Algèbre et analyse

Un peu de tout !

L'énoncé

Dans cet exercice, on détaillera ses calculs. Un résultat seul ne sera pas pris en compte.

a. Montrer que le nombre $A=\left|3-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{11}\right|-\left|\sqrt{11}-\sqrt{5}\right|$ est égal à 0.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\left|7x+2\right|=\left|7-2x\right|$ **2.** $17x-6x^2>5$ **3.** $\dfrac{5}{7-x}\leq 3$

4. $\left|10-3x\right|\leq 2$ **5.** $\dfrac{4x-1}{12x-9x^2-4}\leq 0$ **6.** $\left|x^2-x\right|>-6$

Le corrigé

a. D'après un résultat du cours concernant la valeur absolue : si a est positif, $|a|=a$; si a est négatif, $|a|=-a$

En conséquence, nous pouvons écrire :

$$A=\left|3-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{11}\right|-\left|\sqrt{11}-\sqrt{5}\right|=\left|\underbrace{\sqrt{5}-3}_{\text{négatif}}\right|+\left|\underbrace{\sqrt{11}-3}_{\text{positif}}\right|-\left|\underbrace{\sqrt{11}-\sqrt{5}}_{\text{positif}}\right|$$

$$=3-\sqrt{5}+\left[-\left(3-\sqrt{11}\right)\right]-\left[\sqrt{11}-\sqrt{5}\right]=3-\sqrt{5}-3+\sqrt{11}-\sqrt{11}+\sqrt{5}=\underline{0}$$

b.1. Cette première équation utilise la valeur absolue.

$$\overbrace{\left|7x+2\right|=\left|7-2x\right|}^{\text{Deux nombres ayant même valeur absolue...}}\Leftrightarrow\overbrace{7x+2=7-2x}^{\text{...sont égaux...}}\quad\underline{\text{ou}}\quad\overbrace{7x+2=-(7-2x)}^{\text{...ou opposés.}}$$

$$9x=5 \qquad\qquad 7x+2=-7+2x$$

$$x=\underline{\frac{5}{9}} \qquad\qquad 5x=-9$$

$$x=\underline{-\frac{9}{5}}$$

Nous concluons en donnant l'ensemble des solutions :

$$S=\underline{\left\{-\frac{9}{5};\frac{5}{9}\right\}}$$

b.2. Pour résoudre l'inéquation $17x-6x^2>5 \Leftrightarrow \underbrace{-6x^2+17x-5>0}_{\text{Quand cette forme du second degré } N(x) \text{ est-elle positive ?}}$, nous allons calculer le discriminant de ce trinôme.

$$\Delta_{N(x)}=17^2-4\times(-6)\times(-5)=289-120=\underline{169=13^2}$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $N(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-17-13}{2\times(-6)}=\frac{-30}{-12}=\underline{2,5}\qquad \underline{\text{et}}\qquad x_2=\frac{-17+13}{2\times(-6)}=\frac{-4}{-12}=\underline{\frac{1}{3}}$$

$N(x)$ est du signe de son coefficient dominant -6 à l'extérieur des racines et est donc positif entre. Bref, son tableau de signe est :

x	$-\infty$		$1/3$		$2,5$		$+\infty$
$N(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par suite, l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=\underline{\left]\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right[}$$

b.3. Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons tout ramener dans le membre de gauche; puis, par une mise au même dénominateur, nous aurons à nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{5}{7-x}\leq 3\Leftrightarrow\frac{5}{7-x}-3\leq 0\Leftrightarrow\frac{5-3\times(7-x)}{7-x}\leq 0\Leftrightarrow\frac{5-21+3x}{7-x}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x-16}{7-x}\leq 0$$

Le tableau de signe de ce quotient qui est composé de deux facteurs affines est :

x	$-\infty$		$16/3$		7		$+\infty$
$3x-16$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+7$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur quotient		$-$	0	$+$	||	$-$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette deuxième inéquation est :

$$S=\underline{\left]-\infty;\frac{16}{3}\right]\cup\left]7;+\infty\right[}$$

b.4. Cette troisième inéquation se résout en recourant aux propriétés de la valeur absolue.

$$|10-3x|\leq 2 \quad\Leftrightarrow\quad -2\leq 10-3x\leq 2 \xrightarrow{-10} -12\leq -3x\leq -8 \xrightarrow{\div(-3)} 4\geq x\geq \frac{8}{3}$$

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette troisième inéquation est :

$$S=\left[\frac{8}{3};4\right]$$

b.5. Examinons les facteurs composant ce quotient.

- Le facteur affine $4x-1$ s'annule lorsque $4x-1=0 \Leftrightarrow 4x=1 \Leftrightarrow x=0,25$
- Calculons le discriminant du dénominateur qui est une forme du second degré.

$$\Delta=12^2-4\times(-9)\times(-4)=144-144=0$$

Son discriminant étant nul, le dénominateur admet une seule racine :

$$x_1=-\frac{12}{2\times(-9)}=-\frac{12}{-18}=\frac{2}{3}$$

Lorsqu'il n'est pas nul en $x=2/3$, le dénominateur est négatif comme son coefficient dominant -9.

Le tableau de signe du quotient est celui ci-contre.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$4x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-9x^2+12x-4$		$-$		$-$	0	$-$	
Leur quotient		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=\left[\frac{1}{4};\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$$

b.6. Pour résoudre cette dernière inéquation, nul besoin de se lancer dans un immense calcul.

Comme toute valeur absolue, la quantité $|x^2-x|$ est toujours positive ou nulle, donc est supérieure à -6. Et ce, quelque soit la valeur du réel x.

Par conséquent, l'ensemble des solutions est :

$$S=\mathbb{R}=\left]-\infty;+\infty\right[$$

Retourne jouer avec tes cubes !

L'énoncé

On appelle P le polynôme défini par :

$$P(x)=2x^3+x^2-4x+4$$

a. Calculer $P(-2)$. Que peut-on déduire quant au polynôme P ?

b. Par la méthode de votre choix, déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x, on ait :

$$P(x)=(x+2)\times\left(ax^2+bx+c\right)$$

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{9x-2}{x^2+x-6}\leq 1-2x$.

Le corrigé

a. Calculons l'image de -2 par le polynôme P.

$$P(-2)=2\times(-2)^3+(-2)^2-4\times(-2)+4=2\times(-8)+4+8+4=-16+16=0$$

Comme -2 annule P, alors il en est l'une des racines. Par suite, $P(x)$ est factorisable par le facteur $x-(-2)=x+2$.

b. Deux méthodes permettent de factoriser $P(x)$ par le facteur $x+2$. La première est <u>la méthode par identification des coefficients de même degré</u>.

On veut écrire le polynôme P sous la forme :

$$P(x)=(x+2)\times\left(ax^2+bx+c\right)$$
$$=ax^3+bx^2+cx+2ax^2+2bx+2c$$

$$\boxed{2}x^3+\boxed{1}x^2+\boxed{(-4)}x+\boxed{4}=\boxed{a}x^3+\boxed{(2a+b)}x^2+\boxed{(2b+c)}x+\boxed{2c}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux :

En x^3	$2=a \Leftrightarrow a=2$		*D'un !*
En x^2	$1=2a+b \Leftrightarrow 1=4+b \Leftrightarrow b=1-4=-3$		*De deux !*
En x	$-4=2b+c \Leftrightarrow -4=-6+c \Leftrightarrow c=6-4=2$		*De trois !*
Constant	$4=2c \Leftrightarrow c=2$	Ca confirme !	*La vérif' !*

La seconde méthode consiste à extraire le facteur $x+2$ de chacun des termes de $P(x)$.

Combien de fois $x+2$?

$$P(x) = \boxed{2x^3} + x^2 - 4x + 4 = \boxed{2x^2 \times (x+2) - 4x^2} + x^2 - 4x + 4$$

Combien de fois $x+2$?

$$= 2x^2 \times (x+2) + \boxed{\left(-3x^2\right)} - 4x + 4 = 2x^2 \times (x+2) + \boxed{-3x \times (x+2) + 6x} - 4x + 4$$

$$= 2x^2 \times (x+2) - 3x \times (x+2) + 2x + 4$$

Facteur... ...com... ...mun.

$$= 2x^2 \times \boxed{(x+2)} - 3x \times \boxed{(x+2)} + 2 \times \boxed{(x+2)} = \boxed{(x+2)} \times \left(2x^2 - 3x + 2\right)$$

<u>Conclusion :</u> une écriture factorisée du polynôme P est : $P(x) = (x+2) \times \left(2x^2 - 3x + 2\right)$

c. La première chose à faire est de tout ramener à gauche. Puis, nous mettrons tout au même dénominateur afin d'avoir à nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{9x-2}{x^2+x-6} \leq 1 - 2x \Leftrightarrow \frac{9x-2}{x^2+x-6} + 2x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x - 2 + (2x-1) \times \left(x^2 + x - 6\right)}{x^2+x-6} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x - 2 + 2x^3 + 2x^2 - 12x - x^2 - x + 6}{x^2+x-6} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3 + x^2 - 4x + 4}{x^2+x-6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)\left(2x^2 - 3x + 2\right)}{x^2+x-6} \leq 0$$

Examinons les signes des facteurs du second degré constituant ce quotient :

- Le discriminant du facteur $n(x) = 2x^2 - 3x + 2$ est :

  $$\Delta_{n(x)} = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7$$

  Son discriminant étant négatif, la trinôme $n(x)$ n'a pas de racine et est toujours du signe de son coefficient dominant 2, donc toujours positif.

- Calculons le discriminant du second facteur $d(x) = x^2 + x - 6$:

  $$\Delta_{d(x)} = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$$

  Son discriminant était positif, la forme du second degré $d(x)$ a deux racines :

  $$x_1 = \frac{-1-5}{2 \times 1} = -\frac{6}{2} = -3 \quad \underline{\text{et}} \quad x_2 = \frac{-1+5}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

  Son coefficient dominant 1 étant positif, $d(x)$ sera positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre.

Finalement, le tableau de signe de notre quotient est le suivant :

x	$-\infty$		-3		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$n(x)$		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$d(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

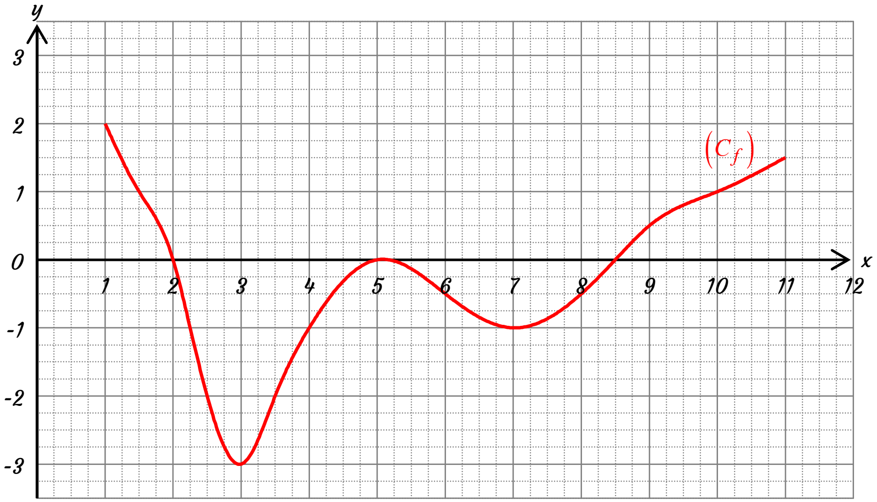
L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = \left]-\infty; -3\right[\cup \left[-2; 2\right[$$

La courbe se rebiffe

L'énoncé

La fonction *f* est définie sur l'intervalle $[1;11]$. Sa courbe (C_f) a été tracée sur le graphique ci-dessous dans un repère orthonormé.

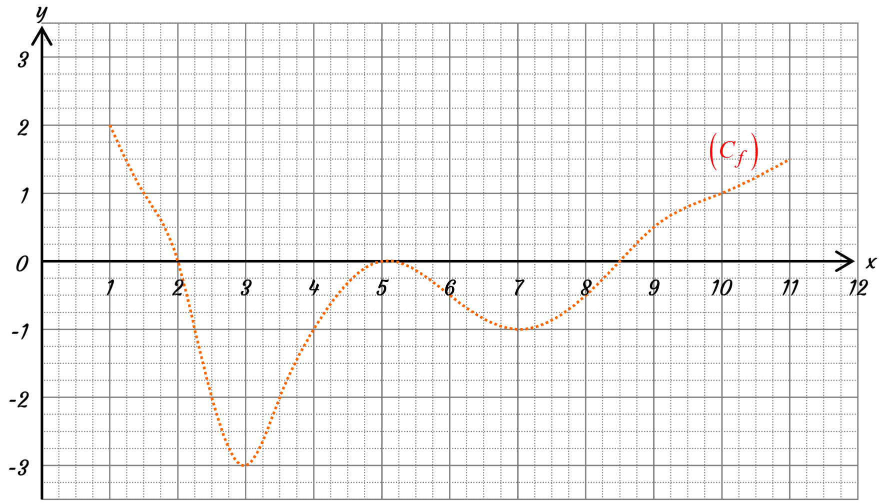


a. A partir du graphique précédent, répondre aux questions suivantes avec toute la précision permise par ce premier.

1. Donner $f(6)$, puis déterminer le ou les antécédents de -2 et 3 par la fonction *f*.
2. Résoudre graphiquement les inéquations :
$$f(x) \leq -1 \qquad\qquad 0 < f(x) < 1$$
On donnera l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.
3. Dresser le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $[1;11]$.
4. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1;11]$.

b. La fonction *h* est définie pour tout réel *x* de l'intervalle $[1;11]$ par :
$$h(x) = 5 - 7 \times f(x)$$
Dresser le tableau de variation de la fonction *h* sur l'intervalle $[1;11]$.

c. On appelle *g* la fonction définie sur l'intervalle $[1;11]$ par :
$$g(x) = |f(x)|$$
Sur le graphique ci-dessous, tracer une esquisse de la courbe (C_g) représentant la fonction *g*.



d. On appelle *j* la fonction définie par :
$$j(x) = \frac{1}{f(x)}$$

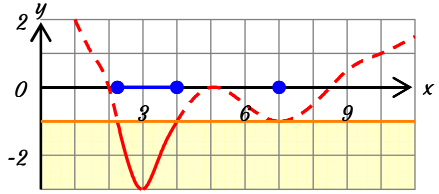
1. Expliquer pourquoi 2 ne peut avoir d'image par la fonction *j*.
En déduire l'ensemble de définition de la fonction *j*.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction *j* sur son ensemble de définition.

Le corrigé

a.1. Tout point de la courbe (C_f) a des coordonnées de la forme $\underbrace{(x; f(x))}_{\text{Un nombre et son image}}$.

- Le point de la courbe d'abscisse 6 a pour ordonnée $-0,5$. Ainsi $f(6) = \underline{-0,5}$.
- Deux points de la courbe ont pour ordonnées -2 ; leurs abscisses sont 2,5 et 3,5. Ces deux réels sont les deux antécédents de -2 par la fonction *f*.
- Aucun point de la courbe n'ayant pour ordonnée 3, ce dernier ne peut avoir d'image par la fonction *f*.

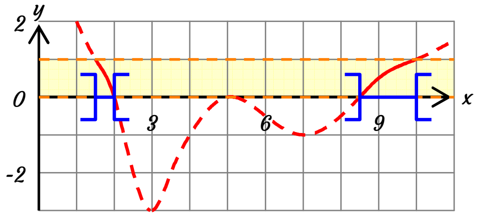
a.2. Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leq -1$, nous devons prendre en compte tous les points de la courbe (C_f) dont l' ordonnée $f(x)$ est inférieure ou égale à -1.



L'ensemble des solutions d'une inéquation est :

$$S = [2,25;4] \cup \{7\}$$

➲ Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe dont les ordonnées $f(x)$ sont situées entre 0 et 1 exclus.



L'ensemble des solutions est :

$$S =]1,5;2[\cup]8,5;10[$$

a.3. Le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[1;11]$ est :

x	1		3		5		7		11
f	1	↘	-3	↗	0	↘	-1	↗	1,5

a.4. Le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1;11]$ est :

x	1		2		5		8,5		11
$f(x)$		+	0	−	0	−	0	+	

b. On obtient les variations de la fonction *h* à partir de celles de la fonction *f*. On passe de l'une à l'autre en effectuant les opérations suivantes:

$f \xrightarrow[\text{Inversion des variations}]{\times(-7)}$ Les variations de $-7f$ sont les opposées de celles de *f* $\xrightarrow[\text{Conservation des variations}]{+5}$ Les variations de *h* sont les opposées de celles de *f*

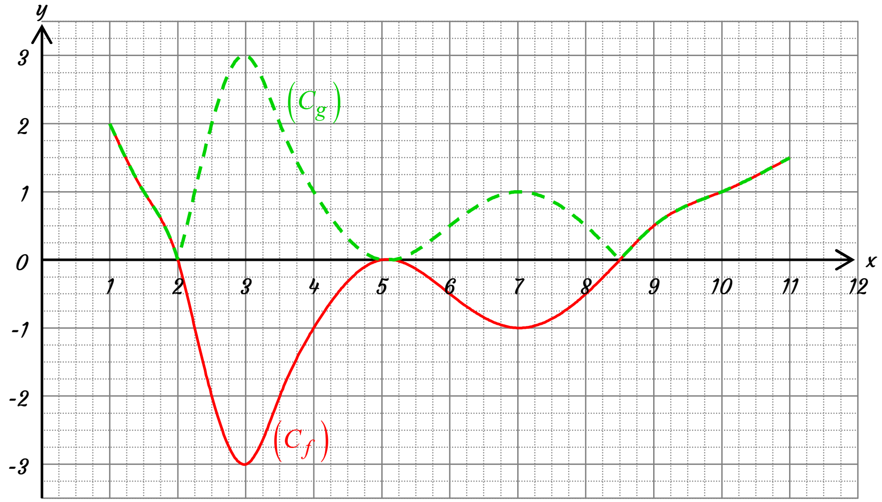
Nous en déduisons que le tableau de variation de la fonction *h* est :

x	1		3		5		7		11
h	-9	↗	26	↘	5	↗	12	↘	$-5,5$

c. La courbe de la fonction *g* qui est la valeur absolue de *f* se construit de la manière suivante :

- Lorsque *f* est positive, les deux courbes sont confondues car alors $g(x) = f(x)$.
- Lorsque *f* est négative, la courbe (C_g) est la symétrique de (C_f) par rapport à l'axe des abscisses car alors $g(x) = -f(x)$.

Donc la courbe (C_g) est la suivante :



d.1. 2 n'a pas d'image par la fonction *g* car on ne peut pas diviser par 0. En effet :

$$j(2) = \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{0} \quad \leftarrow \text{Et là, ça bloque !}$$

Par suite, nous avons l'équivalence :

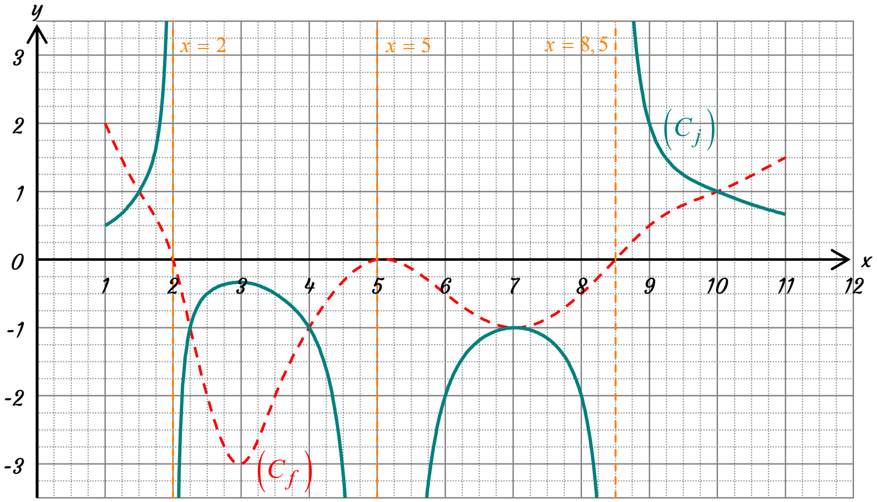
$$j(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ existe} \iff f(x) \text{ existe et est non nul}$$

$$\iff x \in \underbrace{[1;2[\cup]2;5[\cup]5;8,5[\cup]8,5;11[}_{\text{Voilà l'ensemble de définition de la fonction } j}$$

d.2. Les variations de la fonction *j* sont les inverses de celles de *f*. Sauf que dans le tableau de cette première fonction, il y a trois valeurs interdites.

x	1		2		3		5		7		8,5		11
j	0,5	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-1/3$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2/3$

La courbe $\left(C_j\right)$ représentant la fonction j est la suivante. Elle s'appuie sur trois asymptotes verticales qui ont pour équations $x=2$; $x=5$ et $x=8,5$.

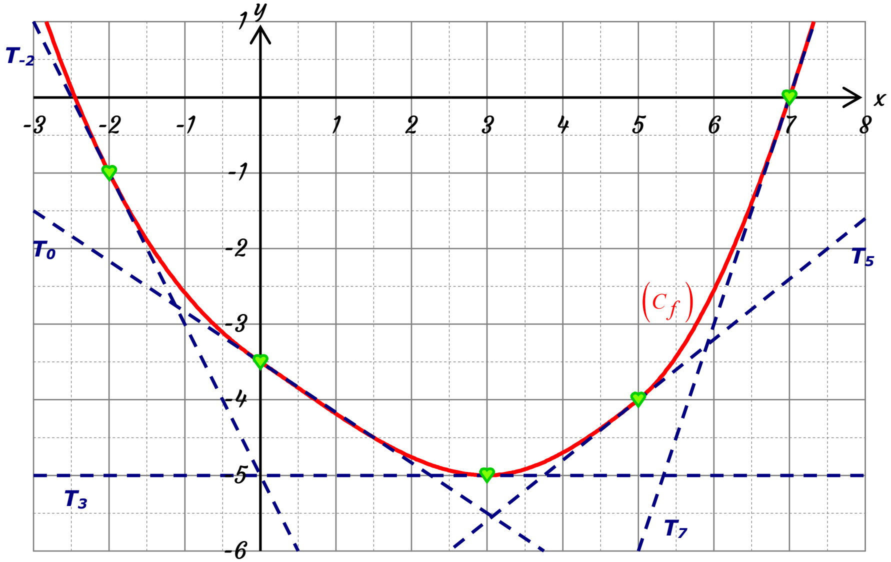


Dérivation

La dérive des incontinents

L'énoncé

a. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé la courbe $\left(C_f\right)$ représentant la fonction *f* qui est définie et dérivable sur ℝ. On a également tracé cinq de ses tangentes : T_{-2}; T_0; T_3; T_5 et T_7.



A partir du graphique ci-dessus, compléter les égalités ci-dessous avec toute la précision permise par ce premier.

$f'(3)=\ldots\ldots$ $\quad f(3)=\ldots\ldots$ $\quad f'(0)=\ldots\ldots$ $\quad f'(-2)=\ldots\ldots$

$f(5)=\ldots\ldots$ $\quad f(0)=\ldots\ldots$ $\quad f'(7)=\ldots\ldots$ $\quad f'(5)=\ldots\ldots$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction *g* définie sur ℝ par :

$$g(x)=x^3+2x^2-7x+4$$

On indiquera les valeurs des extrema ainsi que les limites.

Le corrigé

a. L'image d'un réel par une fonction est l'ordonnée du point de la courbe ayant pour abscisse ce réel alors que le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente en ce point. Ainsi :

$$f'(3)=\text{Coefficient directeur de la tangente horizontale } T_3=\boxed{0}$$

$$f(3)=\text{Ordonnée du point de la courbe d'abscisse } 3=\boxed{-5}$$

$$f'(0)=\text{Coefficient directeur de la tangente } T_0=\frac{-2}{+3}=\boxed{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(-2)=\text{Coefficient directeur de la tangente } T_{-2}=\boxed{-2}$$

$$f(5)=\text{Ordonnée du point de la courbe d'abscisse } 5=\boxed{-4}$$

$$f(0)=\text{Ordonnée du point de la courbe d'abscisse } 0=\boxed{-3,5}$$

$$f'(7)=\text{Coefficient directeur de la tangente } T_7=\boxed{3}$$

$$f'(5)=\text{Coefficient directeur de la tangente } T_5=\frac{+4}{+5}=\boxed{0,8}$$

b. La première chose à dire est que la fonction polynômiale *g* est dérivable sur ℝ car c'est une somme ou plus précisément une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur ℝ.
Calculons sa dérivée :

$$g'(x)=\left(x^3+2x^2-7x+4\right)'=3x^2+2\times 2x-7+0=\boxed{3x^2+4x-7}$$

C'est le signe de la dérivée $g'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *g*. Cette première étant une forme du second degré, calculons son discriminant.

$$\Delta_{g'(x)}=4^2-4\times 3\times(-7)=16+84=\boxed{100=10^2}$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $g'(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-4-10}{2\times 3}=-\frac{14}{6}=\boxed{-\frac{7}{3}} \qquad \underline{\text{et}} \qquad x_2=\frac{-4+10}{2\times 3}=\frac{6}{6}=\boxed{1}$$

Nous en déduisons que le tableau de signe de $g'(x)$ et de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de g	$-\infty$	$\nearrow$	$500/27$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Calculons les valeurs de deux extrema :

$$g\left(-\frac{7}{3}\right)=\left(-\frac{7}{3}\right)^3+2\times\left(-\frac{7}{3}\right)^2-7\times\left(-\frac{7}{3}\right)+4=\frac{-343}{27}+\frac{98}{9}+\frac{49}{3}+4$$
$$=\frac{-343+98\times 3+49\times 9+4\times 27}{27}=\frac{-343+294+441+108}{27}=\frac{500}{27}$$
$$g(1)=1^3+2\times 1^2-7\times 1+4=1+2-7+4=0$$

Et aux infinis, le polynôme $g(x)$ se comporte comme son terme dominant x^3. Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$$

L'histoire d'Alain Vairse

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-\infty;0[$ par :

$$f(x)=x^2+3x-\frac{27}{x}-8$$

a. A la main, calculer l'image de -3 par la fonction f.

b. Dériver la fonction f et prouver que, pour tout réel négatif x, on a :

$$f'(x)=\frac{2x^3+3x^2+27}{x^2}$$

c. On appelle $N(x)=2x^3+3x^2+27$.

Calculer $N(-3)$. Que peut-on en déduire quant au polynôme $N(x)$?

Par la méthode de votre choix, déterminer trois coefficients entiers a, b et c tels que, pour tout réel négatif x, on ait :

$$N(x)=(x+3)\times\left(ax^2+bx+c\right)$$

d. En déduire le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

e. Conclure en donnant le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

Le corrigé

a. Calculons l'image de -3 par la fonction f.

$$f(-3)=(-3)^2+3\times(-3)-\frac{27}{-3}-8=9-9+9-8=1$$

b. Les fonctions carré et affine étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction inverse étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$, leur combinaison linéaire f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc en particulier sur $]-\infty;0[$.

Pour tout réel de cet intervalle, il vient alors :

$$f'(x)=2x+3-27\times\frac{-1}{x^2}-0=2x+3+\frac{27}{x^2}=\frac{(2x+3)\times x^2+27}{x^2}=\frac{\overbrace{2x^3+3x^2+27}^{N(x)}}{x^2}$$

c. Calculons l'image de -3 par le polynôme N.

$$N(-3)=2\times(-3)^3+3\times(-3)^2+27=2\times(-27)+3\times 9+27=-54+27+27=0$$

Comme -3 annule N, alors il en est l'une des racines et $N(x)$ est factorisable par le facteur $x-(-3)=x+3$.

Pour factoriser le polynôme $N(x)$ par le facteur $x+3$, nous utiliserons <u>la méthode par identification des coefficients de même degré</u>.
On veut écrire le polynôme N sous la forme :

$$N(x)=(x+3)\times\left(ax^2+bx+c\right)$$
$$=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$$
$$\boxed{2}x^3+\boxed{3}x^2+\boxed{0}x+\boxed{27}=\boxed{a}x^3+\boxed{(3a+b)}x^2+\boxed{(3b+c)}x+\boxed{3c}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux :

En x^3	$2=a \Leftrightarrow a=2$	*D'un !*
En x^2	$3=3a+b \Leftrightarrow 3=6+b \Leftrightarrow b=3-6=-3$	*De deux !*
En x	$0=3b+c \Leftrightarrow 0=-9+c \Leftrightarrow c=9$	*De trois !*
Constant	$27=3c \Leftrightarrow c=\frac{27}{3}=9$ Ca confirme !	*La vérif' !*

La seconde méthode utilisable consiste à extraire le facteur $x+2$ de chacun des termes du polynôme $P(x)$.

$$N(x)=\underbrace{\boxed{2x^3}}_{\text{Combien de fois } x+3\text{ ?}}+3x^2+27=\boxed{2x^2\times(x+3)-6x^2}+3x^2+27$$
$$=2x^2\times(x+3)+\underbrace{\boxed{\left(-3x^2\right)}}_{\text{Combien de fois } x+3\text{ ?}}+27=2x^2\times(x+2)+\boxed{-3x\times(x+3)+9x}+27$$
$$=2x^2\times(x+3)-3x\times(x+2)+9x+27$$
$$=2x^2\times\overset{\text{Facteur...}}{\boxed{(x+3)}}-3x\times\overset{\text{...com...}}{\boxed{(x+3)}}+9\times\overset{\text{...mun.}}{\boxed{(x+3)}}=\boxed{(x+3)}\times\left(2x^2-3x+9\right)$$

<u>Conclusion :</u> une écriture factorisée du polynôme N est : $N(x)=(x+3)\times\left(2x^2-3x+9\right)$

d. Les signes du facteur $x+3$ et du dénominateur x^2 ne posent guère de problèmes.
Regardons ce qu'il en est du facteur du second degré $2x^2-3x+9$ en calculant son discriminant :

$$\Delta=(-3)^2-4\times2\times9=9-72=-63$$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $2x^2-3x+9$ est toujours du signe de son coefficient dominant 2, c'est-à-dire toujours positif.
Nous en déduisons que le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et celui de variation de la fonction f sont :

x	$-\infty$		-3		0
$x+3$		$-$	0	$+$	
$2x^2-3x+9$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

e. Son minimum sur l'intervalle $]-\infty;0[$ étant égal à 1 (atteint en $x=-3$), nous en déduisons que la fonction f est strictement positive sur l'ensemble des réels négatifs.

La fonction abandonnée

L'énoncé

La fonction *f* est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^3+4x^2+14x+\frac{25}{x}-45$$

On appelle (C_f) sa courbe représentative.

a. Calculer l'image de 1 par la fonction *f*.
Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers 0^+. On détaillera son «calcul».
Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers $+\infty$. On détaillera aussi son «calcul».

b. Prouver que, pour tout réel strictement positif *x*, on a :

$$f'(x)=\frac{(x^2+2x+5)\times(3x^2+2x-5)}{x^2}$$

c. En déduire le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d. Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solution dans l'intervalle $]0;+\infty[$? On expliquera sa réponse. On ne demande pas de résoudre effectivement l'équation $f(x)=0$ mais simplement de donner le nombre de ses solutions.

e. On appelle T_5 la tangente à la courbe (C_f) en son point K d'abscisse $x_K=5$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente T_5.
En déduire les coordonnées du point L qui est l'intersection de la tangente T_5 avec l'axe des abscisses (Ox).

Le corrigé

a. Calculons ce qui est demandé :

$$f(1)=1^3+4\times1^2+14\times1+\frac{25}{1}-45=1+4+14+25-45=44-45=\underline{-1}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=0^++4\times0^++14\times0^++\frac{25}{0^+}-45=0^++0^++0^++(+\infty)-45=\underline{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty+4\times(+\infty)+14\times(+\infty)+\frac{25}{+\infty}-45=(+\infty)+(+\infty)+(+\infty)+0^+-45=\underline{+\infty}$$

b. Les fonctions cube, carré et affines sont dérivables sur $\mathbb{R}$; la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par conséquent, *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc, en particulier, sur $]0;+\infty[$.
Pour tout réel *x* de cet intervalle, il vient alors :

$$f'(x)=3x^2+4\times2x+14+25\times\frac{-1}{x^2}+0=3x^2+8x+14-\frac{25}{x^2}=\underline{\frac{3x^4+8x^3+14x^2-25}{x^2}}$$

Etant bloqué, développons le numérateur du quotient auquel nous devons aboutir :

$$(x^2+2x+5)\times(3x^2+2x-5)=3x^4+2x^3-5x^2+6x^3+4x^2-10x+15x^2+10x-25$$
$$=\underline{3x^4+8x^3+14x^2-25}$$

Nous en concluons que, pour tout réel strictement positif *x*, on a :

$$f'(x)=\frac{(x^2+2x+5)\times(3x^2+2x-5)}{x^2}$$

c. Pour connaître le signe du quotient $f'(x)$, nous devons d'abord étudier ceux des deux facteurs du second degré composant son numérateur.

- Le discriminant du facteur $N_1(x)=x^2+2x+5$ est :

$$\Delta_{N_1(x)}=2^2-4\times1\times5=4-20=\underline{-16}$$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $N_1(x)$ a toujours le même signe qui est celui de son coefficient dominant 1. Donc, $N_1(x)$ est toujours positif.

- Calculons le discriminant du facteur $N_2(x)=3x^2+2x-5$:

$$\Delta_{N_2(x)}=2^2-4\times3\times(-5)=4+60=\underline{64=8^2}$$

Donc, le trinôme $N_2(x)$ a deux racines :

$$x_1=\frac{-2-8}{2\times3}=-\frac{10}{6}=\underline{-\frac{5}{3}} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-2+8}{2\times3}=\frac{6}{6}=\underline{1}$$

$N_2(x)$ est négatif entre ses racines et positif à l'extérieur.

Nous en déduisons que le tableau de signe de $f'(x)$ et de variation de f est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$N_1(x)=x^2+2x+5$		$+$	|	$+$	
$N_2(x)=3x^2+2x-5$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$	|	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de la fonction f	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

d. Vu le tableau de variation de f, ses limites et son minimum -1 atteint en $x=1$, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions : l'une dans l'intervalle $]0;1[$ et l'autre après 1, dans $]1;+\infty[$.
A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on détermine que la première solution se trouve entre 0,83 et 0,84 alors que la seconde est comprise entre 1,18 et 1,19.

e. L'équation réduite de la tangente T_5 est donnée par la formule :

$$y=f'(5)\times(x-5)+f(5)=128\times(x-5)+255=128x-640+255=\boxed{128x-385}$$

avec

$$f(5)=5^3+4\times5^2+14\times5+\frac{25}{5}-45=125+100+70+5-45=300-45=\boxed{255}$$

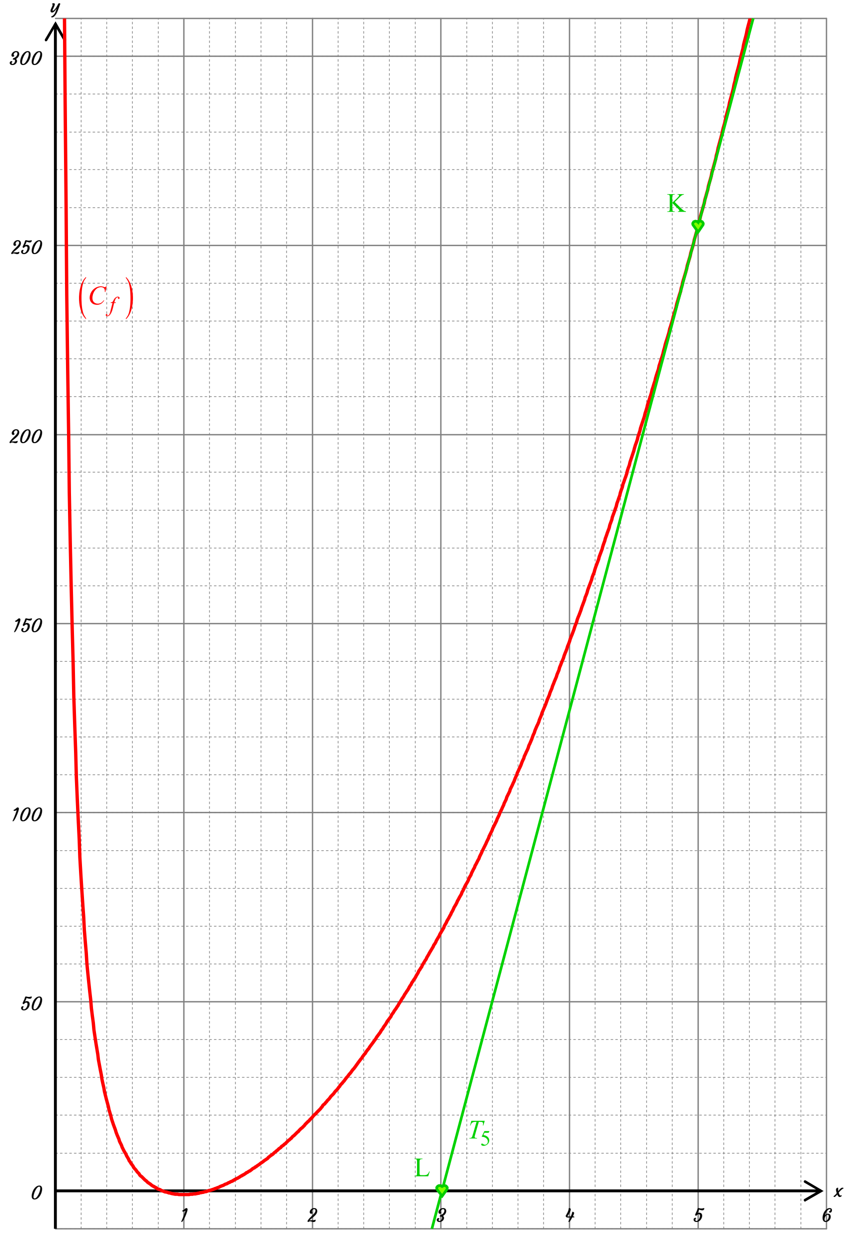
$$f'(5)=\frac{\left(5^2+2\times5+5\right)\times\left(3\times5^2+2\times5-5\right)}{5^2}=\frac{\overbrace{(25+10+5)}^{40}\times\overbrace{(75+10-5)}^{80}}{25}=\boxed{128}$$

➲ Le point L appartenant à l'axe des abscisses (Ox), son ordonnée y_L est nulle.
Faisant également partie de la droite T_5, Les coordonnées de L vérifient l'équation réduite.

$$y_L=128x_L-385 \Leftrightarrow 0=128x_L-385 \Leftrightarrow -128x_L=-385 \Leftrightarrow x_L=\boxed{\frac{385}{128}}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point L sont $\left(\frac{385}{128};0\right)$.

La courbe (C_f) accompagnée de sa tangente T_5 ont été tracées dans le repère orthogonal ci-dessous :



Figures imposables

L'énoncé

Cet exercice est constitué de trois sous-parties indépendantes.

a. La fonction f est définie par :

$$f(x) = 7 + \frac{3}{6x - 2x^2 - 5}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Calculer à la main l'image de 1,5 par la fonction f. On détaillera le calcul.
3. Donner les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$. On pourra utiliser la calculatrice.
4. Prouver que, pour tout réel $x \in D_f$, on a :

$$f'(x) = \frac{12x - 18}{\left(6x - 2x^2 - 5\right)^2}$$

5. En déduire les variations de la fonction f sur son ensemble de définition D_f.

b. La fonction g est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

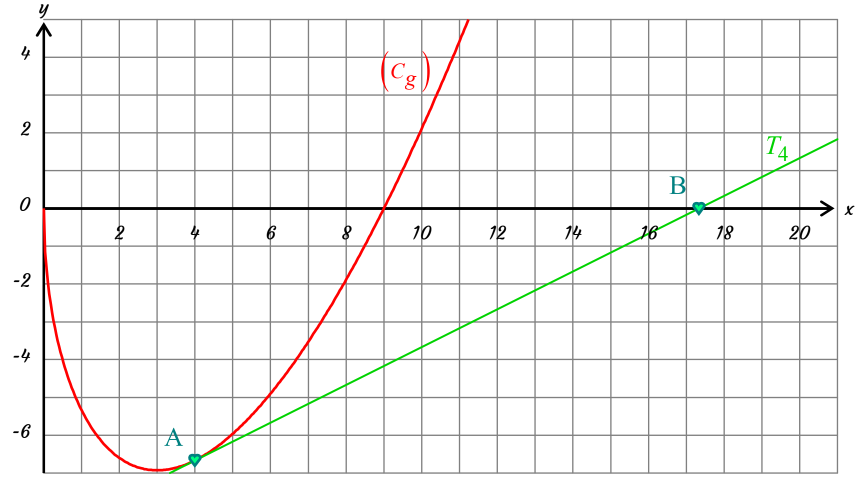
$$g(x) = \sqrt{x} \times \left(\frac{2}{3}x - 6\right)$$

Sa courbe représentative (C_g) accompagnée de sa tangente T_4 en son point A d'abscisse 4 ont été tracées sur le graphique ci-après dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Expliquer brièvement pourquoi la fonction g est seulement dérivable sur $]0;+\infty[$. Démontrer que, pour tout réel strictement positif x, on a :

$$g'(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x}}$$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On calculera les images remarquables apparaissant dans ce tableau.
4. Déterminer par le calcul une équation réduite de la tangente T_4.
5. Déterminer les coordonnées du point B qui est l'intersection de la tangente T_4 et de l'axe des abscisses $(\text{O}x)$.



c. La fonction h est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{7\}$ par :

$$h(x) = \frac{2x^2 - 13x + 1}{x - 7}$$

1. Calculer les images de 5 et 9 par la fonction h. On détaillera les calculs.
2. Démontrer que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{7\}$, nous avons :

$$h'(x) = \frac{2x^2 - 28x + 90}{(x - 7)^2}$$

3. En déduire les variations de la fonction h sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{7\}$.
4. m étant un réel de l'intervalle $\left[\sqrt{79};20\right]$, combien l'équation $h(x) = m$ admet-elle de solutions dans l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{7\}$? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a.1. La fonction *f* est la somme de 7 et du triple de l'inverse de la fonction du second degré $u(x)=-2x^2+6x-5$ qui est définie sur ℝ. Reste à savoir où cette dernière s'annule. Calculons son discriminant :

$$\Delta_{u(x)}=6^2-4\times(-2)\times(-5)=36-40=-4$$

Son discriminant étant négatif, la fonction du second degré $u(x)=-2x^2+6x-5$ ne s'annule jamais. Donc le quotient $3/u(x)$ existe pour tout réel *x*.

Nous en concluons que l'ensemble de définition de la fonction *f* est :

$$D_f=\mathbb{R}=\left]-\infty;+\infty\right[$$

a.2. Calculons l'image de 1,5 par la fonction *f*.

$$f(1,5)=7+\frac{3}{6\times1,5-2\times1,5^2-5}$$
$$=7+\frac{3}{9-2\times2,25-5}=7+\frac{3}{4-4,5}=7+\frac{3}{-0,5}=7-6=1$$

a.3. Lorsque *x* tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, c'est-à-dire que *x* devient grand, la fonction du second degré $u(x)=-2x^2+6x-5$ tend vers $-\infty$ car son coefficient dominant -2 est négatif. Par conséquent :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}7+\frac{3}{u(x)}=7+\frac{3}{-\infty}=7+0^-=7 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=7+\frac{3}{-\infty}=7$$

a.4. La fonction *f* est de la forme $f=7+3\times\frac{1}{u}$ avec
$u(x)=-2x^2+6x-5$
$u'(x)=-2\times2x+6=-4x+6$
Dérivable et non nulle sur ℝ

Donc la fonction *f* est dérivable sur ℝ et pour tout réel *x*, nous avons :

$$f'(x)=0+3\times\frac{-u'}{u^2}=3\times\frac{-(-4x+6)}{\left(-2x^2+6x-5\right)^2}=\frac{12x-18}{\left(6x-2x^2-5\right)^2}$$

a.5. C'est le signe de la dérivée $f'(x)$ qui va nous donner les variations de la fonction *f* sur ℝ. Le dénominateur du quotient $f'(x)$ est un carré qui ne s'annule jamais. Le numérateur est un facteur affine qui s'annule lorsque $12x-18=0 \Leftrightarrow 12x=18 \Leftrightarrow x=\frac{18}{12}=1,5$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$12x-18$		$-$	0	$+$	
$\left(6x-2x^2-5\right)^2$		$+$	|	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de la fonction *f*	7	↘	1	↗	7

b.1. Déterminons la limite de $g(x)$ lorsque *x* tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\times\left(\frac{2}{3}x-6\right)=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$$

b.2. La fonction $g=u\times v$ est un produit où
$u(x)=\sqrt{x}$
$u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$
et
$v(x)=\frac{2}{3}\times x-6$.
$v'(x)=\frac{2}{3}$
Dérivable sur ℝ

Du fait de la fonction racine, la fonction *g* est donc seulement dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et :

$$g'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\left(\frac{2}{3}x-6\right)+\frac{2}{3}\times\sqrt{x}$$
$$=\frac{1\times\left(\frac{2}{3}x-6\right)+\frac{2}{3}\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\frac{2}{3}x-6+\frac{4}{3}x}{2\sqrt{x}}=\frac{2x-6}{2\sqrt{x}}=\frac{\cancel{2}(x-3)}{\cancel{2}\sqrt{x}}=\frac{x-3}{\sqrt{x}}$$

b.3. Le signe de la dérivée $g'(x)$ va nous donner les variations de la fonction g.

Calculons les images remarquables :

$g(0)=\sqrt{0}\times\left(\frac{2}{3}\times 0-6\right)$
$=0\times(-6)=0$

$g(3)=\sqrt{3}\times\left(\frac{2}{\cancel{3}}\times\cancel{3}-6\right)$
$=\sqrt{3}\times(2-6)=-4\sqrt{3}$

x	0		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{x}$		$+$	|	$+$	
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de g	0	↘	$-4\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

b.4. L'équation réduite de la tangente T_4 est de la forme $y=g'(4)\times(x-4)+g(4)$ avec :

$$g(4)=\sqrt{4}\times\left(\frac{2}{3}\times 4-6\right)=2\times\frac{8-18}{3}=2\times\frac{-10}{3}=-\frac{20}{3} \qquad g'(4)=\frac{4-3}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$$

L'équation réduite de la tangente T_4 devient :

$$y=\frac{1}{2}\times(x-4)-\frac{20}{3}=\frac{1}{2}x-2-\frac{20}{3}=\frac{1}{2}x-\frac{6}{3}-\frac{20}{3}=\frac{1}{2}x-\frac{26}{3}$$

b.5. Comme le point B appartient à l'axe des abscisses (Ox), alors son ordonnée y_B est nulle.
Ensuite, comme le point B fait aussi partie de la tangente T_4, alors ses coordonnées en vérifient l'équation réduite déterminée à la précédente question.

$$y_B=\frac{1}{2}x_B-\frac{26}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_B=\frac{26}{3} \Leftrightarrow x_B=\frac{26}{3}\div\frac{1}{2}=\frac{26}{3}\times 2=\frac{52}{3}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point B sont $\left(\frac{52}{3};0\right)$.

c.1. Calculons les images de 5 et 9 par la fonction h.

$$h(5)=\frac{2\times 5^2-13\times 5+1}{5-7}=\frac{2\times 25-65+1}{-2}=\frac{50-64}{-2}=\frac{-14}{-2}=7$$

$$h(9)=\frac{2\times 9^2-13\times 9+1}{9-7}=\frac{2\times 81-117+1}{2}=\frac{162-116}{2}=\frac{46}{2}=23$$

c.2. h est un quotient de $\frac{u}{v}$ avec

$u(x)=2x^2-13x+1$
$u'(x)=2\times 2x-13$
$=4x-13$
Dérivable sur $\mathbb{R}$

et

$v(x)=x-7$
$v'(x)=1$
Dérivable sur $\mathbb{R}$
et non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{7\}$

Donc la fonction h est dérivable sur $]-\infty;7[\cup]7;+\infty[$ et pour tout réel x de cet ensemble :

$$h'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{(4x-13)\times(x-7)-1\times\left(2x^2-13x+1\right)}{(x-7)^2}$$
$$=\frac{4x^2-28x-13x+91-2x^2+13x-1}{(x-7)^2}=\frac{2x^2-28x+90}{(x-7)^2}$$

c.3. Pour connaître le signe de la dérivée $h'(x)$, nous devons préalablement déterminer celui de son numérateur $N(x)=2x^2-28x+90$ qui est une forme du second degré et dont nous allons calculer le discriminant :

$$\Delta_{N(x)}=(-28)^2-4\times 2\times 90=784-720=64=8^2$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $N(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-(-28)-8}{2\times 2}=\frac{28-8}{4}=\frac{20}{4}=5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-(-28)+8}{2\times 2}=\frac{36}{4}=9$$

Son coefficient dominant 2 étant positif, le numérateur $N(x)$ est positif avant 5 et après 9; il est négatif entre les deux racines.
Par suite, le tableau de signe de la dérivée $h'(x)$ et de variation de la fonction h est :

x	$-\infty$		5		7		9		$+\infty$
$N(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-7)^2$		$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variation de h	$-\infty$	↗	7	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	23	↗	$+\infty$

c.4. Comme $m \geq \sqrt{79}$, alors le paramètre m est supérieur au maximum local 7 de h sur l'intervalle $]-\infty;7[$. Donc l'équation $h(x)=m$ n'admet aucune solution dans cet ensemble.
De plus, ayant $m \leq 20$, le paramètre m est inférieur au minimum local 23 de h sur l'ensemble $]7;+\infty[$. En conséquence, l'équation $h(x)=m$ n'a aucune solution dans cet intervalle.
Conclusion : l'équation $h(x)=m$ n'a aucune solution dans l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{7\}$.

Géométrie analytique

Géométrie psychanalytique

L'énoncé

Sur la figure ci-après, le plan est rapporté à un repère normé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants :

$A\left(-2;5\right)$ $B\left(3;8\right)$ $C\left(1,3\ ;\ -3,7\right)$ $D\left(6;4\right)$

Les normes de deux vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont égales à 0,9 centimètres.

a. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E qui est le quatrième sommet du parallélogramme CABE. Construire au compas ce point E sur la figure ci-après.

b. On appelle Δ la droite dont une équation cartésienne est $4x+6y+17=0$.

1. Prouver que le point C appartient à la droite Δ.
2. Déterminer les coordonnées du point F qui est l'intersection de la droite Δ avec l'axe des abscisses $\left(O;\vec{i}\right)$.
3. Expliquer pourquoi aucun point à coordonnées entières ne peut appartenir à la droite Δ.
4. On appelle Δ' la parallèle à la droite Δ passant par le point B.
Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ'.
Tracer cette parallèle Δ' sur la figure ci-après, puis construire au compas la droite Δ.

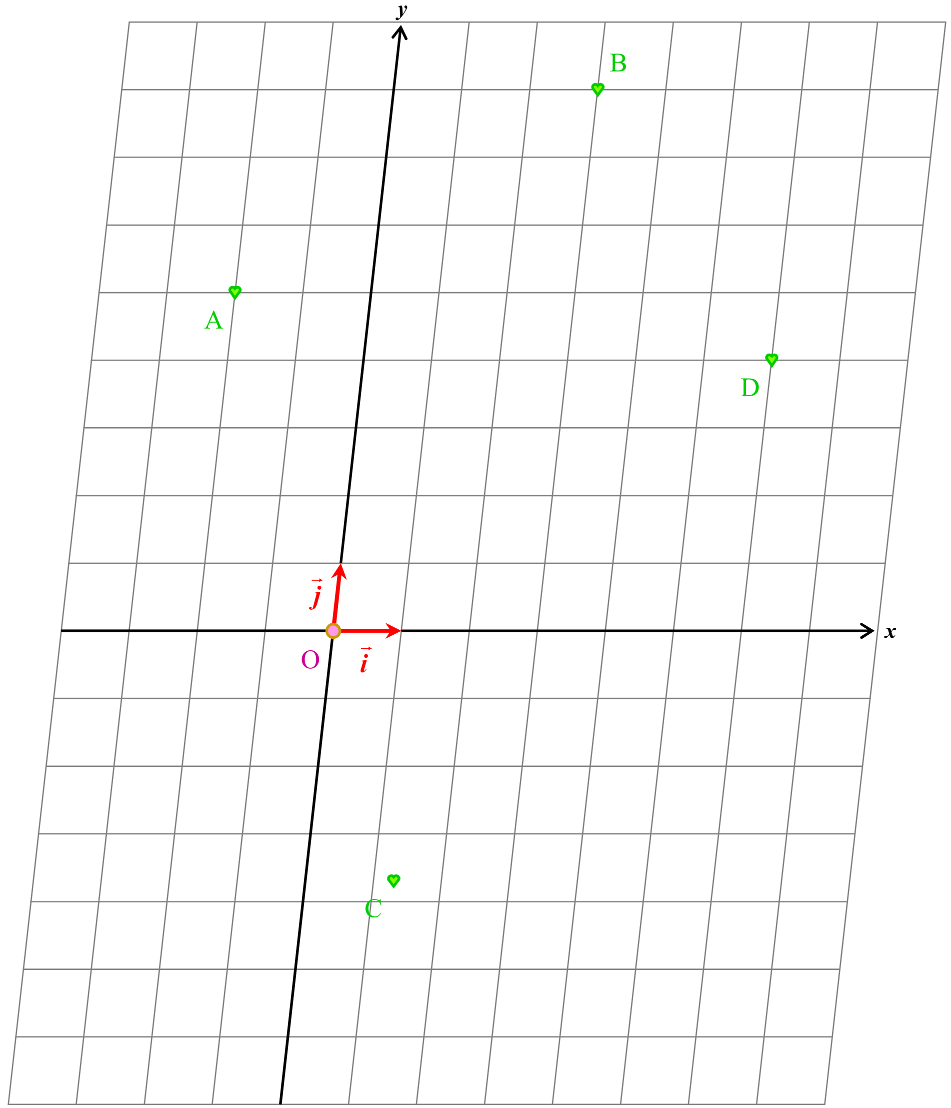
c. Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AG}+6\times\overrightarrow{DG}=3\times\overrightarrow{DB}$$

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point G.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point I qui est le milieu de [BD].
3. Les points A, I et G sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.

d. On appelle H le point d'intersection des droites (OB) et Δ.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (OB)
2. En déduire les coordonnées du point H.



Conclusion : étant la composée ou le montage de trois fonctions décroissantes et les autres étant croissantes, la fonction f est décroissante sur $\left]-3;0\right[$.

Le corrigé

a. Le quadrilatère CABE étant un parallélogramme, nous avons l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x_E-1,3 \\ y_E-(-3,7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 8-5\end{pmatrix}}_{\text{Vecteurs égaux,...}} \Leftrightarrow \underbrace{x_E-1,3=5}_{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \underbrace{y_E+3,7=3}_{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$x_E=6,3 \qquad y_E=-0,7$$

Conclusion : les coordonnées du point E sont $(6,3\ ;\ -0,7)$. Ce quatrième sommet se construit au compas.

b.1. Regardons si les coordonnées du point C vérifient l'équation de la droite Δ.

$$4x_C+6y_C+17=4\times 1,3+6\times(-3,7)+17=5,2-22,2+17=0$$

Comme ses coordonnées en vérifient l'équation, alors le point C appartient bien à Δ.

b.2. Le point F appartenant à l'axe des abscisses $(O;\vec{i})$, son ordonnée y_F est nulle.

Comme F fait aussi partie de la droite Δ, alors ses coordonnées en vérifient l'équation.

$$4x_F+6\times 0+17=0 \Leftrightarrow 4x_F=-17 \Leftrightarrow x_F=-\frac{17}{4}=-4,25$$

Ce qui place le point F est légèrement en dehors de la figure.

b.3. Procédons par l'absurde : supposons que la droite Δ admette un point M à coordonnées entières $(x;y)$.

Comme les coordonnées de ce second vérifient l'équation de cette première alors la somme $4x+6y$ est égale à -17.

Or, la somme $4x+6y=2\times(2x+3y)$ est nécessairement paire...et donc, elle peut difficilement être égale à -17.

Par conséquent, ce que nous avons supposé était faux : le droite Δ n'a pas de point à coordonnées entières. Ce qui rend son tracé délicat dans l'immédiat.

b.4. Une droite et ses parallèles partagent les mêmes vecteurs directeurs.

Un vecteur directeur de la droite Δ d'équation $\underbrace{\boxed{4}}_{a}x+\underbrace{\boxed{6}}_{b}y+17=0$ est le $\vec{u}\begin{pmatrix} -b=-6 \\ a=4\end{pmatrix}$.

Un autre est $-\frac{1}{2}\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2\end{pmatrix}$. C'est celui que nous prendrons pour tracer la parallèle Δ'.

Dans l'immédiat, déterminons par le calcul une équation de cette parallèle Δ'.

$$M(x;y)\in\Delta' \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-8\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 4\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\vec{u}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -6 \\ y-8 & 4\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow [(x-3)\times 4]-[(y-8)\times(-6)]=0$$

$$\Leftrightarrow [4x-12]-[-6y+48]=0$$

$$\Leftrightarrow 4x+6-60=0 \xrightarrow{\div 2} 2x+3y-30=0$$

Conclusion : une équation cartésienne de la parallèle Δ' est donc $2x+3x-30=0$.
Ainsi que nous l'avons dit précédemment, nous traçons cette parallèle en positionnant le vecteur $-\frac{\vec{u}}{2}$ au départ du point B. Ce qui nous donne un second point B' de Δ'.

Pour construire Δ, il ne reste plus qu'à construire au compas le quatrième sommet d'un parallélogramme dont la base est le triangle CBB'.

c.1. Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AG}+6\times\overrightarrow{DG}=3\times\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G-(-2) \\ y_G-5\end{pmatrix}+6\times\begin{pmatrix} x_G-6 \\ y_G-4\end{pmatrix}=3\times\begin{pmatrix} 3-6 \\ 8-4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G+2 \\ y_G-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6x_G-36 \\ 6y_G-24\end{pmatrix}=3\times\begin{pmatrix} -3 \\ 4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 7x_G-34 \\ 7y_G-29\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 \\ 12\end{pmatrix}}_{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{7x_G-34=-9}_{\text{Abscisses égales}} \text{ et } \underbrace{7y_G-29=12}_{\text{Ordonnées égales}}$$

$$7x_G=25 \qquad 7y_G=41$$

$$x_G=\frac{25}{7} \qquad y_G=\frac{41}{7}$$

c.2. Les coordonnées du milieu I du segment [BD] sont données par la formule :

$$x_I=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{3+6}{2}=\frac{9}{2}=4,5 \quad \text{et} \quad y_I=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{8+4}{2}=\frac{12}{2}=6$$

c.3. Regardons si les vecteurs $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 4,5-(-2)=6,5 \\ 6-5=1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 25/7-(-2)=39/7 \\ 41/7-5=6/7\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Pour ce faire, calculons leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AG}\right)=\begin{vmatrix}6,5 & 39/7\\ 1 & 6/7\end{vmatrix}=6,5\times\frac{6}{7}-1\times\frac{39}{7}=\frac{39}{7}-\frac{39}{7}=0$$

Leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires.
Conclusion : les points A, G et I sont alignés.

d.1. Déterminons une équation de la droite (OB).

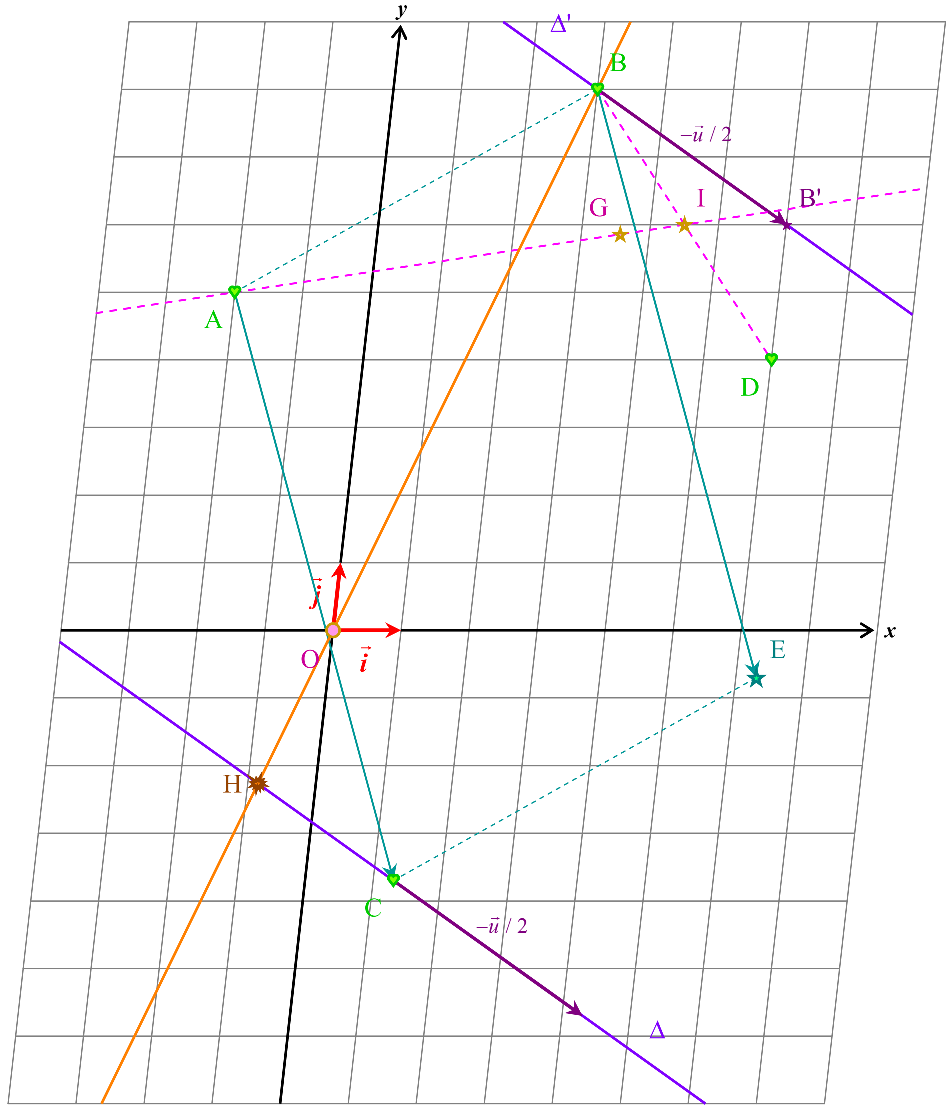
$$M(x;y)\in(OB)\iff \text{Les vecteurs } \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff \det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\right)=0 \iff \begin{vmatrix}x & 3\\ y & 8\end{vmatrix}=0 \iff 8x-3y=0$$

d.2. Comme le point H appartient aux droites (OB) et Δ, alors ses coordonnées vérifient leurs deux équations. Par conséquent, elles sont les solutions du système 2×2 :

$$\begin{cases} H\in(OB) \iff 8x_H-3y_H=0 & \textit{(1)}\\ H\in\Delta \iff 4x_H+6y_H+17=0 & \textit{(2)}\end{cases}$$

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre ➔



Droiture circulaire

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé centimétrique $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants :

$A(-2;1)$ $B(5;-2)$ $C(3;6)$ $D(2,4\ ;\ 1,6)$

a. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E qui est le quatrième sommet du parallélogramme DACE.

b. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre D passant par le point A.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.
2. Les points B et C appartiennent-ils au cercle $\mathscr{C}$? On justifiera ses réponses. Que peut-on en déduire quant au point D vis-à-vis du triangle ABC ?

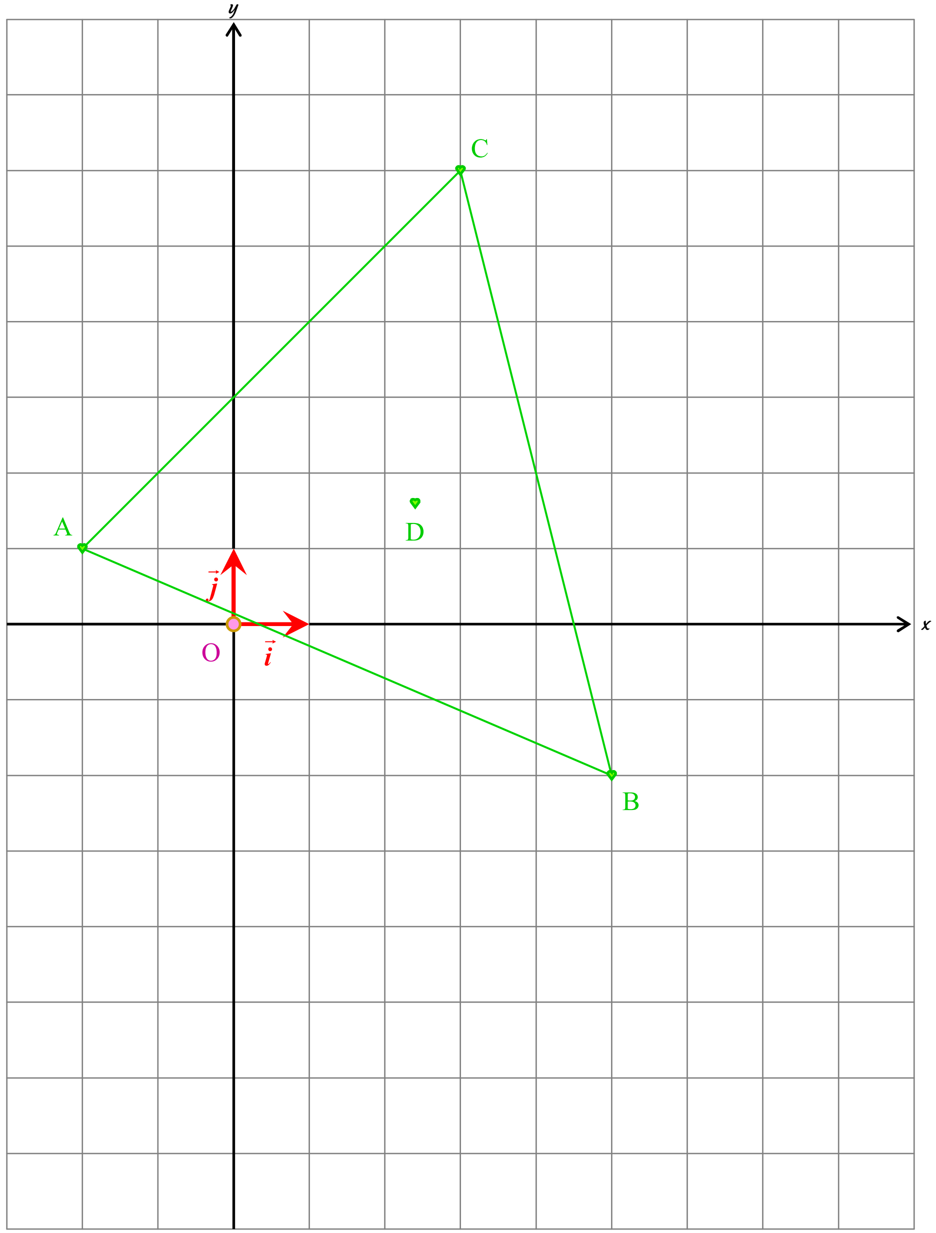
c. On appelle d la droite dont une équation cartésienne est $x-4y+6=0$.

1. Prouver que la droite d est la hauteur du triangle ABC issue du sommet A, c'est-à-dire la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ qui est la hauteur du triangle ABC issue de C.
3. Démontrer que les droites d et Δ sont sécantes.
4. Déterminer les coordonnées du point H qui est l'intersection des droites d et Δ. Qu'est le point H par rapport au triangle ABC ?

d. On appelle Γ l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}=-17$$

1. En notant $(x;y)$ les coordonnées du point M, établir qu'une équation cartésienne de l'ensemble Γ est $x^2+y^2-8x-4y+20=0$.
2. En déduire la nature et les attributs de l'ensemble Γ.



Le corrigé

a. Le quadrilatère DACE étant un parallélogramme, nous avons l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4-(-2) \\ 1,6-1 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}} \Leftrightarrow \overbrace{x_E - 3 = 4,4}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{y_E - 6 = 0,6}^{\text{...ordonnées égales.}}$$

$$x_E = 7,4 \qquad y_E = 6,6$$

Conclusion : le point E a pour coordonnées $(7,4\ ;\ 6,6)$.

b.1. D'abord, calculons le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

$$\text{Rayon de } \mathcal{C} = DA = \sqrt{(-4,4)^2 + (-0,6)^2} = \sqrt{19,36+0,36} = \sqrt{19,72}$$

Le cercle $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M du plan se trouvant à une distance $\sqrt{19,72}$ centimètres du centre D. Par suite :

$$M(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow DM = \sqrt{19,72} \underset{\text{Racine}}{\overset{\text{Carré}}{\rightleftarrows}} (x-2,4)^2 + (y-1,6)^2 = 19,72$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4,8x + 5,76 + y^2 - 3,2y + 2,56 - 19,72 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4,8x - 3,2y - 11,4 = 0$$

b.2. Les coordonnées des points B et C vérifient-elles l'équation du cercle C que nous avons précédemment trouvée ?

$$\left| \begin{array}{l} {x_B}^2 + {y_B}^2 - 4,8x_B - 3,2y_B - 11,4 = 25 + 4 - 24 + 6,4 - 11,4 = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{C} \\ {x_C}^2 + {y_C}^2 - 4,8x_C - 3,2y_C - 11,4 = 9 + 36 - 14,4 - 19,2 - 11,4 = 0 \Rightarrow C \in \mathcal{C} \end{array} \right.$$

Conclusion : passant par ses trois sommets, $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC. Donc, son centre D est le point concours de trois médiatrices du triangle ABC.

c.1. Deux choses sont à établir quant à la droite *d* :

- Le point A appartient-il à *d* ?

$$x_A - 4y_A + 6 = -2 - 4\times 1 + 6 = -2 - 4 + 6 = 0$$

  Ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point A appartient à la droite *d*.
- La droite *d* est-elle perpendiculaire à la droite (BC) ?

  Un vecteur directeur de *d* d'équation $\underset{a}{\boxed{1}}x + \underset{b}{\boxed{(-4)}}y + 6 = 0$ est le $\vec{u}\begin{pmatrix} -b = 4 \\ a = 1 \end{pmatrix}$.

  Par suite : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3-5 \\ 6-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} = 4\times(-2) + 1\times 8 = -8 + 8 = 0$

  Leurs vecteurs directeurs étant orthogonaux, les droites *d* et (BC) sont perpendiculaires.

Conclusion : la droite *d* est bien la hauteur du triangle ABC issue du sommet A.

c.2. La hauteur Δ est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

$$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\times 7 + (y-6)\times(-3) = 0 \Leftrightarrow 7x - 21 - 3y + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - 3y - 3 = 0$$

c.3. D'après son équation cartésienne, un vecteur directeur de la droite Δ est $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Calculons le déterminant :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 4\times 7 - 1\times 3 = 28 - 3 = 25 \neq 0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Donc, les droites *d* et Δ ne sont pas parallèles mais sécantes.

c.4. H appartenant aux droites *d* et Δ, ses coordonnées vérifient leurs deux équations. Par suite, elles sont les solutions du système 2×2 :

$$\left| \begin{array}{lll} H \in d & \Leftrightarrow & x_H - 4y_H + 6 = 0 \quad \textbf{\textit{(1)}} \\ H \in \Delta & \Leftrightarrow & 7x_H - 3y_H - 3 = 0 \quad \textbf{\textit{(2)}} \end{array} \right.$$

Procédons par substitution ! A partir de l'équation ***(1)***, on exprime x_H en fonction de y_H.

$$x_H - 4y_H + 6 = 0 \Leftrightarrow x_H = 4y_H - 6$$

Puis, dans l'équation ***(2)***, on remplace x_H par ce qu'il vaut en y_H.

$$7x_H - 3y_H - 3 = 0 \Leftrightarrow 7\times(4y_H - 6) - 3y_H - 3 = 0 \Leftrightarrow 28y_H - 42 - 3y_H - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25y_H = 45 \Leftrightarrow y_H = \frac{45}{25} = \frac{9}{5} = 1,8$$

Nous en déduisons :

$$x_H = 4\times 1,8 - 6 = 7,2 - 6 = 1,2$$

Conclusion : $H(1,8\ ;\ 1,2)$ étant le point d'intersection de deux hauteurs du triangle ABC, il est l'orthocentre de ce dernier.

d.1. Nous pouvons écrire :

$$M(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM} = -17 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-3 \\ y-6 \end{pmatrix} = -17$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\times(x-3) + (y+2)\times(y-6) = -17$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 5x + 15 + y^2 - 6y + 2y - 12 + 17 = 0$$

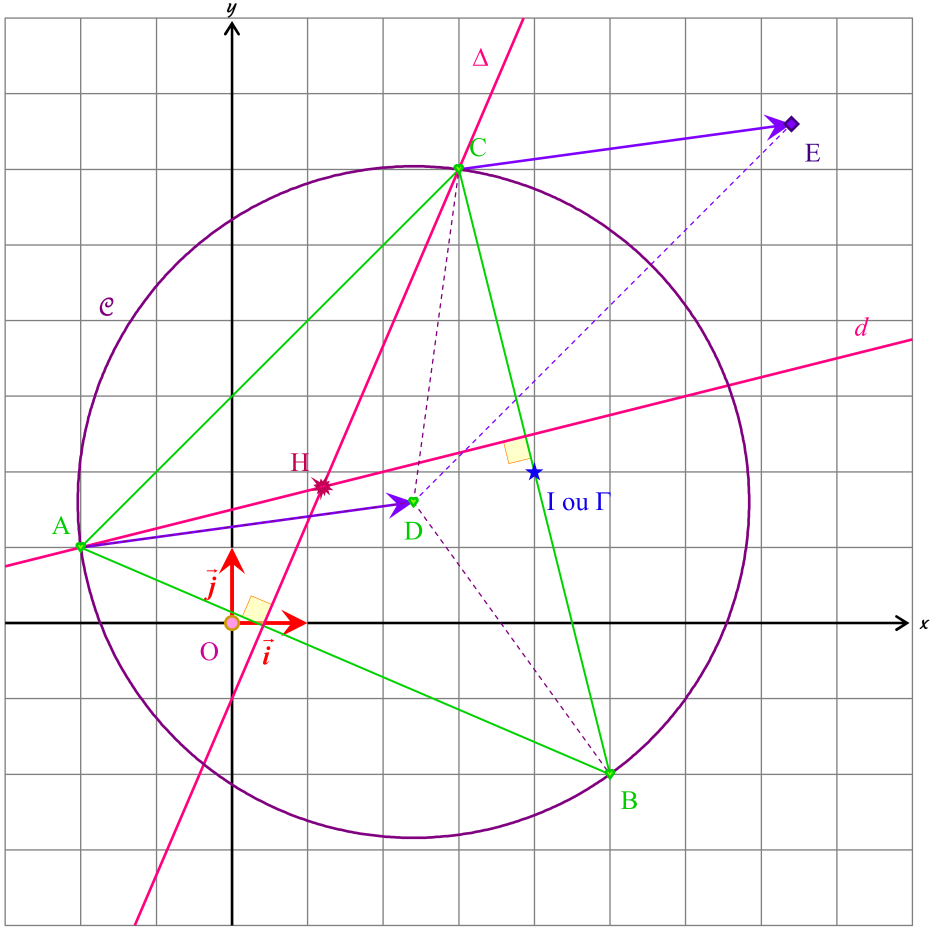
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$$

d.2. Poursuivons notre travail précédent !

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(x;y)\in\Gamma &\Leftrightarrow \underline{x^2-2\times x\times 4}+\underline{y^2-2\times y\times 2}+20=0\\
&\Leftrightarrow \underline{(x-4)^2-16}+\underline{(y-2)^2-4}+20=0\\
&\Leftrightarrow \overbrace{(x-x_{\mathrm{I}})^2+(y-y_{\mathrm{I}})^2=0 \Leftrightarrow \mathrm{IM}^2=0 \underset{\text{Carré}}{\overset{\text{Racine}}{\rightleftarrows}} \underline{\mathrm{IM}=0}}^{\text{En définissant le point I de coordonnées }(4;2)}
\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble Γ se résume au seul point I qui n'est rien d'autre que le milieu du segment [BC].

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



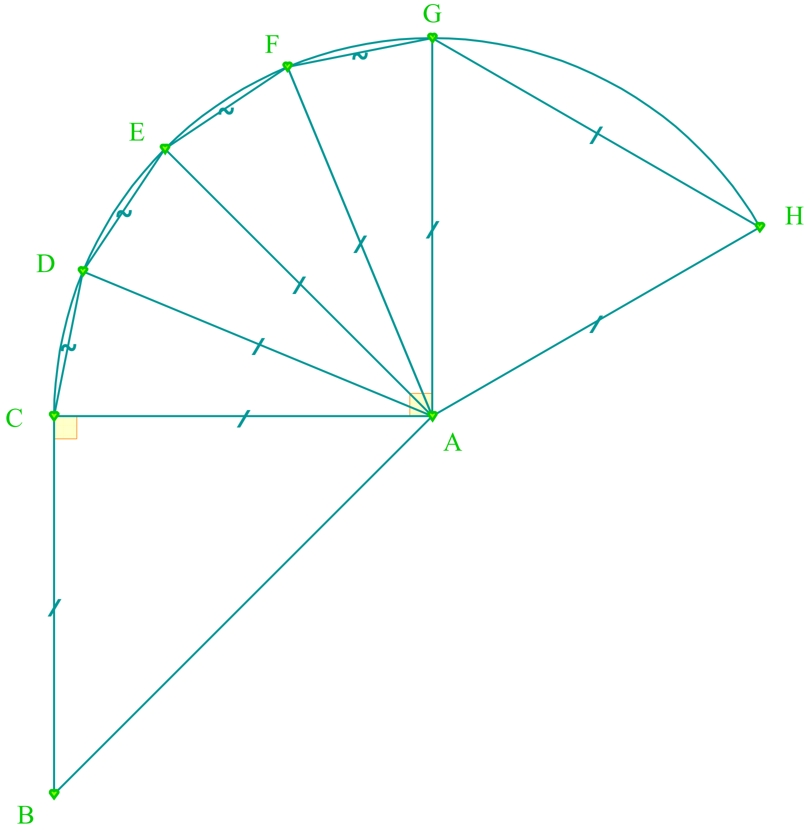
Géométrie classique

C'est ma tournée !

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous :

- Les points C, D, E, F, G et H appartiennent au même cercle de centre A.
- Les triangles ABC et ACG sont isocèles et rectangles respectivement en C et A; le triangle AGH est équilatéral.
- Les triangles ACD, ADE, AEF et AFG sont isométriques (mêmes dimensions).



Pour chacun des angles orientés ci-dessous, déterminer sa mesure principale exacte exprimée en radians, c'est-à-dire celle appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HG}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{CB}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CB}\right)=\ldots\ldots$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{EA}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EG}\right)=\ldots\ldots$ $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CG}\right)=\ldots\ldots$

Le corrigé

D'abord, remarquons que les quatre angles géométriques $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAE}$, $\widehat{EAF}$ et $\widehat{FAH}$ sont égaux et se partagent l'angle droit $\widehat{CAH}$. Donc, ils mesurent chacun $\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$

A partir de là :

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)=+\frac{\pi}{8}$$

$$\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HG}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

Le triangle AHG est équilatéral et on tourne dans le sens négatif.

$$\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{CB}\right)=\pi$$

Ces deux vecteurs sont colinéaires et de sens opposés.

$$\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{-\pi}{4}+\frac{-\pi}{2}=-\frac{3\pi}{4}$$

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right)+\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AH}\right)$$

$$=\frac{-\pi}{4}+\frac{-\pi}{2}+\frac{-\pi}{3}=-\frac{3\pi+6\pi+4\pi}{12}=-\frac{13\pi}{12}\xrightarrow{+2\pi=+24\pi/12}\frac{11\pi}{12}$$

$$\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{EA}\right)=\left(\overrightarrow{AD},-\overrightarrow{AE}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)+\pi=-\frac{\pi}{8}+\frac{8\pi}{8}=\frac{7\pi}{8}$$

$$\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EG}\right)=\frac{3\pi}{8}$$

Le triangle AEG étant isocèle en A, les deux angles à la base $\widehat{AEG}$ et $\widehat{EAG}$ se partagent de manière égale $\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

$$\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CG}\right)=\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CG}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AG}\right)+\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC}\right)+\left(-\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CG}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CG}\right)+\pi$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{4\pi+6\pi+3\pi+12\pi}{12}=\frac{25\pi}{12}\xrightarrow{-2\pi=-24\pi/12}\frac{\pi}{12}$$

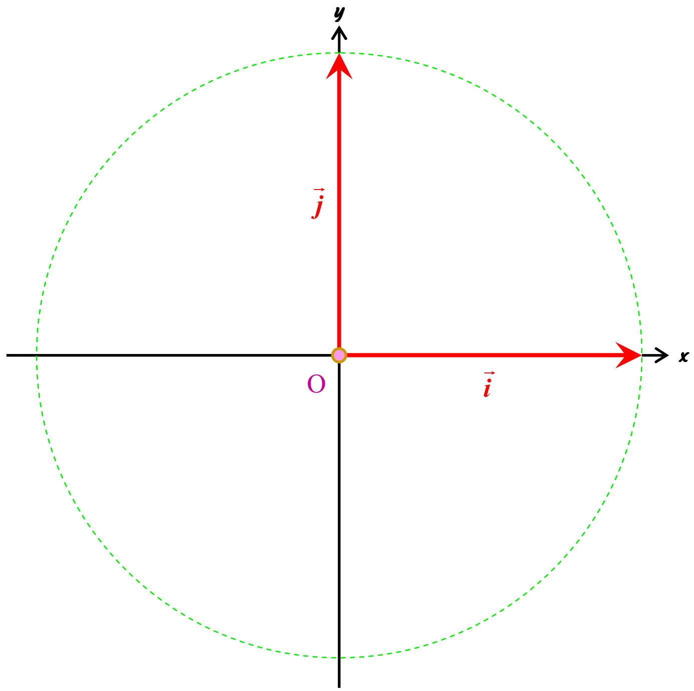
Lost on the trigonometric circle

L'énoncé

α est un réel de l'intervalle $[-2\pi;-\pi]$ tel que $\cos(\alpha)=-\frac{3}{11}$.

a. Déterminer par le calcul la valeur exacte de $\sin(\alpha)$.

b. Sur la figure ci-dessous où une unité graphique vaut 4 centimètres, placer sur le cercle trigonométrique les points A associé au réel α, B associé à $-\alpha$ et enfin C associé à $\pi+\alpha$.



c. Sans justifications, donner les valeurs exactes de :

$\cos(\pi-\alpha)=$ .... $\sin(\pi+\alpha)=$ .... $\cos(\alpha-4\pi)=$ ....

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ .... $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$ .... $\sin(\pi-\alpha)=$ ....

Le corrigé

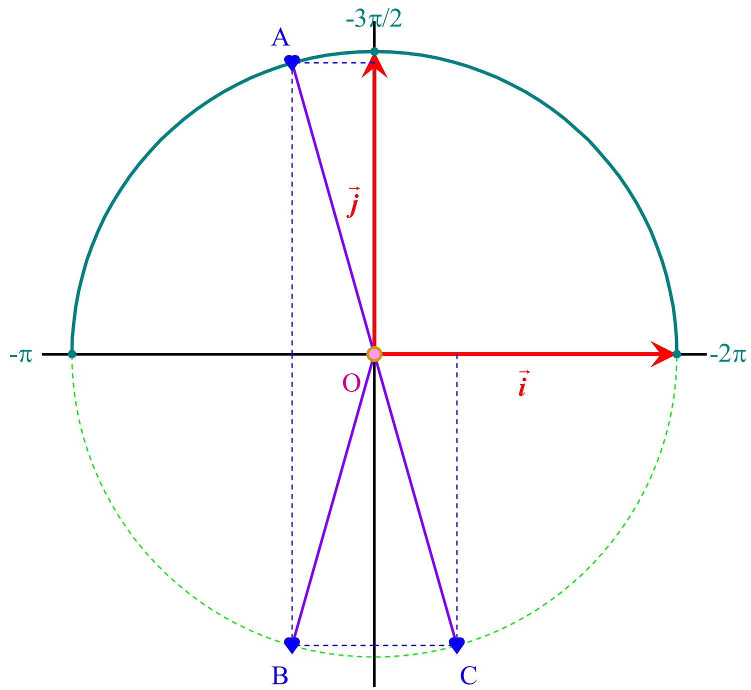
a. Les cosinus et sinus du réel α vérifie l'égalité :

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1 \Leftrightarrow \frac{9}{121}+\sin^2(\alpha)=1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha)=1-\frac{9}{121}=\frac{112}{121}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha)=-\sqrt{\frac{112}{121}}=-\frac{4}{11}\sqrt{7} \quad \underline{\text{ou}} \quad \boxed{\sin(\alpha)=\frac{4}{11}\sqrt{7}}$$

Bonne valeur car $\alpha\in[-2\pi;-\pi]$

b. Ci-dessous, on a placé les points A, B et C demandés.



c. Utilisant les propriétés sur les angles associés vus en cours, nous avons :

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)=\frac{3}{11} \qquad \sin(\pi+\alpha)=-\sin(\alpha)=-\frac{4}{11}\sqrt{7}$$

$$\cos(\alpha-4\pi)=\cos(\alpha)=-\frac{3}{11} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)=-\frac{3}{11}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin(\alpha)=-\frac{4}{11}\sqrt{7} \qquad \sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)=\frac{4}{11}\sqrt{7}$$

Histoires de formules

L'énoncé

Dans le présent exercice, une grande attention sera portée à la clarté des calculs.

a. Exprimer la fonction $A(t)=\cos\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}-t\right)$ en fonction de $\cos(t)$ et de $\sin(t)$ ...si tant est que vous y arriviez !

b. α est un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ dont le sinus est égal à 0,4. Calculer la valeur exacte de $\cos(2\alpha)$.

Le corrigé

a. Appliquons les formules d'addition des cosinus et sinus !

$$A(t)=\cos\left(t+\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}-t\right)$$

$$=\cos(t)\times\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\sin(t)\times\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\times\cos(t)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\times\sin(t)$$

$$=\cos(t)\times\frac{-\sqrt{2}}{2}-\sin(t)\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos(t)-\frac{-\sqrt{2}}{2}\times\sin(t)=0$$

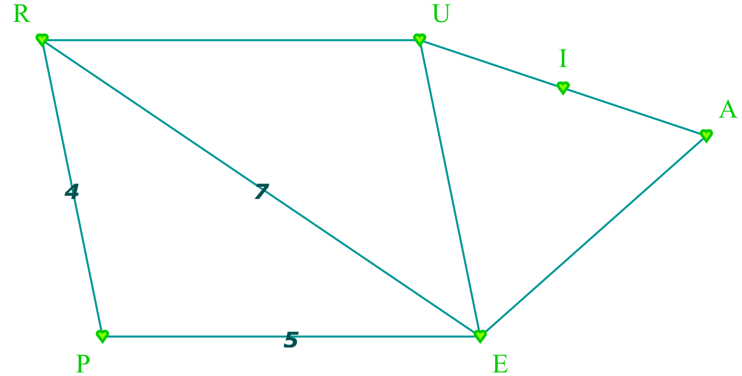
b. D'après une formule de duplication du cosinus, nous pouvons écrire :

$$\cos(2\alpha)=1-2\times\sin^2(\alpha)=1-2\times 0,4^2=1-2\times 0,16=1-0,32=0,68$$

Le produit scalaire aux trousses

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, PEUR est un parallélogramme et EAU est un triangle équilatéral. Les dimensions sont indiquées en centimètres. Enfin, I est le milieu du segment [AU].

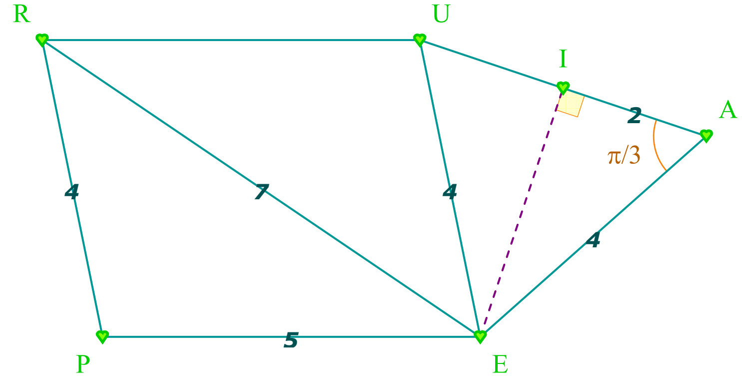


Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EU}$ $\quad\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AI}$ $\quad\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AU}$ $\quad\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{EU}$

Le corrigé

D'abord complétons la figure !



Comme le triangle EAU est équilatéral et que I est le milieu du côté [AU], alors la droite (EI) est la hauteur/médiane/médiatrice/bissectrice issue de E. De plus, l'angle géométrique $\widehat{EAI}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ radians.

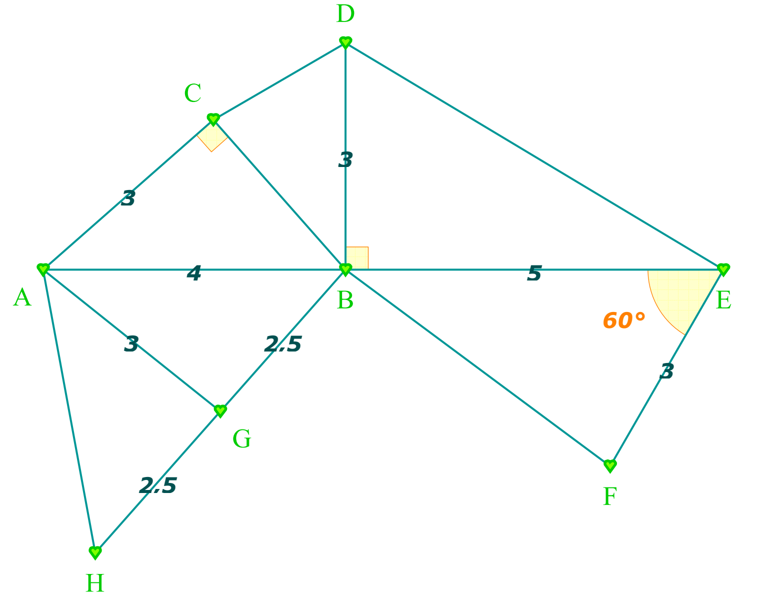
Calculons les produits scalaires proposés :

- $\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EU}=\frac{1}{2}\times\left[\left\|\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{EU}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{EP}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{EU}\right\|^2\right]=\frac{1}{2}\times\left[\left\|\overrightarrow{ER}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{EP}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{EU}\right\|^2\right]$
  $=\frac{1}{2}\times\left[ER^2-EP^2-EU^2\right]=\frac{1}{2}\times[49-25-16]=\frac{1}{2}\times 8=\underline{4|}$
- $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AI}=AE\times AI\times\cos\left(\widehat{EAI}\right)=4\times 2\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=8\times\frac{1}{2}=\underline{4|}$
- $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AU}=\underline{0|}$ car ces deux vecteurs sont orthogonaux; (EI) est la hauteur du triangle équilatéral EAU issue de E.
- $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{EU}=\underbrace{-RP\times EU}_{\overrightarrow{RP}\text{ et }\overrightarrow{EU}\text{ sont colinéaires mais de sens opposé}}=-4\times 4=\underline{-16|}$

Le retour du méchant produit scalaire

L'énoncé

On considère la figure du plan ci-dessous où les distances entre les points sont indiquées en centimètres. Les points A, B et E sont alignés ainsi que les points B, G et H.



a. Calculer les valeurs exactes des produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$ $\quad\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB}$ $\quad\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EA}$ $\quad\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ $\quad\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}$

b. Calculer la valeur exacte de la longueur AH.

c. On appelle X le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BA}=-8$

1. Placer le point X sur la figure.
2. On appelle Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BA}=-8$.
   Etablir la nature de l'ensemble Γ. On précisera ses attributs.

d. Déterminer la nature et les attributs de l'ensemble Δ des points M du plan vérifiant l'égalité

$$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}=\frac{7}{4}.$$

Le corrigé

a. Calculons les produits scalaires demandés :

- $\overbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = AB\times AE}^{\overrightarrow{AB}\text{ et }\overrightarrow{AE}\text{ sont colinéaires et de même sens.}} = 4\times 9 = \underline{36}$
- Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DB}$ étant orthogonaux, on a : $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DB} = \underline{0}$
- $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EA}$

$$= -EF\times EA\times\cos\left(\widehat{FEA}\right) = -3\times 9\times\cos(60°) = -27\times\frac{1}{2} = \underline{-13,5}$$

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2 + \overbrace{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}}^{\text{Orthogonaux}} = AC^2 + 0 = 9 + 0 = \underline{9}$
- $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}\right) = \overrightarrow{DB}^2 + \overbrace{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BE}}^{\text{Orthogonaux}} + \overbrace{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB}}^{\text{Orthogonaux}} + \overbrace{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}}^{\text{Colinéaires...}}$

$$= DB^2 + 0 + 0 + \overbrace{(-BA\times BE)}^{\text{...de sens opposés.}} = 9 - 4\times 5 = 9 - 20 = \underline{-11}$$

b. Appliquant le premier énoncé du théorème de la médiane au point A qui intercepte le segment [BH] dont le milieu est le point G, nous obtenons l'égalité :

$$AB^2 + AH^2 = 2\times AG^2 + \frac{BH^2}{2} \Leftrightarrow 16 + AH^2 = 2\times 9 + \frac{25}{2}$$

$$\Leftrightarrow AH^2 = 18 + 12,5 - 16 = 14,5$$

$$\Leftrightarrow AH = \underline{\sqrt{14,5}\text{ cm} \approx 3,8\text{ cm}}$$

c.1. Le point X appartenant à la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{BX}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires.
Le produit scalaire $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BA}$ étant négatif, ils sont de sens opposés. On a alors :

$$\overbrace{\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BA}}^{\text{Colinéaires...}} = -8 \Rightarrow \overbrace{-BX\times BA}^{\text{...de sens opposés}} = -8 \Rightarrow BX = \frac{8}{BA} = \underline{2\text{ cm}}$$

<u>Conclusion :</u> le point X se trouve sur le segment (BE) à deux centimètres de B.

c.2. Triturons la relation définissant l'ensemble Γ.

$$M\in\Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BA} = -8 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XM}\right)\cdot\overrightarrow{BA} = -8$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{XM}\cdot\overrightarrow{BA} = -8 \Leftrightarrow -8 + \overrightarrow{XM}\cdot\overrightarrow{BA} = -8$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{XM}\cdot\overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{XM}\perp\overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow \text{M appartient à la perpendiculaire à (AB) passant par X}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble Γ est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par X.

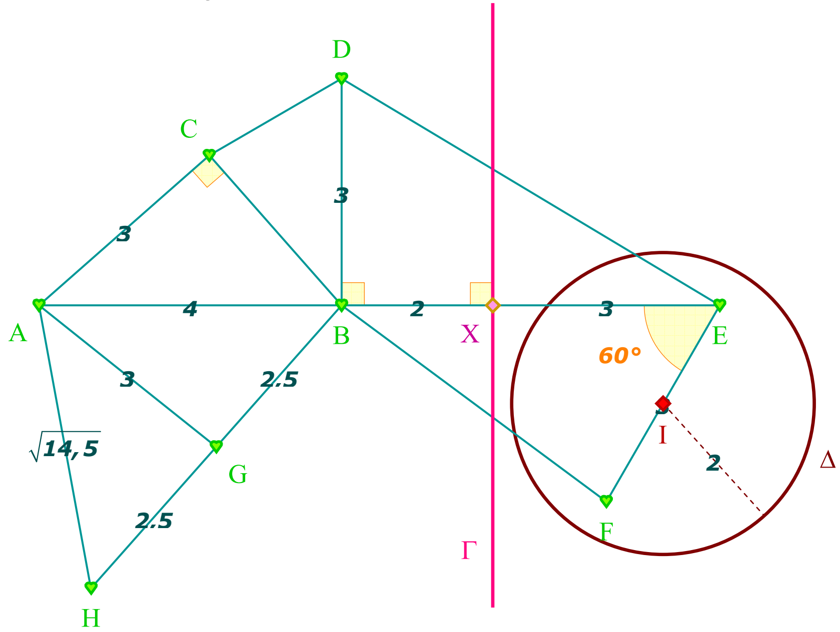
d. On appelle I le milieu du segment [EF].
Appliquant le deuxième énoncé du théorème de la médiane, l'égalité caractérisant Δ devient :

$$M\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow MI^2 - IE^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow MI^2 - 1,5^2 = \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - 2,25 = 1,75 \Leftrightarrow MI^2 = 4 \Leftrightarrow \underline{MI = 2}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble Δ est le cercle de centre I et de rayon 2 centimètres.

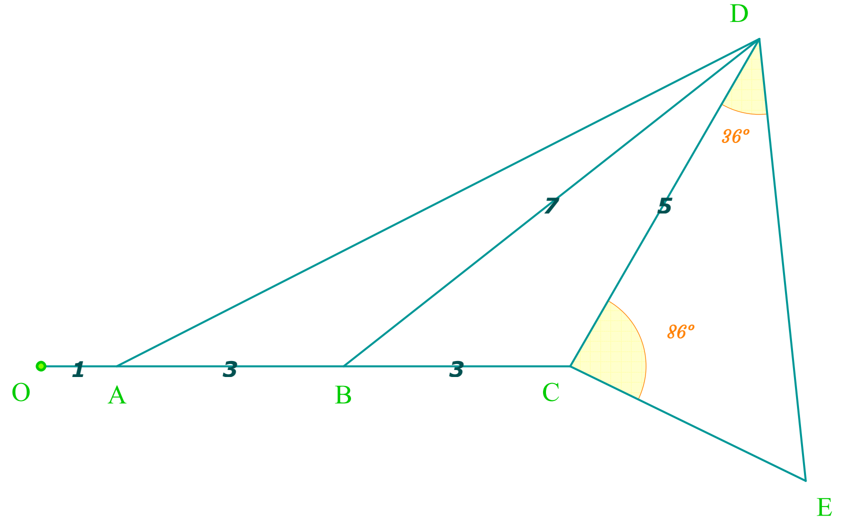
A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Gardez vos distances !

L'énoncé

On considère la figure du plan ci-dessous où les distances entre deux points consécutifs sont indiquées en centimètres et les mesures d'angle en degrés. Les points O, A, B et C sont alignés.



a. Sans utiliser d'angles, calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée au millimètre près de la longueur du segment [AD].

b. Calculer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle géométrique $\widehat{BCD}$.
c. Calculer deux valeurs approchées au millimètre près des distances CE et ED.

d. Déterminer la nature et les attributs de l'ensemble Δ des points M du plan vérifiant l'égalité

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} = -7$$

e. On appelle Γ l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$3\times MO^2 + MB^2 = 48\ .$$

Le but de cette question est de déterminer la nature et les attributs de l'ensemble Γ.

1. Le point B appartient-il à l'ensemble Γ ? On justifiera sa réponse.
2. Sans justifications, recopier et compléter l'égalité $6\times\overrightarrow{AO}+2\times\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots$
3. En poursuivant le calcul

$$3\times MO^2 + MB^2 = 3\times\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)^2 = \ldots\ldots$$

   établir la formule $3\times MO^2 + MB^2 = 4\times MA^2 + 12$.
4. Conclure en donnant la nature et les attributs de l'ensemble Γ.

Le corrigé

a. Appliquons le premier énoncé du théorème de la médiane au segment [AC] de milieu B vu depuis le point D :

$$DA^2 + DC^2 = 2\times DB^2 + \frac{AC^2}{2} \Leftrightarrow DA^2 + 25 = 2\times 49 + \frac{36}{2}$$
$$\Leftrightarrow DA^2 = 98 + 18 - 25 = 91$$
$$\Leftrightarrow DA = \sqrt{91}\text{ cm} \approx 9{,}5\text{ cm}$$

b. Appliquons le théorème d'Al-Kashi au triangle BCD depuis le point C :

$$BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2\times CB\times CD\times\cos\left(\widehat{BCD}\right) \Leftrightarrow 49 = 9 + 25 - 2\times 3\times 5\times\cos\left(\widehat{BCD}\right)$$
$$\Leftrightarrow 49 = 34 - 30\times\cos\left(\widehat{BCD}\right)$$
$$\Leftrightarrow 30\times\cos\left(\widehat{BCD}\right) = 34 - 49$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{BCD}\right) = -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \widehat{BCD} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$$

c. D'abord, dans le triangle CDE, l'angle $\hat{E}$ mesure $180° - 86° - 36°$.
Appliquons la formule des sinus dans le triangle CDE.

$$\frac{\sin\left(\hat{C}\right)}{DE} = \frac{\sin\left(\hat{D}\right)}{CE} = \frac{\sin\left(\hat{E}\right)}{CD} \Leftrightarrow \frac{\sin(86°)}{DE} = \frac{\sin(36°)}{CE} = \frac{\sin(58°)}{5}$$

A partir de cette double égalité, il vient :

- $$\frac{\sin(86°)}{DE} = \frac{\sin(58°)}{5} \Leftrightarrow \sin(86°)\times 5 = DE\times\sin(58°)$$
$$\Leftrightarrow DE = 5\times\frac{\sin(86°)}{\sin(58°)} \approx 5{,}9\text{ cm}$$

- $$\frac{\sin(36°)}{CE} = \frac{\sin(58°)}{5} \Leftrightarrow \sin(36°)\times 5 = CE\times\sin(58°)$$
$$\Leftrightarrow CE = 5\times\frac{\sin(36°)}{\sin(58°)} \approx 3{,}5\text{ cm}$$

d. On appelle I le milieu du segment [CD]. Appliquons le deuxième énoncé du théorème de la médiane à l'égalité définissant l'ensemble Δ.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}}_{\text{Deuxième énoncé...}} = -7 \Leftrightarrow \underbrace{MI^2 - IC^2}_{\text{...du théorème de la médiane}} = -7$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - 2{,}5^2 = -7 \Leftrightarrow MI^2 = -7 + 6{,}25 \Leftrightarrow \underbrace{MI^2 = -0{,}75}_{\text{Un carré n'est jamais négatif !}}$$

Conclusion : Δ est l'ensemble vide.

e.1. Regardons si le point B vérifie la relation définissant l'ensemble Γ.

$$3 \times BO^2 + BB^2 = 3 \times 4^2 + 0^2 = 3 \times 16 + 0 = 48$$

Conclusion : le point B appartient à l'ensemble Γ.

e.2. Le vecteur $\overrightarrow{AO}$ correspond à un déplacement d'un centimètre vers la gauche alors que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est celui d'une translation de trois centimètres vers la droite. Ainsi :

$$\overbrace{6 \times \overrightarrow{AO} + 2 \times \overrightarrow{AB}}^{\text{12 centimètres vers la gauche compensés par 12 autres vers la droite.}} = \vec{0}$$

e.3. Le calcul proposé consiste à décomposer avec Chasles les vecteurs $\overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par le point A, puis à développer les deux carrés scalaires :

$$3 \times MO^2 + MB^2 = 3 \times \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 3 \times \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)^2$$

$$= 3 \times \left[\overrightarrow{MA}^2 + 2 \times \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO}^2\right] + \overrightarrow{MA}^2 + 2 \times \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$$

$$= 3 \times MA^2 + 6 \times \underbrace{\boxed{\overrightarrow{MA}}}_{\text{Facteur...}} \cdot \overrightarrow{AO} + 3 \times AO^2 + MA^2 + 2 \times \underbrace{\boxed{\overrightarrow{MA}}}_{\text{...commun}} \cdot \overrightarrow{AB} + AB^2$$

$$= 4 \times MA^2 + \boxed{\overrightarrow{MA}} \cdot \underbrace{\left[6 \times \overrightarrow{AO} + 2 \times \overrightarrow{AB}\right]}_{=\vec{0}} + 3 \times 1^2 + 3^2$$

$$= 4 \times MA^2 + 0 + 3 + 9 = 4 \times MA^2 + 12$$

e.4. Procédons par équivalence !

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow 3 \times MO^2 + MB^2 = 48 \Leftrightarrow 4 \times MA^2 + 12 = 48$$

$$\Leftrightarrow 4 \times MA^2 = 36 \Leftrightarrow MA^2 = 9 \Leftrightarrow MA = 3 \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow M \in \text{Cercle de centre A et de rayon 3 centimètres.}$$

Conclusion : l'ensemble Γ est le cercle de centre A et de rayon 3 centimètres.

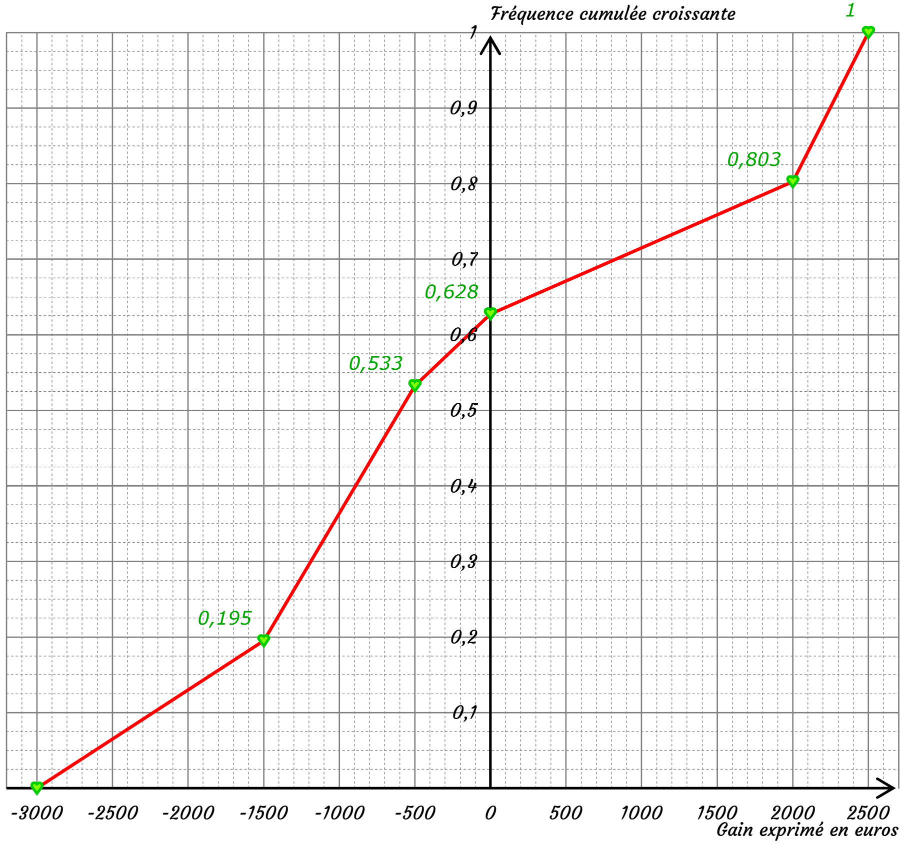
Statistiques et probabilités

Pas Sûr de Gagner !

L'énoncé

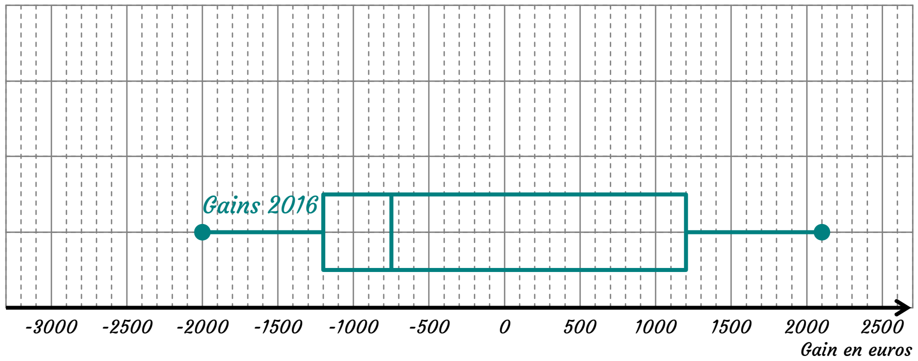
Les *Loups Zeurs Blancois* sont un célèbre club de joueurs de casino des Indres Occidentales. Voici certaines de leurs histoires.

a. Le comptable du club vient de publier les gains des 400 membres pour l'année 2017.
Un gain négatif signifie que le joueur a perdu de l'argent; un gain nul qu'il n'a rien gagné, ni perdu; un gain positif qu'il a gagné de l'argent.
Pour que son étude appelée *gains 2017* soit plus parlante, il a réalisé la courbe ou polygone des fréquences cumulées croissantes suivante :



Avec toute la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer le nombre d'individus se trouvant dans la classe $[0;2000[$, c'est-à-dire le nombre de membres ayant gagné entre 0 et 2000€ durant l'année 2017.
2. Déterminer la médiane M_e ainsi que les quartiles Q_1 et Q_3 de cette série statistique *gains 2017*.
Tracer le diagramme en boite de la série statistique sur le graphique ci-dessous.
3. Le comptable affirme que, en 2017, il y a autant de membres du club qui ont gagné plus de 1000€ que de membres qui ont perdu plus de 1000€. Que penser de cette affirmation ? On justifiera sa réponse.



b. En 2016, le comptable avait réalisé la même étude sur les gains des membres des *Loups Zeurs Blancois*. Il avait représenté ces résultats avec le diagramme en boite *gains 2016* construit sur le graphique ci-dessus.
Voici trois affirmations dont on dira si elles sont vraies, fausses ou bien si on ne peut pas se prononcer. On expliquera ses réponses.

1. Moins d'un tiers des membres du club ont perdu plus de 500 euros en 2016.
2. Plus d'un membre du club sur cinq a gagné plus de 1000€ en 2016.
3. En moyenne, les membres du club ont perdu environ 750€ euros en 2016.

c. Afin de renflouer ses piteuses finances, le président du club, Jean Pauchleuponion, a lancé une collecte de fonds auprès des 400 membres de son club. Voici les résultats de cette collecte.

Don en euros	Rien	1 euro	15 euros	25 euros
Nombre de membres	324	15	34	27

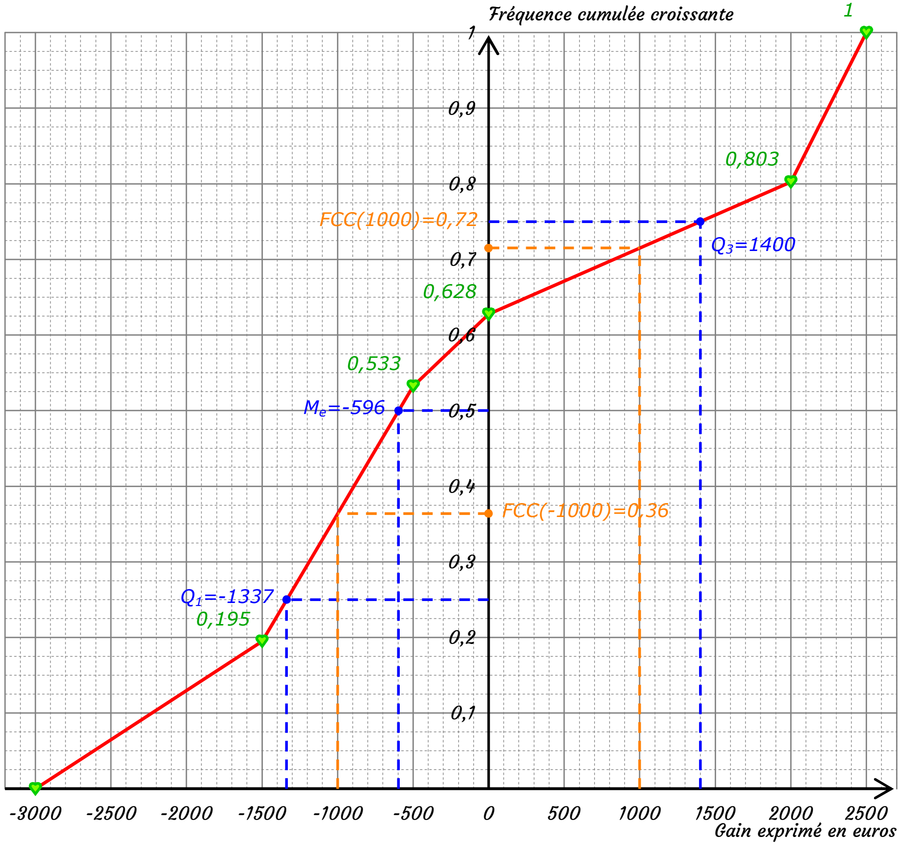
Calculer l'écart-type de cette série statistique. On indiquera l'unité dans laquelle il est exprimé et on écrira tous les calculs effectués.

Le corrigé

a.1. La part des membres du club se trouvant dans la classe $[0;2000[$ est donnée par la différence des fréquences cumulées croissantes $FCC(2000€) - FCC(0€) = 0,803 - 0,628$
$= 0,175$

Par conséquent, il y a $0,175 \times 400 = 70$ membres du club dans la classe $[0;2000[$.

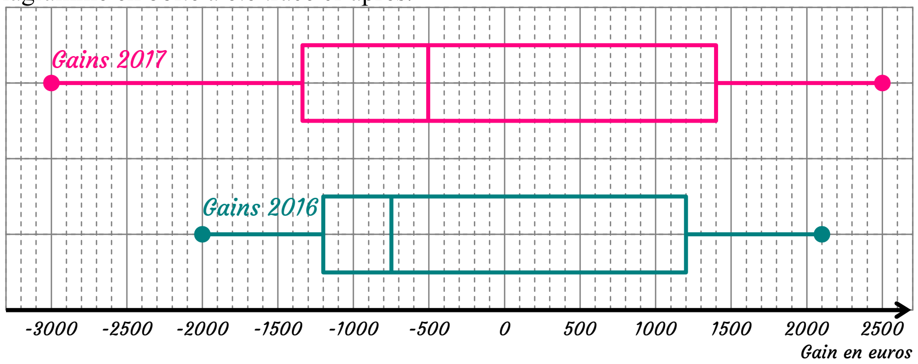
a.2. La médiane M_e, les quartiles Q_1 et Q_3 sont les modalités pour lesquelles les fréquences cumulées croissantes sont respectivement égales à 0,5; 0,25 et 0,75.



Par lecture graphique, on trouve :

$Q_1 = -1337€$ $\quad M_e = -596€$ $\quad Q_3 = 1400€$

Le diagramme en boite a été tracé ci-après.



a.3. D'après le graphique :

- Comme $FCC(-1000) \approx 0,36$, alors environ 36% des membres du club ont perdu plus de 1000€ en 2017.
- Comme $FCC(1000€) \approx 0,72$, alors environ $28\% = 1 - 0,72$ des membres du club ont gagné plus de 1000€ en 2017.

Conclusion : l'affirmation du comptable est fausse.

b.1. La première affirmation est fausse car, d'après son diagramme en boite, la médiane de la série statistique *gains 2016* est égale à environ $750€$. Donc plus de la moitié des membres du club ont perdu plus de 500€.

b.2. Cette deuxième affirmation est vraie car, d'après son diagramme en boite, le troisième quartile Q_3 de la série statistique *gains 2016* vaut environ 1200€. Donc, au moins un quart des membres du club ont gagné plus de 1000€.

b.3. Cette dernière affirmation est indécidable car le diagramme en boite ne renseigne pas sur la moyenne.

c. Le calcul de l'écart-type va se faire en trois étapes :

- D'abord, nous calculons la moyenne de cette série statistique :

$$\text{Moyenne} = \frac{324\times0+15\times1+34\times15+27\times25}{400} = \frac{1200}{400} = 3€$$

- Puis, nous calculons la variance avec la formule simplifiée :

$$\text{Variance} = \frac{324\times0^2+15\times1^2+34\times15^2+27\times25^2}{400} - 3^2 = \frac{24540}{400} - 9 = 52,35$$

- Enfin, l'écart-type est la racine carrée de la variance :

$$\text{Ecart-type} = \sqrt{\text{Variance}} \approx 7,23€$$

Tripot et conséquences

L'énoncé

La *Lycéenne des Jeux* vient de lancer un nouveau jeu, le *Padidédeunon*, dont le principe le suivant.

Après s'être acquittée d'une mise de m euros, la joueuse plonge sa main innocente dans une urne contenant huit plaquettes indiscernables au toucher et numérotées de ***1*** à ***8***. Elle tire l'une de ces huit plaquettes au hasard.

- Si elle tire la plaquette ***8***, alors elle gagne m^2 euros (brut) et le jeu s'arrête.
- Si elle tire les plaquettes ***3*** ou ***6***, alors elle a droit à une seconde chance. Ayant remis la première plaquette tirée dans l'urne, elle en tire une seconde.
  Si cette seconde plaquette est la ***8***, alors elle gagne $2m$ euros (brut). Sinon, elle gagne seulement 2€ (brut). Dans les deux cas, le jeu s'arrête.
- Si elle tire l'une des cinq autres plaquettes, alors elle a perdu et le jeu s'arrête.

On appelle G la variable aléatoire égale au gain brut de la joueuse exprimé en euros et obtenu lors d'une partie de *Padidédeunon*.

a. Construire un arbre pondéré décrivant une partie de *Padidédeunon*.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

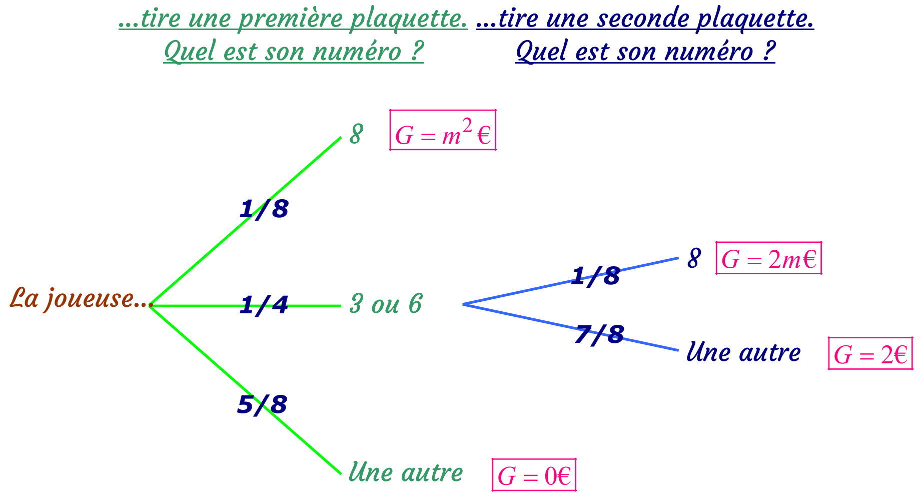
c. Etablir que l'espérance mathématique $E(G)$ de la variable aléatoire G est donnée par la formule $E(G) = \dfrac{2m^2+m+7}{16}$.

d. La *Lycéenne des Jeux* décide de fixer la mise à $m = 10€$. Le jeu est-il favorable à la joueuse, équitable ou bien favorable à la compagnie ? On justifiera sa réponse.

e. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le jeu est favorable à la *Lycéenne des Jeux*. Il s'agit de résoudre une certaine inéquation d'inconnue m.

Le corrigé

a. La situation d'une partie de *Padidédeunon* peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



b. La loi de probabilité de la variable aléatoire G est la suivante :

Gain brut G en euros	$m^2€$	$2m€$	$2€$	$0€$
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{32}$	$\frac{5}{8}$

c. L'espérance mathématique $E(G)$ est donnée par la formule :

$$E(G) = \sum \text{probabilité} \times \text{valeur}$$

$$= \frac{1}{8}\times m^2 + \frac{1}{32}\times 2m + \frac{7}{32}\times 2 + \frac{5}{8}\times 0 = \frac{m^2}{8} + \frac{m}{16} + \frac{7}{16} = \frac{2m^2+m+7}{16}$$

d. Lorsque la mise m est fixée à 10€, l'espérance de gain brut de la joueuse est alors de

$$E(G) = \frac{2\times 10^2+10+7}{16} = \frac{217}{16} = 13{,}5625€ > 10€$$

Conclusion : en moyenne, sur chaque partie, la joueuse est gagnant de 3,5625€.

e. Pour que le jeu soit favorable à la compagnie, il faut et il suffit que l'espérance de gain brut de la joueuse sur une partie de *Padidédeunom* soit strictement inférieur à la mise m. Par suite, nous devons résoudre l'inéquation :

$$\overbrace{\frac{2m^2+m+7}{16}}^{E(G)} < m \xrightarrow{\times 16} 2m^2+m+7<16m \Leftrightarrow \underbrace{2m^2-15m+7}_{f(m)}<0$$

Tout le problème est juste de savoir quand la forme du second degré $f(m)$ est strictement négative. Calculons son discriminant :

$$\Delta_{f(m)}=(-15)^2-4\times 2\times 7=225-56=169=13^2$$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $f(m)$ admet deux racines distinctes :

$$m_1=\frac{-(-15)-13}{2\times 2}=\frac{2}{4}=0,5 \quad \text{et} \quad m_2=\frac{-(-15)+13}{2\times 2}=\frac{28}{4}=7$$

Son discriminant $a=2$ étant positif, le tableau de signe du trinôme $f(m)$ est :

m	$-\infty$		$0,5$		7		$+\infty$
$f(m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : pour que le jeu soit favorable à l'entreprise, il faut et il suffit que la mise soit comprise strictement entre 0,50 et 7 euros.

Probabilités d'elles

L'énoncé

a. Dans cette question, on s'intéresse aux CU-mots qui sont des mots de 12 lettres formés avec les seuls caractères C et U.

1. Combien existe-t-il de CU-mots au total ?
2. Combien existe-t-il de CU-mots se terminant la séquence CUCUCU ?
3. Combien existe-t-il de CU-mots contenant exactement 5 caractères C et 7 caractères U ?

Dans ce qui suit, nous travaillerons avec une urne qui, au début de chaque expérience aléatoire, contient 10 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 10 et telles que :

- Les boules numérotées de 1 à 5 sont jaunes; il y en a donc 5.
- Les boules numérotées de 6 à 8 sont bleues; il y en a donc 3.
- Les deux boules numérotées 9 et 10 sont rouges.

b. Dans cette question, on tire au hasard à trois reprises une boule dans l'urne. Chaque boule extraite n'est pas remise dans l'urne.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules jaunes tirées au cours des trois tirages.

1. Expliquer pourquoi la variable X ne suit pas une loi binomiale. Un arbre partiellement construit pourra être un élément de justification.
2. Calculer la probabilité de l'événement $P(X=0)$.

c. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

1. Combien existe-t-il de tirages possibles ?
2. Combien existe-t-il de tirages où les trois boules sont jaunes ?
3. Combien existe-t-il de tirages constitués de deux boules bleues et d'une boule rouge ?

d. Dans cette question, on tire au hasard à onze reprises une boule dans l'urne. Cette boule extraite est remise dans l'urne après chacun des onze tirages.
On appelle Y la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces onze tirages.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Ecrire le calcul permettant de déterminer la probabilité $P(Y=4)$. Donner la valeur de cette dernière.
3. Déterminer la probabilité qu'au plus dix des onze boules tirées soient rouges.
4. Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y. On donnera la signification de cette espérance.

Le corrigé

a.1. Un CU-mot, c'est 12 positions qui sont occupées soit par un caractère C, soit par un U.

Lettre 1		Lettre 2		Lettre 3		Lettre 4	…		Lettre 12	
2 caractères possibles	×	2 caractères possibles	×	2 caractères possibles	×	2 caractères possibles	…	×	2 caractères possibles	$= 2^{12} = \boxed{4096}$

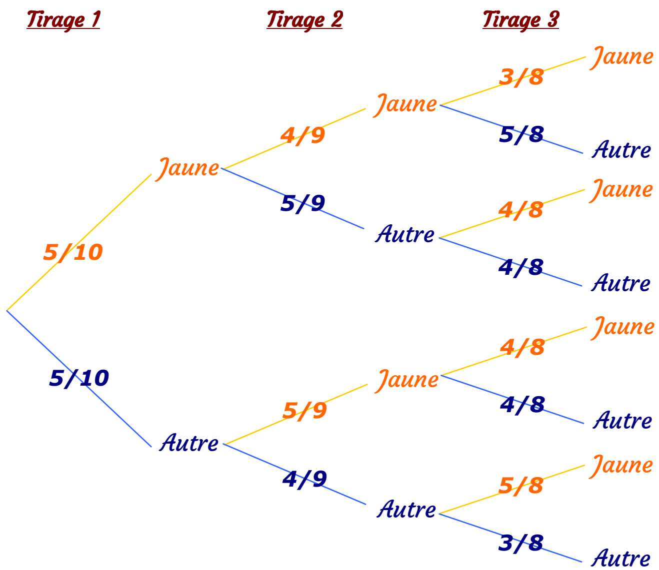
Au total, il existe $2^{12} = 4096$ CU-mots de 12 lettres.

a.2. Les six dernières lettres étant imposées, il reste donc les six premières positions à garnir avec les deux caractères C et U.
Au total, il existe $2^6 = 64$ CU-mots de 12 lettres se terminant par la séquence CUCUCU.

a.3. Un CU-mot contenant exactement 5 caractères C est entièrement défini par les cinq positions occupées par ceux-ci. Ces cinq positions peuvent être vues comme le résultat d'un tirage simultané de cinq nombres à choisir parmi les entiers de 1 à 12.

Au total, il existe donc $\binom{12}{5} = \dfrac{\cancel{12} \times 11 \times 1\cancel{10} \times 9 \times 8}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 792$ AB-mots de 12 lettres contenant exactement 5 caractères C et 7 caractères U.

b.1. L'expérience aléatoire des trois tirages peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



Clairement, à chaque tirage, on ne recommence pas la même épreuve car les probabilités d'obtenir un succès, c'est-à-dire une boule jaune, sont différentes.
C'est pour cela que la variable aléatoire X ne suit pas une loi binomiale.

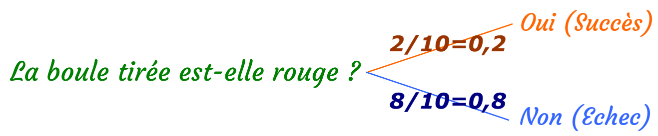
c.2. Vu l'arbre, une seule branche réalise l'événement $X = 3$, c'est-à-dire aucune boule jaune tirée; c'est la branche inférieure ***Autre-Autre-Autre***. Par suite :

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{12} \approx \boxed{0,083}$$

c. Le tirage de trois boules étant simultané, on constitue des combinaisons de trois éléments.

1. Il existe $\underbrace{\binom{10}{3}}_{\text{3 boules à choisir simultanément parmi 10}} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ tirages possibles.
2. Il existe $\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{3 boules jaunes à choisir simultanément parmi 5}} = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ tirages constitués de trois boules jaunes.
3. Il existe $\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{2 boules bleues à choisir simultanément parmi 3}} \times \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{1 boule rouge à choisir simultanément parmi 2}} = 3 \times 2 = 6$ tirages constitués de deux boules vertes et d'une boule rouge.

d.1. Comme après chaque tirage on remet la boule tirée dans l'urne, c'est donc la même expérience aléatoire, la même épreuve de Bernoulli, qui recommence onze fois de suite :



Les onze tirages étant indépendants, ils forment un schéma de Bernoulli.
Par suite, la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de boules rouges tirées au cours des 11 tirages, suit la loi binomiale $B\left(11; \frac{1}{5}\right)$.

d.2. La probabilité demandée est donnée par la formule :

$$P(Y=4) = \binom{11}{4} \times 0,2^4 \times 0,8^7$$
$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 0,2^4 \times 0,8^7 = 330 \times 0,2^4 \times 0,8^7 \approx \boxed{0,111}$$

d.3. Dans cette question, il s'agit de calculer la probabilité :

$$P(Y \leq 10) = \underbrace{1 - P(Y = 11)}_{\text{On utilise l'événement contraire}} = 1 - \underbrace{\binom{11}{11}}_{1} \times 0,2^{11} \times \underbrace{0,8^0}_{1} = 1 - 0,2^{11} \approx 1$$

d.4. La variable aléatoire Y suivant la loi binomiale $B(11;0,2)$, son espérance est donnée par le formule :

$$E(X) = 11 \times 0,2 = 2,2 \text{ boules rouges pour onze boules tirées}$$

Suites

Cinq à la suite

L'énoncé

a. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=-9$ et telle que $u_5=100$.

1. Calculer les termes u_6 ; u_{20} et u_0.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

b. La suite (v_n) est définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = 2\times n^2 - v_n + 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Calculer le terme v_2.

c. (w_n) est une suite dont on connait deux termes : $\begin{cases} w_9 = 80 \\ w_{10} = 90 \end{cases}$

Les deux questions suivantes sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Dans cette question, on suppose que (w_n) est arithmétique. Déterminer alors la valeur du terme w_{11}.
2. Dans cette question, on suppose que (w_n) est géométrique. Déterminer alors la valeur du terme w_{11}.

d. La suite (x_n) est définie par :

$$\begin{cases} x_1 = 5 \qquad x_2 = 7 \\ x_{n+2} = 3\times x_{n+1} - x_n + 2 \quad \text{pour tout entier positif } n \end{cases}$$

Calculer le terme x_4.

e. La suite (t_n) est arithmétique. On connait deux de ses termes : $\begin{cases} t_{20} = 35 \\ t_{70} = 215 \end{cases}$.

1. Déterminer par le calcul la raison r de la suite arithmétique (t_n).
2. Calculer la somme $T = \underbrace{t_{20}+t_{21}+t_{22}+\ldots+t_{69}+t_{70}}_{\text{Somme de tous les termes de la suite } (t_n) \text{ entre les rangs 20 et 70.}}$.

Le corrigé

a.1. Comme la suite (u_n) est arithmétique de raison $r=-9$, alors :

$$\begin{cases} u_6 = u_5 + r = 100 + (-9) = \underline{91} \\ u_{20} = u_5 + (20-5)\times r = 100 + 15\times(-9) = \underline{-35} \\ u_0 = u_5 + (0-5)\times r = 100 - 5\times(-9) = 100+45 = \underline{145} \end{cases}$$

a.2. De manière générale, nous pouvons écrire que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_n = u_5 + (n-5)\times r = 100 + (n-5)\times(-9) = 100 - 9n + 45 = \underline{145-9n}$$

b. La suite (v_n) étant définie par récurrence, le calcul du troisième terme v_2 exige d'abord celui de v_1.

$$\begin{cases} v_1 = v_{0+1} = 2\times 0^2 - v_0 + 1 = 0 - 5 + 1 = \underline{-4} \\ v_2 = v_{1+1} = 2\times 1^2 - v_1 + 1 = 2 - (-4) + 1 = \underline{7} \end{cases}$$

c.1. Si la suite (w_n) est arithmétique, alors sa raison r est égale à la différence de deux termes consécutifs. Ici, on a :

$$r = w_{10} - w_9 = 90 - 80 = \underline{10}$$

Par conséquent :

$$w_{11} = w_{10} + r = 90 + 10 = \underline{100}$$

c.2. Si la suite (w_n) est géométrique, alors sa raison q est égale au quotient de deux termes consécutifs. Ici, on a :

$$q = \frac{w_{10}}{w_9} = \frac{90}{80} = \underline{\frac{9}{8} = 1{,}125}$$

Donc :

$$w_{11} = w_{10}\times q = 90\times\frac{9}{8} = \frac{810}{8} = \underline{\frac{405}{4} = 101{,}25}$$

d. Pour calculer le terme demandé, il faut d'abord déterminer celui qui le précède :

$$\begin{cases} x_3 = x_{1+2} = 3\times x_{1+1} - x_1 + 2 = 3\times x_2 - x_1 + 2 = 3\times 7 - 5 + 2 = 21 - 3 = \underline{18} \\ x_4 = x_{2+2} = 3\times x_{2+1} - x_2 + 2 = 3\times x_3 - x_2 + 2 = 3\times 18 - 7 + 2 = 54 - 5 = \underline{49} \end{cases}$$

e.1. La raison r de la suite arithmétique (t_n) vérifie l'égalité :

$$t_{70} = t_{20} + (70-20)\times r \iff 215 = 35 + 50\times r \iff 50\times r = 215 - 35 = -180$$
$$\iff r = \frac{180}{50} = 3,6$$

<u>Conclusion :</u> la suite arithmétique (t_n) a pour raison $r = 3,6$.

e.2. Comme la suite (t_n) est arithmétique, alors la somme T des termes consécutifs est donnée par :

$$T = \underbrace{t_{20} + t_{21} + t_{22} + \ldots + t_{69} + t_{70}}_{\text{Somme de 51 termes consécutifs d'une suite arithmétique}} = 51\times\frac{t_{20}+t_{70}}{2} = 51\times\frac{35+215}{2} = 51\times 125 = 6375$$

Bonne mine et mauvaise pioche

L'énoncé

Dans la famille Nœur, on exploite la lignite en famille, de génération en génération.
A l'occasion de ce mois de janvier, Azémie et Barthélémy se sont lancés un défi : celui qui extrairait la plus grande masse de lignite.

- Le premier janvier, Azémie commence prudemment en extrayant $a_1 = 200$ kilogrammes de lignite. Les jours suivants, elle augmente chaque jour la masse extraite quotidiennement de 5% par rapport à celle du jour précédent.
- Le premier janvier, Barthélémy démarre en trombe en extrayant $b_1 = 1000$ kilogrammes de lignite. Mais les jours suivants, cette masse extraite quotidiennement diminue chaque jour de 6% par rapport à celle du jour précédent.

a. On appelle a_n la masse exprimée en kilogrammes de lignite extraite par Azémie le n janvier.

1. Montrer que, le 3 janvier, Azémie extrait un peu plus de 220 kilogrammes de lignite.
2. Donner la nature de la suite (a_n). On précisera ses attributs.
3. Exprimer a_n en fonction de l'entier positif n.
4. Calculer la quantité de lignite qui est extraite par Azémie le 20 janvier.

b. On appelle b_n la masse exprimée en kilogrammes de lignite extraite par Barthélémy le n janvier.

1. Montrer que, le 3 janvier, Barthélémy extrait un peu moins de 884 kilogrammes de lignite.
2. Donner la nature de la suite (b_n). On précisera ses attributs.
3. Exprimer b_n en fonction de l'entier positif n.
4. Calculer la quantité de lignite qui est extraite par Barthélémy le 20 janvier.

c. En utilisant la calculatrice, donner la date à partir de laquelle la masse de lignite extraite quotidiennement par Azémie devient supérieure à celle de Barthélémy.

d. Qui d'Azémie ou de Barthélémy a extrait la plus grande masse de lignite sur la totalité du mois de janvier ? On justifiera sa réponse.

e. Pour tout entier positif n, on appelle $T_n = \underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}_{\text{Somme de tous les termes entre les rangs 1 et } n.}$.

1. Exprimer T_n en fonction de n.
2. Déterminer le plus petit réel que ne dépassera jamais la suite (T_n).

Le corrigé

a.1. Il s'agit de calculer le terme a_3 ; mais avant, il faudra déterminer a_2.

a_1 = masse extraite par Azémie le 1er jan. = $\boxed{200 \text{ kg}}$

a_2 = masse extraite par Azémie le 2 jan.

$= a_1 + 5\%$ de $a_1 = a_1 + 0,05 \times a_1 = (1+0,05) \times a_1 = 1,05 \times a_1 = \boxed{210 \text{ kg}}$

a_3 = masse extraite le 3 jan. $= a_2 + 5\%$ de $a_2 = 1,05 \times a_2 = \boxed{220,5 \text{ kg}}$

a.2. Le phénomène observé (l'augmentation quotidienne de 5%) sur les trois premiers termes de (a_n) se reproduisant, nous avons que, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = a_n + 5\% \text{ de } a_n = a_n + 0,05 \times a_n = 1,05 \times a_n$$

Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $a_1 = 200$.

a.3. Nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} = \boxed{200 \times 1,05^{n-1}}$$

a.4. Le 20 janvier, Azémie extrait $a_{20} = 200 \times 1,05^{19} \approx 505,39$ kg de lignite.

b.1. Là encore, le calcul du terme b_3 nécessite la connaissance du terme b_2.

b_1 = masse extraite par Barthélémy le 1er jan. = $\boxed{1000 \text{ kg}}$

b_2 = masse extraite par Barthélémy le 2 jan.

$= b_1 - 6\%$ de $b_1 = b_1 - 0,06 \times b_1 = (1-0,06) \times b_1 = 0,94 \times b_1 = \boxed{940 \text{ kg}}$

b_3 = masse extraite le 3 jan. $= b_2 - 6\%$ de $b_2 = 0,94 \times b_2 = \boxed{883,6 \text{ kg}}$

b.2. La baisse quotidienne de 6% se reproduisant les jours suivants, nous avons que, pour tout entier naturel n :

$$b_{n+1} = b_n - 6\% \text{ de } b_n = 0,94 \times b_n$$

Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = 0,94$ et de premier terme $b_1 = 1000$.

b.3. Le terme général de la suite est alors donné par :

$$b_n = b_1 \times q^{n-1} = \boxed{1000 \times 0,94^{n-1}}$$

b.4. Le 20 janvier, Barthélémy extrait $b_{20} = 1000 \times 0,94^{19} \approx 308,62$ kg de lignite.

c. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, on observe qu'Azémie prend le pas sur Barthélémy à partir du 16 janvier. Mathématiquement : $a_n > b_n \iff n \geq 16$.

d. La production totale effectuée par Azémie est donnée par la somme :

$$A = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{31}}_{\substack{\text{Somme de 31 termes consécutifs} \\ \text{d'une suite géométrique de raison } q=1,05}} = 200 \times \frac{1-1,05^{31}}{1-1,05} \approx \boxed{14152,16 \text{ kg}}$$

La production totale effectuée par Barthélémy est donnée par la somme :

$$B = \underbrace{b_1 + b_2 + \ldots + b_{31}}_{\substack{\text{Somme de 31 termes consécutifs} \\ \text{d'une suite géométrique de raison } q=0,94}} = 1000 \times \frac{1-0,94^{31}}{1-0,94} \approx \boxed{14218,66 \text{ kg}}$$

<u>Conclusion :</u> c'est Barthélémy qui produit le plus sur le mois de janvier.

e.1. Pour tout entier positif n, nous pouvons écrire :

$$T_n = \underbrace{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}_{\substack{\text{Somme de } n \text{ termes consécutifs} \\ \text{d'une suite géométrique de raison } q=0,94}}$$

$$= b_1 \times \frac{1-0,94^n}{1-0,94} = \frac{1000}{0,06} \times \left(1-0,94^n\right) = \boxed{\frac{50000}{3} \times \left(1-0,94^n\right)}$$

e.2. Pour tout entier positif n, nous avons :

$$0,94^n > 0 \xrightarrow{\times(-1)} -0,94^n < 0 \xrightarrow{+1} 1-0,94^n < 1 \xrightarrow{\times\frac{50000}{3}} \boxed{T_n < \frac{50000}{3}}$$

De plus :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{50000}{3} \times \left(1 - \boxed{0,94^n}\right) = \frac{50000}{3} \times \left(1-0^+\right) = \boxed{\frac{50000}{3}}$$

<u>Conclusion :</u> ce plus petit réel est $\frac{50000}{3}$.

Table des matières

Le mot de l'auteur

Ce recueil d'exercices de première S est sans doute le dernier que je publie car à compter de la rentrée 2019, c'est le nouveau bac voulu par la Macronie qui entrera en vigueur.

Dans cette nouvelle mouture de notre diplôme bicentaire, les mathématiques ont été dégagées du tronc commun où ne demeurent plus que le français, la philosophie, l'histoire-géographie, deux langues vivantes, l'EPS et d'enseignement civique et moral.

En première, les mathématiques deviennent un des trois enseignements de spécialité que les élèves pourront choisir en concurrence avec une dizaine d'autres. Si je ne doute pas que nous ferons partis des choix de nombreux élèves, je me pose des questions sur le futur niveau des élèves. Car il est peu probable que le futur programme sera aussi approfondi que l'actuel de S; les gens envisageant des études économiques seraient largués.

L'année suivante, en terminale, les élèves pourront faire s'ils le veulent jusqu'à 9 heures de maths s'ils le souhaitent...et s'ils en ont les bases qu'on ne leur aura pas donné le temps d'acquérir convenablement au collège. Car, oui, il faut prendre le temps pour apprendre et maitriser les maths...comme le reste. Quand les parents en ont les moyens, ce temps est accompli par des cours particuliers.

Il fut une époque où existaient en nombre des élèves moyens. Il s'agissait de gamins qui n'étaient pas spécialement forts mais qui, avec le temps passé en cours à bosser sérieusement et surtout à leur rythme, arrivaient à un niveau très correct. Mais les réformes antérieures ont réduit les horaires de maths au collège et au lycée : plus de 200 heures d'écart entre un S d'aujourd'hui et un C d'il y a 25 ans.

On s'étonne de la crise de recrutement des profs de maths. On oublie que le nombre d'étudiants en maths a baissé, que le nombre de postes est toujours aussi important et que d'autres débouchés professionnels plus lucratifs existent désormais.

Cette crise du recrutement est peut-être la revanche posthume des élèves moyens qui ont disparu.

Jérôme ONILLON