

Le mot de l'auteur

Les piètres résultats aux évaluations internationales en mathématiques ont conduit nos grandioses penseurs à s'interroger sur la qualité des enseignants qu'ils employaient. Car selon leur adage bien connu, il n'y a pas de mauvais élèves, il n'y a que de mauvais profs ! Chemin faisant, ils sont parvenus à la conclusion qu'il fallait payer les profs «au mérite» et virer les «mauvais». Le mérite dans l'Education Nationale se mesure surtout à la vigueur de la langue et à la soumission à une doctrine. Depuis vingt ans, les ministres de gauche ou de droite valsent mais l'orchestre n'a pas changé et c'est toujours la même musique ou plutôt les mêmes inepties pseudo-scientifiques que l'on entend. Il y a tant d'experts que l'on en vient à regretter les ignorants d'antan. Des «mauvais profs», il y en a certainement. Mais ce n'est pas la «formation» dispensée qui améliorera les choses. Cette année, seule la moitié des postes au CAPES de mathématique a été pourvue car beaucoup de candidats n'avaient pas le niveau suffisant. Nul ne reprochera aux jurys du concours d'avoir fait leur boulot. Mais la conséquence de cette moisson décevante sera que le ministère complétera les postes vacants à l'aide de Pôle Emploi, c'est-à-dire en embauchant n'importe qui. Peu importent les compétences, l'essentiel est que les élèves aient quelqu'un en face d'eux. C'est ce que l'on appelle une démarche comptaible : une classe avec un prof...enfin quelqu'un.

Les problèmes de l'Instruction Publique en France ne proviennent pas nécessairement d'une insuffisance du terrain ou d'un manque de moyens (ils ne seront jamais suffisants !) mais surtout de l'état d'esprit et de la médiocrité des experts-bureaucrates qui nous gèrent. Ils n'enseignent pas, ils n'instruisent pas, ils ne forment pas, ils ne servent même pas mais ils gèrent une structure dont ils ignorent la réalité et surtout le métier mais sur laquelle ils ont des tas d'idées. Ils gèrent un désastre qu'ils ont créé. Mais ça, ils ne vous le diront jamais.

Les exercices de ce volume sont classés par catégories :

Analyse	2
Complexes et géométrie	24
Equations différentielles, primitives et intégrales	36
Probabilités	43
Suites	46

La taverne de l'Irlandais[\[http://www.tanopah.com\]](http://www.tanopah.com)

présente

VIENS AVEC NOUS ...en terminale S !

Tous les exercices du présent document ont été conçus et réalisés par Jérôme ONILLON,
professeur (dés)agréé de mathématiques.

Tous droits réservés.

**Non conformité
certaine !**

Edition du samedi 30 juin 2012

Analyse

L'exemple rationnel

Le contexte

Un étude d'une fonction rationnelle des plus classiques. Au menu : limites et asymptotes, puis les variations. Le b-a--b-a de ce qu'il faut savoir à l'orée d'une terminale S.

L'énoncé et le corrigé

La fonction φ est définie par :

$$\varphi(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ .

Les numérateur $x^2 + 3$ et dénominateur $x + 1$ de la fonction rationnelle φ sont clairement définis sur $\mathbb{R}$.

Le quotient $\varphi(x)$ existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $x + 1$ est non nul

$$\Leftrightarrow x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction φ est $\mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

b) Déterminer les limites de la fonction φ aux bornes de son ensemble de définition.

Au vu de l'ensemble de définition de la fonction φ , quatre limites sont à déterminer.

♥ La limite de φ au voisinage de $+\infty$.

De prime abord :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Forme indéterminée}$$

L'écriture initiale de $\varphi(x)$ ne permettant pas de conclure, nous allons la modifier en factorisant numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts de façon à assouplir le quotient. Pour tout réel non nul x , nous pouvons écrire :

$$\varphi(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1} = \frac{x^2 \times \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{x \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = x \times \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Voyons si, à présent, nous pouvons nous prononcer quant à la limite de φ en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = (+\infty) \times \frac{1 + 0^+}{1 + 0^+} = (+\infty) \times \frac{1}{1} = +\infty$$

♥ La limite de φ au voisinage de $-\infty$

D'entrée, utilisons la forme modifiée pour connaître la limite de φ en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = (-\infty) \times \frac{1 + 0^+}{1 + 0^-} = (-\infty) \times \frac{1}{1} = -\infty$$

Question de continuité...

♥ Les limites de φ au voisinage de -1

Quand x tend vers -1 par la gauche, $x^2 + 3$ tend vers $(-1)^2 + 3 = 4$
 $x + 1$ tend vers 0^-

Il vient alors :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \varphi(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

x	$-\infty$	$\rightarrow -1$	$+\infty$
x+1	-	0	+

De même, quand x se rapproche de -1 par la droite, $x^2 + 3$ tend vers 4

$x + 1$ tend vers 0^+

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \varphi(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

x	$-\infty$	$-1 \leftarrow$	$+\infty$
x+1	-	0	+

La conséquence graphique de ces deux limites infinies est que la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

c) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis. Déterminer la position relative de (C) par rapport à son asymptote Δ .

Pour ce faire, nous allons déterminer les limites aux infinis de la différence d'ordonnées $y_{(C)} - y_{\Delta}$ existant entre la courbe (C) et la droite Δ .

D'abord, simplifions-en l'écriture ! Pour tout réel $x \neq -1$, nous pouvons écrire :

$$y_{(C)} - y_{\Delta} = \frac{x^2 + 3}{x + 1} - (x - 1) = \frac{x^2 + 3 - (x - 1) \times (x + 1)}{x + 1} = \frac{\cancel{x^2} + 3 - \cancel{x^2} + 1}{x + 1} = \frac{4}{x + 1}$$

Il vient alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y_{(C)} - y_{\Delta} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 1} = \frac{4}{-\infty} = 0^- \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y_{(C)} - y_{\Delta} = \frac{4}{+\infty} = 0^+$$

Conclusion : la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis.

La position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote Δ va nous être donnée par le signe de leur différence d'ordonnées $y_{(C)} - y_{\Delta}$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
4	+	+	
$x+1$	-	0	+
$y_{(C)} - y_{\Delta}$	-		+
	(C) est au-dessous de Δ		(C) est au-dessus de Δ

d) Etudier les variations de la fonction φ aux bornes de son ensemble de définition.

Examinons les numérateur et dénominateur composant la fonction rationnelle φ :

$$u(x) = x^2 + 3$$

$$u'(x) = 2x$$

Dérivable sur $\mathbb{R}$

$$v(x) = x + 1$$

$$v'(x) = 1$$

Dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Donc la fonction $\varphi = \frac{u}{v}$ est dérivable sur l'ensemble $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

Pour tout réel x de cet ensemble, nous pouvons écrire :

$$\varphi'(x) = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2} = \frac{2x \times (x+1) - 1 \times (x^2 + 3)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

Le signe de la dérivée $\varphi'(x)$ va nous donner les variations de la fonction φ .

Pour ce faire, étudions le signe du numérateur $N(x) = x^2 + 2x - 3$.

Vu que c'est une forme du second degré, calculons-en le discriminant.

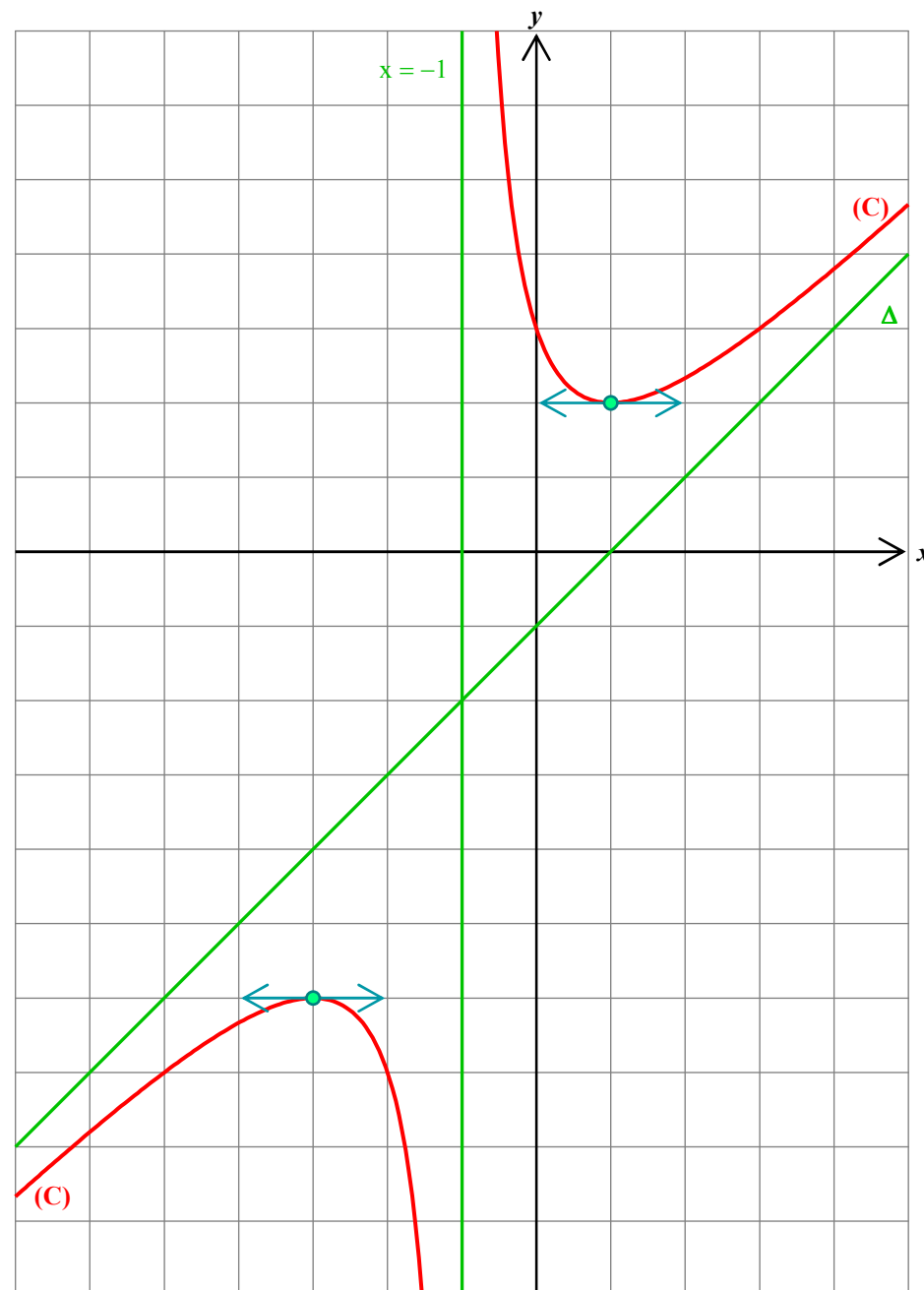
$$\Delta_{N(x)} = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

Comme son discriminant est positif, alors la forme du second degré $N(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-2-4}{2 \times 1} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+4}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$N(x)$ est du signe de son coefficient dominant 1, donc positif, avant -3 et après 1.

A contrario, il est négatif sur l'intervalle $]-3; 1[$.



Il vient alors :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$N(x)$		+	0	-	+
$(x+1)^2$		+		+	+
$\varphi'(x)$		+	0	-	+
φ		-6			

Avec :

$$\varphi(-3) = \frac{9+3}{-3+1} = \frac{12}{-2} = -6$$

$$\varphi(1) = \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

Rationnellement vôtre !

Le contexte

Une seconde étude d'une fonction rationnelle. Là encore, c'est du grand classique : limites et asymptotes, puis variations via l'étude d'un polynôme du troisième degré.

L'énoncé

La fonction f est définie par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 7}{x^2 - 2}$$

Sa courbe représentative (C) a été tracée ci-après en trait plein. Ont également été tracées en tirets ses asymptotes et ses deux tangentes horizontales. Le repère n'est pas orthonormé. Dans tout le problème, une attention particulière sera portée aux justifications apportées.

a) Justifier que l'ensemble de définition de la fonction f est :

$$D_f =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$$

b) Déterminer les six limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. On indiquera quelles sont les éventuelles conséquences graphiques de ces limites.

c) Nous allons établir l'existence d'une asymptote oblique à la courbe (C) aux voisinages des infinis.

1. Par la méthode de votre choix, déterminer trois coefficients réels a , b et c tels que pour tout réel $x \in D_f$, on ait :

$$f(x) = ax + \frac{bx+c}{x^2-2}$$

2. En déduire que la courbe (C) admet aux voisinages des infinis une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation.
Une grande attention sera apportée aux justifications apportées ainsi qu'à la rédaction.
3. Etudier la position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote Δ .

d) On appelle φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = x^3 - 6x + 7$$

Nous allons étudier la fonction auxiliaire φ .

1. Déterminer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer la dérivée $\varphi'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction φ .
3. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α .
Dans le reste du problème, on admettra qu'une valeur approchée de α est $-2,9$.
4. Dédire des questions d.2 et d.3 le tableau de signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

e) Pour finir, nous allons étudier les variations de la fonction f .

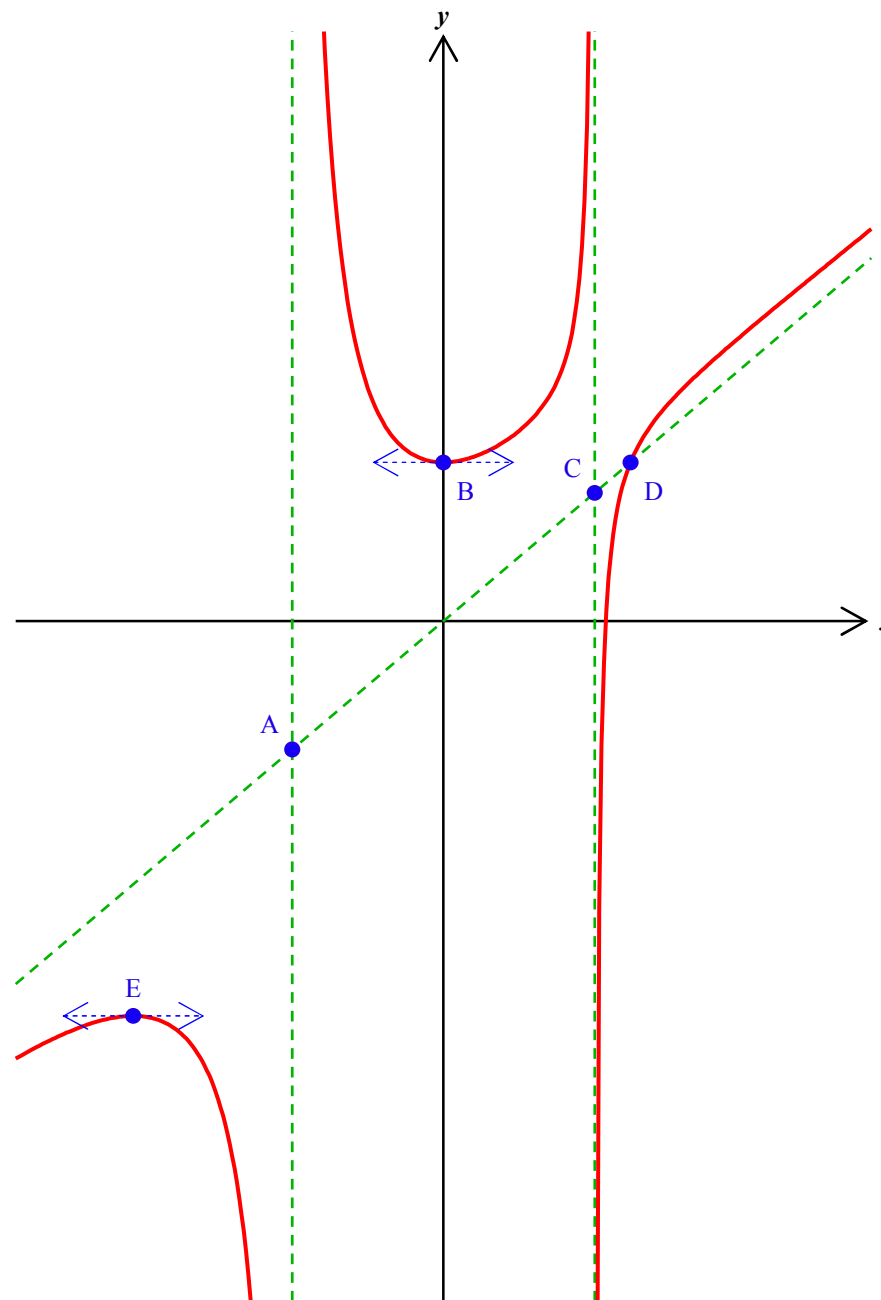
1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .
2. En dérivant la fonction f , établir que :

$$f'(x) = \frac{2x \times \varphi(x)}{(x^2 - 2)^2}$$

3. En utilisant le résultat de la question d.4, dresser le tableau de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.

f) Sur le graphique au verso, on a tracé en trait plein la courbe (C) représentant la fonction f ainsi que ses trois asymptotes et ses deux tangentes horizontales. Le repère est orthogonal, non orthonormal et les unités ne sont pas précisées.

En utilisant les questions précédentes, indiquer les coordonnées des points A, B, C, D et E. Aucune justification n'est demandée.



Le corrigé

a) La fonction f est le quotient des fonctions $u(x) = 2x^3 - 7$ et $v(x) = x^2 - 2$ qui sont définies sur $\mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{Le quotient } f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \text{Son dénominateur } x^2 - 2 \text{ est non nul} \\ &\Leftrightarrow x^2 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq -\sqrt{2} \text{ et } x \neq \sqrt{2} \\ &\quad \text{Deux nombres ont pour carré 2 : } \sqrt{2} \text{ et son opposé.} \end{aligned}$$

Conclusion : à l'exception de $\sqrt{2}$ et de son opposé, tous les réels ont une image par la fonction f . Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction f est :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\} =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$$

b) Il y a autant de limites à chercher que l'ensemble de définition de f possède de bornes ouvertes : au total six.

♥ **Les limites de f aux infinis.**

De façon à éviter une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$, nous allons factoriser

préventivement les numérateur et dénominateur de $f(x)$ par leurs termes nous paraissant les plus forts.

Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 7}{x^2 - 2} = \frac{x^3 \times \left(2 - \frac{7}{x^3}\right)}{x^2 \times \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{x^3}{x^2} \times \frac{2 - \frac{7}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2}} = x \times \frac{2 - \frac{7}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2}}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{2 - \frac{7}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2}} = (-\infty) \times \frac{2 - \frac{7}{-\infty}}{1 - \frac{2}{+\infty}} = (-\infty) \times \frac{2 - 0^-}{1 - 0^+} = (-\infty) \times \frac{2}{1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \frac{2 - \frac{7}{x^3}}{1 - \frac{2}{x^2}} = (+\infty) \times \frac{2 - \frac{7}{+\infty}}{1 - \frac{2}{+\infty}} = (+\infty) \times \frac{2 - 0^+}{1 - 0^+} = (+\infty) \times \frac{2}{1} = +\infty \end{aligned}$$

Ces deux limites infinies aux infinis ne permettent pas de se prononcer sur la présence d'une éventuelle asymptote.

♥ **Les limites de f aux voisinages de $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.**

Le dénominateur $v(x) = x^2 - 2$ s'annulant en ces deux valeurs, il n'est pas inutile d'en dresser le tableau de signe :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
x^2-2	+	0	-	0	+

D'abord intéressons-nous aux limites de f en $-\sqrt{2}$.

La continuité de la fonction u en $\sqrt{2}$ fait que quand x tend vers $-\sqrt{2}$, le numérateur

$$u(x) = 2x^3 - 7 \text{ tend vers : } u(-\sqrt{2}) = 2 \times (-\sqrt{2})^3 - 7 = 2 \times (-2\sqrt{2}) - 7 = -4\sqrt{2} - 7$$

Cette somme de deux termes négatifs est négative.

Il vient alors :

A gauche de $-\sqrt{2}$...

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} f(x) = \frac{\text{Négatif}}{0^+} = -\infty$$

A droite de $-\sqrt{2}$...

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} f(x) = \frac{\text{Négatif}}{0^-} = +\infty$$

La conséquence graphique de ces limites infinies est que la droite d'équation $x = -\sqrt{2}$ est une asymptote verticale à la courbe (C) ainsi que le montre le graphique.

A présent, examinons ce qu'il advient de la fonction f au voisinage de $\sqrt{2}$.

Toujours pour une histoire de continuité de la fonction u , lorsque x tend vers $\sqrt{2}$, $u(x)$

$$\text{tend vers } u(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^3 - 7 = 2 \times (2\sqrt{2}) - 7 = 4\sqrt{2} - 7$$

Mais quel est le signe de cette différence ?

Pour connaître le signe de $4\sqrt{2} - 7$, essayons de l'encadrer.

Nous savons qu'un encadrement au dixième de $\sqrt{2}$ est :

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \xrightarrow{\times 4} 5,6 < 4\sqrt{2} < 6 \xrightarrow{-7} -1,4 < 4\sqrt{2} - 7 < -1$$

Donc $u(\sqrt{2})$ est clairement une quantité négative. Par suite :

A gauche de $\sqrt{2}$...

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = \frac{\text{Négatif aussi}}{0^-} = +\infty$$

A droite de $\sqrt{2}$...

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} f(x) = \frac{\text{Toujours négatif}}{0^+} = +\infty$$

Là encore, les limites infinies induisent que la droite d'équation $x = \sqrt{2}$ est une asymptote verticale à la courbe (C) . Sur le graphique, elle se trouve à droite de l'axe des ordonnées.

c.1) Deux méthodes permettent de décomposer la fonction rationnelle $f(x)$.

❶ On peut chercher à identifier les coefficients des numérateurs

On veut écrire la fonction rationnelle f sous la forme :

$$f(x) = a.x + \frac{b.x + c}{x^2 - 2}$$

$$= \frac{a.x \times (x^2 - 2) + b.x + c}{x^2 - 2} = \frac{a.x^3 - 2ax + bx + c}{x^2 - 2}$$

$$\frac{2 \times x^3 + 0 \times x^2 + 0 \times x + (-7)}{x^2 - 2} = \frac{a \times x^3 + 0 \times x^2 + (b - 2a) \times x + c}{x^2 - 2}$$

Ces deux fractions ayant le même dénominateur, leurs deux numérateurs sont égaux.
Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux.

En x^3 : $2 = a$ Et d'un ! En x : $0 = b - 2.a \Leftrightarrow 0 = b - 4 \Leftrightarrow b = 4$

En x^2 : $0 = 0$ Quel scoop ! Constants : $-7 = c$ Et de trois !

Conclusion : la forme décomposée de la fonction rationnelle $f(x)$ est :

$$f(x) = 2x + \frac{4x - 7}{x^2 - 2}$$

❷ On peut chercher à extraire le dénominateur du numérateur

C'est une division euclidienne de polynômes qui ne dit pas son nom...

Pour tout réel $x \in D_f$, nous pouvons écrire :

Combien de fois $x^2 - 2$? $= 2.x^3$

$$f(x) = \frac{2.x^3 - 7}{x^2 - 2} = \frac{2.x \times (x^2 - 2) + 4.x - 7}{x^2 - 2} = 2.x \times \frac{x^2 - 2}{x^2 - 2} + \frac{4.x - 7}{x^2 - 2} = 2.x + \frac{4.x - 7}{x^2 - 2}$$

On fractionne la fraction pour simplifier...

c.2) Vue la forme décomposée de $f(x)$, il semblerait que la droite Δ d'équation $y = 2x$ soit une asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis.

Pour le vérifier, nous allons nous intéresser aux limites aux infinis de la différence d'ordonnées existant entre la courbe (C) et la droite Δ pour une même abscisse x .

$$y_{(C)} - y_{\Delta} = f(x) - 2.x = \frac{4.x - 7}{x^2 - 2} - 2.x = \frac{4.x - 7}{x^2 - 2} - \frac{2.x \times (x^2 - 2)}{x^2 - 2} = \frac{4.x - 7 - 2.x \times (x^2 - 2)}{x^2 - 2} = \frac{4.x - 7 - 2.x^3 + 4.x}{x^2 - 2} = \frac{-2.x^3 + 8.x - 7}{x^2 - 2}$$

Levons l'indétermination ∞/∞

Il vient alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y_{(C)} - y_{\Delta} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \times \frac{4 - \frac{7}{x}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{-\infty} \times \frac{2 - \frac{7}{-\infty}}{1 - \frac{2}{+\infty}} = 0^- \times \frac{2 - 0^-}{1 - 0^+} = 0^- \times \frac{2}{1} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_{(C)} - y_{\Delta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{4 - \frac{7}{x}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{+\infty} \times \frac{2 - \frac{7}{+\infty}}{1 - \frac{2}{+\infty}} = 0^+ \times \frac{2 - 0^+}{1 - 0^+} = 0^+ \times \frac{2}{1} = 0^+$$

Conclusion : la droite Δ d'équation $y = 2x$ est bien une asymptote à la courbe (C) aux voisinages de infinis.

c.3) La position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote Δ est donnée par le signe de leur différence d'ordonnées $y_{(C)} - y_{\Delta} = \frac{4x - 7}{x^2 - 2}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$			
$4x-7$	-		-	-	0	+		
x^2-2	+		0	-	0	+		
$y_{(C)}-y_{\Delta}$	-			+		-	0	+

Conclusion : (C) est au-dessous de Δ sur les intervalles $]-\infty; -\sqrt{2}[$ et $]\sqrt{2}; \frac{7}{4}[$.

La courbe est au-dessus de l'asymptote sur les intervalles $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ et $]\frac{7}{4}; +\infty[$.

Elles se croisent en $x = 1,75$.

d.1) De façon à éviter toute forme indéterminée du type $\infty - \infty$, factorisons $\varphi(x)$ par son terme dominant x^3 . Pour tout réel non nul x , nous pouvons écrire :

$$\varphi(x) = x^3 - 6.x + 7 = x^3 \times \left(1 - \frac{6x}{x^3} + \frac{7}{x^3}\right) = x^3 \times \left(1 - \frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)$$

Il vient alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = (-\infty) \times \left(1 - \frac{6}{+\infty} + \frac{7}{-\infty}\right) = (-\infty) \times (1 - 0^+ + 0^-) = (-\infty) \times 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = (+\infty) \times \left(1 - \frac{6}{+\infty} + \frac{7}{+\infty}\right) = (+\infty) \times (1 - 0^+ + 0^+) = (+\infty) \times 1 = +\infty$$

d.2) Le polynôme du troisième degré φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , nous avons :

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 6x + 1 + 0$$

$$= 3x^2 - 6 = 3 \times (x^2 - 2)$$

Le signe de la dérivée $\varphi'(x)$

donne les variations de la fonction φ ci-contre →

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
3		+	+	+		
x^2-2		+	0	-	0	+
$\varphi'(x)$		+	0	-	0	+
φ		$4\sqrt{2}+7$				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
	$-\infty$	$7-4\sqrt{2}$				

Calculons les valeurs des extrema locaux de f en $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

$$\varphi(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^3 - 6 \times (-\sqrt{2}) + 7 = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 7 = 4\sqrt{2} + 7$$

$$\varphi(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 6 \times \sqrt{2} + 7 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 7 = -4\sqrt{2} + 7$$

d.3) Si $\varphi(-\sqrt{2})$ est clairement positif car c'est la somme de deux termes positifs, le signe de $\varphi(\sqrt{2})$ est plus incertain. Essayons d'encadrer cette image ! Nous savons :

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \xrightarrow{\times(-4)} -5,6 > -4\sqrt{2} > -6 \xrightarrow{+7} 1,4 > 7 - 4\sqrt{2} > 1$$

De par l'encadrement, l'image $\varphi(\sqrt{2})$ est clairement un nombre strictement positif.

A présent, nous sommes en position de démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

D'abord, comme la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors elle y est continue.

Ensuite, une partition de $\mathbb{R}$ est $]-\infty; -\sqrt{2}] \cup]-\sqrt{2}; +\infty[$.

♥ Comme φ est strictement croissante sur $]-\infty; -\sqrt{2}]$,

$$0 \in]-\infty; 4\sqrt{2} + 7] = \varphi(]-\infty; -\sqrt{2}])$$

alors, d'après le théorème dit de la «bijection», 0 admet un unique antécédent par la fonction φ dans l'intervalle $]-\infty; -\sqrt{2}]$.

♥ Comme le minimum de la fonction φ sur l'intervalle $]-\sqrt{2}; +\infty[$ est le nombre

positif $7 - 4\sqrt{2}$, alors 0 n'admet aucun antécédent dans cet intervalle.

Conclusion : l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Un encadrement au dixième de cette solution α est :

$$-3 < \alpha < -2,9$$

d.4) Compte tenu de la question précédente et du tableau de variation de la fonction φ , nous en déduisons que le tableau de signe de $\varphi(x)$ est :

X	$-\infty$	α	$+\infty$	
$\varphi(X)$		-	0	+

e.) f est le quotient des fonctions :

$$u(x) = 2x^3 - 7$$

$$u'(x) = 2 \times 3x^2 - 0 = 6x^2$$

Dérivable sur $\mathbb{R}$

$$v(x) = x^2 - 2$$

$$v'(x) = 2 \cdot x - 0 = 2x$$

Dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$

Par conséquent, la fonction $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$ et :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{[v(x)]^2} = \frac{6x^2 \times (x^2 - 2) - 2x \times (2x^3 - 7)}{(x^2 - 2)^2}$$

$$= \frac{6x^4 - 12x^2 - 4x^4 + 14x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x^4 - 12x^2 + 14x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x \times \overbrace{(x^3 - 6x + 7)}^{\varphi(x)}}{(x^2 - 2)^2}$$

Connaissant les signes de tous les facteurs, nous pouvons en déduire le signe de la dérivée $f'(x)$ et les variations de la fonction f .

x	$-\infty$	α	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
2.x		-	-	- 0 +		+
$\varphi(x)$		- 0 +		+ +		+
$(x^2 - 2)^2$		+ + 0 +		+ 0 +		
$\varphi'(x)$		+ 0 -		- 0 +		+
φ	$-\infty$	$\varphi(\alpha)$	$-\infty$	$7/2$	$+\infty$	$+\infty$

f) Les questions précédentes nous ont apportées les clés de cette dernière...question.

- ♥ A est le point d'intersection des asymptotes d'équation $x = -\sqrt{2}$ et $y = 2x$.

Par conséquent, ses coordonnées sont $(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$. *Un point appartient à une droite si ses coordonnées en vérifient l'équation...*

- ♥ B est le point de la courbe (C) dont l'abscisse est égale à 0. L'ordonnée de B est l'image de son abscisse. Les coordonnées de B sont $(0; 3, 5)$.

- ♥ C est le point d'intersection des asymptotes d'équation $x = \sqrt{2}$ et $y = 2x$. Ses coordonnées sont $(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$. *Même chose que pour A...*

- ♥ D est le point d'intersection de la courbe (C) et de l'asymptote Δ dont l'équation réduite est $y = 2x$. D'après la question c.3, l'abscisse de ce point est $\frac{7}{4}$.

Les coordonnées du point D sont $(\frac{7}{4}; \frac{7}{2})$. *Les coordonnées de D vérifient l'équation de Δ .*

- ♥ Le point E est l'autre extremum local de la fonction f . Son abscisse est α et son ordonnée $f(\alpha)$. On ne peut pas faire mieux !

Le but était de voir si les bases de la programmation avaient été assimilées : affectations de variables, instructions de test et de boucles.

Dérivées de base !

Le contexte

Un exercice classique d'application des formules de dérivation.

L'énoncé et le corrigé

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sin(7x+1)$$

La fonction $f(x) = \sin(7x+1) = v(u)$ est la composée suivante :

$$x \xrightarrow{u(t)=7t+1} 7x+1 \xrightarrow{v(t)=\sin(t)} \sin(7x+1) = f(x)$$

où $\begin{cases} v(t) = \sin(t) \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x) = 7x+1 \\ u'(x) = 7 \end{cases}$
 Dérivable sur $\mathbb{R}$ Dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc la composée f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , nous avons :

$$f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 7 \times \cos(7x+1)$$

2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$$

La fonction g est de la forme :

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{u}$$

où $\begin{cases} u(x) = x^2 - x - 6 \\ u'(x) = 2x - 1 \end{cases}$
 Dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$

Donc la fonction $g = \frac{1}{u}$ est dérivable sur

l'ensemble $]-\infty; -2[\cup]-2; 3[\cup]3; +\infty[$ et :

$$g'(x) = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{2x-1}{(x^2-x-6)^2} = \frac{1-2x}{(x^2-x-6)^2}$$

Où $u(x)$ s'annule-t-il ?

$$\Delta_{u(x)} = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2$$

Son discriminant étant positif, la forme du second degré $u(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-1) - 5}{2 \times 1} = -2$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + 5}{2 \times 1} = 3$$

Bonus !

Le tableau de signe de la dérivée $g'(x)$ et de variation de la fonction g est dressé ci-contre →

x	$-\infty$	-2	1/2	3	$+\infty$
$1-2x$	+	+	0	-	-
u^2	+	0	-	0	+
$g'(x)$	+	+	0	-	-
g	0^+	$+\infty$	$-4/25$	$+\infty$	0^+

3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction h définie par :

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

La fonction h est de la forme :

$$h(x) = \sqrt{u(x)}$$

où $u(x) = x^2 - 4$

$$u'(x) = 2x$$

Dérivable sur $\mathbb{R}$

Positive sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

Donc la fonction h est dérivable sur la réunion d'intervalles $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ et pour tout réel x de cet ensemble, on a :

$$h'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

Le tableau de signe de $u(x)$.

Nul besoin de calculer le moindre discriminant car $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Par conséquent :

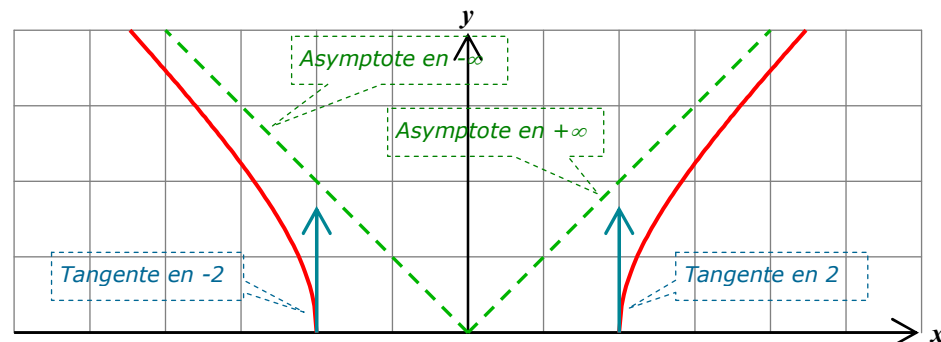
x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$x+2$	-	0	+	+	
$x-2$	-	-	0	+	
$u(x)$	+	0	-	0	+

Bonus !

Le tableau de variation de la fonction h est celui ci-contre →

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$\sqrt{x^2-4}$	+	0	Non définie	0	+
$h'(x)$	-	Non définie	Non définie	+	+
h	$+\infty$	0	Non définie	0	$+\infty$

Note : la fonction h est définie et continue en -2 et 2. Par contre, elle n'y est pas dérivable.



4. Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction j définie par :

$$j(x) = \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^3$$

La fonction j est de la forme :

$$j(x) = \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^3 = u^3$$

où $u(x) = \frac{x+5}{x-1}$

$$u'(x) = \frac{-6}{(x-1)^2}$$

Dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

La dérivée de quotient $u(x)$.

La fonction u est le quotient des fonctions :

$$\alpha(x) = x+5$$

$$\alpha'(x) = 1$$

Dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\beta(x) = x-1$$

$$\beta'(x) = 1$$

Dérivable sur $\mathbb{R}$

Non nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Donc la fonction j est dérivable sur l'ensemble $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} j'(x) &= 3 \times u' \times u^2 \\ &= 3 \times \frac{-6}{(x-1)^2} \times \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^2 \\ &= \frac{(-18) \times (x+5)^2}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

Donc la fonction $u = \frac{\alpha}{\beta}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

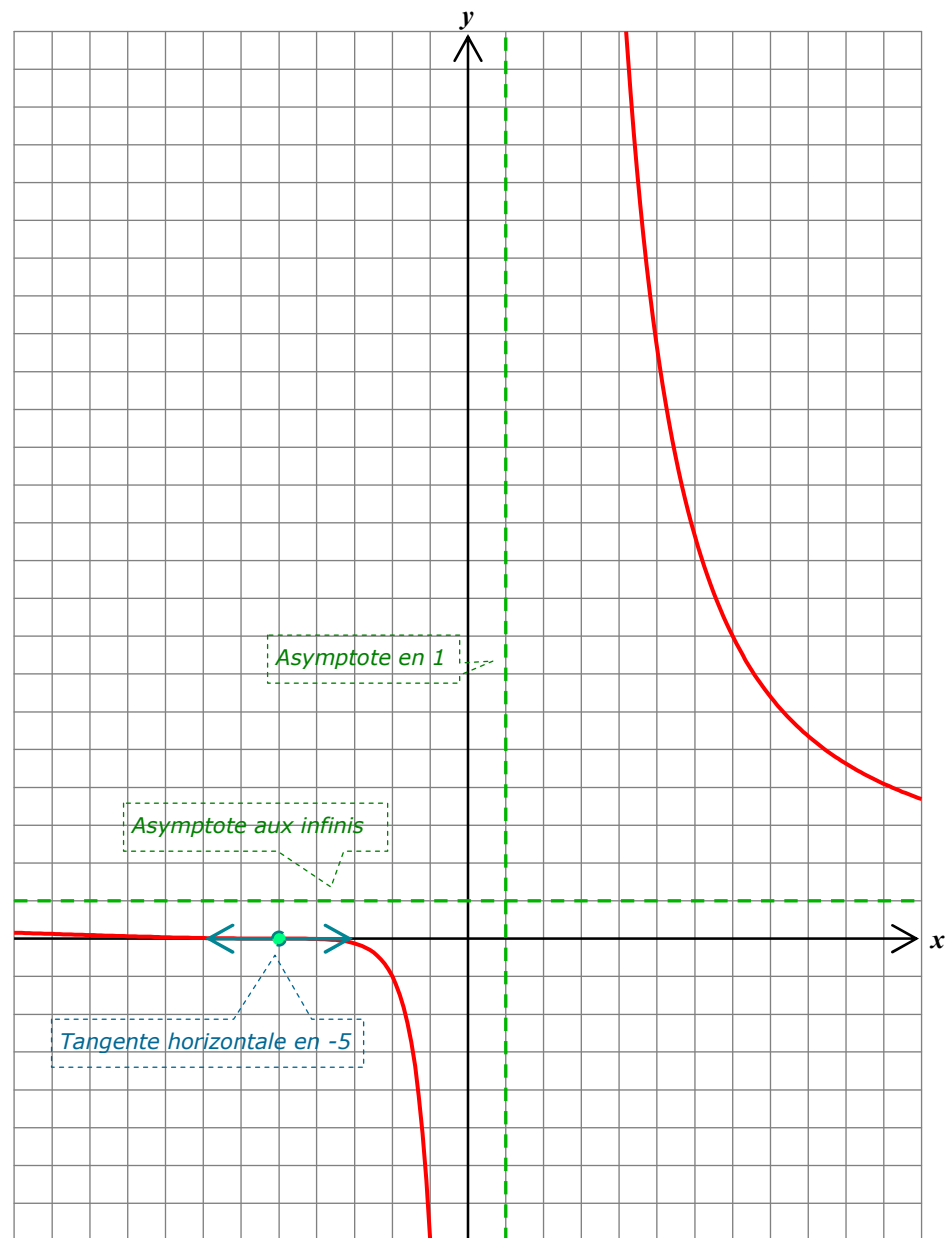
$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\alpha' \times \beta - \beta' \times \alpha}{(\beta)^2} \\ &= \frac{1 \times (x-1) - 1 \times (x+5)}{(x-1)^2} = \frac{-6}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Bonus !

Le tableau de signe de la dérivée $j'(x)$ et de variation de la fonction j est dressé ci-contre →

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
-18	-	-	-	-
$(x+5)^2$	+	0	+	+
$(x-1)^4$	+	+	0	+
$j'(x)$	-	0	-	-
j	1	↘		$+\infty$
				1

Note : même si la dérivée $j'(x)$ s'annule en -5 , cela n'interrompt pas la décroissance de la fonction j sur l'intervalle $]-\infty; 1[$. Tout au plus, la tangente en -5 est-elle horizontale.



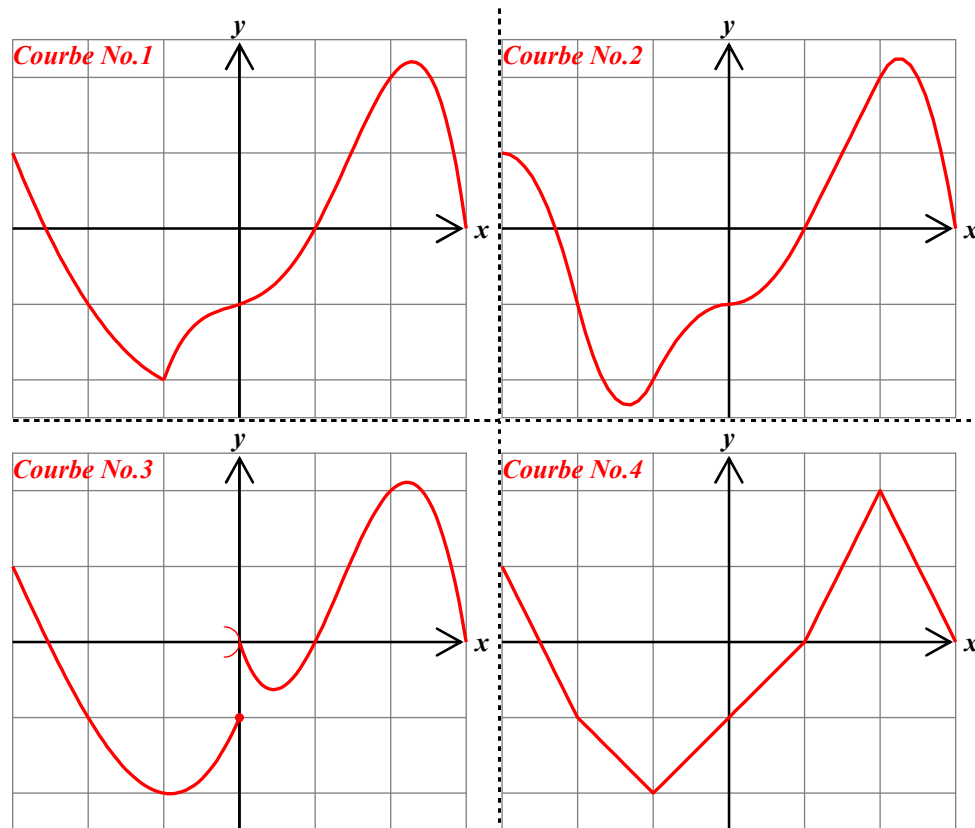
Au petit bonheur...des courbes

Le contexte

Un exercice graphique sur la continuité et la dérivabilité. Quelles sont les particularités des courbes de telles fonctions ?

L'énoncé

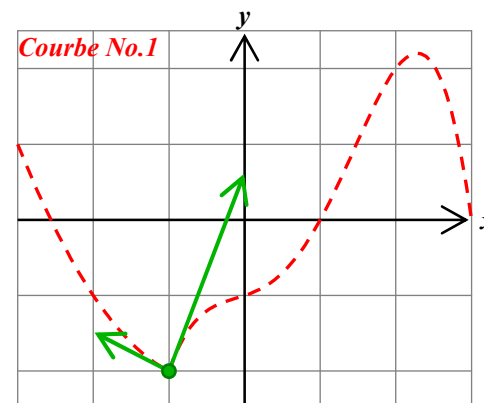
Les quatre courbes ci-dessous représentent quatre fonctions définies sur l'intervalle $[-3;3]$



Compléter le tableau ci-dessous en cochant les coches adéquates.
Chaque ligne correcte rapporte 0,5 points. Chaque ligne incorrecte enlève 0,25pt.
Aucune justification n'est demandée.
Une même ligne peut avoir une, deux voire aucune case cochée.

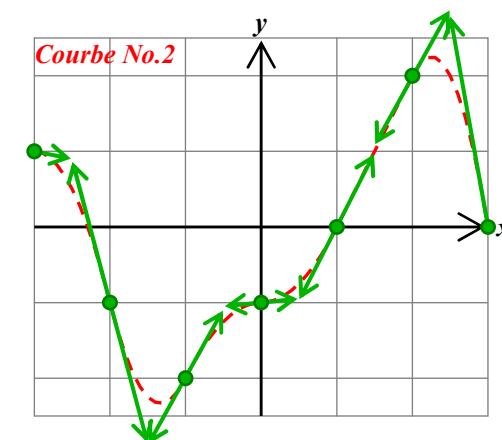
	...continue sur $[-3;3]$	...dérivable sur $[-3;3]$
La fonction représentée par la courbe 1 est...		
La fonction représentée par la courbe 2 est...		
La fonction représentée par la courbe 3 est...		
La fonction représentée par la courbe 4 est...		

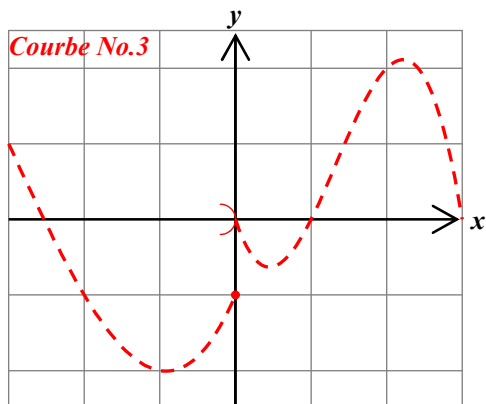
Le corrigé



← La courbe No.1 ne comportant aucune rupture ou discontinuité, la fonction f_1 qu'elle représente est continue sur $[-3;3]$.
Par contre, ses demi-tangentes en -1 n'étant pas supportées par la même droite, la fonction f_1 n'est pas dérivable en -1 .
Donc f_1 n'est pas dérivable sur $[-3;3]$.

La fonction f_2 représentée par la courbe No.2 est continue sur $[-3;3]$.
Elle est aussi dérivable sur cet intervalle car sa courbe ne comporte aucune «cassure». Les demi-tangentes en un même point s'emboîtent →.





← La courbe No.3 ayant une discontinuité en 0, la fonction f_3 qu'elle représente n'est pas continue sur $[-3;3]$.

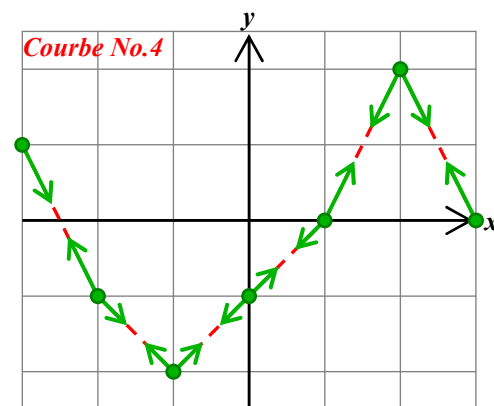
Par conséquent, elle ne peut pas être dérivable sur cet intervalle. Car la dérivabilité n'est possible qu'avec la continuité.

La fonction f_4 représentée par la courbe No.4 est clairement continue sur $[-3;3]$.

f_4 n'est pas dérivable en -2 ; -1 ; 1 et 2 .

En ces points, les demi-tangentes ne s'emboîtent pas.

Donc f_4 est continue mais non dérivable sur l'intervalle $[-3;3] \rightarrow$.



La dérive des limites continue...

Le contexte

Un second exercice sur la continuité et la dérivabilité. Cette fois, il s'agit d'utiliser les définitions de ces deux notions et les limites de référence de la fonction logarithme.

L'énoncé

On rappelle les deux définitions suivantes où f est une fonction définie au voisinage d'un réel a .

- ☑ Dire que la fonction f est continue en a signifie que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$
- ☑ Dire que la fonction f est dérivable en a signifie que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in]-1; 0] & \text{alors } f(x) = \ln(1+x) + 1 \\ \text{Si } x \in]0; +\infty[& \text{alors } f(x) = x \times \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right) \end{cases}$$

- a) Calculer $f(0)$.
- b) La fonction f est-elle continue en 0 ? On justifiera sa réponse.
- c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

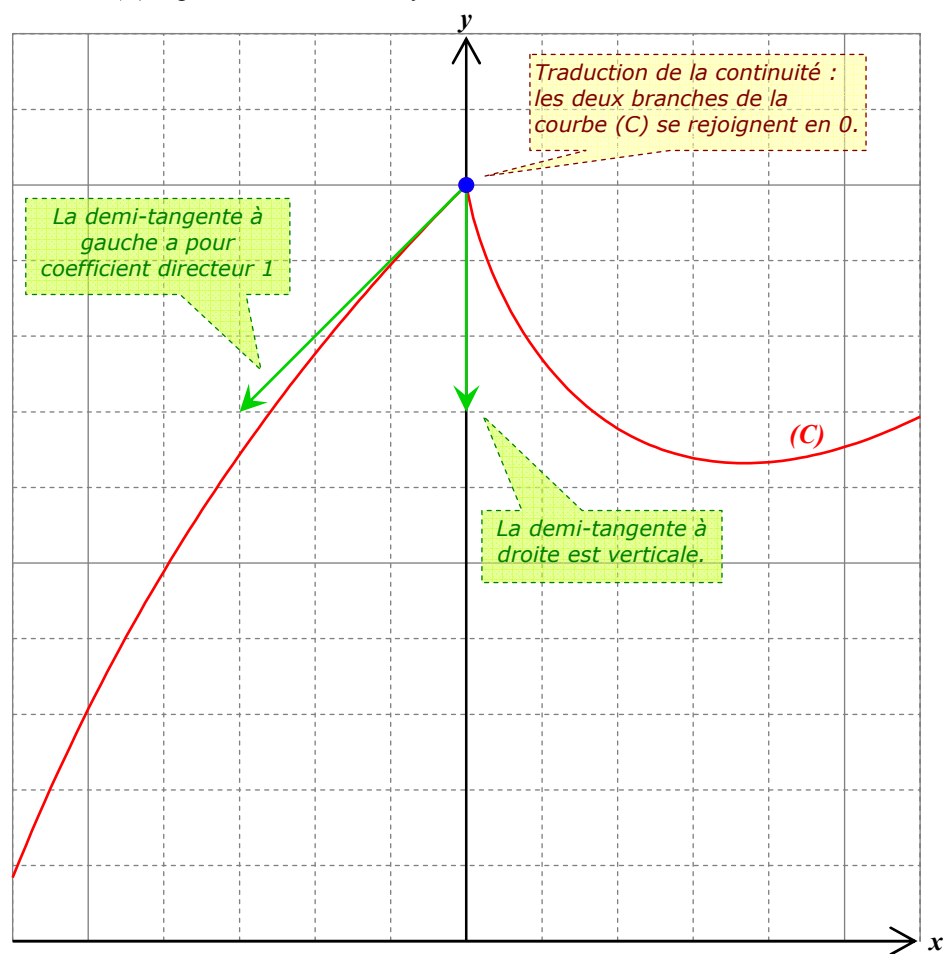
- a) Comme 0 appartient à l'intervalle $]-1; 0]$, alors son image par f est donnée par :

$$f(0) = \ln(1+0) + 1 = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = \underline{0}$$

- b) Il est clair que la fonction f est continue à gauche de 0. Ceci car, sur l'intervalle $]-1; 0]$, elle est la composée des fonctions continues (et même dérivables) :

$$x \xrightarrow[\substack{\text{Continue} \\ \text{sur }]-1; 0] }{\substack{u(t)=t+1}} 1+x \xrightarrow[\substack{\text{Continue} \\ \text{sur }]0; +\infty[}]{\ln} \ln(1+x) \xrightarrow[\substack{\text{Continue} \\ \text{sur } \mathbb{R}}]{\substack{u(t)=t+1}} f(x)$$

Les résultats établis dans cet exercice s'observent sur le graphique ci-dessous où est tracée la courbe (C) représentant la fonction f .



A présent, tout le problème est de savoir si f est continue à droite de 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right)$$

Grosse indétermination : $0 \times (\infty - \infty)$. Développons !

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \ln(x) + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \overbrace{x \times \ln(x)}^{0^-} + 1 = 0^- + 1 = 1 = f(0)$$

Donc la fonction f est continue à droite de 0.

Conclusion : la fonction f est continue en 0.

Vu en cours...

c) Pour savoir si la fonction f est dérivable en 0, nous devons déterminer les limites à gauche, puis à droite de 0 du quotient $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x}$

♥ La limite de ce quotient à gauche de 0.

On évolue sur $]-1; 0[$

D'après un résultat du cours...

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x) + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Donc f est dérivable à gauche de 0 et son nombre dérivé à gauche est égal à 1.

♥ La limite de ce quotient à droite de 0.

On évolue sur $]0; +\infty[$

D'après un résultat du cours...

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \times \ln x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \times \ln(x)}{x} = -\infty$$

Comme la limite du quotient n'est pas finie, alors la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0.

Conclusion : la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Ln est plus forte que l'amour !**Le contexte**

Etude d'une fonction à base de logarithme népérien. Au menu : limites et asymptotes, puis dérivée et variation.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2 + \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Calculer l'image de 3 par f . On l'exprimera sous la forme $f(3) = \dots + \dots \ln(2) + \dots \ln(5)$

b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

Quelle est la conséquence graphique de cette limite ?

c) On appelle Δ la droite d'équation $y = x + 2$.

1. Démontrer que la droite Δ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ .
4. Donner une valeur approchée à l'unité près de $f(1000001)$.

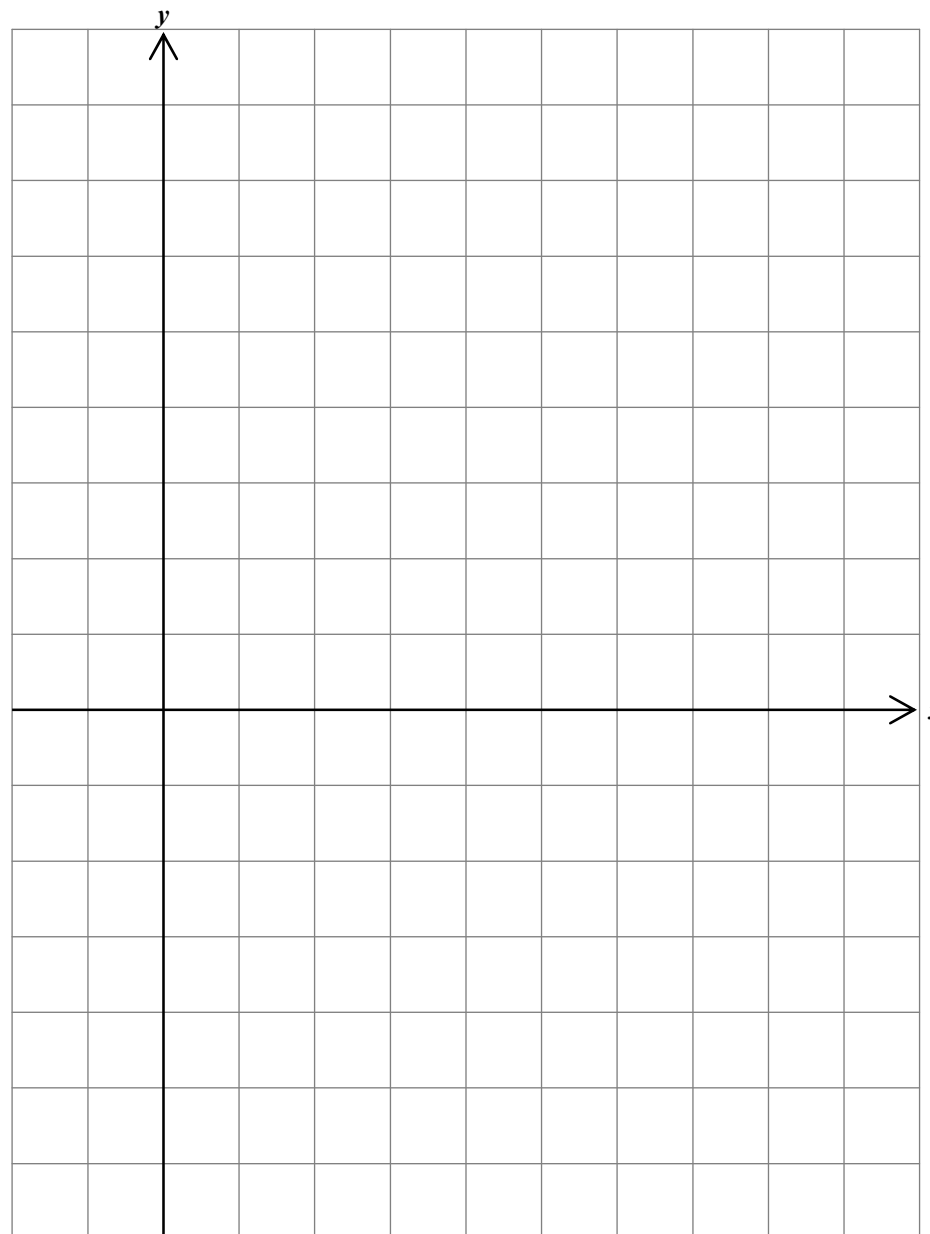
d) Dans les questions suivantes, on s'intéresse aux variations de la fonction f .

1. Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $]1; +\infty[$?
2. Etablir que pour tout réel x de l'intervalle $]1; +\infty[$, nous avons :

$$f'(x) = \frac{x^4 + 4x - 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

3. Démontrer que la fonction $N(x) = x^4 + 4x - 1$ est strictement positive sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
5. Combien l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle de solutions dans l'intervalle $]1; +\infty[$? On justifiera sa réponse.

e) Sur le graphique ci-dessous où une unité graphique vaut un centimètre, tracer une esquisse de la courbe (C) accompagnée de toutes ses asymptotes rencontrées au cours de l'exercice.



Le corrigé

a) Calculons l'image de 3 par la fonction f .

$$\begin{aligned} f(3) &= 3 + 2 + \ln\left(\frac{3^2 - 1}{3^2 + 1}\right) = 5 + \ln\left(\frac{9 - 1}{9 + 1}\right) = 5 + \ln\left(\frac{8}{10}\right) \\ &= 5 + \ln\left(\frac{4}{5}\right) = 5 + \ln(4) - \ln(5) = 5 + \ln(2^2) - \ln(5) = \underline{5 + 2 \times \ln(2) - \ln(5)} \end{aligned}$$

b) Quand x tend vers 1 par la droite, $x^2 - 1$ tend vers 0^+

x	$-\infty$	-1	$1 \leftarrow$	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$+$

et $x^2 + 1$ tend vers $1 + 1 = 2$

donc leur quotient $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ tend vers $\frac{0^+}{2} = 0^+$

et son logarithme $\ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ s'enfonce vers $-\infty$

Nous en concluons :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 2 + \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = 1 + 2 + (-\infty) = \underline{-\infty}$$

La conséquence graphique de cette limite est que la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe (C) .

c.1) Intéressons-nous au comportement au voisinage de $+\infty$ de la différence d'ordonnées existant entre la courbe (C) et la droite Δ pour une même abscisse x .

$$y_{(C)} - y_{\Delta} = f(x) - (x + 2) = \cancel{x} + \cancel{2} + \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) - \cancel{x} - \cancel{2} = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$$

Or :

On élude ainsi l'écueil de l'indétermination ∞/∞ en factorisant numérateur et dénominateur par leurs termes dominants.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \times \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2} \times \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0^+}{1 + 0^+} = \frac{1}{1} = \underline{1}$$

Comme la fonction $\ln$ est continue en 1, nous en déduisons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_{(C)} - y_{\Delta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = \ln(1) = \underline{0}$$

Conclusion : la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c.2) La courbe (C) et son asymptote Δ partagent la même limite en $+\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y_{\Delta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = \underline{+\infty}$$

c.3) La position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote Δ va nous être donnée

par le signe de leur différence d'ordonnées $y_{(C)} - y_{\Delta} = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$.

Or, le signe du logarithme $\ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$ est le même que celui de la différence :

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} - 1 = \frac{x^2 - 1 - 1 \times (x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2} - 1}{x^2 + 1} = \frac{-2}{x^2 + 1}$$

Le dénominateur $x^2 + 1$ étant toujours strictement positif, nous en déduisons que le

quotient $\frac{-2}{x^2 + 1}$ et donc la différence d'ordonnées $y_{(C)} - y_{\Delta}$ sont strictement négatifs sur

l'intervalle $]1; +\infty[$.

Conclusion : la courbe (C) est toujours au-dessous de son asymptote Δ .

c.4) Comme la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$ à la courbe (C) d'équation $y = f(x)$, alors, lorsque x est grand, une valeur approchée de $f(x)$ est $x + 2$.

Conclusion : une valeur approchée $f(1000001)$ est $1000001 + 2 = \underline{1000003}$.

d.1/2) Comme les quantités $x^2 - 1$ et $x^2 + 1$ sont strictement positives sur $]1; +\infty[$, alors sur cet intervalle, nous pouvons écrire :

$$f(x) = x + 2 + \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = x + 2 + \underbrace{\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)}_{\substack{\text{Le logarithme} \\ \text{d'un quotient...}}}$$

...la différence des logarithmes.

Examinons les termes composant cette dernière somme :

♥ Le terme affine $\alpha(x) = x + 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\alpha'(x) = 1$$

♥ Le terme $\beta(x) = \ln(x^2 - 1)$ est de la forme $\ln(u)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est strictement positive que sur l'ensemble $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

Donc la fonction β est dérivable sur ce dernier ensemble et :

$$\beta'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

♥ Le terme $\gamma(x) = \ln(x^2 + 1)$ est aussi de la forme $\ln(u)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + 1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$

Par contre, cette fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\gamma'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Nous en concluons que la fonction $f = \alpha + \beta - \gamma$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ (et même ailleurs) et que pour tout réel x de cet intervalle, nous avons :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha' + \beta' - \gamma' = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} \\ &= \frac{(x^2 - 1) \times (x^2 + 1) + 2x \times (x^2 + 1) - 2x \times (x^2 - 1)}{(x^2 - 1) \times (x^2 + 1)} \\ &= \frac{x^4 - 1 + 2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 - 1) \times (x^2 + 1)} = \frac{x^4 + 4x - 1}{(x^2 - 1) \times (x^2 + 1)} \end{aligned}$$

d.3) La puissance paire x^4 est strictement positive sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

De plus, si x appartient à l'intervalle $]1; +\infty[$, alors :

$$x > 1 \xrightarrow{\times 4} 4x > 4 \xrightarrow{-1} 4x - 1 > 3$$

Donc $4x - 1$ est positif

Conclusion : la somme $N(x)$ des deux termes strictement positifs x^4 et $4x - 1$ est aussi strictement positive sur l'intervalle $]1; +\infty[$..

d.4) Nous savons déjà que les facteurs du dénominateur $x^2 - 1$ et $x^2 + 1$ sont strictement positifs sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Nous en déduisons que la dérivée $f'(x) = \frac{\oplus}{\oplus \times \oplus}$ est

strictement positive sur $]1; +\infty[$.

Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction.

Conclusion : la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
f		$-\infty$

↗

d.5) La fonction f étant dérivable sur $]1; +\infty[$, elle est de facto continue sur cet intervalle.

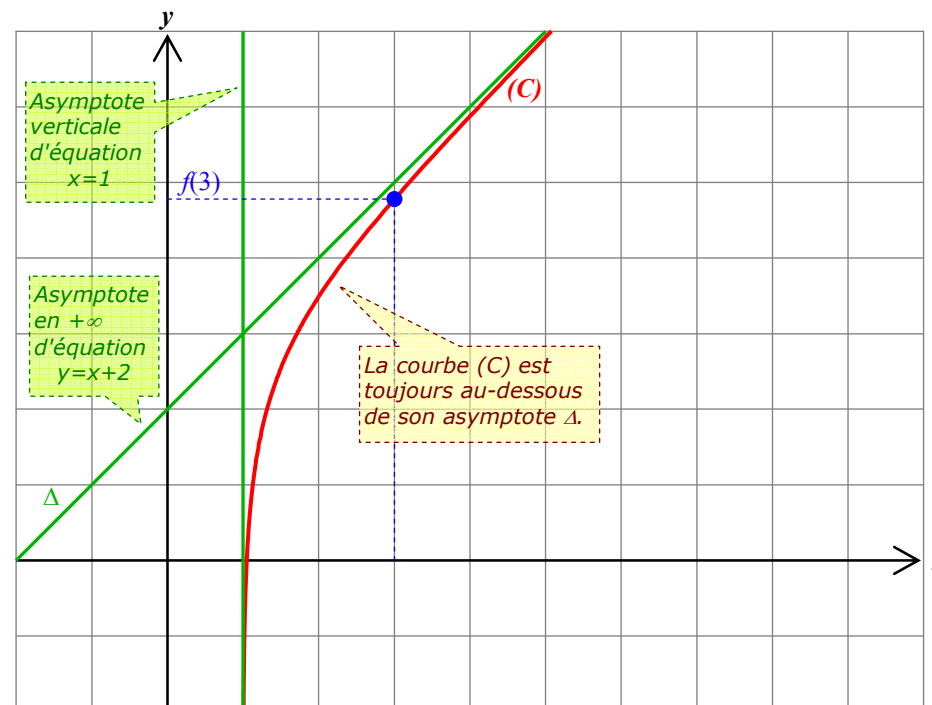
Ensuite, comme f est strictement monotone sur l'intervalle $]1; +\infty[$
 $0 \in]-\infty; +\infty[= f(]1; +\infty[)$

alors, en application du théorème de la bijection, 0 admet un unique antécédent par la fonction f dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

Une valeur approchée au centième de cette solution est 1,05.

e) La courbe (C) et ses deux asymptotes sont tracées sur le graphique ci-dessous ↓



Quand ln prend la tangente...

Le contexte

Cet exercice a été donné au bac. Il s'agit d'une étude d'une fonction à base de logarithme népérien qui se termine sur une exploitation graphique.

L'énoncé

Partie A

La fonction u est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$$

1. Etudier les variations de u sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et, préciser ses limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$. On notera cette solution α .

A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

4. Montrer l'égalité :

$$\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$$

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln(x))^2$$

1. Etablir que pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, on a :

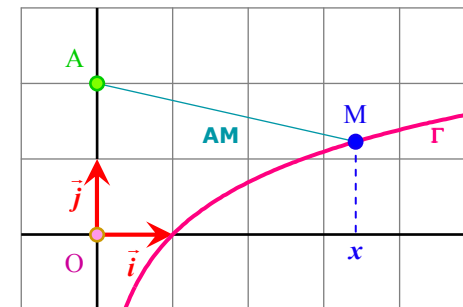
$$f'(x) = \frac{2u(x)}{x}$$

2. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie C

Sur la figure ci-contre, le plan est rapporté est un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et :

- ♥ Γ est la courbe représentative de la fonction $\ln$ (logarithme népérien).
- ♥ A est le point de coordonnées $(0; 2)$.
- ♥ M est le point de Γ d'abscisse x où x est un réel strictement positif.



1. Montrer que la distance AM est donnée par :

$$AM = \sqrt{f(x)}$$

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

- a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ , noté P, dont on précisera les coordonnées.
- c. Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.

3. Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à la courbe Γ en P ?

Le corrigé

Partie A

1. Commençons par déterminer les limites de la fonction u en 0^+ et en $+\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2 + \ln(x) & \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 + \ln(x) \\ &= 0^+ - 2 + (-\infty) = -\infty & &= (+\infty) - 2 + (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Asymptote verticale (Oy)

A présent, passons aux variations de u . Examinons les termes composant la somme $u(x)$.

$$u(x) = \underbrace{x^2 - 2}_{\text{Dérivable sur } \mathbb{R}} + \underbrace{\ln(x)}_{\text{Dérivable sur }]0; +\infty[}$$

Donc la fonction u est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$
et pour tout réel positif x , on a :

$$u'(x) = 2x - 0 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

Le numérateur $2x^2 + 1$ de la dérivée $u'(x)$ est toujours strictement positif : c'est la somme du double d'un carré qui n'est jamais négatif et de 1.
Le dénominateur x est lui aussi toujours positif sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Le signe de la dérivée $u'(x)$ nous donne les variations de la fonction u , ci-contre ↗

x	0	$+\infty$
$2x^2 + 1$	+	
x	+	
$u'(x)$	+	
u		$+\infty$
		$-\infty$

Deux autres manières plus rapides d'établir la croissance de la fonction u

u est la somme des fonctions $x^2 - 2$ et $\ln(x)$ qui sont strictement croissantes sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Il en va donc de même pour la fonction u ...

Et pour en revenir à la dérivée $u'(x)$, nul n'était besoin de se ramener à une fraction.

En effet, les termes $2x$ et $\frac{1}{x}$ étant strictement positifs sur l'intervalle $]0; +\infty[$, il en va de même pour leur somme $u'(x)$.

2. D'abord, la fonction u étant dérivable sur $]0; +\infty[$, elle est continue sur cet intervalle.

Ensuite, comme u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, alors, en application du

«théorème de la bijection», $0 \in]-\infty; +\infty[$ a un unique antécédent α par u dans $]0; +\infty[$.

D'après la calculatrice, un encadrement au centième de cet antécédent α est :

$$1,31 \leq \alpha \leq 1,32$$

3. Compte-tenu que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et qu'elle s'annule en α , nous en déduisons que le tableau de signe de $u(x)$ est le suivant :

x	0	α	$+\infty$
$u(x)$		- 0 +	

4. α est l'unique solution de l'équation $u(x) = 0$. Par conséquent, nous avons l'égalité :

$$u(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + \ln(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$$

Partie B

1. Comme la fonction $v(x) = 2 - \ln(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$v'(x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$$

alors il en va de même pour son carré v^2 et pour tout réel strictement positif x , nous avons :

$$(v^2)' = 2 \times v' \times v = 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) \times (2 - \ln(x)) = \frac{2 \ln(x) - 4}{x}$$

Comme la fonction carré est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que la somme $f = x^2 + v^2$ est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Sa dérivée est donnée par :

$$f'(x) = (x^2)' + (v^2)' = 2x + \frac{2 \ln(x) - 4}{x} = \frac{2x^2 + 2 \ln(x) - 4}{x} = \frac{2 \times (x^2 + \ln(x) - 2)}{x} = \frac{2 \times u(x)}{x}$$

2. Connaissant les signes des trois facteurs composant le quotient $f'(x)$, il nous est aisé d'en déduire le signe de cette dérivée et les variations de f .

Calculons l'image de α par f :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha^2 + (2 - \ln(\alpha))^2 \\ &= \alpha^2 + (2 - (2 - \alpha^2))^2 \\ &= \alpha^2 + (\alpha^2)^2 = \alpha^2 + \alpha^4 \end{aligned}$$

x	0	α	$+\infty$
2	+	+	
$u(x)$	-	0	+
x	+	+	
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$		$+\infty$

$$\alpha^4 + \alpha^2$$

Partie C

1. Le point A a pour coordonnées $(0; 2)$.

Comme le point M appartient à la courbe Γ d'équation $y = \ln(x)$, alors ses coordonnées sont $(x; \ln(x))$.

Par conséquent, la distance AM est donnée par.

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (\ln(x) - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (\ln(x) - 2)^2}$$

Or, la quantité $\ln(x) - 2$ et son opposé $2 - \ln(x)$ ont des carrés égaux. Il vient alors :

$$AM = \sqrt{x^2 + (\ln(x) - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - \ln(x))^2} = \sqrt{f(x)}$$

2.a. Comme la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et qu'elle ne s'y annule jamais (son minimum étant la somme strictement positive $\alpha^4 + \alpha^2$), alors sa racine $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est aussi dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle, nous avons :

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Connaissant les signes des trois facteurs constituant le quotient $g'(x)$, nous en déduisons le tableau de variation de g est celui ci-contre →

Nous aurions pu être plus rapide en disant que la racine $\sqrt{f(x)}$ étant toujours positive, c'était $f'(x)$ qui donnait son signe à la dérivée $g'(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$2\sqrt{f(x)}$	+	+	+
$g'(x)$	-	0	+
g	$+\infty$		$+\infty$

$\searrow \quad \nearrow$
 $\sqrt{\alpha^4 + \alpha^2}$

Une autre manière plus rapide de voir les variations de g avec la composition

La fonction g est la composée de la fonction f suivie de la fonction racine qui est toujours strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Par conséquent, sur l'intervalle $]0; \alpha[$, nous avons la composition :

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]{f} & f(x) & \xrightarrow[\text{Croissante sur }]{\text{Racine}} & g(x) = \sqrt{f(x)} \\ \in]0; \alpha[& & \in]\alpha^2 + \alpha^4; +\infty[& & \end{array}$$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \alpha[$.

A contrario, sur l'intervalle $]\alpha; +\infty[$, nous avons la composition :

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow[\text{Croissante sur }]{f} & f(x) & \xrightarrow[\text{Croissante sur }]{\text{Racine}} & g(x) = \sqrt{f(x)} \\ \in]\alpha; +\infty[& & \in]\alpha^2 + \alpha^4; +\infty[& & \end{array}$$

Donc la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]\alpha; +\infty[$.

2.b. Vu le tableau de variation de la fonction g , nous pouvons dire que la distance AM est minimale (c'est-à-dire que $g(x)$ est minimal) lorsque $x = \alpha$.

Conclusion : la distance AM est minimale au point P de coordonnées $(\alpha; \ln(\alpha))$.

2.c. D'après ce qui précède, nous pouvons écrire :

$$AP = g(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^4 + \alpha^2} = \sqrt{\alpha^2 \times (1 + \alpha^2)} = \sqrt{\alpha^2} \times \sqrt{1 + \alpha^2} = \alpha \times \sqrt{1 + \alpha^2}$$

3. Un vecteur directeur de la droite (AP) est le vecteur $\overrightarrow{AP} \begin{pmatrix} \alpha - 0 \\ \ln(\alpha) - 2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la tangente à Γ au point $P(\alpha; \ln(\alpha))$ est le vecteur

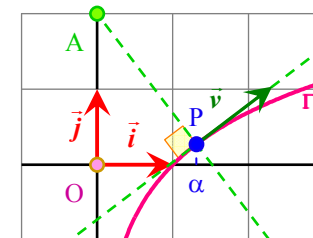
$$\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ \ln'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs directeurs :

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = \alpha \times 1 + (\ln(\alpha) - 2) \times \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{\ln(\alpha) - 2}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \ln(\alpha) - 2}{\alpha} = \frac{u(\alpha)}{\alpha} = \frac{0}{\alpha} = 0$$

Produit dans chaque coordonnée

Conclusion : comme leur produit scalaire est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Donc la droite (AP) est perpendiculaire à la tangente à la courbe Γ au point P .



Problèmes de famille exponentielle

Le contexte

Très librement inspiré d'un sujet de bac, cet exercice étudie une famille de fonctions assez classique à base d'exponentielle.

L'énoncé

Soit k un entier relatif quelconque fixé. On appelle f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x^2 + k)e^x$$

On appelle (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k .

a) Dans ces premières questions, nous allons étudier la fonction $f_0(x) = x^2 \times e^x$

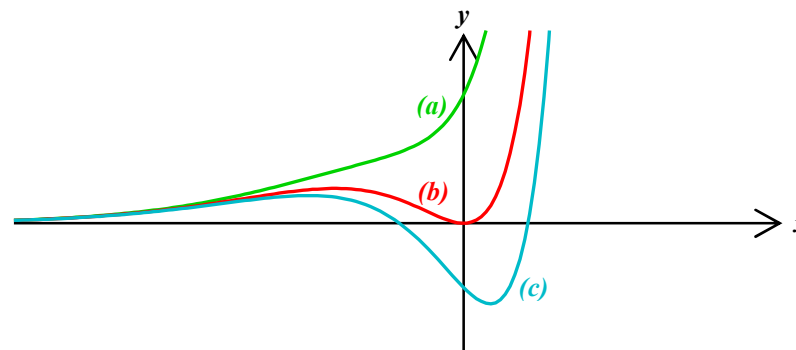
- Déterminer les limites de la fonction f_0 en $-\infty$, puis en $+\infty$.
Quelles sont les conséquences graphiques de ces limites ?
- Etudier les variations de la fonction f_0 sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$.

b) Dans les questions qui suivent, k est un entier relatif quelconque.

- Déterminer l'image de 0 par la fonction f_k .
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_k(x) = 0$.
On pourra envisager plusieurs cas suivant la valeur de l'entier k .
- Etablir que pour tout réel $x \in]-\infty; +\infty[$, on a :

$$f'_k(x) = (x^2 + 2x + k)e^x$$

- Prouver que si $k \geq 2$, alors la fonction f_k est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$.
- Sur le graphique ci-après, on a tracé trois courbes notées (a), (b) et (c) représentant chacune une des trois fonctions f_{-1} , f_0 et f_2 .
Attribuer chaque courbe à chaque fonction. Aucune justification n'est demandée.



Le corrigé

a.1. Déterminons les limites de la fonction $f_0(x) = x^2 \times e^x$ aux infinis :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \times e^x = 0^+ && \text{C'est un résultat du cours !} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times e^x = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Conséquence graphique de ces limites : la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses (Ox), est une asymptote horizontale à la courbe (C_0) au voisinage de $-\infty$.

a.2. La fonction f_0 est le produit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 & v(x) &= e^x \\ u'(x) &= 2x & v'(x) &= e^x \end{aligned}$$

Donc la fonction $f_0 = u \times v$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , nous avons :

$$\begin{aligned} f'_0(x) &= u' \times v + v' \times u \\ &= 2x \times e^x + x^2 \times e^x \\ &= e^x \times (2x + x^2) = e^x \times x \times (2 + x) \end{aligned}$$

Le signe de la dérivée $f'_0(x)$ nous donne les variations de la fonction f_0 .

Calculons les extrema locaux :

$$f_0(-2) = (-2)^2 \times e^{-2} = 4e^{-2}$$

$$f_0(0) = 0^2 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$	
e^x		+		+	+	
x		-		-	0	+
$x+2$		-	0	+		+
$f_0'(x)$		+	0	-	0	+
f_0		$4.e^{-2}$				$+\infty$
						
		0			0	

b.1. Calculons l'image de 0 par la fonction f_k

$$f_k(0) = (0^2 + k) \times e^0 = (0 + k) \times 1 = k$$

b.2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation proposée :

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + k) \times e^x = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{...l'un de ces facteurs l'est.} \\ x^2 + k = 0 \quad \text{ou} \quad e^x = 0 \\ \text{Ce produit est nul...} \quad x^2 = -k \end{array}$$

Une exponentielle étant une quantité toujours strictement positive, la seconde sous-équation $e^x = 0$ n'a pas de solution.

Pour ce qui est de la première sous-équation $x^2 = -k$, plusieurs cas doivent être envisagés suivant le signe de k :

- ♥ Si l'entier k est strictement négatif, alors son opposé $-k$ est positif et a deux racines (réelles) : $\sqrt{-k}$ et $-\sqrt{-k}$. Ce sont les deux solutions de l'équation.
- ♥ Si $k = 0$, alors la première sous-équation $x^2 = 0$ n'a qu'une seule solution : 0.
- ♥ Si k est un entier strictement positif, alors son opposé $-k$ est négatif. Un carré (réel) étant toujours positif ou nul, la sous-équation $x^2 = -k$ n'a pas de solution.

Conclusion : le nombre de solutions de l'équation $f_k(x) = 0$ dépend du signe de k .

Si k est négatif, alors l'équation a deux solutions : $\sqrt{-k}$ et $-\sqrt{-k}$

Si k est nul, alors l'équation a pour seule solution 0.

Si k est positif, alors l'équation n'a pas de solution.

b.3. A l'instar de f_0 , la fonction f_k est le produit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{l} u(x) = x^2 + k \\ u'(x) = 2x + 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} v(x) = e^x \\ v'(x) = e^x \end{array}$$

Donc la fonction $f_k = u \times v$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , nous avons :

$$f_k'(x) = u' \times v + v' \times u = 2x \times e^x + (x^2 + k) \times e^x = e^x \times (2x + x^2 + k) = e^x \times (x^2 + 2x + k)$$

b.4. Le signe de la dérivée $f_k'(x)$ donne les variations de la fonction f_k .

Examinons les signes des facteurs composant le produit de la dérivée :

- ♥ Le premier facteur e^x est une exponentielle donc est toujours strictement positive.
- ♥ Le signe du second facteur $d(x) = x^2 + 2x + k$ qui est une forme du second degré dépend de son discriminant. Calculons le !

$$\Delta_d(x) = 2^2 - 4 \times 1 \times k = 4 - 4 \times k$$

Ainsi, si k est un entier supérieur ou égal à 2, alors :

$$k \geq 2 \xrightarrow{\times(-4)} -4k \leq -8 \xrightarrow{+4} 4 - 4k \leq -4 \Rightarrow 4 - 4k \text{ est négatif}$$

Comme le discriminant $\Delta_d(x) = 4 - 4k$ est négatif, alors la forme du second degré $d(x)$ est toujours du même signe : celui de son coefficient dominant 1. Donc positive !

Conclusion : la dérivée $f_k'(x) = e^x \times d(x)$ étant le produit de deux facteurs positifs sur $\mathbb{R}$, elle l'est elle-aussi. Par conséquent, la fonction f_k est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$

b.5. Il existe plusieurs manières de différencier les courbes :

- ♥ En utilisant l'image de 0 par la fonction f_k et le résultat de la question **b.1**.
- ♥ En s'intéressant aux antécédents de 0 par la fonction f_k qui était le sujet de la question **b.2**. On regarde alors les points d'intersection de chaque courbe avec l'axe des abscisses (Ox).
- ♥ En comparant les variations des fonctions et celles des courbes. On utilise alors les résultats des questions **a.2** et **b.4**.
- ♥ En utilisant la calculatrice même si ce n'était pas trop dans l'esprit de l'exercice...

En définitive, la courbe (a) représente la fonction f_2 , la courbe (b) la fonction f_0 et la courbe (c) la fonction f_{-1} .

Complexes et géométrie

Complexes et pourtant bien réels !

Le contexte

Un exercice classique de résolution d'équations complexes du premier degré et...plus.

L'énoncé

a) On appelle f la fonction définie pour tout nombre complexe z par :

$$f(z) = (1+i) \times z + 3 - 2i$$

- Calculer l'image de $5 - 3i$ par la fonction f .
- Déterminer le ou les antécédents de $2 + 5i$ par la fonction f .

b) Le polynôme P est défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^6 - 2z^5 + 8z^4 - z^2 + 2z - 8$$

Le but est de déterminer les six solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.

- En calculant leurs images, démontrer que -1 et de i sont deux racines du polynôme P .
- Déterminer trois entiers a , b et c tels que pour tout nombre complexe z , on ait :

$$P(z) = (z^4 + a) \times (z^2 + b.z + c)$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Le corrigé

a.1) Calculons l'image de $5 - 3i$ par la fonction f :

$$f(5 - 3i) = (1+i) \times (5 - 3i) + 3 - 2i = 5 - 3i + 5i - 3i^2 + 3 - 2i = 5 + 2i + 3 + 3 - 2i = 11$$

a.2) Pour déterminer le ou les antécédents de $2 + 5i$ par la fonction f , nous devons résoudre l'équation :

$$f(z) = 2 + 5i \Leftrightarrow (1+i) \times z + 3 - 2i = 2 + 5i \Leftrightarrow (1+i) \times z = -1 + 7i$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1+7i}{1+i} = \frac{(-1+7i) \times (1-i)}{(1+i) \times (1-i)} = \frac{-1+i+7i-7i^2}{1-i^2} \\ &\Leftrightarrow = \frac{-1+8i+7}{1-(-1)} = \frac{6+8i}{2} = 3+4i \end{aligned}$$

Conclusion : $2 + 5i$ a un seul antécédent par la fonction f . Il s'agit de $3 + 4i$.

b.1) Calculons les images de -1 et de i par le polynôme P :

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^6 - 2 \times (-1)^5 + 8 \times (-1)^4 - (-1)^2 + 2 \times (-1) - 8 \\ &= 1 - 2 \times (-1) + 8 \times 1 - 1 - 2 - 8 = 1 + 2 + 8 - 1 - 2 - 8 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(i) &= i^6 - 2 \times i^5 + 8 \times i^4 - i^2 + 2 \times i - 8 \\ &= (-1) - 2i + 8 \times 1 - (-1) + 2i - 8 = -1 - 2i + 8 + 1 + 2i - 8 = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : leurs images par P étant nulles, -1 et de i sont deux racines de ce polynôme.

b.2) On souhaite écrire le polynôme P sous la forme :

$$P(z) = (z^4 + a) \times (z^2 + b.z + c)$$

$$z^6 - 2z^5 + 8z^4 - z^2 + 2z - 8 = z^6 + b.z^5 + c.z^4 + a.z^2 + a.b.z + a.c$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré...égaux !

Identifions les coefficients de même degré de ces deux polynômes qui sont de degré six :

En z^6 :	$1 = 1$	En z^2 :	$-1 = a$	Et de trois !
En z^5 :	$-2 = b$	En z :	$2 = a.b$	Vérifié car $(-1) \times (-2) = 2$
En z^4 :	$8 = c$	Constants :	$-8 = a.c$	Vérifié car $(-1) \times 8 = -8$
En z^3 :	$0 = 0$			

Conclusion : une forme factorisée du polynôme P est :

$$P(z) = (z^4 - 1) \times (z^2 - 2.z + 8)$$

b.3) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^4 - 1) \times (z^2 - 2.z + 8) = 0$$

Pour pouvoir aller plus loin, nous devons casser le premier facteur qui est de degré 4.

$$\Leftrightarrow ((z^2)^2 - 1^2) \times (z^2 - 2.z + 8) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1) \times (z^2 - 1) \times (z^2 - 2.z + 8) = 0$$

Ce produit est nul...

$$\Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \text{ ou } z^2 - 1 = 0 \text{ ou } z^2 - 2.z + 8 = 0$$

...l'un de ses trois facteurs l'est

Résolvons les trois sous-équations qui sont du second degré :

$$\heartsuit \quad z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -i$$

Seuls ces deux complexes ont pour carré -1

$$\heartsuit \quad z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1$$

Seuls ces deux complexes qui ont pour carré 1

- ♥ Pour résoudre la sous-équation du second degré $z^2 - 2z + 8 = 0$, calculons son discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4 - 32 = -28 = (i\sqrt{28})^2 = (2i\sqrt{7})^2$$

Comme son discriminant est négatif, alors cette sous-équation admet deux racines complexes et conjuguées :

$$z = \frac{-(-2) - 2i\sqrt{7}}{2 \times 1} = \frac{\cancel{2} - \cancel{2}i\sqrt{7}}{\cancel{2}} = 1 - i\sqrt{7} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-(-2) + 2i\sqrt{7}}{2 \times 1} = 1 + i\sqrt{7}$$

Conclusion : l'équation $P(z) = 0$ admet six solutions complexes :

$$S = \{-1; 1; -i; i; 1 - i\sqrt{7}; 1 + i\sqrt{7}\}$$

Les complexes essentiels

Le contexte

La première partie de cet exercice est une résolution d'équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$. La seconde partie est inspirée d'un exercice de bac et concerne l'utilisation géométrique des nombres complexes.

L'énoncé

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie A

Le polynôme P est défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 + (2i - 2)z^2 + (4 - 4i)z + 8i$$

- Calculer $P(-2i)$ et prouver que $-2i$ est une racine du polynôme $P(z)$.
- Déterminer trois coefficients réels a , b et c tels que pour tout nombre complexe z , on ait :

$$P(z) = (z + 2i) \times (az^2 + bz + c)$$

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Sur la figure ci-après, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où une unité graphique vaut deux centimètres. Les points A, B et C ont pour affixes :

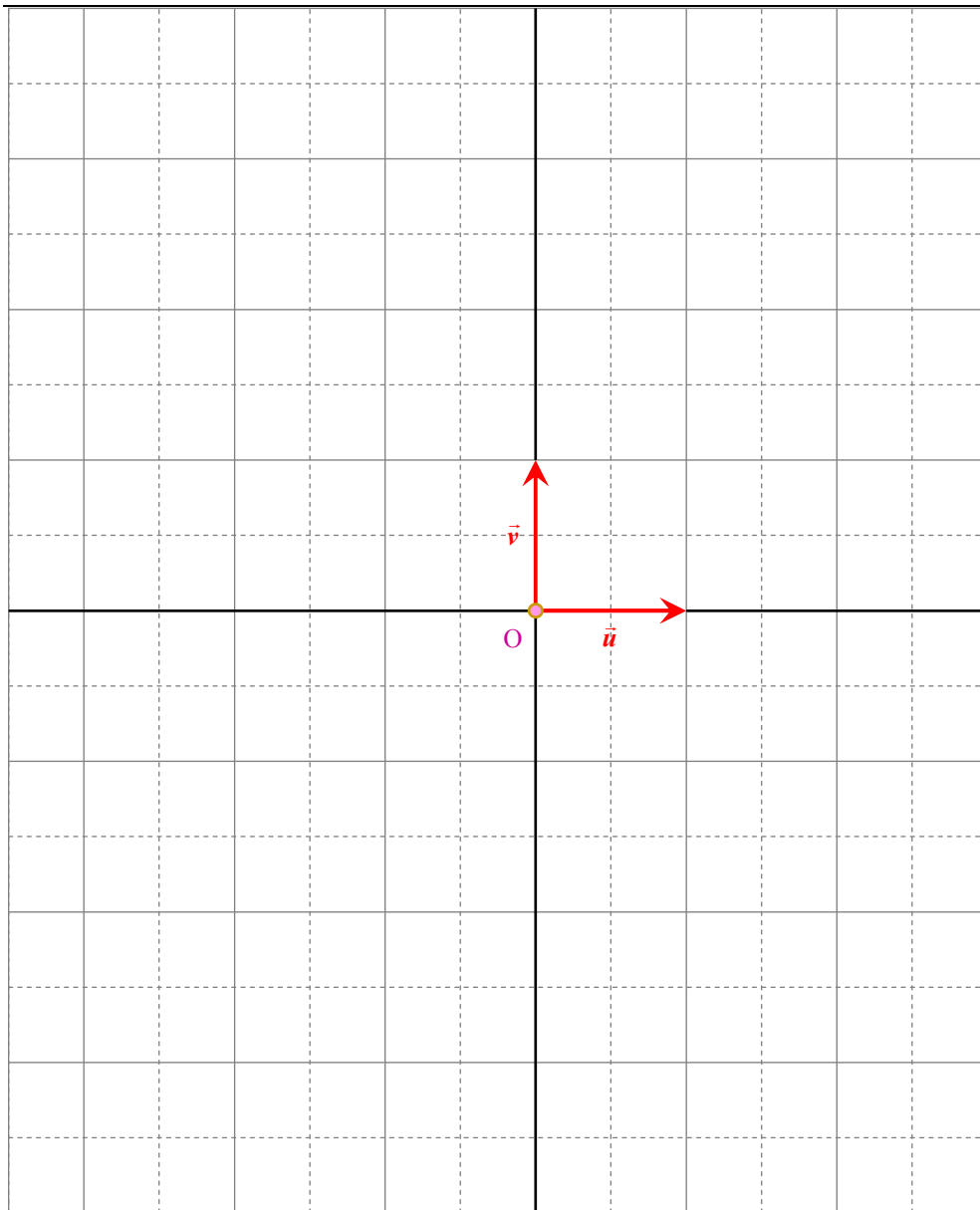
$$z_A = -2i \qquad z_B = 2 \times e^{\frac{i\pi}{6}} \qquad z_C = -\sqrt{3} + i$$

- Ecrire les nombres complexes z_A et z_C sous forme exponentielle.
- Ecrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.
- En déduire que les points A, B et C appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Placer exactement les points A, B et C sur la figure.

- Ceci est une question de cours. On rappelle que $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overline{AB})$.

Démontrer que $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overline{AB}, \overline{AC}) \text{ modulo } 2\pi$

- Ecrire le quotient $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
- Interpréter géométriquement ce résultat et en déduire la nature du triangle ABC.



3.a. Déterminer l'affixe du point I qui est le milieu du segment [AC].

3.b. Démontrer que le point O est le barycentre des deux points pondérés (B;1) et (I;2).

4.a. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan dont l'affixe z vérifie l'égalité :

$$|z + 2i| = |z + \sqrt{3} - i|$$

4.b. Prouver que les points I et B appartiennent à cet ensemble $\mathcal{E}$.

Le corrigé

Partie A

1. Avant toutes choses, calculons les carré et cube de $-2i$:

$$(-2i)^2 = (-2)^2 \times i^2 = 4 \times (-1) = -4 \quad (-2i)^3 = (-2i)^2 \times (-2i) = -4 \times (-2i) = 8i$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} P(-2i) &= (-2i)^3 + (2i-2) \times (-2i)^2 + (4-4i) \times (-2i) + 8i \\ &= 8i + (2i-2) \times (-4) + (4-4i) \times (-2i) + 8i \\ &= 8i - 8i + 8 - 8i - 8 + 8i = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : comme son image par le polynôme est nulle, alors $-2i$ est une racine de P .

Par conséquent, le polynôme $P(z)$ est factorisable par $z - (-2i) = z + 2i$.

2. Deux méthodes permettent de factoriser le polynôme $P(z)$ par le facteur $z + 2i$.

➤ En extrayant le facteur de chacun des termes du polynôme...

$$\begin{aligned} P(z) &= \overbrace{z^3}^{\text{Combien de fois } z+2i?} + (2i-2) \times z^2 + (4-4i) \times z + 8i \\ &= z^2 \times \overbrace{(z+2i)}^{z^3} - \cancel{2iz^2} + \cancel{2iz^2} - 2z^2 + (4-4i) \times z + 8i \\ &= z^2 \times \overbrace{(z+2i)}^{\text{Quam } z+2i?} - 2z^2 + (4-4i) \times z + 8i \\ &= z^2 \times (z+2i) - 2z \times \overbrace{(z+2i)}^{-2z^2} + \cancel{4iz} + 4z - \cancel{4iz} + 8i \\ &= z^2 \times \underbrace{(z+2i)}_{\text{Facteur...}} - 2z \times \underbrace{(z+2i)}_{\text{...com..}} + 4 \times \underbrace{(z+2i)}_{\text{...mun..}} = (z+2i) \times (z^2 + 2z + 4) \end{aligned}$$

➤ En développant l'écriture visée, puis en identifiant les coefficients de même degré.

On veut écrire le polynôme $P(z)$ sous la forme :

$$P(z) = (z + 2i) \times (a.z^2 + b.z + c)$$

$$P(z) = a.z^3 + b.z^2 + c.z + 2i.a.z^2 + 2i.b.z + 2i.c$$

$$z^3 + (2i - 2) \times z^2 + (4 - 4i) \times z + 8i = a \times z^3 + (b + 2i.a) \times z^2 + (c + 2i.b) \times z + 2i.c$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux. Nous en déduisons :

En z^3 : $1 = a$ soit $a = 1$ *Et d'un !*

En z^2 : $2i - 2 = b + 2i.a \Leftrightarrow 2i - 2 = b + 2i \Leftrightarrow b = -2$ *Et de deux !*

En z : $4 - 4i = c + 2i.b \Leftrightarrow 4 - 4i = c - 4i \Leftrightarrow c = 4$ *Et de trois !*

Constants : $8i = 2i.c \Leftrightarrow c = 4$ *Ca confirme !*

Conclusion : pour tout nombre complexe z , nous avons :

$$P(z) = \underbrace{z^3 + (2i - 2) \times z^2 + (4 - 4i) \times z + 8i}_{\text{Forme développée (réduite)}} = \underbrace{(z + 2i) \times (z^2 + 2z + 4)}_{\text{Forme développée}}$$

3. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 2i) \times (z^2 + 2z + 4) \Leftrightarrow \underbrace{z + 2i = 0}_{\text{Un produit est nul...}} \text{ ou } \underbrace{z^2 + 2z + 4 = 0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est !}}$$

➤ La première sous-équation se résout sans trop de problèmes :

$$z + 2i = 0 \Leftrightarrow z = -2i$$

➤ Pour résoudre la seconde sous-équation $z^2 + 2z + 4 = 0$ qui est du second degré, calculons son discriminant :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 = (i\sqrt{12})^2 = (i\sqrt{4} \times \sqrt{3})^2 = (2i\sqrt{3})^2$$

Comme son discriminant est négatif, alors la sous-équation a deux solutions complexes et conjuguées :

$$z = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3} \text{ ou } z = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$$

Conclusion : l'équation $P(z) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{C}$:

$$S = \{-2i; -1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\}$$

Par contre, elle n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Partie B

1.a. Calculons les modules des affixes des points A et C.

$$|z_A| = |-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{0 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

$$|z_C| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

Les arguments de l'«imaginaire négatif» $z_A = -2i$ sont $-\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier.

Par conséquent :

$$z_A = -2i = 2 \times e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Écritures algébrique, puis exponentielle !

Les arguments θ_C du complexe $z_C = -\sqrt{3} + i$ vérifient les égalités :

$$\cos(\theta_C) = \frac{\text{Partie réelle}}{\text{Module}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_C) = \frac{\text{Partie imaginaire}}{\text{Module}} = \frac{1}{2}$$

Une valeur possible pour θ_C est $\frac{5\pi}{6}$. Donc l'écriture exponentielle de z_C est :

$$z_C = -\sqrt{3} + i = 2 \times e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

1.b. Écrivons l'affixe du point B sous forme algébrique :

$$z_B = 2 \times e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \times \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = 2 \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2} \right] = \sqrt{3} + i$$

1.c. Les trois affixes des points A, B et C ont pour affixe 2. Géométriquement dit :

$$OA = |z_A| = 2 \quad OB = |z_B| = 2 \quad OC = |z_C| = 2$$

Donc les points A, B et C appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 2.

Les points B et C font aussi partie de l'horizontale d'équation $y = 1$. C'est à l'intersection de cette droite et du cercle Γ que nous plaçons ces deux points.

2.a. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) &= \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) \\ &= (\vec{u}, \overline{AC}) - (\vec{u}, \overline{AB}) \\ &= (\vec{u}, \overline{AC}) + (\overline{AB}, \vec{u}) = (\overline{AC}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overline{AB}) = (\overline{AB}, \overline{AC}) \text{ modulo } 2\pi \end{aligned}$$

Merci Chasles !

2.b. Intéressons-nous au quotient imposé :

$$\begin{aligned}\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} &= \frac{(-\sqrt{3} + i) - (-2i)}{(\sqrt{3} + i) - (-2i)} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} \\ &= \frac{(-\sqrt{3} + 3i) \times (\sqrt{3} - 3i)}{(\sqrt{3} + 3i) \times (\sqrt{3} - 3i)} = \frac{-3 + 3i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} + 9}{(\sqrt{3})^2 - (3i)^2} = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{3 - (-9)} \\ &= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

Forme algébrique

2.c. Géométriquement parlant, le quotient précédent nous fournit des indications très précieuses.

➤ D'abord, par son module. En effet :

$$\frac{AC}{AB} = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 1 \Rightarrow AC = AB$$

Donc le triangle ABC est isocèle en A.

➤ Ensuite, par ses arguments :

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ modulo } 2\pi$$

L'angle au sommet A faisant $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, le triangle isocèle ABC est équilatéral.

3.a. L'affixe du milieu I est donnée par :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{(-2i) + (-\sqrt{3} + i)}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

3.b. On appelle G le barycentre des deux points pondérés (B;1) et (I;2).

En calculant l'affixe de G, nous allons prouver qu'il est confondu avec O.

$$z_G = \frac{z_B + 2 \times z_I}{1 + 2} = \frac{(\sqrt{3} + i) + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)}{3} = \frac{\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i}{3} = \frac{0}{3} = 0 = z_O$$

Conclusion : le point O est bien le barycentre des deux points pondérés (B;1) et (I;2).

4.a. Traduisons géométriquement l'égalité définissant l'ensemble $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}M(z) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow |z + 2i| = |z + \sqrt{3} - i| \\ &\Leftrightarrow |z - (-2i)| = |z - (-\sqrt{3} + i)| \Leftrightarrow AM = CM \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice du segment } [AC]\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment [AC].

4.b. Pour prouver que le point I (et aussi B) appartient à cet ensemble $\mathcal{E}$, nous pourrions calculer séparément les modules $|z_I + 2i|$ et $|z_I + \sqrt{3} - i|$ et prouver qu'ils sont égaux.

Mais cela implique des calculs...fastidieux !

$$\begin{aligned}|z_I + 2i| &= \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + 2i \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2} \right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3} \\ |z_I + \sqrt{3} - i| &= \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + \sqrt{3} - i \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Comme $|z_I + 2i| = |z_I + \sqrt{3} - i|$, alors le point I appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

A présent, voyons ce qu'il en est avec le point B.

$$\begin{aligned}|z_B + 2i| &= |\sqrt{3} + i + 2i| = |\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \\ |z_B + \sqrt{3} - i| &= |\sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i| = |2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

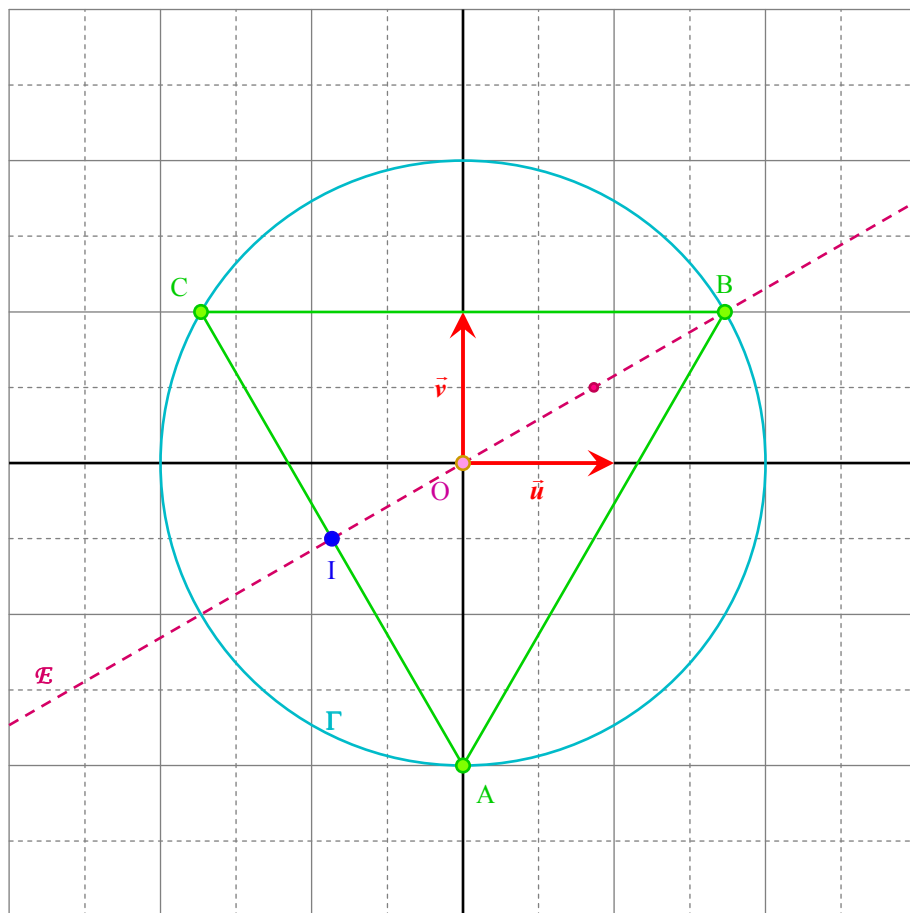
Ayant l'égalité $|z_I + 2i| = |z_I + \sqrt{3} - i|$, nous en déduisons que B fait aussi partie de $\mathcal{E}$.

La solution du paresseux savant

On peut aussi être plus malin et se souvenir que le triangle ABC est équilatéral.

Par conséquent, le milieu I du segment [AC] et le troisième sommet B appartiennent à la médiatrice dudit segment [AC], c'est-à-dire à l'ensemble $\mathcal{E}$. Car dans un triangle équilatéral, chaque médiatrice est aussi une hauteur, une médiane et une bissectrice.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Les complexes rationnels

Le contexte

L'exercice suivant est inspiré d'un exercice de bac. Il aborde la résolution d'équations complexes, puis l'utilisation géométrique des nombres complexes.

L'énoncé

Sur la figure ci-après, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où une unité graphique vaut deux centimètres.

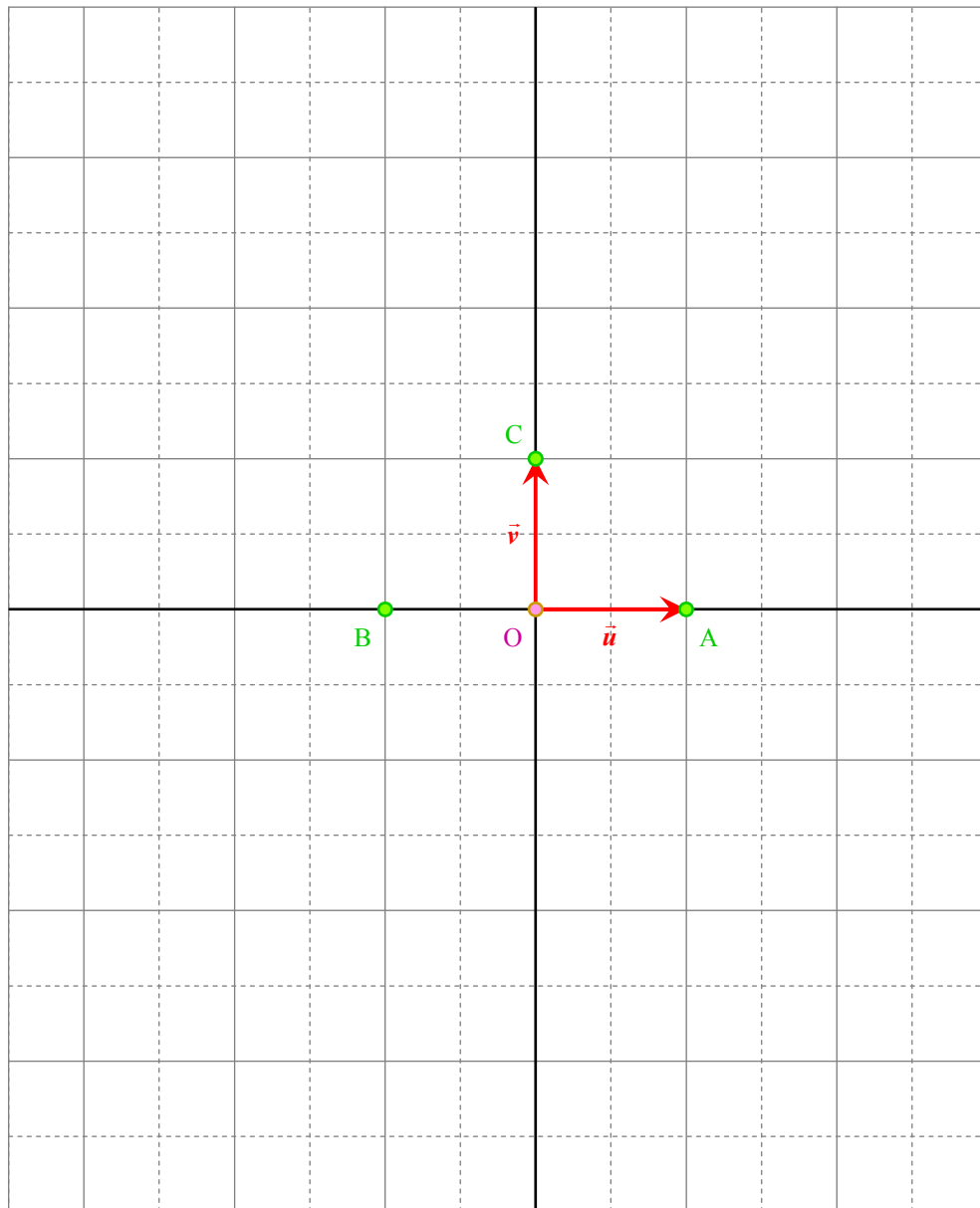
On appelle A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

$$a = 1 \quad b = -1 \quad c = i$$

On considère l'application f qui à tout point M distinct de B d'axe z fait correspondre le point M' d'axe z' définie par :

$$z' = f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

- Déterminer les affixes des images des points A et C par l'application f .
- Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M d'axe z tels que $f(z) = z$.
- Dans ces questions, z est un nombre complexe différent de -1 .
 - Montrer que $(z'-1)(z+1) = -2$.
 - En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis une seconde relation entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$.
Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
- Montrer que si le point M appartient au cercle Γ de centre B et de rayon 2, alors son image M' appartient au cercle Γ' de centre A et de rayon 1.
- Soit P le point d'axe $p = -2 + i\sqrt{3}$. On note P' l'image du point P par l'application f .
 - Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.
 - Montrer que le point P appartient au cercle Γ .
Placer (exactement) le point P sur la figure.
 - Soit Q le point d'axe $q = -\bar{p}$ où $\bar{p}$ désigne le conjugué de p .
Placer (exactement) le point Q sur la figure. On laissera apparents les traits de construction. Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
 - En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f .

**Le corrigé**

1. Calculons les images des complexes a et c par l'application f .

$$\heartsuit \quad f(a) = \frac{a-1}{a+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0 = z_O$$

Conclusion : l'image du point A par l'application f est O.

$$\heartsuit \quad f(c) = \frac{c-1}{c+1} = \frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1) \times (i-1)}{(i+1) \times (i-1)} = \frac{i^2 - 2 \times i \times 1 + 1^2}{i^2 - 1^2} = \frac{-1 - 2i + 1}{-1 - 1} = \frac{-2i}{-2} = i = c$$

Conclusion : le point C est sa propre image par l'application f .

2. D'abord, l'équation $f(z) = z \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = z$ n'a de sens que si le dénominateur $z+1$ est non nul. Autrement dit, cette équation n'a de sens que si z est différent de -1 .

Donc, résolvons dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ l'équation :

On multiplie par le facteur $z+1$ qui est non nul sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow z-1 = z \times (z+1) \Leftrightarrow \cancel{z} - 1 = z^2 + \cancel{z} \\ &\Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -i \end{aligned}$$

Conclusion : l'application f a deux points fixes : C et son symétrique d'affixe $-i$.

3.a. Pour tout nombre complexe $z \neq -1$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} (z'-1) \cdot (z+1) &= \left(\frac{z-1}{z+1} - 1 \right) \times (z+1) = \frac{z-1-1 \times (z+1)}{z+1} \times (z+1) \\ &= \frac{\cancel{z} - 1 - \cancel{z} - 1}{z+1} \times (z+1) = \frac{-2}{\cancel{z+1}} \times \cancel{(z+1)} = -2 \end{aligned}$$

3.b. Transcrivons l'égalité démontrée précédemment en termes de...

♥ ...modules :

$$\begin{aligned} |(z'-1) \times (z+1)| &= |-2| \Leftrightarrow |z'-1| \times |z+1| = 2 \\ &\Leftrightarrow |z'-a| \times |z-b| = 2 \Leftrightarrow \underline{AM' \times BM = 2} \end{aligned}$$

♥ ...arguments :

$$\begin{aligned} \arg((z'-1) \times (z+1)) &= \arg(-2) \Leftrightarrow \arg(z'-1) + \arg(z+1) = \pi \quad (2\pi) \\ &\Leftrightarrow \arg(z'-a) + \arg(z-b) = \pi \quad (2\pi) \\ &\Leftrightarrow \underline{(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \pi \quad (2\pi)} \end{aligned}$$

4. Si le point M appartient au cercle Γ de centre B et de rayon 2, alors $BM = 2$. L'égalité précédente issue des modules devient alors :

$$AM' \times BM = 2 \Leftrightarrow AM' \times 2 = 2 \Leftrightarrow AM' = 1$$

Donc le point M' appartient au cercle Γ' de centre A et de rayon 1.

5.a. Pour déterminer l'écriture exponentielle de $p+1 = -2 + i\sqrt{3} + 1 = -1 + i\sqrt{3}$, nous devons d'abord calculer le module de ce nombre complexe.

$$|p+1| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Les arguments θ du complexe $p+1$ vérifient les deux égalités :

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(p+1)}{|p+1|} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(p+1)}{|p+1|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Une valeur possible pour θ est $\frac{2\pi}{3}$.

Nous en déduisons que l'écriture exponentielle du complexe $p+1$ est :

$$p+1 = 2 \times e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

5.b. Intéressons-nous à la distance BP.

$$BP = |p - b| = |p - (-1)| = |p+1| = 2$$

Donc le point P appartient au cercle Γ de centre B et de rayon 2.

On place le point P comme étant l'un des deux points d'intersection de la droite verticale d'équation $x = -2$ et du cercle Γ . Il s'agit du point le plus haut.

5.c. Le point Q a pour affixe $q = -\bar{p} = -\overline{-2 + i\sqrt{3}} = -(-2 - i\sqrt{3}) = 2 + i\sqrt{3}$

Géométriquement parlant, le point Q est le symétrique du point P par rapport à l'axe des ordonnées $(O, \vec{v})$.

➡ Montrons que les points A, P' et Q sont alignés...sans faire trop de calcul.

Nous noterons p' l'affixe du point P' .

D'après une égalité établie lors de la question **3.b**, nous avons :

$$\arg(p'-1) + \arg(p+1) = \pi \text{ modulo } 2\pi$$

Pour établir l'alignement des points A, P' et Q, nous allons nous intéresser à l'angle

orienté $(\overrightarrow{AP'}, \overrightarrow{AQ})$ dont les mesures sont aussi les arguments du quotient $\frac{q-a}{p'-a}$.

$$(\overrightarrow{AP'}, \overrightarrow{AQ}) = \arg\left(\frac{q-a}{p'-a}\right) = \arg(q-a) - \arg(p'-a)$$

Essayons de tripataouiller le premier terme de cette différence d'arguments !

$$q-a = -\bar{p}-1 = -(\bar{p}+1) = -(\overline{p+1}) = -\overline{(p+1)}$$

Usant des propriétés de l'argument, il vient alors :

$$\arg(q-a) = \arg(-\overline{(p+1)})$$

Argument de l'opposé...

$$= \arg(\overline{(p+1)}) + \pi = -\arg(p+1) + \pi \text{ modulo } 2\pi$$

Il vient alors :

$$(\overrightarrow{AP'}, \overrightarrow{AQ}) = \arg(q-a) - \arg(p'-a)$$

$$= -\arg(p+1) + \pi - \arg(p'-1)$$

$$= -[\arg(p+1) + \arg(p'-1)] + \pi = -\pi + \pi = 0 \text{ modulo } 2\pi$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AP'}$ et $\overrightarrow{AQ}$ sont colinéaires et en plus, de même sens.

Conclusion : les points A, P' et Q sont alignés. Plus précisément, P' appartient à la demi-droite $[AQ)$

5.d. Comme d'après la question **5.b**, le point P appartient au cercle Γ de centre B et de rayon 2, alors, en application de la question **4**, son image P' appartient au cercle Γ' de centre A et de rayon 1.

Par conséquent, P' est le point d'intersection de la demi-droite $[AQ)$ et du cercle Γ' .

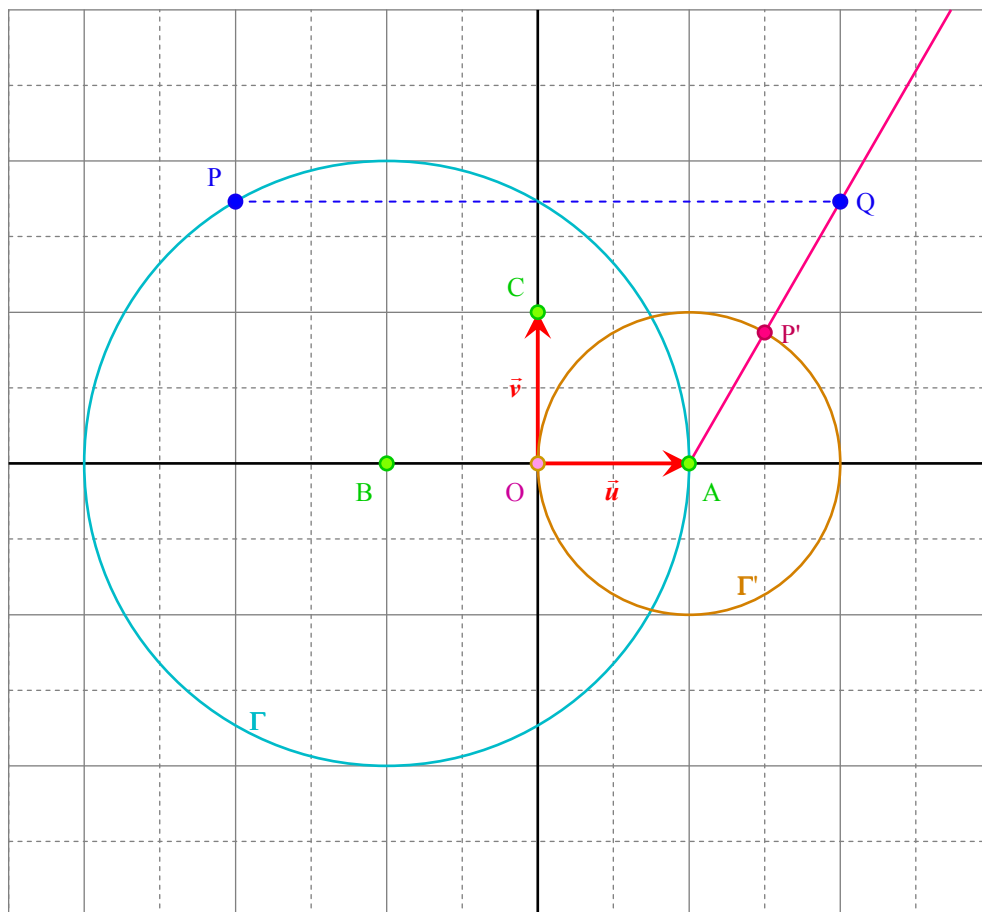
Le réel 1 est son propre conjugué

Argument du conjugué...

D'après une égalité précédente...

Nous n'aurons pas été bien loin...

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Métamorphoses complexes

Le contexte

Un exercice sur les transformations du plan (rotation, homothétie, translation) et leurs traductions ou écritures complexes.

L'énoncé

Sur la figure ci-après, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Dans celui-ci, les points A, B, C et D ont pour affixes respectives :

$$a = 1 \quad b = -1 - 2i \quad c = 1 - 2i\sqrt{2} \quad d = 1 + 2i$$

Les points seront placés sur la figure à la demande au cours de l'exercice.

a) Dans ces questions, nous allons construire le point C à partir des points A et B.

1. Ecrire le quotient $\frac{c-a}{b-a}$ sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. En déduire que le point C est l'image du point B par une transformation de centre A dont on précisera la nature et l'autre élément caractéristique.
3. Placer les points A et B, puis construire précisément, au compas, le point C. On laissera apparents les traits de construction.
4. Est-il possible de trouver une homothétie de centre B par laquelle le point A a pour image C ? Si oui, on précisera laquelle. Si non, on dira pourquoi.

b) On appelle h l'homothétie de centre A et de rapport k (non connu pour l'instant) par laquelle le point C a pour image D.

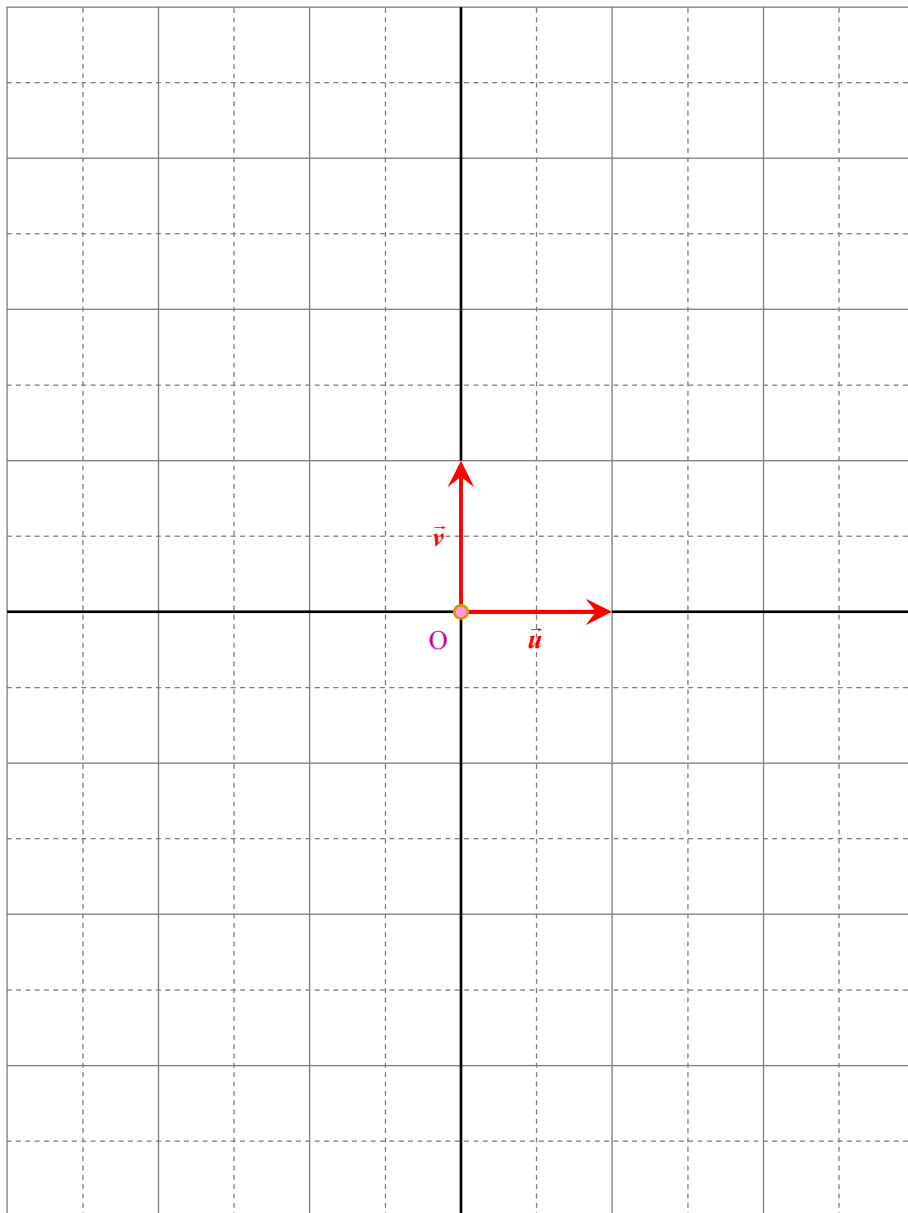
1. Placer le point D sur la figure.
2. Donner une écriture complexe de l'homothétie h .
3. Déterminer le rapport k de l'homothétie h .
4. Vérifier que le point E qui est l'image de B par l'homothétie h a pour affixe :

$$e = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

5. Démontrer que $\overline{DE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{BC}$
6. En déduire que E est le point d'intersection de deux droites que l'on précisera. Construire précisément le point E sur la figure.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

1. La transformation t dont une écriture complexe est : $z' = z + 2 + 4i$.
2. La transformation s dont une écriture complexe est : $z' = 2 - z$.
3. La transformation f dont une écriture complexe est : $z' = -i.z - 1 + 3i$

**Le corrigé**

a.1) Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{(1-2i\sqrt{2})-1}{(-1-2i)-1} = \frac{-2i\sqrt{2}}{-2-2i} \\ &= \frac{-2i\sqrt{2} \times (-2+2i)}{(-2-2i) \times (-2+2i)} = \frac{4i\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{(-2)^2 - (2i)^2} = \frac{4 \times (\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{4 - (-4)} = \frac{4 \times (\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{8} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Forme algébrique

On pouvait aussi calculer le module et trouver un argument pour aboutir à la forme exponentielle de ce nombre complexe.

a.2) Comme :

$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow c-a = e^{i\frac{\pi}{4}} \times (b-a)$$

C'est l'écriture complexe d'une rotation !

alors, le point C est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a.3) Les points A et B se placent sur la figure avec le quadrillage.

Le point C d'affixe $c = 1 - 2i\sqrt{2}$ est l'un des points d'intersection du cercle de centre A passant par B et de la verticale d'équation $x = 1$.

a.4) S'il existait une telle homothétie de centre A et disons de rapport λ par laquelle B aurait pour image C, alors ces trois points seraient liés par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BC} = \lambda \times \overrightarrow{BA}$$

Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ seraient colinéaires et les points A, B et C alignés. Ce qui n'est pas le cas !

Par une homothétie, le centre, un point et son image sont toujours alignés.

Conclusion : il n'existe pas d'homothétie de centre B par laquelle A puisse avoir pour image C.

b.1) Le point D d'affixe $d = 1 + 2i$ se place sur la figure avec le quadrillage.

b.2) Si le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par l'homothétie h de centre A et de rapport k , alors ceux-ci vérifient la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AM'} = k \times \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow z' - a = k \times (z - a) \Leftrightarrow z' - 1 = k \times (z - 1)$$

C'est la définition de l'homothétie d'un point.

Écriture(s) complexe(s) de l'homothétie h

b.3) Comme l'image du point C par l'homothétie h est le point D, alors les affixes de ces points satisfont l'écriture complexe de h . Par suite :

$$d-1 = k \times (c-1) \Leftrightarrow 1+2i-1 = k \times (1-2i\sqrt{2}-1) \\ \Leftrightarrow 2i = -k \times 2i\sqrt{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Conclusion : h est l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b.4) L'affixe b du point B et celle e de son image E vérifient l'écriture complexe de h .

$$e-1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times (b-1) \Leftrightarrow e = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-1-2i-1) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

b.5) Cette relation vectorielle peut être établie de deux manières :

➔ Avec les affixes des vecteurs...

Peu pratique pour construire E

$$z_{\overrightarrow{DE}} = e - d = (1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}) - (1 + 2i) = \sqrt{2} - 2i + i\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \times z_{\overrightarrow{BC}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (c - b) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times ((1 - 2i\sqrt{2}) - (-1 - 2i)) \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2 - 2i\sqrt{2} + 2i) = \sqrt{2} - i(\sqrt{2})^2 + i\sqrt{2} = \sqrt{2} - 2i + i\sqrt{2}$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \times \overrightarrow{BC}$ ayant des affixes égales sont égaux !

➔ Par du calcul vectoriel...

Comme les points D et E sont les images respectives des points B et C par l'homothétie h

de centre A et de rapport $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, alors ceux-ci vérifient les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \overrightarrow{AB}$$

C'est la définition de l'homothétie d'un point.

En utilisant Chasles, il vient alors :

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overrightarrow{AC} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overrightarrow{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overrightarrow{BC}$$

Chasles ! Re-Chasles !

Nous venons de redémontrer la **propriété fondamentale de l'homothétie** :

Une homothétie «multiplie» tous les vecteurs par son rapport.

Si A et B ont pour images A' et B' par une homothétie de rapport k alors $\overrightarrow{A'B'} = k \times \overrightarrow{AB}$

b.6) Déjà, le centre A, le point B et son image E sont alignés. Donc $E \in (AB)$.

Ensuite, comme les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires d'après la question précédente, alors E fait également partie de la parallèle à la droite (BC) passant par D que nous appellerons Δ .

Conclusion : E est le point d'intersection des droites (AB) et Δ . Ainsi le construit-on !

c.1) L'écriture complexe $z' = t(z) = z + 2 + 4i$ est l'écriture complexe d'une translation de vecteur d'affixe $2 + 4i$. Autrement dit de vecteur $\overrightarrow{BD}$. C'est ce qu'est la transformation t .

c.2) Tripatouillons l'écriture complexe définissant la transformation s .

$$z' = 2 - z \Leftrightarrow z' + z = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' + z}{2} = 1 = a \Leftrightarrow A \text{ est le milieu du segment } [MM']$$

$$\Leftrightarrow M' \text{ est le symétrique de M par rapport à A}$$

Conclusion : la transformation s est la symétrie de centre A.

c.2) Tripatouillons l'écriture complexe de la transformation s .

$$z' = 2 - z \Leftrightarrow z' + z = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{z' + z}{2} = 1 = a \Leftrightarrow A \text{ est le milieu du segment } [MM']$$

$$\Leftrightarrow M' \text{ est le symétrique de M par rapport à A}$$

Conclusion : la transformation s est la symétrie de centre A.

C'est aussi l'homothétie de rapport -1 et de centre A.

c.3) Chatouillons l'écriture complexe de la transformation f .

$$z' = -iz - 1 + 3i \Leftrightarrow z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times z - 1 + 3i$$

Vu son écriture complexe, la transformation f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

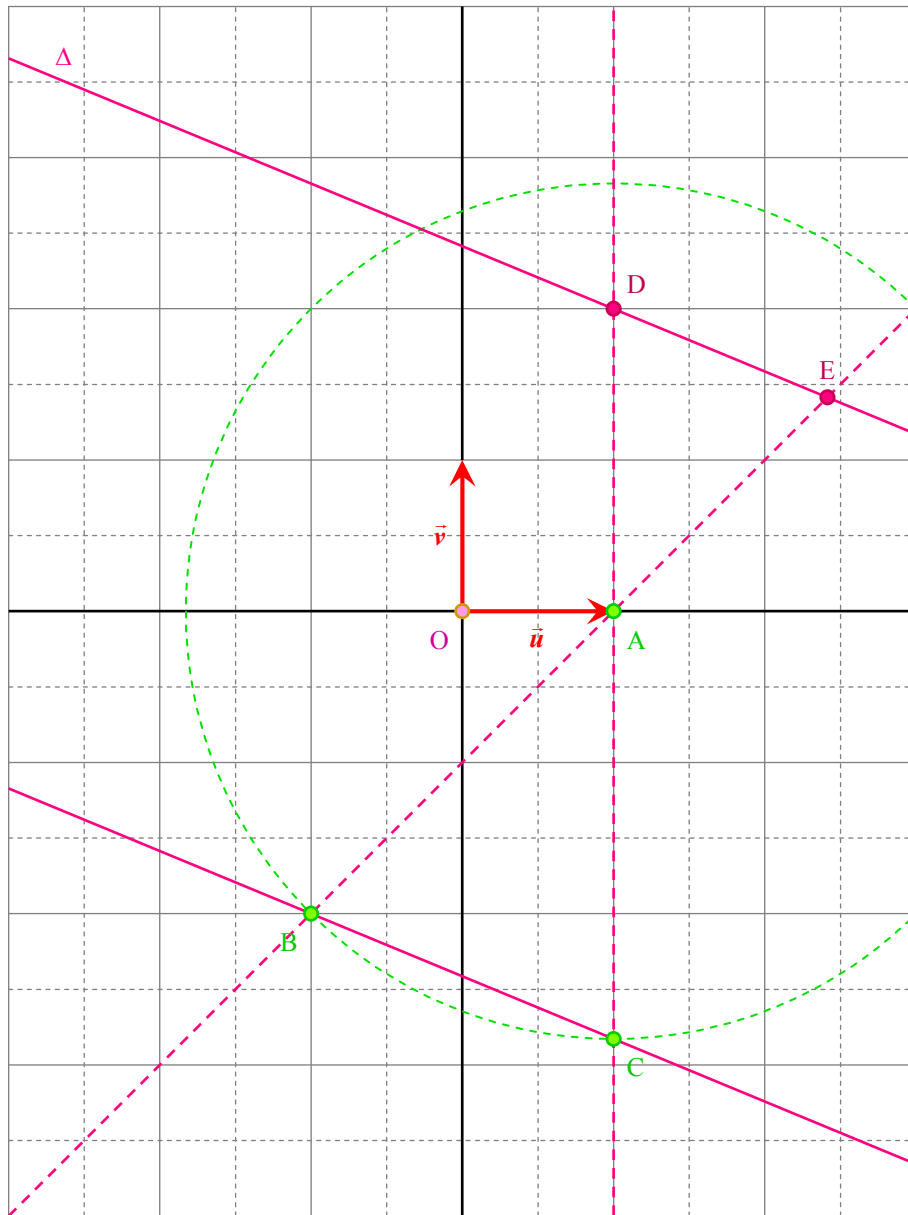
Le centre de cette rotation est son unique point fixe. Et l'affixe de son centre est le seul complexe qui soit solution de l'équation :

$$z' = z \Leftrightarrow -iz - 1 + 3i = z \Leftrightarrow -1 + 3i = z + iz \Leftrightarrow -1 + 3i = (1 + i) \times z$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 + 3i}{1 + i} = \frac{(-1 + 3i) \times (1 - i)}{(1 + i) \times (1 - i)} = \frac{-1 + i + 3i + 3}{1 - i^2} = \frac{2 + 4i}{1 - (-1)} = 1 + 2i = d$$

Conclusion : la transformation f est la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

A l'issue de l'exercice, la figure est celle ci-dessous :



Equations différentielles, primitives et intégrales

Les primitives sont reparues.

Le contexte

Un exercice classique de détermination de primitives à partir des formules du cours.

L'énoncé

Cet exercice est composé de trois sous-parties indépendantes.

a) La fonction f est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}$$

Déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $F(1) = 5$.

b) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} + \frac{2x}{(2x^2+1)}$$

Déterminer une primitive F sur $\mathbb{R}$ de cette fonction f .

c) La fonction f est définie sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}; 2\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 9}{2x^2 - x - 6}$$

1. Déterminer trois entiers a , b et c tels que pour tout réel $x \in \left]-\frac{3}{2}; 2\right[$ on ait :

$$f(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x+3}$$

2. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}; 2\right[$.

Le corrigé

a) La primitive F sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de la fonction :

$$f(x) = 1 + 2x + 3 \times \frac{1}{x} + 4 \times \frac{1}{x^2}$$

est de la forme :

$$F(x) = x + x^2 + 3 \times \ln(x) + 4 \times \frac{-1}{x} + \text{constante}$$

Reste à déterminer la valeur de cette *constante*. Pour ce faire, nous savons :

$$F(1) = 5 \Leftrightarrow 1 + 1^2 + 3 \times \ln(1) - 4 \times \frac{1}{1} + \text{constante} = 5$$

$$\Leftrightarrow 1 + 1 + 3 \times 0 - 4 + \text{constante} = 5$$

$$\Leftrightarrow 2 + 0 - 4 + \text{constante} = 5 \Leftrightarrow \text{constante} = 5 + 2 = 7$$

Conclusion : une écriture de la primitive F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est :

$$F(x) = x^2 + x + 7 + 3 \times \ln(x) - \frac{4}{x}$$

b) Examinons les deux termes constituant la somme $f(x)$:

$$\heartsuit \quad \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{4x}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = 2x^2 + 1 & \text{donc} \quad u'(x) = 4x \\ u \text{ est dérivable et positive sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Donc une primitive de } \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \frac{1}{2} \times \cancel{2} \sqrt{u} = \sqrt{2x^2+1}$$

$$\heartsuit \quad \frac{2x}{(2x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = 2x^2 + 1 & \text{donc} \quad u'(x) = 4x \\ u \text{ est dérivable et non nulle sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Donc une primitive de } \frac{2x}{(2x^2+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \frac{1}{2} \times \frac{-1}{u} = \frac{-1}{2 \times (2x^2+1)}$$

Conclusion : toutes les primitives F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f sont de la forme :

$$F(x) = \sqrt{2x^2+1} - \frac{1}{4x^2+2} + \text{constante}$$

c.1) On veut écrire la fonction f sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{2x+3} \\ &= \frac{a \times (x-2) \times (2x+3) + b \times (2x+3) + c \times (x-2)}{(x-2) \times (2x+3)} \\ &= \frac{a \times (2x^2 + 3x - 4x - 6) + 2bx + 3b + cx - 2c}{x^2 + 3x - 4x - 6} \\ &= \frac{\boxed{4} \times x^2 + \boxed{(-2)} \times x + \boxed{9}}{2x^2 - x - 6} = \frac{\boxed{2a} \times x^2 + \boxed{(-a+2b+c)} \times x + \boxed{(-6a+3b-2c)}}{2x^2 - x - 6} \end{aligned}$$

Les dénominateurs étant identiques, les numérateurs de ces deux fractions sont égaux.
On identifie les coefficients de même degré de ces deux numérateurs :

$$\begin{array}{lcl} \text{En } x^2 & : & 4 = 2a \Leftrightarrow a = \boxed{2} \\ \text{En } x & : & -2 = -a + 2b + c \Leftrightarrow -2 = -2 + 2b + c \Leftrightarrow 2b + c = 0 \quad (1) \\ \text{Constants} & : & 9 = -6a + 3b - 2c \Leftrightarrow 9 = -12 + 3b - 2c \Leftrightarrow 3b - 2c = 21 \quad (2) \end{array}$$

Les coefficients b et c sont les solutions du système linéaire $\begin{cases} 2b + c = 0 & (1) \\ 3b - 2c = 21 & (2) \end{cases}$.

Procédons par substitution ! A partir de l'équation (1), nous exprimons c en fonction de b .

$$2b + c = 0 \Leftrightarrow c = \boxed{-2b}$$

Puis, on remplace c par ce qu'il vaut en b dans l'équation (2).

$$\begin{aligned} 3b - 2c = 21 &\Leftrightarrow 3b - 2 \times (-2b) = 21 \\ &\Leftrightarrow 3b + 4b = 21 \Leftrightarrow 7b = 21 \Leftrightarrow b = \boxed{3} \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$c = -2b = -2 \times 3 = \boxed{-6}$$

Conclusion : la forme décomposée de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2x + 9}{2x^2 - x - 6} = 2 + \frac{3}{x-2} - \frac{6}{2x+3}$$

c.2) Examinons les termes de la fonction f sur l'intervalle $]-1,5;2[$:

♥ Une primitive de 2 sur $\mathbb{R}$ est $2x$.

♥ $\frac{3}{x-2} = 3 \times \frac{1}{x-2} = 3 \times \frac{u'}{u}$ avec $\left| \begin{array}{l} u(x) = x-2 \text{ donc } u'(x) = 1 \\ u \text{ est dérivable et négative sur }]-\infty;2[\end{array} \right.$

Donc une primitive de $\frac{3}{x-2}$ sur $]-\infty;2[$ est $3 \times \ln(-u) = 3 \times \ln(2-x)$

♥ $\frac{-6}{2x+3} = -3 \times \frac{2}{2x+3} = -3 \times \frac{u'}{u}$ avec $\left| \begin{array}{l} u(x) = 2x+3 \text{ donc } u'(x) = 2 \\ u \text{ est dérivable et positive sur }]-1,5;+\infty[\end{array} \right.$

Donc une primitive de $\frac{-6}{2x+3}$ sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$ est $-3 \times \ln(u) = -3 \times \ln(2x+3)$

Conclusion : une primitive de f sur l'intervalle est $]-1,5;2[$ est la fonction :

$$F(x) = 2x + 3 \times \ln(2-x) - 3 \times \ln(2x+3) = 2x + 3 \times \ln\left(\frac{2-x}{2x+3}\right)$$

Pour avoir toutes les autres, il suffit de rajouter une *constante* !

Différentiel système

Le contexte

Un exercice de facture très classique qui commence par l'étude d'une fonction à base d'exponentielle qui est ensuite une solution particulière d'une équation différentielle avec second membre.

L'énoncé

La fonction φ est définie pour tout réel x par :

$$\varphi(x) = (x^2 - 3x + 3) \times e^x$$

a) Dans ces premières questions, nous allons étudier la fonction φ sur $\mathbb{R}$

1. Calculer les images de 0 et 1 par la fonction φ .
2. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction φ .
3. Démontrer que pour tout réel x , nous avons :

$$\varphi'(x) = (x^2 - x) \times e^x$$

4. En déduire les variations de la fonction φ sur $]-\infty; +\infty[$.

b) On appelle (E) et (E') les équations différentielles :

$$(E) : 3.y - 2.y' = (x^2 - 7x + 9).e^x$$

$$(E') : 3.y - 2.y' = 0$$

L'objet des questions suivantes est la résolution de l'équation différentielle (E) .

1. Démontrer que la fonction φ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $g = f - \varphi$ est solution de l'équation différentielle homogène (E') .
3. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle (E') .
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
5. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) pour laquelle l'image de 0 est égale à 5.

Le corrigé

a.1) Calculons les images de 0 et 1 par la fonction φ :

$$\varphi(0) = (0^2 - 3 \times 0 + 3) \times e^0 = 3 \times 1 = 3$$

$$\varphi(1) = (1^2 - 3 \times 1 + 3) \times e^1 = 1 \times e = e$$

a.2) Quand x s'en va vers $-\infty$, $x^2 - 3x + 3$ tend vers $(+\infty) - 3 \times (-\infty) + 3 = +\infty$
 e^x tend vers 0^+

Donc $\varphi(x)$ est au voisinage de $-\infty$ une forme indéterminée du type $\infty \times 0$.

En fait, c'est une petite forme indéterminée car il suffit juste de développer pour la lever.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 3) \times e^x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x - 3 \times x \cdot e^x + 3 \times e^x \quad \text{Trois limites vues en cours...} \\ &= 0^+ - 3 \times 0^- + 3 \times 0^+ = 0^+ + 0^+ + 0^+ = 0^+ \end{aligned}$$

Ce n'était pas demandé mais, graphiquement, l'axe des abscisses est une asymptote au voisinage de $-\infty$ à la courbe représentant la fonction φ .

➤ Quand x tend vers $+\infty$, $x^2 - 3x + 3$ tend vers $(+\infty) - (+\infty) + 3 = \text{Forme indéterminée}$.
 e^x tend vers $+\infty$

C'est encore une petite indétermination qui se lève en factorisant le premier facteur par x^2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 3) \times e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \times \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \times e^x \\ &= (+\infty) \times (1 - 0^+ + 0^+) \times (+\infty) = (+\infty) \times 1 \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

a.3) $\varphi(x)$ est le produit des fonctions $u(x) = x^2 - 3x + 3$ et $v(x) = e^x$
 $u'(x) = 2x - 3$ $v'(x) = e^x$
Dérivable sur $\mathbb{R}$ Dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= u' \times v + v' \times u = (2x - 3) \times e^x + e^x \times (x^2 - 3x + 3) \\ &= e^x \times [(2x - 3) + (x^2 - 3x + 3)] = e^x \times [x^2 - x] = e^x \times x \times (x - 1) \end{aligned}$$

a.4) Le signe de la dérivée $\varphi'(x)$ nous donne les variations de la fonction φ ...ci-contre →

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x		+	+	+
x		-	0	+
$x-1$		-	-	0
$\varphi'(x)$		+	0	-
φ		↗	↘	↗

b.1) Pour tout réel x , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 3 \times \varphi(x) - 2 \times \varphi'(x) &= 3 \times (x^2 - 3x + 3) \times e^x - 2 \times (x^2 - x) \times e^x \\
 &= [3 \times (x^2 - 3x + 3) - 2 \times (x^2 - x)] \times e^x \quad \text{On factorise...} \\
 &= [3x^2 - 9x + 9 - 2x^2 + 2x] \times e^x = (x^2 - 7x + 9) \times e^x
 \end{aligned}$$

Donc la fonction φ est une solution de l'équation différentielle **(E)**.

b.2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On appelle alors g la fonction définie par :

$$g(x) = f(x) - \varphi(x) \quad \text{soit} \quad f(x) = g(x) + \varphi(x)$$

Du point de vue des dérivées, nous avons les égalités suivantes :

$$g'(x) = f'(x) - \varphi'(x) \quad \text{soit} \quad f'(x) = g'(x) + \varphi'(x)$$

Procédons par équivalences. Nous pouvons écrire :

$$f \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow 3 \times f(x) - 2 \times f'(x) = (x^2 - 7x + 9) \times e^x \quad \text{Valable pour tout réel } x$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow 3 \times (g(x) + \varphi(x)) - 2 \times [g'(x) + \varphi'(x)] = (x^2 - 7x + 9) \times e^x \\
 &\Leftrightarrow 3 \times g(x) - 2 \times g'(x) + \underbrace{3 \times \varphi(x) - 2 \times \varphi'(x)}_{\text{Car } \varphi \text{ est une solution de (E)}} = (x^2 - 7x + 9) \times e^x \\
 &\Leftrightarrow 3 \times g(x) - 2 \times g'(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow g = f - \varphi \text{ est solution de (E')}
 \end{aligned}$$

b.3) D'après un théorème du cours, les solutions de l'équation différentielle homogène :

$$(E') : 3y - 2y' = 0 \Leftrightarrow -2y' = 3y \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$$

sont les fonctions g dérivables sur $\mathbb{R}$ et définies par :

$$h(x) = Cste \times e^{\frac{3}{2}x}$$

où $Cste$ est un réel fixé quelconque.

b.4) Nous en déduisons que les solutions de l'équation différentielle **(E)** sont les fonctions f de la forme :

$$f(x) = g(x) + \varphi(x) = Cste \times e^{\frac{3}{2}x} + (x^2 - 3x + 3) \times e^x$$

b.5) Nous cherchons la solution particulière f qui vérifie :

$$\begin{aligned}
 f(0) = 5 &\Leftrightarrow Cste \times e^{\frac{3}{2} \times 0} + (0^2 - 3 \times 0 + 3) \times e^0 = 5 \\
 &\Leftrightarrow Cste \times 1 + 3 \times 1 = 5 \Leftrightarrow Cste + 3 = 5 \Leftrightarrow Cste = 2
 \end{aligned}$$

Conclusion : la seule solution de l'équation différentielle **(E)** par laquelle 0 a pour image 5

est la fonction $f(x) = 2 \times e^{\frac{3}{2}x} + (x^2 - 3x + 3) \times e^x$

L'intégrale des intégrales

Le contexte

Un exercice constitué de savoir-faire de base à propos des intégrales.

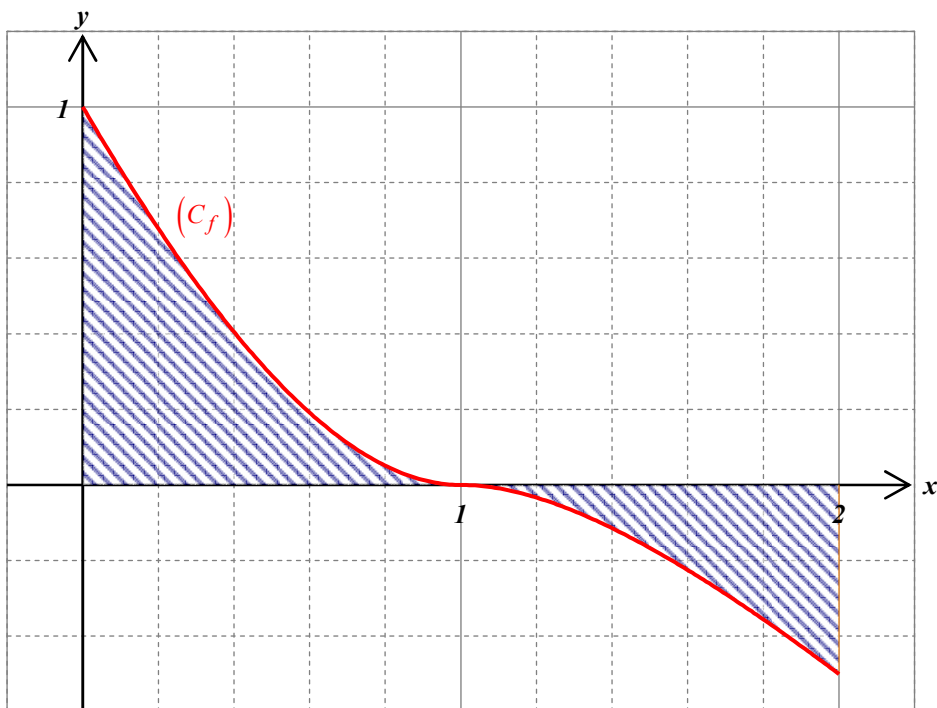
L'énoncé

a) Sur le graphique ci-dessous où une unité graphique vaut 5 centimètres, on a représenté la fonction f qui est définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in [0; 1] & \text{alors } f(x) = e^x - e \times x \\ \text{Si } x \in]1; 2] & \text{alors } f(x) = 2 - x - \frac{1}{x} \end{cases}$$

La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[0; 2]$ mais ce n'est pas le sujet !

Calculer l'aire du domaine hachuré sur le graphique. On donnera d'abord la valeur exacte en unité d'aire, puis une seconde valeur approchée au dixième exprimée en centimètres carrés.



b) On appelle B l'intégrale :

$$B = \int_0^1 \frac{4x^2 - 5}{2x + 1} . dx$$

- Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$, on ait :

$$\frac{4x^2 - 5}{2x + 1} = a.x + b + \frac{c}{2x + 1}$$

- Calculer l'intégrale B .

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$C = \int_0^1 (7x - 5) \times e^{3x} . dx$$

d) Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale D_n par :

$$D_n = \int_0^{\pi/4} x^n \times \cos(x) . dx$$

- Dans cette question, n est un entier naturel quelconque.

On rappelle que pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$, on a :

$$0 \leq \cos(x) \leq 1$$

En partant de cette inégalité, établir l'inégalité :

$$0 \leq D_n \leq \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1}$$

- En déduire la limite de la suite (D_n) .

Le corrigé

a) Deux intégrales sont à calculer :

- ☛ La première va nous donner l'aire sous la courbe (C_f) sur l'intervalle $[0;1]$.

$$\int_0^1 f(x).dx = \int_0^1 (e^x - e \times x).dx$$

Cette aire algébrique est positive !!!

$$= \left[e^x - e \times \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(e^1 - e \times \frac{1}{2} \right) - \left(e^0 - e \times \frac{0}{2} \right) = \frac{e}{2} - 1$$

- ☛ La seconde va nous donner l'aire sous la courbe (C_f) sur l'intervalle $[1;2]$.

$$\int_1^2 f(x).dx = \int_1^2 \left(2 - x - \frac{1}{x} \right).dx$$

Cette aire algébrique est négative !!!

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \ln(x) \right]_1^2 = \left(4 - \frac{4}{2} - \ln(2) \right) - \left(2 - \frac{1}{2} - \ln(1) \right) = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

Nous en déduisons que l'aire du domaine hachuré est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \text{Aire}(\text{Domaine } [0;1]) + \text{Aire}(\text{Domaine } [1;2]) \\ &= \left(\frac{e}{2} - 1 \right) + \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \frac{e}{2} + \ln(2) - \frac{3}{2} \text{ unités d'aire} \end{aligned}$$

Une unité d'aire correspondant à l'aire d'un carré de 5 centimètres de côté, nous en concluons que l'aire du domaine hachuré est de 13,8 centimètres carrés.

b.1) Deux méthodes permettent de décomposer la fonction rationnelle $f(x) = \frac{4x^2 - 5}{2x + 1}$.

On peut procéder par identification des coefficients de même degré du numérateur...

On veut écrire la fonction rationnelle f sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= a.x + b + \frac{c}{2x+1} \\ &= \frac{a.x \times (2x+1) + b(2x+1) + c}{2x+1} \\ &= \frac{2a.x^2 + a.x + 2b.x + b + c}{2x+1} \\ &= \frac{\boxed{4} \times x^2 + \boxed{0} \times x + \boxed{(-5)}}{2x+1} = \frac{\boxed{2a} \times x^2 + \boxed{(a+2b)} \times x + \boxed{(b+c)}}{2x+1} \end{aligned}$$

Deux fonctions rationnelles égales et ayant le même dénominateur ont les coefficients de même degré égaux de leurs numérateurs égaux. Nous en déduisons les équations :

$$\begin{aligned} \text{Egalité en } x^2 &: 4 = 2a \Leftrightarrow a = \boxed{2} \\ \text{Egalité en } x &: 0 = a + 2b \Leftrightarrow 0 = 2 + 2b \Leftrightarrow b = \boxed{-1} \\ \text{Egalité des constants} &: -5 = b + c \Leftrightarrow -5 = -1 + c \Leftrightarrow c = \boxed{-4} \end{aligned}$$

...ou on peut chercher à extraire le dénominateur de chacun des termes du numérateur.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\boxed{4x^2} - 5}{2x+1} = \frac{\boxed{2x \times (2x+1) - 2x} - 5}{2x+1} = \frac{\cancel{2x \times (2x+1)} - 2x - 5}{2x+1} \\ &= 2x + \frac{\boxed{-2x} - 5}{2x+1} = 2x + \frac{\boxed{-1 \times (2x+1) + 1} - 5}{2x+1} = 2x - 1 - \frac{4}{2x+1} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout réel $x \neq -\frac{1}{2}$, nous avons :

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5}{2x + 1} = 2x - 1 - \frac{4}{2x + 1}$$

b.2) Examinons les deux termes composant la fonction rationnelle $f(x)$:

- ☛ Une primitive de $2x - 1$ sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{x^2 - x}$.

- ☛ Une primitive de $\frac{4}{2x+1} = 2 \times \frac{2}{2x+1} = 2 \times \frac{u'}{u}$ où $\boxed{u(x) = 2x+1} \Rightarrow u'(x) = 2$
 u positive et dérivable sur $[0;1]$

sur l'intervalle $[0;1]$ est $\boxed{2 \times \ln(u) = 2 \times \ln(2x+1)}$

Il vient :

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \frac{4x^2 - 5}{2x + 1}.dx \\ &= \int_0^1 \left(2x - 1 - \frac{4}{2x+1} \right).dx = \left[x^2 - x - 2 \times \ln(2x+1) \right]_0^1 \\ &= \underbrace{(1 - 1 - 2 \times \ln(3))}_{\text{Image de 1}} - \underbrace{(0 - 0 - 2 \times \ln(1))}_{\text{Image de 0}} = \boxed{-2 \times \ln(3)} \end{aligned}$$

c) La technique d'intégration par parties repose sur la formule :

$$\int_0^1 u(x) \times v'(x) . dx = [u(x) \times v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x) \times v(x) . dx$$

avec dans les deux rôles principaux :

$$\begin{array}{|l} u(x) = 7x - 5 \quad \text{donc} \quad u'(x) = 7 \\ u \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{|l} v'(x) = e^{3x} \quad \text{donc} \quad v(x) = \frac{1}{3} \times e^{3x} \\ v \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{array}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 (7x - 5) \times e^{3x} . dx = \left[(7x - 5) \times \frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^1 - \int_0^1 7 \times \frac{1}{3} e^{3x} . dx \\ &= \underbrace{(7 \times 1 - 5) \times \frac{1}{3} e^3}_{\text{Image de 1}} - \underbrace{(7 \times 0 - 5) \times \frac{1}{3} e^0}_{\text{Image de 0}} - \int_0^1 \frac{7}{3} \times e^{3x} . dx \\ &= \frac{2}{3} e^3 + \frac{5}{3} \times 1 - \frac{7}{3} \times \int_0^1 e^{3x} . dx = \frac{2}{3} e^3 + \frac{5}{3} - \frac{7}{3} \times \left[\frac{1}{3} e^{3x} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} e^3 + \frac{5}{3} - \frac{7}{3} \times \left(\frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3} e^0 \right) = \frac{6}{9} e^3 + \frac{15}{9} - \frac{7}{9} e^3 + \frac{7}{9} = \frac{22 - e^3}{9} \end{aligned}$$

d.1) D'abord, comme la fonction cosinus est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \pi]$, alors :

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \xrightarrow[\text{Décroissante sur } [0; \pi]]{\cos} \underbrace{\cos(0)}_1 \geq \cos(x) \geq \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\sqrt{2}/2} \Rightarrow \underline{1 \geq \cos(x) \geq 0} \quad \text{D'où l'indication...}$$

Continuons sur notre lancée ! Pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, nous pouvons alors écrire :

$$0 \leq \cos(x) \leq 1 \xrightarrow[\text{qui est positif sur } [0; \pi/4]]{\times x^n} 0 \leq x^n \times \cos(x) \leq x^n$$

Intégrons cette inégalité sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Les bornes d'intégration étant dans l'ordre, l'ordre est conservé...

C'est une primitive de x^n

$$\int_0^{\pi/4} 0 . dx \leq \int_0^{\pi/4} x^n \times \cos(x) . dx \leq \int_0^{\pi/4} x^n . dx \Leftrightarrow 0 \leq D_n \leq \left[\frac{1}{n+1} \times x^{n+1} \right]_0^{\pi/4}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq D_n \leq \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1} - \frac{1}{n+1} \times 0^{n+1}$$

Image de $\pi/4$ Image de 0

$$\Leftrightarrow 0 \leq D_n \leq \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1}$$

d.2) Comme $\frac{\pi}{4}$ est une raison comprise entre 0 et 1, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1} = 0^+$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1} = \frac{1}{+\infty} \times 0^+ = 0^+ \times 0^+ = 0^+$$

En application du théorème des gendarmes, nous en déduisons que la suite (D_n) converge vers 0.

Probabilités

L'exercice de proba !

Le contexte

Cet exercice de probabilités non continues est une création originale. Il aborde tous les domaines des probabilités discrètes au programme.

L'énoncé

Les probabilités demandées seront données sous la forme d'une fraction irréductible ou sous la forme d'un nombre décimal exact.

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie A - Les «trois huit»

Pour augmenter les revenus (et surtout les siens), *La Blancoise des Jeux* a conçu un nouveau jeu : les *Trois Huit* dont les modalités sont les suivantes :

Dans une urne, se trouvent douze cartes : sept, huit et neuf de coeur, carreau, pique et trèfle.

Ces douze cartes sont indiscernables au toucher et à la vue du joueur.

Le joueur tire simultanément une main de trois cartes dans l'urne.

Si cette main est constituée de trois huit, alors il a gagné et le jeu s'arrête.

Si la main ne comporte aucun ou qu'un seul huit, le joueur a perdu et le jeu s'arrête aussi.

Par contre, si la main comporte exactement deux huit, alors le joueur a une seconde chance et il tire une quatrième carte bonus parmi celles restant dans l'urne. Si cette quatrième carte est un huit, il a gagné. Sinon il perdu.

On définit les événements suivants :

- H_3 = «la main de trois cartes est composée de trois huit»
- H_2 = «la main de trois cartes comporte exactement deux huit»
- E = «la main de trois cartes comporte au plus un huit»
- G = «le joueur gagne la partie»

1. Calculer :

- Le nombre de mains de trois cartes possibles.
- Le nombre de mains favorables à l'événement H_3 .
- Le nombre de mains favorables à l'événement H_2 .
- Le nombre de mains favorables à l'événement E .

2. Représenter la situation d'une partie (c'est-à-dire le tirage de la main de trois cartes plus l'éventuelle carte bonus).

3. Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{1}{15}$.

4. On sait que le joueur vient de perdre sa partie. Déterminer la probabilité qu'il ait eu exactement deux huit dans sa main de trois cartes.

Partie B - Les machines à compter

Dans un lycée, le jour de l'épreuve de mathématiques baptisé *Judgement Day*, chaque élève dispose d'une et d'une seule machine. Plus exactement, trois types de calculatrices ont été répertoriés. Nous appellerons type **1**, **2** et **3**.

Des comptages effectués par des surveillants qui s'ennuient permettent d'aboutir aux statistiques suivantes :

- 60% des personnes passant l'épreuve de mathématiques sont des femmes.
- 54% des personnes passant l'épreuve utilisent une machine de type **1**.
- 30% des hommes passant l'épreuve utilisent une machine de type **1**.
- 20% des femmes passant l'épreuve utilisent une machine de type **2**.

A l'issue de l'épreuve, on rencontre au hasard l'une des personnes ayant participé à l'épreuve de mathématiques.

On définit les événements suivants :

- C_i = «la personne rencontrée utilise une machine de type **i**»
- F = «la personne rencontrée est une femme»
- M = «la personne rencontrée est un homme»

Calculer la probabilité que la personne rencontrée utilise une calculatrice de type **3** sachant que celle-ci est une femme.

Le corrigé

Partie A - Les «trois huit»

1. Le tirage des trois cartes étant simultané, il est donc sans ordre et son résultat est une combinaison.

→ Pour constituer une main, on doit choisir 3 cartes parmi les 12 présentes dans l'urne.

Il y a donc $\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220$ mains possibles.

→ Pour constituer une main favorable à l'événement H_3 , on doit choisir 3 huit parmi les 4

présents dans l'urne. Il y a donc $\binom{4}{3} = 4$ mains favorables à H_3 .

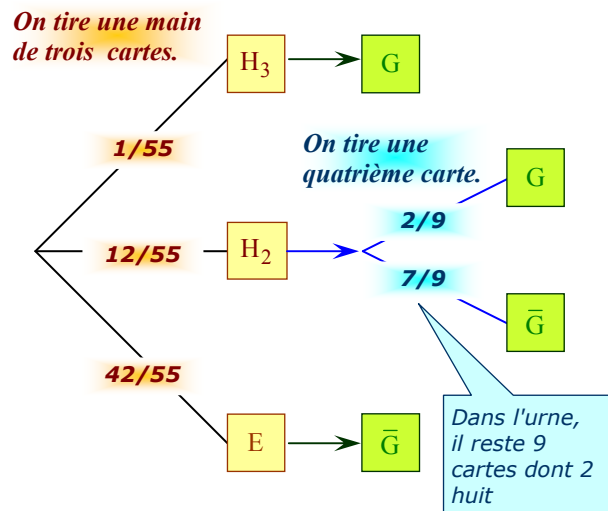
→ Pour constituer une main favorable à l'événement H_2 , on doit choisir 2 huit parmi les 4 présents dans l'urne et une autre carte parmi les 8 autres présentes dans l'urne.

Par conséquent, il y a $\overbrace{\binom{4}{2}}^{2 \text{ huit parmi } 4} \times \overbrace{\binom{4}{1}}^{1 \text{ autre parmi } 8} = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} \times 8 = 48$ mains favorables à H_2 .

→ Les mains favorables à l'événement E sont celles qui ne sont ni favorables à l'événement H_3 , ni favorables à l'événement H_2 .

Nous en déduisons qu'il y a $220 - 4 - 48 = 168$ mains favorables à l'événement E.

2. Dans ce jeu, les douze cartes ont toutes la même probabilité d'être tirées. Nous sommes donc en situation d'équiprobabilité. La probabilité d'un événement sera donnée par le rapport entre le nombre de mains favorables à celui-ci et le nombre de mains totales. La situation d'une partie de *Trois Huit* peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



3. Les événements H_3 , H_2 et E formant une partition de l'univers des possibles, nous pouvons écrire en application de la formule des probabilités totales :

$$p(G) = p(G \cap H_3) + p(G \cap H_2) + p(G \cap E)$$

$$= \frac{1}{55} + \overbrace{\frac{12}{55} \times \frac{2}{9}}^{p(H_2) \times p_{H_2}(G)} + 0 = \frac{1}{55} + \frac{8}{165} = \frac{3}{165} + \frac{8}{165} = \frac{11}{165} = \frac{1}{15}$$

4. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle H_2 sachant $\bar{G}$. Celle-ci est donnée par :

$$p(H_2 \text{ sachant } \bar{G}) = \frac{p(H_2 \cap \bar{G})}{p(\bar{G})}$$

Or :

$$p(\bar{G}) = 1 - p(G) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

$$p(H_2 \cap \bar{G}) = p(H_2) \times p(\bar{G} \text{ sachant } H_2) = \frac{12}{55} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{165}$$

Nous en déduisons :

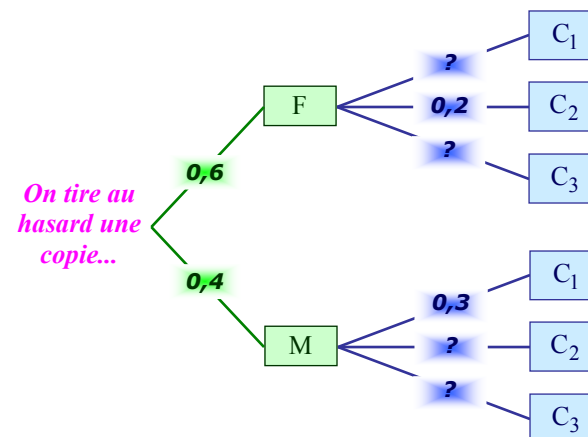
$$p(H_2 \text{ sachant } \bar{G}) = \frac{p(H_2 \cap \bar{G})}{p(\bar{G})} = \frac{28}{165} \times \frac{15}{14} = \frac{2}{11}$$

Partie B - Les machines à compter

Nous cherchons la probabilité conditionnelle C_3 sachant F.

La situation peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :

De quel sexe est la personne ? Quel type de calculatrice possède la personne ?



Les événements F et M formant une partition de l'univers des possibles, nous pouvons écrire que d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}p(C_1) &= p(C_1 \cap F) + p(C_1 \cap M) \Leftrightarrow 0,54 = 0,6 \times p_F(C_1) + 0,4 \times 0,3 \\&\Leftrightarrow 0,42 = 0,6 \times p_F(C_1) \\&\Leftrightarrow p_F(C_1) = \frac{0,42}{0,6} = \underline{0,7}\end{aligned}$$

Sur le rameau partant de l'événement F, nous en déduisons alors :

$$p_F(C_1) + p_F(C_2) + p_F(C_3) = 1 \Leftrightarrow p_F(C_3) = 1 - 0,7 - 0,2 = \underline{0,1}$$

Suites

Il était une fois le cube...tronqué

Le contexte

Une étude classique d'une suite définie par récurrence au moyen d'une fonction affine.

L'énoncé et le corrigé

La suite (v_n) est définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{1}{4} \times v_n + 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

a. Construire sur l'axe des abscisses, graphiquement et sans calcul, les quatre premiers termes de la suite v_0 v_1 v_2 v_3

On appelle f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{4} \times x + 1$$

La fonction f est celle qui permet de passer d'un terme de la suite au suivant. C'est-à-dire que, pour tout entier naturel n , nous avons :

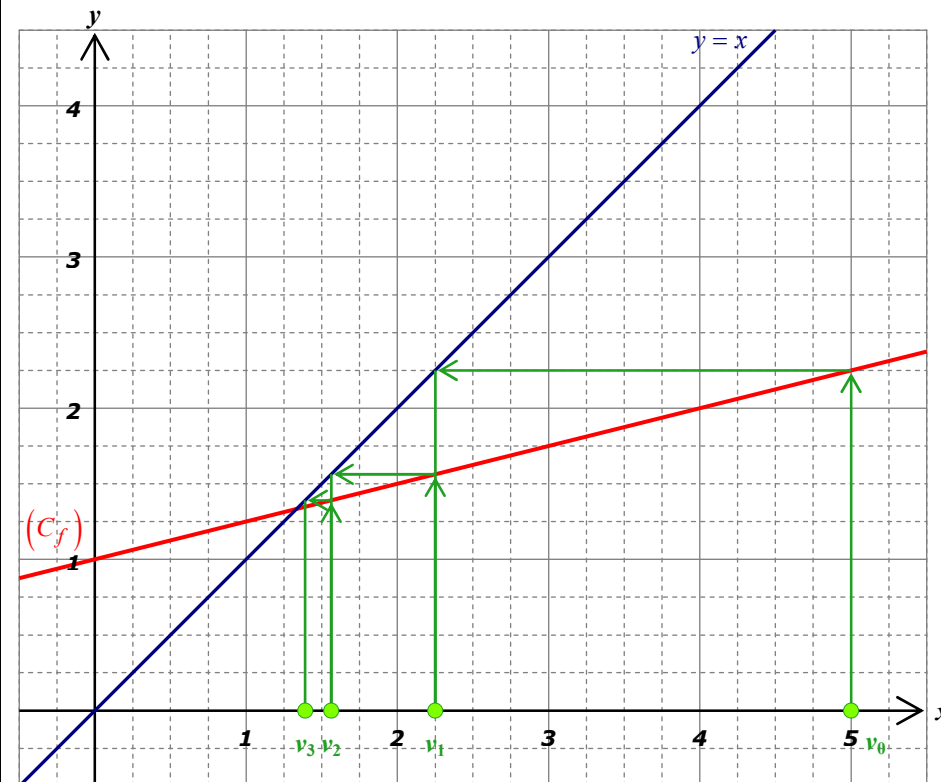
$$v_{n+1} = f(v_n) = \frac{1}{4} \times v_n + 1$$

La courbe (C_f) de la fonction affine f est une droite qui passe par le point

«d'ordonnées à l'origine» $(0;1)$ et qui a pour coefficient directeur $\frac{1}{4}$.

On construit les quatre termes demandés en se projetant sur la courbe (C_f) d'équation $y = f(x)$ et en se rétablissant sur la droite d'équation $y = x$, celle que l'on appelle la première bissectrice du plan.

La construction demandée est la suivante :



b. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété :

$$P_n : 0 \leq v_{n+1} < v_n \leq 5$$

Avant toutes choses, remarquons que la fonction affine $f(x) = \frac{x}{4} + 1$ est strictement

croissante sur $\mathbb{R}$ car son coefficient directeur $\frac{1}{4}$ est strictement positif.

Dans cette démonstration par récurrence, deux choses sont à établir :

→ D'abord, au premier rang, la propriété P_0 est-elle vraie ?

Nous connaissons le terme v_0 , calculons le suivant v_1 .

$$v_1 = f(v_0) = \frac{1}{4} \times v_0 + 1 = \frac{1}{4} \times 5 + 1 = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4} = 2,25$$

Clairement, nous avons :

$$0 \leq \underbrace{v_1}_{2,25} < \underbrace{v_0}_5 \leq 5 \quad \text{donc} \quad \text{la propriété } P_0 \text{ est vraie.}$$

→ Le principe de récurrence : P_n vraie implique-t-il que P_{n+1} soit vraie également ?

Supposons que la propriété P_n pour un certain entier n . Nous avons alors :

$$0 \leq v_{n+1} < v_n \leq 5$$

$$f(0) \leq f(v_{n+1}) < f(v_n) \leq f(5)$$

$$1 \leq v_{n+2} < v_{n+1} \leq 2,25$$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle conserve l'ordre.

Or, quand on est compris entre 1 et 2,25, on est de facto entre 0 et 5.

Nous aboutissons finalement à ce que :

$$0 \leq v_{n+2} < v_{n+1} \leq 5 \quad \text{donc} \quad \text{la propriété } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

Le principe de récurrence est établi.

c. Démontrer que la suite (v_n) converge [vers un réel ℓ].

Lors de la question b., nous avons établi que pour entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_n > v_{n+1} &\Rightarrow \text{La suite } (v_n) \text{ est strictement décroissante} \\ v_n \geq 0 &\Rightarrow \text{La suite } (v_n) \text{ est minorée par } 0 \end{aligned}$$

Etant décroissante et minorée, la suite (v_n) est convergente vers un réel ℓ qui sera déterminé lors de la question suivante.

d. Déterminer par le calcul cette limite ℓ .

Comme :

La suite (v_n) est définie par récurrence au moyen de la fonction f
 La fonction affine f est continue sur $[0;5]$
 Tous les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $[0;5]$
 La suite (v_n) converge vers un réel ℓ

alors cette limite ℓ est l'une des solutions de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;5]$.

Aussi résolvons cette équation dans l'intervalle $[0;5]$:

4/3 appartient à $[0;5]$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{4} \times x + 1 = x \Leftrightarrow \frac{1}{4} \times x - x = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Conclusion : la limite ℓ de la suite (v_n) est la seule solution de cette équation soit $\frac{4}{3}$.

La limite de (v_n) par son expression...

On appelle (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = v_n - \frac{4}{3}$$

e. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison que l'on précisera

Nous devons prouver que pour tout entier naturel n , nous avons une relation de la forme :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{un facteur } q \text{ constant...}$$

Nous pouvons écrire :

$$u_{n+1} = v_{n+1} - \frac{4}{3} = \frac{1}{4} \times v_{n+1} + 1 - \frac{4}{3} = \frac{1}{4} \times \left(u_n + \frac{4}{3} \right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \times u_n + \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \times u_n$$

Conclusion : la suite (u_n) est géométrique de raison $1/4$.

f. En déduire les expressions de u_n , puis de v_n en fonction de n .

Conclure en déterminant la limite de la suite (v_n) à partir de son expression.

La suite (u_n) étant géométrique de raison $\frac{1}{4}$, son expression est de la forme :

$$u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^n \quad \text{avec} \quad u_0 = v_0 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

Il vient alors pour la suite (v_n) :

$$v_n = u_n + \frac{4}{3} = \frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^n + \frac{4}{3}$$

Nous en concluons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^n + \frac{4}{3} = \frac{11}{3} \times 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

La raison $1/4$ est comprise entre 0 et 1.

Voici un premier exercice de géométrie dans l'espace où il s'agit de tracer des intersections de plan,

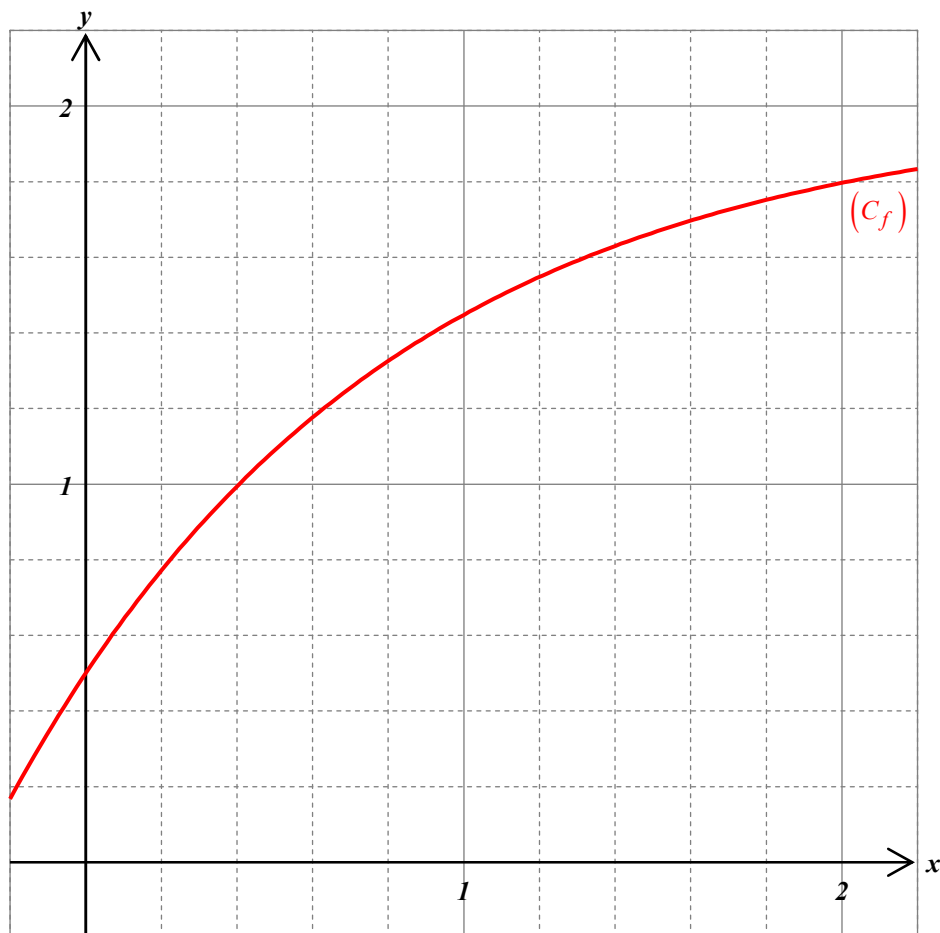
En attendant les suites...

Le contexte

Dans cet exercice très classique, il s'agit de construire de manière graphique les premiers termes d'une suite.

L'énoncé

La suite (u_n) est définie par :

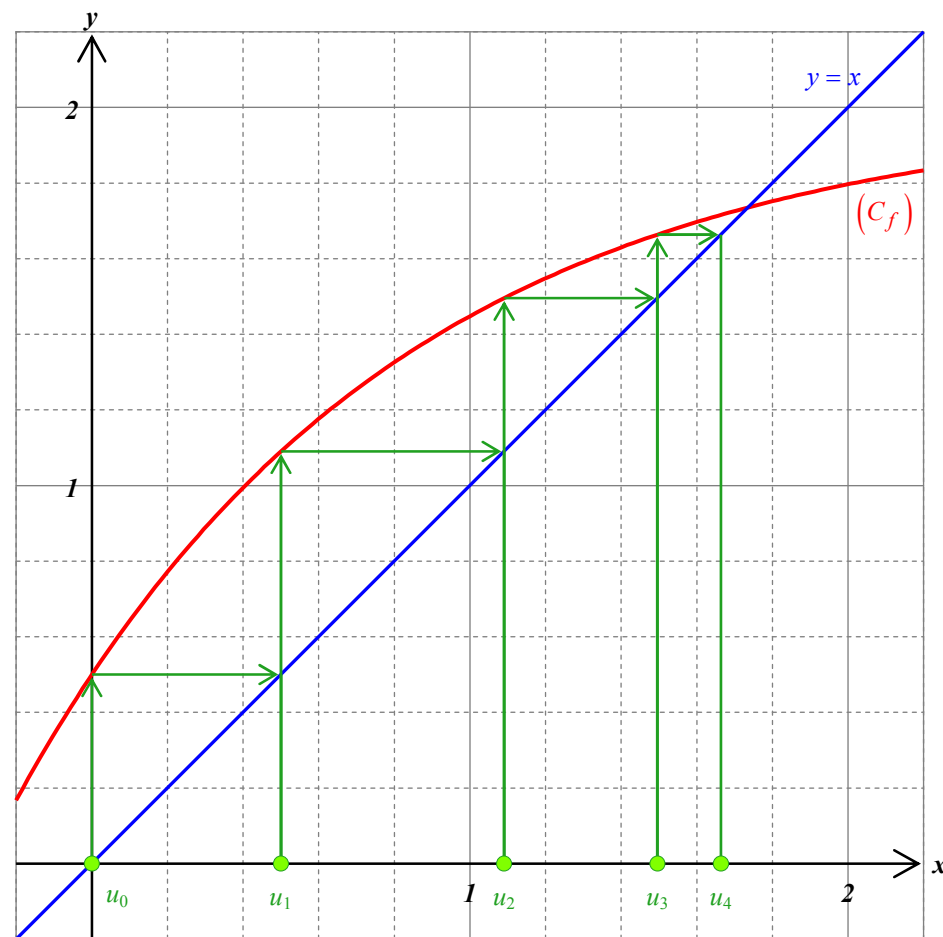
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{3}{2} \times e^{-u_n} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$


Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe (C_f) représentant la fonction :

$$f(x) = 2 - \frac{3}{2} \times e^{-x}$$

Construire sur l'axe des abscisses (Ox) et sans aucun calcul les cinq premiers termes de la suite à savoir u_0 , u_1 , u_2 , u_3 et u_4 . On laissera apparents les traits de construction.

Le corrigé



La construction requiert préalablement de tracer la droite d'équation $y = x$, c'est-à-dire l'endroit du plan où l'abscisse d'un point est égale à son ordonnée.

Réurrence homographique

Le contexte

Cet exercice original est inspiré d'un exercice de bac. Il consiste en l'étude d'une suite définie par récurrence au moyen d'une fonction homographique (quotient de deux affines).

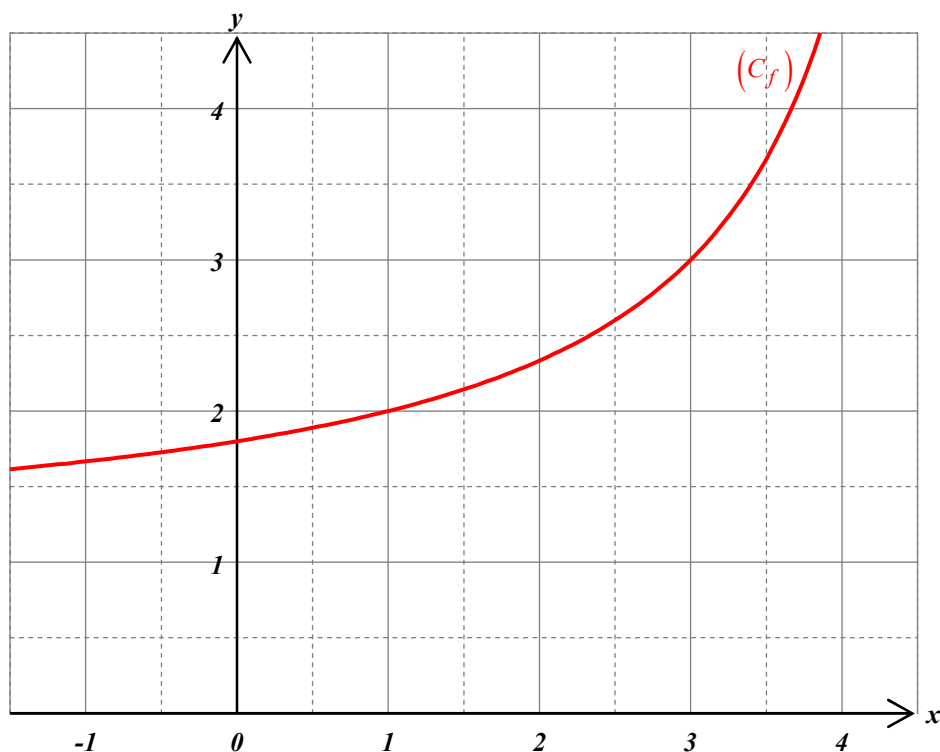
L'énoncé

La suite (u_n) est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 9}{u_n - 5} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

a) Sur le graphique ci-dessous, la courbe (C_f) représente la fonction $f(x) = \frac{x-9}{x-5}$.

Construire les quatre premiers termes u_0 u_1 u_2 u_3 sur l'axe des abscisses



b) Dans ces questions, il s'agit d'établir que la suite (u_n) est convergente.

- Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la propriété $P_n : u_n < 3$.
- Etablir que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 3)^2}{u_n - 5}$.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- Justifier que la suite (u_n) est convergente. On appellera ℓ sa limite.
- Déterminer par le calcul cette limite ℓ .

c) On appelle (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{3 - u_n}$$

- Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.
- Exprimer les termes v_n , puis u_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant son expression en fonction de n .

Le corrigé

a) La construction a été faite sur la page suivante.

Passant du terme u_n au terme suivant u_{n+1} en appliquant la fonction f , les quatre premiers termes de la suite (u_n) se construisent en se projetant sur la courbe (C_f) , puis en se rétablissant sur la première bissectrice du plan qui est la droite d'équation $y = x$.

Vu ses premiers termes, la suite (u_n) semble strictement croissante, majorée et convergente vers 3. C'est ce qui va être prouvée dans les questions suivantes.

b.1) Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n , la propriété $P_n : u_n < 3$.

→ Au premier rang : la propriété P_0 est-elle vraie ?

Comme $u_0 = -1$ et que -1 est strictement inférieur à 3, alors la propriété P_0 est vraie.

→ Le principe de récurrence : la propriété P_n vraie implique-t-elle que P_{n+1} soit vraie ?

Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un certain entier n , c'est-à-dire que $u_n < 3$.

Autrement dit que la différence $u_n - 3$ soit négative.

A-t-on alors au rang suivant que $u_{n+1} < 3$?

Pour le savoir, nous allons nous intéresser au signe de la différence :

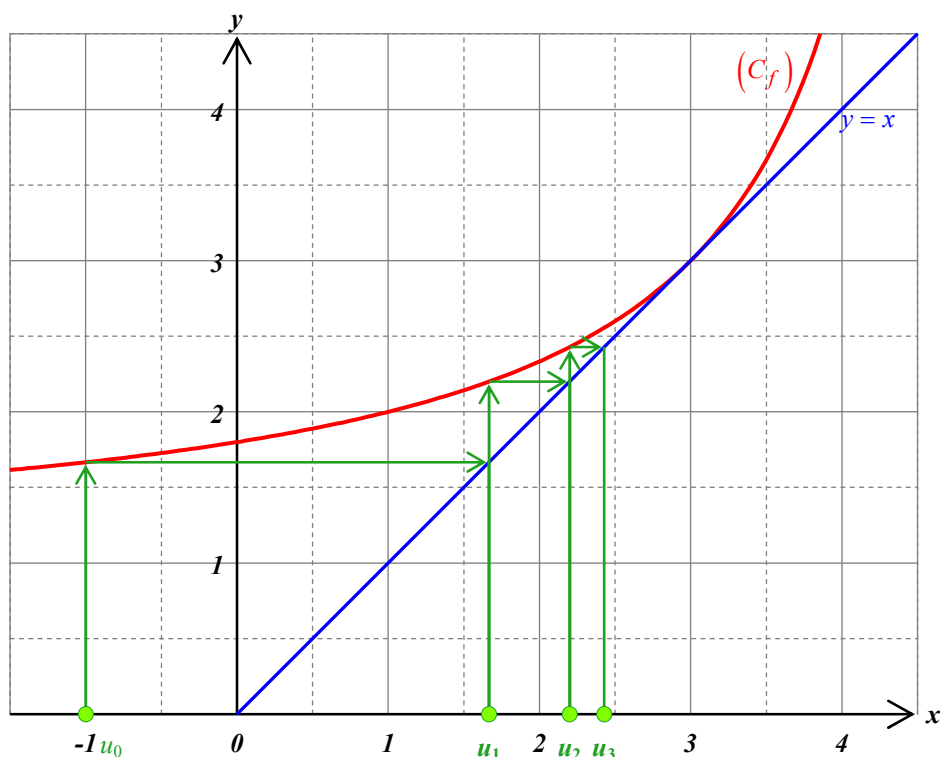
$$u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 9}{u_n - 5} - 3$$

$$= \frac{u_n - 9 - 3(u_n - 5)}{u_n - 5} = \frac{u_n - 9 - 3u_n + 15}{u_n - 5} = \frac{-2u_n + 6}{u_n - 5} = \frac{-2 \times (u_n - 3)}{u_n - 5}$$

u_n étant plus petit que 3, il est inférieur à 5. Donc la différence $u_n - 5$ est négative.

Par conséquent, la différence $u_{n+1} - 3 = \frac{-2 \times (u_n - 3)}{u_n - 5}$ est négative. Ainsi : $u_{n+1} < 3$.

Donc la propriété P_{n+1} est vraie et le principe de récurrence est établi.



b.2) Pour connaître le sens de variation de la suite (u_n) , nous allons encore une fois nous intéresser au signe de la différence de deux de ses termes consécutifs.

Pour tout entier naturel n , nous pouvons écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 9}{u_n - 5} - u_n = \frac{u_n - 9 - u_n(u_n - 5)}{u_n - 5}$$

$$= \frac{u_n - 9 - (u_n)^2 + 5u_n}{u_n - 5} = \frac{(u_n)^2 - 6u_n + 9}{u_n - 5} = \frac{(u_n - 3)^2}{u_n - 5}$$

Le carré $(u_n - 3)^2$ qui n'est jamais nul d'après la question **b.1** est toujours positif.

La différence $u_n - 5$ est toujours négative car u_n est strictement inférieur à 3.

Par conséquent, la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n = -\frac{\oplus}{\ominus}$ est toujours strictement positive.

Conclusion : comme pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_n < u_{n+1}$$

alors la suite (u_n) est strictement croissante.

b.3) Comme la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 3, alors elle est convergente et sa limite est un certain réel ℓ ...que nous allons déterminer sans tarder.

b.4) Comme :

La fonction f est continue car dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 3]$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$

Tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]-\infty; 3]$.

La suite (u_n) converge vers le réel ℓ

alors, cette limite ℓ est l'une des solutions de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty; 3]$.

Réolvons-la !

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x-9}{x-5} = x \Leftrightarrow x - \frac{x-9}{x-5} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-5) - (x-9)}{x-5} = 0$$

Cette fraction est nulle...

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{x-5} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\text{Son numérateur l'est...}}{x-5 \neq 0} \quad \text{Son dénominateur ne l'est pas.}$$

$$(x-3)^2 = 0 \quad x \neq 5$$

Appartient à l'intervalle $]-\infty; 3]$.

$$x = 3$$

Conclusion : la suite (u_n) converge vers la seule solution de cette équation : 3.

c) Il s'agit de prouver que pour tout entier naturel n , nous avons : $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n , nous pouvons écrire :

Difficile d'aller plus loin....

$$v_{n+1} = \frac{1}{3-u_{n+1}} = \frac{1}{3-\frac{u_n-9}{u_n-5}} = \frac{1}{\frac{3(u_n-5)-(u_n-9)}{u_n-5}} = \frac{1}{\frac{2u_n-6}{u_n-5}} = \frac{u_n-5}{2u_n-6}$$

De plus :

$$v_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{3-u_n} + \frac{1}{2} = \frac{1 \times 2 + 1 \times (3-u_n)}{(3-u_n) \times 2} = \frac{5-u_n}{6-2u_n} = \frac{u_n-5}{2u_n-6}$$

Après multiplication par -1 des numérateur et dénominateur.

Comme pour tout entier naturel n , nous avons établi :

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}$$

alors la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme

$$v_0 = \frac{1}{3-u_0} = \frac{1}{3-(-1)} = \frac{1}{4}$$

Nous en déduisons que pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 + \frac{1}{2} \times n = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} = \frac{2n+1}{4}$$

Il vient alors :

$$v_n = \frac{1}{3-u_n} \Leftrightarrow \frac{1}{v_n} = 3-u_n \Leftrightarrow u_n = 3 - \frac{1}{v_n} = 3 - \frac{1}{\frac{2n+1}{4}} = 3 - \frac{4}{2n+1}$$

➔ Déterminons la limite de la suite (u_n) en utilisant son expression.

Lorsque n s'envole vers $+\infty$, $2n+1$ tend vers $+\infty$

$$u_n = 3 - \frac{4}{2n+1} \text{ tend vers } 3 - \frac{4}{+\infty} = 3 - 0^+ = 3$$

Petites limites entre suites

Le contexte

Trois suites dont on connaît les expressions et dont il s'agit de déterminer les limites/

L'énoncé

Déterminer les limites à l'infini des trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \ln(1 + e^{-n}) \quad v_n = \frac{5^n - 2^n}{3^n + 1} \quad w_n = 2n + n \times \sin(n)$$

Le corrigé

a) Déterminons de la suite (u_n) .

Quand n tend vers $+\infty$, $-n$ tend vers $-\infty$

e^{-n} tend vers 0^+

$1 + e^{-n}$ tend vers $1 + 0^+ = 1$

$u_n = \ln(1 + e^{-n})$ tend vers $\ln(1) = 0$

Car $\ln$ est continue sur $]0; +\infty[$.

b) Déterminons la limite de la suite (v_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n - 2^n}{3^n + 1} = \frac{(+\infty) - (+\infty)}{(+\infty) + 1} = \text{Formes indéterminées}$$

Modifions l'écriture de ce quotient en factorisant ses numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts :

$$v_n = \frac{5^n - 2^n}{3^n + 1} = \frac{5^n \times \left(1 - \frac{2^n}{5^n}\right)}{3^n \times \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)} = \frac{5^n}{3^n} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Il vient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = (+\infty) \times \frac{1 - 0^+}{1 + 0^+} = (+\infty) \times \frac{1}{1} = +\infty$$

c) Pour déterminer la limite de la suite (w_n) , nous allons essayer de l'encadrer.

Pour tout entier naturel n , nous pouvons écrire :

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq 2 + \sin(n) \leq 3 \xrightarrow{\times n} n \leq 2n + \underbrace{n \times \sin(n)}_{w_n} \leq 3n$$

qui est positif...

Conclusion : étant minorée par la suite (n) qui tend vers $+\infty$, la suite (w_n) tend elle-aussi vers $+\infty$.

Ces entrejambes qui doivent disparaître

Le contexte

Cet exercice sur les suites adjacentes est un classique du genre. Il s'agit d'établir que deux suites sont adjacentes, puis de déterminer leur limite commune.

L'énoncé

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par récurrence par :

$$\begin{array}{l|l} u_0 = 2 & v_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{3 \times u_n + v_n}{4} & v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2 \times v_n}{3} \end{array}$$

Pour tout entier naturel n

a) Vérifier que $u_1 = 4$ et $v_1 = 8$, puis calculer u_2 et v_2 .

b) On appelle (d_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$d_n = v_n - u_n$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$d_{n+1} = \frac{1}{2} \times d_n$$

2. En déduire la nature de la suite (d_n) , puis l'expression de d_n en fonction de n .

3. Déterminer le signe de d_n .

4. Déterminer la limite de la suite (d_n) .

c) Dans ces questions, on s'intéresse aux variations des suites (u_n) et (v_n) .

1. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} \times d_n$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

3. Etablir que la suite (v_n) est strictement décroissante.

d) Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Que peut-on en déduire quant aux limites des suites (u_n) et (v_n) ?

On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) .

e) La suite (s_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$s_n = u_n + v_n$$

- Démontrer que la suite (s_n) est constante et toujours égale à 12. Cela pourra se faire par récurrence.
- En déduire la valeur de ℓ .

Le corrigé

a) Calculons les quatre premiers termes de ces deux suites :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3 \times u_0 + v_0}{4} = \frac{3 \times 2 + 10}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ v_1 &= \frac{u_1 + 2 \times v_0}{3} = \frac{4 + 2 \times 10}{3} = \frac{24}{3} = 8 \\ u_2 &= \frac{3 \times u_1 + v_1}{4} = \frac{3 \times 4 + 8}{4} = \frac{20}{4} = 5 \\ v_2 &= \frac{u_2 + 2 \times v_1}{3} = \frac{5 + 2 \times 8}{3} = \frac{21}{3} = 7 \end{aligned}$$

b.1 et 2) Pour tout entier naturel n , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{u_{n+1} + 2 \times v_n}{3} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2 \times v_n - 3 \times u_{n+1}}{3} = \frac{2 \times v_n - 2 \times u_{n+1}}{3} \\ &= \frac{2 \times v_n - 2 \times \frac{3 \times u_n + v_n}{4}}{3} = \frac{8 \times v_n - 6 \times u_n - 2 \times v_n}{4 \times 3} = \frac{6 \times v_n - 6 \times u_n}{4 \times 3} \\ &= \frac{6 \times (v_n - u_n)}{4 \times 3} = \frac{6}{12} \times (v_n - u_n) = \frac{1}{2} \times d_n \end{aligned}$$

Donc la suite (d_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $d_0 = v_0 - u_0 = 8$.

Par conséquent, pour tout entier naturel n , nous pouvons écrire :

$$d_n = d_0 \times \text{raison}^n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{8}{2^n} = 2^{3-n}$$

Mais est-ce bien nécessaire ?

b.3) Le terme $d_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ étant le produit de deux facteurs strictement positifs, il est lui aussi strictement positif. Donc pour tout entier naturel n , $v_n - u_n > 0 \Leftrightarrow v_n > u_n$

b.4) Déterminons la limite de la suite (d_n) .

La raison 1/2 est comprise entre 0 et 1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 8 \times 0^+ = 0^+$$

c.1) Nous pouvons écrire que pour tout entier naturel n , nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 \times u_n + v_n}{4} - u_n = \frac{3 \times u_n + v_n - 4 \times u_n}{4} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{d_n}{4}$$

c.2) d_n étant strictement positif, il en va alors de même pour le quotient $u_{n+1} - u_n = \frac{d_n}{4}$.

Conclusion : comme pour tout entier naturel n , nous avons :

$$u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

alors la suite (u_n) est strictement croissante.

c.3) Pour connaître le sens de variation de la suite (v_n) , intéressons-nous au signe de la différence de deux de ses termes consécutifs :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} + 2 \times v_n}{3} - v_n = \frac{u_{n+1} + 2 \times v_n - 3 \times v_n}{3} = \frac{u_{n+1} - v_n}{3} \\ &= \frac{\frac{3 \times u_n + v_n}{4} - v_n}{3} = \frac{3 \times u_n + v_n - 4 \times v_n}{4 \times 3} = \frac{3 \times u_n - 3 \times v_n}{4 \times 3} \\ &= \frac{-3 \times (v_n - u_n)}{3 \times 4} = -\frac{1}{4} \times d_n \end{aligned}$$

Le facteur d_n étant strictement positif, la différence $v_{n+1} - v_n = -\frac{d_n}{4}$ est toujours strictement négative. Autrement dit, pour tout entier naturel n , nous avons :

$$v_{n+1} - v_n < 0 \Leftrightarrow v_{n+1} < v_n$$

Conclusion : la suite (v_n) est strictement décroissante.

d) Récapitulons les différents résultats établis lors des questions précédentes :

- (1) La suite (u_n) est strictement croissante d'après c.2.
- (2) La suite (v_n) est strictement décroissante d'après c.3.
- (3) Pour tout entier naturel n , la différence $d_n = v_n - u_n$ est positive d'après b.3.
- (4) D'après la question b.4, $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0^+$.

Ces quatre conditions remplies sont celles définissant deux suites adjacentes.

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En conséquence, elles convergent toutes deux vers une même limite ℓ .

e.1) Démontrons par récurrence sur l'entier n la propriété :

$$P_n : s_n = 12.$$

→ Au premier rang : la propriété P_0 est-elle vraie ?

Pour le savoir, calculons :

$$s_0 = u_0 + v_0 = 2 + 10 = 12$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

→ Le principe de récurrence : la propriété P_n vraie implique-t-elle que P_{n+1} soit vraie ?

Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un certain entier n , c'est-à-dire que $s_n = 12$.

Que peut-on alors en déduire pour s_{n+1} ?

Pour le savoir, tripatouillons ce dernier :

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{u_{n+1} + 2 \times v_n}{3} = \frac{3 \times u_{n+1} + u_{n+1} + 2 \times v_n}{3} \\ &= \frac{4 \times u_{n+1} + 2 \times v_n}{3} = \frac{4 \times \frac{3 \times u_n + v_n}{4} + 2 \times v_n}{3} = \frac{3 \times u_n + v_n + 2 \times v_n}{3} \\ &= \frac{3 \times u_n + 3 \times v_n}{3} = \frac{3 \times (u_n + v_n)}{3} = s_n = 12 \end{aligned}$$

Donc la propriété P_{n+1} est alors vraie. Le principe de récurrence est établi.

e.2) Comme les suites adjacentes (u_n) et (v_n) convergent toutes deux vers ℓ , alors leur somme (s_n) converge vers $\ell + \ell = 2\ell$.

Or, cette suite (s_n) est constante et toujours égale à 12. Donc, elle converge vers 12.

Nous en déduisons :

$$2\ell = 12 \Leftrightarrow \ell = 6$$

Les coulisses de ces deux suites

La définition de la suite (v_n) est artificiellement rendue difficile avec l'introduction du terme u_{n+1} . Cette définition peut être simplifiée d'emblée avec le calcul suivant :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} + 2 \times v_n}{3} = \frac{\frac{3 \times u_n + v_n}{4} + 2 \times v_n}{3} = \frac{\frac{3 \times u_n + v_n + 8 \times v_n}{4}}{3} \\ &= \frac{3 \times u_n + 9 \times v_n}{4 \times 3} = \frac{3 \times (u_n + 3 \times v_n)}{4 \times 3} = \frac{u_n + 3 \times v_n}{4} \end{aligned}$$

C'est tout de même plus simple !