les parties réelle et imaginaire du complexe z. Nous avons alors :

$$z = x + \boldsymbol{i}.y \qquad \underline{\text{et}} \qquad \overline{z} = x - \boldsymbol{i}.y$$

Reprenons la résolution de l'équation :

$$f(z)=z \Leftrightarrow \boldsymbol{i}\sqrt{2}\times(x-\boldsymbol{i}.y)+2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}-2=x+\boldsymbol{i}.y$$

Deux quantités complexes sont égales...

$$\Leftrightarrow \overbrace{\boldsymbol{i}.\sqrt{2}.x+\sqrt{2}.y+2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}-2=x+\boldsymbol{i}.y}$$

...parties réelles égales... ...parties imaginaires égales

$$\Leftrightarrow \overbrace{\sqrt{2}.y-2=x} \quad \text{et} \quad \overbrace{\sqrt{2}.x+2.\sqrt{2}=y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}.y-2=x & \textit{(1)} \\ \sqrt{2}.x+2.\sqrt{2}=y & \textit{(2)} \end{cases}$$

Résolvons ce système linéaire de deux équations dont les inconnues sont x et y.
L'équation ***(1)*** a exprimé x en fonction de y. On remplace alors x par ce qu'il vaut en y dans l'équation ***(2)***.

$$\sqrt{2}\times\left(\sqrt{2}.y-2\right)+2.\sqrt{2}=y \Leftrightarrow 2.y-\cancel{2.\sqrt{2}}+\cancel{2.\sqrt{2}}=y \Leftrightarrow \underline{y=0}$$

Nous en déduisons alors pour l'inconnue x:

$$x=\sqrt{2}\times 0-2=\underline{-2}$$

<u>Conclusion :</u> la similitude indirecte ***f*** admet un unique point fixe Ω . Il a pour affixe :

$$\underline{\omega=-2}$$

Autrement dit, il s'agit du point A.

2. On appelle $z=x+\boldsymbol{i}.y$ et $z'=x'+\boldsymbol{i}.y'$ les affixes du point M et de son image M' par la similitude indirecte ***f***.
Les réels x, x' et y, y' sont les parties réelles et imaginaires des affixes de ces points.

Comme M' est l'image de M par la similitude ***f***, alors nous avons l'égalité complexe :

$$z'=\boldsymbol{i}\sqrt{2}\times\overline{z}+2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}-2$$
$$=\boldsymbol{i}\sqrt{2}\times(x-\boldsymbol{i}.y)+2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}-2$$
$$x'+\boldsymbol{i}.y'=\underbrace{\left(\sqrt{2}.y-2\right)}_{\text{Partie réelle de } z' \text{ soit } x'}+\boldsymbol{i}\times\underbrace{\left(\sqrt{2}.x+2.\sqrt{2}\right)}_{\text{Partie imaginaire de } z' \text{ soit } y'}$$

Nous en déduisons :

$$\underline{x'=\sqrt{2}.y-2} \quad \text{et} \quad \underline{y'=\sqrt{2}.x+2.\sqrt{2}}$$

Or, si le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$, alors ses coordonnées en vérifient l'équation :

$$y=x+2 \Leftrightarrow y-2=x$$

Il vient alors pour les coordonnées du point M' :

$$x'+2=\sqrt{2}.y-\cancel{2}+\cancel{2}=\sqrt{2}.(x+2)=\sqrt{2}.x+2.\sqrt{2}=y'$$

Donc le point M' appartient aussi à la droite $\mathcal{D}$.

Une autre méthode...par l'image d'une droite

Comme toutes ses consoeurs, la similitude ***f*** conserve l'alignement et les droites.
Une autre appellation de la droite $\mathcal{D}$ est (AB). Aussi déterminons les affixes des images des points A et B par la similitude indirecte ***f***.

$$f(z_A)=\boldsymbol{i}\sqrt{2}\times\overline{z_A}+2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}-2=\cancel{\boldsymbol{i}\sqrt{2}\times(-2)}+\cancel{2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}}-2=-2=\underline{z_A}$$

Déjà vu...

$$f(z_B)=\boldsymbol{i}\sqrt{2}\times\overline{z_B}+2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}-2$$
$$=\boldsymbol{i}\sqrt{2}\times(-2\boldsymbol{i})+2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}-2=\underbrace{2\sqrt{2}-2+2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}}_{\text{C'est l'affixe d'un point que nous appellerons } B'}=\underline{z_{B'}}$$

La question qui se pose à présent est : les coordonnées $\left(2\sqrt{2}-2;2\sqrt{2}\right)$ du point B' vérifient-elles l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}$? Nous avons :

$$x_{B'}+2=2\sqrt{2}-2+2=2\sqrt{2}=\underline{y_E}$$

La réponse est oui !
<u>Conclusion :</u> l'image de la droite $(AB)=\mathcal{D}$ par la similitude ***f*** est la droite $(AB')=\mathcal{D}$.

3.a) D'abord, la symétrie axiale $\boldsymbol{\sigma}$ est une similitude indirecte. Par conséquent, son écriture complexe est de la forme affine-conjuguée :

$$z'=\boldsymbol{\sigma}(z)=a\times\overline{z}+b$$

où a et b sont deux coefficients complexes qui déterminent entièrement ***s***.
Puis, comme les points A et B appartiennent à la droite $\mathcal{D}$, alors ils sont leurs propres images par $\boldsymbol{\sigma}$. Il vient alors :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(A)=A \Leftrightarrow a\times\overline{z_A}+b=z_A \Leftrightarrow a\times(-2)+b=-2 \Leftrightarrow -2.a+b=-2 & \textit{(1)} \\ \boldsymbol{\sigma}(B)=B \Leftrightarrow a\times\overline{z_B}+b=z_B \Leftrightarrow a\times(-2\boldsymbol{i})+b=2\boldsymbol{i} \Leftrightarrow -2\boldsymbol{i}.a+b=2\boldsymbol{i} & \textit{(2)} \end{cases}$$

Pour trouver le coefficient directeur a, nous soustrayons l'équation ***(1)*** à la ***(2)***. Il vient :

$$(-2\boldsymbol{i}.a+b)-(-2.a+b)=2\boldsymbol{i}-(-2) \Leftrightarrow (2-2.\boldsymbol{i})\times a=2+2.\boldsymbol{i}$$

Ainsi :

$$a=\frac{2+2\boldsymbol{i}}{2-2\boldsymbol{i}}=\frac{(2+2\boldsymbol{i})\times(2+2\boldsymbol{i})}{2^2-(2\boldsymbol{i})^2}=\frac{\cancel{4}+4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{i}-\cancel{4}}{4-(-4)}=\frac{\cancel{8}\boldsymbol{i}}{\cancel{8}}=\underline{\boldsymbol{i}}$$

Repartant de l'équation ***(2)***, nous en déduisons le coefficient b :

$$b=-2+2\times a=\underline{2\boldsymbol{i}-2}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout nombre complexe z, nous avons :

$$z'=\boldsymbol{\sigma}(z)=\underline{\boldsymbol{i}\times\overline{z}-2+2\boldsymbol{i}}$$

3.b) Pour tout nombre complexe z, nous pouvons :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}(z) &= \boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{\sigma}(z) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}(z)) \\ &= \boldsymbol{i}\sqrt{2}\times\overline{\boldsymbol{\sigma}(z)} + 2\boldsymbol{i}.\sqrt{2} - 2 \\ &= \boldsymbol{i}\sqrt{2}\times\overline{(\boldsymbol{i}\times\bar{z} - 2 + 2\boldsymbol{i})} + 2\boldsymbol{i}.\sqrt{2} - 2 \\ &= \boldsymbol{i}\sqrt{2}\times(-\boldsymbol{i}\times z - 2 - 2\boldsymbol{i}) + 2\boldsymbol{i}.\sqrt{2} - 2 \\ &= \sqrt{2}\times z - \cancel{2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} + \cancel{2\boldsymbol{i}.\sqrt{2}} - 2 = \boxed{\sqrt{2}\times z + 2.\sqrt{2} - 2} \end{aligned}$$

3.c) Vu son écriture complexe, la transformation $\boldsymbol{h}$ est une homothétie de rapport $\sqrt{2}$.
Son centre étant son unique point fixe, son affixe est l'unique solution de l'équation :

$$\boldsymbol{h}(z) = z \iff \sqrt{2}\times z + 2.\sqrt{2} - 2 = z \iff \sqrt{2}\times z - z = -2.\sqrt{2} - 2$$

$$\iff \cancel{\left(\sqrt{2}-1\right)}\times z = -2\times\cancel{\left(\sqrt{2}-1\right)} \iff z = -2 = \boxed{z_A}$$

<u>Conclusion :</u> la transformation $\boldsymbol{h}$ est l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

Une autre manière plus fine de voir les choses à propos de *h*

D'abord, comme le point A est invariant par la symétrie $\boldsymbol{\sigma}$ et par la similitude indirecte $\boldsymbol{f}$, alors il l'est aussi par leur composée $\boldsymbol{h}$.
Maintenant, modifions l'expression complexe de $\boldsymbol{h}$ pour lui donner une forme plus «homothétique».

C'est la définition d'une homothétie...

$$z' = \sqrt{2}\times z + 2.\sqrt{2} - 2 \iff z' + 2 = \sqrt{2}\times z + \sqrt{2}\times 2$$

$$\iff z' - z_A = \sqrt{2}\times(z - z_A) \iff \boxed{\overrightarrow{AM'} = \sqrt{2}\times\overrightarrow{AM}}$$

Donc le point M' est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$. Telle est la nature de $\boldsymbol{h}$.

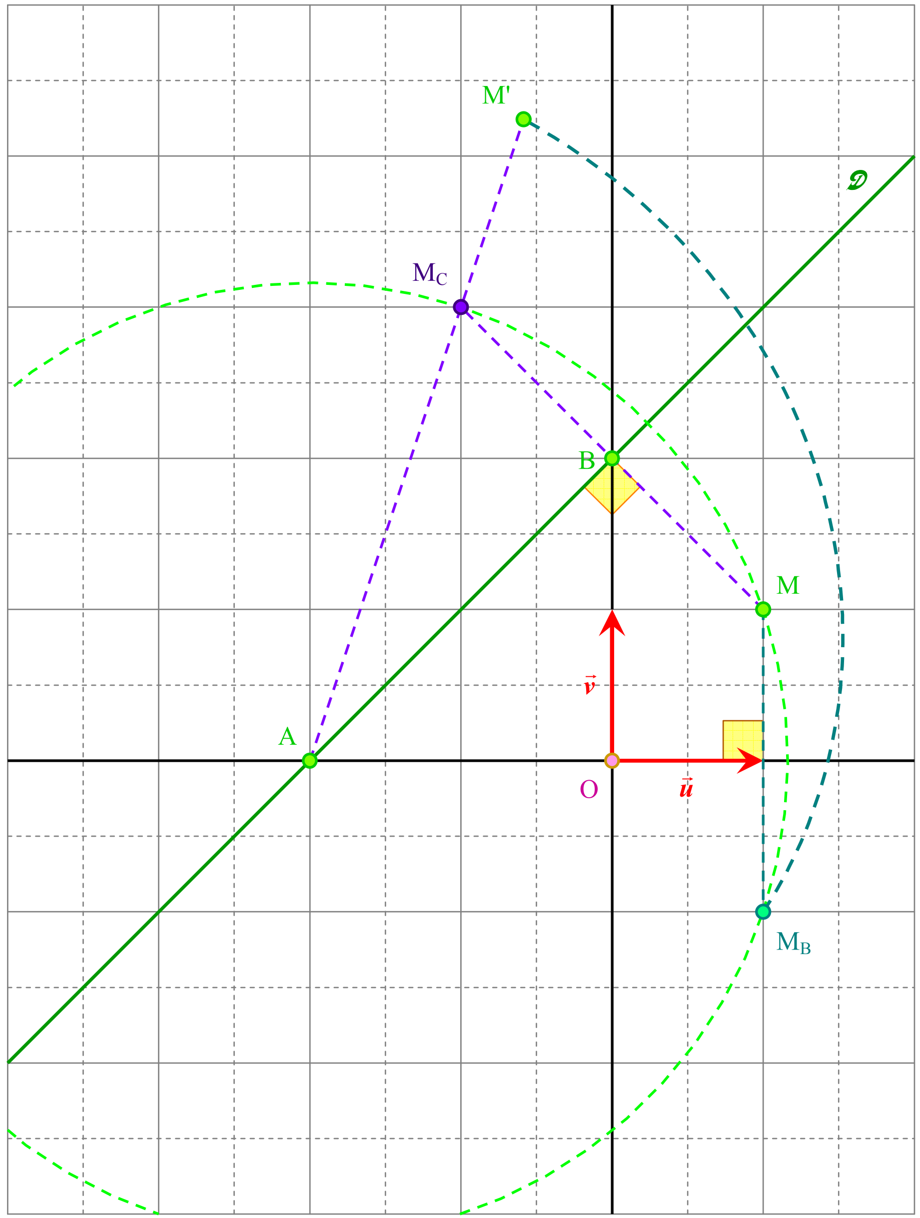
4. La symétrie axiale $\boldsymbol{\sigma}$ est une involution. C'est-à-dire qu'elle est sa propre réciproque et surtout que la composée $\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}$ est égale à l'application identique du plan.
Ces choses ayant été dites, intéressons à la composée :

$$\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}\circ\underbrace{\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{Id}} = \boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{Id} = \boldsymbol{f}$$

Id *comme application identique du plan*

<u>Conclusion :</u> la similitude indirecte $\boldsymbol{f}$ est la composée de la réflexion $\boldsymbol{\sigma}$ d'axe $\mathscr{D}$ suivie de l'homothétie $\boldsymbol{h}$ de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



LES SECTIONS À L'ÉPREUVE DE L'ESPACE

Le contexte

Voici un exercice issu de mon cerveau diabolique sur les sections planes de l'espace qui disparaîtront bientôt du programme de spécialité, alors qu'il s'agissait de la partie la plus facile et qui se prêtait le plus à l'illustration informatique. Allez comprendre...

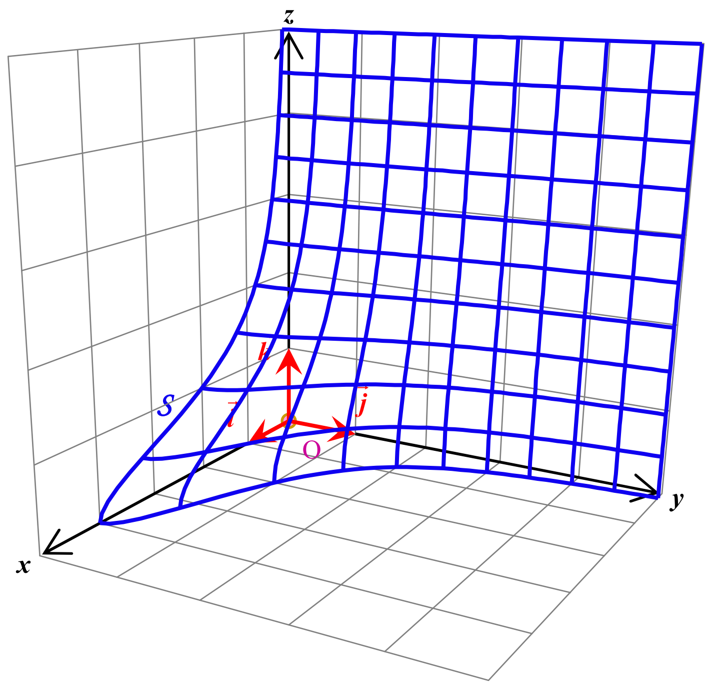
L'énoncé

L'espace intersidéral est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On appelle $\mathcal{S}$ la surface d'équation :

$$x.\left(y^2+z^2+1\right)=4$$

Une partie de cette surface a été représentée en perspective centrale (vision réelle) sur le graphique ci-dessous :



a) Démontrer que l'axe (Ox) est un axe de révolution de la surface $\mathcal{S}$.

b) Déterminer l'intersection Δ de la surface $\mathcal{S}$ et du plan (xOy). On en tracera une esquisse dans un repère bien choisi.

c) Déterminer l'intersection $\mathcal{D}$ de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{R}$ d'équation $y=5$. On en tracera une esquisse dans un repère bien choisi.

d) Soit λ un réel quelconque. On note $\boldsymbol{P}_\lambda$ le plan parallèle au plan (yOz) passant par le point $I_\lambda(\lambda;0;0)$.

1. Déterminer l'intersection Γ_0 de la surface $\mathcal{S}$ et du plan (yOz).
2. Déterminer l'intersection Γ_1 de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\boldsymbol{P}_1$.
3. De manière générale, pour tout réel λ, déterminer l'intersection Γ_λ de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\boldsymbol{P}_\lambda$.

e) Parmi les droites et les plans suivants, entourez ceux qui sont des axes ou des plans de symétrie de la surface $\mathcal{S}$. Aucune justification n'est demandée.

L'axe des abscisses (Ox)	L'axe des ordonnées (Oy)	L'axe des cotes (Oz)
Le plan (xOy)	Le plan (xOz)	Le plan (yOz)

f) Dans cette question, λ est un réel de l'intervalle $[1;4]$.

On appelle $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la surface délimitée par la courbe Γ_λ .

On rappelle que Γ_λ est l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\boldsymbol{P}_\lambda$.

1. Vérifier que $\mathcal{A}(\lambda)=\dfrac{4\pi}{\lambda}-\pi$.
2. Calculer l'intégrale $\mathcal{V}=\displaystyle\int_1^4 \mathcal{A}(\lambda).d\lambda$
3. Que représente la valeur de cette intégrale $\mathcal{V}$?

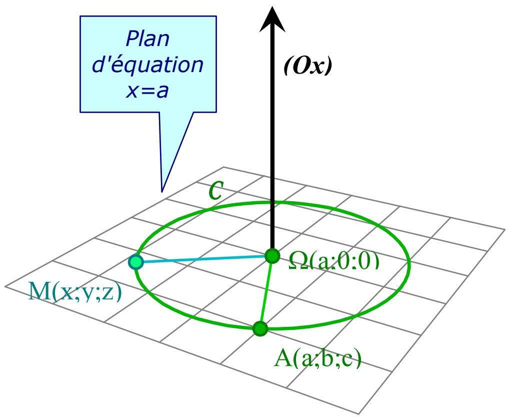
Le corrigé

a) Démontrons que (Ox) est un axe de révolution de la surface $\mathcal{S}$.

Soit $A(a;b;c)$ un point de la surface $\mathcal{S}$.

Ses coordonnées sont liées par l'égalité :

$$a.\left(b^2+c^2+1\right)=4$$



On appelle alors $\mathcal{C}$ le cercle d'axe (Ox) passant par A.

$\mathcal{C}$ est le cercle du plan d'équation $x=a$, de centre $\Omega(a;0;0)$ et de rayon :

$$\Omega A=\sqrt{(a-a)^2+(b-0)^2+(c-0)^2}$$

$$=\boxed{\sqrt{b^2+c^2}}$$

Nous allons prouver que tout point $M(x;y;z)$ de ce cercle $\mathcal{C}$ appartient à la surface $\mathcal{S}$.

Comme le point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ alors ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x=a \\ y^2+z^2=\text{rayon}^2 \end{cases}$$

Le cercle $\mathcal{C}$ est l'intersection d'un plan vertical et d'un cylindre.

Il vient alors :

$$x\times\left(y^2+z^2+1\right)=a\times\left(\text{rayon}^2+1\right)=\overbrace{a\times\left(b^2+c^2+1\right)=4}^{\text{Car A appartient à } \mathcal{S}}$$

Donc tout point du cercle $\mathcal{C}$ est inclus dans la surface $\mathcal{S}$.

Conclusion : (Ox) est un axe de révolution de la surface $\mathcal{S}$.

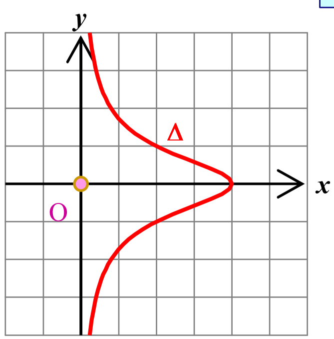
b) Une des équations du plan (xOy) est $z=0$.

Un des repères de ce plan est $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On peut diviser par y^2+1 qui est non nul.

$$M(x;y;0)\in\Delta \Leftrightarrow x.\left(y^2+0^2+1\right)=4$$

$$\Leftrightarrow x.\left(y^2+1\right)=4 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{4}{y^2+1}}$$



Conclusion : l'intersection Δ est la courbe représentant la fonction $f(t)=\dfrac{4}{t^2+1}$ ...dans un certain sens.

c) Un repère du plan $\mathcal{R}$ est $(O';\vec{i},\vec{k})$ où le point O' a pour coordonnées $(0;5;0)$.

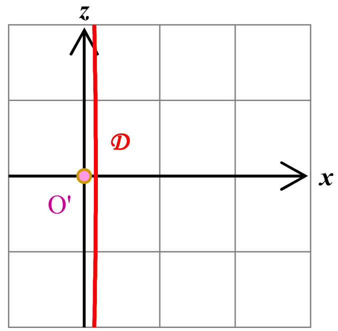
Nous allons évoluer dans ce dernier repère.

$$M(x;5;z)\in\mathcal{D} \Leftrightarrow x.\left(5^2+5^2+1\right)=4$$

$$\Leftrightarrow x.\left(25+z^2+1\right)=4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{4}{z^2+26}}$$

On peut diviser par z^2+26 qui est non nul.



Cette courbe $\mathcal{D}$ qui est tracée ci-contre ressemble beaucoup à la précédente...en beaucoup plus aplatie !

d.1) Une équation du plan (yOz) est $x=0$ et l'un de ses repère est $(O;\vec{j},\vec{k})$.

Nous allons œuvrer dans ce dernier.

$$M(0;y,z)\in\Gamma_0 \Leftrightarrow 0\times\left(y^2+z^2+1\right)=4 \Leftrightarrow \boxed{0=4}$$

Pas trop possible !

Conclusion : l'intersection Γ_0 est l'ensemble vide.

d.2) Un repère du plan $\mathcal{P}_1$ est $(\Omega_1;\vec{j},\vec{k})$ où le point Ω_1 a pour coordonnées $(1;0;0)$.

Nous allons travailler dans ce repère :

$$M(1;y,z)\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 1\times\left(y^2+z^2+1\right)=4 \Leftrightarrow y^2+z^2+1=4$$

$$\Leftrightarrow y^2+z^2=3 \Leftrightarrow \Omega_1M^2=3 \Leftrightarrow \boxed{\Omega_1M=\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{M appartient au cercle du plan } \mathcal{P}_1\text{, de centre } \Omega_1 \text{ et de rayon } \sqrt{3}}$$

Tout cela se passe dans le plan d'équation x=1

d.3) Le cas de l'intersection avec le plan $\mathcal{P}_0=(yOz)$ ayant déjà été traité lors de la question d.1, nous supposerons dans cette question que λ est un réel non nul.

Un repère du plan $\mathcal{P}_\lambda$ est $(\Omega_\lambda;\vec{j},\vec{k})$ où le point Ω_λ a pour coordonnées $(\lambda;0;0)$.

Nous allons évoluer dans ce repère :

$$M(\lambda;y,z)\in\Gamma_\lambda \Leftrightarrow \lambda\times\left(y^2+z^2+1\right)=4 \Leftrightarrow y^2+z^2+1=\frac{4}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow y^2+z^2=\frac{4}{\lambda}-1 \Leftrightarrow y^2+z^2=\frac{4-\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow \boxed{\Omega_\lambda M^2=\frac{4-\lambda}{\lambda}}$$

Tout cela se passe dans le plan d'équation x=λ

A partir de là, tout dépend de la positivité ou nullité du second membre $\dfrac{4-\lambda}{\lambda}$

Le tableau de signe de cette fraction est celui ci-contre ➔

λ	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$4-\lambda$		+		+	0	−	
λ		−	0	+		+	
La fraction		−	‖	+	0	−	

Au vu de ce tableau de signe, deux cas doivent être envisagés :

- Si le réel λ appartient à l'intervalle $]0;4]$, alors la quantité $\dfrac{4-\lambda}{\lambda}$ est positive ou nulle. Donc elle admet une racine. L'équivalence devient alors :

$$M(\lambda;y,z)\in\Gamma_\lambda \iff \Omega_\lambda M^2=\frac{4-\lambda}{\lambda} \iff \Omega_\lambda M=\sqrt{\frac{4-\lambda}{\lambda}}$$

Conclusion : l'ensemble Γ_λ est alors le cercle du plan $\mathcal{P}_\lambda$, de centre $\Omega_\lambda(\lambda;0;0)$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{4-\lambda}{\lambda}}$.

- Si le réel λ appartient à l'ensemble $]-\infty;0]\cup]4;+\infty[$, alors la quantité $\dfrac{4-\lambda}{\lambda}$ est toujours négative et ne peut donc avoir de racine (réelle).

Conclusion : l'ensemble Γ_λ est alors l'ensemble vide.

e) Soit $M(x;y;z)$ un point de la surface $\mathcal{S}$. Ses coordonnées vérifient donc l'égalité :

$$x.\left(y^2+z^2+1\right)=4$$

Son symétrique M' par rapport ...

- ...à l'axe (Ox) a pour coordonnées $(x;-y;-z)$.

  Comme $x\times\left((-y)^2+(-z)^2+1\right)=x\times\left(y^2+z^2+1\right)=4$

  alors les coordonnées de M' vérifient l'équation de $\mathcal{S}$.

  Conclusion : l'axe (Ox) est un axe de symétrie de la surface $\mathcal{S}$.

- ...à l'axe (Oy) a pour coordonnées $(-x;y;-z)$.

  Comme $(-x)\times\left(y^2+(-z)^2+1\right)=-x\times\left(y^2+z^2+1\right)=-4$, alors $M'\notin\mathcal{S}$.

  Conclusion : l'axe (Oy) n'est pas un axe de symétrie de la surface $\mathcal{S}$.

- ...à l'axe (Oz) a pour coordonnées $(-x;-y;z)$.

  Comme $(-x)\times\left((-y)^2+z^2+1\right)=-x\times\left(y^2+z^2+1\right)=-4$, alors $M'\notin\mathcal{S}$.

  Conclusion : l'axe (Oz) n'est pas un axe de symétrie de la surface $\mathcal{S}$.

- ...au plan (xOy) a pour coordonnées $(x;y;-z)$.

  Comme $x\times\left(y^2+(-z)^2+1\right)=x\times\left(y^2+z^2+1\right)=4$, alors $M'\in\mathcal{S}$.

  Conclusion : le plan (xOy) est un plan de symétrie de la surface $\mathcal{S}$.

- ...au plan (xOz) a pour coordonnées $(x;-y;z)$.

  Comme $x\times\left((-y)^2+z^2+1\right)=x\times\left(y^2+z^2+1\right)=4$, alors $M'\in\mathcal{S}$.

  Conclusion : le plan (xOz) est un plan de symétrie de la surface $\mathcal{S}$.

- ...au plan (yOz) a pour coordonnées $(-x;y;z)$.

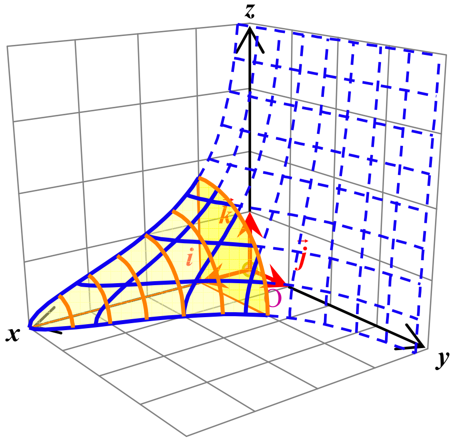
  Comme $(-x)\times\left(y^2+z^2+1\right)=-x\times\left(y^2+z^2+1\right)=-4$, alors $M'\notin\mathcal{S}$.

  Conclusion : le plan (yOz) n'est pas un plan de symétrie de la surface $\mathcal{S}$.

e.1) Lorsque λ appartient à l'intervalle $[1;4]$, Γ_λ est un cercle de rayon $\sqrt{\dfrac{4-\lambda}{\lambda}}$.

Par conséquent, $\mathcal{A}(\lambda)$ est l'aire du disque délimité par ce cercle. Ainsi :

$$\mathcal{A}(\lambda)=\pi\times\text{rayon}^2=\pi\times\frac{4-\lambda}{\lambda}=4\pi.\frac{1}{\lambda}-\pi$$



e.2) Une primitive de la fonction $\mathcal{A}(\lambda)$ sur $[1;4]$ est $4\pi.\ln(\lambda)-\pi.\lambda$

$$\mathcal{V}=\int_1^4\mathcal{A}(\lambda).d\lambda=\left[4\pi.\ln(\lambda)-\pi.\lambda\right]_1^4$$

$$=\left(4\pi.\ln(4)-\pi\times4\right)-\left(4\pi.\ln(1)-\pi\times1\right)$$

$$=8\pi.\ln(2)-3\pi$$

e.3) La valeur de l'intégrale $\mathcal{V}$ correspond au volume du domaine compris entre la surface $\mathcal{S}$ et les plans d'équations $x=1$ et $x=4$.