La vie rêvée des fonctions du second degré

Une fonction f est dite du second degré si elle peut s'écrire sous la forme :

$$f(x)=a.x^2+b.x+c$$

où a, b et c sont trois réels fixés. Cette écriture est qualifiée de "développée-réduite".

Avec les fonctions affines, les fonctions du second degré sont ce que l'on appelle des polynômes, c'est-à-dire des sommes de puissances de x. Le degré d'un polynôme est la plus grande puissance non nulle apparaissant dans sa forme développée.

Par exemple, $g(x)=4.x^3+\underbrace{5.x^4}_{\text{Plus grande puissance...}}-2.x+x^2+5$ est un polynôme de degré 4.

Les fonctions f pouvant s'écrire sous la forme $f(x)=a.x^2+b.x+c$ sont dites du second degré car elles sont des polynômes de degré 2.
Notre ambition n'est pas de nous lancer dans une étude en règle du second degré. Nous allons plutôt essayer de voir sur deux exemples les techniques et comportements inhérents à ce genre de fonction.

A propos de la fonction h(x)=4.x²-24.x-13

La première fonction du second degré qui va avoir les honneurs de notre propos est la fonction h définie par :

$$h(x)=4.x^2-24.x-13$$

L'étude de la présente fonction h comme des suivantes se fera selon le plan suivent : son ensemble de définition, son signe, ses variations, ses comportements à ses frontières. Nous conclurons par sa courbe.

L'ensemble de définition de la fonction h

Sous sa forme développée réduite, h(x) est la somme du carré de x multiplié par 4 (aucune contre-indication), du produit de -24 et x (aucune contre-indication non plus), et du terme -13.
Pour chaque réel x, il est possible de calculer son image par h.

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction h est $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

Le signe de h(x) : la nécessité de la forme canonique

Il n'est pas possible de se prononcer sur le signe de h(x) à partir de sa forme développée-réduite qu'est $h(x)=4.x^2-24.x-13$.
D'autant que celle-ci semble parfois négative et parfois positive. Il suffit juste de calculer quelques images :

- $h(-2)=4\times(-2)^2-24\times(-2)-13=16+48-13=51$ Positif
- $h(0)=4\times 0^2-24\times 0-13=0-0-13=-13$ Négatif

Connaître le signe de h(x) implique se savoir quand !
Si nous arrivons à factoriser h(x) et à l'écrire sous la forme d'un produit de deux fonctions affines alors nous pourrons obtenir son signe. Le seul problème est que nous n'avons que la forme développée $h(x)=4.x^2-24.x-13$. Et celle-ci présente toutes les qualités sauf celles d'être une identité remarquable ou d'avoir un facteur commun dans ses termes.
De plus, chacun sait bien qu'il est plus facile à l'esprit humain de développer que de factoriser. Sauf si on connaît le truc ou le chemin.
Le truc en question est de chercher à écrire $h(x)$ sous sa <u>forme canonique</u> c'est-à-dire sous la forme :

$$h(x)=4.x^2-24.x-13=\underbrace{\ldots\times\left[(x\pm\ldots)^2\pm\ldots\right]}_{\text{Forme canonique de h}}$$

La <u>forme canonique</u> d'une fonction d'une fonction du second degré est une écriture où la variable x n'apparaît qu'une seule fois. C'est là tout son intérêt !

Vers la forme canonique de h

Pour déterminer cette forme canonique de h(x), nous partons de sa forme développée. Il faut dire que c'est la seule que nous ayons.

1. Pour nous retrouver en tête-à-tête avec x^2, nous décidons de tout factoriser par 4.

$$h(x)=4.x^2-24.x-13=4\times\left[x^2-6.x-\frac{13}{4}\right]=4\times\left[x^2-6.x-3{,}25\right]$$

   Désormais, nous travaillerons à l'intérieur du crochet.

2. Pour faire apparaître le terme $(x\pm\ldots)^2$, nous allons dire que $x^2-6.x$ est le début de l'identité remarquable $(x-3)^2$.

   En effet : $\underbrace{(x-3)^2}_{(a-b)^2}=\underbrace{x^2}_{a^2}-\underbrace{2\times x\times 3}_{2\times a\times b}+\underbrace{3^2}_{b^2}=x^2-6.x+9$

Donc $x^2-6.x = \underbrace{(x-3)^2-9}_{\text{On compense le +9 introduit par l'identité remarquable en faisant −9.}}$

Remplaçons $x^2-6.x$ par $(x-3)^2-9$ dans l'expression de $h(x)$.

$$h(x)=4\times\left[\underbrace{x^2-6.x}-3{,}25\right]=4\times\left[\underbrace{(x-3)^2-9}_{x^2-6.x}-3{,}25\right]$$

$$=4\times\left[(x-3)^2-12{,}25\right]$$

Une première conclusion : la forme canonique de la fonction du second degré h est $h(x)=4\times\left[(x-3)^2-12{,}25\right]=\underbrace{4\times(x-3)^2-49}_{\text{Certains disent que c'est ça la forme canonique...}}$.

Utilisation de la forme canonique : la recherche d'antécédents

Avant de poursuivre notre aventure, nous allons marquer une pause pour montrer l'intérêt de la forme canonique de la fonction du second degré h. L'un de ses emplois les plus intéressants est la recherche d'antécédents. Voyons comment sur quelques cas concrets.

- Déterminons les antécédents de 15 par la fonction h.
Autrement dit, nous devons trouver tous les réels x dont l'image par h est égale à 15 c'est-à-dire ceux tels que $h(x)=15$.
Pour résoudre cette équation, on peut utiliser la forme développée de h.

$$h(x)=15 \Leftrightarrow 4.x^2-24.x-13=15 \Leftrightarrow \underbrace{4.x^2-24.x-28=0}_{\text{Et là, on est bloqué. Ni facteur commun, ni identité remarquable.}}$$

C'est tout sauf concluant ! Essayons avec l'écriture canonique.

$$h(x)=15 \Leftrightarrow \underbrace{4\times(x-3)^2-49}_{\text{Une forme canonique}}=15 \Leftrightarrow \underbrace{4\times(x-3)^2-64=0}_{\text{Divisons tout par 4}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-3)^2-16}_{\text{Et là, on reconnaît l'identité...}}=0 \Leftrightarrow \underbrace{(x-3)^2-4^2}_{\text{...remarquable } a^2-b^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[(x-3)-4\right]}_{(a-b)}.\underbrace{\left[(x-3)+4\right]}_{(a+b)}=0 \Leftrightarrow (x-7).(x+1)=0$$

Or un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.

Par suite, il vient :

$$h(x)=15 \Leftrightarrow \underbrace{(x-7).(x+1)=0}_{\text{Le produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{x-7=0}_{\text{Ce facteur peut être nul...}} \text{ ou } \underbrace{x+1=0}_{\text{Ce facteur peut être nul...}}$$

$$x=7 \quad \vdots \quad x=-1$$

Conclusion : 15 a deux antécédents par h qui sont -1 et 7.

- Déterminons les antécédents de -50 par la fonction h.
Pour répondre à cette légitime question, nous devons trouver les réels x vérifiant l'égalité $h(x)=-50$. Encore une équation à résoudre.
Là encore, buté comme des bourriques à vapeur, nous pouvons remplacer h par sa forme développée. Et alors :

$$h(x)=-50 \Leftrightarrow 4.x^2-24.x-13=-50 \Leftrightarrow \underbrace{4.x^2-24.x+37=0}_{\text{Et là, on est re-bloqué. Ni facteur commun, ni identité remarquable.}}$$

Le salut viendra-t-il à nouveau de la forme canonique ? Voyons cela !

$$h(x)=15 \Leftrightarrow \underbrace{4\times(x-3)^2-49}_{\text{Une forme canonique}}=-50 \Leftrightarrow \underbrace{4\times(x-3)^2+1=0}_{\text{C'est tout sauf l'identité remarquable } a^2-b^2 \text{ ! Serions-nous bloqués ?}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{4.(x-3)^2=-1}_{\text{Pas exactement car...}} \Leftrightarrow \underbrace{(x-3)^2=-0{,}25}_{\text{...un carré n'est jamais négatif. Même celui de } x-3.}$$

Ainsi l'équation $h(x)=-50$ n'a-t-elle pas de solution.
Conclusion : -50 n'a pas d'antécédents par la fonction h.

- Soyons fous ! Déterminons les antécédents de 1 par la fonction h.
L'expérience l'a montrée : il n'a de salut que dans la forme canonique.

$$h(x)=1 \Leftrightarrow \underbrace{4\times(x-3)^2-49}_{\text{Une forme canonique}}=1 \Leftrightarrow \underbrace{4\times(x-3)^2-50=0}_{\text{On divise tout par 4.}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-3)^2-12{,}5=0}_{\text{C'est du } a^2-b^2.} \Leftrightarrow \underbrace{(x-3)^2-\left(\sqrt{12{,}5}\right)^2}_{\text{Car un nombre positif est toujours le carré de sa racine.}}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[(x-3)-\sqrt{12{,}5}\right].\left[(x-3)+\sqrt{12{,}5}\right]=0}_{\text{Un produit est nul si et seulement si...}} \Leftrightarrow \ldots$$

Conclusion : 1 a deux antécédents par h : $3-\sqrt{12{,}5}$ et $3+\sqrt{12{,}5}$.

Vers la forme factorisée de h et par-delà son signe...

Mais la forme canonique n'était qu'une étape vers la forme factorisée de h(x). En effet, car 12,25 est le carré de 3,5. Et nous savons factoriser la différence de deux carrés a^2-b^2.

$$h(x)=4\times\left[(x-3)^2-12{,}25\right]=4.\times\underbrace{\left[(x-3)^2-(3{,}5)^2\right]}_{a^2-b^2}$$

$$=4\times\underbrace{\left[(x-3)-3{,}5\right]}_{(a-b)}\times\underbrace{\left[(x-3)+3{,}5\right]}_{(a+b)}=4\times(x-6{,}5)\times(x+0{,}5)$$

Une seconde conclusion : la forme factorisée de la fonction du second degré h est $h(x)=4.(x-6{,}5).(x+0{,}5)$.

Connaissant les signes de 4 (toujours positif quoique fasse x) et, des facteurs affines $x-6{,}5$ et $x-0{,}5$, nous pouvons dresser le tableau de signe de la fonction du second degré h(x).

x	$-\infty$		$-0{,}5$		$6{,}5$		$+\infty$
4		+	|	+	|	+	
$x-6{,}5$		$-$	|	$-$	0	+	
$x+0{,}5$		$-$	0	+	|	+	
$h(x)$		+	0	$-$	0	+	

Les variations de la fonction h

Le tableau de signe de h nous permet de dire qu'aux environs de $-0{,}5$ elle est vraisemblablement décroissante car elle passe du positif au négatif. De même, au voisinage de 6,5 elle est sans doute croissante. Il y a donc au moins deux variations.
Ces constatations mises à part, il est difficile de se faire une idée plus précise. Par exemple, nous savons que h(x) est positif bien avant $-0{,}5$ mais rien nous permet de dire si c'est du positif qui monte ou du positif qui descend.

Pour déterminer les variations de h sur $\mathbb{R}$, nous allons prendre deux réels que nous dirons appartenir à un même intervalle et étudier le signe de la différence de leurs deux images par h. Nous partons à l'aventure.

Par l'étude du signe de la différence de deux images

x et y sont deux réels appartenant à un même intervalle (terme vague qui sera précisé ultérieurement) tels que $x<y$ (il fallait un plus grand, ce sera y).

Déjà, il est clair que la différence $x-y$ est négative car $x-y<0$.

Ce qui nous intéresse : le signe de la différence de leurs images $h(x)-h(y)$.

Pour le savoir, nous allons la modifier pour en faire un produit dont nous essaierons de connaître les signes des facteurs.

$$h(x)-h(y)=\underbrace{\left[4\times(x-3)^2-49\right]-\left[4\times(y-3)^2-49\right]}_{\text{Une nouvelle fois, faisons confiance à la forme canonique}}$$

$$=\underbrace{4\times(x-3)^2-4\times(y-3)^2}_{\text{Factorisons par 4 !}}=4\times\underbrace{\left[(x-3)^2-(y-3)^2\right]}_{\text{Différence de deux carrés...}}$$

$$=4\times\underbrace{\left[(x-3)+(y-3)\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(x-3)-(y-3)\right]}_{(a-b)}=4\times(x+y-6)\times(x-y)$$

Nous connaissons les signes des premier et troisième facteurs. 4 est positif alors que la différence $x-y$ est négative. Par contre, $x+y-6$ est parfois négatif (par exemple avec $x=0$ et $y=1$, et d'autres positif (avec $x=4$ et $y=5$).
Au début de notre aventure, nous avons dit que x et y étaient deux réels appartenant à un même intervalle : ils se comportent donc pareillement. Tout cela pour dire que $x+y-6$ se comporte sans doute comme $x+x-6=2.x-6$.

Or pour la fonction affine $2.x-6$, tout se passe par rapport à 3. Elle est négative avant, nulle en ce point et positive après. Peut-être est-ce pareil pour $x+y-6$?

x et y appartiennent à	$]-\infty;3[$	$]3;+\infty[$
Quid de $x+y-6$?	$\left.\begin{array}{l}x<3\\y<3\end{array}\right\}$ donc $x+y<6$ $\Rightarrow$ $x+y-6$ est négatif	$\left.\begin{array}{l}x>3\\y>3\end{array}\right\}$ donc $x+y>6$ $\Rightarrow$ $x+y-6$ est positif
Quid du signe de $h(x)-h(y)$?	$\underbrace{4}_{\oplus}\times\underbrace{(x+y-6)}_{\ominus}\times\underbrace{(x-y)}_{\ominus}=\oplus$	$\underbrace{4}_{\oplus}\times\underbrace{(x+y-6)}_{\oplus}\times\underbrace{(x-y)}_{\ominus}=\ominus$
En résumé	Si $x<y$ alors $h(x)>h(y)$ h change l'ordre, donc elle est décroissante.	Si $x<y$ alors $h(x)<h(y)$ h conserve l'ordre, donc elle est croissante

Conclusion : la fonction h est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;3[$ et croissante sur l'intervalle $]3;+\infty[$.

Les variations de h par un enchaînement d'inégalités

Nous l'avions pressenti : pour la fonction du second degré h, tout se passe donc par rapport à 3. Elle est décroissante avant et croissante après. Un peu comme la fonction carré vis-à-vis de 0. Et à ce propos, on peut établir les variations de la fonction h en utilisant celles de la fonction carré. En particulier si on utilise la

forme canonique $h(x)=4\times(x-3)^2-49$.

Cette dernière écriture montre comment passer de x à h(x). Il suffit de suivre le cheminement suivant :

$$x \xrightarrow{-3} x-3 \xrightarrow{\text{Carré}} (x-3)^2 \underbrace{\xrightarrow{\times 4} 4\times(x-3)^2 \xrightarrow{-49}}_{\text{Ou la fonction affine } u(t)=4.t-49} \overbrace{4.(x-3)^2-49}^{h(x)}$$

Etablissons les variations de la fonction h en suivant cette voie :

- Déterminons le sens de variation de h sur l'intervalle $]-\infty;3[$.

  On considère deux réels x et y de cet intervalle tels que $x<y$.

  Comment leurs images respectives h(x) et h(y) sont-elles rangées ?
  Au départ, la situation est la suivante :

  $\boxed{-3}$

  $$x<y<3$$

  $$\underbrace{x-3<y-3}_{\text{Deux réels négatifs}} <0$$

  La fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0[$. L'ordre change.

  $$(x-3)^2>(y-3)^2$$

  $\boxed{\times 4}$

  $$4\times(x-3)^2>4\times(y-3)^2$$

  $\boxed{-49}$

  $$\underbrace{4\times(x-3)^2-49}_{h(x)}>\underbrace{4\times(y-3)^2-49}_{h(y)}$$

  En résumé sur l'intervalle $]-\infty;3[$, Si $x<y$ alors $h(x)>h(y)$.

  Comme elle y change l'ordre, la fonction h est décroissante sur $]-\infty;3[$.

- Déterminons le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]3;+\infty[$.

  Pour varier les plaisirs, nous allons prendre le raccourci de la fonction affine $u(t)=4.t-49$. Comme le coefficient directeur 4 de cette dernière est positif alors elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

  A présent, nous pouvons planter le décor : a et b sont deux réels de l'intervalle $]3;+\infty[$ tels que $a<b$.

  Là encore, c'est l'ordre de leurs images respectives qui nous motive. La seule chose que nous puissions dire est que la situation est la suivante :

  $\boxed{-3}$

  $$3<a<b$$

  $$0<\underbrace{a-3<b-3}_{\text{Deux réels positifs}}$$

  La fonction carré est croissante sur $]0;+\infty[$. L'ordre est conservé.

  $$(a-3)^2<(b-3)^2$$

  La fonction $u(t)=4.t-49$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Elle conserve l'ordre

  $$\underbrace{4\times(a-3)^2-49}_{h(a)=u\left[(a-3)^2\right]}<\underbrace{4\times(b-3)^2-49}_{h(b)=u\left[(b-3)^2\right]}$$

  Ainsi sur l'intervalle $]3;+\infty[$, si $a<b$ alors $h(a)<h(b)$.

  L'ordre est conservé, la fonction h est croissante sur l'intervalle $]3;+\infty[$.

Des résultats qui confirment ce que nous avions trouvé précédemment. Tant mieux !

Qu'advient-il de h(x) à ses frontières ?

La question que nous allons nous poser est de savoir vers où va h(x) aux bornes de son ensemble de définition $]-\infty;+\infty[$. Autrement dit, que devient h(x) lorsque x s'en va vers un des deux infinis. Nous allons déterminer les limites de la fonction h.

La limite de h vers l'infiniment négatif

Que devient h(x) lorsque x tend vers $-\infty$, c'est-à-dire qu'il devient négatif et grand ?

Pour le savoir, utilisons la forme canonique $h(x)=4.(x-3)^2-49$.

Quand x s'en va vers $-\infty$, c'est-à-dire quand il devient grand et négatif, :

- $x-3$ devient aussi grand et négatif.
- Son carré $(x-3)^2$ devient aussi grand mais il est positif.

  En effet, le carré de -100 est 10000 .
- Donc $4\times(x-3)^2$ devient également grand et il est aussi positif.
- Donc $h(x)=4\times(x-3)^2-49$ devient aussi grand et positif. Car -49 ne l'empêchera pas !

En résumé, lorsque x s'en va vers $-\infty$ (devient grand en étant négatif), h(x) s'envole vers $+\infty$ (grand et positif).

Conclusion : la limite lorsque x tend vers $-\infty$ de la fonction h est $+\infty$. On résume tout cela par :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$$

La limite de h vers l'infiniment positif

Si vous avez compris ce que se passer en $-\infty$ alors vous n'aurez aucun mal de l'autre côté, vers cet autre horizon.
Quand x tend vers $+\infty$ (devient grand en étant positif) :

- $x-3$ devient aussi grand et positif. Ce n'est pas -3 qui va perturber la montée...
- Son carré $(x-3)^2$ devient aussi grand et il est positif.
- Donc $4\times(x-3)^2$ devient également grand et positif.
- Donc $h(x)=4\times(x-3)^2-49$ devient aussi grand et positif.

Conclusion : la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction h est $+\infty$. On résume tout cela par :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Epilogue : le visage de la fonction du second degré h

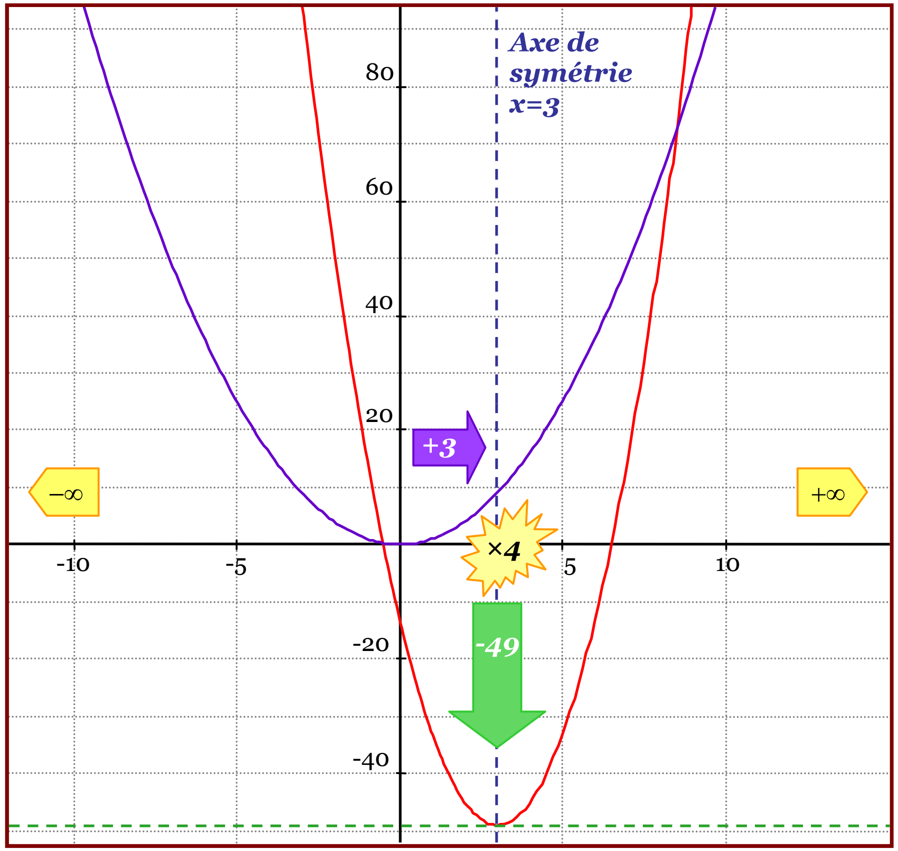
A l'issue de toutes nos péripéties, nous pouvons dresser le tableau de variation de la fonction du second degré $h(x)=4.x^2-24.x-13$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
h	$+\infty$	↘	-49	↗	$+\infty$

Quant à la courbe de la fonction du second degré h, elle peut s'obtenir à partir de celle de la fonction carrée. En effet, l'écriture canonique de h est :

$$h(x)=4\times(x-3)^2-49$$

Autrement dit, la courbe de la fonction h est celle de la fonction carrée que l'on aurait d'abord décalée de 3 vers la droite, puis grossit quatre fois avant de la faire descendre de 49 unités.
A l'instar de sa grande soeur carrée, la courbe représentant la fonction h est une parabole. Comme cette première, elle admet un axe de symétrie qui n'est pas l'axe des ordonnées mais la droite verticale d'équation $x=3$.



La destinée de la fonction homographique $h(x)=(-6.x+11)/(2.x-5)$

Une fonction f est dite homographique si elle peut s'écrire comme étant un quotient de deux fonctions affines, c'est-à-dire sous la forme :

$$f(x)=\frac{a.x+b}{c.x+d}$$

Pour que ce genre de fonction ait un intérêt, certains ajoutent la condition que les coefficients du numérateur ne doivent pas être proportionnels à ceux du dénominateur. Mais pourquoi une telle précaution ?

Si les couples $(a;b)$ et $(c;d)$ sont proportionnels alors il existe $\boldsymbol{k}$ tel que

$$\begin{cases} c=\boldsymbol{k}.a & \leftarrow \text{Proportionnalité des coefficients directeurs} \\ d=\boldsymbol{k}.b & \leftarrow \text{Proportionnalité des ordonnées à l'orgine} \end{cases}$$

La fonction homographique f devient alors :

$$f(x)=\frac{a.x+b}{c.x+d}=\frac{a.x+b}{\boldsymbol{k}.a.x+\boldsymbol{k}.b}=\frac{1}{\boldsymbol{k}}.\frac{a.x+b}{a.x+b}=\frac{1}{\boldsymbol{k}}$$

Autrement dit, si les coefficients des numérateur et dénominateur sont proportionnels alors la fonction homographique se résume une trop simple fonction constante. Ce qui a évidement moins d'intérêt !

Certains dont le dictionnaire résume cette condition de non-proportionnalité en disant que la différence $a.d-b.c$ est non nulle. Une sorte de produit en croix...

Le propos de cette chronique n'est pas de se lancer dans une étude en règle et systématique d'une fonction homographique quelconque. Non, il est plutôt de vous faire découvrir certaines pratiques et techniques inhérentes à ce genre de fonction. Aussi allons-nous nous concentrer sur un cas particulier, celui de la fonction h.

La fonction homographique h est définie par :

$$h(x)=\frac{-6.x+11}{2.x-5}$$

Nous allons ausculter cette fonction sous tous les angles : où elle est définie, quels sont ses variations ou son signe, quels sont les trucs à connaître la concernant...

Voici donc l'histoire de la fonction homographique h !

L'ensemble de définition de la fonction h

Nous devons déterminer tous les réels x qui peuvent avoir une image par h. Cela revient à se poser la question : qu'est-ce qui fait que h(x) existe ou n'existe pas ? Pour le savoir, observons h(x) attentivement.

Fondamentalement, la fonction homographique h est un quotient. Et un quotient ne peut exister que lorsque et seulement lorsque son dénominateur est non nul. Car il est impossible de diviser par 0.

Fort de ce constat, nous pouvons écrire :

$$\text{Le quotient } h(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \text{Son dénominateur } 2.x-5 \text{ est non nul}$$
$$\Leftrightarrow 2.x-5\neq 0 \Leftrightarrow 2.x\neq 5 \Leftrightarrow x\neq\frac{5}{2}$$

Ainsi donc, tous les réels x à l'exception de $2{,}5$ ont une image par h.

Conclusion : l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{5}{2}\right\}=\underbrace{\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2};+\infty\right[}_{\text{Tous les réels sauf } 2{,}5}$.

Images et antécédents par la fonction h

Le calcul d'une image ou la recherche d'antécédents par une fonction homographique ne diffèrent guère des autres fonctions. Voyons cela !

➲ Calculons l'image de $1-\sqrt{2}$ par h.

$$h\left(1-\sqrt{2}\right)=\frac{-6.\left(1-\sqrt{2}\right)+11}{2.\left(1-\sqrt{2}\right)-5}=\frac{-6+6.\sqrt{2}+11}{2-2.\sqrt{2}-5}=\overbrace{\frac{6.\sqrt{2}+5}{-2.\sqrt{2}-3}}^{\text{Ce n'est pas très esthétique !}}$$

$$=\underbrace{\frac{\left(6.\sqrt{2}+5\right).\left(-2.\sqrt{2}+3\right)}{\left(-2.\sqrt{2}-3\right).\left(-2.\sqrt{2}+3\right)}}_{\substack{\text{On veut écrire } h(1-\sqrt{2}) \text{ sous la forme } a.\sqrt{2}+b.\\ \text{On multiplie ses numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée}\\ \text{de } -2.\sqrt{2}-3 \text{ qu'est } -2.\sqrt{2}+3.}}=\underbrace{\frac{-12.\left(\sqrt{2}\right)^2+18.\sqrt{2}-10.\sqrt{2}+15}{\left(-2.\sqrt{2}\right)^2-(3)^2}}_{\text{Le dénominateur est devenu une identité remarquable...}}$$

$$=\frac{-24+8.\sqrt{2}+15}{(-2)^2.\left(\sqrt{2}\right)^2-9}=\frac{8.\sqrt{2}-9}{8-9}=\frac{8.\sqrt{2}-9}{-1}=-8.\sqrt{2}+9$$

Conclusion : l'image de $1-\sqrt{2}$ par la fonction h est $-8.\sqrt{2}+9$.

Mais quel est 'intérêt d'écrire l'image de $1-\sqrt{2}$ sous la forme $a.\sqrt{2}+b$?
Imaginons un monde parfait où les calculatrices n'existent pas. Par contre, on sait qu'une valeur approchée de $\sqrt{2}$ est $1,4$.

Déterminer de tête une valeur approchée de $h\left(1-\sqrt{2}\right)$ à partir du quotient qu'est $\dfrac{6.\sqrt{2}+5}{-2.\sqrt{2}-3} \approx \dfrac{6\times 1,4+5}{-2\times 1,4-3} = \dfrac{13,4}{-5,8}$ n'est guère évident.

Par contre, l'écriture $-8.\sqrt{2}+9$ permet de dire assez facilement qu'une valeur approchée de $h\left(1-\sqrt{2}\right)$ est $-8\times 1,4+9=-11,2+9=-2,2$.

Il est beaucoup plus facile de multiplier et d'additionner que de diviser.

➲ Déterminons le ou les antécédents de 4 par la fonction h.
Il s'agit de déterminer les réels x dont l'image par h est égale à 4, c'est-à-dire tels que $h(x)=4$. Autrement dit, résolvons dans $D_h = \mathbb{R}\setminus\{2,5\}$ l'équation $h(x)=4$.

$$\overbrace{h(x)=4 \Leftrightarrow \frac{-6.x+11}{2.x-5}-4=0 \Leftrightarrow \frac{-6.x+11}{2.x-5}-\frac{4.(2.x-5)}{2.x-5}=0}^{\text{Pour résoudre cette équation, on vise une égalité de la forme une fraction=0}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[-6.x+11]-[8.x-20]}{2.x-5}=0 \Leftrightarrow \frac{-6.x+11-8.x+20}{2.x-5}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-14.x+31}{2.x-5}=0$$

La dernière équation peut se lire : quand la fraction $\dfrac{-14.x+31}{2.x-5}$ est-elle nulle ?

Et là, deux chemins sont possibles :

⇨ Pour savoir quand $\dfrac{-14.x+31}{2.x-5}$ est nulle, on peut dresser son tableau de signe.

x	$-\infty$		$\frac{31}{14}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-14.x+31$		+	0	−		−	
$2.x-5$		−		−	0	+	
La fraction		−	0	+	‖	−	

La fraction $\dfrac{-14.x+31}{2.x-5}$ s'annule seulement que lorsque x vaut $\dfrac{31}{14}$.
C'est l'unique solution de l'équation $h(x)=4$ et l'unique antécédent de 4 par h.

⇨ On peut aussi être plus fin et se demander ce qu'il faut et suffit d'avoir pour qu'une fonction soit nulle.

Pour le savoir, dressons le tableau de signe d'une fraction quelconque $\dfrac{a}{b}$.

Signe de $\dfrac{a}{b}$	a est négatif	a est nul	a est positif
b est négatif	+	0	−
b est nul	N'existe pas	N'existe pas	N'existe pas
b est positif	−	0	+

La lecture du tableau ci-dessus nous permet d'édicter la règle suivante :

Pour qu'une fraction $\dfrac{a}{b}$ soit nulle, il faut et il suffit que son numérateur a le soit et que dans le même temps, son dénominateur b ne le soit pas.

Appliquons ce nouvel adage à notre dernière équation :

$$\overbrace{\frac{-14.x+31}{2.x-5}=0}^{\text{Une fraction est nulle...}} \Leftrightarrow \overbrace{-14.x+31=0}^{\text{Son numérateur l'est...}} \quad \underline{\textbf{\textit{et}}} \quad \overbrace{2.x-5\neq 0}^{\text{Son dénominateur ne l'est pas}}$$

$$\Leftrightarrow -14.x=-31 \quad \underline{\textbf{\textit{et}}} \quad 2.x\neq 5$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-31}{-14}=\frac{31}{14} \quad \underline{\textbf{\textit{et}}} \quad x\neq\frac{5}{2}$$

Là encore, l'équation a une unique solution qu'est $\dfrac{31}{14}$ qui est l'antécédent de 4.

La critique du cancre : la résolution se faisant dans l'ensemble de définition de h, tous les réels considérés ont de facto une image par h. Il était donc inutile de s'intéresser au cas où h(x) n'existait pas. Car lorsque l'on sait qu'une fraction existe, elle n'est nulle que si et seulement si son numérateur l'est.

Une nouvelle écriture de h(x) : la forme décomposée

Il est toujours intéressant d'avoir plusieurs écritures d'une même fonction car si une première ne permet pas de résoudre un problème, peut-être en ira-t-il différemment avec une seconde.

> Décomposer la fonction homographique h, c'est vouloir l'écrire sous la forme :
> $$h(x)=\text{un réel}+\frac{\text{un autre réel}}{\text{une fonction affine}}$$

L'avantage d'une telle écriture est que la variable x n'apparaît qu'une seule fois dans la fonction affine du dénominateur.

Au départ, la seule chose que nous sachions sur h(x) est : $h(x)=\frac{-6.x+11}{2.x-5}$.

Pour obtenir la forme décomposée, nous allons dire que $-6.x$ peut s'obtenir en multipliant le dénominateur $2.x-5$ par ce qu'il faut, à savoir -3.

Sauf que là, il y a un petit problème. En effet :

$$-3.(2.x-5)=\underbrace{-6.x}_{\text{Ce qu'on voulait !}}+\underbrace{15}_{\text{Ce qu'on ne voulait pas !}}$$

Pour compenser le déchet $+15$ introduit, il suffit de le retrancher. L'égalité précédente nous permet d'ailleurs d'écrire :

$$-6.x=\underbrace{-3.(2.x-5)}_{-6.x+15}+\underbrace{(-15)}_{\text{On retire ce qui est ajouté}}$$

Dans l'expression de h(x), nous allons remplacer $-6.x$ par $-3.(2.x-5)-15$.

Pour tout réel $x\in\underbrace{\mathbb{R}\setminus\{2{,}5\}}_{\text{Ensemble de définition de h}}$, nous pouvons écrire :

$$h(x)=\frac{\overbrace{-6.x}+11}{2.x-5}=\frac{\overbrace{-3.(2.x-5)-15}+11}{2.x-5}=\overbrace{\underbrace{\frac{-3.(2.x-5)}{2.x-5}}_{\text{On simplifie par }2.x-5}+\frac{-4}{2.x-5}}^{\text{C'est l'addition à l'envers. En effet }\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}}=-3+\frac{-4}{2.x-5}$$

> **Conclusion :** une forme décomposée de la fonction homographique h est :
> $$h(x)=-3+\frac{-4}{2.x-5}.$$

Nous avons écrit <u>une</u> forme décomposée car les esprits chagrins nous feront remarquer que $h(x)=-3+\overbrace{\frac{-8}{4.x-10}}^{\text{Numérateur et dénominateur par 2}}=-3+\overbrace{\frac{12}{-6.x+15}}^{\text{Numérateur et dénominateur par }-3}$ sont d'autres formes décomposées de h(x). Sauf que la nôtre est certainement la plus sympathique que l'on puisse trouver.

En tout cas, désormais nous disposons d'une nouvelle écriture pour h(x).

Le signe de la fonction homographique h(x)

Le tableau de signe d'un facteur affine $a.x+b$ est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$a.x+b$		Signe contraire de a	0	Signe de a	

> **Le critique du cancre :** à défaut du tableau précédent, on peut aussi retenir sur le signe du facteur affine $a.x+b$:
> - $a.x+b$ ne s'annule qu'une seule fois. Pour connaître la valeur de x pour laquelle il s'annule, il suffit de résoudre l'équation $a.x+b=0$.
> - Le tableau de signe de $a.x+b$ est soit de la forme "moins-zéro-plus", soit de la forme "plus-zéro-moins". On termine toujours par le signe du coefficient directeur a.

La fonction h étant le quotient des deux facteurs affines $-6.x+11$ et $2.x-5$, nous disposons de tous les éléments pour dresser son tableau de signe.

x	$-\infty$		$\frac{11}{6}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-6.x+11$		+	0	−	|	−	
$2.x-5$		−	|	−	0	+	
$h(x)$		−	0	+	||	−	

Les variations de la fonction h

La fonction h est définie sur deux intervalles séparés par $\frac{5}{2}$. Nous allons essayer d'établir les variations de cette première sur chacun de ceux-ci par deux méthodes différentes. Quoique dans les deux cas, nous chercherons à savoir si la fonction h conserve l'ordre ou si, au contraire, elle le change.

Avant 2,5 en étudiant le signe de la différence de deux images

Etablissons le sens de variation de h sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$.

Soient x et y sont deux réels de cet intervalle tels que $x<y$.

La question qui nous intéresse est : comment leurs images h(x) et h(y) sont-elles rangées ?

Pour le savoir, intéressons-nous à leur différence $h(x)-h(y)$ et plus exactement à son signe. Car la connaissance de celui-ci, nous permettra de dire lequel des deux termes h(x) ou h(y) est le plus grand.

$$h(x)-h(y)=\overbrace{\frac{-6.x+11}{2.x-5}-\frac{-6.y+11}{2.y-5}}^{\text{Pas évident de connaître le signe de cette différence ! Il est plus facile de se prononcer sur celui d'une fraction !}}$$

$$=\overbrace{\frac{(-6.x+11).(2.y-5)}{(2.x-5).(2.y-5)}-\frac{(-6.y+11).(2.x-5)}{(2.y-5).(2.x-5)}}^{\text{De façon à soustraire ces deux fractions, on le met au même dénominateur }(2.x-5).(2.y-5)}$$

$$=\frac{\overbrace{[-12.x.y+30.x+22.y-55]-[-12.y.x+30.y+22.x-55]}^{\text{On développe les numérateurs}}}{(2.x-5).(2.y-5)}$$

$$=\frac{-12.x.y+30.x+22.y-55+12.x.y-30.y-22.x+55}{(2.x-5).(2.y-5)}$$

$$=\frac{8.x-8.y}{(2.x-5).(2.y-5)}=\frac{8.(x-y)}{(2.x-5).(2.y-5)}$$

Est-il possible de connaître le signe de cette dernière fraction qui est à présent entièrement factorisée ?

La réponse est "faut voir !" car des conditions précises ont été fixées sur x et y. Voyons ce qu'elles entraînent sur les signes des facteurs apparaissant dans la fraction $h(x)-h(y)$.

- D'abord, nous avons fixé : $x<y$. Donc $x-y<0$.
  Par conséquent, le facteur $x-y$ est négatif.
- Ensuite x et y appartiennent à l'intervalle $]-\infty;2,5[$.
  Or sur cet intervalle là, les facteurs affines $2.x-5$ et $2.y-5$ sont négatifs. C'est le tableau de signe de h(x) dans lequel apparaît le facteur en question qui permet de le dire !
  Pour ceux qui n'en seraient pas convaincus, nous pouvons aussi dire :

$$\text{Comme }\begin{cases}x<2,5\\y<2,5\end{cases}\text{ alors }\begin{cases}2.x<5\\2.y<5\end{cases}\text{ donc }\begin{cases}2.x-5<0\\2.y-5<0\end{cases}$$

Mais une chose est sûre : avec les conditions fixées au début de la manoeuvre, les facteurs $2.x-5$ et $2.y-5$ sont négatifs.

Donc la différence $h(x)-h(y)=\frac{8.\overbrace{(x-y)}^{\text{négatif}}}{\underbrace{(2.x-5)}_{\text{négatif}}.\underbrace{(2.x-5)}_{\text{négatif}}}$ est négative.

Autrement dit $h(x)-h(y)<0$ donc $h(x)<h(y)$.

Nous sommes désormais en mesure de nous répondre à la question posée.

Conclusion : sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$, $\underbrace{\text{si } x<y \text{ alors } h(x)<h(y)}_{\text{L'ordre est conservé...}}$

Comme h conserve l'ordre sur l'intervalle $]-\infty;2,5[$ alors h y est croissante.

La critique du cancre : les cancres pourraient objecter qu'en partant de la forme décomposée de h(x), nous aurions pu factoriser la différence $h(x)-h(y)$ beaucoup plus rapidement. Et ils n'auraient tort car :

$$h(x)-h(y)=\left[-3+\frac{-4}{2.x-5}\right]-\left[-3+\frac{-4}{2.y-5}\right]$$

$$=\underbrace{-3+3}_{=0}+\underbrace{\frac{-4}{2.x-5}+\frac{4}{2.y-5}}_{\text{Additionnons ces deux fractions}}=\underbrace{\frac{-4.(2.y-5)}{(2.x-5).(2.y-5)}+\frac{4.(2.x-5)}{(2.y-5).(2.x-5)}}_{\text{On les met au même dénominateur }(2.x-5).(2.y-5)}$$

$$=\frac{[-8.y+20]+[8.x-20]}{(2.x-5).(2.y-5)}=\frac{8.x-8.y}{(2.x-5).(2.y-5)}=\frac{8.(x-y)}{(2.x-5).(2.y-5)}$$

Les calculs sont effectivement plus simples avec la forme décomposée...

Après 2,5 avec un enchaînement d'inégalités

Etablissons le sens de variation de h sur l'intervalle $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$.

Là encore, on considère deux réels quelconques de cet intervalle que nous baptisons α et β. Nous décidons que α est le plus petit des deux.
Et comme toujours, la seule question qui nous obsède est de savoir somment sont rangées leurs images $h(\alpha)$ et $h(\beta)$. h conserve-t-elle l'ordre ?

Pour le savoir, nous allons remonter $h(\alpha)$ et $h(\beta)$ en partant de α et β, via la forme décomposée de h. Le grand avantage de l'écriture décomposée de h est que la variable n'y apparaît qu'une seule fois.
Nous utiliserons également certaines variations des fonctions de référence.

Ainsi, démarrant de α et β, nous devons aller vers $\underbrace{-3+\frac{-4}{2.\alpha-5}}_{h(\alpha)}$ et $\underbrace{-3+\frac{-4}{2.\beta-5}}_{h(\beta)}$.

Au départ de notre aventure, la situation est la suivante :

$$\begin{array}{lccccc}
 & 2{,}5 & < & \alpha & < & \beta \\
\times 2 & 5 & < & 2.\alpha & < & 2.\beta \\
-5 & 0 & < & 2.\alpha-5 & < & 2.\beta-5 \\
 & & & \frac{1}{2.\alpha-5} & > & \frac{1}{2.\beta-5} \\
\times(-4) & & & \frac{-4}{2.\alpha-5} & < & \frac{-4}{2.\beta-5} \\
-3 & & & \underbrace{-3+\frac{-4}{2.\alpha-5}}_{h(\alpha)} & < & \underbrace{-3+\frac{-4}{2.\beta-5}}_{h(\beta)}
\end{array}$$

Inégalité de nombres positifs.
La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.
L'ordre change...

Conclusion : sur l'intervalle $]2{,}5;+\infty[$, $\underbrace{\text{si } \alpha<\beta \text{ alors } h(\alpha)<h(\beta)}_{\text{L'ordre est encore conservé...}}$

Y conservant l'ordre, la fonction h est donc aussi croissante sur $]2{,}5;+\infty[$.

La critique du cancre : certains pourraient railler que quitte à nous appuyer sur des fonctions, nous aurions pu faire aussi appel aux fonctions affines. Car la fonction h considérée sous sa forme décomposée, peut aussi être vue comme étant la composée ou le montage des fonctions suivantes :

$$\underset{\left]\frac{5}{2};+\infty\right[}{\overset{x}{\in}} \xrightarrow[\substack{\text{Fonction affine}\\ \text{croissante}\\ \text{sur } \mathbb{R}}]{u(t)=2.t+5} \underset{]0;+\infty[}{\overset{2.x-5}{\in}} \xrightarrow[\substack{\text{Fonction}\\ \text{décroissante}\\ \text{sur }]0;+\infty[}]{\text{Inverse}} \underset{]0;+\infty[}{\overset{\frac{1}{2.x-5}}{\in}} \xrightarrow[\substack{\text{Fonction affine}\\ \text{décroissante}\\ \text{sur }]-\infty;+\infty[}]{v(t)=-4.t-3} \underbrace{\frac{-4}{2.x-5}-3}_{h(x)}$$

Rappelons qu'une fonction croissante conserve l'ordre alors qu'une décroissante le change.
Au cours du montage, l'ordre change à deux reprises. Au final, h le conserve.
C'est aussi pour cela que la fonction h est croissante sur $]2{,}5;+\infty[$.

Qu'advient-il de h à ses frontières ?

L'ensemble de définition de la fonction h est $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$. Il existe quatre endroits, quatre bornes, quatre frontières où le destin de h est incertain.
Que devient h(x) lorsque x s'en va vers l'un des deux infinis ? La grandeur du second entraîne-t-elle celle du premier ?
Et puis qu'advient-il de la fonction h lorsque x se rapproche par la gauche ou par la droite de la faille, de la cassure, du trou se trouvant en 2,5 ?
Autant de questions auxquelles nous allons essayer de répondre. Ce faisant, nous déterminerons les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

Lorsque x s'en va vers l'infini positif...

Pour le savoir, nous allons utiliser la forme décomposée de $h(x)=-3+\frac{-4}{2.x-5}$.

Quand x s'en va vers $+\infty$, c'est-à-dire devient grand tout en étant positif, il en va de même pour son double $2.x$ et aussi pour $2.x-5$.

Or l'inverse de quelque chose de grand comme $10^n = 1\overbrace{00\ldots000}^{n \text{ zéros}}$ est quelque chose de petit comme $10^{-n} = 0{,}\overbrace{000\ldots001}^{n \text{ décimales}}$ qui devient de plus en plus nul !

Donc l'inverse du grand $2.x-5$ est le petit nul $\frac{1}{2.x-5}$.

Autrement dit, lorsque x s'en va vers $+\infty$, $\frac{1}{2.x-5}$ tend vers 0.

Donc $\frac{-4}{2.x-5}$ tend aussi vers 0 car $-4\times\text{rien}=\text{rien}$.

Donc $-3+\frac{-4}{2.x-5}$ tend vers -3 car $-3+\text{rien}=-3$.

Conclusion : lorsque x s'en va vers $+\infty$, h(x) tend vers -3.
On dit alors que la limite de h lorsque x tend vers $+\infty$ est -3. On résume cette situation par :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=-3$$

Graphiquement, la conclusion précédente signifie qu'en allant vers $+\infty$, la courbe (C) représentant la fonction h va se stabiliser autour de l'horizontale (ou de l'altitude) -3. Autrement dit, plus x s'en va vers vers $+\infty$, plus la courbe (C) colle à la droite horizontale Δ d'équation $y=-3$. On dit alors que cette dernière est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

Lorsque x s'en va vers l'infini négatif...

Pour cette solutionner ce problème, nous allons nous inspirer de ce qui a été fait précédemment de l'autre côté en $+\infty$.
Lorsque x s'en va vers $-\infty$, il devient grand (en valeur absolue) mais est négatif.
Il en va donc de même pour son double $2.x$ ainsi que pour $2.x-5$.

Ensuite l'inverse du très grand et négatif $-10^n=-1\overbrace{00\ldots0}^{\text{n zéros}}00$ est le très petit mais très négatif $-10^{-n}=-0,\overbrace{000\ldots00}^{\text{n décimales}}1$. Autrement dit, une chose qui est assez nulle !

Donc l'inverse du grand et négatif $2.x-5$ est le petit négatif $\frac{1}{2.x-5}$.

Ainsi donc, lorsque x s'en va vers $-\infty$, $\frac{1}{2.x-5}$ tend vers 0.

Par conséquent $\frac{-4}{2.x-5}$ tend vers 0. Donc $-3+\frac{-4}{2.x-5}$ tend va vers $-3+0=-3$.

Conclusion : lorsque x s'en va vers $-\infty$, h(x) tend aussi vers -3. On dit que la limite de h lorsque x tend vers $-\infty$ est -3. Cela se résume par : $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-3$

Ce qui a été observé graphiquement en $+\infty$ se reproduit aussi de l'autre côté : la droite horizontale Δ d'équation $y=-3$ est également une asymptote à la courbe (C) représentant h au voisinage de $-\infty$.
Là encore, en allant vers $-\infty$, la courbe (C) se colle de plus en plus à cette droite.

Après avoir été regardé ce qui se passait sur les horizons infinis, intéressons-nous à ce que devient h aux abord de la faille $2,5$. On peut se rapprocher de cette dernière par la gauche ou par la droite. Deux voies à explorer.

Lorsque x se rapproche de 2,5 par la gauche...

Utilisons la forme décomposée de h(x) où la variable x n'apparaît qu'une seule fois !
Lorsque x se rapproche de $2,5$ par la gauche, son double $2.x$ se rapproche de 5.
Donc $2.x-5$ se rapproche de $5-5=0$. Autrement dit, $2.x-5$ devient petit.
Et là, c'est le drame car il y a un problème ! En effet :

- L'inverse du petit mais positif $10^{-n}=0,\overbrace{000\ldots00}^{\text{n décimales}}1$ est le grand et positif $10^n=1\overbrace{00\ldots0}^{\text{n zéros}}00$.
- Par contre, l'inverse du petit et négatif $-10^{-n}=-0,\overbrace{000\ldots00}^{\text{n décimales}}1$ est le grand mais négatif $-10^n=-1\overbrace{00\ldots0}^{\text{n zéros}}00$.

Bref, l'inverse d'un petit est un grand mais il y a le problème de son signe. Car grand et positif signifie $+\infty$ alors que grand et négatif veut dire $-\infty$.

Il nous faut donc connaître le signe de $2.x-5$ avant ou à gauche de $\frac{5}{2}$.

Le tableau de signe de h(x) fait précédemment nous permet d'affirmer que le facteur $2.x-5$ est négatif à gauche de $2,5$.
Et pour ceux n'en seraient pas convaincus, nous pourrions aussi leur dire que comme l'on travaille à gauche de $\frac{5}{2}$ alors x y est inférieur Par suite :

Comme $x<2,5$ alors $2.x<5$ donc $2.x-5<0$ autrement dit $2.x-5$ est négatif.

Ainsi lorsque x se rapproche de $\frac{5}{2}$ par la gauche, $2.x-5$ tend vers 0^- c'est-à-dire devient petit et négatif. Donc son inverse $\frac{1}{2.x-5}$ devient grand et négatif, c'est-à-dire qu'il s'en va vers $-\infty$.

Donc $\dfrac{-4}{2.x-5}$ tend vers $+\infty$ car $(-4)\times$Grand négatif = Grand positif

Donc $-3+\dfrac{-4}{2.x-5}$ s'en va vers $+\infty$ car $(-3)+$Grand positif = Grand positif .

Conclusion : lorsque x se rapproche de $\dfrac{5}{2}$ par la gauche , h(x) tend vers $+\infty$.

On dit que la <u>limite</u> de h lorsque x tend vers $\underbrace{2{,}5^-}_{\text{2,5 par valeurs inférieures}}$ est $+\infty$. On note ceci :

$$\lim_{x\to 2{,}5^-} h(x) = +\infty$$

Lorsque x se rapproche de 2,5 par la gauche, h(x) devient-il de plus en plus grand. Cela signifie qu'en approchant de 2,5 par la gauche, la courbe (C) représentant la fonction h s'envole. Ce faisant, elle colle de plus en plus à la droite verticale D d'équation $x=2{,}5$. On dit que cette dernière est une <u>asymptote</u> à la courbe (C).
On pourrait préciser que cela se fait au voisinage de 2,5. Mais cette droite verticale d'équation $x=2{,}5$ peut-elle être une asymptote ailleurs qu'en 2,5 ?
Non ! C'est pour cela que le plus souvent, on omet cette précision.

Lorsque x se rapproche de 2,5 par la droite…

Inspirons-nous de ce qui a été fait à gauche de notre cassure !
Lorsque x tend vers 2,5 par la droite, $2.x$ tend vers 5 donc $2.x-5$ tend vers 0.
Sauf que à droite de 2,5 , le facteur affine $2.x-5$ est positif.
Cette chose est établie soit par le tableau de variation de h, soit en disant :
comme $x>2{,}5$ alors $2.x<5$ donc $2.x-5$ est positif.

Bref, lorsque x se rapproche de $\dfrac{5}{2}$ par la droite, $2.x-5$ tend vers 0^+ donc devient petit et positif.

Donc son inverse $\dfrac{1}{2.x-5}$ devient grand et positif, c'est-à-dire qu'il tend vers $+\infty$.

Donc $\dfrac{-4}{2.x-5}$ s'en va vers $-\infty$ car $(-4)\times$Grand positif = Grand négatif .

Donc h(x) tend aussi vers $-\infty$ car $(-3)+$Grand négatif = Grand négatif .

Conclusion : lorsque x tend vers $\dfrac{5}{2}$ par la droite , h(x) tend vers $-\infty$.

On dit que la <u>limite</u> de h lorsque x tend vers $\underbrace{2{,}5^+}_{\text{2,5 par valeurs supérieures}}$ est $-\infty$. On note ceci :

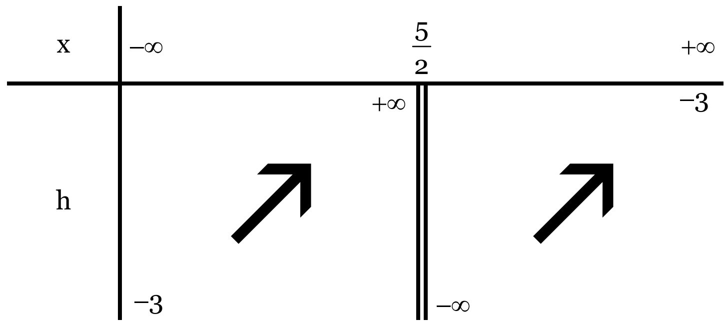
$$\lim_{x\to 2{,}5^+} h(x) = -\infty$$

Graphiquement, lorsque x se rapproche de 2,5 par la droite, la courbe (C) représentant la fonction h plonge. Elle se colle alors de plus en plus à la droite verticale D d'équation $x=2{,}5$. Ce qui fait encore de cette dernière une <u>asymptote</u> à la courbe (C). Mais ça, on le savait déjà !

Nous savons désormais ce qu'il advient de la fonction h aux frontières de son ensemble de définition.

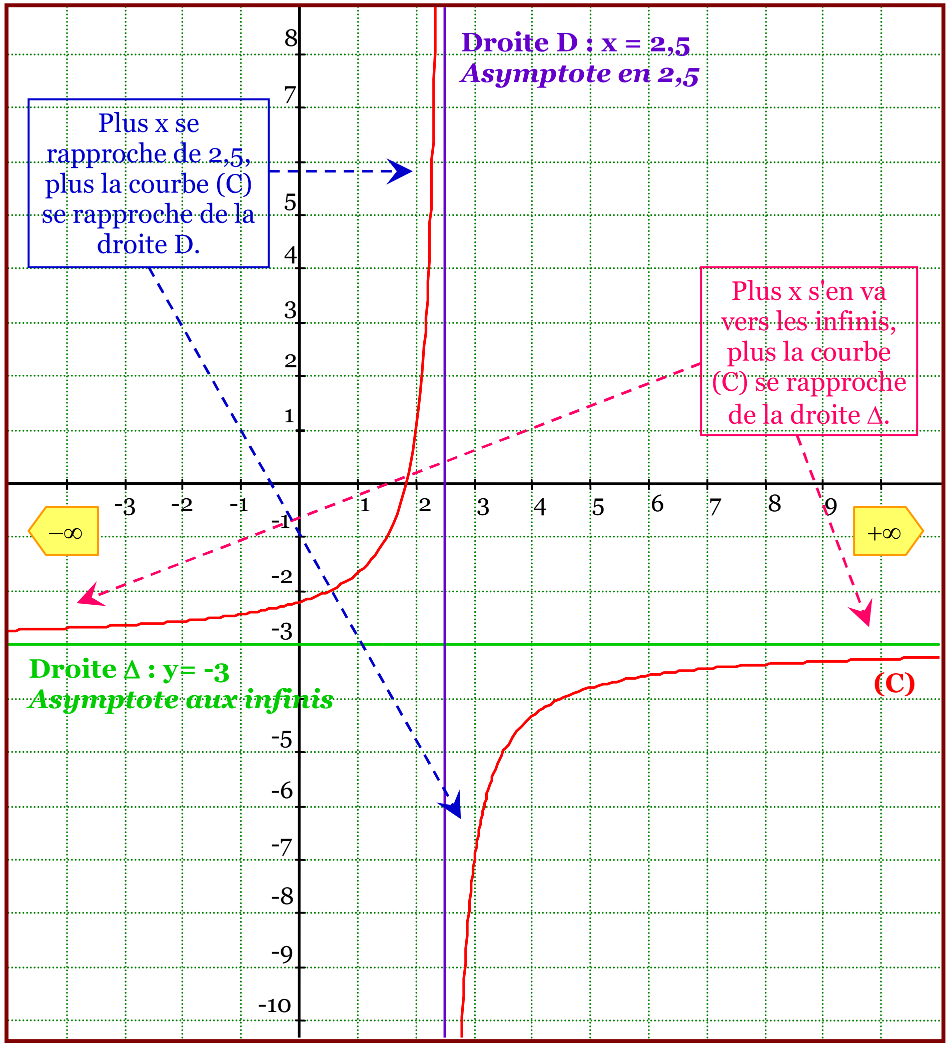
Epilogue : le visage de la fonction homographique h

Ce qu'il restera de la fonction homographique $h(x)=\dfrac{-6.x+11}{2.x-5}$, c'est d'abord son tableau de variation, résumé de ses divers comportements.



Et puis, il restera de la fonction h sa courbe que nous avons appelé (C). Peut-être d'ailleurs, aurions-nous pu commencer notre chevauchée en la traçant.
A l'instar de celle de la fonction inverse, la courbe (C) de la fonction homographique h possède deux branches correspondant aux deux intervalles constituant son ensemble de définition $\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right[\cup\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$.

Ces deux branches s'appuient sur les deux droites asymptotes D et Δ découvertes précédemment.
Après une interminable attente, voici donc cette courbe (C) représentant la fonction h flanquée de ses deux asymptotes D et Δ.



Escapades au pays des fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle est une fonction qui peut s'écrire comme étant un quotient de deux polynômes. Rappelons qu'un polynôme est une somme de puissances de la variable x. Le degré d'un polynôme est la plus grande puissance de x apparaissant dans son écriture développée-réduite.

Sont par exemple des fonctions rationnelles $f(x)=\dfrac{9.x^3-x^2+1}{x^2+1}$ ou $g(x)=\dfrac{1}{x}$. En effet, la fonction inverse est le quotient des polynômes 1 et x.
Les fonctions homographiques dont nous avons partagé la vie d'un spécimen sont aussi des fonctions rationnelles. En effet, les fonctions affines dont elles sont les quotients, sont des polynômes de degré 1.
Il est hors de question que nous nous lancions dans une étude systématique d'une fonction rationnelle quelconque. Il y aurait beaucoup trop de choses à dire et énormément de cas particuliers à envisager. Nous allons nous limiter à l'étude de deux cas particuliers exemples. Ils témoigneront de la complexité de ce genre de fonctions.

L'illusion de la fonction h(x)=(4.x²+4.x-35)/(2.x-3)

Nous jetons notre dévolu sur la fonction rationnelle h définie par :

$$h(x)=\frac{4.x^2+4.x-35}{2.x-3}$$

h est le quotient des polynômes $N(x)=4.x^2+4.x-35$ de degré 2 et $D(x)=2.x-3$ de degré 1.
Etudier cette fonction rationnelle h, cela signifie déterminer son ensemble de définition, son signe et ses variations. L'épilogue verra le tracé sa courbe.

L'ensemble de définition de la fonction h

Cela aura échappé à certains mais h est un quotient de deux quantités qui existent quelque soit x. Pour que notre fraction h(x) existe, il faut et il suffit juste que son dénominateur soit non nul. Car diviser par 0 n'est pas possible...

Le quotient h(x) existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $2.x-3\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x\neq\dfrac{3}{2}=1{,}5$

Conclusion : à l'exception de $\dfrac{3}{2}$, tous les réels une image par la fonction rationnelle h. Son ensemble de définition D_h est $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}=\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

Le signe de h(x) : un usage de la forme canonique

L'écriture de h(x) dont nous disposons, est un quotient. Si nous connaissons les signe de ces numérateur et dénominateur, nous pourrons en déduire le signe de la fraction.

Le numérateur $N(x)=4.x^2+14.x-35$ est un polynôme du second degré. Si nous voulons en déterminer le signe, il va nous falloir en rechercher une factorisation via son écriture canonique.
Par contre, le dénominateur $2.x-3$ ne pose aucun problème car c'est une fonction affine.
Essayons de factoriser le numérateur N(x).
Pour factoriser N(x), nous devons l'écrire préalablement sous sa forme canonique, c'est-à-dire sous la forme :

$$N(x)=\ldots\times\left[\left(x\pm\ldots\right)^2\pm\ldots\right]$$

Une écriture où la variable x n'apparaît qu'une seule fois.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$N(x)=4.x^2+4.x-35=\underbrace{4\times\left[x^2+x+\frac{35}{4}\right]}_{\text{On factorise par x pour se retrouver en tête à tête avec }x^2}=4\times\left[\underline{x^2+x}+8{,}75\right]$$

x^2+x est le début d'une identité remarquable du type $(a+b)^2=\underbrace{a^2}_{x^2}+\underbrace{2.a.b}_{x}+b^2$.

De manière assez évidente, si a est égal à x, on obtient que b vaut $\dfrac{1}{2}$ ou 0,5.

En effet, de par l'identité remarquable, nous avons égalité $2.\underbrace{x}_{a}.b=1\times x$.

Bref, x^2+x est le début de l'identité remarquable $\underbrace{\left(x^2+0{,}5\right)^2}_{(a+b)^2}=\underbrace{x^2}_{a^2}+\underbrace{x}_{2.a.b}+\underbrace{0{,}25}_{b^2}$.

De cette dernière, on déduit : $x^2+x=\underbrace{(x+0{,}5)^2-0{,}25}_{\text{On retire ce qu'on rajoute : 0,25}}$

$$N(x)=4.\left[\underbrace{(x+0{,}5)^2-0{,}25}_{x^2+x}-8{,}75\right]=4.\underbrace{\left[(x+0{,}5)^2-9\right]}_{\text{La forme canonique...}}=4.\underbrace{\left[(x+0{,}5)^2-3^2\right]}_{\text{...et identité }a^2-b^2}$$

$$=4.\underbrace{\left[(x+0{,}5)-3\right]}_{a-b}.\underbrace{\left[(x+0{,}5)+3\right]}_{a+b}=\underbrace{4.(x-2{,}5).(x+3{,}5)}_{\text{La forme factorisée recherchée}}$$

De la factorisation du numérateur, on déduit celle de la fonction rationnelle h(x). Pour tout réel $x \neq 1,5$, nous avons :

$$h(x) = \frac{4.x^2 + 4.x - 35}{2.x - 3} = \frac{4.(x - 2,5).(x + 3,5)}{2.x - 3}$$

Nous connaissons les signes de chacun des facteurs apparaissant dans cette dernière écriture. Nous pouvons désormais dresser le tableau de signe de h.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
4		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x - \frac{5}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + \frac{7}{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2.x - 3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Forme décomposée de la fonction rationnelle h(x)

Il n'y a pas que les fonctions homographiques qui peuvent être décomposées. En fait, toutes les fonctions rationnelles peuvent l'être. Dans le cas de h, cela signifie rechercher trois réels fixés a, b et c tels que pour tout $x \in D_h$:

$$h(x) = a.x + b + \frac{c}{2.x - 3}$$

Grossièrement, décomposer une fonction rationnelle c'est l'écrire sous la forme d'un polynôme (ici $a.x + b$) et d'une autre fonction rationnelle dont le numérateur (ici c) a un degré inférieur à celui de son dénominateur (ici $2.x - 3$)

La technique que nous allons employer pour décomposer h s'inspirera de celle utilisée pour les fonctions homographiques : faire apparaître le dénominateur $2.x - 3$ dans chacun des termes de son numérateur $4.x^2 + 4.x - 35$.
Puis, nous fractionnerons la fraction avant de simplifier l'une des deux fractions résultantes par $2.x - 3$.
Rien que des choses que nous savons faire !

Pour tout réel $x \in D_h$, nous pouvons écrire :

$$h(x) = \frac{\overbrace{4.x^2}^{\text{Combien de fois } 2.x-3\,?} + 4.x - 35}{2.x - 3} = \frac{\overbrace{2.x.(2.x-3) + 6.x}^{\text{On ajoute } 6.x \text{ pour compenser } -6.x.\ \text{Le total fait } 4.x^2} + 4.x - 35}{2.x - 3} = \overbrace{\underbrace{\frac{2.x.(2.x-3)}{2.x-3}}_{\text{...et on simplifie par } 2.x-3} + \frac{10.x - 35}{2.x - 3}}^{\text{On fractionne la fraction...}}$$

$$= 2.x + \frac{\overbrace{10.x}^{\text{Et on recommence ! Combien de fois } 2.x-3\ ?} - 35}{2.x - 3} = 2.x + \frac{\overbrace{5.(2.x-3) + 15}^{\text{On compense } -15 \text{ par } +15\ \text{Le tout vaut } 10.x} - 35}{2.x - 3}$$

$$= 2.x + \underbrace{\frac{5.(2.x-3)}{2.x-3}}_{\text{On simplifie...}} + \frac{15 - 35}{2.x - 3} = \underbrace{2.x + 5 + \frac{-20}{2.x - 3}}_{\text{Forme décomposée de } h(x)}$$

Conclusion : l'écriture décomposée de la fonction rationnelle h est :

$$h(x) = 2.x + 5 + \frac{-20}{2.x - 3}$$

A l'issue de ce sous paragraphe, nous disposons désormais de trois écritures de la fonction rationnelle h : l'initiale, la factorisée et la décomposée. Ce ne sera pas de trop pour aborder ce qui s'annonce : les variations de h.

Les variations de la fonction rationnelle h

Ainsi que nous l'avions vu avec notre fonction homographique, il existe globalement deux méthodes pour établir les variations d'une fonction : soit on procède par un enchaînement d'inégalités en s'appuyant sur les fonctions de référence, soit on étudie le signe de la différence de deux images. Dans les deux cas, on cherche à savoir si la fonction conserve l'ordre ou si elle le change.
L'ensemble de définition de notre fonction h comportant deux intervalles, on allons essayer d'appliquer sur chacun l'une des deux méthodes

Avant 1,5 avec un enchaînement d'inégalités

Etablissons le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;1,5[$ en utilisant un enchaînement d'inégalités.
Ceux qui étaient avec nous pour l'étude de notre fonction homographique se souviendront qu'alors nous nous avions reconstitué la forme décomposée de celle-ci. Reprenons cette excellente idée !

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left]-\infty;1{,}5\right[$ tels que $a<b$. La question est de savoir comment leurs images $h(a)=2.a+5+\dfrac{-20}{2.a-3}$ et $h(b)=2.b+5+\dfrac{-20}{2.b-3}$ sont rangées.

Et là, petit problème car les réels a et b apparaissent deux fois dans l'écriture décomposée de h. Avec la fonction homographique, ils n'y étaient qu'une seule.

Alors tout est-il perdu ?

Non car sous sa forme décomposée, notre fonction rationnelle h est la somme de la fonction affine $u(x)=2.x+5$ et de la fonction inverse $v(x)=\dfrac{-20}{2.x-3}$.

En clair, pour tout réel $x\in D_h$:

$$h(x)=\underbrace{2.x+5}_{\text{Fonction affine } u(x)}+\underbrace{\dfrac{-20}{2.x-3}}_{\text{Fonction inverse } v(x)}$$

Cette partition de h en une partie affine et une partie inverse amène à étudier les variations respectives de chacune de ces deux fonctions :

- Son coefficient directeur 2 étant positif, la fonction affine $u(x)=2.x+5$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $\left]-\infty;1{,}5\right[$.
  Autrement dit, elle conserve l'ordre ! Ainsi, nous avons : $u(a)<u(b)$.
  Note : nous aurions aussi pu établir facilement cette inégalité sans recourir aux fonctions affines.
- Déterminons le sens de variations de la fonction inverse $v(x)=\dfrac{-20}{2.x-3}$ sur l'intervalle $\left]-\infty;1{,}5\right[$. Avec le décor que nous avons planté, la situation est la suivante :

$$a<b<1{,}5$$
×2
$$2.a<2.b<3$$
−3
$$\underbrace{2.a-3<2.b-3}_{\text{Ces deux réels sont négatifs}}<0$$
La fonction inverse est décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$.
$$\frac{1}{2.a-3}>\frac{1}{2.b-3}$$
×(−20)
$$\frac{-20}{2.a-3}<\frac{-20}{2.b-3}$$
$$v(a)<v(b)$$

Ainsi sur l'intervalle $\left]-\infty;1{,}5\right[$, si $a<b$ alors $v(a)<v(b)$.
La fonction inverse v conserve l'ordre. Donc elle est croissante.

En résumé, la fonction rationnelle h est la somme de deux fonctions u et v qui sont croissantes sur l'intervalle $\left]-\infty;1{,}5\right[$. Et alors, quid d'elle ? Analysons la situation !

- u est croissante sur $\left]-\infty;1{,}5\right[$
- v est croissante sur $\left]-\infty;1{,}5\right[$

donc si $a<b$ alors

$$\begin{array}{rc} & u(a)<u(b)\\ \oplus & v(a)<v(b)\\ \hline & \underbrace{u(a)+v(a)}_{\substack{\text{Les plus petits}\\ h(a)}}<\underbrace{u(b)+v(b)}_{\substack{\text{Les plus grands}\\ h(b)}}\end{array}$$

Autrement dit, la fonction rationnelle h conserve elle-aussi l'ordre.

Conclusion : la fonction h est croissante sur $\left]-\infty;1{,}5\right[$.

Note : si la somme de deux fonctions croissantes est elle-même croissante, la somme de deux fonctions décroissantes est elle décroissante. Par contre, la somme d'une fonction croissante et d'une autre décroissante n'est rien du tout ! Comprenez par là qu'on ne peut pas conclure. Les images de a et b sont alors du mauvais côté.

Après 1,5 en étudiant le signe de la différence de deux images

Déterminons le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $\left]1{,}5;+\infty\right[$.

Comme toujours, deux a et b sont deux réels de $\left]1{,}5;+\infty\right[$ tels que $a<b$.

Cette fois-ci, nous allons nous intéresser au signe de la différence de deux images $h(a)-h(b)$.

$$h(a)-h(b)=\left[2.a+5+\frac{-20}{2.a-3}\right]-\left[2.b+5+\frac{-20}{2.b-3}\right]=2.a-2.b+\frac{-20}{2.a-3}-\frac{-20}{2.b-3}$$

$$=2.(a-b)+\underbrace{\frac{\overbrace{(-20).(2.b-3)-(-20).(2.a-3)}^{-40.b+40.a}}{(2.a-3).(2.b-3)}}_{\text{On met tout au même dénominateur...}}$$

$$=\underbrace{2.(a-b)+\frac{40.(a-b)}{(2.a-3).(2.b-3)}}_{\text{Factorisons par b−a}}=(a-b).\left[2+\frac{40}{(2.a-3).(2.b-3)}\right]$$

Regardons si nous pouvons connaître le signe de ce dernier produit...
Pour cela, déterminons le signe de deux facteurs de notre produit :

- Comme $a < b$ alors la différence $a - b$ est négative.
- Comme a et b sont deux réels de l'intervalle $]1,5;+\infty[$ alors les sous-facteurs $2.a-3$ et $2.b-3$ sont positifs. C'est le tableau de signe de h(x) qui permet de l'affirmer !

  Donc leur produit et par suite l'inverse de ce dernier $\frac{1}{(2.a-3).(2.b-3)}$ le sont aussi !
  Multipliez cette dernière fraction par 40, ajoutez-y 2 et vous conserverez un nombre positif.

  En définitive, le facteur $2+\frac{40}{(2.a-3).(2.b-3)}$ est lui aussi positif.

Donc leur produit $h(a)-h(a) = \text{négatif} \times \text{positif}$ est négatif.
Ainsi sur l'intervalle $]1,5;+\infty[$, si $a < b$ alors $h(a)-h(b) < 0$ donc $h(a) < h(b)$.

Conclusion : parce qu'elle conserve l'ordre sur $]1,5;+\infty[$, h est croissante sur cet intervalle.

A l'instar de ce qui s'était passé avec notre fonction homographique, nous avons pu nous prononcer sur les variations de la fonction rationnelle h avec nos deux méthodes. A se demander si elles ne sont pas universelles et tous-terrains ?

Qu'advient-il de h à ses frontières ?

Encore une fois, nous allons chercher ce que devient h(x) lorsque x se rapproche des quatre frontières de son ensemble de définition $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$. Nous allons déterminer les quatre limites de h en ces endroits inconnus.

Aux infinis

Lorsque x s'en va vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, il devient grand que ce soit négativement ou positivement. Il en va donc de même de ses numérateur $4.x^2+4.x-35$ et dénominateur $2.x-3$.

L'écriture initiale $h(x)=\frac{4.x^2+4.x-35}{2.x-3}$ ne permet pas de conclure car lorsque l'on divise quelque chose de grand par une autre chose grande, nul ne sait ce qu'on obtient ! C'est un peu comme un match France-Brésil de la grande époque. Nul ne sait qui va l'emporter ? Voire même un score de parité...
La forme initiale de h(x) ne permettant pas de conclure, on dit qu'aux infinis elle est une forme indéterminée.

Par contre, l'écriture décomposée de $h(x) = \underbrace{2.x+5}_{\text{Partie affine}} + \underbrace{\frac{-20}{2.x-3}}_{\text{Partie inverse}}$ permet de se prononcer.
En effet, lorsque x devient grand négativement $(-\infty)$ ou positivement $(+\infty)$:

- La partie affine $2.x+5$ devient elle aussi grande.
  Lorsque x tend vers $-\infty$, $2.x+5$ tend vers aussi vers $-\infty$.
  Lorsque x s'en va vers $+\infty$, $2.x+5$ s'en va aussi vers $+\infty$
- De même, la quantité $2.x-3$ devient elle aussi grande en valeur absolue.

  Donc son inverse $\frac{-20}{2.x-3}$ va devenir de plus en plus petite. Car quand on doit partager une même somme d'argent entre un nombre toujours plus grand d'individus, la part de chacun devient de plus en plus petite.

  Ainsi lorsque x s'en va vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, la partie inverse $\frac{-20}{2.x+3}$ tend vers 0.

En résumé, lorsque x devient grand, c'est sa partie affine $2.x+5$ qui donne ses tendances et ses limites à la fonction rationnelle h. Aux infinis, la fonction rationnelle h se comporte comme la fonction affine $u(x)=2.x+5$.
On dit alors que la droite d'équation $y=2.x+5$, c'est-à-dire la courbe de la fonction affine u est une asymptote à la courbe de h aux voisinages des infinis.

Conclusion : aux infinis, la fonction rationnelle h se comporte comme la fonction affine $u(x)=2.x+5$. Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

Au voisinage de 1,5.

Pour nous prononcer sur le sort de h(x) lorsque x se rapproche de 1,5, nous pourrions nous appuyer sur n'importe laquelle de ses écritures. Nous décidons de n'utiliser que sa forme décomposée $h(x) = \underbrace{2.x+5}_{\text{Partie affine}} + \underbrace{\frac{-20}{2.x-3}}_{\text{Partie inverse}}$.

On peut se rapprocher de 1,5 par la gauche (valeurs inférieures) ou par la droite (valeurs supérieures). Voyons ce qui se passe dans ces deux cas.

Lorsque x se rapproche de $\frac{3}{2}$ par la gauche :

- $2.x$ se rapproche de 3 donc la partie affine $2.x+5$ s'en va vers 8.
- $2.x$ se rapproche de 3 donc $2.x-3$ se rapproche de 0 c'est-à-dire qu'il devient petit. Donc son inverse $\frac{1}{2.x-3}$ va devenir grand mais nous ignorons son signe.
Un rapide coup d'oeil au [tableau de signe de h(x)] permet de savoir que $2.x-3$ est négatif à gauche de 1,5. Il en va de même pour son inverse.

Par conséquent, la partie inverse $\frac{-20}{2.x-3}=(-20).\overbrace{\frac{1}{2.x-3}}^{-\infty}$ devient grande et positive. Elle tend donc vers $+\infty$.

Donc la fonction $h(x)=\underbrace{2.x+5}_{8}+\underbrace{\frac{-20}{2.x-3}}_{+\infty}$ tend vers $8+(+\infty)=\underbrace{+\infty}_{\text{Grand et positif}}$.

Graphiquement, cela signifie qu'en approchant par la gauche de 1,5, la courbe représentant notre fonction h s'envole. Ce faisant, elle colle de plus en plus à la droite verticale d'équation $x=1,5$. C'est une de ses asymptotes !

A présent, regardons ce qui se passe lorsque x arrive sur 1,5 par la droite :

- La partie affine $2.x+5$ tend toujours vers $3+5=8$.
- $2.x-3$ tend vers 0 mais il est positif car [nous sommes à droite de 1,5].

Donc son inverse $\frac{1}{2.x-3}$ devient positif et grand.

Donc la partie inverse de h qu'est $\frac{-20}{2.x-3}$ devient négative et grande.

Elle tend vers $-\infty$

Par conséquent la fonction h s'en va donc vers $8+(-\infty)=-\infty$.

Graphiquement, cela se traduit par une courbe qui plonge le long d'une droite verticale à droite de 1,5. Là encore, nous avons une asymptote.

Conclusion : lorsque x se rapproche de 1,5, la fonction h se comporte comme la fonction inverse $\frac{-20}{2.x-3}$. Ainsi :

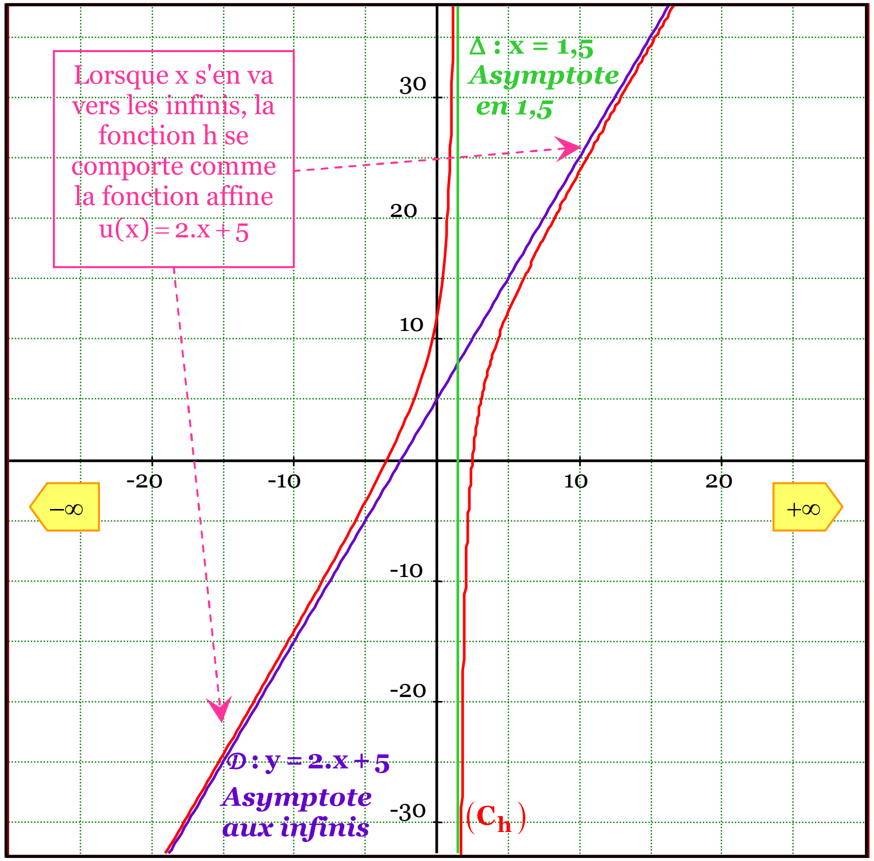
$$\lim_{x\to 1,5^-} h(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 1,5^+} h(x)=-\infty$$

Epilogue : le visage de la fonction rationnelle h

Après toutes nos aventures, nous pouvons dresser le tableau de variation de la fonction rationnelle $h(x)=\frac{4.x^2+4.x-35}{2.x-3}$:

x	$-\infty$		1,5		$+\infty$
h	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Pour conclure notre étude de h, traçons sa courbe représentative (C_h). Celle-ci s'appuie sur les droites $\mathcal{D}$ d'équation $y=2.x+5$ [aux infinis] et Δ d'équation $x=1,5$ [au voisinage de 1,5] : ce sont les [deux asymptotes] vues précédemment.



La réalité de la fonction j(x)=(x²+6.x+17)/(x+2)

A l'aune de ce qui vient d'être fait avec la fonction rationnelle h, on pourrait croire que le signe et surtout les variations des fonctions rationnelles sont finalement assez simples à déterminer. Malgré les trous qu'elles possèdent dans leur ensemble de définition, celles semblent toujours croissantes ou décroissantes. Mais c'est là une illusion ainsi que nous allons le voir en étudiant la fonction rationnelle j qui est définie par :

$$j(x)=\frac{x^2+6.x+17}{x+2}$$

A l'instar de l'exemple précédent h, cette fonction j est elle aussi le quotient d'un polynôme du second degré et d'une fonction affine. Et pourtant...

Ensemble de définition et tableau de signe de la fonction j

D'abord, tous les réels sauf -2 ont une image par j. C'est la seule valeur qui annule le dénominateur. Donc l'ensemble de définition de la fonction j est :

$$D_j=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[\ .$$

Ensuite, j est le quotient d'une forme du second degré que nous devons factoriser pour en connaître le signe et d'une fonction affine. Cette dernière ne pose aucun problème.

Pour factoriser le numérateur $N(x)=x^2+6.x+17$ de la fonction j, nous allons procéder comme avec h : chercher à écrire N(x) sous sa forme canonique.

$$N(x)=\underbrace{x^2+6.x}_{\substack{\text{C'est le début de}\\ \text{l'identité remarquble}\\ (x+3)^2=x^2+6.x+9}}+17=\underbrace{(x+3)^2-9}_{x^2+6.x}+17=\underbrace{(x+3)^2+8}_{\substack{\text{C'est la forme canonique}\\ \text{mais ce n'est pas une}\\ \text{différence de deux carrés !}}}$$

La voie canonique aboutit à une impasse : elle ne permet pas de factoriser N(x). Alors tout est-il perdu ? La réponse est non car l'écriture canonique de N(x) permet de se prononcer sur son signe.

Elle nous dit que N(x) est la somme du carré $(x+3)^2$ qui est toujours positif ou nul et du nombre positif 8. Donc N(x) est lui aussi toujours positif.
Par suite, le tableau de variation de la fonction j est :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x^2+6.x+17$		+	|	+	
$x+2$		$-$	0	+	
j(x)		$-$	||	+	

Autrement dit, la fraction j(x) hérite son signe de son dénominateur $x+2$.

Forme décomposée de la fonction rationnelle j

Comme cela a été dit pour l'exemple précédent h, décomposer la fonction rationnelle j, cela signifie l'écrire sous la forme $j(x)=\underbrace{a.x+b}_{\text{Partie affine}}+\underbrace{\frac{c}{x+2}}_{\text{Partie inverse}}$.

Pour tout réel $x\in D_j$, nous pouvons écrire :

$$j(x)=\frac{\overbrace{x^2}^{\substack{\text{Combien de}\\ \text{fois x+2 ?}}}+6.x+17}{x+2}=\frac{\overbrace{x.(x+2)-2.x}^{\substack{\text{On compense +2.x par}\\ \text{−2.x. Le tout fait } x^2}}+6.x+17}{x+2}=\overbrace{\underbrace{\frac{x.(x+2)}{x+2}}_{\substack{\text{On simplifie}\\ \text{par x+2}}}+\frac{4.x+17}{x+2}}^{\substack{\text{On fractionne}\\ \text{la fraction}}}$$

$$=x+\frac{\overbrace{4.x}^{\substack{\text{Combien de}\\ \text{fois x+2 ?}}}+17}{x+2}=x+\frac{\overbrace{4.(x+2)-8}^{\text{Le tout fait 4.x}}+17}{x+2}=x+\overbrace{\frac{4.(x+2)}{x+2}}^{\text{Simplifions...}}+\frac{9}{x+2}$$

$$=x+4+\frac{9}{x+2}$$

Conclusion : l'écriture décomposée de la fonction j est $j(x)=x+4+\frac{9}{x+2}$.

Cette dernière va nous permettre d'établir les variations de j. Enfin, en principe...

Les variations de la fonction rationnelle j

A l'instar de celui de la fonction rationnelle h, l'ensemble de définition de j ne présente qu'un seul "trou" en -2. Nous inspirant de ce qui a été fait avec h, nous allons d'abord chercher à établir les variations de j avant la valeur interdite, puis après. A chaque fois avec une méthode différente.

Avant -2 avec un enchaînement d'inégalités

Pour établir la variation de j sur l'intervalle $]-\infty;-2[$, nous allons nous inspirer de ce qui a été fait avec la fonction rationnelle h. Sous sa forme décomposée, j est la somme de la fonction affine $u(x)=x+4$ et de l'inverse $v(x)=\frac{9}{x+2}$.

Quels sont les sens de variations de ces deux fonctions sur l'intervalle $]-\infty;-2[$?

- La partie affine $u(x)=x+4$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car son coefficient directeur 1 est positif. Donc elle l'est aussi sur l'intervalle $]-\infty;-2[$.
- Déterminons le sens de variation inverse $v(x)=\dfrac{9}{x+2}$ par un enchaînement d'inégalités.
  a et b sont donc deux réels de l'intervalle $]-\infty;-2[$ tels que $a<b$. La situation est donc celle qui suit :

$$a<b<-2$$

+2

$$\underbrace{a+2<b+2}_{\text{Ces deux réels sont négatifs}}<0$$

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$.

$$\frac{1}{a+2}>\frac{1}{b+2}$$

×9

$$\frac{9}{a+2}>\frac{9}{b+2}$$

$$v(a)>v(b)$$

En résumé, sur l'intervalle $]-\infty;-2[$, si $a<b$ alors $v(a)>v(b)$.
La fonction v change l'ordre, elle est donc décroissante avant -2.

En définitive sur l'intervalle $]-\infty;-2[$, la fonction rationnelle j est la somme de la fonction croissante u et de la croissante v. En clair, la situation est la suivante :

- u est croissante sur $]-\infty;-2[$
- v est décroissante sur $]-\infty;-2[$

} donc si $a<b$ alors

$$\begin{array}{rl} & u(a)<u(b) \\ \oplus & v(a)>v(b) \\ \hline & \underbrace{j(a)}_{u(a)+v(a)} \quad ??? \quad \underbrace{j(b)}_{u(b)+v(b)} \end{array}$$

On ne peut pas se prononcer sur qui de j(a) ou de j(b) est le plus grand.
La méthode que nous venons d'employer ne permet pas de conclure sur le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;-2[$. Cela signifie que l'impossibilité est inhérente à la méthode ou, que la fonction j est à la fois croissante et décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$.
En tout cas, une chose est sûre, nous sommes bloqués. Voyons s'il possible de passer par l'étude du signe de deux images...

Les variations de j par l'étude de la différence de deux images

Comme toujours, a et b sont deux réels différents de -2 tels que $a<b$.
La première chose à faire est de transformer la différence de leurs images $j(a)-j(b)$ en un produit dont nous connaîtrons les signes des facteurs.

$$j(a)-j(b)=\left(a+4+\frac{9}{a+2}\right)-\left(b+4+\frac{9}{b+2}\right)=a-b+\overbrace{\frac{9}{a+2}-\frac{9}{b+2}}^{\text{Additionnons-les !}}$$

$$=(a-b)+\frac{9.(b+2)-9.(a+2)}{(a+2).(b+2)}=(a-b)+\frac{9.b+18-9.a-18}{(a+2).(b+2)}$$

$$=(a-b)+\frac{9.b-9.a}{(a+2).(b+2)}=(a-b)+\frac{(-9).(a-b)}{(a+2).(b+2)}$$

$$=(a-b).\left[1-\frac{9}{(a+2).(b+2)}\right]$$

Une première chose est sûre : où que se trouvent a et b, les facteurs $a+2$ et $b+2$ ont le même signe. Par conséquent, leur produit $(a+2).(b+2)$ et leur inverse $\dfrac{1}{(a+2).(b+2)}$ sont positifs quoiqu'il arrive !

Ensuite, a ayant été choisi inférieur à b, la différence $a-b$ est négative.
En résumé, pour l'instant la situation est la suivante :

$$j(a)-j(b)=\underbrace{(a-b)}_{\text{Négatif}}.\underbrace{\left[1-\underbrace{\frac{9}{(a+2).(b+2)}}_{\text{Positif}}\right]}_{???}$$

Si nous savons comment est $\dfrac{9}{(a+2).(b+2)}$ par rapport à 1 alors nous connaîtrons le signe de la différence $j(a)-j(b)$. Tout un programme !

Que faut-il ou que suffit-il d'avoir pour que $1-\dfrac{9}{(a+2).(b+2)}$ soit positif ?

Pour répondre à cette question, résolvons cette "équation".

$$1-\frac{9}{(a+2).(b+2)}>0 \Leftrightarrow 1>\frac{9}{(a+2).(b+2)} \Leftrightarrow \underbrace{(a+2).(b+2)>9}_{\substack{\text{On a multiplié par}\\ \text{(a+2).(b+2) qui est positif}}}$$

De la même façon, on prouve que le facteur $1-\dfrac{9}{(a+2).(b+2)}$ est négatif lorsque le produit $(a+2).(b+2)$ est inférieur à 9.
Dans notre pensée, a et b appartenant au même ensemble, il en va donc de même pour les facteurs $a+2$ et $b+2$. De facto, leur produit $(a+2).(b+2)$ se comporte un peu comme un carré. Et 9 est le carré de 3.
De plus, $a+2=a-(-2)$ et $b+2=b-(-2)$ peuvent être vus comme étant les différences entre les réels a et b, et la valeur interdite -2.
Globalement, tout se semble donc se jouer à une distance 3 du trou -2, c'est-à-dire en -5 et 1. Que se passe-t-il sur les intervalles définis par ces trois bornes ?

a et b appartiennent à...	$]-\infty;-5[$	$]-5;-2[$	$]-2;1[$	$]1;+\infty[$
Quid de $a+2$ et $b+2$?	$a+2<-3$ $b+2<-3$	$-3<a+2<0$ $-3<b+2<0$	$0<a+2<3$ $0<b+2<3$	$3<a+2$ $3<b+2$
Quid du produit $(a+2).(b+2)$?	produit >9	$9>$ produit >0	$0<$ produit <9	$9<$ produit
Quid du quotient $\dfrac{9}{(a+2).(b+2)}$?	quotient <1	$1<$ quotient	quotient >1	quotient <1
Et de son opposé $-\dfrac{9}{(a+2).(b+2)}$?	opposé >-1	$-1>$ opposé	opposé <-1	opposé >-1
Quid du signe de $1+\dfrac{-9}{(a+2).(b+2)}$?	Positif	Négatif	Négatif	Positif
Quid du signe de la différence $j(a)-j(b)$?	Négatif	Positif	Positif	Négatif
Ainsi sur cet intervalle : Si $a<b$ alors...	$j(a)-j(b)<0$ $j(a)<j(b)$	$j(a)-j(b)>0$ $j(a)>j(b)$	$j(a)-j(b)>0$ $j(a)>j(b)$	$j(a)-j(b)<0$ $j(a)<j(b)$
Donc l'ordre est	conservé	changé	changé	conservé
Conclusion : j est	croissante	décroissante	décroissante	croissante

En inversant ces inégalités positives, l'ordre change. En effet, la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle]0 ; +∞[. Puis, on les multiplie par 9.

N'oublions que $a-b$ est négatif car $a<b$

Conclusion : la fonction j est croissante sur les intervalles extérieurs $]-\infty;-5[$ et $]1;+\infty[$. Par contre, elle est croissante sur les intérieurs $]-5;-2[$ et $]-2;1[$.

Comme quoi, pour peu que l'on sache où l'on va, on arrive toujours à bon port avec un peu de chance...

Qu'advient-il de j à ses frontières ?

Comme pour notre précédent exemple h dont nous allons nous inspirer, nous allons chercher à savoir ce que devient la fonction rationnelle j aux frontières de son ensemble de définition c'est-à-dire aux infinis et aux approches de -2.

Aux infinis

Déterminons la limite de la fonction j en $+\infty$ en utilisant sa forme décomposée $j(x)=x+4+\dfrac{9}{x+2}$.
Lorsque x s'en va vers $+\infty$ c'est-à-dire devient grand tout en étant positif :

- Sa partie affine $x+4$ devient grande et positive : elle tend vers $+\infty$.
- $x+2$ devient aussi grande et positive. Donc son inverse $\dfrac{9}{x+2}$ devient petite et positive : elle tend vers 0

Donc j(x) tend vers $(+\infty)+0=+\infty$.

Abordons ce qui se passe en $-\infty$. Lorsque x tend vers $-\infty$:

- Sa partie affine $x+4$ tend aussi vers $-\infty$ (grand et négatif).
- Sa partie inverse $\dfrac{9}{x+2}$ devient petite et négative car $x+2$ devient grand et négatif.

Donc $j(x)$ tend vers $(-\infty)+0=-\infty$.

A l'instar de sa consoeur h, la fonction rationnelle j se comporte aux infinis comme sa partie affine $x+4$.Graphiquement, on dit que la droite d'équation $y=x+4$ (qui est la courbe de la partie affine) est une asymptote à la courbe (C_j) qui représente la fonction rationnelle j aux voisinages des infinis.

Conclusion : aux infinis la fonction rationnelle j se comporte comme sa partie affine $u(x)=x+4$. Autrement dit : $\lim\limits_{x\to-\infty} j(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x)=+\infty$

Au voisinage de -2

L'ensemble de définition de la fonction j est $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$. x peut s'approcher de -2 par la gauche ou par la droite : deux limites à déterminer.
Pour déterminer les limites de la fonction h aux abords de sa valeur interdite, nous avions utilisé sa forme décomposée. Mais nous aurions aussi pu employer son écriture fractionnaire ainsi que nous allons le faire avec $j(x)=\dfrac{x^2+6.x+17}{x+2}$.

Lorsque x se rapproche de -2 par la gauche (en étant inférieur à -2) :

- Le numérateur $x^2+6.x+17$ tend vers $(-2)^2+6\times(-2)+17=9$.
- Le dénominateur $x+2$ tend vers 0 mais en étant négatif car x est inférieur à 2.

Donc j(x) s'en va vers $\dfrac{9}{0^-}=\dfrac{9}{\text{Petit et négatif}}=\text{Grand et }\underbrace{\text{négatif}}_{\text{Signe du quotient}}=-\infty$.

Lorsque x se rapproche de -2 par la droite (en étant supérieur à -2) :

- Le numérateur $x^2+6.x+17$ tend toujours vers 9.
- Le dénominateur $x+2$ tend vers 0 mais il est positif.

Donc j(x) s'en va vers $\dfrac{9}{0^+}=\dfrac{9}{\text{Petit et positif}}=\text{Grand et positif}=+\infty$.

Graphiquement, en approchant de -2, la courbe (C_j) représentant la fonction j plonge par la gauche et s'envole par la droite, collant ainsi à la droite verticale d'équation $x=-2$. On dit que cette dernière est une asymptote à la courbe (C_j).

Si nous avions utilisé la forme décomposée $j(x)=\underbrace{x+4}_{\text{Partie affine}}+\underbrace{\dfrac{9}{x+2}}_{\text{Partie inverse}}$, nous aurions constaté qu'au voisinage de -2, c'est sa partie inverse qui donne ses limites à la fonction rationnelle j.

Conclusion : les limites de la fonction rationnelle j en -2 sont :

$$\underbrace{\lim_{x\to-2^-}}_{\substack{\text{A gauche de } -2.\\ \text{Par valeurs inférieures}(-).}} j(x)=-\infty \qquad \underbrace{\lim_{x\to-2^+}}_{\substack{\text{A droite de } -2.\\ \text{Par valeurs supérieures }(+)}} j(x)=+\infty$$

Epilogue : le visage de la rationnelle j

Bien que similaire dans sa forme, la fonction rationnelle j est très différente de sa consoeur h dans son signe et ses variations. Le tableau de ces dernières est :

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
j	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

Par contre, sa courbe (C_j) s'appuie aux voisinages des infinis et de sa valeur interdite -2 sur deux droites qui sont asymptotes. Exactement comme (C_h).