Algorithmique

Exercice à l'instruction

L'énoncé

a. On considère l'algorithme suivant :

```
s et i sont deux entiers relatifs
s=2
Pour i=4 jusqu'à 7
    s=i²-s
    Si s est divisible par 3 alors s=s+1
                             sinon s=s-1
s=2*s+1
```

Exécuter l'algorithme précédent (on détaillera les étapes) et conclure en donnant la valeur finale de la variable *s*.

b. On considère l'algorithme suivant :

```
n et s sont deux entiers relatifs
n=3
s=1
Tant que s<75 faire
    s=s+n²
    n=n+2
s=s-n
```

Exécuter l'algorithme précédent (on détaillera les étapes) et conclure en donnant la valeur finale de la variable *s*.

Le corrigé

a. Exécutons l'algorithme proposé :

Instruction et commentaire	*i*	*s*
s=2	?	2
Pour i=4 :	4	2
s=i²-s $=4^2-2=14$	4	14
Comme s n'est pas divisible par 3 sinon s=s-1 $=14-1=13$	4	13
Pour i=5 :	5	13
s=i²-s $=5^2-13=12$	5	12
Comme s est divisible par 3 alors s=s+1 $=12+1=13$	5	13
Pour i=6 :	6	13
s=i²-s $=6^2-13=23$	6	23
Comme s n'est pas divisible par 3 sinon s=s-1 $=23-1=22$	6	22
Pour i=7 :	7	22
s=i²-s $=49-22=27$	7	27
Comme s est divisible par 3 alors s=s+1 $=27+1=28$	7	28
s=2×s+1 $=2\times 28+1=57$	7	57

<u>Conclusion :</u> à l'issue de l'exécution de l'algorithme, la variable *s* vaut 57.

b. Exécutons l'algorithme proposé :

Instruction et commentaire	*n*	*s*
n=3 s=1	3	1
Tant que : comme s<75 on entre dans la boucle	3	1
s=s+n² $=1+3^2=10$	3	10
n=n+2 $=3+2=5$	5	10
Tant que : comme s<75 on entre dans la boucle	5	10
s=s+n² $=10+5^2=35$	5	35
n=n+2 $=7$	7	35
Tant que : comme s<75 on entre dans la boucle	7	35
s=s+n² $=35+7^2=84$	7	84
n=n+2 $=7+2=9$	9	84
Tant que : comme s≥75 on casse la boucle	9	84
s=s-n $=84-9=75$	9	75

<u>Conclusion :</u> à l'issue de l'exécution du programme, la variable *s* vaut 75.

Calculs littéraux, équations et inéquations

Les faux-amis numériques

L'énoncé

Le présent exercice est constitué de quatre affirmations dont on dira si elles sont vraies ou fausses en entourant la réponse choisie. Chaque bonne réponse rapporte 0,5 points; une réponse incorrecte ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

	L'affirmation est...	
1. Le nombre $-\sqrt{49}$ appartient à l'ensemble $\mathbb{Z}$.	Vraie	Fausse
2. Le nombre $\frac{17}{2}$ est un décimal.	Vraie	Fausse
3. Le nombre $\sqrt{11}$ appartient à l'ensemble $\mathbb{Q}$.	Vraie	Fausse
4. Le nombre 5 est un réel.	Vraie	Fausse

Le corrigé

Passons en revue les différentes affirmations :

1. Comme $-\sqrt{49}=-7$, alors le nombre proposé est bien un entier relatif et il appartient à $\mathbb{Z}$. La première affirmation est vraie.
2. Comme $\frac{17}{2}=8,5$, alors le nombre proposé est bien un décimal. La deuxième affirmation est aussi vraie.
3. Les racines carrées d'entiers sont soient entières, soient irrationnelles. 11 n'étant pas un carré, sa racine est irrationnelle et n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. La troisième affirmation est fausse.
4. Tous les nombres connus et utilisés en seconde étant des réels, cette dernière affirmation est vraie.

Des calculs à la lettre

L'énoncé

a. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A(x)=(3x-7)^2 \qquad B(x)=(5x-1)(3-2x) \qquad C(x)=(x+2)^2-(x+5)(x-5)$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois inéquations du premier degré suivantes. On conclura chaque résolution en donnant l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

$$4x-1\geq 7x+5 \qquad -7<2x+7<9 \qquad 5x-7(3-2x)>10x+3$$

c. Factoriser les expressions suivantes :

$$A(x)=16-x^2 \qquad B(x)=4x^3-3x^2+2x$$

$$C(x)=16x^2+40x+25 \qquad D(x)=x^2+10x+16$$

Le corrigé

a. Dans ces questions, l'utilisation des identités remarquables dans leur sens «développement» permet d'accélérer les calculs.

$$A(x)=\overbrace{(3x-7)^2}^{(a-b)^2}=\overbrace{(3x)^2-2\times 3x\times 7+7^2}^{a^2-2\times a\times b+b^2}=9x^2-42x+49$$

$$B(x)=(5x-1)(3-2x)=15x-10x^2-3+2x=-10x^2+17x-3$$

$$C(x)=\overbrace{(x+2)^2}^{(a-b)^2}-\left[\overbrace{(x+5)(x-5)}^{(a+b)(a-b)}\right]=\overbrace{x^2+2\times x\times 2+2^2}^{a^2+2\times a\times b+b^2}-\left[\overbrace{x^2-25}^{a^2-b^2}\right]$$

$$=\cancel{x^2}+4x+4-\cancel{x^2}+25=4x+29$$

b.1. Cette première inéquation ne présente guère de difficultés :

$$4x-1\geq 7x+5 \xrightarrow[+1]{-7x} 4x-7x\geq 5+1 \Leftrightarrow -3x\geq 6 \xrightarrow[\text{L'ordre change}]{\div(-3)} x\leq -2$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=]-\infty;-2]$$

b.2. Cette deuxième inéquation ne présente pas de problèmes non plus.

$$-7<2x+7<9 \xrightarrow{-7} -14<2x<2 \xrightarrow{\div 2} -7<x<1$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=]-7;1[$$

b.3. Pour résoudre cette dernière inéquation, il nous faudra d'abord effectuer un petit développement.

$$5x-7(3-2x)>10x+3 \Leftrightarrow 5x-21+14x>10x+3$$

$$\Leftrightarrow 19x-21>10x+3 \xrightarrow[+21]{-10x} 9x>24 \xrightarrow{\div 9} x>\frac{24}{9}=\boxed{\frac{8}{3}}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=\left]\frac{8}{3};+\infty\right[$$

d. Deux techniques permettent de factoriser une expression : une des trois identités remarquables ou un facteur commun.

$$A(x)=16-x^2=\overbrace{4^2-x^2}^{a^2-b^2}=\overbrace{(4+x)(4-x)}^{(a+b)(a-b)}$$

$$B(x)=\overbrace{4x^2\times\boxed{x}-3x\times\boxed{x}+2\times\boxed{x}}^{\text{Facteur commun } x}=\boxed{x}\times\left[4x^2-3x+2\right]$$

$$C(x)=16x^2+40x+25=\overbrace{(4x)^2+2\times4x\times5+5^2}^{a^2+2\times a\times b+b^2}=\overbrace{(4x+5)^2}^{(a+b)^2}$$

Pour factoriser la dernière expression, nous allons recourir à une troisième technique : la méthode de la forme canonique.

$$D(x)=x^2+10x+16=\overbrace{x^2+2\times x\times5}^{\text{Début de cette...}}+16=\overbrace{(x+5)^2-25}^{\text{...identité remarquable}}+16$$

$$=(x+5)^2-9=\overbrace{(x+5)^2-3^2}^{a^2-b^2}=\overbrace{\left[(x+5)+3\right]\times\left[(x+5)-3\right]}^{(a+b)(a-b)}=(x+8)(x+2)$$

Les bons et les mauvais produits

L'énoncé

a. Factoriser les expressions suivantes :

$$A(x)=64-(3x-1)^2 \qquad B(x)=5x-3x^2+6x^3$$

$$C(x)=9x^2-24x+16 \qquad D(x)=x^2+14x+33$$

b. La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=x^2-3x+2$$

On détaillera les calculs pour chacune des questions suivantes.

1. Calculer les images de -3 et de $\frac{2}{5}$ par la fonction f.
2. Déterminer le ou les antécédents de 6 par la fonction f.

On rappelle : $0,5^2=0,25 \quad 1,5^2=2,25 \quad 2,5^2=6,25 \quad 3,5^2=12,25$

Le corrigé

a. Trois techniques permettent de factoriser une somme : une des trois identités remarquables, un facteur commun ou la forme canonique.

$$A(x)=64-(3x-1)^2=\overbrace{8^2-(3x-1)^2}^{a^2-b^2}=\overbrace{\left[8+(3x-1)\right]\times\left[8-(3x-1)\right]}^{(a+b)(a-b)}$$

Une première identité remarquable

$$=\left[8+3x-1\right]\times\left[8-3x+1\right]=(3x+7)\times(-3x+9)$$

$$B(x)=5x-3x^2+6x^3=\overbrace{5\times\boxed{x}-3x\times\boxed{x}+6x^2\times\boxed{x}}^{\text{Facteur commun } x}=\boxed{x}\times\left[5-3x+6x^2\right]$$

$$C(x)=9x^2-24x+16=\overbrace{(3x)^2-2\times3x\times4+4^2}^{a^2-2\times a\times b+b^2}=\overbrace{(3x-4)^2}^{(a-b)^2}$$

Une seconde identité remarquable

$$D(x)=x^2+14x+33=\underbrace{x^2+2\times x\times7}_{\text{Début de cette...}}+33=\underbrace{(x+7)^2-7^2}_{\text{...identité remarquable}}+33$$

$$=(x+7)^2-49+33=(x+7)^2-16$$

On factorise en utilisant la méthode de la forme canonique.

$$=\overbrace{(x+7)^2-4^2}^{a^2-b^2}=\overbrace{\left[(x+7)+4\right]\times\left[(x+7)-4\right]}^{(a+b)(a-b)}=(x+11)\times(x+3)$$

b.1. Calculons les deux images demandées :

$$f(-3)=(-3)^2-3\times(-3)+2=9+9+2=\underline{20}$$

$$f\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^2-3\times\frac{2}{5}+2=\frac{4}{25}-\frac{6}{5}+2=\frac{4-6\times5+2\times25}{25}=\frac{4-30+50}{25}=\frac{24}{25}=\underline{0,96}$$

b.2 Pour déterminer les antécédents de 6 par la fonction *f*, nous devons résoudre l'équation du second degré :

$$f(x)=6 \Leftrightarrow x^2-3x+2=6 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2-2\times x\times 1,5-4=0}_{\text{Début de cette...}} \Leftrightarrow \underbrace{(x-1,5)^2-1,5^2}_{\text{...identité remarquable}}-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1,5)^2-2,25-4=0 \Leftrightarrow (x-1,5)^2-6,25=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x-1,5)^2-2,5^2}^{\text{Identité } a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \overbrace{\left[(x-1,5)+2,5\right]\times\left[(x-1,5)-2,5\right]}^{(a+b)(a-b)}=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(x+1)\times(x-4)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{x+1=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad x-4=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

$$x=\underline{-1} \qquad x=\underline{4}$$

<u>Conclusion :</u> 6 a deux antécédents par la fonction *f* qui sont -1 et 4.

La planète des signes

L'énoncé

a. La fonction *f* est définie pour tout réel *x* par :

$$f(x)=-2x\times(4x+12)\times(3-x)$$

1. Calculer l'image de -2 par la fonction *f*.
2. Développer et réduire $f(x)$.
3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes. On conclura chacune d'elles en donnant l'ensemble des solutions.

1. $(3-2x)^2 \leq 49$ **2.** $9x^2 > 5-12x$

Le corrigé

a.1. L'image de -2 par la fonction *f* est donnée par :

$$f(-2)=-2\times(-2)\times(4\times(-2)+12)\times(3-(-2))=4\times(-8+12)\times5=4\times4\times5=\underline{80}$$

a.2. Le développement du produit $f(x)$ doit se faire en deux étapes, la multiplication étant une opération à deux opérandes.

$$f(x)=\underline{-2x\times(4x+12)}\times(3-x)=\underline{\left(-8x^2-24x\right)}\times(3-x)$$

$$=\cancel{-24x^2}+8x^3-72x+\cancel{24x^2}=\underline{8x^3-72x}$$

a.3. Le tableau de signe de $f(x)$ ne peut être dressé qu'à partir de la forme factorisée donnée par l'énoncé. Examinons ses facteurs :

- Le facteur affine $-2x=\underbrace{-2}_{a}\times x+\underbrace{0}_{b}$ a pour coefficient directeur le négatif -2 et s'annule lorsque $-2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{0}{-2}=\underline{0}$.
- $4x+12$ a pour coefficient directeur 4 qui est positif et s'annule lorsque $4x+12=0 \Leftrightarrow 4x=-12 \Leftrightarrow x=\frac{-12}{4}=\underline{-3}$
- Le facteur affine $-x+3$ a pour coefficient directeur le négatif -1 et s'annule lorsque $-x+3=0 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=\underline{3}$

Ce travail fait, le tableau de signe du produit $f(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$4.x+12$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+3$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b.1. Pour résoudre cette deuxième inéquation, nous suivrons la stratégie suivante : tout ramener à gauche, puis factoriser pour pouvoir nous prononcer sur le signe d'un produit.

$$(3-2x)^2 \leq 49 \Leftrightarrow \overbrace{(3x-2)^2-7^2}^{a^2-b^2} \leq 0 \Leftrightarrow \overbrace{\left[(3-2x)+7\right]}^{(a+b)}\times\overbrace{\left[(3-2x)-7\right]}^{(a-b)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[3-2x+7\right]\times\left[3-2x-7\right] \leq 0 \Leftrightarrow \left[-2x+10\right]\times\left[-2x-4\right] \leq 0$$

Les facteurs affines composant le membre de gauche ont tous les deux pour coefficient directeur -2 et ils s'annulent en :

$-2x+10=0 \Leftrightarrow -2x=-10 \Leftrightarrow x=5$ ⋮ $-2x-4=0 \Leftrightarrow -2x=4 \Leftrightarrow x=-2$

Par suite, le tableau de signe du produit constituant le membre de gauche est :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$-2x+10$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$-2x-4$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions est l'intervalle :

$$S=\left[-2;5\right]$$

b.2 Cette seconde inéquation sera résolue en suivant la même stratégie que précédemment. La seule chose qui changera sera la méthode de factorisation; à la différence de deux carrés succèdera la forme canonique.

$$9x^2+12x-5>0 \Leftrightarrow \overbrace{(3x)^2+2\times 3x\times 2}^{\text{Début de cette identité...}} -5>0 \Leftrightarrow \overbrace{(3x+2)^2-2^2}^{\text{...remarquable}}-5>0$$

$$\Leftrightarrow (3x+2)^2-4-5>0 \Leftrightarrow (3x+2)^2-9>0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(3x+2)^2-3^2}^{\text{Différence de...}}>0 \Leftrightarrow \overbrace{\left[(3x+2)+3\right]\times\left[(3x+2)-3\right]}^{\text{...deux carrés.}}>0$$

$$\Leftrightarrow (3x+5)\times(3x-1)>0$$

Les deux facteurs ont pour coefficients directeurs le réel positif 3 et s'annulent en :

$3x+5=0 \Leftrightarrow 3x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$ ⋮ $3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

Donc le tableau de signe de leur produit est le suivant :

x	$-\infty$		$-5/3$		$1/3$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous concluons en donnant l'ensemble des solutions est :

$$S=\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$$

Portraits volatiles

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois inéquations suivantes. On conclura chacune d'elles en donnant l'ensemble des solutions.

a. $\dfrac{(3x-9)(4-x)}{-2x} \leq 0$ **b.** $\dfrac{5}{x-3} \geq 4$ **c.** $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{5-x} > \dfrac{3x}{25-x^2}$

Le corrigé

a. Résoudre cette première inéquation, c'est déterminer quand le quotient constituant le membre de gauche est négatif ou nul. D'abord, déterminons les valeurs d'annulation des trois facteurs le composant.

$$3x-9=0 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=\frac{9}{3}=3 \qquad 4-x=0 \Leftrightarrow -x=-4 \Leftrightarrow x=4 \qquad -2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{0}{-2}=0$$

Par suite, le tableau de signe du quotient est le suivant :

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$3x-9$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+4$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$-2x$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
Leur quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en concluons que l'ensemble des solutions est :

$$S=\left]-\infty;0\right[\cup\left[3;4\right]$$

b. Pour résoudre cette deuxième inéquation, nous allons tout ramener à gauche, puis tout mettre au même dénominateur. Nous devrons alors nous prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{5}{x-3}\geq 4 \Leftrightarrow \frac{5}{x-3}-4\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{5-4\times(x-3)}{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{5-4x+12}{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{17-4x}{x-3}\geq 0$$

Dressons le tableau de signe de ce quotient dont on veut savoir quand il est positif ou nul.

Déterminons les valeurs d'annulation des facteurs :

$$17-4x=0 \Leftrightarrow 4x=17 \Leftrightarrow x=\frac{17}{4}$$
$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

x	$-\infty$		3		$\frac{17}{4}$		$+\infty$
$-4x+17$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=\left]3;4,25\right]$$

c. Pour résoudre cette dernière inéquation, nous procéderons telle la deuxième.

$$\frac{1}{x+5}+\frac{2}{5-x}>\frac{3x}{25-x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+5}+\frac{2}{5-x}-\frac{3x}{(5+x)(5-x)}>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1\times(5-x)+2\times(x+5)-3x}{(x+5)(5-x)}>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{5-x+2x+10-3x}{(x+5)(5-x)}>0 \Leftrightarrow \frac{15-2x}{(x+5)(5-x)}>0$$

Le tableau de signe de ce dernier quotient est :

x	$-\infty$		-5		5		$7,5$		$+\infty$
$-2x+15$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
Le quotient		$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S=\left]-5;5\right[\cup\left]7,5;+\infty\right[$$

Les six t'aiment !

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode de votre choix les deux systèmes suivants. On conclura chaque résolution en donnant l'ensemble des solutions.

$$(S_1)\begin{cases} 5x-7y=9 & \textbf{(1)} \\ 3x-5y=-2 & \textbf{(2)} \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 7x+4y=1 & \textbf{(1)} \\ 10-3y=-2 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Le corrigé

1. Pour résoudre ce premier système (S_1), nous allons procéder à un double coup de combinaisons linéaires.

Pour trouver x, on supprime les y.

$$\textbf{(1)} \xrightarrow{\times 5} 25x-35y=45$$
$$\textbf{(2)} \xrightarrow{\times 7} 21x-35y=-14 \quad \ominus$$
$$4x=59$$
$$x=\frac{59}{4}=14,75$$

Pour obtenir y, on élimine les x.

$$\textbf{(1)} \xrightarrow{\times 3} 15x-21y=27$$
$$\textbf{(2)} \xrightarrow{\times 5} 15x-25y=-10 \quad \ominus$$
$$4y=37$$
$$y=\frac{37}{4}=9,25$$

La solution du système (S_1) est le couple $\left(\frac{59}{4};\frac{37}{4}\right)$. Ce que l'on résume par :

$$S=\left\{\left(\frac{59}{4};\frac{37}{4}\right)\right\}$$

2. (S_2) est un faux système linéaire car l'équation ***(2)*** ne comporte que l'inconnue y.

$$10-3y=-2 \Leftrightarrow -3y=-12 \Leftrightarrow y=\frac{-12}{-3}=4$$

Pour obtenir x, il suffit de remplacer y par sa valeur $8/3$ dans l'équation ***(1)***.

$$7x+4\times 4=1 \Leftrightarrow 7x+16=1 \Leftrightarrow 7x=1-16=-15 \Leftrightarrow x=-\frac{15}{7}$$

Nous en concluons que l'ensemble des solutions du système (S_2) est :

$$S=\left\{\left(-\frac{15}{7};4\right)\right\}$$

Artillerie canonique

L'énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$7x^2=9-18x$$

Le corrigé

Résoudre cette équation, nous allons utiliser la méthode de la forme canonique :

$$7x^2=9-18x \Leftrightarrow 7x^2+18x-9=0 \xrightarrow{\times 7} 49x^2+126x-63=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(7x)^2+2\times 7\times 9}_{\text{Début de cette...}}-63=0 \Leftrightarrow \underbrace{(7x+9)^2-9^2}_{\text{...identité remarquable}}-63=0$$

$$\Leftrightarrow (7x+9)^2-81-63=0 \Leftrightarrow (7x-9)^2-144=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(7x+9)^2-12^2}^{\text{Identité } a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \overbrace{[(7x+9)+12]\times[(7x+9)-12]}^{(a+b)(a-b)}=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{(7x+21)\times(7x-3)=0}^{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \overbrace{7x+21=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad 7x-3=0}^{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

$$7x=-21 \qquad 7x=3$$

$$x=-3 \qquad x=\frac{3}{7}$$

L'ensemble des solutions de cette équation a deux solutions. Nous concluons :

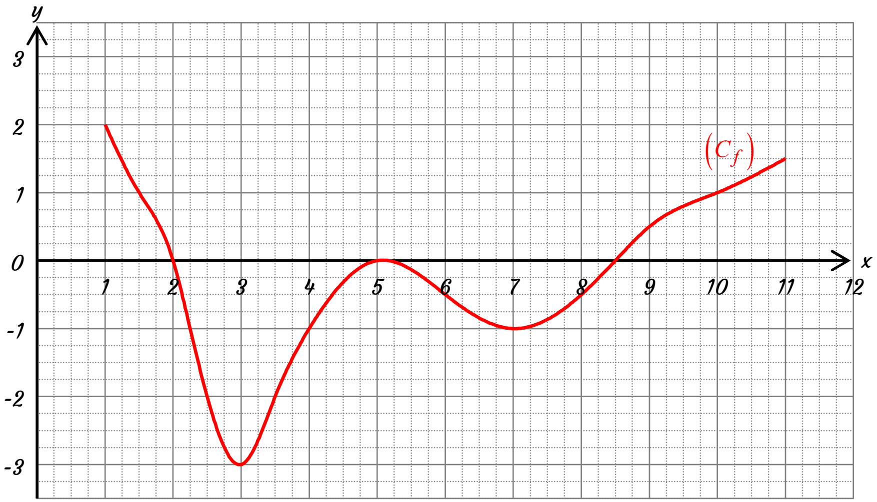
$$S=\left\{-3;\frac{3}{7}\right\}$$

Fonctions

Savoir lire pour bien écrire

L'énoncé

La fonction *f* est définie sur l'intervalle $[1;11]$. Sa courbe (C_f) a été tracée sur le graphique ci-dessous dans un repère orthonormé.



A partir du graphique précédent, on répondra directement sur la présente feuille aux questions suivantes avec toute la précision permise par ce premier. Aucune justification n'est demandée.

a. Compléter ce qui suit :

1. Le minimum de la fonction *f* sur l'intervalle $[5;11]$ est.... ; il est atteint en $x =$ ....

2. Le (les) antécédent(s) de 3 par la fonction *f* est (sont)..........................

3. L' (les) image(s) de 0 par la fonction *f* est (sont)..............................

4. La (les) solution(s) de l'équation $f(x)=0$ est (sont)..........................

5. Le maximum de *f* sur l'intervalle $[3;8]$ est ....; il est atteint en $x =$ ....

6. $f(6) =$ ....

b. Compléter le tableau de variation suivant résumant les variations de la fonction *f* sur son ensemble de définition :

x	
f	

c. Compléter le tableau de signe suivant résumant le signe de $f(x)$ sur son ensemble de définition.

x	
$f(x)$	

d. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

$f(x)\le -2$	$f(x)>1$
S = ...	S = ...
$-1\le f(x)\le 0$	$3\times f(x)+5\le 2$
S = ...	S = ...

Le corrigé

a. Tout point de la courbe (C_f) a des coordonnées de la forme $\underbrace{(x;f(x))}_{\text{Un nombre et son image}}$.

1. Sur $[5;11]$, le point le plus bas de la courbe a pour coordonnées $(7;-1)$. Donc le minimum de la fonction *f* sur cet intervalle est égal à -1 ; il est atteint en $x=7$.
2. Aucun point de la courbe n'a pour ordonnée 3. Par conséquent, 3 n'a pas d'antécédent par la fonction *f*.
3. 0 ne faisant pas partie de l'ensemble de définition, il ne peut avoir d'image par la fonction *f*.
4. Trois points de la courbe ont pour ordonnée 0; ils ont pour abscisses 2; 5 et 8,5. Ce sont les trois solutions de l'équation $f(x)=0$.
5. Le point le plus haut de la courbe sur $[3;8]$ a pour coordonnées $(5;0)$. Donc le maximum de *f* sur cet intervalle est égal à 0; il est atteint en $x=5$.
6. Le point de la courbe d'abscisse 6 a pour ordonnée $-0,5$. Ainsi $f(6)=\boxed{-0,5}$.

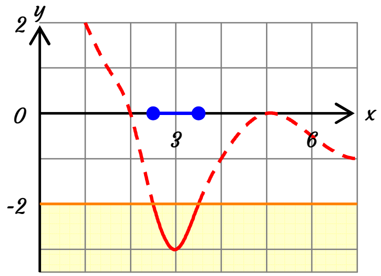
b. Le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1;11]$ est :

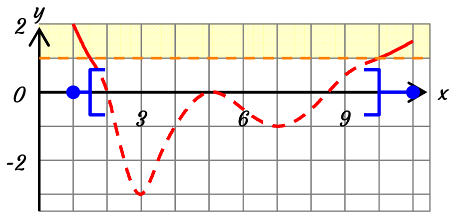
x	1		3		5		7		11
f	2	↘	-3	↗	0	↘	-1	↗	1,5

c. Le tableau de signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[1;11]$ est :

x	1		2		5		8,5		11
$f(x)$		+	0	−	0	−	0	+	

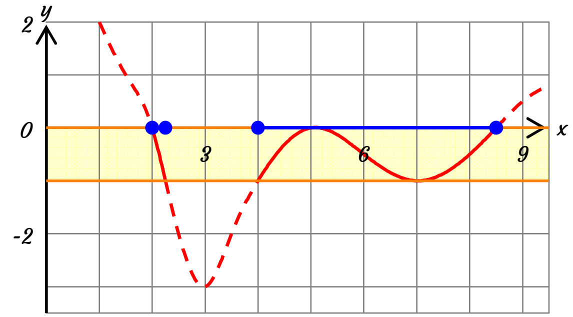
d.1. Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leq -2$, nous devons nous intéresser aux points de la courbe (C_f) dont les ordonnées $f(x)$ sont inférieures ou égales à -2.
Leurs abscisses x sont comprises entre 2,5 et 3,5 inclus. Ainsi $S = \left[\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right]$





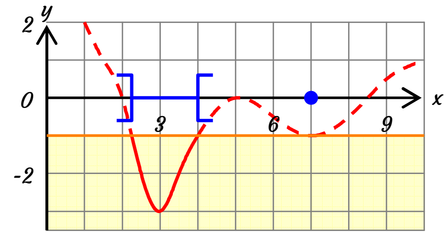
d.2. Les solutions de l'inéquation $f(x) > 1$ sont les abscisses x des points de (C_f) dont les ordonnées $f(x)$ sont strictement supérieures à 1.
Par lecture graphique, nous obtenons :
$$S = [1;1,5[\cup]10;11]$$

d.3. Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe (C_f) dont l'ordonnée $f(x)$ est située entre -1 et 0 inclus.
Nous concluons que l'ensemble des solutions est :
$$S = [2;2,25] \cup [4;8,5]$$



d.4. D'abord, nous devons tripatouiller l'inéquation qui nous est proposée :
$$3 \times f(x) + 5 \leq 2 \xrightarrow{-5} 3 \times f(x) \leq -3 \xrightarrow{\div 3} f(x) < -1$$

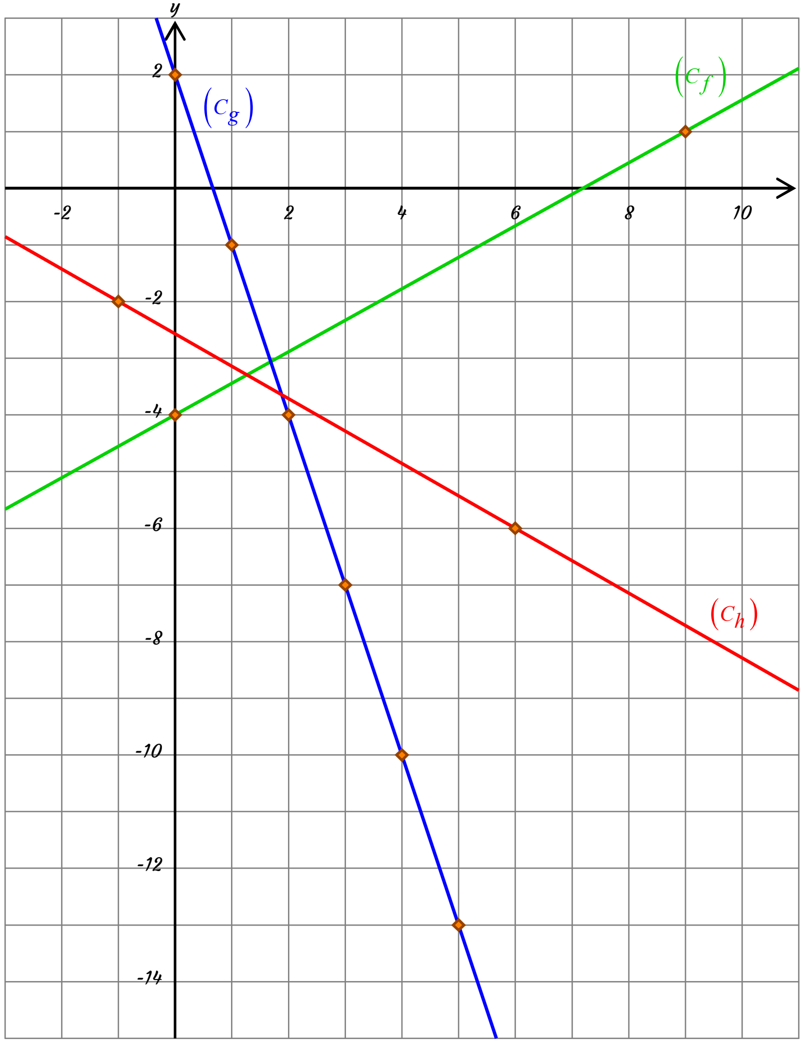
Les solutions de cette inéquation sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est strictement inférieure à -1 .
Nous en déduisons :
$$S = \left]\frac{9}{4};4\right[\cup \{7\}$$



Sans en prononcer le mot

L'énoncé

a. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé les droites (C_f), (C_g) et (C_h) représentant les fonctions *f*, *g* et *h*. On a également placé tous leurs points à coordonnées entières.



Pour chacune de ces trois fonctions, déterminer une de leurs expressions.

b. Les fonctions *j* et *l* sont définies pour tout réel *x* par :

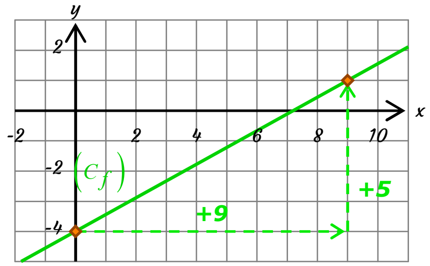
$$j(x)=\frac{8}{5}x-9 \qquad\qquad l(x)=-5x-13$$

1. Sur le graphique ci-contre, tracer les courbes (C_j) et (C_l) représentant les fonctions *j* et *l*.
2. Dresser le tableau de signe de $l(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Par le calcul, déterminer le ou les antécédents de 3 par la fonction *j*.

Le corrigé

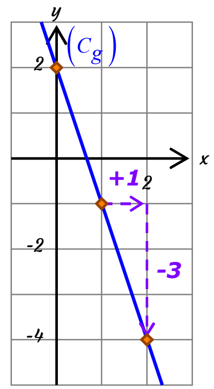
a. D'abord, comme leurs courbes sont des droites, alors les fonctions *f*, *g* et *h* sont affines et ont une expression de la forme $ax+b$.

La droite (C_f) coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;-4)$. Son ordonnée à l'origine est égale à -4.



Son coefficient directeur est égal à $\frac{+5}{+9}=\frac{5}{9}$.

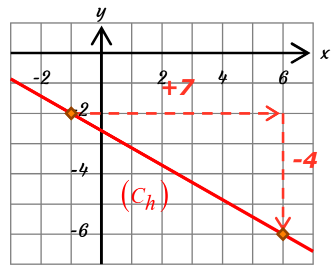
Par conséquent : $\boxed{f(x)=\frac{5}{9}x-4}$



L'ordonnée à l'origine de la fonction *g* est égale à 2 et le coefficient directeur à -3.

Par conséquent : $g(x)=\boxed{-3x+2}$

Le coefficient directeur de la fonction *h* est $\frac{-4}{+7}=-\frac{4}{7}$.



Donc $h(x)=-\frac{4}{7}x+b$

Mais on ne peut pas directement lire l'ordonnée à l'origine *b*.

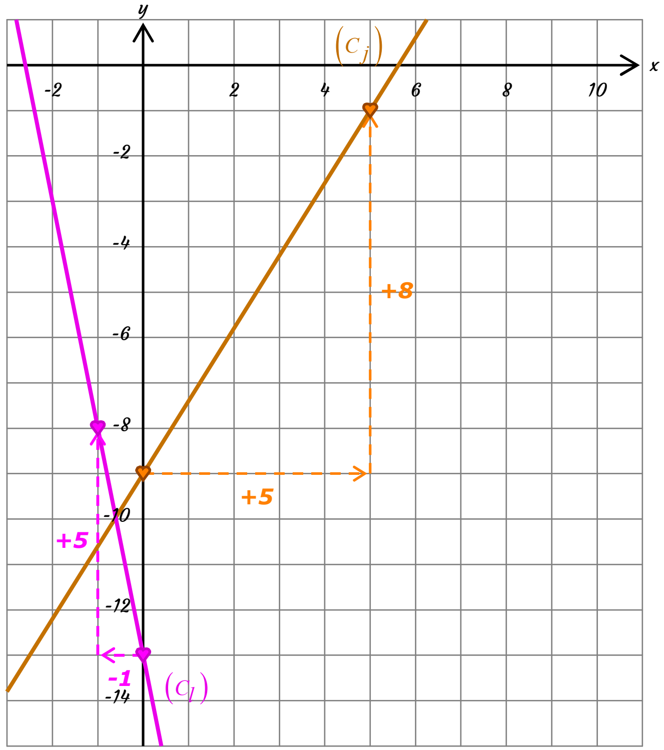
On détermine l'ordonnée à l'origine *b* en observant que, d'après le graphique :

$$h(6)=-6 \iff -\frac{4}{7}\times 6+b=-6 \iff -\frac{24}{7}+b=-6 \iff b=\frac{24}{7}-\frac{6\times 7}{7}=\boxed{-\frac{18}{7}}$$

Nous en concluons :

$$h(x)=\boxed{-\frac{4}{7}x-\frac{18}{7}=-\frac{4x+18}{7}}$$

b.1. Cette question est la réciproque de la précédente. Les fonctions j et l étant affines, leurs courbes représentatives sont des droites. On les trace avec deux paires de points, une règle et un peu de bonne volonté.
D'abord, on positionne l'ordonnée à l'origine -9 et -13 sur l'axe des ordonnées $(\mathrm{O}y)$, puis on obtient un second point en un interprétant le coefficient directeur comme une variation d'ordonnée correspondant à une certaine progression ou régression en abscisse.
Il ne reste plus alors qu'à tracer les droites ainsi que cela a été fait ci-dessous.



b.2. La fonction affine $l(x)=-5x-13$ a pour coefficient directeur le négatif -5 et elle s'annule lorsque $l(x)=0 \Leftrightarrow -5x-13=0 \Leftrightarrow -5x=13 \Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{13}{5}=-2,6}$

Par suite, le tableau de signe de $l(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-13/5$		$+\infty$
$l(x)=-5x-13$		$+$	0	$-$	

b.3. Pour déterminer les antécédents de 3 par la fonction j, nous devons résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$j(x)=3 \Leftrightarrow \frac{8}{5}x-9=3 \Leftrightarrow \frac{8}{5}x=\underbrace{3+9}_{12} \Leftrightarrow x=\frac{12}{\frac{8}{5}}=12\times\frac{5}{8}=3\times\cancel{4}\times\frac{5}{2\times\cancel{4}}=\boxed{\frac{15}{2}}$$

<u>Conclusion :</u> 3 un seul antécédent par la fonction affine j; il s'agit de 7,5.

Les bonnes références

L'énoncé

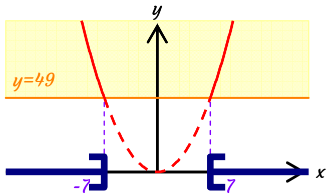
Donner les ensembles des solutions dans ℝ des inéquations suivantes :

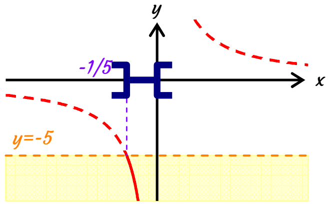
a. $x^2 \geq 49$ **b.** $\frac{1}{x} < -5$ **c.** $4 < \sqrt{x} < 9$ **d.** $\frac{1}{x} \leq 0,25$

Le corrigé

a. Utilisant la courbe de la fonction carré, nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S = \left]-\infty;-7\right] \cup \left[7;+\infty\right[$$



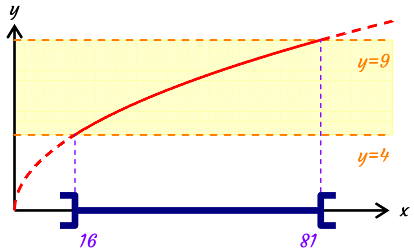


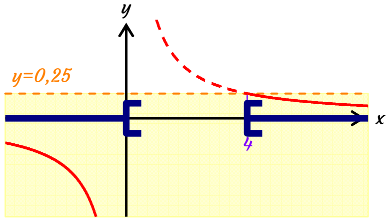
b. En utilisant la courbe de la fonction inverse, nous pouvons dire que les solutions de cette deuxième inéquation sont :

$$S = \left]-0,2;0\right[$$

c. La courbe de la fonction racine nous conduit à conclure que l'ensemble des solutions de l'inéquation $4 < x < 9$ est :

$$S = \left]16;81\right[$$





d. En nous s'appuyant sur la courbe de la fonction inverse, nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = \left]-\infty;0\right[\cup \left[4;+\infty\right[$$

Second degré ou de force

L'énoncé

Les trois sous-parties de cet exercice sont indépendantes.

a. La fonction *f* est définie pour tout réel *x* par :

$$f(x) = 3 - 7 \times \left(x - \frac{1}{5}\right)^2$$

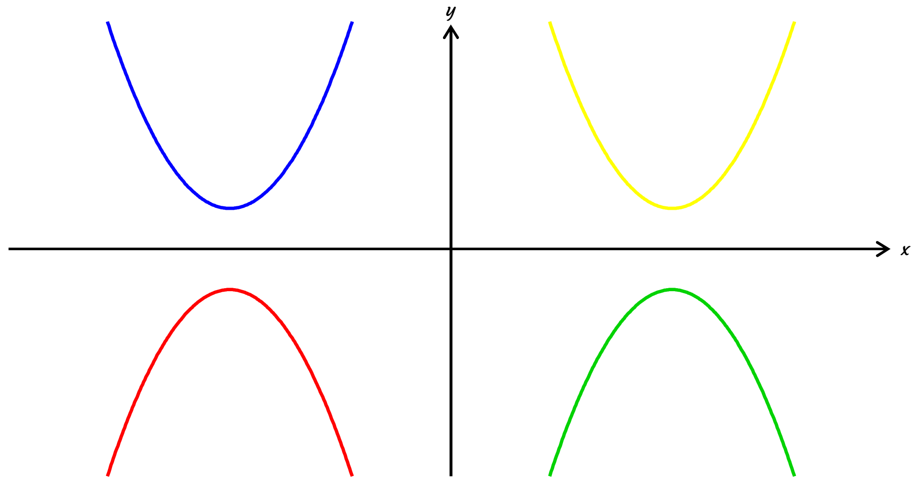
1. Développer $f(x)$.
2. Par un enchainement d'inégalités, établir le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $\left]-\infty;0,2\right[$.

b. La fonction *g* est définie pour tout réel *x* par :

$$g(x) = 6x^2 - 12x - 1$$

1. Calculer les images $g(-3)$ et $g\left(\frac{2}{3}\right)$.
2. Déterminer par le calcul la forme canonique de $g(x)$.

c. Parmi les quatre courbes tracées ci-dessous, laquelle représente la fonction du second degré $h(x) = -3x^2 + 15x - 20$. On expliquera sa réponse et on entourera la courbe choisie.



Le corrigé

a.1. Développons $f(x)$ qui nous est donnée sous forme canonique :

$$f(x)=3-7\times\underbrace{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2}=3-7\times\underbrace{\left(x^2-2\times x\times\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)}$$

$$=3-7\times\underbrace{\left(x^2-\frac{2}{5}\times x+\frac{1}{25}\right)}=\frac{3\times 25}{25}-7x^2+\frac{14}{5}x-\frac{7}{25}$$

$$=-7x^2+\frac{14}{5}x+\frac{75}{25}-\frac{7}{25}=\underline{-7x^2+\frac{14}{5}x+\frac{68}{25}=-7x^2+2,8x+2,72}$$

a.2. L'enchainement établissant le sens de variation de *f* sur $\left]-\infty;0,2\right[$ est le suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha & < & \beta & < & 0,2\\
\alpha-\frac{1}{5} & < & \beta-\frac{1}{5} & < & 0\\
\left(\alpha-\frac{1}{5}\right)^2 & > & \left(\beta-\frac{1}{5}\right)^2 & > & 0\\
-7\times\left(\alpha-\frac{1}{5}\right)^2 & < & -7\times\left(\beta-\frac{1}{5}\right)^2 & < & 0\\
\underbrace{3-7\times\left(\alpha-\frac{1}{5}\right)^2}_{f(\alpha)} & < & \underbrace{3-7\times\left(\beta-\frac{1}{5}\right)^2}_{f(\beta)} & < & 3
\end{array}$$

-1/5

Carré

Carré étant décroissante sur]-∞;0[, l'ordre change

×(-7)

+3

↑ Deux réels négatifs ↑

La fonction f conserve l'ordre sur]-∞;0,2 [

Conclusion : y conservant l'ordre, la fonction *f* est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{5}\right[$.

b.1. Calculons les deux images demandées :

$$g(-3)=6\times(-3)^2-12\times(-3)-1=6\times 9+36-1=54+35=\underline{89}$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right)=6\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-12\times\frac{2}{3}-1=6\times\frac{4}{9}+\frac{24}{3}-1=2\times\cancel{3}\times\frac{4}{3\times\cancel{3}}-\frac{24}{3}-\frac{3}{3}=\frac{8-24-3}{3}=\underline{-\frac{19}{3}}$$

b.2. Ecrivons $g(x)$ sous forme canonique.

$$g(x)=\underbrace{6x^2-12x}_{\text{On factorise par 6}}-1=6\times\underbrace{\left[x^2-2\times x\times 1\right]}_{\text{Début d'une...}}-1=6\times\underbrace{\left[(x-1)^2-1^2\right]}_{\text{...identité remarquée.}}-1$$

$$=\underbrace{6\times\left[(x-1)^2-1\right]}_{\text{On redistribue 6}}-1=6\times(x-1)^2-6-1=\underline{6\times(x-1)^2-7}$$

Conclusion : la forme canonique de $g(x)$ est $g(x)=6\times(x-1)^2-7$.

c. Ici, il s'agit d'appliquer un théorème vu en cours.

La fonction du second degré $h(x)=-3x^2+15x-20$ change de variation en :

$$x=-\frac{15}{2\times(-3)}=\frac{-15}{-6}=\frac{\cancel{-3}\times 5}{-3\times 2}=\underline{2,5}$$

Comme son coefficient dominant -3 est négatif, alors son tableau de variation est de la forme :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
Variation de $h(x)=-3x^2+15x-20$	$-\infty$ ↗	$-5/4$	↘ $-\infty$

Même s'il est inutile, calculons la valeur du maximum de la fonction *h* sur ℝ.

$$h(2,5)=-3\times 2,5^2+15\times 2,5-20=-3\times 6,25=-18,75+37,5-20=\underline{-1,25}$$

Conclusion : vu son tableau de variation, la courbe représentant la fonction *h* est la verte.

Géométrie analytique

Reperds et pars à l'aile !

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, CIA est un triangle dont les dimensions sont :

$\text{CI} = 5$ cm $\qquad$ $\text{CA} = 8$ cm $\qquad$ $\text{IA} = 10$ cm

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs qui ont mêmes directions et mêmes sens que, respectivement, les vecteurs $\overrightarrow{\text{CI}}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$. De plus :

$\|\vec{i}\| = 1$ cm $\qquad$ $\|\vec{j}\| = 2$ cm

Dans tout l'exercice, le plan sera rapporté au repère $\left(\text{C};\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel nous travaillerons.

a. Donner les coordonnées des points C, I et A.

b. Sur la figure ci-contre, effectuer au compas une construction géométrique permettant de lire les coordonnées du point B dans le repère $\left(\text{C};\vec{i},\vec{j}\right)$.

En déduire les coordonnées du point B dans le repère $\left(\text{C};\vec{i},\vec{j}\right)$. Celles-ci sont entières.

c. Placer sur la figure ci-contre le point E qui a pour coordonnées $\left(3{,}5\ ;\ -0{,}7\right)$.

d. On appelle F le quatrième sommet du parallélogramme ABEF.

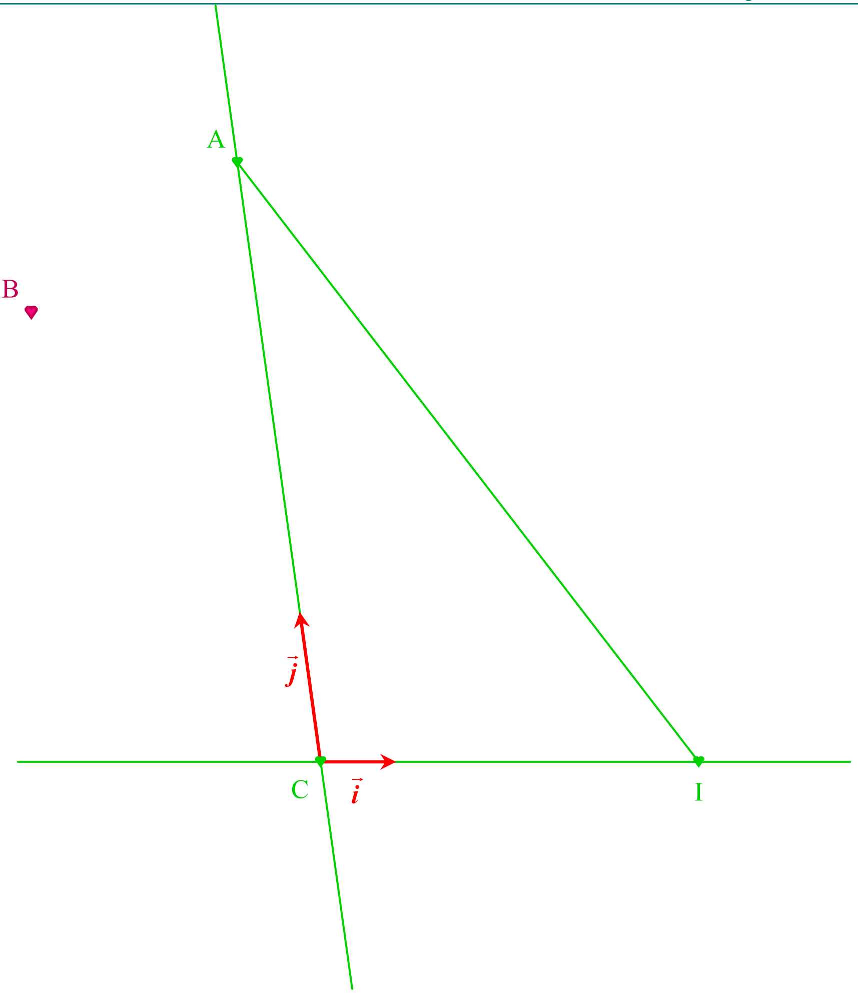
1. Construire le point F sur la figure.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point F.

e. Déterminer par le calcul les coordonnées du milieu G du segment [AB].

f. Déterminer par le calcul les coordonnées des points K et L définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{\text{IK}} = \frac{4}{5}\times\overrightarrow{\text{IG}} \qquad\qquad 4\times\overrightarrow{\text{AL}}+\overrightarrow{\text{IL}} = 2\times\overrightarrow{\text{AB}}$$

Que constate-t-on ? Placer ces deux points sur la figure.



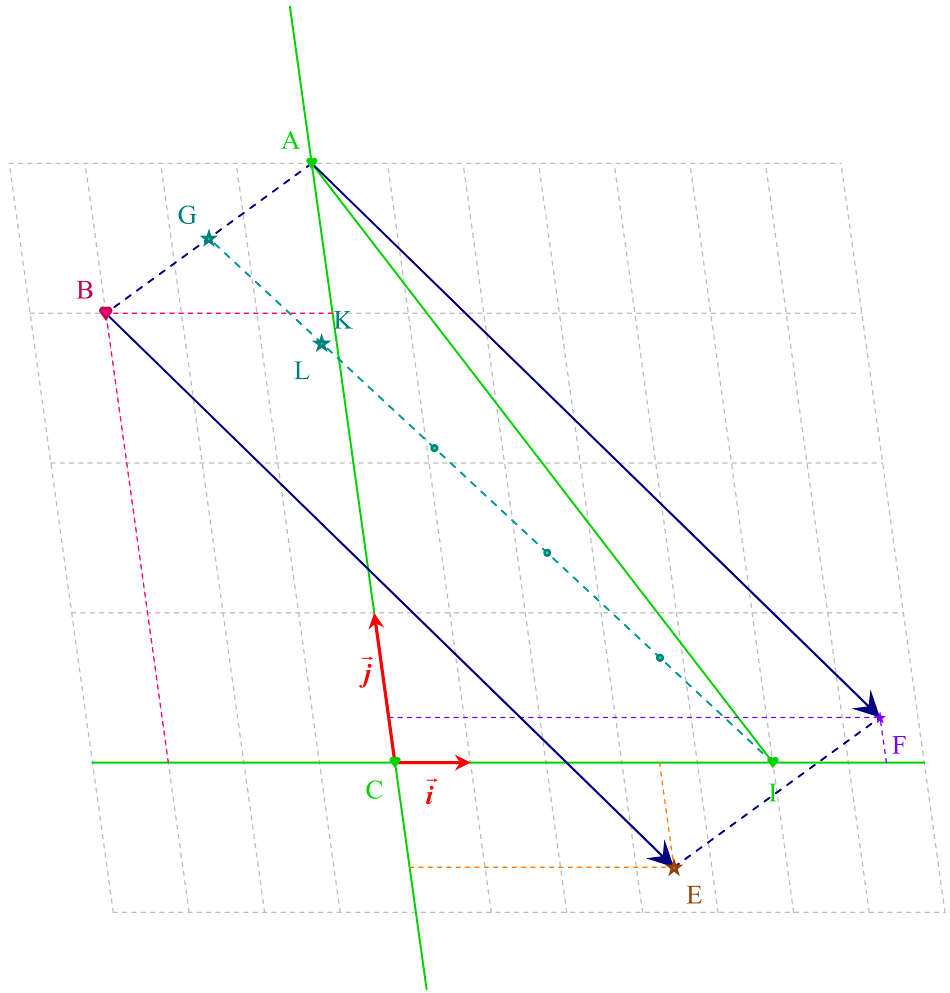
Le corrigé

a. Dans le repère $\left(\text{C};\vec{i},\vec{j}\right)$:

- Le point C a pour coordonnées $(0;0)$ car $\overrightarrow{\text{CC}} = 0\times\vec{i}+0\times\vec{j}$.
- Le point I a pour coordonnées $(5;0)$ car $\overrightarrow{\text{CI}} = 5\times\vec{i}+0\times\vec{j}$.
- Le point A a pour coordonnées $(0;4)$ car $\overrightarrow{\text{CA}} = 0\times\vec{i}+4\times\vec{j}$.

b. Pour déterminer les coordonnées du point B dans le repère $\left(C;\vec{i},\vec{j}\right)$, il suffit de construire aux compas les projetés du point B sur les deux axes coordonnées parallèlement à ceux-ci. Le projeté de B sur l'axe $\left(C;\vec{i}\right)$ parallèlement à l'axe des ordonnées nous donne son abscisse -3 ; le projeté de B sur $\left(C;\vec{j}\right)$ parallèlement à l'axe des abscisses nous indique son ordonnée 3.

Conclusion : le point B a pour coordonnées $(-3;3)$ dans le repère $\left(C;\vec{i},\vec{j}\right)$.



c. Comme le point E a pour coordonnées $(3,5\ ;\ -0,7)$ dans le repère $\left(C;\vec{i},\vec{j}\right)$, alors nous avons la relation vectorielle $\overrightarrow{CE}=3,5\times\vec{i}-0,7\times\vec{j}$.
Le point E se construit au compas comme étant le quatrième sommet d'un parallélogramme.

d. Comme ABEF est un parallélogramme, alors nous avons la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}x_F-0\\y_F-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,5-(-3)\\-0,7-3\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux,...}} \Leftrightarrow \overbrace{x_F=\boxed{6,5}}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{y_F-4=-3,7}^{\text{...ordonnées égales.}}$$
$$y_F=-3,7+4=\boxed{0,3}$$

Conclusion : le point F a pour coordonnées $(6,5\ ;\ 0,3)$.

e. Les coordonnées du milieu G du segment [AB] sont données par :

$$x_G=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+(-3)}{2}=-\frac{3}{2}=\boxed{-1,5} \quad \text{et} \quad y_G=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}=\boxed{3,5}$$

f.1. Le point H est défini par la relation vectorielle par :

$$\overrightarrow{IK}=\frac{4}{5}\times\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_K-5\\y_K-0\end{pmatrix}=\frac{4}{5}\times\begin{pmatrix}-1,5-5\\3,5-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_K-5\\y_K\end{pmatrix}=\frac{4}{5}\times\begin{pmatrix}-6,5\\3,5\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}x_K-5\\y_K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5,2\\2,8\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{x_K-5=-5,8}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{y_K=\boxed{2,8}}^{\text{...ordonnées égales.}}$$
$$x_K=\boxed{-0,2}$$

f.2. Le point L est défini par la relation vectorielle :

$$4\times\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{IL}=2\times\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\times\begin{pmatrix}x_L\\y_L-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_L-5\\y_L\end{pmatrix}=2\times\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4x_L\\4y_L-16\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_L-5\\y_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix}5x_L-5\\5y_L-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux...}}$$
$$\Leftrightarrow \overbrace{5x_L-5=-6}^{\text{...abscisses égales,...}} \text{ et } \overbrace{5y_L-16=-2}^{\text{...ordonnées égales}}$$
$$5x_L=-1 \qquad 5y_L=14$$
$$x_L=\boxed{-0,2} \qquad y_L=\boxed{2,8}$$

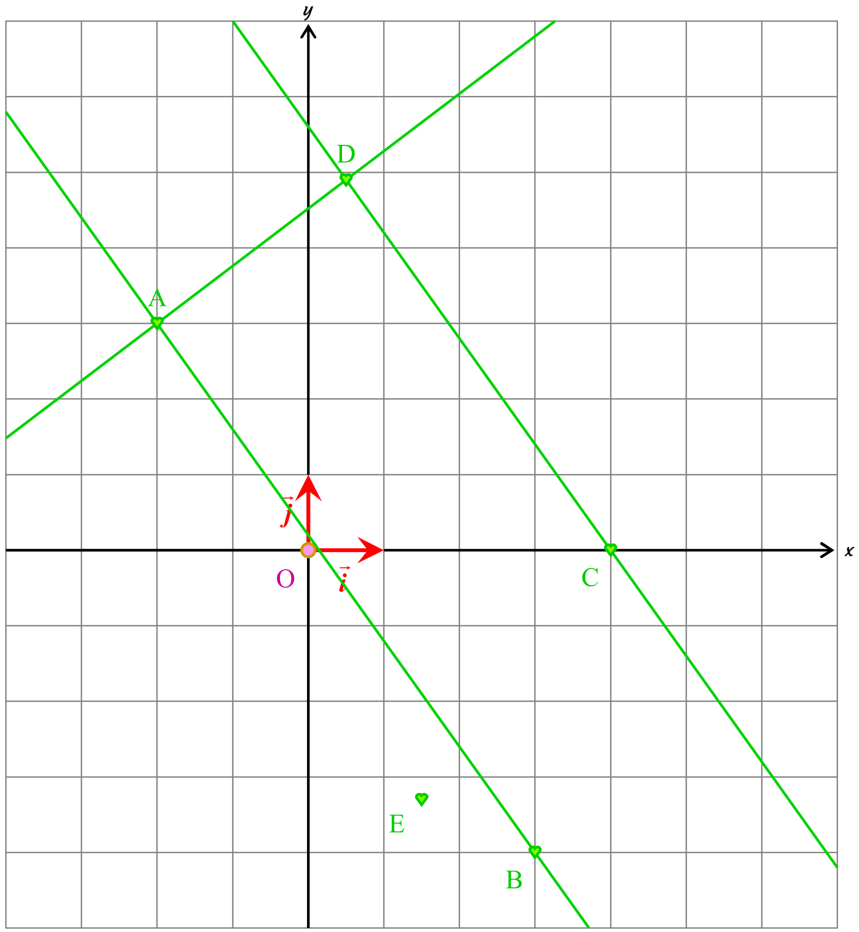
Conclusion : leurs coordonnées étant égales, les points K et L sont confondus. Le point K se place comme étant aux quatre cinquièmes du segment [IG] à partir de I.

Fondamentaux orthonormés

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé et centimétrique dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants :

$A(-2;3)$ $B(3;-4)$ $C(4;0)$ $D(0,5\ ;\ 4,9)$ $E(1,5\ ;\ -3,3)$



a. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? On justifiera sa réponse.

b. Déterminer les coordonnées du point K qui est l'intersection de la droite (AB) et de l'axe des ordonnées $\left(O;\vec{j}\right)$.

c. Les droites (AD) et (CD) sont-elles perpendiculaires ? On justifiera sa réponse.

d. Déterminer les coordonnées de L qui est le point de l'axe des abscisses $\left(O;\vec{i}\right)$ tel que le triangle ACL soit rectangle en A.

e. On appelle Γ le cercle de centre C passant par le point B.

1. Calculer le rayon du cercle Γ.
2. Le point E appartient-il au cercle Γ ? On justifiera sa réponse.
3. M est le point du cercle Γ dont l'abscisse x_M est égale à 5,6 et dont l'ordonnée y_M est positive. Déterminer cette ordonnée y_M par le calcul.

Le corrigé

a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-2)=5\\-4-3=-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0,5-4=-3,5\\4,9-0=4,9\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\begin{vmatrix}5 & -3,5\\-7 & 4,9\end{vmatrix}=5\times4,9-(-7)\times(-3,5)=24,5-24,5=\underline{0}$$

Leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
<u>Conclusion :</u> les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b. Le point K appartenant à l'axe des ordonnées $\left(O;\vec{j}\right)$, son abscisse x_K est nulle.

Ensuite, K faisant aussi partie de la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}0-(-2)=2\\y_K-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Donc leur déterminant est nul. Il vient alors :

$$\det\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}2 & 5\\y_K-3 & -7\end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 2\times(-7)-5\times(y_K-3)=0 \Leftrightarrow -14-5y_K+15=0$$
$$\Leftrightarrow -5y_K+1=0 \Leftrightarrow -5y_K=-1 \Leftrightarrow y_K=\underline{\frac{1}{5}=0,2}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point K sont $(0\ ;\ 0,2)$.

c. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0,5-(-2)=2,5\\4,9-3=1,9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0,5-4=-3,5\\4,9-0=4,9\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

$$\text{Test d'orthogonalité}\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD}\right)=\underbrace{2,5\times(-3,5)+1,9\times4,9}_{\text{La somme des produits dans chaque coordonnée.}}=-8,75+9,31=\underline{0,56\neq0}$$

Leur test d'orthogonalité n'étant pas nul, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas orthogonaux.
<u>Conclusion :</u> les droites (AD) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

d. Le point L appartenant à l'axe des abscisses $\left(O;\vec{i}\right)$, son ordonnée y_L est nulle.

De plus, le triangle ACL étant rectangle en A, les vecteurs $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix} x_L-(-2)=x_L+2 \\ 0-3=-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4-(-2)=6 \\ 0-3=-3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. Donc leur test d'orthogonalité est nul. Il vient alors :

$$\text{Test d'orthogonalité}\left(\overrightarrow{AL},\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow (x_L+2)\times 6+(-3)\times(-3)=0$$
$$\Leftrightarrow 6x_L+12+9=0 \Leftrightarrow 6x_L+21=0$$
$$\Leftrightarrow 6x_L=-21 \Leftrightarrow x_L=\frac{-21}{6}=-3,5$$

Conclusion : les coordonnées du point L sont $(-3,5\ ;\ 0)$.

e.1. Le rayon du cercle Γ est égal à la longueur CB.

$$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 3-4=-1 \\ -4-0=-4 \end{pmatrix} \Rightarrow CB=\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}\text{ cm}$$

Conclusion : le rayon du cercle Γ est égal à $\sqrt{17}$ centimètres.

e.2. La distance CE est-elle égale au rayon au cercle Γ soit $\sqrt{17}$ centimètres ?

$$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} 1,5-4=-2,5 \\ -3,3-0=-3,3 \end{pmatrix} \Rightarrow CE=\sqrt{(-2,5)^2+(-3,3)^2}=\sqrt{6,25+10,89}=\sqrt{17,14}\text{ cm}$$

Conclusion : le point E n'appartient pas au cercle Γ.

e.3. Le point $M(5,6\ ;\ y_M)$ appartenant au cercle Γ, la distance CM est égale à $\sqrt{17}$ centimètres.

D'abord, exprimons cette distance CM en fonction de l'ordonnée y_M.

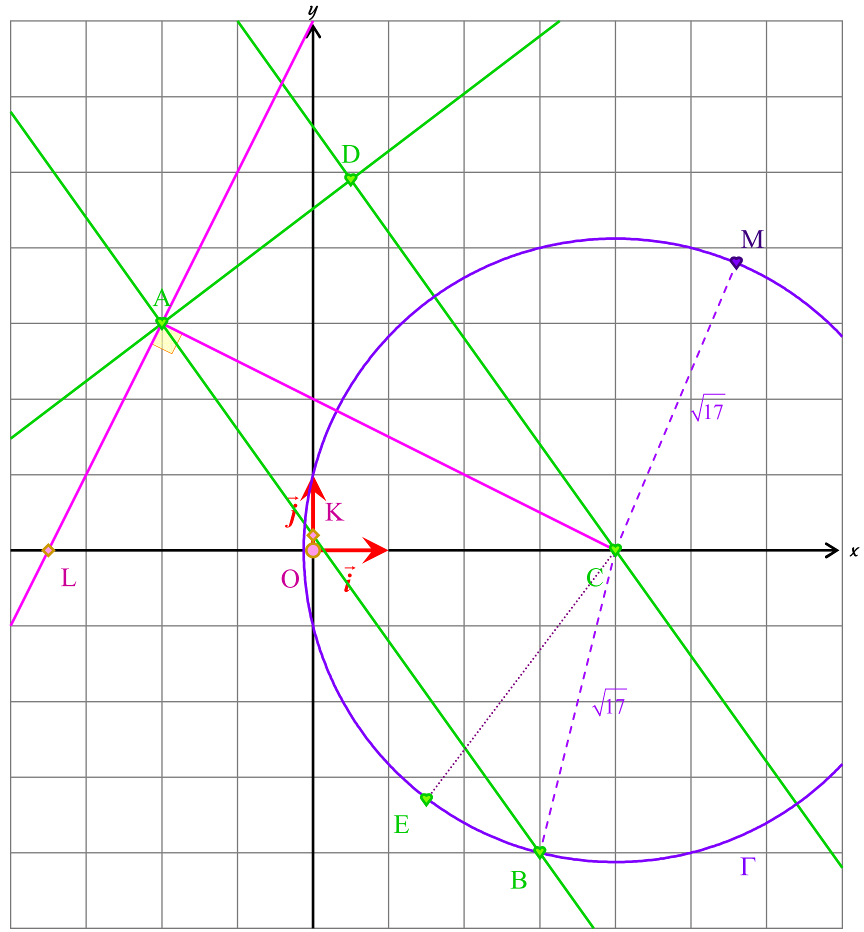
$$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} 5,6-4=1,6 \\ y_M-0 \end{pmatrix} \Rightarrow CM=\sqrt{1,6^2+{y_M}^2}=\sqrt{2,56+{y_M}^2}$$

Ensuite, nous pouvons écrire :

$$G\in\Gamma \Rightarrow CM=\sqrt{17}$$
$$\Rightarrow \sqrt{2,56+{y_M}^2}=\sqrt{17} \xrightarrow{\text{Carré}} 2,56+{y_M}^2=17$$
$$\Rightarrow {y_M}^2=14,44 \Rightarrow y_M=\sqrt{14,44}=\boxed{3,8} \ \text{ou}\ y_M=-\sqrt{14,44}=-3,8$$

Conclusion : Son ordonnée étant positive, les coordonnées du point M sont $(5,6\ ;\ 3,8)$.

A l'issue de l'exercice, la figure complétée est la suivante :

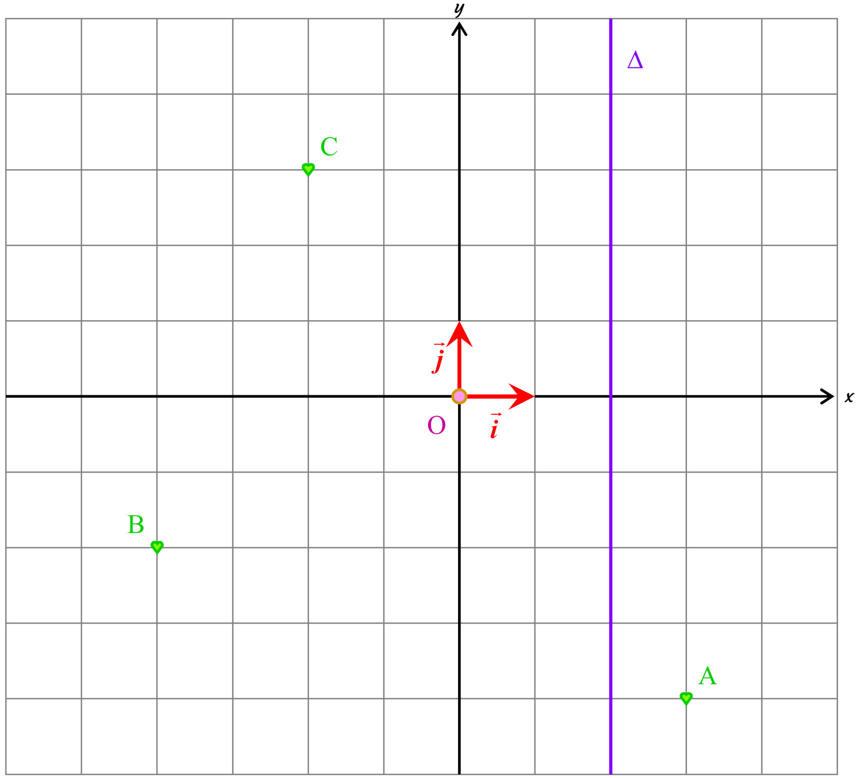


Mauvais plan pour bonnes droites

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé et centimétrique dans lequel on a placé les points de coordonnées suivants :

$A(3;-4)$ $B(-4;-2)$ $C(-2;3)$



a. On s'intéresse à la droite (AC).

1. Déterminer par le calcul une équation de la droite (AC).
2. Sur la figure ci-contre, on a tracé la droite Δ qui est parallèle à l'axe $\left(O;\vec{j}\right)$. Sans justifications, donner une équation de cette droite.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E qui est l'intersection des droites (AC) et Δ.

b. Une équation cartésienne de la droite *d* est $4x-3y+10=0$.

1. Prouver que le point B appartient à la droite *d*.
2. Sans justifications, donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite *d*. Puis, tracer la droite *d*.
3. Démontrer que les droites (AC) et *d* ne sont pas parallèles.
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point F qui est l'intersection des droites (AC) et *d*.

Le corrigé

a.1. La droite (AC) est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Autrement dit :

$$M(x;y)\in(AC) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-(-4)\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-3\\3-(-4)\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-3 & -5\\ y+4 & 7\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-3)\times 7\right]-\left[(y+4)\times(-5)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[7x-21\right]-\left[-5y-20\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 7x-21+5y+20=0 \Leftrightarrow 7x+5y-1=0$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite (AC) est $7x+5y-1=0$.

a.2. Tous les points de la droite Δ ont en commun la même abscisse 2. Par conséquent, une équation de la droite Δ est $x=2$.

a.3. Comme le point E appartient aux droites Δ et (AC), alors ses coordonnées en vérifient les deux équations. Ainsi, avons-nous :

$$x_E=2 \quad \text{et} \quad 7x_E+5y_E-1=0 \Leftrightarrow 7\times 2+5y_E-1=0 \Leftrightarrow 5y_E-13=0$$

$$\Leftrightarrow 5y_E=-13 \Leftrightarrow y_E=-\frac{13}{5}$$

Conclusion : les coordonnées du point E sont $(2\ ;\ -2{,}6)$.

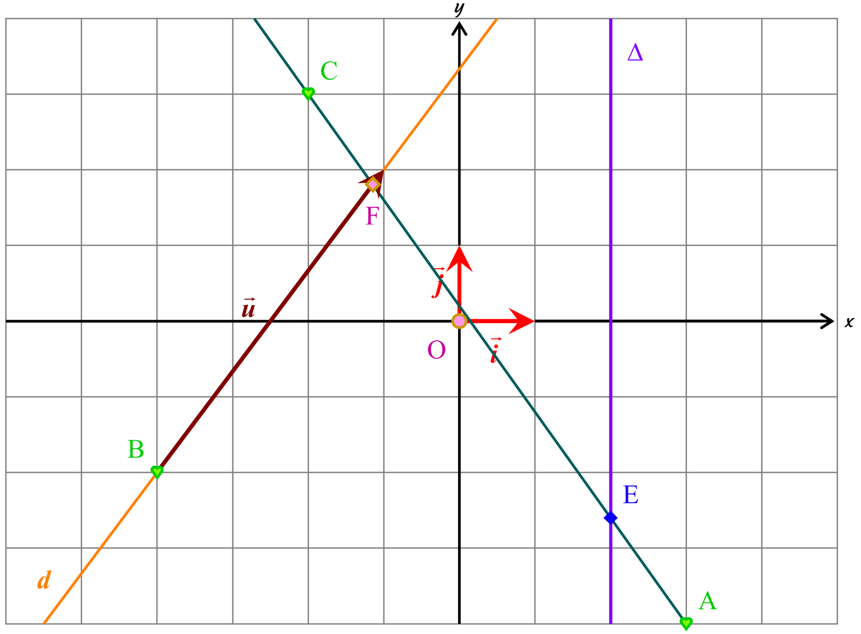
b.1 Regardons si les coordonnées du point B vérifient l'équation de la droite *d*.

$$4x_B-3y_B+10=4\times(-4)-3\times(-2)+10=-16+6+10=0$$

Conclusion : ses coordonnées en vérifiant l'équation, le point B appartient à la droite *d*.

b.2. Un vecteur directeur de la droite *d* d'équation $\underbrace{\boxed{4}}_{a}x+\underbrace{\boxed{(-3)}}_{b}y+10=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b=3\\a=4\end{pmatrix}$.

On trace la droite *d* en positionnant le vecteur directeur $\vec{u}$ au départ du point B.



b.3. Voyons si les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$, directeurs pour les droites (AC) et d, sont colinéaires.

$$\det\left(\overrightarrow{AC},\vec{u}\right)=\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 7 & 4\end{vmatrix}=(-5)\times 4-7\times 3=-20-21=-41\neq 0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.
Conclusion : les droites (AC) et d ne sont pas parallèles mais sécantes en un point F.

b.4. F appartenant aux droites (AC) et d, ses coordonnées en vérifient les deux équations.

$$\begin{cases} F\in(AC) & \Leftrightarrow \quad 7x_F+5y_F-1=0 \quad \textit{(1)} \\ F\in d & \Leftrightarrow \quad 4x_F-3y_F+10=0 \quad \textit{(2)} \end{cases}$$

Ce système linéaire 2×2 va être résolu par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour trouver x_F, on élimine les y_F.

$$\begin{array}{lr} \textit{(1)} \xrightarrow{\times 3} & 21x_F+15y_F-3=0 \\ \textit{(2)} \xrightarrow{\times 5} & 20x_F-15y_F+50=0 \\ \hline & 41x_F+47=0 \\ & 41x_F=-47 \\ & x_F=-\dfrac{47}{41} \end{array} \quad \oplus$$

On supprime les x_F pour obtenir y_F.

$$\begin{array}{lr} \textit{(1)} \xrightarrow{\times 4} & 28x_F+20y_F-4=0 \\ \textit{(2)} \xrightarrow{\times 7} & 28x_F-21y_F+70=0 \\ \hline & 41y_F-74=0 \\ & 41y_G=74 \\ & y_G=\dfrac{74}{41} \end{array} \quad \ominus$$

Conclusion : les coordonnées du point G sont $\left(-\dfrac{47}{41}\ ;\ \dfrac{74}{41}\right)$.

L'équation sifflera deux fois

L'énoncé

Le plan est rapporté à un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé et centimétrique dans lequel on considère les points $E(2\ ;\ 1)$ et $F(-1;-3)$.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire de deux équations :

$$(S)\begin{cases}6x+8y=1\\4x-3y=5\end{cases}$$

b. Déterminer par le calcul une équation de la droite (EF).

c. On appelle d la droite d'équation $6x+8y-1=0$.
Prouver que les droites (EF) et d sont perpendiculaires.

d. Déterminer les coordonnées du point H qui est l'intersection des droites d et (EF).

Le corrigé

a. Nous allons résoudre le système linéaire $(S)\begin{cases}6x+8y=1 & \textit{(1)}\\4x-3y=5 & \textit{(2)}\end{cases}$ par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour déterminer x, on supprime les y.

$$\begin{array}{lr} \textit{(1)} \xrightarrow{\times 3} & 18x+24y=3 \\ \textit{(2)} \xrightarrow{\times 8} & 32x-24y=40 \\ \hline & 50x=43 \\ & x=\dfrac{43}{50} \end{array} \quad \oplus$$

On annihile les x pour obtenir y.

$$\begin{array}{lr} \textit{(1)} \xrightarrow{\times 2} & 12x+16y=2 \\ \textit{(2)} \xrightarrow{\times 3} & 12x-9y=15 \\ \hline & 25y=-13 \\ & y=-\dfrac{13}{25} \end{array} \quad \ominus$$

Conclusion : le système (S) a pour seule solution le couple de réels $(0,86\ ;\ -0,52)$.

b. La droite (EF) est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires. Autrement dit :

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(EF) &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1-2\\-3-1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EF}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-2 & -3\\ y-1 & -4\end{vmatrix}=0 \\ &\Leftrightarrow \left[(x-2)\times(-4)\right]-\left[(y-1)\times(-3)\right]=0 \\ &\Leftrightarrow \left[-4x+8\right]-\left[-3y+3\right]=0 \\ &\Leftrightarrow -4x+8+3y-3=0 \Leftrightarrow -4x+3y+5=0 \end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite (EF) est $-4x+3y+5=0$.

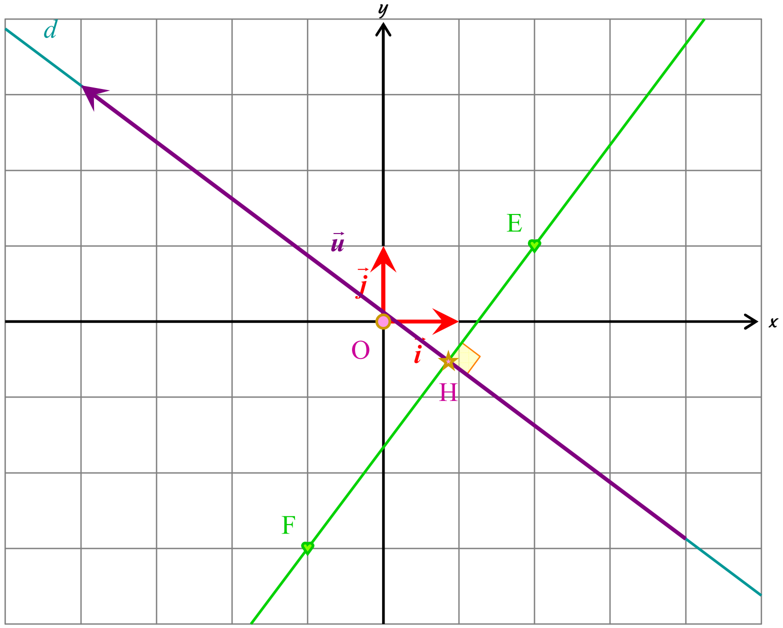
c. Un vecteur directeur de la droite d d'équation $\underbrace{\boxed{6}}_{a}\,x+\underbrace{\boxed{8}}_{b}\,y-1=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b=-8\\ a=6\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\vec{u}$, directeurs pour les droites (EF) et d, sont-ils orthogonaux ?
Pour le savoir, appliquons notre test d'orthogonalité !

$$\text{Test d'orthogonalité}\left(\overrightarrow{\mathrm{EF}},\vec{u}\right)=x_{\overrightarrow{\mathrm{EF}}}\times x_{\vec{u}}+y_{\overrightarrow{\mathrm{EF}}}\times y_{\vec{u}}=-3\times(-8)+(-4)\times 6=24-24=0$$

Leur test étant nul, les vecteurs directeurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.
Conclusion : les droites (EF) et d sont perpendiculaires.

Le tracé de la droite d est délicat car elle ne passe par aucun point à coordonnées entières. En effet, si les réels x et y sont entiers, la somme $6x+8y$ est nécessairement paire et ne peut pas être égale à 1. Donc aucun couple d'entiers $(x;y)$ ne vérifie l'équation cartésienne de d.



d. Le point H appartenant aux droites (EF) et d, les coordonnées du premier vérifient les deux équations des secondes.

$$\begin{cases} \mathrm{H}\in(\mathrm{EF}) \Leftrightarrow -4x_{\mathrm{H}}+3y_{\mathrm{H}}+5=0 \Leftrightarrow -4x_{\mathrm{H}}+3y_{\mathrm{H}}=-5 \xrightarrow{\times(-1)} 4x_{\mathrm{H}}-3y_{\mathrm{H}}=5 \\ \mathrm{H}\in d \Leftrightarrow 6x_{\mathrm{H}}+8y_{\mathrm{H}}-1=0 \Leftrightarrow 6x_{\mathrm{H}}+8y_{\mathrm{H}}=1 \end{cases}$$

Bref, les coordonnées du point H sont les solutions du système (S) résolu lors de la question **a**.

Conclusion : les coordonnées du point H sont $\left(\frac{43}{50};-\frac{13}{25}\right)$.

Géométrie classique non repérée

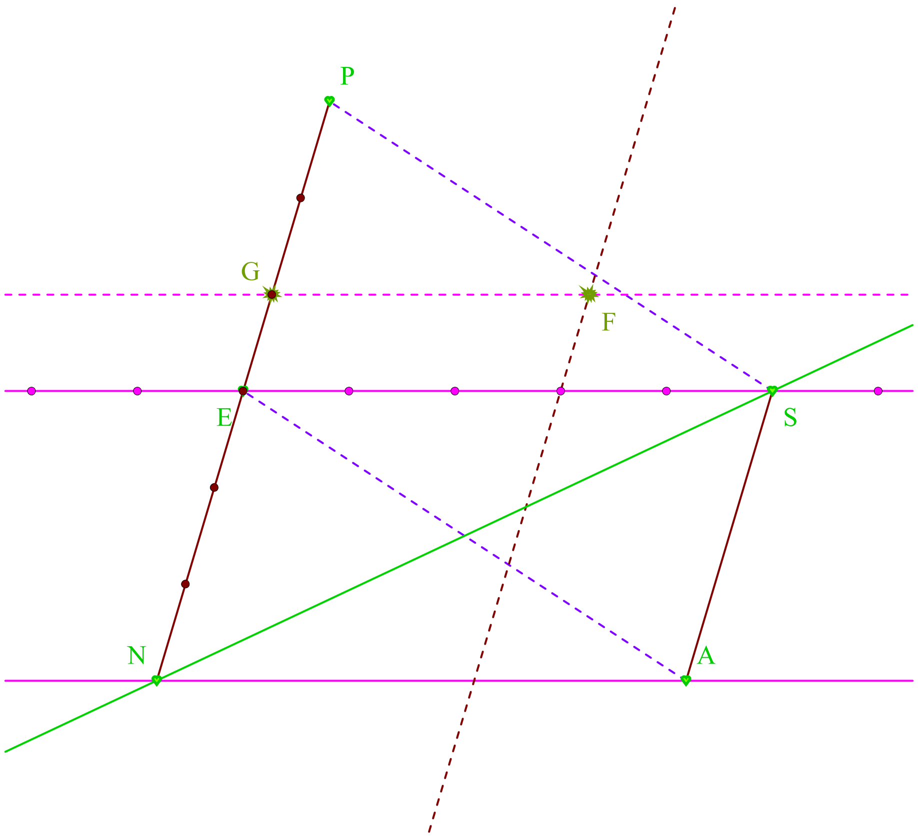
Les vecteurs soufflent en tempête

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, NASE et ASPE sont deux parallélogrammes tels que :

$$NA = 7\text{ cm} \qquad AS = 4\text{ cm} \qquad NS = 9\text{ cm}$$

Certains segments ont été partagés en un certain nombre de parties égales. Les droites et segments parallèles ont été tracés dans une même couleur.



a. Sur la figure ci-dessus, placer les points B, C et D définis par les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\times\overrightarrow{AS} \qquad \overrightarrow{PC} = -\frac{2}{5}\times\overrightarrow{ES} \qquad \overrightarrow{ND} = -\frac{2}{7}\times\overrightarrow{NA}$$

b. Compléter les égalités ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

$$\overrightarrow{AS} = \ldots\ldots\ldots\times\overrightarrow{PN} \qquad \overrightarrow{GF} = \ldots\ldots\ldots\times\overrightarrow{ES}$$

$$\overrightarrow{EG} = \ldots\ldots\ldots\times\overrightarrow{EN} \qquad \overrightarrow{AF} = \ldots\ldots\ldots\times\overrightarrow{AN} + \ldots\ldots\ldots\times\overrightarrow{AS}$$

c. En effectuant un calcul vectoriel et en utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AS}$. C'est-à-dire que l'on recherche une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{AF} = \ldots\ldots\ldots\times\overrightarrow{AE} + \ldots\ldots\ldots\times\overrightarrow{AS}$.

d. Le point H est défini par la relation vectorielle :

$$7\times\overrightarrow{NH} + 2\times\overrightarrow{SH} = \vec{0}$$

1. Par un calcul vectoriel, exprimer le vecteur $\overrightarrow{NH}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{NS}$. C'est-à-dire que l'on veut une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{NH} = \ldots\ldots\times\overrightarrow{NS}$.
2. Placer le point H sur la figure ci-contre.

e. Sur la figure ci-contre, placer le point L défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{PL} = 3\times\overrightarrow{EN} + 2\times\overrightarrow{NS} + \overrightarrow{AE}$$

Le corrigé

a.1. [AS] mesurant 4 centimètres, B se trouve à $\frac{3}{\cancel{4}}\times\cancel{4} = 3$ centimètres du point A sur le segment.

Ensuite, pour placer le point C, il suffit de reporter un vecteur $-\frac{2}{5}\times\overrightarrow{ES} = \frac{2}{5}\times\overrightarrow{SE}$ au départ du point P. On construit alors un parallélogramme...au compas.

Enfin, le segment [NA] mesurant 7 centimètres, le point D se trouve sur la droite (NA) à deux centimètres du point N mais à l'opposé du point A.

b.1. Vu les divers parallélogrammes, les vecteurs $\overrightarrow{NE}$, $\overrightarrow{EP}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont égaux et :

$$\boxed{\overrightarrow{AS} = -\frac{1}{2}\times\overrightarrow{PN}}$$

b.2. Vu les parallélismes existants, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{GP} = \frac{3}{5}\times\overrightarrow{ES}}$$

b.3. Le segment [NP] a été partagé en six sous parties égales. Par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{EG} = -\frac{1}{3}\times\overrightarrow{EN}}$$

b.4. Vu les diverses parallèles existantes, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\times\overrightarrow{SE}+\frac{4}{3}\times\overrightarrow{NE} = \boxed{\frac{2}{5}\times\overrightarrow{AN}+\frac{4}{3}\times\overrightarrow{AS}}$$

c. Pour établir la relation qui nous est demandée, nous allons partir de la dernière relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\times\overrightarrow{AN}+\frac{4}{3}\times\overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\times\underbrace{\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EN}\right)}_{\text{Chasles par E}}+\frac{4}{3}\times\overrightarrow{AS}$$

$$= \frac{2}{5}\times\overrightarrow{AE}+\overbrace{\frac{2}{5}\times\overrightarrow{EN}}^{\text{NASE est un...}}+\frac{4}{3}\times\overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\times\overrightarrow{AE}+\overbrace{\frac{2}{5}\times\left(-\overrightarrow{AS}\right)}^{\text{..parallélogramme}}+\frac{4}{3}\times\overrightarrow{AS}$$

$$= \frac{2}{5}\times\overrightarrow{AE}+\frac{-2\times 3+4\times 5}{15}\times\overrightarrow{AS} = \boxed{\frac{2}{5}\times\overrightarrow{AE}+\frac{14}{15}\times\overrightarrow{AS}}$$

d. Le point H est défini par la relation vectorielle :

$$7\times\overrightarrow{NH}+2\times\overrightarrow{SH}=\vec{0} \Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{NH}+2\times\underbrace{\left(\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{NH}\right)}_{\text{Chasles par N}}=\vec{0} \Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{NH}+2\times\overrightarrow{SN}+2\times\overrightarrow{NH}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 9\times\overrightarrow{NH}+2\times\overrightarrow{SN}=\vec{0} \Leftrightarrow 9\times\overrightarrow{NH}=\vec{0}-2\times\overrightarrow{SN}$$

$$\Leftrightarrow 9\times\overrightarrow{NH}=2\times\overrightarrow{NS} \xrightarrow{\div 9} \boxed{\overrightarrow{NH}=\frac{2}{9}\times\overrightarrow{NS}}$$

Le segment [NS] mesurant 9 centimètres, le point H se trouve à deux centimètres de l'extrémité N.

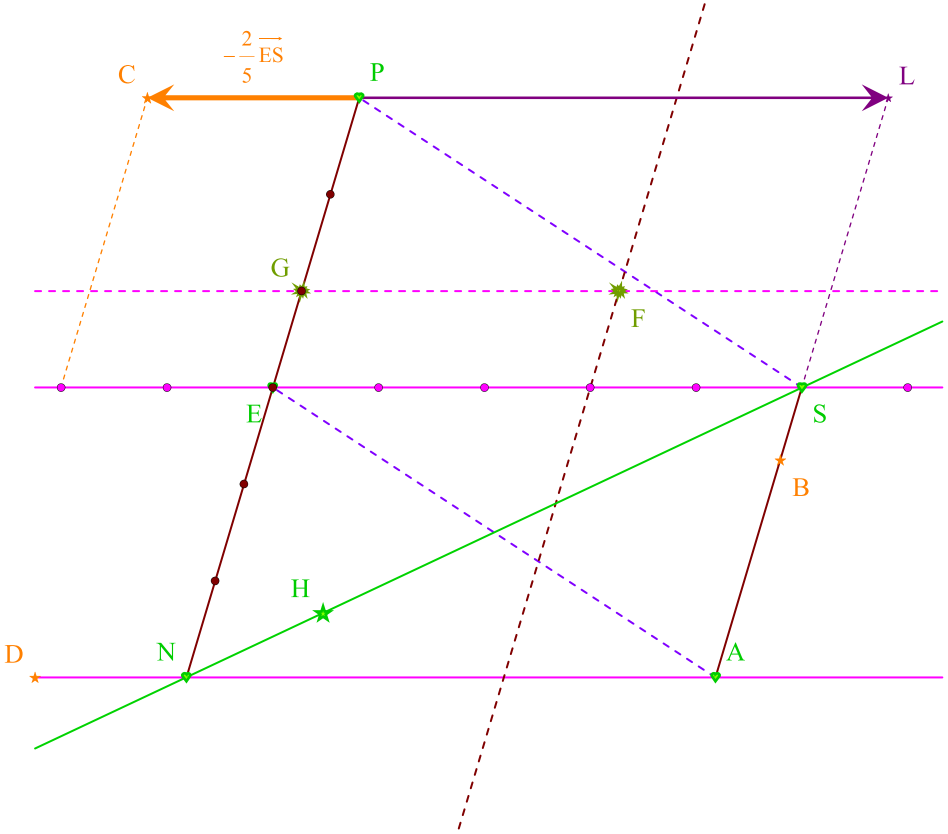
e. Pour placer astucieusement le point L, il faut détailler les vecteurs et réfléchir avec la figure qui est constituée de deux parallélogrammes.

$$\overrightarrow{PL} = 3\times\overrightarrow{EN}+2\times\overrightarrow{NS}+\overrightarrow{AE} = 2\times\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{NS}+\overrightarrow{NS}+\overrightarrow{AE}$$

$$= 2\times\overrightarrow{EN}+\underbrace{\overrightarrow{ES}}_{\text{Chasles}}+\overrightarrow{NS}+\overrightarrow{SP} = 2\times\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{ES}+\underbrace{\overrightarrow{NP}}_{\text{Chasles}} = \cancel{\overrightarrow{NP}}+\overrightarrow{ES}+\cancel{\overrightarrow{NP}} = \boxed{\overrightarrow{ES}}$$

<u>Conclusion :</u> le point L est le quatrième sommet du parallélogramme SEPL.

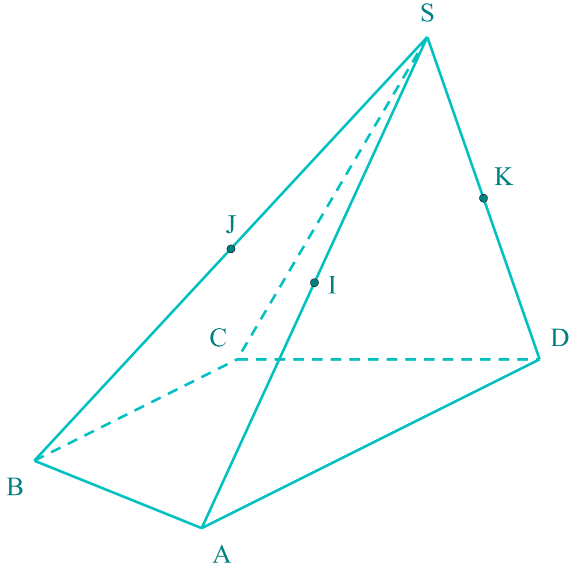
A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-contre ↗



Le terrible secret de la pyramide

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, SABCD est une pyramide de sommet S et de base le trapèze ABCD dont les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ sont droits et, dont les côtés [BC] et [AD] sont parallèles.
Enfin, I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [SA], [SB] et [SD].



a. Pour chaque question, trois propositions sont faites mais une seule est juste. Laquelle ? On entourera la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

a.1. Les droites (JK) et (BD) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

a.2. Les plans (AKS) et (DIS) sont :

Sécants	parallèles distincts	Confondus

a.3. La droite (IK) et le plan (BCD) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse.	La droite est incluse dans le plan.

a.4. Les droites (DI) et (AJ) sont :

Sécantes	Parallèles	Non coplanaires

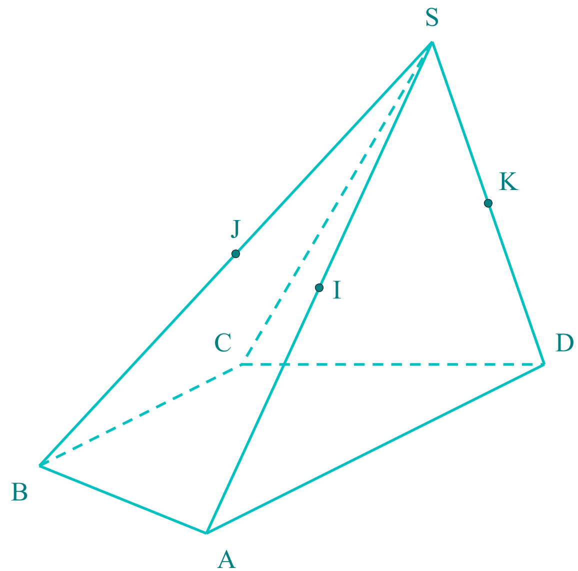
a.5. Les plans (IJK) et (BCD) sont :

Sécants	parallèles distincts	Confondus

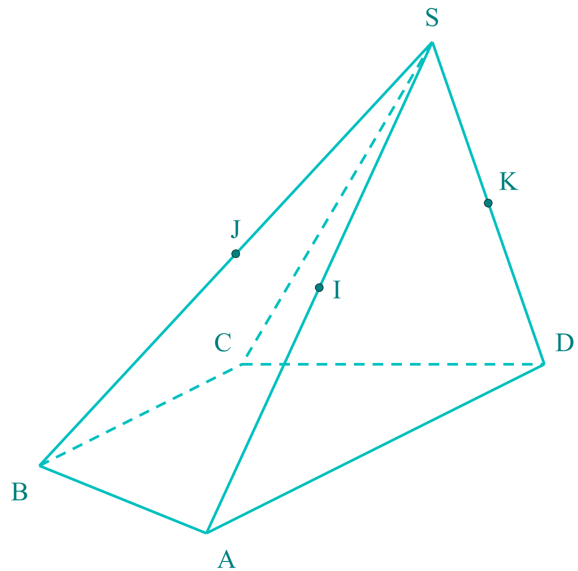
a.6. La droite (BK) et le plan (DJS) sont :

Sécants	La droite est parallèle au plan mais n'y est pas incluse	La droite est incluse dans le plan

b. Sur la figure ci-dessous, construire l'intersection Δ des plans (SAB) et (SCD). On expliquera et justifiera sa construction. Une grande attention sera portée à la rédaction.



c. Sur la figure ci-dessous, construire l'intersection Γ des plans (ADJ) et (BCI). On expliquera et justifiera sa construction. Une grande attention sera portée à la rédaction.

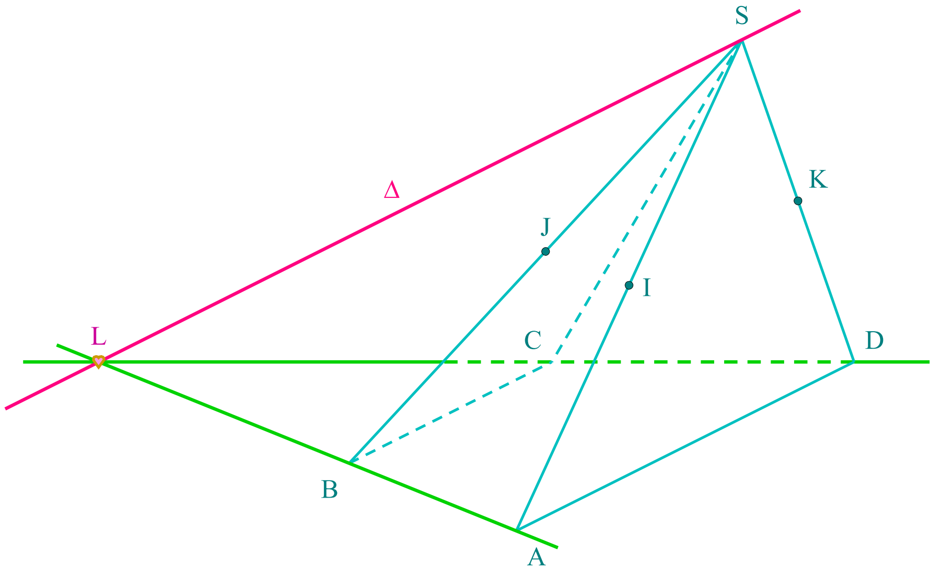


Le corrigé

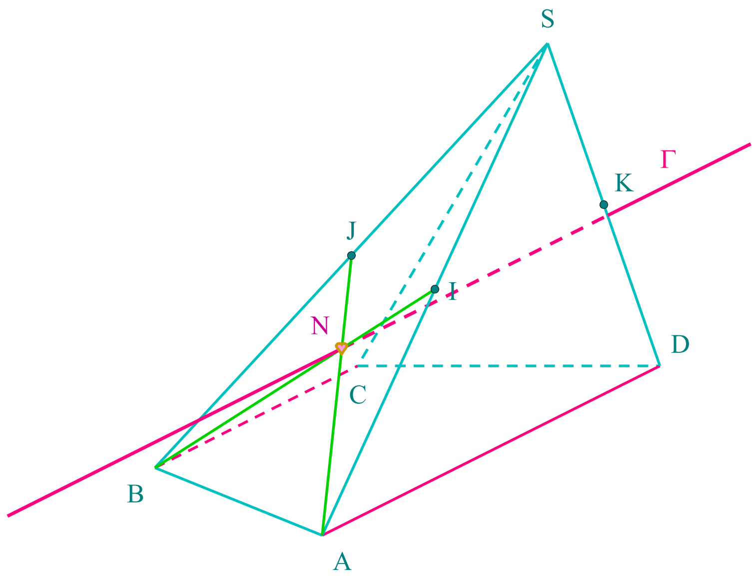
a. Passons en revue les différentes configurations proposées :

1. Si l'on se place dans le triangle SBD, en vertu du théorème des milieux, la droite des milieux (JK) est parallèle au côté [BD].
2. Les points A, D, S, I et K appartiennent tous au plan défini par la face de droite de la pyramide. Par conséquent, les plans (AKS) et (DIS) sont confondus; il s'agit du même plan.
3. Comme la droite (IK) est parallèle à la droite (AD) du plan (BCD), alors cette première est parallèle à ce dernier. Ensuite, comme les points I et K n'appartiennent pas au plan (BCD), alors ce parallélisme est non inclus.
4. Le point D n'appartenant pas au plan (AIJ) qui est aussi le plan (SAB), les droites (DI) et (AJ) sont non coplanaires.
5. Si l'on applique le théorème des milieux dans les triangles SAB, SBD et SAD alors, on établit que la droite (IJ) est parallèle à (AB), que la droite (JK) est parallèle à (BD) et que la droite (IK) est parallèle à (AB).
   Donc, les plans (IJK) et (BCD) sont parallèles distincts.
6. Les points S, B, D, J et K étant coplanaires, la droite (BK) est incluse dans le plan (DJS).

b. D'abord, l'intersection Δ des deux plans sécants (SAB) et (SCD) est une droite qui passe par le point S...qui fait partie des deux plans.
Ensuite, la droite (AB) du plan (SAB) est sécante à la droite (CD) du plan (SCD) en un point que nous appellerons L. Tout cela se passe dans le plan (ABC).
<u>Conclusion :</u> l'intersection Δ est la droite (SL).



c. Encore une fois, l'intersection Γ des plans sécants (ADJ) et (BCI) est une droite.
D'abord, la droite (AJ) du plan (ADJ) est sécante à la droite (BI) du plan (BCI) en un point que nous appellerons N. Tout cela se passe dans le plan (SAB).
Ensuite, comma la droite (BC) du plan (BCI) est parallèle à la droite (AD) du plan (ADJ), alors, en application du «théorème du toit», l'intersection Γ de ces deux plans est parallèle aux droites (BC) et (AD).
<u>Conclusion :</u> Γ est la parallèle à (AD) ou (BC) passant par le point N.



Probabilités

Les incertitudes d'une pause

L'énoncé

Cet exercice est constitué de trois sous-parties indépendantes les unes des autres. Les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible ou sous la forme d'un nombre décimal exact. Tout résultat doit être justifié.

a. 26 élèves de la classe de *seconde A* se sont portés volontaires pour tenir la future cafétéria du lycée. Exactement, il y a 16 filles et 10 garçons.
Afin de ne frustrer personne parmi ces 26 bénévoles à l'enthousiasme débordant, l'administration a décidé de procéder à un tirage au sort parmi ces 26 candidats.
Trois postes sont à distribuer : un premier pour la vente des gâteaux, un deuxième pour la vente des fruits et un dernier pour la vente des boissons.
L'attribution de ces trois postes précis à trois élèves précis permet de constituer une <u>équipe de vente</u>. Bien sûr, un même élève ne peut occuper qu'un seul poste à la fois.

1. Montrer qu'il existe 15600 équipes de vente possibles.
2. Déterminer les probabilités des événements suivants :

A = «l'équipe de vente est constituée de trois filles»
B = «un garçon vend les gâteaux et une fille vend les fruits»
C = «l'équipe de vente comporte au moins un garçon»
D = «l'équipe de vente comporte exactement une fille»

b. La clientèle de la cafétéria se compose de 40% d'élèves de seconde et 30% d'élèves de première.
Une étude a montré que 65% des secondes étaient satisfaits du service contre 50% des premières. Par contre, 75% des autres clients (ceux qui ne sont ni en seconde, ni en première) sont mécontents du service.
Enfin, précisons que, dans cette étude, le client interrogé n'avait que deux choix possibles de réponse : être satisfait du service ou en être mécontent.
On rencontre au hasard un client de la cafétéria.

1. Faire un arbre pondéré décrivant l'opinion du client rencontré quant au service de la cafétéria. Le correcteur ayant une intelligence limitée, on définira les événements introduits avec un grand soin.
2. Déterminer la probabilité que le client rencontré au hasard soit mécontent.

c. Une rapide étude de marché menée parmi les clients de la cafétéria du lycée a montré que, lorsqu'ils venaient à la cafétéria :

- 45% des clients achetaient un fruit (voire plusieurs).
- 60% des clients achetaient un gâteau (voire plusieurs).
- 15% n'achetaient ni fruits, ni gâteaux.

On rencontre au hasard un client qui sort de la cafétéria du lycée. Déterminer la probabilité qu'il ait acheté un fruit et un gâteau (les deux simultanément).

Le corrigé

a.1. Constituons une équipe de vente :

Vente des gâteaux		Vente des fruits		Vente des boissons		
26 candidat(e)s	×	25 candidat(e)s	×	24 candidat(e)s	=	15600 équipes

a.2. Dénombrons le nombre d'équipes de vente favorables à l'événement A, c'est-à-dire constituées de trois filles.

Vente des gâteaux		Vente des fruits		Vente des boissons		
16 candidates	×	15 candidates	×	14 candidates	=	3360 équipes A

Nous en déduisons :

$$p(A)=\frac{\text{Nombre d'équipes de vente favorables à } A}{\text{Nombre total d'équipes de vente}}=\frac{3360}{15600}=\frac{\cancel{8}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{5}\times 2\times 7}{\cancel{2}\times 13\times\cancel{5}\times 5\times\cancel{3}\times\cancel{8}}=\frac{14}{65}$$

➲ Déterminons le nombre d'équipes de vente favorables à l'événement B.

Vente des gâteaux		Vente des fruits		Vente des boissons		
10 candidats	×	16 candidates	×	24 candidat(e)s restants	=	3840 équipes B

Par conséquent :

$$p(B)=\frac{\text{Nombre d'équipes favorables à } B}{\text{Nombre total d'équipes}}=\frac{3840}{15600}=\frac{\cancel{2}\times\cancel{5}\times 2\times\cancel{8}\times\cancel{3}\times 8}{\cancel{2}\times 13\times\cancel{5}\times 5\times\cancel{3}\times\cancel{8}}=\frac{16}{65}$$

➲ L'événement C = «l'équipe de vente comporte au moins un garçon» est le contraire de l'événement $\overline{C}$ = «l'équipe de vente ne comporte aucun garçon» $= A$. Par suite :

$$p(C)=1-p(A)=1-\frac{14}{65}=\frac{65-14}{65}=\frac{51}{65}$$

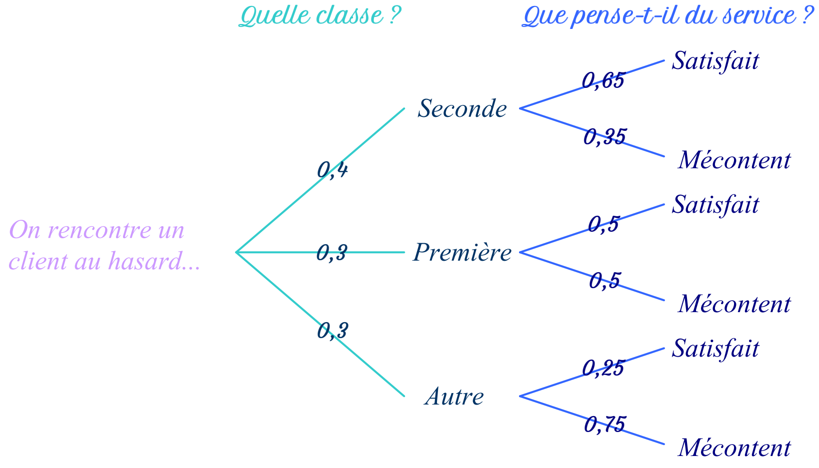
➲ Si l'équipe de vente comporte exactement une fille, alors elle a deux garçons. Après tout dépend du poste occupée par la fille :

Vente des gâteaux		Vente des fruits		Vente des boissons		
16 candidates La fille	×	10 candidats	×	9 candidats	=	1440 équipes avec une fille aux gâteaux
10 candidats	×	16 candidates La fille	×	9 candidats	=	1440 équipes avec une fille aux fruits
10 candidats	×	9 candidats	×	16 candidates La fille	=	1440 équipes avec une fille aux boissons

Au total, il existe donc $3\times 1440=4320$ équipes de vente constituées d'une fille et de deux garçons. Nous en concluons :

$$p(D)=\frac{\text{Nombre d'équipes favorables à } D}{\text{Nombre total d'équipes}}=\frac{4320}{15600}=\frac{18}{65}$$

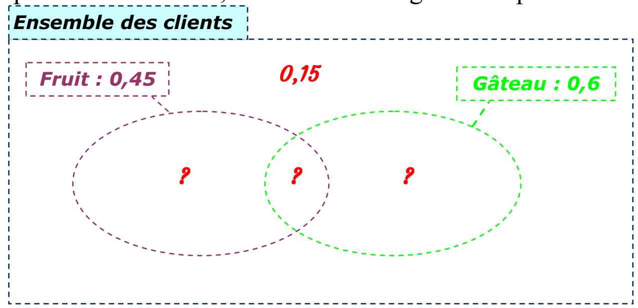
b.1. La situation évoquée par l'énoncé peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :



b.2. La probabilité demandée est donnée par :

$$p(\text{Mécontent})=p(\text{2nde}\cap\text{Mécontent})+p(\text{1ère}\cap\text{Mécontent})+p(\text{Autre}\cap\text{Mécontent})$$
$$=0,4\times 0,35+0,3\times 0,5+0,3\times 0,75=0,14+0,15+0,225=0,515$$

c. Pour mieux comprendre la situation, dessinons un diagramme «patates».



La probabilité de l'événement «le client achète un fruit <u>ou</u> un gâteau» est égale à

$$p(\text{«un fruit } \underline{\text{ou}} \text{ un gâteau»})=1-0,15=0,85$$

Il vient alors :

$$p(\text{«un fruit } \underline{\text{et}} \text{ un gâteau»})=p(\text{«un fruit»})+p(\text{«un gâteau»})-p(\text{«un fruit } \underline{\text{ou}} \text{ un gâteau»})$$
$$=0,45+0,6-0,85=0,2$$

<u>Note :</u> le présent exercice peut aussi se résoudre avec un tableau en raisonnant sur 100 individus.

Table des matières

Le mot de l'auteur

Quand je suis rentré dans cette grande administration qu'est l'Education Nationale, la première chose que l'on m'est assénée était que prof n'était pas une profession libérale mais que j'étais un fonctionnaire. En d'autres termes : «tu fais ce que te disent les types au-dessus de toi comme ils veulent que tu le fasses, tu ne poses pas de questions et surtout, tu la boucles». Et peu importe si les grands esprits se contredirent d'un quinquennat sur l'autre ou à balancer des inepties complètement déconnectées de la réalité. Car un prof n'est qu'un élément d'une administration obèse.

Plus de vingt ans après, une évidence s'impose : j'ai loupé ma carrière de prof. Et plus les années passent, plus ça se dérange ou moins ça s'arrange. Ce recueil d'exercices en est une parfaite illustration. Si le présent document vous effraie ou vous navre, ne blâmez pas le Ministère de l'Education Nationale car il ne peut être tenu pour responsable des divagations de son élément défaillant.

Jérôme ONILLON