Le mot de l'auteur

Les piètres résultats aux évaluations internationales en mathématiques ont conduit nos grandioses penseurs à s'interroger sur la qualité des enseignants qu'ils employaient. Car selon leur adage bien connu, il n'y a pas de mauvais élèves, il n'y a que de mauvais profs ! Chemin faisant, ils sont parvenus à la conclusion qu'il fallait payer les profs «au mérite» et virer les «mauvais».
Le mérite dans l'Education Nationale se mesure surtout à la vigueur de la langue et à la soumission à une doctrine. Depuis vingt ans, les ministres de gauche ou de droite valsent mais l'orchestre n'a pas changé et c'est toujours la même musique ou plutôt les mêms inepties pseudo-scientifiques que l'on entend. Il y a tant d'experts que l'on en vient à regretter les ignorants d'antan.
Des «mauvais profs», il y en a certainement. Mais ce n'est pas la «formation» dispensée qui améliorera les choses. Cette année, seule la moitié des postes au CAPES de mathématique a été pourvue car beaucoup de candidats n'avaient pas le niveau suffisant. Nul ne reprochera aux jurys du concours d'avoir fait leur boulot. Mais la conséquence de cette moisson décevante sera que le ministère complétera les postes vaccants à l'aide de Pôle Emploi, c'est-à-dire en embauchant n'importe qui. Peu importent les compétences, l'essentiel est que les élèves aient quelqu'un en face d'eux. C'est ce que l'on appelle une démarche comptable : une classe avec un prof...enfin quelqu'un.
Les problèmes de l'Instruction Publique en France ne proviennent pas nécssairement d'une insuffisance du terrain ou d'un manque de moyens (ils ne seront jamais suffisants !) mais surtout de l'état d'esprit et de la médiocrité des experts-bureaucrates qui nous gèrent. Ils n'enseignent pas, ils n'instruisent pas, ils ne forment pas, ils ne servent même pas mais ils gèrent une structure dont ils ignorent la réalité et surtout le métier mais sur laquelle ils ont des tas d'idées. Ils gèrent un désastre qu'ils ont créé. Mais ça, ils ne vous le diront jamais.

Les exercices de ce volume sont classés par catégories :

La taverne de l'Irlandais
[http://www.tanopah.com]
présente

VIENS AVEC NOUS ...en seconde !

Le présent document a été entièrement conçu et réalisé par Jérôme ONILLON, professeur désagrégé, découragé et écoeuré de mathématiques.

Les exercices composant ce recueil ont été expérimentés durant la saison 2010-2011 sur des élèves de seconde, cobayes involontaires de mes excentricités antipédagogiques.
PARDON !!!

Non conformité certaine !

Edition du lundi 18 juillet 2011

Algorithmique

Demander le programme !

Le contexte

Le but était de voir si les bases de la programmation avaient été assimiliées : affectations de variables, instructions de test et de boucles.

L'énoncé

Cet exercice est composé de trois sous-parties indépendantes. Dans chaque sous-partie, un programme est donné au cours desquels des questions sont posées. Ces questions sont introduites par une flèche ➔. On se contentera de répondre à ces questions.
On rappelle que les instructions d'un même bloc sont écrites sur une même colonne.

a) Le premier programme est le suivant :

```
a=2
b=3
a=3*a+b
➔ Question : que valent les variables a et b ?
Si a<b  alors  b=a
        sinon  a=b
➔ Question : que valent les variables a et b ?
```

b) Le second programme est le suivant :

```
a=1
b=1
Pour i=1 jusqu'à 4 faire :
        Si i est pair alors a=a*i
                      sinon b=b+i
        ➔ Question : que valent les variables a et b?
a=(a+b)/2
➔ Question : que valent les variables a et b ?
```

c) Le troisième programme est le suivant :

```
a=0
b=0
Tant que (a<20) faire :
        b=b+1
        a=a+b
        ➔ Question : que valent les variables a et b?
```

➔ Question : que vaut le quotient $b\times(b+1)/2$? Le comparer à a.

Le corrigé

a) Exécutons ce premier programme !

Instruction	Son action	a	b
`a=2 b=3`	Affecte les variables a et b avec les valeurs 2 et 3	2	3
`a=3*a+b`	Calcule la somme $3\times 2+3=9$ et la met dans a	9	3
➔ La variable a est égale à 9 et la variable b est égale à 3.			
`Si a<b alors` `sinon`	Comme $a=9$ est supérieur à $b=3$, alors la condition n'est pas remplie. C'est le `sinon` qui s'applique. On met la valeur de b dans a.	3	3
➔ Les variables a et b sont toutes deux égales à 3.			

b) Exécutons ce second programme !

Instruction	Son action	a	b	i
`a=1 b=1`	Affecte les variables a et b avec 1.	1	1	
`Pour i=1...`	♋ Première boucle avec $i=1$	1	1	1
`Si i est...`	Comme $i=1$ est impair, le `sinon` s'applique. On affecte $b+i=2$ à b	1	2	1
➔ Les variables a et b ont pour valeurs respectives 1 et 2.				
`Pour i=2...`	♋ Seconde boucle avec $i=2$	1	2	2
`Si i est...`	Comme $i=2$ est pair, le `alors` s'applique. On affecte $a\times i=2$ à a.	2	2	2
➔ Les variables a et b ont toutes deux pour valeurs 2.				
`Pour i=3...`	♋ Troisième boucle avec $i=3$	2	2	3
`Si i est...`	Comme $i=3$ est impair, le `sinon` s'applique. On affecte $b+i=5$ à b.	2	5	3
➔ Les variables a et b ont pour valeurs respectives 2 et 5.				
`Pour i=4...`	♋ Dernière boucle avec valeur $i=4$	2	5	4
`Si i est...`	Comme $i=4$ est pair, le `alors` s'applique. On affecte $a\times i=8$ à a.	8	5	4
➔ Les variables a et b ont pour valeurs respectives 8 et 5.				
`a=(a+b)/2`	On calcule le quotient $(a+b)/2=6{,}5$ et on affecte le résultat à la variable a.	6,5	5	4
➔ Les variables a et b ont pour valeurs respectives 6,5 et 5.				

c) Exécutons ce troisième programme !

Instruction	**Son action**	***a***	***b***
`a=0  b=0`	Affectent 0 aux variables *a* et *b*.	0	0
`Tant que a<20...`	Comme $a=0$ est inférieur à 20, alors la condition est remplie. On entame une première boucle...♋	0	0
`b=b+1`	On affecte la valeur $b+1=1$ à *b*.	0	1
`a=a+b`	On affecte la valeur $a+b=1$ à *a*.	1	1
➔ Les variables *a* et *b* sont toutes deux égales à 1			
`Tant que a<20...`	Comme $a=1$ est inférieur à 20, alors la condition est remplie. On entame une seconde boucle... ♋	1	1
`b=b+1`	On affecte valeur $b+1=2$ à la variable *b*.	1	2
`a=a+b`	On affecte la valeur $a+b=3$ à la variable *a*.	3	2
➔ Les variables *a* et *b* sont respectivement égales à 3 et 2.			
`Tant que a<20...`	Comme $a=3$ est inférieur à 20, alors la condition est remplie. On entame une troisième boucle... ♋	3	2
`b=b+1`	On affecte la valeur $b+1=3$ à la variable *b*.	3	3
`a=a+b`	On affecte la valeur $a+b=6$ à la variable *a*.	6	3
➔ Les variables *a* et *b* sont respectivement égales à 6 et 3.			
`Tant que a<20...`	Comme $a=6$ est inférieur à 20, alors la condition est remplie. On entame une quatrième boucle... ♋	6	3
`b=b+1`	On affecte la valeur $b+1=4$ à la variable *b*.	6	4
`a=a+b`	On affecte la valeur $a+b=10$ à la variable *a*.	10	4
➔ Les variables *a* et *b* sont respectivement égales à 10 et 4.			
`Tant que a<20...`	Comme $a=10$ est inférieur à 20, la condition est remplie. On entame une cinquième boucle... ♋	10	4
`b=b+1`	On affecte la valeur $b+1=5$ à la variable *b*.	10	5
`a=a+b`	On affecte la valeur $a+b=15$ à la variable *a*.	15	5
➔ Les variables *a* et *b* sont respectivement égales à 15 et 5.			
`Tant que a<20...`	Comme $a=15$ est inférieur à 20, la condition est remplie. On entame une sixième boucle... ♋	15	5
`b=b+1`	On affecte la valeur $b+1=6$ à la variable *b*.	15	6
`a=a+b`	On affecte la valeur $a+b=21$ à la variable *a*.	21	6
➔ Les variables *a* et *b* sont respectivement égales à 21 et 6.			
`Tant que a<20...`	Comme $a=21$ est supérieur à 20, alors la condition n'est plus remplie. On rompt la boucle !	21	6
➔ Le quotient $\frac{b\times(b+1)}{2}=\frac{6\times 7}{2}=21$ est égale à $a=21$.			

Logique car la somme
1+2+3+...+n
est donnée par la formule
n×(n+1)/2.

Equations, inéquations, ordre et techniques algébriques

Premier degré...ou de force !

Le contexte

Deux résolutions classiques de deux inéquations classiques du premier degré.

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les deux inéquations suivantes. A la fin de chaque résolution, on indiquera quel est l'ensemble des solutions.

$$4.(x+1)-8 \le 6.x-2.(1-5x) \qquad\qquad 1<\frac{4x+1}{7}-2<3$$

Le corrigé

a) Résolvons dans ℝ l'inéquation :

$$4.(x+1)-8 \le 6x-2.(1-5x) \Leftrightarrow \overbrace{4.x+4-8 \le 6x-2+10x}^{\text{D'abord, on développe...}} \Leftrightarrow \overbrace{4.x-4 \le 16.x-2}^{\text{...puis, on réduit !}}$$

$$\Leftrightarrow 4.x-4\boxed{-16x+4} \le 16.x-2\boxed{-16x+4}$$

On divise par un négatif. L'ordre change...

$$\Leftrightarrow -12x \le 2 \overset{\div(-12)}{\Leftrightarrow} x \ge \frac{2}{-12} \Leftrightarrow \boxed{x \ge -\frac{1}{6}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $\boxed{\left[-\frac{1}{6};+\infty\right[}$

b) Résolvons dans ℝ l'inéquation :

$$1<\frac{4x+1}{7}-2<3 \overset{\times 7}{\Leftrightarrow} \boxed{7\times}\,1<\boxed{\cancel{7}\times}\frac{4x+1}{\cancel{7}}-\boxed{7\times}\,2<\boxed{7\times}\,3$$

$$\Leftrightarrow 7<(4x+1)-14<21 \Leftrightarrow 7<4x-13<21$$

$$\overset{+13}{\Leftrightarrow} 20<4x<34 \overset{\div 4}{\Leftrightarrow} \underbrace{\frac{20}{4}}_{5}<x<\underbrace{\frac{34}{4}}_{8,5}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $\boxed{]5;8,5[}$.

Croisements d'intervalles

Le contexte

Un exercice sur les intervalles et leurs intersections.

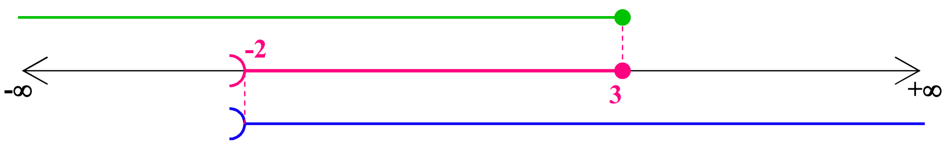
L'énoncé

Exprimer sous la forme d'un intervalle ou d'un ensemble simple les intersections suivantes.

a) $]-\infty;3]\cap]-2;+\infty[$ b) $]3;+\infty[\cap[5;8]$ c) $]-\infty;1]\cap]1;+\infty[$

Le corrigé

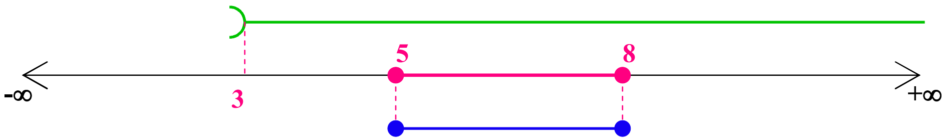
a) Graphiquement, la situation de l'intersection $]-\infty;3]\cap]-2;+\infty[$ est la suivante :



Les deux intervalles se chevauchent entre -2 et 3. Nous déduisons du graphique :

$$]-\infty;3]\cap]-2;+\infty[=\boxed{]-2;3]}$$

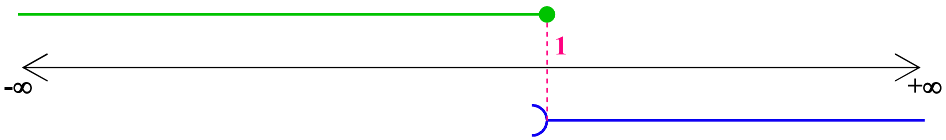
b) Graphiquement, la situation de l'intersection $]3;+\infty[\cap[5;8]$ est la suivante :



Le second intervalle est inclus dans le premier. Par conséquent :

$$]3;+\infty[\cap[5;8]=\boxed{[5;8]}$$

c) Graphiquement, la situation de l'intersection $]-\infty;1]\cap]1;+\infty[$ est la suivante :



Si 1 appartient au premier intervalle, il est exclu du second. Par conséquent :

$$]-\infty;1]\cap]1;+\infty[=\boxed{\varnothing}$$

L'intersection est vide.

Second degré...ou de force aussi !

Le contexte

Un exercice classique de développements et de factorisation de formes du second degré avec en guest star la forme canonique !

L'énoncé

a) Développer l'expression suivante :

$$A(x)=(4x-2)^2-(2x-1)\times(8x+3)$$

b) Factoriser l'expression :

$$B(x)=(x+1)\times(7x+2)+3x+3$$

Indication : on pourra rechercher la présence d'un facteur commun.

c) Factoriser l'expression :

$$C(x)=x^2+8x-33$$

Le corrigé

a) Développons l'expression $A(x)$.

$$A(x)=\overbrace{\left[(4x-2)^2\right]-\left[(2x-1)\times(8x+3)\right]}^{\text{Les crochets de la prudence...}}$$

Une identité remarquable et un double développement. Rien de bien difficile !

$$=\left[(4x)^2-2\times4x\times2+2^2\right]-\left[2x\times8x+2x\times3-1\times8x-1\times3\right]$$

$$=\left[16x^2-16x+4\right]-\left[16x^2+6x-8x-3\right]$$

$$=\cancel{16x^2}-16x+4-\cancel{16x^2}+2x+3=-14.x+7=\underline{7-14x}$$

b) Le facteur commun en question est soit $x+1$, soit $7x+2$.

$$B(x)=(x+1)\times(7x+2)+\overbrace{3x+3}=(x+1)\times(7x+2)+\overbrace{3\times(x+1)}$$

$$=\boxed{(x+1)}\times(7x+2)+3\times\boxed{(x+1)}=\boxed{(x+1)}\times\left[(7x+2)+3\right]=\underline{(x+1).(7x+5)}$$

On met le facteur commun...en commun !

c) La méthode permettant de factoriser à coup sûr une forme développée de degré 2 est celle de la forme canonique. Appliquons-la à l'expression $C(x)$!

$$C(x)=\underbrace{x^2+2\times x\times4}_{\text{Début de cette...}}-33=\underbrace{(x+4)^2-16}_{\text{...identité remarquable}}-33=(x+4)^2-49$$

$$=\underbrace{(x+4)^2-7^2}_{a^2-b^2}=\underbrace{\left[(x+4)-7\right]}_{(a-b)}\times\underbrace{\left[(x+4)+7\right]}_{(a+b)}=\underline{(x-3)\times(x+11)}$$

les solutions volatiles

Le contexte

Il s'agit de résoudre trois inéquations produits ou du second degré en factorisant d'abord (éventuellement avec la forme canonique), puis en dressant le tableau de signe de la forme factorisée. Du grand classique !

L'énoncé

Résoudre dans ℝ les trois inéquations suivantes :

$$(2x+1).(1-x).(-2x+4)\leq 0 \qquad (3x+2)^2 \geq (5x+7)^2 \qquad x^2 < 24-10x$$

Le corrigé

a) Résoudre la première inéquation, c'est savoir quand le produit $(2x+1)(1-x)(-2x+4)$ est négatif ou nul. Avant toutes choses, examinons les facteurs le composant :

- ♥ $\boxed{2x+1}$: le coefficient directeur 2 est positif.
  $2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-1/2$
- ♥ $\boxed{-x+1}$: le coefficient directeur -1 est négatif.
  $-x+1=0 \Leftrightarrow -x=-1 \Leftrightarrow x=1$
- ♥ $\boxed{-2x+4}$: le coefficient directeur -2 est négatif.
  $-2x+4=0 \Leftrightarrow -2x=-4 \Leftrightarrow x=2$

Le tableau de signe de ce produit est le suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		2		$+\infty$
$2.x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$-2.x+4$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est négatif ou nul avant $-0,5$, puis entre 1 et 2. Nous en concluons :

$$S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[1;2]$$

b) Pour résoudre la seconde inéquation, nous devons faire en sorte d'avoir à nous prononcer sur le signe d'un produit. Bref, nous devons factoriser !

$$(3x+2)^2 \geq (5x+7)^2 \Leftrightarrow \underbrace{(3x+2)^2-(5x+7)^2}_{a^2-b^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[(3x+2)-(5x+7)\right]}_{(a-b)}\times\underbrace{\left[(3x+2)+(5x+7)\right]}_{(a+b)}\geq 0$$

Quand ce produit est-il positif ou nul ?.

$$\Leftrightarrow (3x+2-5x-7)\times(3x+2+5x+7)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (-2x-5)\times(8x+9)\geq 0$$

Examinons les facteurs composant ce dernier produit :

- ♥ $\boxed{-2x-5}$: le coefficient directeur -2 est négatif.
  $-2x-5=0 \Leftrightarrow -2x=5 \Leftrightarrow x=-5/2=-2,5$
- ♥ $\boxed{8x+9}$: le coefficient directeur 8 est positif.
  $8x+9=0 \Leftrightarrow 8x=-9 \Leftrightarrow x=-9/8$

Le tableau de signe de leur produit est le suivant :

x	$-\infty$		$-5/2$		$-9/8$		$+\infty$
$-2.x-5$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$8.x+9$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Leur produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit est positif ou nul entre $-5/2$ et $-9/8$. Par conséquent :

$$S=\left[-\frac{5}{2};-\frac{9}{8}\right]$$

c) A l'instar de ce qui a été fait lors l'inéquation précédente, nous allons chercher à pouvoir nous prononcer sur le signe d'un produit. Encore une fois, nous allons factoriser !

$$x^2<24-10x \Leftrightarrow x^2+10x-24<0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2+2\times x\times 5}_{\text{Début de cette...}}-24<0 \Leftrightarrow \underbrace{(x+5)^2-25}_{\text{...identité remarquée}}\;-24<0$$

Quand ce produit est-il négatif ?

$$\Leftrightarrow (x+5)^2-49<0 \Leftrightarrow \underbrace{(x+5)^2-7^2}_{a^2-b^2}<0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-2)}_{(a-b)}\times\underbrace{(x+12)}_{(a+b)}<0$$

Examinons les facteurs composant ce dernier produit :

- ♥ $\boxed{x-2}$: le coefficient directeur 1 est positif.

  $x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

- ♥ $\boxed{x+12}$: le coefficient directeur 1 est positif.

  $x+12=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-12$

Le tableau de signe de ce produit est le suivant :

x	$-\infty$		-12		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+12$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est négatif strictement entre -12 et 2 non compris. Nous en déduisons :

$$S =]-12;2[$$

Le bon ensemble à faire tout seul

Le contexte

Dans cet exercice, il s'agit de résoudre les inéquations proposées de manière graphique en recourant aux courbes des fonctions de référence : carré, racine carrée, cube et inverse.

L'énoncé

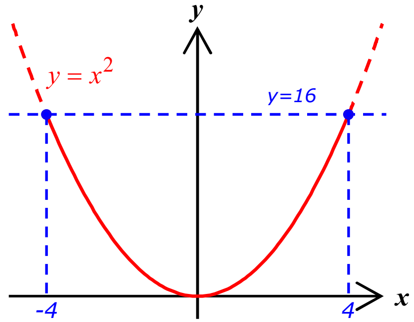
Donner les ensembles de solutions des inéquations suivantes. Aucune justification n'est demandée.

$$x^2 \leq 16 \qquad \sqrt{x} > 3 \qquad x^3 < 27 \qquad \frac{1}{x} < 3$$

Le corrigé

Ces quatre équations se résolvent en s'appuyant les courbes des fonctions carré, racine carré, cube et inverse.

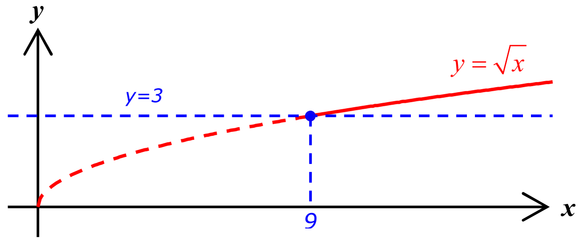
Pour résoudre l'inéquation $x^2 \leq 16$, il faut considérer les points de la courbe représentant la fonction carré dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 16.



Leurs abscisses sont comprises entre -4 et 4 inclus. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = [-4;4]$$

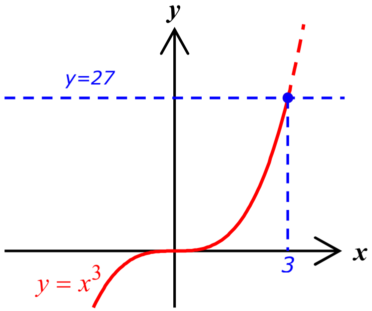
Pour résoudre l'inéquation $\sqrt{x} > 3$, nous considérons tous les points de la courbe de la fonction racine carrée dont l'ordonnée est strictement supérieure à 3.



Leurs abscisses sont strictement supérieures à 9. Ainsi :

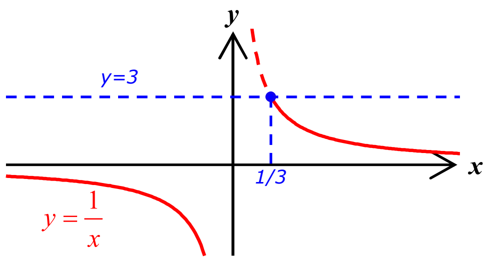
$$S = \left]9;+\infty\right[$$

Pour résoudre l'inéquation $x^3 < 27$, nous considérerons les points de la courbe représentant la fonction cube dont l'ordonnée est strictement inférieure à 27.



Leurs abscisses sont strictement inférieures à 3. Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S = \left]-\infty;3\right[$$



Pour résoudre l'inéquation $\frac{1}{x} < 3$, nous considérons tous les points de la courbe représentant la fonction inverse dont l'ordonnée est strictement inférieure à 3.

Par conséquent :

$$S = \left]-\infty;0\right[\cup \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$$

Par le nombre et par la courbe

Le contexte

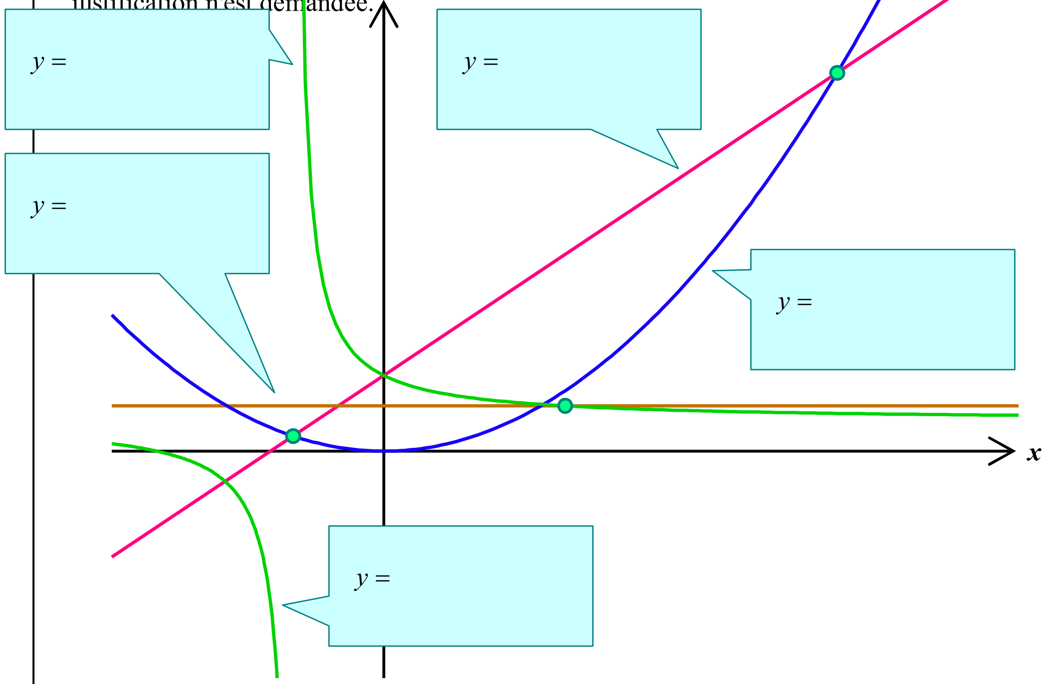
Dans cet exercice, il s'agit d'abord de résoudre des inéquations quotients au moyen de tableaux de signes, puis d'en extirper une signification graphique. Cette dernière phase requiert un peu de culture car il s'agit de lier les courbes aux fonctions.

L'énoncé

a) Résoudre par le calcul les deux inéquations suivantes. On conclura chacune d'elles en donnant l'ensemble des solutions.

1. $\frac{2x+5}{x+1} \leq 3$ ***2.*** $x^2 \geq 4x+5$

b) La figure ci-dessous illustre les deux inéquations ci-dessus. Le repère n'est pas orthonormé.
Dans chacune des bulles, compléter les équations de chacune des courbes. Aucune justification n'est demandée.



Le corrigé

a.1) Pour résoudre la première inéquation, nous allons faire en sortes d'avoir à nous prononcer sur le signe d'une fraction.

$$\frac{2x+5}{x+1}\leq 3 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x+1}-3\leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+5-3\times(x+1)}{x+1}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+5-3x-3}{x+1}\leq 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{-x+2}{x+1}\leq 0}$$

Quand ce quotient est-il négatif ou nul ?

Le numérateur $-x+2$ s'annule en 2 et son coefficient directeur -1 est négatif.
Le dénominateur $x+1$ s'annule en -1 et son coefficient directeur 1 est positif.
Par conséquent, le tableau de signe de leur quotient est :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Leur quotient		$-$	‖	$+$	0	$-$	

<u>Conclusion :</u> le quotient est négatif ou nul avant -1 exclu et après 2 inclus. Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\mathrm{S}=\left]-\infty;-1\right[\cup\left[2;+\infty\right[$$

a.2) Pour résoudre cette seconde inéquation, nous allons chercher à pouvoir nous prononcer sur le signe d'un produit. Noua allons factoriser via la forme canonique...

$$x^2\geq 4x+5 \Leftrightarrow x^2-4x-5\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{x^2-2\times 2\times x}^{\text{Début de cette...}}-5\geq 0 \Leftrightarrow \overbrace{(x-2)^2-4}^{\text{...identité remarquable}}\quad -5\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-9\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-2)^2-3^2}_{a^2-b^2}\geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x+1)}_{(a+b)}\times\underbrace{(x-5)}_{(a-b)}\geq 0$$

Quand ce produit est-il positif ou nul ?

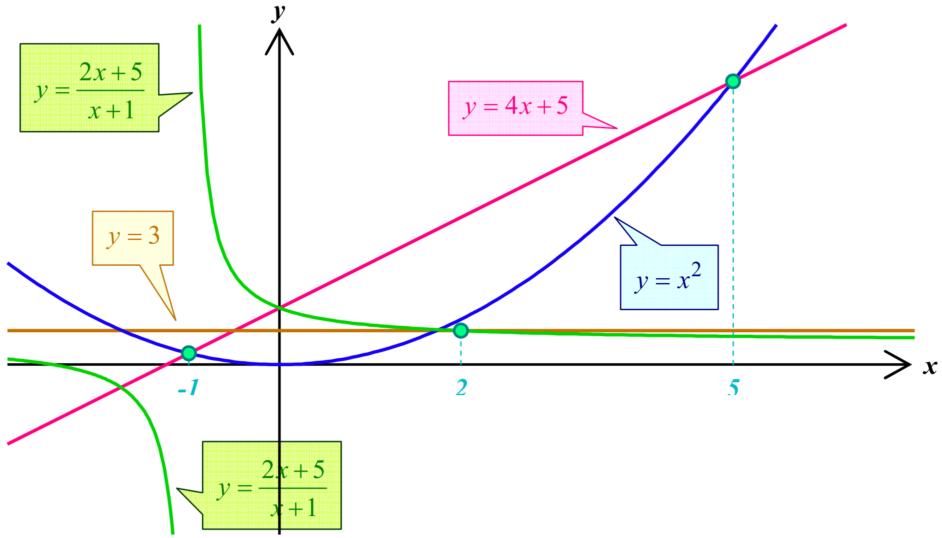
Les deux facteurs $x+1$ et $x-5$ ont tous deux pour coefficients directeurs 1 et ils s'annulent respectivement en -1 et 5. Le tableau de signe de leur quotient est le suivant :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[5;+\infty\right[$$

b) Ci-dessous, on a donné à chaque courbe son équation.



Salades de systèmes

Le contexte

Cet exercice est un classique des systèmes linéaires 2×2. Il commence par la résolution d'un système...particulier, puis se termine par un petit problème qui requiert un système.

L'énoncé

a) Résoudre le système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y :

$$(S)\begin{cases}8x+20y=13\\6x+15y=10\end{cases}$$

b) Madame *Laitue* revient tout juste du marché où elle a acheté chez son maraîcher préféré 700 grammes de cerises et 600 grammes de fraises pour 2,50€.
Chez ce même maraîcher, madame *Scarole* a acheté 750 grammes de cerises et un kilogramme de fraises pour 3,50€.
Toujours chez ce même maraîcher, madame *Batavia* a acheté pour 1 kg de cerises et 400 grammes de fraises. Pour combien en a-t-elle eu au total ?

Le corrigé

a) Examinons les rapports des coefficients de deux équations du système proposé :

$$\text{Coeff. en } x = \frac{8}{6} = \boxed{\frac{4}{3}} \qquad \text{Coeff. en } y = \frac{20}{15} = \boxed{\frac{4}{3}} \qquad \text{Coeff. constants} = \frac{13}{10} = \boxed{1,3 \neq \frac{4}{3}}$$

<u>Conclusion :</u> comme seuls ses coefficients en x et y sont proportionnels, le système (S) n'admet aucune solution.

b) On appelle :

- x le prix exprimé en euros d'un kilogramme de cerises.
- y le prix exprimé en euros d'un kilogramme de fraises.

L'énoncé nous apprend :

- Madame *Laitue* achète 0,7 kg de cerises et 0,6 kg de fraises pour 2,50€.

  On en déduit l'équation : $\underbrace{0,7\times x}_{\text{Coût cerises}}+\underbrace{0,6\times y}_{\text{Coût fraises}}=2,5 \xrightarrow{\times 10} 7x+6y=25$ ***(1)***

- Madame *Scarole* achète 0,75 kg de cerises et 1 kg de fraises pour 3,50€.

  On en déduit l'équation : $\underbrace{0,75\times x}_{\text{Coût cerises}}+\underbrace{1\times y}_{\text{Coût fraises}}=3,5 \xrightarrow{\times 4} 3x+4y=14$ ***(2)***

Il s'agit de prix...

Les décimaux positifs x et y sont les solutions du système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases}7x+6y=25 & \textbf{(1)}\\3x+4y=14 & \textbf{(2)}\end{cases}$$

Que nous allons résoudre par un double coup de combinaisons linéaires.

Pour obtenir x, multiplions l'équation ***(1)*** par 2 et l'équation ***(2)*** par 3 de façon à éliminer y par soustraction.

$$\begin{array}{lcr}\textbf{(1)} & \xrightarrow{\times 2} & 14x+12y=50\\ \textbf{(2)} & \xrightarrow{\times 3} & 9x+12y=42\\ \hline & & 5x=8\end{array} \ominus$$

Il vient alors :

$$x=\frac{8}{5}=\boxed{1,60€/\text{kg}}$$

Pour déterminer y, nous multiplions l'équation ***(1)*** par 3 et l'équation ***(2)*** par 7, puis nous les soustrairons pour éliminer x.

$$\begin{array}{lcr}\textbf{(1)} & \xrightarrow{\times 3} & 21x+18y=75\\ \textbf{(2)} & \xrightarrow{\times 7} & 21x+28y=98\\ \hline & & -10y=-23\end{array} \ominus$$

Nous en déduisons :

$$y=\frac{-23}{-10}=\frac{23}{10}=\boxed{2,30€/\text{kg}}$$

<u>Conclusion :</u> Un kilogramme de cerises coûte 1,40€ et un kilogramme de fraises 2,30€.
Madame *Batavia* achetant 1 kg de cerises et 0,4 de fraises paie :

$$\underbrace{1\times 1,40}_{\text{Coût cerises}}+\underbrace{0,4\times 2,30}_{\text{Coût fraises}}=1,40+0,92=\boxed{2,32€}$$

Les fonctions

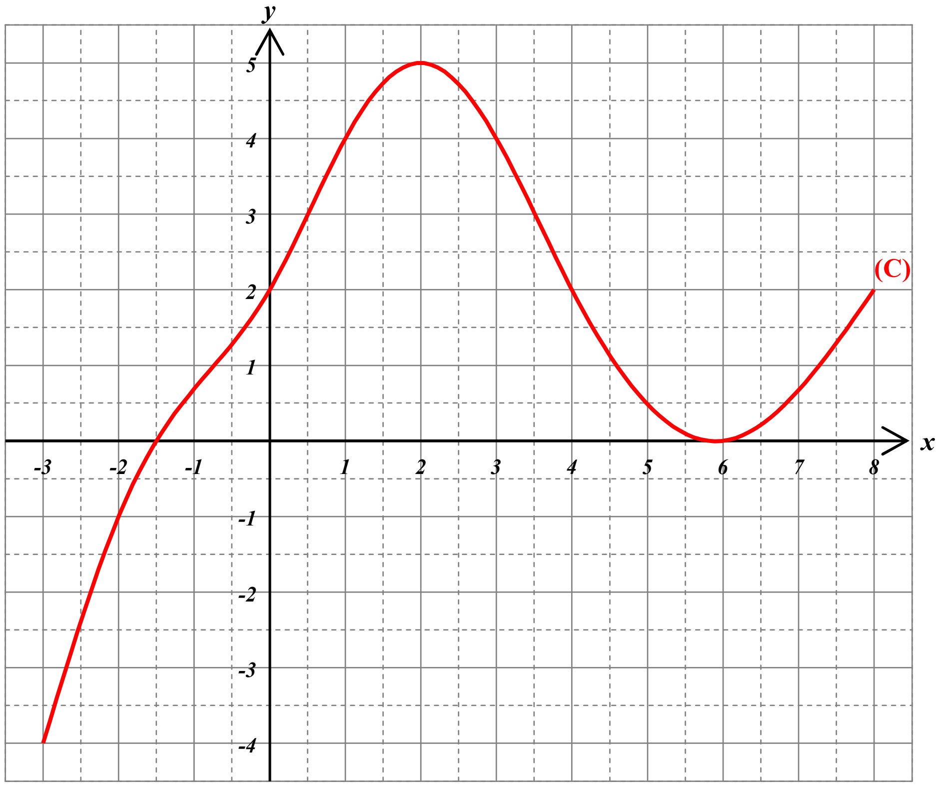
Les saines lectures graphiques

Le contexte

Ce premier exercice sur les fonctions est une lecture et exploitation graphique de la courbe représentative d'une fonction. Du classique des plus faciles !

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3;8]$. Sa courbe représentative (C) est tracée sur le graphique ci-dessous.



En utilisant le graphique ci-dessus et avec toute la précision permise par celui-ci, on répondra aux questions suivantes directement sur la feuille.

a) Compléter les phrases suivantes :

L'image de 2 par la fonction f est ....

Le ou les antécédents de 2 par f sont : ....

Le maximum de f sur l'intervalle $[-3;8]$ est........ Il est atteint en $x =$ ....

Le minimum de f sur l'intervalle $[0;8]$ est........ Il est atteint en $x =$ ....

b) Résoudre les inéquations suivantes :

$f(x) \leq -1$	$2 < f(x) < 4$
S = ...	S = ...

c) Compléter le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition se trouvant ci-dessous :

x	
f	

d) Compléter le tableau de signe de $f(x)$ se trouvant ci-dessous.

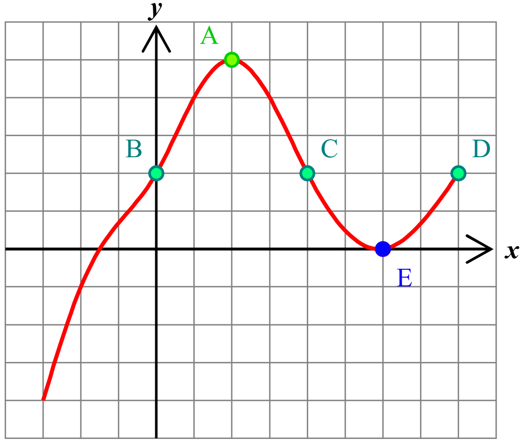
x	
$f(x)$	

Le corrigé

D'abord, rappelons que tout point de la courbe représentative (C) a des coordonnées de la forme $(x; f(x))$. C'est-à-dire que l'ordonnée est l'image de l'abscisse.

a) Le point A qui a pour abscisse 2 a pour ordonnée 5. Par conséquent : $f(2) = 5$.

➲ Trois points de la courbe (C) ont pour ordonnée 2 : B d'abscisse 0 ; C d'abscisse 4 et D d'abscisse 8.
Donc 2 a trois antécédents par la fonction *f*. Il s'agit de 0 ; 4 et 8.

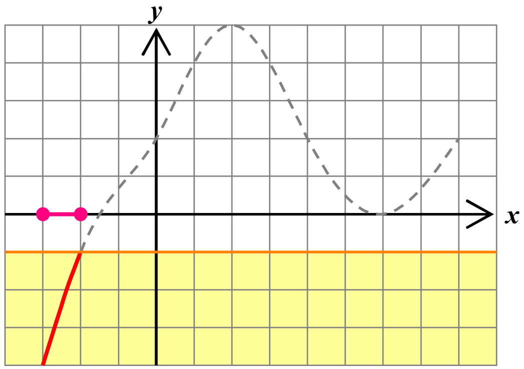


➲ Le point le plus haut de la courbe (C) sur l'intervalle $[-3;8]$ a pour coordonnées $(2;5)$. Il s'agit de A.
Le maximum de la fonction *f* sur $[-3;8]$ est 5. Il est atteint en $x = 2$.

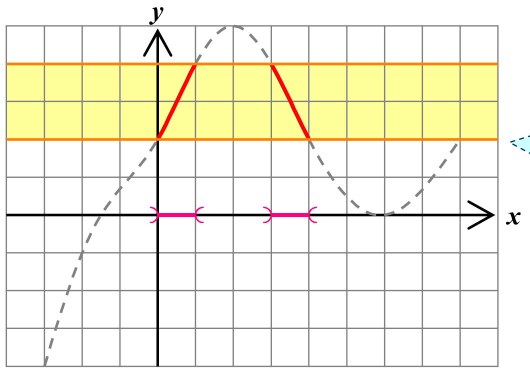
➲ Le point le plus bas de la courbe (C) sur l'intervalle $[0;8]$ a pour coordonnées $(6;0)$. Sur la figure, il s'agit du point E.
Donc le minimum de la fonction *f* sur l'intervalle $[0;8]$ est 0. Il est atteint en $x = 6$.

b) Pour résoudre l'inéquation $f(x) \leq -1$, il faut considérer tous les points de la courbe (C) dont l'ordonnée est inférieure ou égale à -1.
Les abscisses de ces points appartiennent à l'intervalle $[-3;-2]$.
C'est l'ensemble des solutions de l'inéquation.

$$S = [-3;2]$$



Pour résoudre l'inéquation $2 < f(x) < 4$, il faut considérer tous les points de (C) dont l'ordonnée est strictement comprise entre 2 et 4. Ils constituent deux brins de courbe.



Les bornes 0, 1, 3 et 4 sont exclues car f(x) ne peut n'être égale ni à 2, ni à 4.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est la réunion $]0;1[\cup]3;4[$

c) D'après la courbe (C), le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	-3		2		6		8
f			5				2
		↗		↘		↗	
	-4				0		

d) Le signe de $f(x)$ est donné par la position de la courbe (C) vis-à-vis de l'axe des abscisses (Ox). En conséquence, le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	-3		$-1,5$		6		8
f(x)		–	0	+	0	+	

Echappées affines

Le contexte

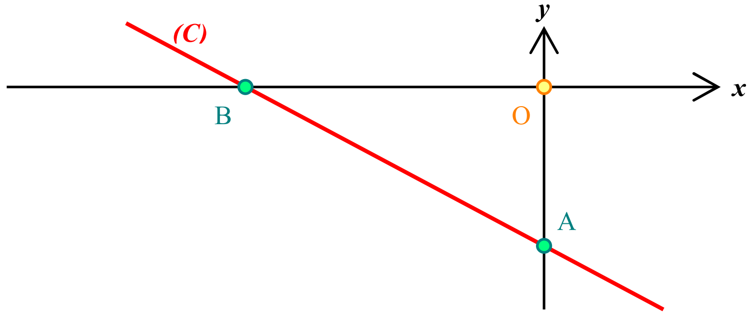
Cet exercice aborde toutes les compétences de base attendues sur les fonctions affines : calculs d'images et d'antécédents et leurs traductions graphiques ; sens de variation et tableau de signe d'une fonction affine.

L'énoncé

La fonction affine *f* est définie pour tout réel *x* par :

$$f(x) = -3x - 5$$

Sa courbe représentative *(C)* a été tracée ci-dessous dans un repère <u>non orthonormé</u>.



a) Calculer les images de 0 et -2 par la fonction *f*.

b) Déterminer les antécédents de 0 et de 7 par la fonction *f*.

c) En déduire les coordonnées des points A et B.

d) Etablir le sens de variation de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Le corrigé

a) Calculons les images de 0 et -2 par la fonction *f*.

$$f(0) = -3\times 0 - 5 = 0 - 5 = -5 \qquad f(-2) = -3\times(-2) - 5 = 6 - 5 = 1$$

b) Pour déterminer les antécédents de 0 par la fonction *f*, nous devons résoudre l'équation :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x - 5 = 0 \Leftrightarrow -3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

<u>Conclusion :</u> 0 a un seul antécédent par la fonction *f*. Il s'agit de $-5/3$.

➲ Pour connaître les antécédents de 7 par la fonction *f*, résolvons l'équation :

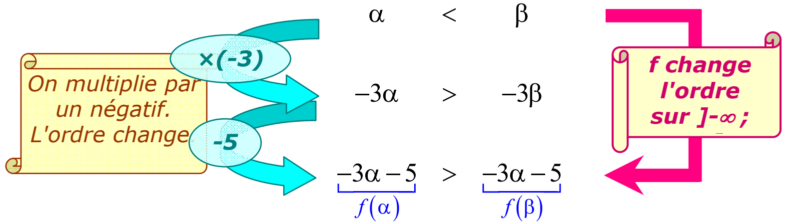
$$f(x) = 7 \Leftrightarrow -3x - 5 = 7 \Leftrightarrow -3x = 7 + 5 \Leftrightarrow -3x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{-3} = -4$$

<u>Conclusion :</u> 7 a pour seul antécédent -4 par la fonction *f*.

c) Le point A appartenant à l'axe des ordonnées (Oy), son ordonnée est nulle.
Comme A appartient aussi à la courbe *(C)*, alors son abscisse est l'antécédent par la fonction *f* de son ordonnée 0. Donc le point A a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{3};0\right)$.

➲ Le point B étant sur l'axe des abscisses (Ox), son abscisse est nulle.
De plus, comme B appartient à la courbe *(C)*, alors son ordonnée est l'image par la fonction *f* de son abscisse 0. Donc B a pour coordonnées $(0;-5)$

d) Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.
Comment leurs images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont-elles rangées ?



<u>Conclusion :</u> la fonction changeant l'ordre, *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Le tableau de variation de *f* est le suivant :

x	$-\infty$	$-5/3$	$+\infty$
f	↘	0	↘

Nous en déduisons que le tableau de signe de $f(x)$ est :

x	$-\infty$		$-5/3$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

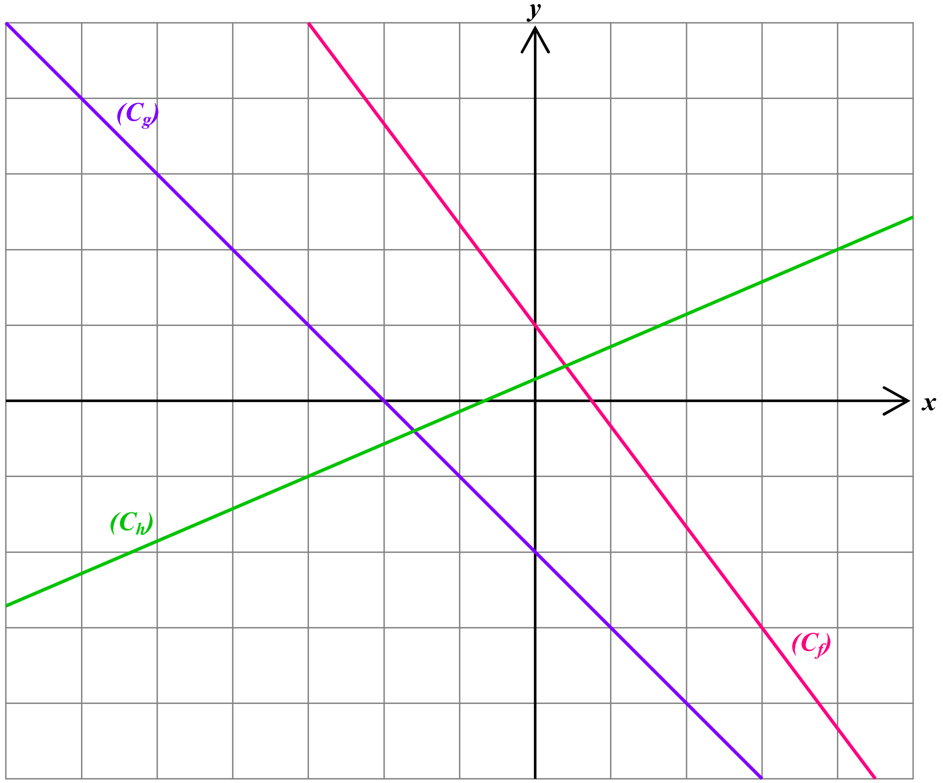
Les courbes rectilignes

Le contexte

Dans cet exercice, il s'agit juste de déterminer des expressions de fonctions d'après leurs courbes. Ces courbes étant des droites, les fonctions sont affines...c'est plus facile ainsi !

L'énoncé

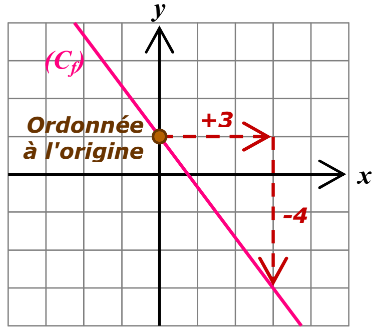
Sur le graphique ci-dessous, les droites $\left(C_f\right)$, $\left(C_g\right)$ et $\left(C_h\right)$ sont les courbes représentatives des fonctions *f*, *g* et *h*.
Déterminer les expressions de ces trois fonctions *f*, *g* et *h*.



Le corrigé

a) Sa courbe représentative étant une droite, la fonction *f* est affine, donc de la forme :

$$f(x) = a \times x + b$$

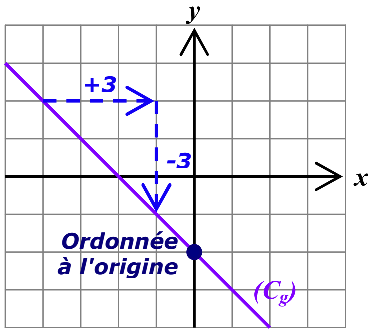


- ♥ Son coefficient directeur est :

$$a = \frac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}} = \frac{-4}{+3} = -\frac{4}{3}$$

- ♥ Son ordonnée à l'origine est $b = 1$

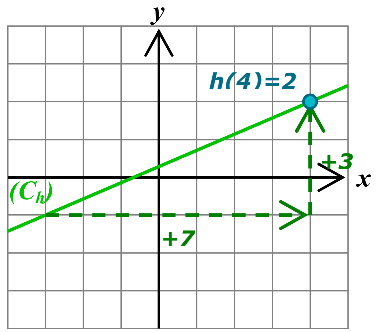
<u>Conclusion :</u> $f(x) = -\frac{4}{3}x + 1$



b) La fonction *g* est affine pour les mêmes raisons que *f*.

- ♥ Son coefficient directeur est $a = \frac{-3}{+3} = -1$
- ♥ Son ordonnée à l'origine est $b = -2$

<u>Conclusion :</u> $g(x) = -x - 2$



c) A l'instar de ses deux prédécesseurs, *h* est affine.

Son coefficient directeur est $a = \frac{+3}{+7} = \frac{3}{7}$.

Donc une écriture de *h* est $h(x) = \frac{3}{7}x + b$

Par contre, le graphique ne permet pas de lire précisément son ordonnée à l'origine *b*. Cependant :

$$h(4) = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{7} \times 4 + b = 2 \Leftrightarrow \frac{12}{7} + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - \frac{12}{7} = \frac{14}{7} - \frac{12}{7} = \frac{2}{7}$$

<u>Conclusion :</u> $h(x) = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7} = \frac{3x+2}{7}$

La racine du carré

Le contexte

Le but de cet exercice très classique est d'établir le sens de variation d'une fonction à l'aide d'un enchaînement d'inégalités et en s'appuyant sur les variations de deux fonctions de référence : carré et racine carrée.

L'énoncé

La fonction *f* est définie par :

$$f(x)=\sqrt{8-2x^2}$$

Déterminer le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]-2;0[$. On justifiera sa réponse par un enchaînement d'inégalités

Le corrigé

Soient α et β deux réels de l'intervalle $]-\infty;0[$ tels que $\alpha<\beta$.

Comment leurs images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont-elles rangées ?

La fonction carré est décroissante sur]-∞ ; 0]

La fonction racine est croissante sur [0 ; +∞[

Deux réels négatifs

La fonction f conserve l'ordre sur]-2 ; 0[

$$\begin{array}{lccccccc}
 & -2 & < & \alpha & < & \beta & < & 0 \\
\text{Carré} & 4 & > & \alpha^2 & > & \beta^2 & > & 0 \\
\times(-2) & -8 & < & -2\times\alpha^2 & < & -2\times\beta^2 & < & 0 \\
+8 & 0 & < & 8-2\times\alpha^2 & < & 8-2\times\beta^2 & < & 8 \\
\text{Racine} & 0 & < & \underbrace{\sqrt{8-2\times\alpha^2}}_{f(\alpha)} & < & \underbrace{\sqrt{8-2\times\beta^2}}_{f(\beta)} & < & \sqrt{8}
\end{array}$$

Conclusion : la fonction *f* conservant l'ordre sur $]-2;0[$, *f* est croissante sur l'intervalle.

Homo graphicus functiona

Le contexte

Un exercice est une étude complète d'une fonction homographique : ensemble de définition, signe, image et antécédents et décomposition pour variation.

L'énoncé

La fonction *f* est définie par :

$$f(x)=\frac{-3x+1}{x-2}$$

a) Donner l'ensemble de définition D_f de la fonction *f*.

b) Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$f(x)\geq 0$$

c) Calculer l'image de 1 par la fonction *f*.

Déterminer les antécédents de -3 par la fonction *f*.

d) Déterminer deux entiers (négatifs ou positifs) *a* et *b* tels que pour tout réel $x\in D_f$, on ait :

$$f(x)=a+\frac{b}{x-2}$$

e) Déterminer le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]2;+\infty[$. On justifiera sa réponse par un enchaînement d'inégalités.

Le corrigé

a) La fonction $f(x)$ est le quotient de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Par conséquent :

Le quotient $f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $x-2$ est non nul $\Leftrightarrow$ $x\neq 2$

Conclusion : à l'exception de 2, tous les réels ont une image par *f*. Autrement exprimé :

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$$

b) Examinons les deux «facteurs» affines composant le quotient $f(x)$.

♥ Le numérateur $-3x+1$ a pour coefficient directeur le <u>négatif</u> -3.

Déterminons où il s'annule : $-3x+1=0 \Leftrightarrow -3x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

♥ Le dénominateur $x-2$ a pour coefficient directeur le <u>positif</u> 1 et il s'annule en 2.

Nous en déduisons que le tableau de signe de la fonction *f* est le suivant :

x	$-\infty$		$1/3$		2		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

➲ D'après son tableau de variation, le quotient $f(x)$ est positif ou nul entre $\frac{1}{3}$ et 2. Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\geq 0$ est :

$$S=\left[\frac{1}{3};2\right[$$

c) Calculons l'image de 1 par la fonction *f* : $f(1)=\frac{-3\times 1+1}{1-2}=\frac{-3+1}{-1}=\frac{-2}{-1}=2$

➲ Pour déterminer les antécédents de -3 par la fonction *f*, nous devons résoudre dans l'ensemble $D_f=\mathbb{R}\backslash\{2\}$ l'équation :

$$f(x)=-3 \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{x-2}=-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x+1}{\cancel{x-2}}\times\left(\cancel{x-2}\right)=-3\times(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-3x}+1=\cancel{-3x}+6 \Leftrightarrow 1=6$$

Travaillant sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, on peut multiplier par le facteur x-2 qui y est non nul. Les solutions sont conservées.

<u>Conclusion :</u> 1 étant toujours différent de 6, l'équation $f(x)=-3$ n'a pas de solution.

Donc -3 n'a pas d'antécédent par la fonction *f*.

d) Deux méthodes permettent de décomposer la fonction rationnelle $f(x)$.

➔ ***On peut chercher à identifier les coefficients a et b...***

On veut écrire le quotient $f(x)$ sous la forme :

$$f(x)=a+\frac{b}{x-2}=\frac{a\times(x-2)}{x-2}+\frac{b}{x-2}=\frac{ax-2a}{x-2}+\frac{b}{x-2}$$

$$\frac{\boxed{-3}x+\boxed{1}}{x-2}=\frac{\boxed{a}x+\boxed{b-2a}}{x-2}$$

En identifiant les coefficients des numérateurs, nous en déduisons :

En x : $a=-3$

Constants : $b-2a=1 \Leftrightarrow b-2\times(-3)=1 \Leftrightarrow b+6=1 \Leftrightarrow b=1-6=-5$

➔ ***On peut chercher à faire apparaître le dénominateur dans le numérateur...***

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$, nous avons écrire : :

Combien de fois $x-2$?

On fractionne...

$$f(x)=\frac{\boxed{-3x}+1}{x-2}=\frac{\boxed{-3\times(x-2)-6}+1}{x-2}=\frac{-3\times\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}+\frac{-5}{x-2}=-3+\frac{-5}{x-2}$$

<u>Conclusion :</u> nous en déduisons que pour tout réel x distinct de 2, nous avons :

$$f(x)=\frac{-3x+1}{x-2}=-3+\frac{-5}{x-2}$$

e) Soient α et β deux réels de l'intervalle $]2;+\infty[$ tels que $\alpha<\beta$.

Comment leurs images $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont-elles rangées ?

$$2<\alpha<\beta$$

-2

🡻 Deux réels positifs 🡻

$$0<\alpha-2<\beta-2$$

Inverse

La fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[

$$\frac{1}{\alpha-2}>\frac{1}{\beta-2}$$

×(-5)

$$\frac{-5}{\alpha-2}<\frac{-5}{\beta-2}$$

-3

$$\underbrace{-3+\frac{-5}{\alpha-2}}_{f(\alpha)}<\underbrace{-3+\frac{-5}{\beta-2}}_{f(\beta)}$$

La fonction f conserve l'ordre sur]2 ; +∞ [

<u>Conclusion :</u> la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

Géométrie analytique

Petits ronds analytiques

Le contexte

Ce premier problème de géométrie analytique utilise toute la panoplie d'outils au programme de ce domaine à l'exception des équations de droite...ou alors sans le dire !!!

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ où une unité graphique vaut un centimètre. Par défaut, les unités de longueur sont des centimètres.
Dans ce repère, on considère les points :

$A(4;3)$ $B(-2;1)$ $C(2;-2)$ $E(0,8;-5)$

a) On appelle D le point du plan tel que ADBC soit un parallélogramme.
1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point D.
2. Placer le point D sur la figure.

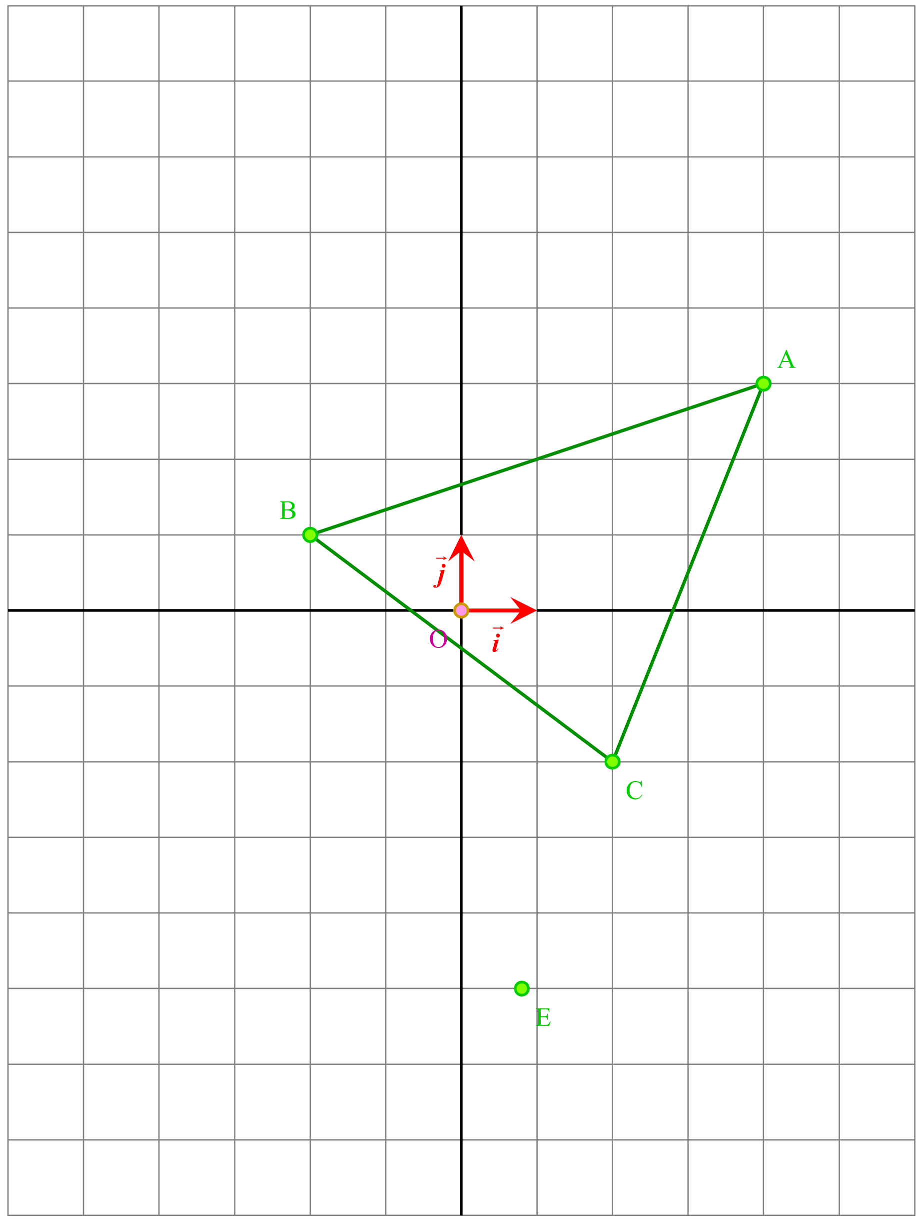
b) Le point E appartient-il à la droite (AC) ? On justifiera sa réponse.

c) Calculer les coordonnées du milieu I du segment [AE].

d) Le point G est défini par la relation vectorielle : $5\times\overrightarrow{AG}+3\times\overrightarrow{BG}=4\times\overrightarrow{AC}$
1. Déterminer les coordonnées du point G.
2. Vérifier que les points B, G et I sont alignés.

e) On appelle F le point de la droite (BC) dont l'ordonnée y_F est nulle.
1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point F.
2. Placer exactement le point F sur la figure.

f) On appelle H le point de coordonnées $\left(4-\sqrt{7};6\right)$.
1. Calculer la distance AH. On vérifiera que cette dernière est entière.
2. En utilisant la question précédente, placer précisément le point H sur la figure. On laissera apparents les traits de construction.
3. Le point H appartient-il au cercle de centre B et de rayon 6 ? On justifiera sa réponse.



g) Le point L vérifie les deux conditions suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \text{L'abscisse du point L est } x_L \text{ égale à } -2 \\ \text{Le point L est équistant de B et C, c'est-à-dire que } BL = CL \end{array} \right.$$

Déterminer l'ordonnée y_L du point L.

Le corrigé

a.1) Déterminons les coordonnées $(x_D ; y_D)$ du point D. Ce dernier vérifie :

$$\text{ADBC parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} x_D - 4 \\ y_D - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{x_D - 4 = -4}^{\text{Abscisses égales}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{y_D - 3 = 3}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$x_D = 0 \qquad\qquad y_D = 6$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point D sont $(0;6)$.

a.2) Le point D peut se placer avec un compas ou plus simplement avec le quadrillage.

b) Toute la question est de savoir si les vecteurs $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -3,2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Pour le déterminer, calculons leur déterminant.

«Arrivée - départ»

$$\det\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} -3,2 & -2 \\ -8 & -5 \end{vmatrix} = (-3,2) \times (-5) - (-8) \times (-2) = 16 - 16 = 0$$

<u>Conclusion :</u> comme leur déterminant est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Par conséquent, les points A, E et C sont alignés.

c) Les coordonnées du point I qui est le milieu du segment [AC] sont données par :

$$x_I = \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{4 + 0,8}{2} = \frac{4,8}{2} = 2,4 \quad \underline{\text{et}} \quad y_I = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{3 + (-5)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

d.1) Déterminons les coordonnées $(x_G ; y_G)$ du point G. Ce dernier est défini par la relation vectorielle :

$$5 \times \overrightarrow{AG} + 3 \times \overrightarrow{BG} = 4 \times \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 5 \times \begin{pmatrix} x_G - 4 \\ y_G - 3 \end{pmatrix} + 3 \times \begin{pmatrix} x_G + 2 \\ y_G - 1 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5x_G - 20 \\ 5y_G - 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_G + 6 \\ 3y_G - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 8x_G - 14 \\ 8y_G - 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{8x_G - 14 = -8}^{\text{Abscisses égales}} \quad \underline{\text{et}} \quad \overbrace{8y_G - 18 = -20}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$8x_G = 6 \qquad\qquad 8y_G = -2$$

$$x_G = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75 \qquad\qquad y_G = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} = -0,25$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point G sont $(0,75;-0,25)$.

d.2) Les vecteurs $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 2,75 \\ -1,25 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} 4,4 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BI}\right) = \begin{vmatrix} 2,75 & 4,4 \\ -1,25 & -2 \end{vmatrix} = 2,75 \times (-2) - (-1,25) \times 4,4 = 5,5 - 5,5 = 0$$

<u>Conclusion :</u> leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires. Donc les points B, G et I sont alignés.

e.1) Les coordonnées du point F sont de la forme $(x_F ; 0)$. De plus :

$$\text{F appartient à la droite (BC)} \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} x_F + 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BC}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_F + 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

La différence des produits diagonaux.

$$\Leftrightarrow (x_F + 2) \times (-3) - (-1) \times 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x_F - 6 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x_F - 2 = 0 \Leftrightarrow -3x_F = 2 \Leftrightarrow x_F = -\frac{2}{3}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point F sont $\left(-\frac{2}{3};0\right)$.

e.2) Pratiquement, le point F est l'intersection de la droite (BC) et de l'axe $(O;\vec{i})$.

f.1) Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} (4-\sqrt{7})-4 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{7} \\ 3 \end{pmatrix}$.

Il vient alors :

$$AH = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\left(-\sqrt{7}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{7+9} = \sqrt{16} = 4$$

f.2) Comme la distance AH est égale à 4, alors le point H appartient au cercle de centre A et de rayon 4 centimètres.
Comme l'ordonnée de H est égale à 6, alors H est aussi un point de la droite horizontale d'équation $y = 6$. .
H est le point d'intersection le plus à gauche de ces deux objets géométriques.

f.3) Pour savoir si le point H appartient au cercle de centre B et de rayon 6 (centimètres), le mieux est encore de calculer la longueur BH [qui devrait être égale à 6].

Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} (4-\sqrt{7})-(-2) \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-\sqrt{7} \\ 5 \end{pmatrix}$.

Dont une valeur approchée est 6,021

Il vient alors :

$$BH = \sqrt{\left(6-\sqrt{7}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{36-12\sqrt{7}+7+25} = \sqrt{68-12\sqrt{7}}$$

<u>Conclusion :</u> comme la distance BH est différente de 6, alors le point H n'appartient pas au cercle de centre B et de rayon 6 centimètres. Même si sur la figure, il semblait que oui...

g) Les coordonnées du point L sont de la forme $(-2; y_L)$.

Les normes des vecteurs $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix} 0 \\ y_L - 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CL}\begin{pmatrix} -4 \\ y_L + 2 \end{pmatrix}$ sont égales. Autrement dit :

$$BL = CL \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + (y_L - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (y_L + 2)^2}$$

$$\Rightarrow 0 + (y_L - 1)^2 = 16 + (y_L + 2)^2$$

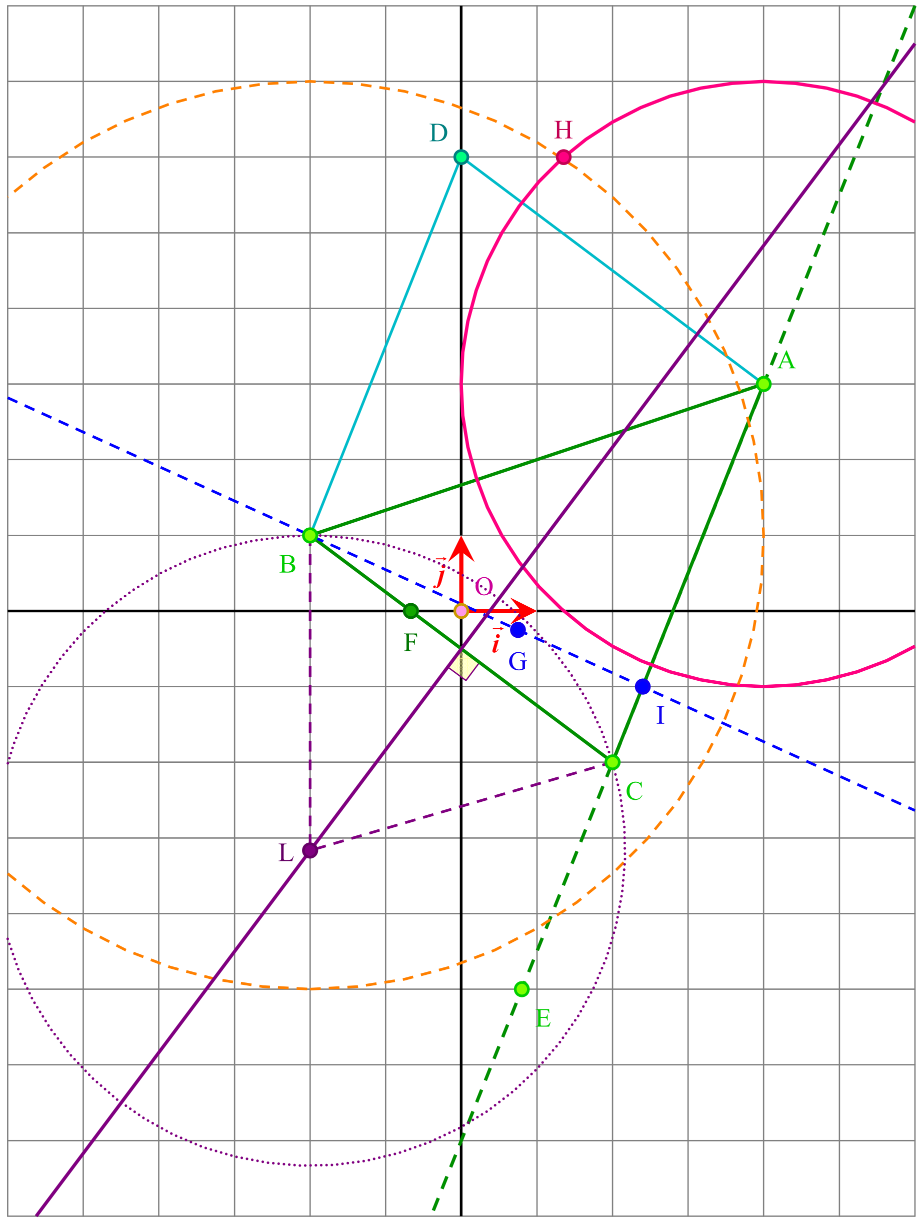
On élève tout au carré pour éliminer les racines.

$$\Rightarrow 0 + \cancel{y_L^2} - 2y_L + 1 = 16 + \cancel{y_L^2} + 4y_L + 4$$

$$\Rightarrow -2y_L + 1 = 4y_L + 20 \Rightarrow -6y_L = 19 \Rightarrow y_L = -\frac{19}{6}$$

<u>Conclusion :</u> le point L a pour coordonnées $\left(-2; -\frac{19}{6}\right)$.

Etant équidistant des points B et C, M appartient à la médiatrice du segment [BC].



Euler analytique !

Le contexte

Une nouvelle fois et comme l'an passé, il s'agit de prouver dans ce gros exercice et avec les outils de la géométrie analytique que, dans un triangle, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel on a placé les points :

$A(-2;-2)$ $B(6;0)$ $C(1;5)$ $D(1,6;0,6)$ $E(-1;3)$

a) D'abord, on s'intéresse au point D par rapport au triangle ABC.

1. Calculer la distance AD.
2. Démontrer que le point D est équidistant des points A, B et C.
3. De quelles droites particulières du triangle ABC, le point D est-il l'intersection ?

b) On appelle I le milieu du segment [AC].

1. Calculer les coordonnées du point I.
2. Démontrer que les droites (DI) et (BE) sont parallèles.
3. Qu'est la droite (BE) par rapport au triangle ABC ? On justifiera sa réponse.
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BE).

c) On appelle Δ la droite d'équation $4x+y-9=0$.

1. L'un des trois sommets du triangle ABC appartient à la droite Δ ? Lequel est-ce ? On justifiera sa réponse.
2. Tracer la droite Δ sur la figure ci-contre.
3. A l'instar du déterminant, il existe un test d'orthogonalité pour les vecteurs :

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux / perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $x\times x'+y\times y'=0$

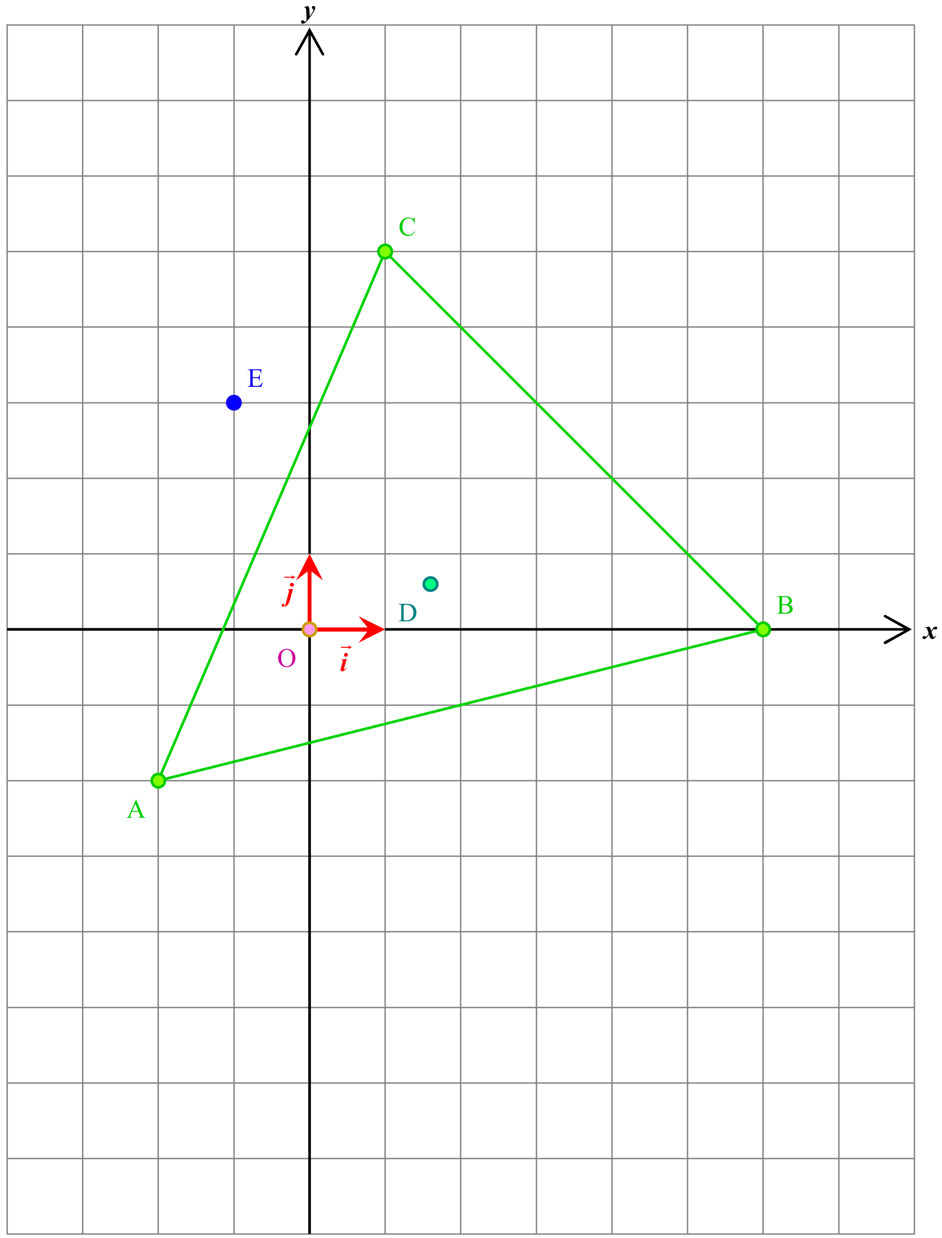
En utilisant ce test, démontrer que la droite Δ est une hauteur du triangle ABC.

d) On appelle F le point d'intersection des droites (BE) et Δ.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système linéaire de deux équations à deux inconnues.

$$(S)\begin{cases}3x+7y=18 & \textbf{\textit{(1)}}\\ 4x+y=9 & \textbf{\textit{(2)}}\end{cases}$$

2. En déduire les coordonnées du point F.



e) Déterminer les coordonnées du point G défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{o}$$

f) Démontrer que les points D, F et G sont alignés.

Le corrigé

a.1) Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1,6-(-2)\\0,6-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,6\\2,6\end{pmatrix}$. Il vient alors :

$$AD=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{3,6^2+2,6^2}=\sqrt{12,96+6,76}=\sqrt{19,72}$$

Le repère étant centimétrique, il s'agit de centimètres.

a.2) Poursuivons sur notre lancée et calculons les distances BD et CD.

$$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1,6-6=-4,4\\0,6-0=0,6\end{pmatrix} \text{ donc } BD=\sqrt{(-4,4)^2+0,6^2}=\sqrt{19,36+0,36}=\sqrt{19,72}$$

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1,6-1=0,6\\0,6-5=-4,4\end{pmatrix} \text{ donc } CD=\sqrt{0,6^2+(-4,4)^2}=\sqrt{0,36+19,36}=\sqrt{19,72}$$

Conclusion : comme $AD=BD=CD=\sqrt{19,72}$, alors le point D est équidistant des trois sommets du triangle ABC.

a.3) Le point D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (celui qui passe par ses trois sommets). Par conséquent, D est le point d'intersection des trois médiatrices du triangle ABC.

b.1) Les coordonnées du milieu I du segment [AC] sont données par :

$$x_I=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{(-2)+1}{2}=\frac{-1}{2}=-0,5 \quad \text{et} \quad y_I=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{(-2)+5}{2}=\frac{3}{2}=1,5$$

b.2) Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}1,6-(-0,5)=2,1\\0,6-1,5=-0,9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Pour le savoir, calculons leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{ID},\overrightarrow{BE}\right)=\begin{vmatrix}2,1 & -7\\-0,9 & 3\end{vmatrix}=2,1\times3-(-0,9)\times(-7)=6,3-6,3=0$$

Comme leur déterminant est nul, alors les vecteurs directeurs $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.
Conclusion : les droites (ID) et (BE) sont parallèles.

b.3) La droite (ID) est la médiatrice du segment [AC] car elle passe par le milieu I du segment et le centre D du cercle circonscrit au triangle ABC.

Comme la droite (BE) est parallèle à la médiatrice (DI), alors elle est aussi parallèle à la droite (AC).
Passant par le sommet B, la droite (BE) est la hauteur du triangle ABC issue de B.

b.4) Déterminons une équation cartésienne de la droite (BE).

$$M(x;y)\in(BE) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-6\\y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BE}\right)=0$$

On écrit le déterminant de $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BE}$ avec leurs coordonnées

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-6 & -7\\y & 3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-6)\times3-y\times(-7)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x-18+7y=0 \Leftrightarrow 3x+7y-18=0$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite (BE) est $3x+7y-18=0$.

F est le point de concours des hauteurs. Il est l'orthocentre du triangle.

c.1) C'est le sommet C qui appartient à la droite Δ car ses coordonnées en vérifient l'équation donnée par l'énoncé. En effet :

$$4x_C+y_C-9=4\times1+5-9=4+5-9=0$$

c.2) Nous allons tracer la droite Δ en en déterminant un vecteur directeur que nous mettrons au départ de C.
Comme une équation cartésienne de Δ a pour équation $4x+y-9=0$, alors un vecteur directeur de la droite est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

Un autre vecteur directeur de Δ est $-\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$. Il est un peu plus pratique pour la construction.

c.3) La droite Δ passant déjà par le sommet C, il suffit juste d'établir qu'elle est perpendiculaire au côté opposé [AB].
Pour ce faire, nous allons regarder avec le test d'orthogonalité fourni si le vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui est directeur de la droite (AB)

$$\text{Test}\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=x_{\vec{u}}\times x_{\overrightarrow{AB}}+y_{\vec{u}}\times y_{\overrightarrow{AB}}=(-1)\times8+4\times2=-8+8=0$$

Comme leur test d'orthogonalité est nul, les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
Donc la droite Δ est perpendiculaire à la droite (AB).
Conclusion : Δ est la hauteur du triangle ABC issue de C.

d.1) Comme les coefficients en x et y des deux équations ne sont pas proportionnels, alors ce système admet une unique solution à déterminer par combinaisons linéaires.

Pour trouver x, multiplions l'équation ***(2)*** par 7, puis nous la soustrairons à ***(1)*** afin de pouvoir éliminer y.

$$\begin{array}{lcr} \textit{(1)} & \xrightarrow{} & 3x+7y=18 \\ \textit{(2)} & \xrightarrow{\times 7} & 28x+7y=63 \\ \hline & & -25x=-45 \end{array} \ominus$$

Il vient alors :

$$x=\frac{-45}{-25}=\frac{9}{5}=1{,}8$$

Pour déterminer y, nous allons multiplier l'équation ***(1)*** par 4 et l'équation ***(2)*** par 3 de façon à pouvoir éliminer x par soustraction.

$$\begin{array}{lcr} \textit{(1)} & \xrightarrow{\times 4} & 12x+28y=72 \\ \textit{(2)} & \xrightarrow{\times 3} & 12x+3y=27 \\ \hline & & 25y=45 \end{array} \ominus$$

Nous en déduisons :

$$y=\frac{45}{25}=\frac{9}{5}=1{,}8$$

d.2) F appartenant aux droites (BE) et Δ, ses coordonnées en vérifient les deux équations.

$$\left|\begin{array}{lclcl} F\in(BE) & \Leftrightarrow & 3x_F+7y_F-18=0 & \Leftrightarrow & 3x_F+7y_F=18 \\ F\in\Delta & \Leftrightarrow & 4x_F+y_F-9=0 & \Leftrightarrow & 4x_F+y_F=9 \end{array}\right.$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point F sont les solutions du système *(S)* : $(1{,}8;1{,}8)$.

e) Le point G de coordonnées $(x_G;y_G)$ est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G+2 \\ y_G+2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_G-6 \\ y_G \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_G-1 \\ y_G-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette égalité fait de G le centre de gravité du triangle ABC, c'est-à-dire le point de concours de ses médianes.

$$\Leftrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 3x_G-5 \\ 3y_G-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{Vecteurs égaux}} \Leftrightarrow \overbrace{3x_G-5=0}^{\text{Abscisses égales}} \ \text{et} \ \overbrace{3y_G-3=0}^{\text{Ordonnées égales}}$$

$$3x_G=5 \qquad 3y_G=3$$

$$x_G=\frac{5}{3} \qquad y_G=1$$

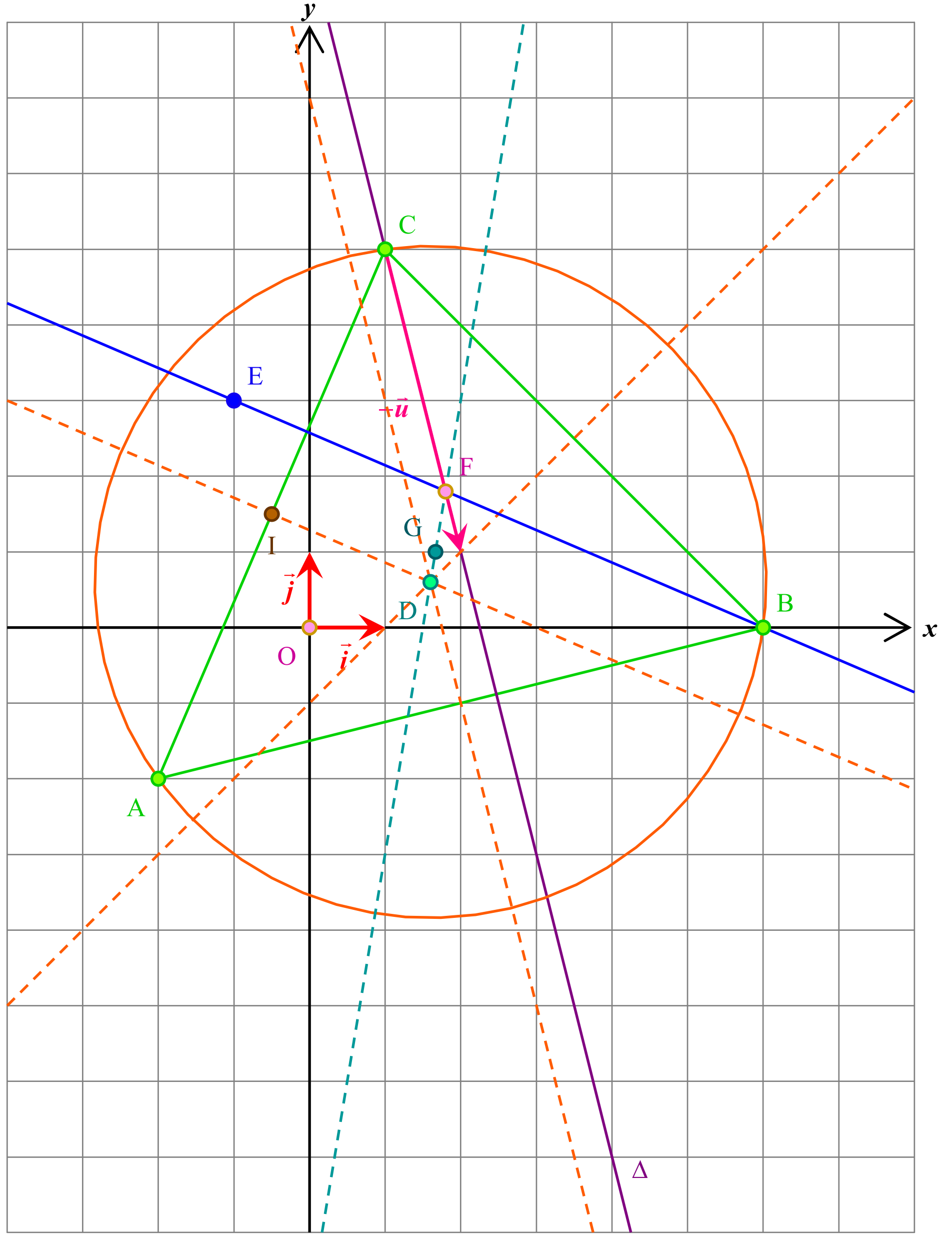
<u>Conclusion :</u> les coordonnées du point G sont $(5/3;1)$.

f) Les vecteur $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 1{,}8-1{,}6=0{,}2 \\ 1{,}8-0{,}6=1{,}2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} \frac{5}{3}-\frac{8}{5}=\frac{1}{15} \\ 1-0{,}6=0{,}4 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$$\det\left(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DG}\right)=\begin{vmatrix} 0{,}2 & 1/15 \\ 1{,}2 & 0{,}4 \end{vmatrix}=0{,}2\times 0{,}4-1{,}2\times\frac{1}{15}=0{,}08-0{,}08=0$$

<u>Conclusion :</u> comme leur déterminant est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont colinéaires et, les points D, F et G sont alignés.

Dans cet exercice, nous avons établi dans un cas particulier un résultat qui est toujours vrai. A savoir que dans un triangle, le centre du cercle circonscrit D, l'orthocentre F et le centre de gravité G sont toujours alignés sur une droite appelée *droite d'Euler*.



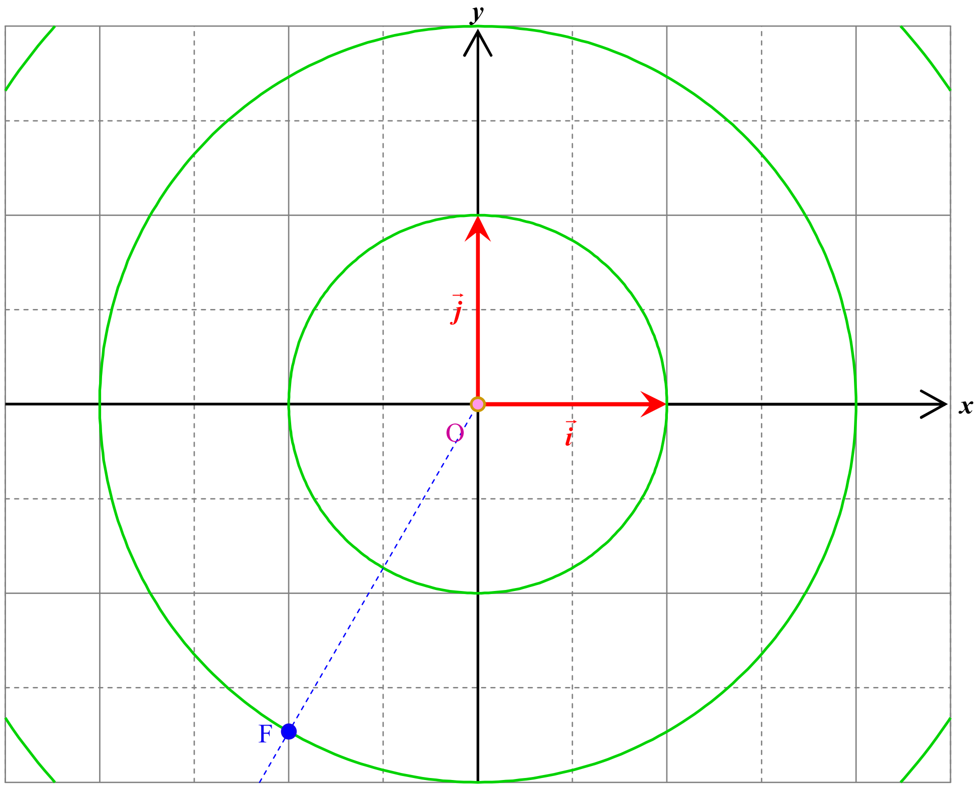
Les tournures analytiques

Le contexte

Voici un exercice des plus expérimentales et certainement aux confins du programme officiel où se mèlent des coordonnées, des angles, des cosinus et des sinus. C'est-à-dire et sans le dire du repérage polaire.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.



a) On appelle A qui est le point du cercle trigonométrique associé au réel $t=-\frac{\pi}{4}$.

1. Construire ce point A sur la figure. On laissera apparents les traits de construction.
2. Donner les coordonnées exactes de ce point A.
3. Répondre aux mêmes questions pour les points du cercle trigonométrique B associé au réel $t=-\frac{3\pi}{2}$ et C associé au réel $t=3\pi$.

b) Résoudre dans l'intervalle $\left[-\pi;\pi\right]$ l'équation :

$$\sin\left(t\right)=\frac{1}{2}$$

Placer sur la figure tous les points du cercle trigonométriques associés aux solutions de cette équation. On les appellera tous D.

c) Résoudre dans l'intervalle $\left[0;2\pi\right]$ l'équation :

$$\cos\left(t\right)=1$$

Placer sur la figure tous les points du cercle trigonométriques associés aux solutions de cette équation. On les appellera tous E.

d) On appelle F le point construit sur la figure qui appartient au cercle de rayon 2 et dont l'abscisse est égale à -1.

1. Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OF}\right)$.
2. Donner la valeur exacte de l'ordonnée du point F.

Le corrigé

a.1) Le point A peut se placer au rapporteur en décrivant un angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)=-45°$.

Le point A est aussi le point d'intersection du cercle trigonométrique et de la demi-bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\vec{i},O,\vec{j}}\right)$. .

a.2) Du fait de sa définition, les coordonnées du point A sont données par :

$$x_A=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad y_A=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

a.3) Le point B a pour coordonnées :

$$x_B=\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=0 \quad \text{et} \quad y_B=\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1$$

Le point C a pour coordonnées :

$$x_C = \cos(3\pi) = -1 \quad \text{et} \quad y_C = \sin(3\pi) = 0$$

b) Les solutions de l'équation $\sin(t) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ sont $t = \frac{\pi}{6}$ et $t = \frac{5\pi}{6}$.

Les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est égale à 0,5...

c) Les solutions de l'équation $\cos(t) = 1$ dans l'intervalle $[0;2\pi]$ sont $t = 0$ et $t = 2\pi$.

Les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est égale à 1.

d.1) L'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{OF}\right)$ mesure $-120°$ soit $-\frac{2\pi}{3}$ radians.

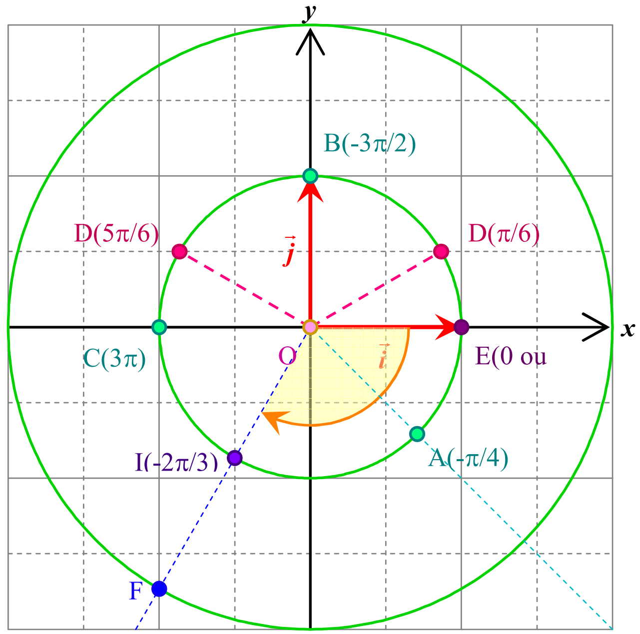
d.2) L'abscisse de F est égale à -1 et son ordonnée y_F est clairement négative.
Comme le point F appartient au cercle de centre O et de rayon 2, alors $OF = 2$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OF}$ sont $\begin{pmatrix}-1\\ y_F\end{pmatrix}$. Il vient alors :

$$OF = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2 + {y_F}^2} = 2 \Leftrightarrow 1 + {y_F}^2 = 4 \Leftrightarrow {y_F}^2 = 3 \Leftrightarrow y_F = -\sqrt{3}$$

Une autre voie

Les coordonnées de F sont les doubles du celle du point I qui est associé à $-\frac{2\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique. nous en déduisons : $y_F = 2 \times y_I = 2 \times \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$



Géométrie dans l'espace

Il était une fois le cube...tronqué

Le contexte

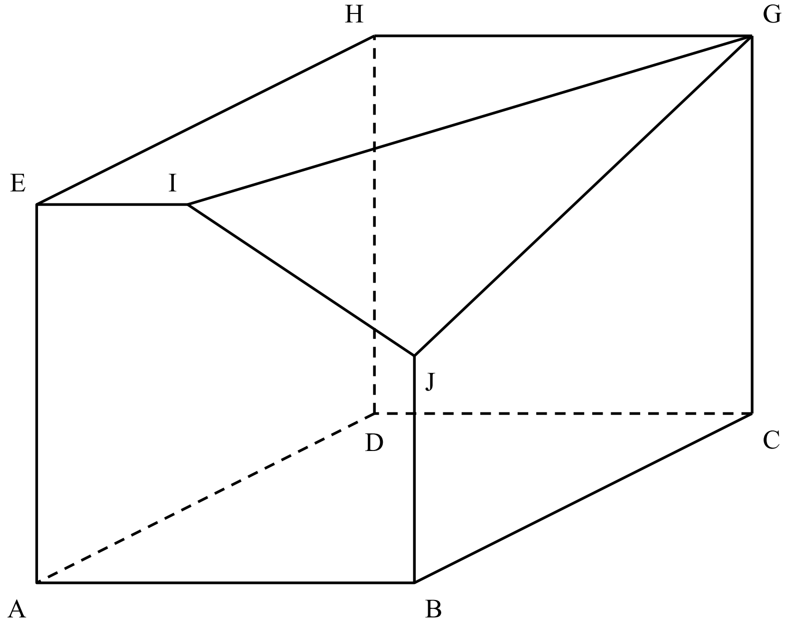
Voici un premier exercice de géométrie dans l'espace où il s'agit de tracer des intersections de plan, plus quelques autres questions. Dans l'espace, il y a ceux qui voient...et les autres !

L'énoncé

A l'origine, ABCDEFGH était un superbe cube dont chaque côté faisait 5 centimètres.
I et J étaient deux points appartenant aux arêtes [EF] et [BF] tels que :

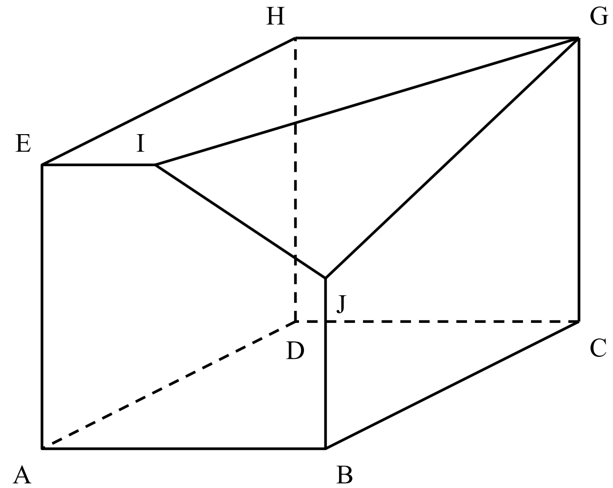
EI = 2cm <u>et</u> BJ = 3cm

Le cube a été coupé ou tronqué suivant le plan (GIJ) pour donner le polyèdre ABCDEIJGH représenté ci-dessous en perspective cavalière.

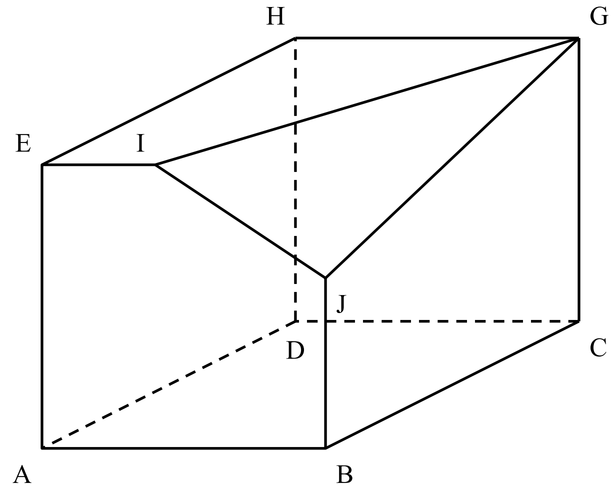


Toutes les constructions demandées seront effectuées à la règle et au compas et, justifiées sur la feuille de copie. Les segments cachés seront représentés en tirets.

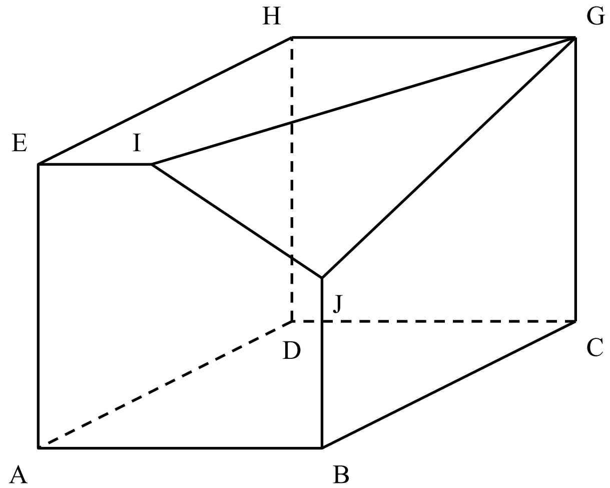
a) Tracer sur la figure ci-dessous l'intersection Γ des plans (BIG) et (CEJ). On justifiera sa construction.



b) Tracer sur la figure ci-dessous l'intersection Δ des plans (GIJ) et (CDH). On justifiera sa construction.



c) Tracer sur la figure ci-dessous l'intersection ***d*** des plans (ADJ) et (BCI). On justifiera sa construction.



d) Déterminer les longueurs des trois côtés du triangle (GIJ).
Le triangle (GIJ) est-il rectangle ? On justifiera sa réponse.

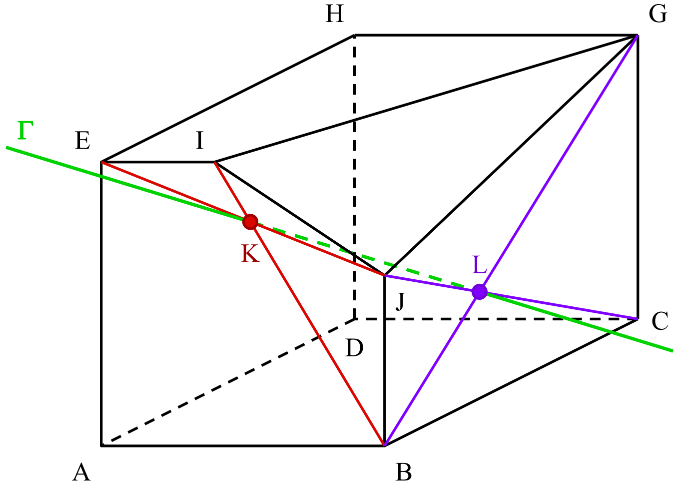
e) Calculer le volume exprimé en centimètres cube du polyèdre ABCDEIJGH.

Le corrigé

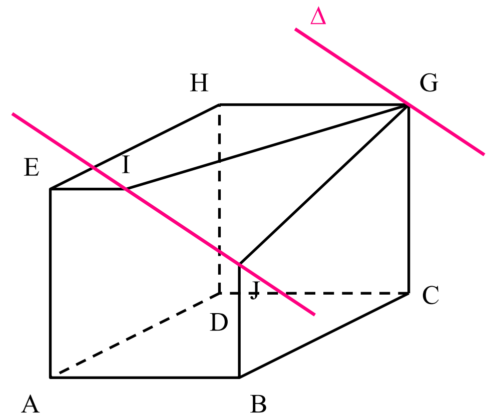
a) D'abord, l'intersection Γ des plans (BIG) et (CEJ) est une droite que nous allons tracer en en déterminant deux points.
Le premier de ceux-ci : les droites (BI) et (JE) sont sécantes en K dans le plan (ABE).
Comme le point K appartient à la droite (BI), il fait partie du plan (BIG).
De même, K appartenant à la droite (JE), il fait aussi partie du plan (CEJ).
Par conséquent, le point K appartient à la droite Γ d'intersection de ces deux plans.
Ensuite, les droites (BG) et (JC) sont sécantes en un point L dans le plan (BCG)

Comme $\left| \begin{array}{l} L \in \text{droite (BG)} \subset \text{plan (BIG)} \\ L \in \text{droite (JC)} \subset \text{plan (CEJ)} \end{array} \right.$, alors le point L appartient à l'intersection Γ.

<u>Conclusion :</u> l'intersection Γ des plans (BIG) et (CEJ) est la droite (KL).



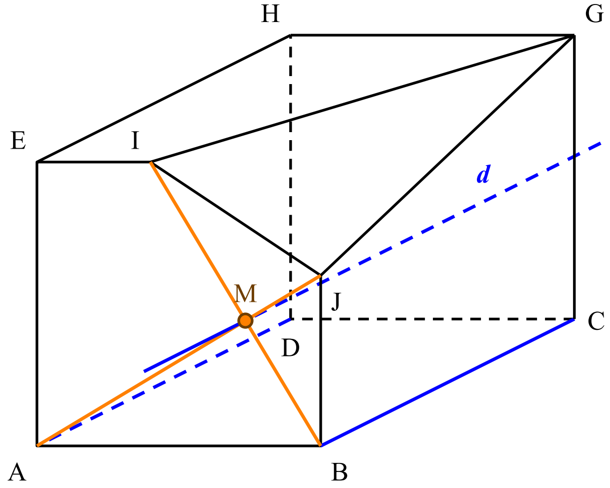
b) L'intersection Δ des plans (GIJ) et (CDH) est droite qui passe par le point G car ce dernier appartient aux deux plans.
En application du «théorème d'incidence», le plan (GIJ) coupe les deux plans parallèles (ABE) et (CDH) suivant deux droites parallèles. L'intersection des plans (GIJ) et (ABE) étant la droite (IJ), nous en déduisons que l'autre droite d'intersection Δ est parallèle cette droite (IJ).
<u>Conclusion :</u> la droite Δ est la parallèle à la droite (IJ) passant par le point G.



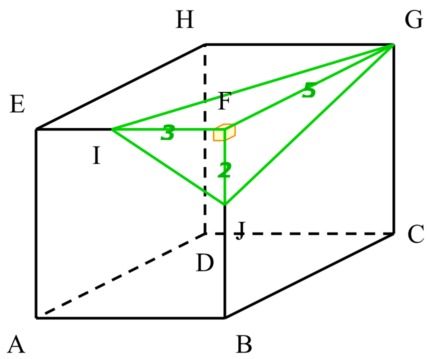
c) L'intersection ***d*** des plans (ADJ) et (BCI) est également une droite.
D'abord, les droites (AJ) et (BI) sont sécantes dans le plan (ABE) en un point que nous appellerons M.

Comme $\left| \begin{array}{l} M \in \text{droite (AJ)} \subset \text{plan (ADJ)} \\ M \in \text{droite (BI)} \subset \text{plan (BCI)} \end{array} \right.$, alors le point M appartient à l'intersection ***d***.

Ensuite, comme la droite (AD) du plan (ADJ) est parallèle à la droite (BC) du plan (BCI), alors, en application du «théorème du toit», l'intersection ***d*** est parallèle à ces deux droites.
<u>Conclusion :</u> l'intersection ***d*** est la parallèle aux droites (AD) et (BC) passant par M.



d) Avant toutes choses, complétons notre cube tronqué en y remettant le sommet manquant F.



Calculons la longueur IJ.
Comme le triangle IJF est rectangle en F, alors d'après le théorème de Pythagore, nous avons :

$$IJ^2 = IF^2 + JF^2 = 9 + 4 = 13$$

Donc le côté [IJ] mesure $\sqrt{13}$ centimètres.

Pour ce qui est du côté [GI], le triangle IGF étant rectangle en F, il vient :

$$IG^2 = IF^2 + FG^2 = 9 + 25 = 34$$

Donc le côté [GI] mesure $\sqrt{34}$ centimètres.

Enfin, le triangle JFG étant rectangle en F, nous en déduisons :

$$JG = \sqrt{JF^2 + FG^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}\text{cm}$$

➲ Le plus grand côté du triangle GIJ étant IG, si ce dernier est rectangle, c'est en J.

Or, comme $\underbrace{IG^2}_{34} \neq \underbrace{IJ^2 + JG^2}_{13+29=42}$, alors, en application du théorème de Pythagore, le triangle GIJ n'est pas rectangle en J. Il ne l'est donc nulle part.

e) la figure précédente le montre bien : le polyèdre tronqué ABCDEIJGH est le cube ABCDEFGH auquel on aurait enlevé le tétraèdre IJFG.

Le volume du cube ABCDEFGH de côté 5 est égal à $5^3 = 125$ centimètres cubes.
Dans le tétraèdre IJFG, la hauteur relative au triangle de base IJF est le segment [FG].
Par conséquent :

$$\text{volume}(\text{IJFG}) = \frac{\text{base IJF} \times \text{hauteur [FG]}}{3} = \frac{\frac{IF \times FJ}{2} \times FG}{3} = \frac{\frac{\cancel{3} \times \cancel{2}}{\cancel{2}} \times 5}{\cancel{3}} = 5\ \text{cm}^3$$

<u>Conclusion :</u> le volume du polyèdre tronqué ABCDEIJGH est de $125 - 5 = 120\ \text{cm}^3$.

Pyramide pentagonale

Le contexte

Un second exercice de construction d'intersection de plans. Du cours et de la vision encore une fois !

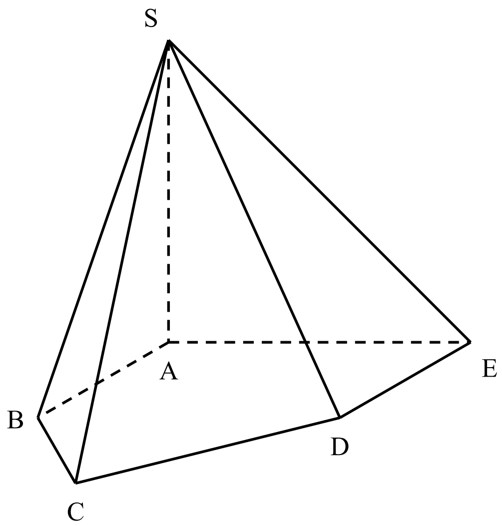
L'énoncé

Sur les figures ci-dessous, la pyramide SABCDE qui s'appuie sur le pentagone ABCDE possède les propriétés suivantes :

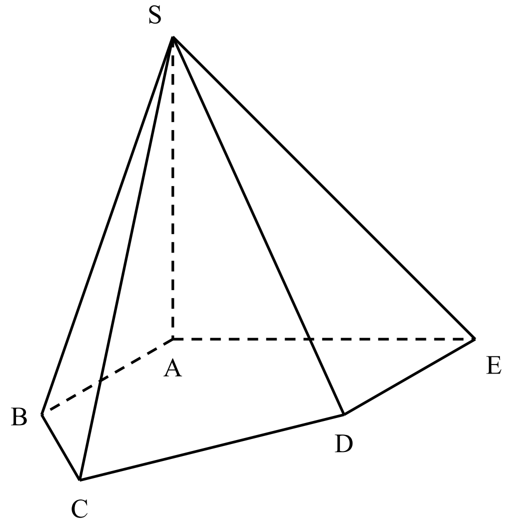
1. Les angles $\widehat{BAS}$, $\widehat{EAS}$, $\widehat{BAE}$ et $\widehat{AED}$ sont droits.
2. Les côtés opposés [AB] et [ED] sont parallèles
3. Tous les côtés du pentagone ABCDE ainsi que l'arête [SA] ont la même longueur.

Toutes les constructions demandées seront effectuées à la règle et au compas et, justifiées sur la feuille de copie. Les segments cachés seront représentés en tirets.

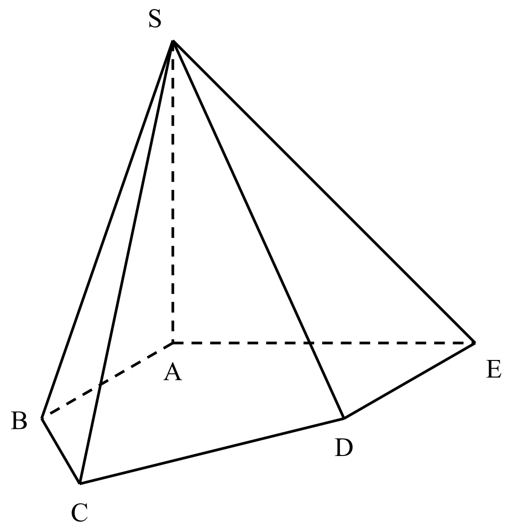
a) Tracer sur la figure ci-dessous l'intersection ***d*** des plans (SAE) et (SBD). On justifiera sa construction.



b) Tracer sur la figure ci-dessous l'intersection Δ des plans (SAE) et (SCD). On justifiera sa construction.



c) On appelle ***P*** le plan parallèle au plan (SBE) passant par le point C.
Tracer sur la figure ci-dessous l'intersection Γ des plans (ABD) et ***P***. On justifiera sa construction.



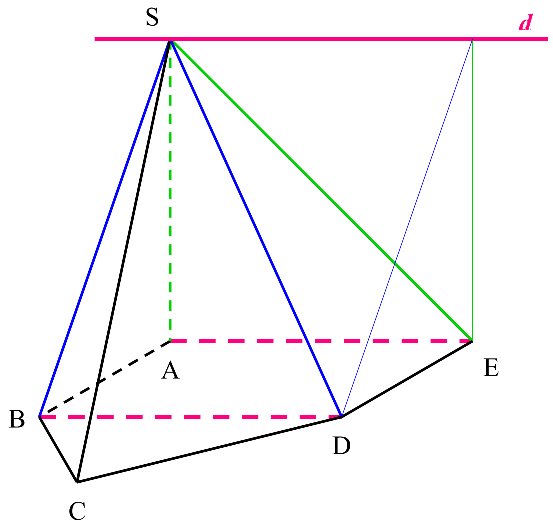
Le corrigé

a) L'intersection ***d*** des plans sécants (SAE) et (SBD) est une droite.
Un point de cette intersection est S car ce dernier appartient évidemment aux deux plans.
Ensuite, comme les côtés opposés [AB] et [DE] sont parallèles et ont la même longueur, alors le quadrilatère ABDE est un parallélogramme. Donc les droites (AE) et (BD) sont parallèles.

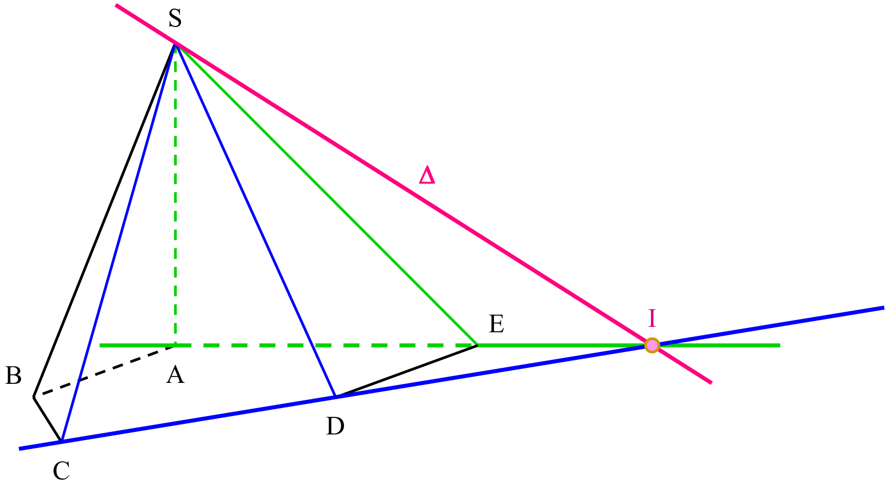
[Avec l'angle $\widehat{BAE}$ qui est droit et trois côtés égaux, c'est même un carré.]

Comme la droite (AE) du plan (SAE) est parallèle à la droite (BD) du plan (SBD), alors, en application du théorème du toit, l'intersection ***d*** de ces deux plans est parallèle à ces deux droites.

<u>Conclusion :</u> l'intersection ***d*** est la droite parallèle aux droites (BD) et (AE) passant par S.

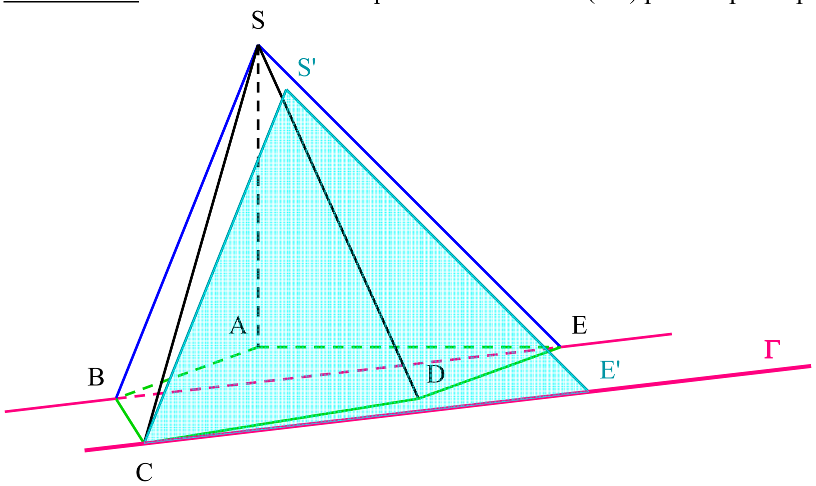


b) L'intersection Δ des plans sécants (SAE) et (SCD) est aussi une droite qui passe par le point S car celui-ci est commun aux deux plans.
De plus, les droites (AE) et (CD) sont sécantes dans le plan horizontal (ABC) en un point que nous appelons I.
<u>Conclusion :</u> l'intersection Δ des plans (SAE) et (SCD) est la droite (SI).



c) L'intersection Γ des plans P et (ABD) est une droite qui passe par le point C car celui-ci appartient aux deux plans.
L'intersection des plans (ABD) et (SBE) est la droite (BE) car les points B et E sont communs à ces deux plans.
Le théorème d'incidence nous permet d'affirmer que le plan (ADB) coupe les plans parallèles (SBE) et ***P*** suivant deux droites parallèles. Donc les droites (BE) et Γ sont parallèles.

<u>Conclusion :</u> l'intersection Γ est la parallèle à la droite (BE) passant par le point C.



Probabilités et statistiques

Quoi de neuf docteur dans l'arbre ?

Le contexte

Dans cet exercice de probabilité quelque peu ironique, il s'agit juste de représenter une situation par un arbre, puis d'exploiter celui-ci pour calculer une probabilité...totale !
Si l'énoncé est aussi lourd, c'est pour mieux embrouillé notre aimable cobaye.

L'énoncé

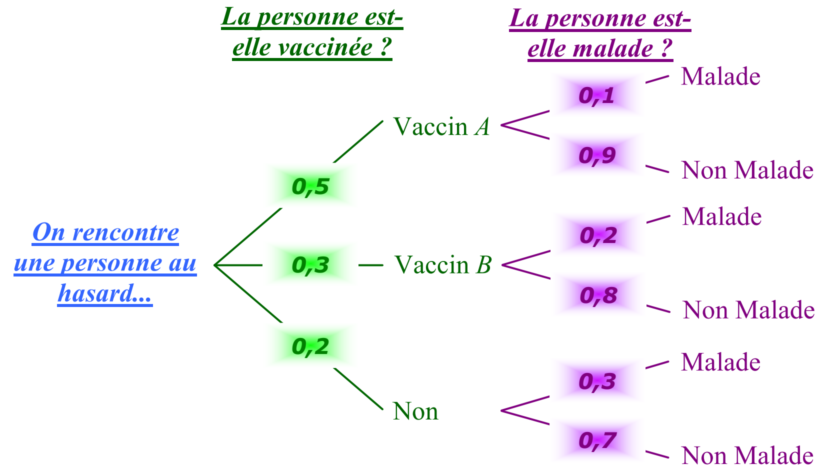
Chaque année, quand revient la belle saison, les *Indres Occidentales* sont touchées par une terrible maladie saisonnière : la grippe cérébrale.
Heureusement, deux vaccins existent pour contrer cet incorrigible virus : un vaccin A et un vaccin B.
Des études ont montrées que 50% de la population se faisait vacciner avec le vaccin A, 30% avec le vaccin B et que le reste évitait soigneusement tout contact avec une aiguille.
D'autres études ont montrées que les deux vaccins n'étaient pas si efficaces que cela. En effet, au cours de l'épidémie :

- 10% des personnes vaccinées avec le vaccin A sont malades.
- 20% des personnes vaccinées avec le vaccin B sont malades.
- 30% des personnes non vaccinées sont malades.

Un beau matin, on rencontre au hasard une personne des *Indres Occidentales*.
Déterminer la probabilité que la personne rencontrée soit malade au cours de l'épidémie.
Pour s'aider, on pourra représenter la situation sanitaire de la personne rencontrée par un arbre pondéré.
Les probabilités sont l'une des nouveautés du programme de seconde de cette année. Dans ses attentes, le programme officiel est peu ambitieux. De mon point de vue, les probas ont toujours relevé du bon sens.

Le corrigé

Pour y voir un peu plus clair, représentons la situation au moyen d'un arbre pondéré.



Nous en déduisons :

$$p(\text{Malade}) = p(\text{A} \cap \text{Malade}) + p(\text{B} \cap \text{Malade}) + p(\text{Non} \cap \text{Malade})$$
$$= 0,5 \times 0,1 + 0,3 \times 0,2 + 0,2 \times 0,3 = \underline{0,17}$$

<u>Conclusion :</u> la probabilité que la personne rencontrée soit malade au cours de l'épidémie est de 0,17.

La fête à boule-boule...et boule !

Le contexte

Un second exercice de probabilité ou plutôt de dénombrement.

L'énoncé

La Blancoise des Jeux, célèbre entreprise d'extraction de richesses des *Indres Occidentales* vient de concevoir un nouveau jeu : le *triboulet*.
Une urne contient dix boules numérotées de ***0*** à ***9*** et indiscernables au toucher. Plus précisément :

- Quatre de ces boules sont vertes. Elles portent les numéros ***0***, ***1***, ***2*** et ***3***.
- Trois de ces boules sont bleues. Elles portent les numéros ***4***, ***5*** et ***6***.
- Deux de ces boules sont oranges. Elles portent les numéros ***7*** et ***8***.
- La dernière de ces boules est rouge et elle porte le numéro ***9***.

Le joueur tire successivement et sans remise trois boules dans l'urne. De la composition de ce tirage de trois boules dépend son gain.

a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b) Déterminer les probabilités des événements suivants. Les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

A = «Le joueur a tiré trois boules de numéros pairs.»

B = «La première boule tirée est rouge, la seconde est verte et la troisième bleue.»

C = «Le joueur a tiré une boule verte, une boule bleue et une boule rouge mais sans précision sur l'ordre.»

D = «Aucune des trois boules tirées n'est verte.»

E = «Au moins l'une des trois boules tirées est verte.»

F = «La somme des numéros des trois boules tirées est égale à 24.»

Le corrigé

a) Combien y a-t-il de tirages de trois boules possibles ? Dénombrons-les !

1ère boule	2nde boule	3ème boule	
10 possibilités	9 possibilités	8 possibilités	*soit* $10\times9\times8=720$ tirages

Conclusion : il y a 720 tirages de trois boules possibles.

b) Combien y a-t-il de tirages où les trois boules tirées portent un numéro pair ?
Au début, il y a cinq boules paires dans l'urne : ***0***, ***2***, ***4***, ***6*** et ***8***. Dénombrons !

1ère boule	2nde boule	3ème boule	
5 possibilités	4 possibilités	3 possibilités	*soit* $5\times4\times3=60$ tirages

Comme toutes les boules sont indiscernables au toucher et ont donc la même chance d'être tirée, nous en déduisons que nous sommes en situation d'équiprobabilité. Par conséquent, la probabilité de l'événement A est donnée par :

$$p(\mathrm{A})=\frac{\text{Nombre de tirages favorables à A}}{\text{Nombre de tirages total}}=\frac{60}{720}=\frac{1}{12}$$

➲ Combien y a-t-il de tirages favorables à l'événement B ? Dénombrons-les !

1ère boule	2nde boule	3ème boule	
1 boule rouge possible	4 boules vertes possibles	3 boules bleues possibles	*soit* $1\times4\times3=12$ tirages

Nous en déduisons que la probabilité de l'événement B est donnée par :

$$p(\mathrm{B})=\frac{\text{Nombre de tirages favorables à B}}{\text{Nombre de tirages total}}=\frac{12}{720}=\frac{1}{60}$$

➲ L'événement C est une sorte d'événement «B généralisé». Comprenez par là que si on fixe une position précise à la boule rouge, une autre position précise à la boule verte et une dernière à la boule bleue, il y aura toujours 12 tirages favorables à cet ordre là.
Mais justement, lorsque l'on dispose de trois boules (une rouge, une verte, une bleue), combien y a-t-il de façons de les ranger ? Combien y a-t-il de classements ou d'ordres possibles ? Dénombrons -les...eux aussi !

1ère place	2nde place	3ème place	
3 candidats	2 candidats	1 candidats	*soit* $3\times2\times1=6$ ordres

Ainsi y a-t-il $6\times12=72$ tirages favorables à l'événement C. Nous en déduisons :

$$p(\mathrm{C})=\frac{\text{Nombre de tirages favorables à C}}{\text{Nombre de tirages total}}=\frac{72}{720}=\frac{1}{10}$$

➲ Combien y a-t-il de tirages favorables à l'événement D ?
Si aucune des trois boules tirées n'est verte, c'est qu'elles sont bleues, oranges ou rouges.
Ce qui fait six boules possibles...au début du moins.

1ère boule	2nde boule	3ème boule	
6 possibilités	5 possibilités	4 possibilités	*soit* $6\times5\times4=120$ tirages

Nous en déduisons que la probabilité de l'événement D est donnée par :

$$p(\mathrm{D}) = \frac{\text{Nombre de tirages favorables à D}}{\text{Nombre de tirages total}} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}$$

➲ L'événement $\mathrm{E} = $ «Au moins l'une des trois boules tirées est verte» est l'événement contraire de l'événement $\mathrm{D} = $ «Aucune des trois boules tirées n'est verte».
Nous en déduisons :

$$p(\mathrm{E}) = 1 - p(\mathrm{D}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

➲ Les seuls tirages qui aboutissent à un total de 24 sont ceux où apparaissent les boules ***9***, ***8*** et *7*. Il n'y a pas d'autres tirages possibles !
Avec ces trois boules, on peut faire :

$$\underbrace{\boxed{\text{1ère boule}}}_{\substack{3\\ \text{possibilité}}} \quad \underbrace{\boxed{\text{2nde boule}}}_{\substack{2\\ \text{possibilité}}} \quad \underbrace{\boxed{\text{3ème boule}}}_{\substack{1\\ \text{possibilité}}} \quad \underline{\textit{soit}} \quad 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ tirages}$$

Nous en concluons que la probabilité de l'événement F est donnée par :

$$p(\mathrm{F}) = \frac{\text{Nombre de tirages favorables à F}}{\text{Nombre de tirages total}} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$$

Entre jambes

Le contexte

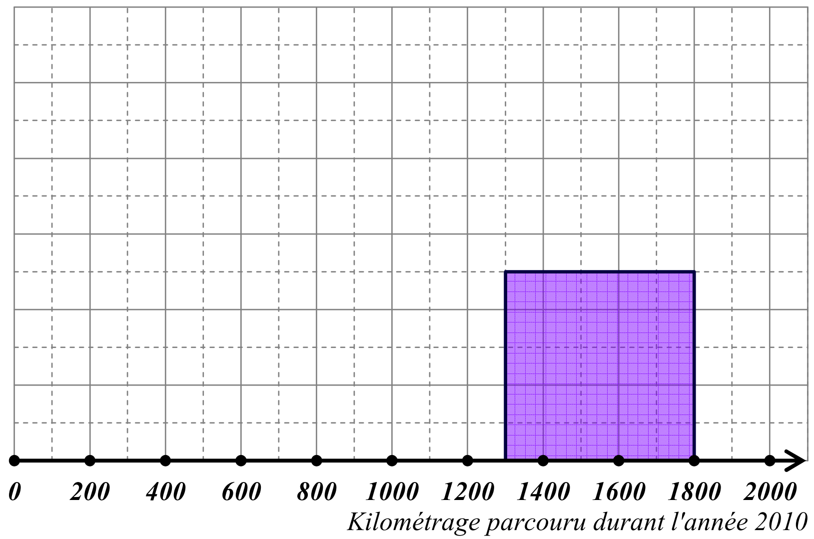
Un exercice classique de statistiques sur des modalités à caractère quantitatif continu, autrement dit des intervalles ou des classes avec un histogramme et une moyenne.

L'énoncé

Les *Gambettes Blancoises* sont un club de coureurs à pieds. Son secrétaire général, un féru de statistiques, a demandé à chaque membre du club le nombre de kilomètres qu'il avait parcouru au total durant l'année 2010. Puis, il a compilé ces résultats en classes. Cela a donné la série statistique suivante :

Classe exprimées en kilomètres	$[200;700[$	$[700;1300[$	$[1300;1800[$
Effectif	60	48	

Le tableau ci-dessus est, hélas, partiel. Heureusement, il est complété par l'histogramme ci-après où un centimètre carré représente 8 individus.



a) A partir de l'histogramme, déterminer l'effectif de la classe $[1300;1800[$.

b) A partir du tableau ci-avant, compléter l'histogramme ci-dessus.

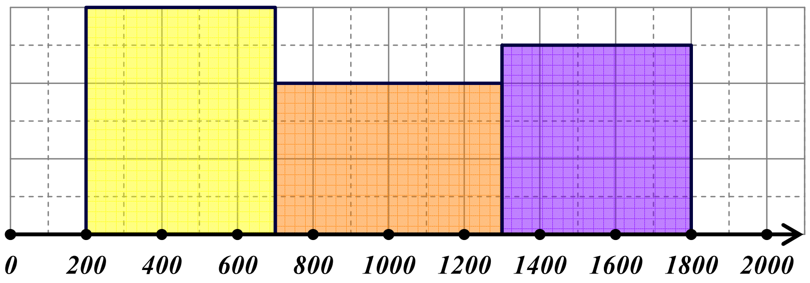
c) Calculer le nombre moyen de kilomètres parcourus par un membre du club en 2010

Le corrigé

a et b) Le tableau complété est le suivant :

Classe	Effectif	Aire du rectangle	Base du rectangle	Hauteur associée
$[200;700[$	60	7,5 cm²	2,5 cm	3 cm
$[700;1300[$	48	6 cm²	3 cm	2 cm
$[1300;1800[$	50	6,25 cm²	2,5 cm	2,5 cm

Ce qui nous donne l'histogramme suivant :



c) Le nombre moyen de kilomètres parcourus par un membre du club est donné par :

$$\frac{60\times 450+48\times 1000+50\times 1550}{60+48+50}=\frac{152500}{158}\approx \underline{965,2\text{ km}}$$

Les vecteurs

C'est mieux d'être bien placé

Le contexte

Voici un exercice des plus classiques sur les vecteurs. Au menu : placements de points, significations et petits calculs vectoriels. Bref, les bases !

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, A, B, C et D sont quatre points distincts du plan.

a) Sur la figure ci-contre, placer le point E défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$$

b) Sur la figure ci-contre, placer le point F défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3} \times \overrightarrow{AB}$$

c) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$2 \times \overrightarrow{AG} + 5 \times \overrightarrow{CG} = \vec{o}$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

   Note : il s'agit de trouver une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{AG} = \ldots \times \overrightarrow{AC}$
2. Placer le point G sur la figure ci-contre.

d) Le point H est défini par la relation vectorielle :

$$3 \times \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{CH} = \vec{o}$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BH}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2. Placer le point H sur la figure ci-contre.

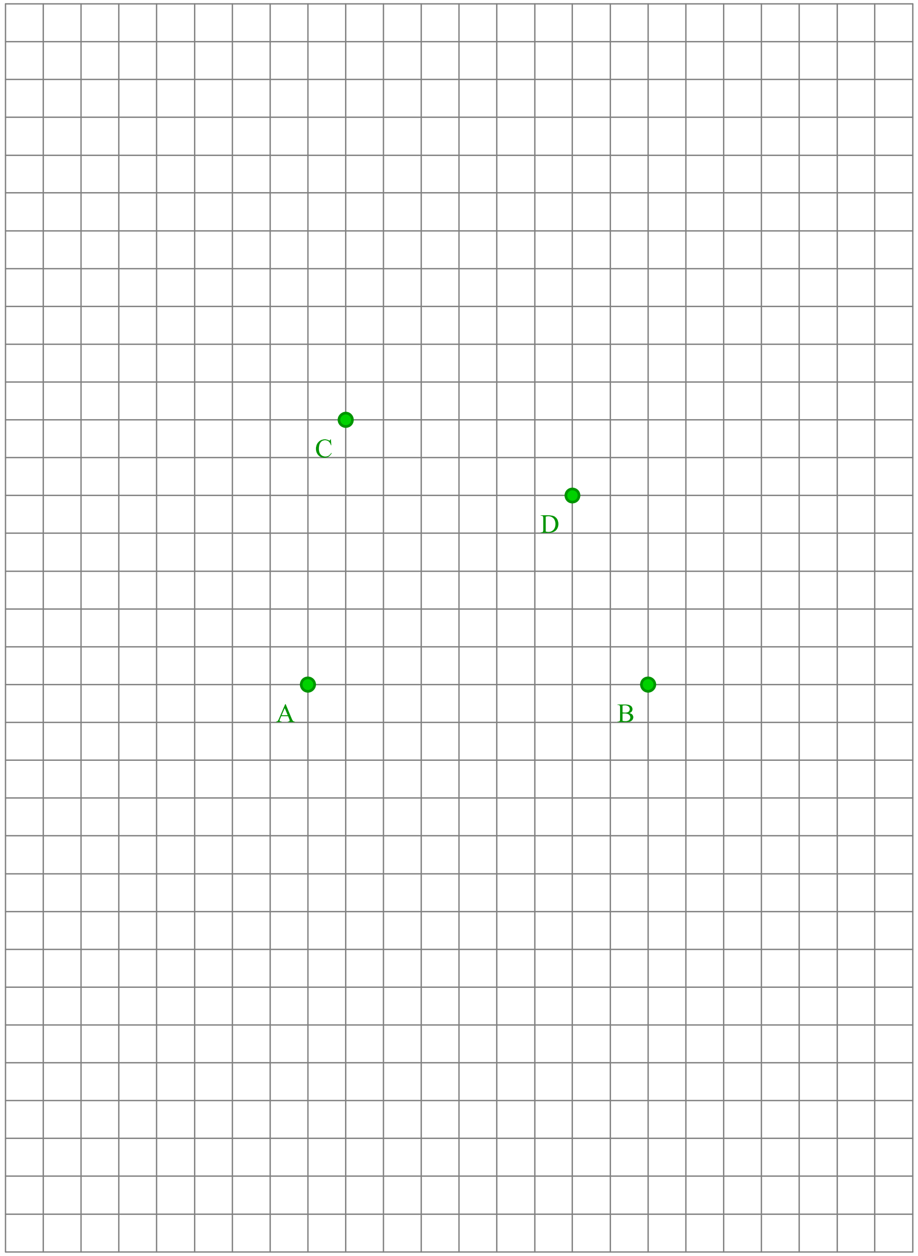
e) Sur la figure ci-contre, placer le point L défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{DL} = 2 \times \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$$

f) Sur la figure ci-contre, placer le point M défini par la relation vectorielle :

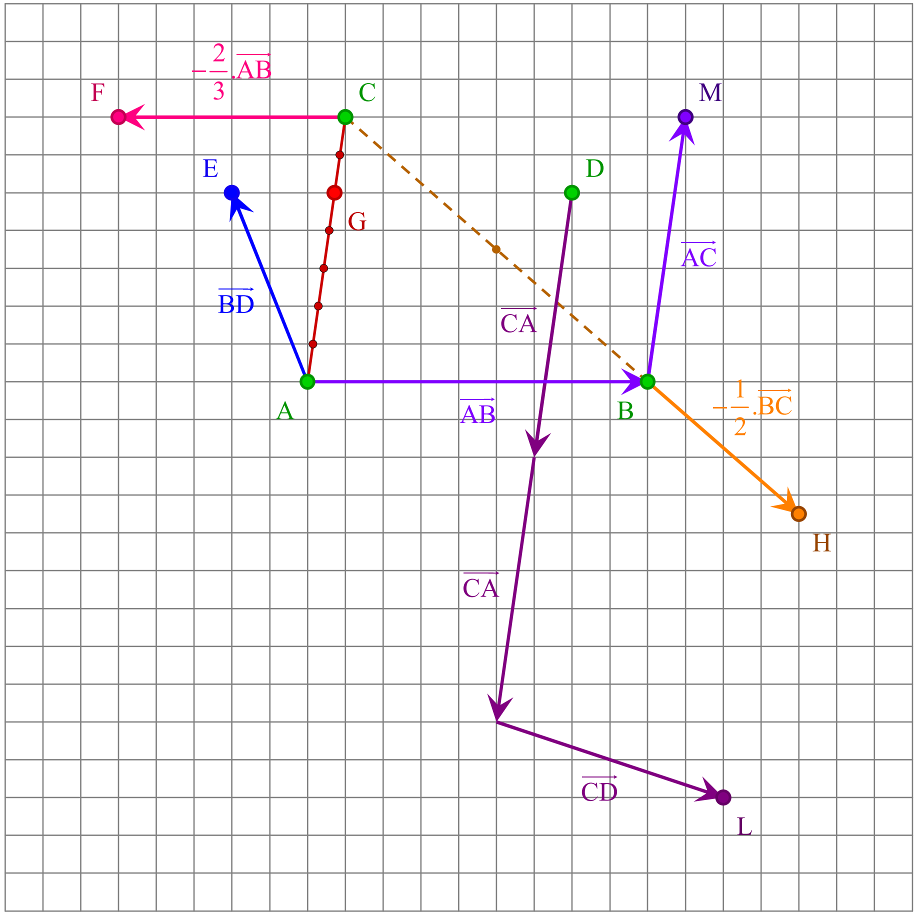
$$\overrightarrow{AM} = 5 \times \overrightarrow{AB} + 4 \times \overrightarrow{BC} - 3 \times \overrightarrow{AC}$$

Indication : on pourra chercher à simplifier cette relation vectorielle avant tout placement...



Le corrigé

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



c.1) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$$2\times\overrightarrow{AG}+5\times\overrightarrow{CG}=\vec{o} \Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{AG}+\underbrace{5\times\overrightarrow{CA}+5\times\overrightarrow{AG}}_{\text{Par Chasles !}}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{AG}=-5\times\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 7\times\overrightarrow{AG}=5\times\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{5}{7}\times\overrightarrow{AC}}$$

<u>Conclusion :</u> le point G se trouve aux cinq septièmes du segment [AC] à partir de A.

d.1) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{BH}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

$$3\times\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{CH}=\vec{o} \Leftrightarrow 3\times\overrightarrow{BH}\underbrace{-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BH}}_{\text{Par Chasles !}}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{BH}=-\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{BH}=-\frac{1}{2}\times\overrightarrow{BC}}$$

<u>Conclusion :</u> le point H est le symétrique par rapport à B du milieu du segment [BC].

Une autre voie plus...subtile !

$$3\times\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{CH}=\vec{o} \Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{BH}\underbrace{+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC}}_{\text{Par Chasles !}}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{BC}=\vec{o} \Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{BH}=-\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{BH}=-\frac{1}{2}\times\overrightarrow{BC}}$$

f) Sous sa forme originale, la relation vectorielle ne permet pas de placer le point M. Mais elle peut être grandement simplifiée avec un «petit coup de Chasles»...

$$\overrightarrow{AM}=5\times\overrightarrow{AB}+4\times\overrightarrow{BC}-3\times\overrightarrow{AC}$$

$$=\overrightarrow{AB}+\underbrace{4\times\overrightarrow{AB}+4\times\overrightarrow{BC}}_{\text{Chasles !}}-3\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+4\times\overrightarrow{AC}-3\times\overrightarrow{AC}=\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$$

Le point M est alors le quatrième sommet du parallélogramme ABMC.

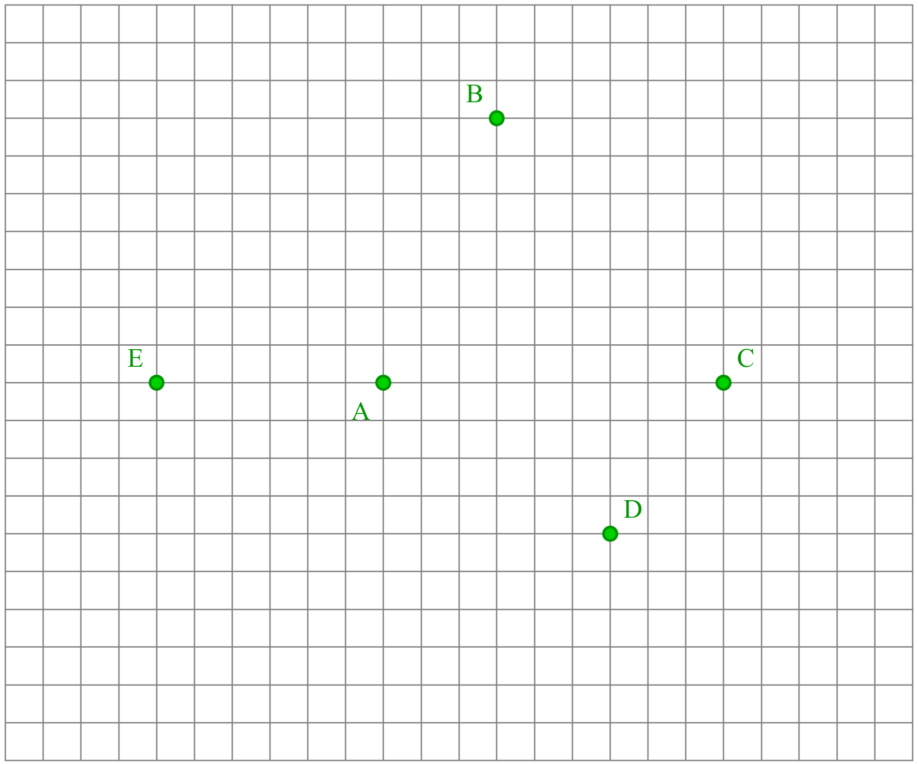
Le retour des déplacés

Le contexte

Un second exercice de placements de points définis par une relation vectorielle. Encore une fois, le calcul vectoriel est au menu...mais pas trop au programme !

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, on a représenté cinq points A, B, C, D et E.



a) A partir du graphique, compléter les deux égalités ci-dessous :

$$\overrightarrow{AE} = \ldots \times \overrightarrow{AC} \qquad \ldots \times \overrightarrow{EA} + \ldots \times \overrightarrow{EC} = \vec{o}$$

b) Sur la figure ci-dessus, placer le point F défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AF} = 2 \times \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$$

c) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$4 \times \overrightarrow{AG} + 3 \times \overrightarrow{BG} = \vec{o}$$

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   Note : il s'agit de trouver une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{AG} = \ldots \times \overrightarrow{AB}$

2. Placer le point G sur la figure ci-dessus.

d) Sur la figure ci-dessus, placer le point H défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{DH} = 2 \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}$$

Le corrigé

a) Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ correspond à une translation de 3 centimètres vers la gauche.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ correspond à une translation de 4,5 centimètres vers la droite.

Par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{AE} = -\frac{2}{3} \times \overrightarrow{AC}}$

Le coefficient de colinéarité est négatif car les vecteurs n'ont pas le même sens.

➲ Le vecteur $\overrightarrow{EA}$ correspond à une translation de 3 centimètres vers la droite.

Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ correspond à une translation de 7,5 centimètres vers la droite.

Nous en déduisons :

$$\underbrace{5 \times \overrightarrow{EA} + (-2) \times \overrightarrow{EC}}_{\text{15 centimètres vers la droite suivi de 15 centimètres vers la gauche = on ne bouge pas !}} = \vec{o}$$

c) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$4 \times \overrightarrow{AG} + 3 \times \overrightarrow{BG} = \vec{o} \iff 4 \times \overrightarrow{AG} + \underbrace{3 \times \overrightarrow{BA} + 3 \times \overrightarrow{AG}}_{\text{Par Chasles !}} = \vec{o} \iff 7 \times \overrightarrow{AG} = 3 \times \overrightarrow{AB}$$

$$\iff \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{3}{7} \times \overrightarrow{AB}}$$

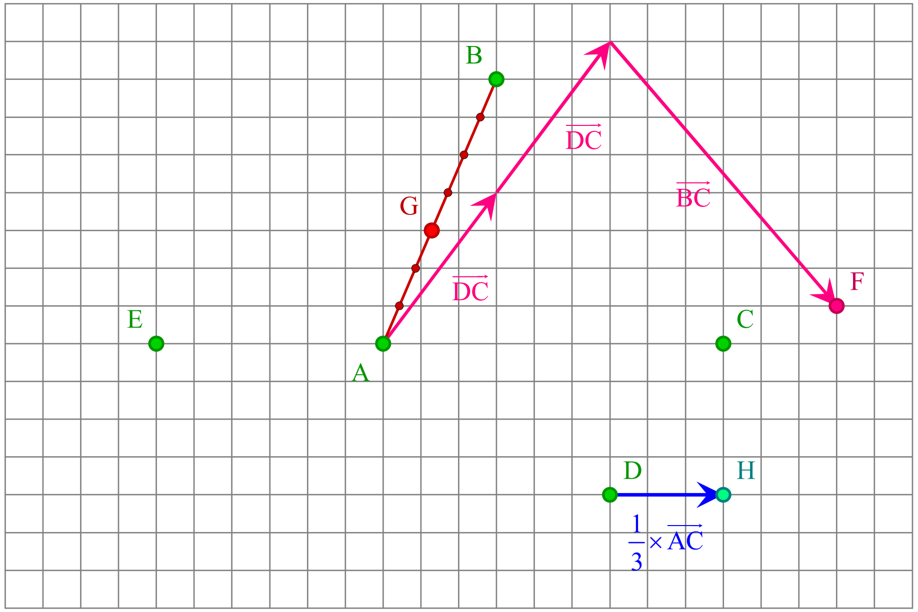
<u>Conclusion :</u> le point G se trouve aux trois septièmes du segment [AB] à partir de A.

d) Avant tout placement, cherchons à simplifier la relation vectorielle définissant H.

$$\overrightarrow{DH} = 2 \times \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}_{\text{Chasles !}} + \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}}_{\text{Chasles !}} = \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}}_{\text{On pourrait s'arrêter là !}} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3} \times \overrightarrow{AC} = \boxed{\frac{1}{3} \times \overrightarrow{AC}}$$

Ces deux relations permettent de placer rapidement le point H à partir de D.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Trois, deux, un...point d'équilibre !

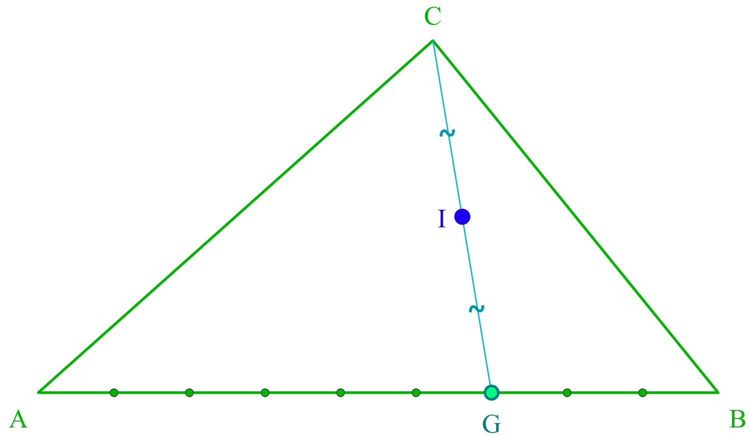
Le contexte

Un autre exercice de base sur les vecteurs avec toujours un aspect graphique mais aussi une partie calcul vectoriel beaucoup plus poussée. Et sans le dire, une notion de barycentre.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous :

- Le triangle ABC a pour mesures :
  AB = 9cm AC = 7cm BC = 6cm
- G est le point du segment [AB] situé à 6 centimètres du point A.
- I est le milieu du segment [GC].



a) Compléter les deux égalités ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

$\overrightarrow{AG} = \ldots\times\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\ldots\times\overrightarrow{GA}+\ldots\times\overrightarrow{GB}=\vec{o}$

b) Démontrer l'égalité :

$$\overrightarrow{IA}+2\times\overrightarrow{IB}+3\times\overrightarrow{IC}=\vec{o}$$

Le corrigé

a) D'après la figure, le point G est situé aux deux tiers du segment $[AB]$. Vectoriellement, ce fait se traduit par l'égalité :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\times\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\times\overrightarrow{AG} = 2\times\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AG} + 2.\overrightarrow{BA} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AG} + \underbrace{2.\overrightarrow{BG} + 2.\overrightarrow{GA}}_{=2.\overrightarrow{BA}\text{ par Chasles}} = \vec{o} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AG} + 2.\overrightarrow{BG} - 2.\overrightarrow{AG} = \vec{o}$$

On prend les opposés....

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + 2.\overrightarrow{BG} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2.\overrightarrow{GB} = \vec{o}$$

Cette relation pouvait être trouvée directement grâce au graphique...

b) Pour établir cette égalité, nous allons partir du premier membre et introduire le point G dans les deux premiers vecteurs de cette somme.

$$\overrightarrow{IA} + 2\times\overrightarrow{IB} + 3\times\overrightarrow{IC} = \underbrace{\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GA}}_{\text{soit }\overrightarrow{IA}} + \underbrace{2.\overrightarrow{IG} + 2.\overrightarrow{GB}}_{\text{soit }2.\overrightarrow{IB}} + 3.\overrightarrow{IC}$$

Double merci à Chasles !

$$= \underbrace{\overrightarrow{GA} + 2.\overrightarrow{GB}}_{=\vec{o}} + 3.\overrightarrow{IG} + 3.\overrightarrow{IC} = 3\times\left(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC}\right)$$

Or, comme le point I est le milieu du segment [GC], alors les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont opposés. Par conséquent, leur somme $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC}$ est nulle. Il vient alors :

$$\overrightarrow{IA} + 2\times\overrightarrow{IB} + 3\times\overrightarrow{IC} = 3\times\left(\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC}\right) = 3\times\vec{o} = \vec{o}$$