La taverne de l'Irlandais

vous présente dans la collection

Inquiétantes Confessions

Géométrie analytique : Un regard d'un autre temps

une folie confessée par Jérôme ONILLON,
professeur atomisé(très dés-agrégé) de Mathématiques

Edition du samedi 22 septembre 2007

09/11 United 93, honneur et courage

Le mot de l'auteur :

Bien qu'(s)abordée au collège, la géométrie analytique dans le plan est surtout (mal)traitée en seconde et première scientifique.

Il existe plusieurs manières de l'envisager. Nous pourrions nous contenter de donner les principaux résultats demandés par les programmes officiels réduisant ainsi ce document à un simple livre de recettes. Notre ambition sera plus vaste. Nous allons construire, développer et forger l'outil analytique. Tout ce que nous énoncerons sera prouvé. Puis nous le mettrons en oeuvre sur des problèmes concrets de façon à en mesurer la pertinence et l'efficacité. Notre volonté est loin d'aller dans la profondeur. Nous allons édifier une force de frappe.

Le présent document couvre les deux années de seconde et de première scientifique. Il n'est pas un document officiel. Il ne prétend pas énoncer ce qui doit être enseigné. Je propose simplement ma vision de la géométrie analytique. Une vision qui aura peut-être évoluée dans quelques temps...

Le thème ayant déjà été abondamment traité sur le site la **taverne de l'Irlandais**, le présent document se veut plus proche de ce qui se fait en classe. Voici donc mon regard sur la géométrie analytique qui à beaucoup paraîtra sans doute d'un autre temps.

Au sommaire :

Il était une fois la géométrie analytique

Ce que vous pourriez apprendre en seconde...

Le pourquoi de la géométrie analytique

Penser et travailler avec des nombres est plus facile qu'avec des points, des droites et des cercles. C'est de cette constatation qu'est venue l'idée à monsieur Descartes de numériser la géométrie. C'est de là que vient la géométrie analytique. Mais si au dix-septième siècle, le premier philosophe cartésien de l'Histoire s'était appuyé sur des axes perpendiculaires pour lire les coordonnées d'un point, notre ambition sera beaucoup plus générale. Notre construction de la géométrie analytique s'appuiera sur les vecteurs. Car c'est grâce à eux que points, droites et cercles peuvent être remplacer par des nombres.

Base et repère

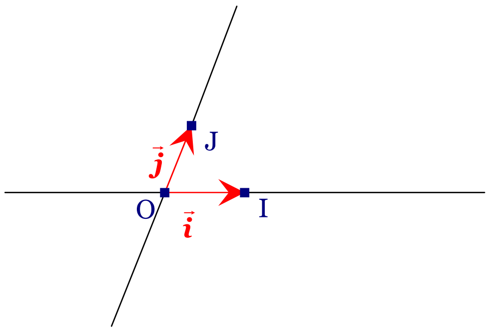
Nous pourrions dire qu'un repère est un triplet de points (O, I, J) dont le premier est l'origine. Cette conception, aussi concrète qu'elle soit, ne permet pas de construire grand chose de solide. Aussi en retiendrons-nous une autre.

Définition d'une base et d'un repère

➲ Une base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est un duo de <u>vecteurs non colinéaires</u>. Le premier vecteur $\vec{i}$ est le vecteur d'abscisse, le second $\vec{j}$ celui d'ordonnée.

➲ Un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un triplet formé d'un point O qui est l'origine du repère et d'une base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

Graphiquement, un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est la chose suivante :



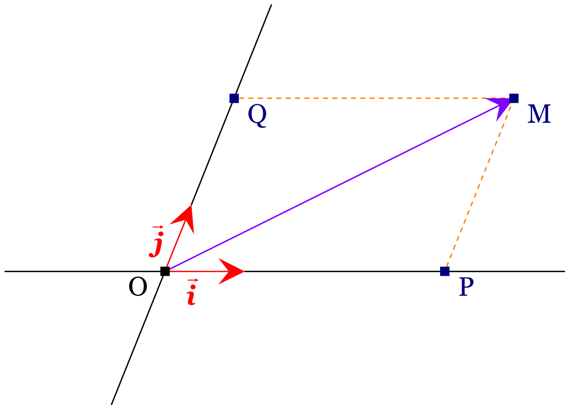
Concrètement, peu de choses changent par rapport aux définitions vues au collège.
En effet, le repère à trois points (O,I,J) d'antan devient aujourd'hui le repère à vecteurs $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.
Cette nouvelle notation va nous permettre d'édifier la géométrie analytique.

Les plus frileux auront remarqué que les deux axes de coordonnées $\left(O;\vec{i}\right)$ et $\left(O;\vec{j}\right)$ ne sont pas perpendiculaires. Sauf mention contraire, il en sera ainsi dans toute notre aventure. Tout ce qui nous diront, vaudra pour tout repère.
Avant de définir ce que nous entendons par coordonnées d'un point, précisons :

- Un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est dit <u>orthogonal</u> si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- Un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est dit <u>orthonormal</u> si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires et s'ils ont des normes égales à 1.

Coordonnées d'un point

Sauf mention contraire, ici comme dans la suite, nous supposerons que le plan muni d'un repère quelconque $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ donc non nécessairement orthonormé.
M est un point quelconque du plan. Nous allons définir ce que nous appelons ses coordonnées dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Graphiquement, la situation est celle-ci :



On appelle P le projeté du point M sur la droite $\left(O;\vec{i}\right)$ parallèlement à la droite $\left(O;\vec{j}\right)$.
De même, on baptise Q le projeté du point M sur la droite $\left(O;\vec{j}\right)$ parallèlement à l'axe $\left(O;\vec{i}\right)$.
Tout est en place pour l'acte final !

- Le point P appartenant à la droite $\left(O;\vec{i}\right)$, les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires donc il existe un réel $\boldsymbol{x}$ tel que $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{x}.\vec{i}$.
- Le point Q appartient à la droite $\left(O;\vec{j}\right)$. Les vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\vec{j}$ étant colinéaires, il existe donc un réel $\boldsymbol{y}$ tel que $\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{y}.\vec{j}$

De par toutes les projections parallèles qui ont été faites, nous pouvons dire que le quadrilatère OPMQ est un parallélogramme. En application de la règle du même nom, nous avons donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{x}.\vec{i} + \boldsymbol{y}.\vec{j}$$

Le couple $(\boldsymbol{x} ; \boldsymbol{y})$ constitue les coordonnées du point M dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Car les coordonnées d'un point dans un repère se définissent à partir d'une relation vectorielle liant tout ce petit monde.

Définition des coordonnées d'un point dans un repère

Dire que le point M a pour coordonnées $(\boldsymbol{x} ; \boldsymbol{y})$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ signifie que $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{x}.\vec{i} + \boldsymbol{y}.\vec{j}$.

Beaucoup croient à tort que l'abscisse est la coordonnée horizontale alors que l'ordonnée désigne la verticale. En fait, l'abscisse désigne la première coordonnée, celle en $\vec{i}$ alors que l'ordonnée est la seconde, celle en $\vec{j}$.

Dans notre élan, nous avons été notablement imprudent en disant "les coordonnées du point M". Car utiliser l'article défini "les" signifie que ce couple $(\boldsymbol{x} ; \boldsymbol{y})$ est unique.
Or la seule chose dont nous soyons sure est que pour tout point M, il en existe au moins un. Nous l'avons construit avec nos projections sur les axes. Mais est-ce le seul ?
Supposons qu'un point M admette deux couples de coordonnées différents que nous noterons $(\boldsymbol{x} ; \boldsymbol{y})$ et $(\boldsymbol{x'} ; \boldsymbol{y'})$.
En application de la définition précédente, nous avons donc :

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{x}.\vec{i} + \boldsymbol{y}.\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OM} = \boldsymbol{x'}.\vec{i} + \boldsymbol{y'}.\vec{j}$$

D'où

$$\boldsymbol{x}.\vec{i} + \boldsymbol{y}.\vec{j} = \boldsymbol{x'}.\vec{i} + \boldsymbol{y'}.\vec{j} \iff (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}).\vec{i} = (\boldsymbol{y'} - \boldsymbol{y}).\vec{j}$$

Or les couples $(\boldsymbol{x} ; \boldsymbol{y})$ et $(\boldsymbol{x'} ; \boldsymbol{y'})$ sont réputés être différents. Cela signifie qu'ils différent par au moins l'une de leurs coordonnées.

- Supposons que les deux abscisses soient différentes, c'est-à-dire $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x'}$.
  La différence $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}$ étant non nulle, on peut diviser par celle-ci.

  Par suite, il vient : $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}).\vec{i} = (\boldsymbol{y'} - \boldsymbol{y}).\vec{j} \iff \vec{i} = \dfrac{\boldsymbol{y'} - \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}}.\vec{j}$

  Donc les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires. Ce qui ne peut être le cas car ces deux vecteurs forment une base ! Et ça, c'est sûr !
  L'hypothèse faite sur les abscisses différentes était donc erronée.
  Désormais, une chose est claire : les abscisses $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x'}$ sont nécessairement égales.
  Voyons ce qu'il en est avec les ordonnées.
- Supposons les ordonnées $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{y'}$ soient différentes.
  Comme précédemment, il est alors possible de diviser par la quantité non nulle qu'est $\boldsymbol{y'} - \boldsymbol{y}$.

  Ainsi vient-il : $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}).\vec{i} = (\boldsymbol{y'} - \boldsymbol{y}).\vec{j} \iff \vec{j} = \dfrac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}}{\boldsymbol{y'} - \boldsymbol{y}}.\vec{i}$

  Donc là encore, les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires. Ce qui encore une fois, ne peut être le cas car ils sont sensés former une base.
  Là encore, notre supposition de départ était fausse : les ordonnées ne peuvent être différentes. Nécessairement, nous avons $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y'}$

La conclusion de tout cela est que les deux couples $(\boldsymbol{x} ; \boldsymbol{y})$ et $(\boldsymbol{x'} ; \boldsymbol{y'})$ ne peuvent pas être différents. Nous avions donc raison de dire <u>les</u> coordonnées d'un point M car elles sont uniques pour un repère donné $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Théorème sur l'unicité des coordonnées d'un point

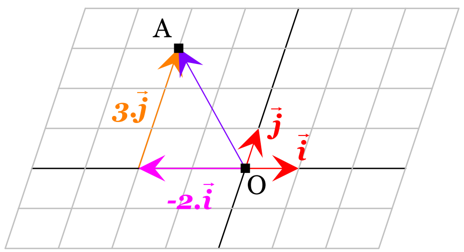
Les coordonnées $(\boldsymbol{x} ; \boldsymbol{y})$ de tout point M dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ sont uniques.

La conséquence de cette trouvaille est que deux couples de coordonnées $(\boldsymbol{x} ; \boldsymbol{y})$ et $(\boldsymbol{x'} ; \boldsymbol{y'})$ différents conduisent nécessairement à deux points différents M et M'. En effet, s'ils amenaient au même point alors les deux couples seraient égaux. Car un point a un seul couple de coordonnées...

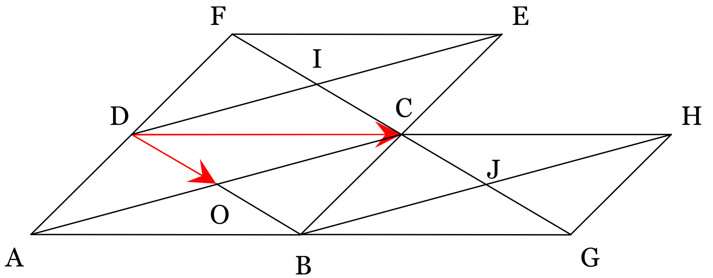
Les coordonnées d'un point par la pratique

La seule chose que vous devez garder présente à l'esprit est que la définition des coordonnées d'un point repose sur une relation vectorielle. En cas de doute ou de problèmes, ramenez-vous toujours à celle-ci !

Positionner dans un repère un point défini par ses coordonnées, c'est en fait le placer à partir d'une relation vectorielle.
Par exemple, pour placer le point A de coordonnées (-2 ; 3) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ci-contre, nous utilisons la relation vectorielle $\overrightarrow{OA} = -2.\vec{i} + 3.\vec{j}$.
C'est la définition des coordonnées.
Partant du point O, nous parcourons un vecteur $-2.\vec{i}$, puis un vecteur $3.\vec{j}$.
Nous arrivons alors en A.



Si le positionnement d'un point dans un repère ne pose guère de problèmes, il peut en aller différemment avec le processus inverse : la lecture des coordonnées d'un point. Voyons cela sur l'exemple suivant :
Dans la situation suivante, les parallélogrammes ABCD, BGHC et DCEF sont superposables et ont pour centres respectifs O, J et I.
D est le milieu du segment [AF], C celui des segments [BE], [FG] et [DH], et B celui de [AC]



Déterminons les coordonnées de tous les points dans le repère $\left(D;\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC}\right)$.

D'après la définition, si nous voulons obtenir les coordonnées (***x*** ; ***y***) d'un point M dans le repère $\left(D;\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC}\right)$, nous devons viser une relation vectorielle de la forme : $\underbrace{\overrightarrow{DM}}_{Origine\text{-}point} = \boldsymbol{x}.\underbrace{\overrightarrow{DO}}_{Premier\ vecteur} + \boldsymbol{y}.\underbrace{\overrightarrow{DC}}_{Second\ vecteur}$.

La tâche semble s'annoncer ardue et irréalisable ! Aussi, entamons les hostilités.

- Déterminons les coordonnées du point A.
  Pour cela, nous devons décomposer $\overrightarrow{DA}$ avec la relation de Chasles et chercher à faire apparaître les deux vecteurs de base $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
  $$\overrightarrow{DA} = \underbrace{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}}_{Merci\ Chasles\ !} = 2.\overrightarrow{DO} + \underbrace{\overrightarrow{CD}}_{ABCD\ est\ un\ parallélogramme} = 2.\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DC} = 2.\overrightarrow{DO} + (-1).\overrightarrow{DC}$$
  Conclusion : les coordonnées de A dans le repère $\left(D;\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC}\right)$ sont $(2;-1)$. Mais qui aurait pu le prévoir de visu ?
- Déterminons les coordonnées du point B.
  Pour les obtenir, nous devons exprimer $\overrightarrow{DB}$ en fonction des deux vecteurs de base $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{DC}$. Nous avons : $\overrightarrow{DB} = 2.\overrightarrow{DO} + \underbrace{0\times\overrightarrow{DC}}_{=\vec{o}}$.
  Conclusion : les coordonnées du point B sont (2 ; 0).
- Pour les coordonnées de C, nous avons : $\overrightarrow{DC} = 0\times\overrightarrow{DO} + 1\times\overrightarrow{DC}$
  Conclusion : le point C a pour coordonnées (0 ; 1) dans $\left(D;\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC}\right)$.
- Le point D étant l'origine du repère, ses coordonnées sont (0 ; 0).
  D'ailleurs n'avons-nous pas : $\overrightarrow{DD} = \underbrace{0\times\overrightarrow{DO}}_{=\vec{o}} + \underbrace{0\times\overrightarrow{DC}}_{=\vec{o}} = \vec{o}$.
- Pour obtenir les coordonnées de E, nous allons utiliser celles de A.
  $$\overrightarrow{DE} = \underbrace{\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}}_{Thank's\ Chasles} = \underbrace{-\overrightarrow{DA}}_{=\overrightarrow{DF}} + \overrightarrow{DC} = -\left[2.\overrightarrow{DO} + (-1).\overrightarrow{DC}\right] + \overrightarrow{DC} = (-2).\overrightarrow{DO} + 2.\overrightarrow{DC}$$
  Conclusion : les coordonnées de E sont $(-2;2)$. Il fallait le voir !
- Pour trouver les coordonnées de F, nous allons nous servir de celles de A.
  En effet : $\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{DA} = -\left[2.\overrightarrow{DO} + (-1).\overrightarrow{DC}\right] = (-2)\times\overrightarrow{DO} + 1\times\overrightarrow{DC}$
  Conclusion : les coordonnées de F sont $(-2;1)$.
- Pour les coordonnées de G, nous allons passer par celles de B.
  En effet : $\overrightarrow{DG} = \underbrace{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BG}}_{Merci\ Chasles\ !} = 2.\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{DC}$
  Conclusion : le point G a pour coordonnées (2 ; 1).
- Les coordonnées de H sont (0 ; 2) car $\overrightarrow{DH} = 2.\overrightarrow{DC} = 0\times\overrightarrow{DO} + 2\times\overrightarrow{DC}$.
- Pour obtenir les coordonnées du point I, nous allons passer par C
  $\overrightarrow{DI} = \underbrace{\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}}_{Re\text{-}merci\ Chasles\ !} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DO} = (-1)\times\overrightarrow{DO} + 1\times\overrightarrow{DC}$
  Conclusion : le point I a pour coordonnées $(-1;1)$. Comme quoi...
- Les coordonnées du point J dans le repère $\left(D;\overrightarrow{DO},\overrightarrow{DC}\right)$ sont (1 ; 1).
  En effet, nous avons : $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DO} = 1\times\overrightarrow{DO} + 1\times\overrightarrow{DC}$
- Enfin, les coordonnées du point O sont (1 ; 0) car $\overrightarrow{DO} = 1\times\overrightarrow{DO} + 0\times\overrightarrow{DC}$.

Certains petits malins objecteront que tout ce déploiement de force était superflu. En effet, pour obtenir les coordonnées d'un point, il suffit de compter les nombres de vecteurs $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{DC}$ parcourus quand on se déplace de l'origine à ce premier. Sauf que ce faisant, ils ont recherché une relation vectorielle du type $\underbrace{\overrightarrow{DM}}_{Origine\text{-}point} = \boldsymbol{x}.\underbrace{\overrightarrow{DO}}_{Premier\ vecteur} + \boldsymbol{y}.\underbrace{\overrightarrow{DC}}_{Second\ vecteur}$. Exactement comme nous !

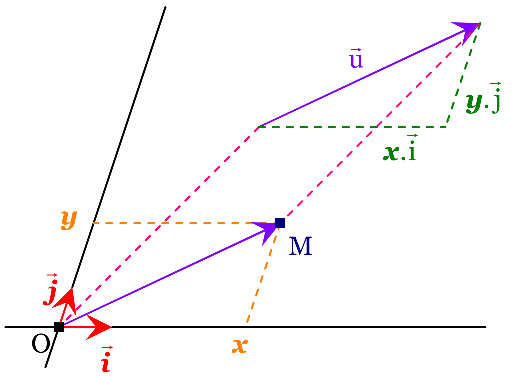
Les coordonnées d'un vecteur

Pour définir les coordonnées d'un vecteur quelconque $\vec{u}$, nous allons nous appuyer sur celles d'un point. Ici comme ailleurs, nous allons travailler dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ qui n'est pas nécessairement orthonormé.

Si $\vec{u}$ est un vecteur quelconque du plan alors il existe un unique point M de celui-ci tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Or pour cet unique point M, il existe un unique couple ($\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$) tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{x}.\vec{i} + \boldsymbol{y}.\vec{j}$$

Ce sont les coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$!



De fil en aiguille, il est clair que pour chaque vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe aussi un unique couple de réels ($\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$) tel que

$$\vec{u} = \underbrace{\boldsymbol{x}.\vec{i} + \boldsymbol{y}.\vec{j}}_{\overrightarrow{OM}}$$

Ce couple est les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition des coordonnées d'un vecteur dans une base

Dire que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées ($\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$) dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ signifie que $\vec{u} = \boldsymbol{x}.\vec{i} + \boldsymbol{y}.\vec{j}$.
Quelque sot le vecteur considéré, ces coordonnées existent et sont uniques.

La définition précédente (qui est aussi un théorème) appelle certaines précisions.

- D'abord les coordonnées d'un vecteur ne dépendent pas d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ mais de la base qui entre dans la composition de ce dernier.

  En effet, l'origine est absent de la relation vectorielle $\vec{u} = \boldsymbol{x}.\vec{i} + \boldsymbol{y}.\vec{j}$.
  Ainsi même si on changeait d'origine mais que l'on conservait les deux vecteurs de base, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ resteraient les mêmes.
- La première coordonnée $\boldsymbol{x}$ est appelée abscisse et la seconde $\boldsymbol{y}$ ordonnée.
- L'unicité des coordonnées d'un vecteur nous permet d'affirmer un règle fondamentale suivante (à connaître par coeur) :

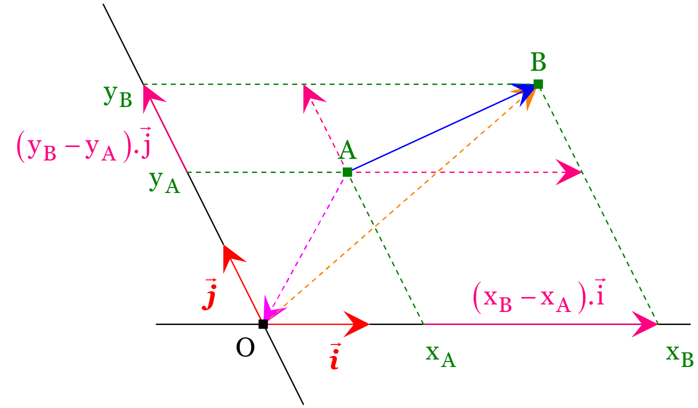
  Deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales. Et réciproquement !

  Nous verrons par la suite l'utilité de cet énoncé.
- A la différence des coordonnées des points qui sont souvent écrites horizontalement, il peut arriver pour des raisons de présentation que les coordonnées des vecteurs soient écrites verticalement.

Des coordonnées de points à celles d'un vecteur

Le plus souvent, les vecteurs que l'on est amené à considérer sont définis par des points.

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on note $(x_A ; y_A)$ les coordonnées d'un point A et $(x_B ; y_B)$ celles d'un autre point B. Notre objectif est de d'obtenir les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir de celles de A et de B.
Graphiquement, la situation est la suivante :



Comme A a pour coordonnées $(x_A ; y_A)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ alors nous avons la relation vectorielle $\overrightarrow{OA} = x_A.\vec{i} + y_A.\vec{j}$. C'est la définition des coordonnées d'un point.
De la même, B ayant pour coordonnées $(x_B ; y_B)$, il vient : $\overrightarrow{OB} = x_B.\vec{i} + y_B.\vec{j}$

A présent, intéressons-nous au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Décomposons-le avec Chasles !

$$\overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}}_{\text{Merci Chasles}} = -\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = -\underbrace{\left[x_A.\vec{i}+y_A.\vec{j}\right]}_{\overrightarrow{OA}} + \underbrace{\left[x_B.\vec{i}+y_B.\vec{j}\right]}_{\overrightarrow{OB}}$$

$$= -x_A.\vec{i}-y_A.\vec{j}+x_B.\vec{i}+y_B.\vec{j} = \underbrace{(x_B-x_A).\vec{i}}_{\text{On compte les }\vec{i}} + \underbrace{(x_B-x_A).\vec{j}}_{\text{On compte les }\vec{j}}$$

En nous fondant sur cette dernière relation vectorielle et la définition des coordonnées d'un vecteur, nous pouvons conclure :

> ***Théorème liant les coordonnées d'un vecteur à celles des points le définissant***
>
> Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\underbrace{(x_B-x_A;y_B-y_A)}_{\substack{\textit{Dans chaque coordonnée,}\\ \textbf{\textit{Arrivée - Départ}}}}$.

Une relation que d'aucuns vous présentent comme une évidence mais qui en fait se fonde sur un calcul vectoriel.

Ainsi par exemple, si on travaille avec les points $A(-3;5)$ et $B(7;-8)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\underbrace{\begin{pmatrix} 7-(-3)=10 \\ -8-5=-13 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Notation verticale}\\ \textit{car cela semble plus clair...}}}$.

Opérations et coordonnées

Ici comme ailleurs, nous travaillerons dans un repère quelconque $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Deux vecteurs $\vec{u}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ et $\vec{v}(\boldsymbol{x'};\boldsymbol{y'})$ peuvent être additionner. Mais quelles sont alors les coordonnées de leur somme $\vec{u}+\vec{v}$?

Comme $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ et $(\boldsymbol{x'};\boldsymbol{y'})$ sont les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ ou plutôt dans la base associée $(\vec{i},\vec{j})$ alors :

$$\vec{u} = \boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{y}.\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = \boldsymbol{x'}.\vec{i}+\boldsymbol{y'}.\vec{j}$$

Par suite, il vient :

$$\vec{u}+\vec{v} = \underbrace{\boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{y}.\vec{j}}_{\vec{u}} + \underbrace{\boldsymbol{x'}.\vec{i}+\boldsymbol{y'}.\vec{j}}_{\vec{v}} = \underbrace{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}).\vec{i}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y'}).\vec{j}}_{\text{On compte les }\vec{i}\text{ et les }\vec{j}}$$

En application de la définition des coordonnées d'un vecteur, nous pouvons dire

> ***Théorème donnant les coordonnées d'une somme de vecteurs***
>
> Si $\vec{u}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x'}\\ \boldsymbol{y'}\end{pmatrix}$ alors leur somme $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}\\ \boldsymbol{y}+\boldsymbol{y'}\end{pmatrix}$.

Un vecteur $\vec{u}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ peut aussi être multiplié par un réel $\boldsymbol{k}$. Quelles sont alors les coordonnées de leur produit $\boldsymbol{k}.\vec{u}$?
Reprenant ce que nous avons déjà dit, il vient :

$$\boldsymbol{k}.\vec{u} = \boldsymbol{k}.\underbrace{\left[\boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{y}.\vec{j}\right]}_{\substack{\vec{u}\textit{ dans}\\ \textit{la base }(\vec{i},\vec{j})}} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{y}.\vec{j} = (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}).\vec{i}+(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{y}).\vec{j}$$

Cette dernière relation nous permet de conclure :

> ***Théorème donnant les coordonnées d'un produit réel/vecteur***
>
> Si $\vec{u}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{k}$ est un réel alors le produit $\boldsymbol{k}.\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{k}.\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$.

Mettons en application les deux précédents théorèmes avec les vecteurs $\vec{u}(5;2)$ et $\vec{v}(-3;1)$. Nous allons calculer les coordonnées du vecteur $3.\vec{u}-2.\vec{v}$.

$$3.\underbrace{\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}_{\vec{u}} - 2.\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}}_{\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix}3\times5\\3\times2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\times(-3)\\2\times1\end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Le produit est prioritaire}\\ \textit{sur la somme...}}} = \underbrace{\begin{pmatrix}15\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}}_{\substack{\textit{Il reste}\\ \textit{à soustraire}}} = \begin{pmatrix}15-(-6)\\6-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\4\end{pmatrix}$$

Donc le vecteur $3.\vec{u}-2.\vec{v}$ a pour coordonnées $(21;4)$.

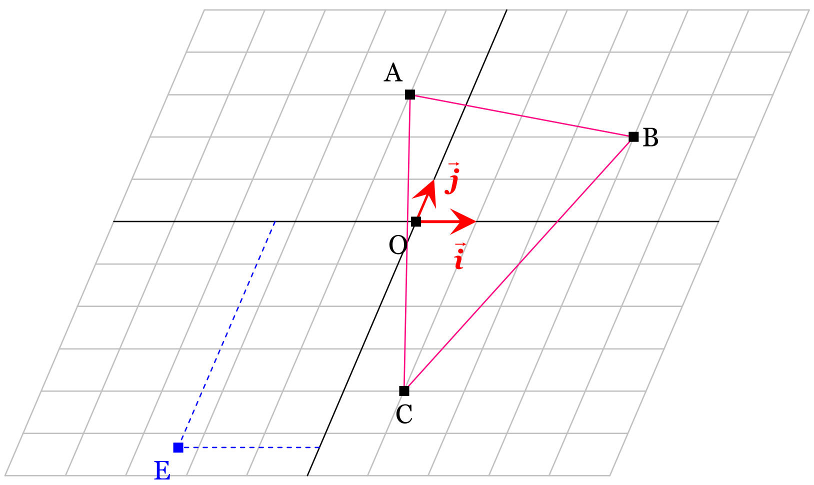
> ***Note :*** *pour très pratique qu'elle soit, la manière dont nous avons présenté les calculs peut ne pas être acceptée par toute le monde. Remplacer des vecteurs par leurs coordonnées peut choquer certaines personnes même si il existe une parfaite correspondance une fois le repère fixé. En fait, ce n'est rien d'autre que du calcul dans l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^2$ *. Mais tout cela est une autre histoire !*

A la recherche des coordonnées d'un point

Tout ce que nous venons de voir peut par exemple, servir à positionner un point défini par une relation vectorielle via ses coordonnées. C'est l'objet de ce qui suit.

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ donné, on considère les points $A(-1;3)$, $B(3;2)$ et $C(1;-4)$. L'objet de notre mission est de placer sur la figure ci-dessous le point E défini par :

$$2.\overrightarrow{AE}-3.\overrightarrow{BE}+4.\overrightarrow{CE}=\vec{o}$$



Faites comme si vous n'aviez pas vu le point E...

Certains vous diront que E est barycentre des points pondérés $(A,2)$, $(B,-3)$ et $(C,4)$. C'est exact mais là n'est pas notre problème. Le nôtre est le placement du point E. Pour y parvenir, nous allons déterminer ses coordonnées $(x_E;y_E)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

La seule chose que nous sachions sur le point E est la relation vectorielle :

$$2.\overrightarrow{AE}-3.\overrightarrow{BE}+4.\overrightarrow{CE}=\vec{o}$$

Traduisons cette relation vectorielle sous forme de coordonnées.

$$2.\underbrace{\begin{pmatrix}x_E-(-1)\\y_E-3\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AE}}-3.\underbrace{\begin{pmatrix}x_E-3\\y_E-2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{BE}}+4.\underbrace{\begin{pmatrix}x_E-1\\y_E-(-4)\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{CE}}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{o}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2.[x_E+1]\\2.[y_E-3]\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3.[x_E-3]\\3.[y_E-2]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4.[x_E-1]\\4.[y_E+16]\end{pmatrix}}_{\text{Produit réel/vecteur prioritaire sur l'addition... C'est chaque coordonnée qui doit être multipliée par le réek}}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2.x_E+2\\2.y_E-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3.x_E-9\\3.y_E-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4.x_E-4\\4.y_E+16\end{pmatrix}}_{\text{Il ne reste plus qu'à additionner chaque coordonnée}}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}[2.x_E+2]-[3.x_E-9]+[4.x_E-4]\\ [2.y_E-6]-[3.y_E-6]+[4.y_E+16]\end{pmatrix}}_{\text{C'est comme pour le calcul littéral mais en deux dimensions}}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3.x_E+7\\3.y_E+16\end{pmatrix}}_{\text{Un vecteur...}}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\text{Un autre vecteur...}}$$

Deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales. Cette règle s'applique en particulier aux deux vecteurs de la dernière égalité qui sont représentés par leurs coordonnées. Nous pouvons dire qu'Ils ont :

- mêmes abscisses : $3.x_E+7=0 \Leftrightarrow 3.x_E=-7 \Leftrightarrow x_E=-\frac{7}{3}$
- mêmes ordonnées : $3.y_E+16=0 \Leftrightarrow 3.y_E=-16 \Leftrightarrow y_E=-\frac{16}{3}$

Conclusion : les coordonnées du point E sont $\left(-\frac{7}{3};-\frac{16}{3}\right)$.

Connaissant ses coordonnées, il est à présent aisé de placer ce point E (à condition toutefois d'aimer les tiers).

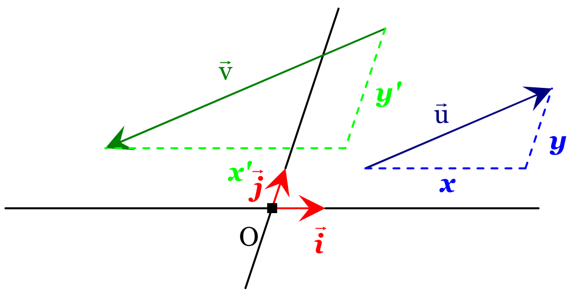
Un test de colinéarité : le déterminant

Avant toute chose, reprécisons que tout ce que nous allons raconter se déroule dans un sympathique repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ quelconque.

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont la même direction. Une autre caractérisation de la colinéarité consiste à dire qu'ils sont proportionnels, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\vec{u} = \boldsymbol{k}.\vec{v}$.

Précisons que cette dernière caractérisation n'est valable que si le vecteur $\vec{v}$ est non nul.
Le vecteur nul $\vec{0}$ est réputé être colinéaire à tous les autres vecteurs car il n'a pas de direction définie.

Ce qui nous intéresse est la réalisation d'un test de colinéarité sur les coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x'}\\\boldsymbol{y'}\end{pmatrix}$.



Reformulons les caractérisations précédentes en y introduisant les coordonnées.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x'}\\\boldsymbol{y'}\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \text{Il existe un réel } \boldsymbol{k} \text{ tel que } \underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}}_{\vec{u}} = \boldsymbol{k}.\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{x'}\\\boldsymbol{y'}\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\text{Il existe un réel } \boldsymbol{k} \text{ tel que } \begin{cases}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x'}\\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{y'}\end{cases}}_{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont des coordonnées proportionnelles}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y'} = \boldsymbol{y}.\boldsymbol{x'}}_{\text{Produit en croix des coordonnées}} \Leftrightarrow \underbrace{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y'} - \boldsymbol{y}.\boldsymbol{x'}}_{\text{Voilà ce que nous appellerons le déterminant des vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v}.} = 0$$

Cette dernière égalité constituera la base de notre test de colinéarité.

Théorème et définition du déterminant

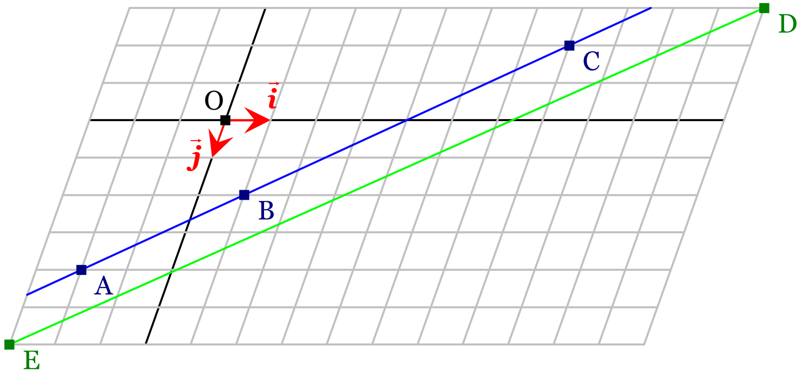
Le déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x'}\\\boldsymbol{y'}\end{pmatrix}$ est le nombre réel noté $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ et défini par :

$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \underbrace{\begin{vmatrix}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{x'}\\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{y'}\end{vmatrix}}_{\text{Coordonnées de } \vec{u} \text{ et } \vec{v}} = \underbrace{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y'} - \boldsymbol{y}.\boldsymbol{x'}}_{\text{Différence des produits de chaque diagonale}}$$

Ce déterminant de deux vecteurs est un test de leur colinéarité :
- S'il est nul <u>alors</u> les deux vecteurs sont colinéaires.
- S'il est non nul <u>alors</u> les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Ce déterminant appelle quelques remarques :
- Il est bien évident que le déterminant de deux vecteurs est spécifique au repère choisi. Si vous changez de repère, il n'est pas anormal que les coordonnées des vecteurs et donc leur déterminant changent. Par contre, avoir un déterminant nul dans un repère l'entraînera dans tous les autres. Car la colinéarité ne dépend du repère choisi...
- Le raisonnement qui a conduit à l'élaboration de ce test, présupposait que le vecteur $\vec{v}$ ne pouvait être le vecteur nul. Cependant aucune restriction n'a été apportée dans l'énoncé précédent. En fait, le test marche même lorsque le vecteur $\vec{v}$ est le vecteur nul car alors ses coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ font que tout déterminant avec n'importe quel vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ est nul. Le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs !
- Le déterminant est une sorte d'arme absolue. Il vous dira à coup sûr si deux vecteurs sont colinéaires ou pas. Mais parfois, son usage est superflu. En particulier lorsque les coordonnées sont proportionnelles. Car alors il y a colinéarité. D'ailleurs, le déterminant n'est rien d'autre qu'un produit en croix...

Avec le précédent théorème, il est possible de prouver rapidement que deux droites sont parallèles ou que trois points sont alignés. Voyons cela avec la situation suivante :



- Les points $A(-2;4)$, $B(-1;2)$ et $C(7;-2)$ sont-ils alignes ?
  Pour le savoir, nous allons intéresser à la possible colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}(3;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(9;-6)$. Calculons leur déterminant.

  $$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}3 & 9\\-2 & -6\end{vmatrix}=3\times(-6)-(-2)\times 9=-18+18=0$$

  Comme leur déterminant est nul alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Donc les points A, B et C sont alignés.

  Note : *l'utilisation du déterminant n'est absolument pas nécessaire pour savoir si les deux vecteurs sont colinéaires. En effet, un simple coup d'oeil aux coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$ permet de dire qu'elles sont proportionnelles et surtout que $\overrightarrow{AC}=3.\overrightarrow{AB}$. D'où leur colinéarité !*

- Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?
  Pour le déterminer, nous allons essayer de savoir si les vecteurs $\overrightarrow{AB}(3;-2)$ et $\overrightarrow{DE}(-14;9)$ sont colinéaires. Calculons leur déterminant.

  $$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}\right)=\begin{vmatrix}3 & -14\\-2 & 9\end{vmatrix}=3\times 9-(-2)\times(-14)=27-28=-1\neq 0$$

  Leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas colinéaires. En conséquence de quoi, les droites (AB) et (DE) ne sont pas parallèles.

Les deux précédents exemples le montrent bien : si pour prouver que deux vecteurs sont colinéaires, la proportionnalité de leurs coordonnées peut suffire, pour démontrer qu'ils ne le sont pas, rien n'est plus efficace que leur déterminant non nul.

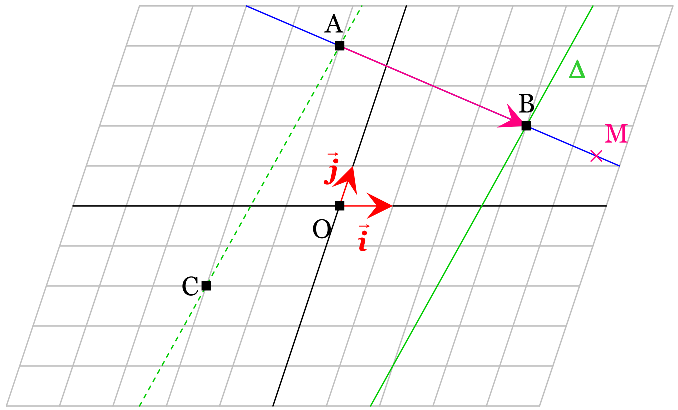
Equation cartésienne : un test d'appartenance

Dans ce paragraphe, nous travaillerons dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ quelconque.

Contrairement aux points et aux vecteurs, une droite est par nature un objet infini. Il est hors de question de lui trouver des coordonnées.

En fait, la principale question qui se pose avec une droite est de savoir si tel ou tel point en fait partie. C'est dans l'optique d'un test d'appartenance à celle-ci que nous allons orienter nos efforts.

Plutôt que de nous lancer dans de grandes envolées théoriques, nous allons voir ce qu'il en est sur un exemple. Travaillons avec la situation suivante :



Commençons avec la droite (AB) : à quelle condition sur ses coordonnées (x ; y) d'un point M appartient-il à la droite (AB) ? Voilà la question que nous nous posons.

Si le point $M(x;y)$ appartient à la droite alors cela signifie que les points A, B et M sont alignés. Cela équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-1)=x+1\\y-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-1)=4\\2-4=-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires ou aussi que le déterminant de ces deux vecteurs est nul. C'est sur cet enchaînement que nous allons nous appuyer !

$$M(x;y)\in(AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix}x+1 & 4\\ y-4 & -2\end{vmatrix}}_{\substack{\textit{Développons ce déterminant :}\\ \textit{différence des produits}\\ \textit{des diagonales}}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\times(-2)-(y-4)\times 4=0$$

$$\Leftrightarrow -2.x-2-4.y+16=0 \Leftrightarrow -2.x-4.y+14=0$$

Ainsi dire que le point $M(x;y)$ appartient à la droite (AB) équivaut à dire que ses coordonnées sont solutions de l'équation $-2.x-4.y+14=0$.

On dit que cette dernière est une <u>équation cartésienne</u> de la droite (AB). C'est un test d'appartenance à celle-ci. Si vos coordonnées la vérifient, vous appartenez à la droite, sinon vous n'en faîtes pas partie.

Par exemple, intéressons-nous au point $E(4;1,5)$. A vue d'oeil, il semble appartenir à la droite (AB). Mais il faut se méfier des fausses impressions. Pour être sûr de notre fait, testons ses coordonnées avec notre équation de (AB).

$$-2.x_E-4.y_E+14=-2\times 4-4\times 1,5+14=-8-6+14=0$$

Ses coordonnées vérifiant l'équation de la droite (AB), le point E appartient bien à celle-ci.

Nous avons dit qu'une équation cartésienne de (AB) est $-2.x-4.y+14=0$.

Précisons d'abord qu'une équation cartésienne est une équation d'une forme particulière. Globalement, c'est **tout = 0**.

Nous avons pris la précaution d'employer l'article indéfini "une". Car la droite (AB) admet une infinité d'équations cartésiennes.

En effet, nous pouvons diviser les deux membres de $-2.x-4.y+14=0$ par -2.

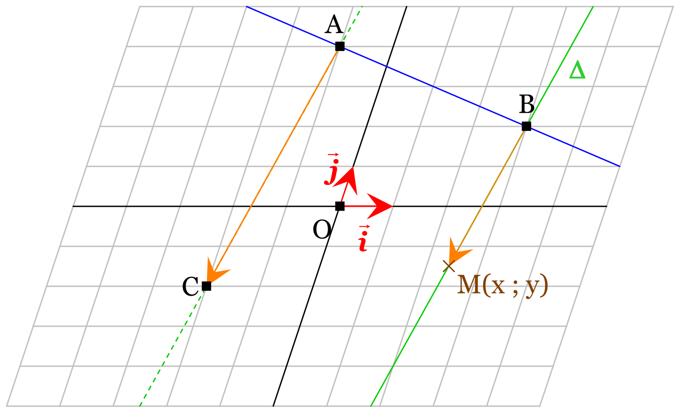
Celle-ci devient alors $x+2.y-7=0$. C'est une autre équation de la droite (AB).

Puis, on peut choisir de tout multiplier par 7. On obtient : $7.x+14.y-49=0$.

On peut même envisager de tout multiplier par $\sqrt{2}$ mais cela n'avance à rien.
La seconde équation $x+2.y-7=0$ est certainement l'équation cartésienne de (AB) la plus simple que l'on puisse trouver.

Conclusion : une équation cartésienne de la droite (AB) est $x+2.y-7=0$.

Intéressons-nous à présent à la droite Δ qui est la parallèle à la droite (AC) passant par le point B.



A la différence de ce que nous avions avec la droite (AB), nous ne connaissons ici qu'un seul point de la droite Δ qui est B.

Certes mais nous connaissons un vecteur directeur de la droite Δ en la personne de $\overrightarrow{AC}$. L'une comme l'autre ont la même direction : celle de la droite (AC).

Maintenant, dire que le point $M(x;y)$ appartient à la droite Δ équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-(-1)=-1\\-2-4=-6\end{pmatrix}$ ont la même direction ou qu'ils sont colinéaires, et par suite, que leur déterminant est nul. Poursuivons dans cette voie...

$$M(x;y)\in\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\y-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix}x-4 & -1\\ y-2 & -6\end{vmatrix}}_{\substack{\textit{Développons ce déterminant :}\\ \textit{différence des produits}\\ \textit{des diagonales}}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\times(-6)-(y-2)\times(-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -6.x-24+y+-2=0 \Leftrightarrow -6.x+y-26=0$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite Δ est $-6.x+y-26=0$.

Dans le but de simplifier les choses, on peut choisir de multiplier les deux membres de $-6.x+y-26=0$ par -1. On obtient alors qu'une autre équation cartésienne de Δ est $6.x-y+26=0$.

L'avantage de cette dernière par rapport à son aînée est qu'elle n'a qu'un seul coefficient négatif au lieu de deux.

Les deux raisonnements que nous venons de faire sont reproductibles avec n'importe quelle droite du plan. Ainsi pouvons-nous affirmer :

Théorème sur les droites et les équations cartésiennes

Toute droite $\mathcal{D}$ admet une équation cartésienne de la forme $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ où $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont trois réels. C'est un test d'appartenance à celle-ci.

Bien sûr, une équation est spécifique à une droite dans un repère donné. Si l'on change de repère, il n'est pas anormal que l'équation change...

Se pose à présent la question de la réciproque : l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant une équation cartésienne donnée $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ est-il une droite ? Cela, rien ne l'assure ! Aussi allons-nous y fourrer notre nez !

A propos des équations réduites et des équations cartésiennes

A lire les programmes officiels et les manuels scolaires de la classe de seconde, on comprend que la forme officielle des équations de droites est l'équation réduite. Celle-ci est soit de la forme $x=c$ ou $y=m.x+p$. Sans doute pour faire la jonction avec les fonctions affines et parce que ce genre d'équation a déjà été introduit en troisième.

Pourtant, l'équation cartésienne de la droite (AB) qu'est $x+2.y-7=0$ est bien plus facile à manipuler que son équation réduite $y=-\frac{x}{2}+\frac{7}{2}$. Il est bien plus facile de travailler avec des entiers qu'avec des fractions.

A mon sens, l'équation cartésienne a bien plus d'avantage que sa consoeur réduite dés lors qu'il s'agit de faire des calculs et de travailler avec. Toutefois, ce côté pratique semble avoir échappé à certaines personnes... Oublions !

Cela dit, ce n'est pas dans ce document que vous entendrez parler de coefficient directeur...

Une droite derrière chaque équation cartésienne ?

Tout ce qui suit se déroule dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ quelconque.

Toute équation cartésienne de la forme $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ caractérise-t-elle une droite ? A priori, rien ne l'assure ! Peut-être des cercles ou autres objets sont-ils caractériser par des équations de ce type ?

Nous décidons d'appeler $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant l'équation cartésienne $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$. Essayer de déterminer le type d'objet qu'est $\mathcal{E}$.

Pour que les choses aient un intérêt, nous supposerons que les coefficients $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ne peuvent être tous les deux nuls en même temps. Si tel n'était pas le cas alors l'équation cartésienne s'écrirait $\boldsymbol{c}=0$. Et là, deux cas seraient possibles :

- Si le coefficient $\boldsymbol{c}$ était nul, l'ensemble $\mathcal{E}$ serait alors le plan car tout point $M(x;y)$ vérifierait l'équation $0=0$.
- Si le coefficient $\boldsymbol{c}$ était non nul alors aucun point $M(x;y)$ ne pourrait vérifier l'équation $\underbrace{\boldsymbol{c}}_{\neq 0}=0$. L'ensemble $\mathcal{E}$ se résumerait à l'ensemble vide.

Au vu de ce que nous avons fait lors du paragraphe précédent, l'équation cartésienne $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ semble quand même bien être la conséquence d'un déterminant nul. Reste à connaître les vecteurs en cause. Pour le savoir, remontons la filière. Essayons de mettre en évidence ce déterminant.

$$M(x;y)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\boldsymbol{a}.x-(-\boldsymbol{b}).y}_{\substack{\textit{Nous avons fait apparaître}\\ \textit{une différence de deux produits.}\\ \textit{Mais il nous reste le coefficient } \boldsymbol{c}}}+\boldsymbol{c}=0$$

Cherchons à intégrer ce coefficient $\boldsymbol{c}$ dans l'un de deux autres termes. Pour cela, nous devons envisager deux cas suivant que le coefficient $\boldsymbol{a}$ est nul ou pas.

- Si $\boldsymbol{a}$ est nul alors le coefficient $\boldsymbol{b}$ ne l'est pas. On peut donc diviser par.

$$M(x;y)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}.x-(-\boldsymbol{b}).y\underbrace{-(-\boldsymbol{b}).\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}}_{+\boldsymbol{c}}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\boldsymbol{a}.x-(-\boldsymbol{b}).\left[y+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}\right]}_{\textit{Voilà un déterminant}}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -\boldsymbol{b} \\ y+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}=0$$

$\begin{vmatrix} x & -\boldsymbol{b} \\ y+\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}$ est le déterminant de deux vecteurs $\overline{AM}\begin{pmatrix} x \\ y+\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$.

Le point A a alors pour coordonnées $\left(0;-\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}\right)$. Reprenons !

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathcal{E} &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overline{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{M appartient à la droite passant par } A\left(0;-\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}\right) \\ \text{et de vecteur directeur } \vec{u}(-\boldsymbol{b};\boldsymbol{a}) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ passant par le point $A\left(0;-\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}\right)$.

➲ Si $\boldsymbol{a}$ est non nul alors on peut diviser par $\boldsymbol{a}$. Raisonnons !

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathcal{E} &\Leftrightarrow \boldsymbol{a}.x-(-\boldsymbol{b}).y+\underbrace{\boldsymbol{a}.\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}}_{+\boldsymbol{c}}=0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\boldsymbol{a}.\left[x+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}\right]-(-\boldsymbol{b}).y}_{\textit{Voilà un déterminant}}=0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} x+\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}} & -\boldsymbol{b} \\ y & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}}_{\textit{Déterminant de } \overline{BM} \textit{ et } \vec{u}}=0 \\ &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overline{BM}\begin{pmatrix} x+\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}} \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Le point M appartient à la droite passant par } B\left(\dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}};0\right) \\ \text{et de vecteur directeur } u(-\boldsymbol{b};\boldsymbol{a}). \end{array}\right. \end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$.

Ce que nous pressentions a été établi. Aussi pouvons-nous clamer :

Théorème à propos des équations cartésiennes

L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan vérifiant l'équation $\underbrace{\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0}_{\boldsymbol{a} \textit{ et } \boldsymbol{b} \textit{ ne peuvent être nuls tous les deux}}$

est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$.

Grâce à ce théorème, il est possible de savoir si deux droites définies par leurs équations sont parallèles ou pas.

Considérons les droites $\mathcal{D}:\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ et $\mathcal{D}':\boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}=0$.

En application de notre théorème, nous pouvons dire que deux vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}:\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ et $\mathcal{D}':\boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}=0$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{b'} \\ \boldsymbol{a'} \end{pmatrix}$.

Maintenant, dire que les deux droites sont parallèles équivaut à dire que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Poursuivons dans cette voie.

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \mathcal{D}:\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0 \text{ et } \mathcal{D}':\boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}=0 \\ \text{sont parallèles} \end{array} &\Leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{b'} \\ \boldsymbol{a'} \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} -\boldsymbol{b} & -\boldsymbol{b'} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a'} \end{vmatrix}}_{\det(\vec{u},\vec{v})}=0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{-\boldsymbol{b}.\boldsymbol{a'}-\boldsymbol{a}.(-\boldsymbol{b'})}_{\textit{On explicite...}}=0 \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}.\boldsymbol{b}=0 \end{aligned}$$

Nous avions déjà un test de colinéarité avec le déterminant. Connaissant deux droites par leurs équations, nous avons un test de parallélisme.

Théorème sur le parallélisme de deux droites via leurs équations

Dire que les droites $\mathcal{D}:\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ et $\mathcal{D}':\boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}=0$ sont parallèles <u>équivaut à dire que</u> $\underbrace{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}.\boldsymbol{b}}_{\textit{Déterminant des droites } \mathcal{D} \textit{ et } \mathcal{D}' ?}=0$

Tracer une droite définie par son équation

Encore une fois, ce qui suit se déroule dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ quelconque.

S'il est une situation qui arrête souvent l'apprenant moyen, c'est bien celle où il faut tracer une droite définie par son équation. Pourtant, il n'y a là guère de difficulté car pour dessiner une droite, il suffit d'avoir un crayon, une règle et deux points de la droite.

Par exemple, traçons dans un repère donné la droite $\mathcal{D}$ dont une équation cartésienne est $3.x-5.y+7=0$. Pour y parvenir, nous devons déterminer deux points dont les coordonnées vérifient l'équation de la droite.

- Il semble que ce soit le cas pour le point $A(-9;-4)$.

  En effet, $3.x_A-5.y_A+7=3\times(-9)-5\times(-4)+7=-27+20+7=0$.

  Les coordonnées de A vérifiant l'équation de $\mathcal{D}$, le premier appartient donc à la seconde.

  L'intérêt de ce point A est que ses coordonnées sont entières. Il est donc facile à placer. Il a d'ailleurs été conçu dans cette optique en tâtonnant...
- Ensuite, il semble (pas sûr) qu'il existe un point B de la droite ayant pour abscisse 0. Ses coordonnées sont donc de la forme $B(0;y_B)$.

  Déterminons y_B.

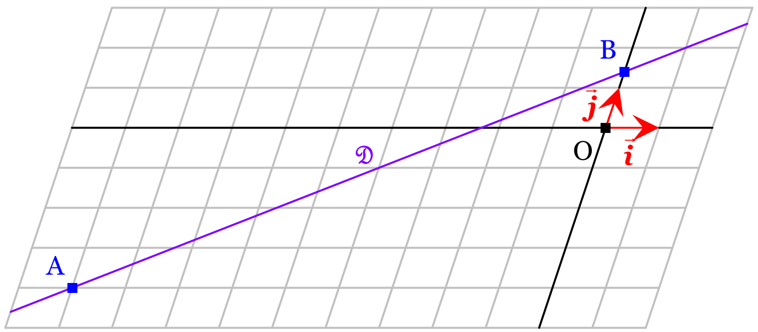
  B appartenant à $\mathcal{D}$, les coordonnées du point vérifient l'équation de la droite. Donc :

  $$3\times\underbrace{0}_{x_B}-5.y_B+7=0 \Leftrightarrow -5.y_B=-7 \Leftrightarrow y_B=\frac{-7}{-5}=\frac{7}{5}=1{,}4$$

  Le point $B(0;1{,}4)$ fait donc bien partie de la droite $\mathcal{D}$.

  L'avantage du point B est qu'il appartient à un des axes de coordonnées. Ce qui rend aisé son placement.

Notre droite $\mathcal{D}$ est aussi la droite (AB). Nous n'avons plus qu'à les tracer !



Intersection de deux droites : systèmes linéaires

Une dernière fois, tout ce qui suit se déroule dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ quelconque.

Deux droites du plan $\mathcal{D}:\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ et $\mathcal{D}':\boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}=0$ peuvent être sécantes (un seul point d'intersection) ou parallèles (distinctes ou confondues).
Depuis peu, nous disposons d'un test de parallélisme nous permettant dire dans quelle alternative nous sommes.

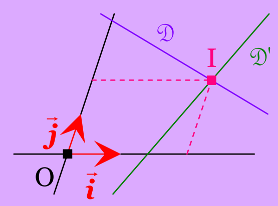
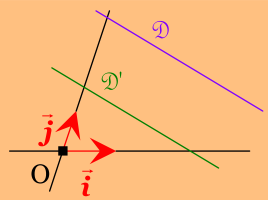
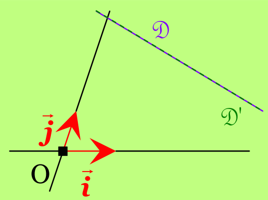
De plus, dire qu'un point $M(x;y)$ appartient à l'intersection des deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ signifie qu'il appartient à celles-ci, donc que ses coordonnées vérifient leurs deux équations. Autrement dit, les coordonnées du point M sont solutions du système linéaire de deux équations à deux inconnues qu'est :

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0 & \textbf{(1)}\ \textit{appartenance à } \mathcal{D}\\ \boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}=0 & \textbf{(2)}\ \textit{appartenance à } \mathcal{D}'\end{cases}$$

Et réciproquement, lorsque l'on se lance dans la résolution d'un système linéaire 2×2 du type :

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0 & \textbf{(1)}\ \textit{pour une droite } \mathcal{D}\\ \boldsymbol{a'}.x+\boldsymbol{b'}.y+\boldsymbol{c'}=0 & \textbf{(2)}\ \textit{pour une droite } \mathcal{D}'\end{cases}$$

on recherche les coordonnées des points d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Et on a alors les alternatives suivantes :

Si $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}.\boldsymbol{b}\neq 0$ alors	Si $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b'}-\boldsymbol{a'}.\boldsymbol{b}=0$ alors deux alternatives :	
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles distinctes	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues
		
Un seul point d'intersection I, une seule solution	Aucun point d'intersection, aucune solution.	Une infinité de points d'intersection, une infinité de solutions

Ce qui est intéressant dans un système 2×2 est sa résolution effective. Voyons quelles sont les différentes méthodes possibles avec l'exemple suivant.

$$(S)\begin{cases}3.x-5.y+7=0 & \textbf{\textit{(1)}}\\ 4.x+6.y-5=0 & \textbf{\textit{(2)}}\end{cases}$$

Résoudre ce système, c'est chercher les coordonnées des éventuels points d'intersection des droites $\mathcal{D}: 3.x-5.y+7=0$ et $\mathcal{D}': 4.x+6.y-5=0$

La première chose à connaître est le nombre de solutions de (S). Pour le savoir, on calcule son déterminant qui n'est rien d'autre que la quantité $\boldsymbol{a.b'-a'.b}$.

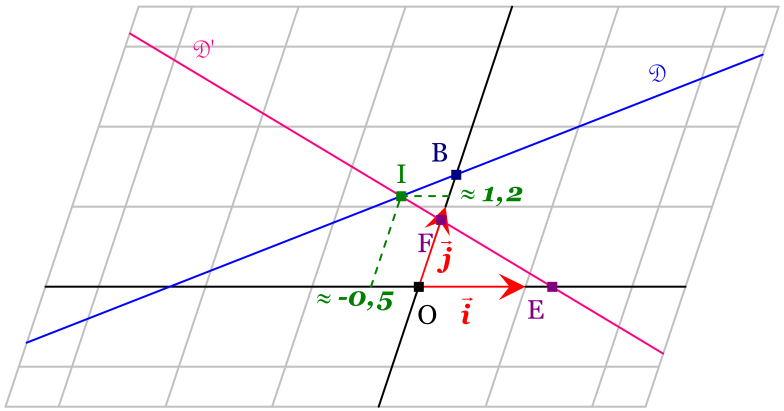
$$\det(S)=\begin{vmatrix}3 & -5\\ 4 & 6\end{vmatrix}=3\times 6-4\times(-5)=18+20=38\neq 0$$

Son déterminant étant non nul, le système (S) a donc une seule solution, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un seul point d'intersection I car elles sont sécantes.

Le système (S) peut être résolu de plusieurs manières. Voyons dans le détail, les trois principales méthodes.

- ***Le système (S) peut être résolu graphiquement***

Graphiquement, cela signifie lire les coordonnées du point d'intersection sur une figure. Cela implique donc de tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ à partir de leurs équations, puis de projeter leur point d'intersection sur les axes pour pouvoir lire ses coordonnées.
D'après ce qui a été fait précédemment, nous savons que la droite $\mathcal{D}: 3.x-5.y+7=0$ passe par les points $A(-9;-4)$ et $B(0;1,4)$.
En procédant de même, on établit que la droite $\mathcal{D}': 4.x+6.y-5=0$ coupe les axes de coordonnées aux points $E(1,25;0)$ et $F\left(0;\frac{5}{6}\right)$.



Par lecture graphique, on trouve que les coordonnées du point d'intersection I sont approximativement $(-0,5;1,2)$.

Car il ne s'agit sans doute que d'une estimation. La pertinence de celle-ci dépend de la qualité du tracé. Un meilleur tracé nous aurait conduit à une estimation plus fine. L'inexactitude et l'imprécision sont les deux principaux défauts de cette méthode graphique. D'où la méfiance qu'elle m'inspire !

- ***Le système (S) peut être résolu par substitution***

Cette méthode semble être la préférée des programmes officiels. Elle est d'ailleurs relativement inefficace.
Elle consiste à partir d'une des deux équations à exprimer une inconnue en fonction de l'autre, puis dans la seconde équation à remplacer cette première inconnue par ce qu'elle vaut. On aboutit alors une équation du premier degré où n'apparaît que la seconde inconnue.
Mettons cette méthode en oeuvre sur notre système (S).
A partir de l'équation ***(1)***, nous décidons d'exprimer x en fonction de y.

$$3.x-5.y+7=0 \Leftrightarrow 3.x=5.y-7 \Leftrightarrow x=\frac{5.y-7}{3}$$

Dans l'équation ***(2)***, nous remplaçons x par ce qu'il vaut en y.

$$4.\underbrace{\left(\frac{5.y-7}{3}\right)}_{x}+6.y-5=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{20}{3}.y-\frac{28}{3}+6.y-5=0}_{\text{Une splendide équation du premier degré avec des fractions (heureux le monsieur !)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{38}{3}.y-\frac{43}{3}=0 \Leftrightarrow y=\frac{\frac{43}{3}}{\frac{38}{3}}=\frac{43}{38}$$

Pour déterminer x, il suffit de réutiliser son expression en fonction de y.

$$x=\frac{5\times\overbrace{\frac{43}{38}}^{y}-7}{3}=\frac{\frac{215}{38}-\frac{266}{38}}{3}=\frac{-\frac{51}{38}}{3}=-\frac{3\times 17}{3\times 38}=-\frac{17}{38}$$

A l'issue de calculs très simples avec les fractions, nous trouvons que la solution du système (S) est $\left(-\frac{17}{38};\frac{43}{38}\right)$. Ce sont les coordonnées du point d'intersection I.
Notre petite escapade appelle deux remarques. La première est qu'elle semble corroborer ce que nous avions trouvé par la voie graphique. La

seconde est que les calculs ont été très simples ! Mais non, je plaisante ! Sauf à aimer les calculs avec les fractions...

➲ ***Le système (S) peut être résolu par combinaisons linéaires.***
Cette méthode a tout pour elle : elle est efficace, rapide et surtout elle évite dans une large mesure le calcul avec les fractions. C'est pour ça que je l'♥♥♥♥ !
Le principe est ces combinaisons linéaires est le suivant : en multipliant les deux équations par ce qu'il faut, puis en les additionnant (ou les soustrayant) membres à membres, on obtient une équation d'où une des deux inconnues a disparu. Bref, une chose que nous savons résoudre !
Mettons cet adage en pratique. Nous décidons de déterminer l'inconnue x. Pour ce faire, nous devons donc éliminer l'autre inconnue y.

$$\begin{array}{rcr}
\textbf{(1)} : 3.x-5.y+7=0 & \xrightarrow{\times 6} & 18.x-30.y+42=0 \\
\oplus & & \\
\textbf{(2)} : 4.x+6.y-5=0 & \xrightarrow{\times 5} & 20.x+30.y-25=0 \\
\hline
& & 38.x+0.y+17=0 \\
& & 38.x+17=0 \\
& & x=-\dfrac{17}{38}
\end{array}$$

Pour obtenir y, nous pourrions prendre l'une des deux équations et remplacer x par sa valeur. On peut aussi refaire un coup de combinaisons linéaires. Pour déterminer y, nous devons éliminer x.

$$\begin{array}{rcr}
\textbf{(1)} : 3.x-5.y+7=0 & \xrightarrow{\times 4} & 12.x-20.y+28=0 \\
\ominus & & \\
\textbf{(2)} : 4.x+6.y-5=0 & \xrightarrow{\times 3} & 12.x+18.y-15=0 \\
\hline
& & 0.x+-38.y+43=0 \\
& & -38.y+43=0 \\
& & x=\dfrac{-43}{-38}=\dfrac{43}{38}
\end{array}$$

Conclusion : le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est $I\left(-\dfrac{17}{38};\dfrac{43}{38}\right)$

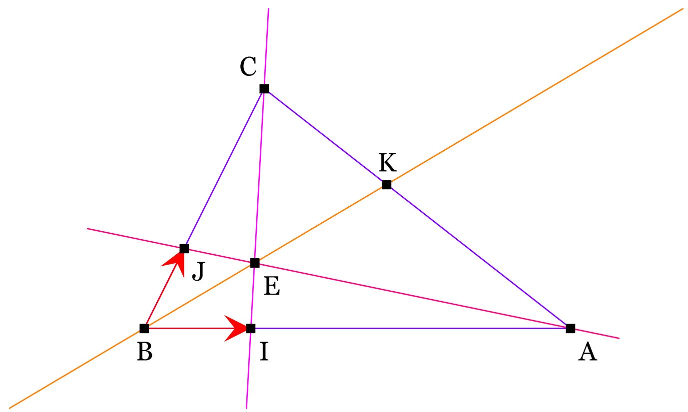
L'avantage de cette méthode par combinaisons linéaires par rapport à celle par substitution est que dans bien des cas, elle évite des calculs trop compliqués avec les fractions. C'est une méthode très efficace.
C'est aussi pour ces raisons que les équations cartésiennes de droites sont beaucoup plus intéressantes à manipuler que les équations réduites.
Mais cela, certains ne l'ont toujours pas compris...

Géométrie analytique en action...

En introduction de ce chapitre, nous avons déclaré que l'apport essentiel de la géométrie analytique était qu'en remplaçant des problèmes de points et de droites par des problèmes de nombres, elle simplifiait grandement les choses.
Nous allons comment cela sur le problème suivant :

ABC est un triangle quelconque. Le point I se trouve aux trois quarts du segment [AB] à partir de A, J au tiers de [BC] à partir de B et K aux trois cinquièmes de [AC] à partir de A.
Prouvons que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont trois droites concourantes, c'est-à-dire se croisant en un même point que nous appellerons E.

Graphiquement, la situation est la suivante :



La première chose à faire est de choisir un repère où il sera facile de travailler.
Au vu de la figure, nous optons pour le repère $\left(B;\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ}\right)$.

A présent, déterminons les coordonnées de tous les points dans celui-ci. Pour éviter toute erreur, nous allons nous appuyer sur la définition des coordonnées.
Nous devons rechercher des relations vectorielles de la forme :

$$\overrightarrow{BM} = \underbrace{\quad}_{\textit{absisse de M}}.\overrightarrow{BI} + \underbrace{\quad}_{\textit{ordonnée de M}}.\overrightarrow{BJ}$$

Pour n'oublier aucun point, nous les passerons en revue dans l'ordre alphabétique.

- De manière évidente, nous avons : $\underbrace{\overrightarrow{BA}}_{Origine-point} = 4.\overrightarrow{BI} = \underbrace{4.\overrightarrow{BI}+0.\overrightarrow{BJ}}_{Plus\ parlant...}$

  Donc le point A a pour coordonnées $(4;0)$ dans le repère $(B;\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ})$.

- Pour ce qui est de l'origine B : $\overrightarrow{BB} = \vec{0} = 0.\overrightarrow{BI}+0.\overrightarrow{BJ}$.
  Par conséquent, l'origine B a pour coordonnées $(0;0)$.

- Le point C est tel que : $\overrightarrow{BC} = 3.\overrightarrow{BJ} = \underbrace{0.\overrightarrow{BI}+3.\overrightarrow{BJ}}_{\text{L'ordre des vecteurs de base a son importance...}}$

  Donc les coordonnées de C dans le repère $(B;\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ})$ sont $(0;3)$.

- Pour le point I, nous avons : $\overrightarrow{BI} = 1.\overrightarrow{BI}+0.\overrightarrow{BJ}$
  Par suite, ses coordonnées sont $(1;0)$.

- De même, comme $\overrightarrow{BJ} = 0.\overrightarrow{BI}+1.\overrightarrow{BJ}$ alors J a pour coordonnées $(0;1)$.

- Pour déterminer les coordonnées du point K, nous pourrions chercher à exprimer le vecteur $\overrightarrow{BK}$ en fonction des vecteurs de base $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$. Mais il y a plus simple car nous savons que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}.\overrightarrow{AC}$.

  Appelons $(x_K;y_K)$ les coordonnées de K dans le repère $(B;\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ})$.

  Traduite sous forme de coordonnées, la relation vectorielle devient :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_K-4 \\ y_K-0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AK}} = \frac{3}{5}.\underbrace{\begin{pmatrix} 0-4 \\ 3-0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AC}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_K-4 \\ y_K \end{pmatrix} = \frac{3}{5}.\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_K-4 \\ y_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}4 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$$

  Or deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales. Ainsi avons-nous :
  - Mêmes abscisses : $x_K - 4 = -2{,}4 \Leftrightarrow x_K = -2{,}4+4 = 1{,}6$
  - Mêmes ordonnées : $y_K = 1{,}8$

  Conclusion : les coordonnées du point K sont $(1{,}6;1{,}8)$.

La suite du programme est la détermination des coordonnées du point d'intersection de deux des trois droites. Nous choisissons de travailler avec les droites (AJ) et (BK).

La première chose à voir est si elles sont réellement sécantes. Autrement dit, leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix} 0-4=-4 \\ 1-0=1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} 1{,}6-0=1{,}6 \\ 1{,}8-0=1{,}8 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Pour le savoir, calculons leur déterminant :

$$\det\left(\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{BK}\right) = \begin{vmatrix} -4 & 1{,}6 \\ 1 & 1{,}8 \end{vmatrix} = (-4)\times 1{,}8 - 1\times 1{,}6 = -7{,}2-1{,}6 = -8{,}8 \neq 0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BK}$ ne sont pas colinéaires. Donc les droites (AJ) et (BK) ne sont pas parallèles mais sécantes. Nous décidons d'appeler $E(x_E;y_E)$ leur point d'intersection.

Pour note, il était clair que les coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BK}$ ne pouvaient être colinéaires. Le déterminant l'a confirmé !

Devant déterminer les coordonnées de E, nous allons utiliser sa double appartenance aux droites (AJ) et (BK). Cela ne sera pas sans rappeler la recherche des équations cartésiennes de droites...

- Le point E appartenant à la droite (AJ), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} E(x_E;y_E)\in(AJ) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E-4 \\ y_E \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AJ}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_E-4 & -4 \\ y_E & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_E-4).1 - y_E.(-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_E+4.y_E-4=0 \end{aligned}$$

  Les coordonnées $(x_E;y_E)$ vérifient donc l'équation $x_E+4.y_E-4=0$.
  Si on faisait abstraction de l'indice E, on retrouverait une équation cartésienne de la droite (AJ)...

- De plus, E faisant partie de la droite (BK), nous avons :

$$\begin{aligned} E(x_E;y_E)\in(BK) &\Leftrightarrow \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} 1{,}6 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BK}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_E & 1{,}6 \\ y_E & 1{,}8 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1{,}8.x_E - 1{,}6.y_E = 0 \end{aligned}$$

  Les coordonnées de E sont aussi solutions de $1{,}8.x_E-1{,}6.y_E=0$.

Les coordonnées du point E sont donc l'unique solution du système 2×2 qu'est :

$$\begin{cases} x_E+4.y_E-5=0 & \textbf{\textit{(1)}} \\ 1{,}8.x_E-1{,}6.y_E=0 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

Ce système peut se résoudre par substitution ou par combinaisons linéaires. Aucune des deux méthodes n'est ici plus efficace que l'autre. Notre préférence naturelle nous conduit à opter pour la seconde.

Pour déterminer x, nous éliminons y

$$\begin{array}{lrl} \textbf{(1)} & \xrightarrow{\times 2} & 2.x_E + 8.y_E - 8 = 0 \\ \textbf{(2)} & \xrightarrow{\times 5} \oplus & 9.x_E - 8.y_E = 0 \\ \hline & & 11.x_E - 8 = 0 \\ & & x_E = \dfrac{8}{11} \end{array}$$

Pour déterminer y, nous éliminons x.

$$\begin{array}{lrl} \textbf{(1)} & \xrightarrow{\times 1,8} & 1.8.x_E + 7,2.y_E - 7,2 = 0 \\ \textbf{(2)} & \longrightarrow \ominus & 1,8.x_E - 1,6.y_E = 0 \\ \hline & & 8,8.y_E - 7,2 = 0 \\ & & y_E = \dfrac{7,2}{8,8} = \dfrac{0,8\times 9}{0,8\times 11} = \dfrac{9}{11} \end{array}$$

Les coordonnées du point E dans le repère $\left(B;\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BJ}\right)$ sont donc $\left(\frac{8}{11};\frac{9}{11}\right)$.

La dernière étape de notre raisonnement consiste à prouver que le point E appartient aussi à la troisième droite (CI). Pour cela, regardons si les vecteurs

$$\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix} \frac{8}{11}-1=-\frac{3}{11} \\ \frac{9}{11}-0=\frac{9}{11} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 0-1=-1 \\ 3-0=3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires.}$$

De manière assez évidente, les coordonnées de ces deux vecteurs sont proportionnelles. En effet, nous avons : $\overrightarrow{IE} = \frac{3}{11}.\overrightarrow{IC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires. Par suite, les points I,E et C sont alignés.

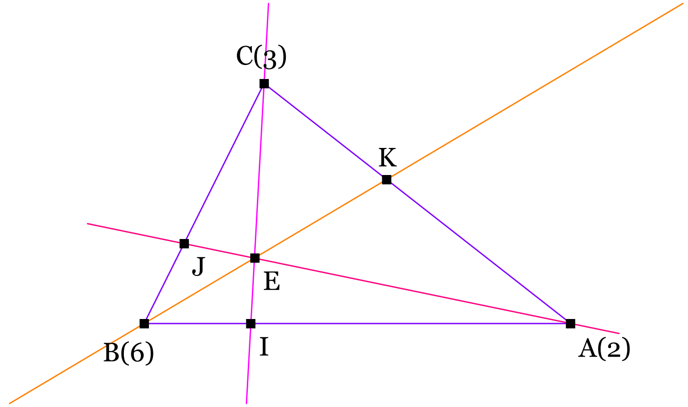
Conclusion : appartenant aux trois droites (AJ), (BK) et (CI), le point E est le point d'intersection. Les trois droites y sont donc concourantes.

La géométrie analytique nous a offert une solution certes longue mais finalement assez simple. Mais, notre problème peut être résolu de manière beaucoup plus fine et efficace en recourant aux barycentres. Il y a alors moins de calculs mais cette voie nécessite plus de flair.

La solution des barycentres

Par définition, le barycentre G des points pondérés (A,α) et (B,β) est le point défini par la relation vectorielle $\alpha.\overrightarrow{GA}+\beta.\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Pour prouver que les trois droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes, nous allons exhiber un barycentre particulier E des points pondérés A, B et C auxquels il faudra affecter leurs justes coefficients. Ce barycentre E aura aussi le bon goût d'appartenir aux trois droites (AJ), (BK) et (CI). A part moi-même, voici donc la tâche qui nous attend.



Nous savons que le point I est tel que $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{AB}$. Transformons cette relation vectorielle de façon à la rendre plus "barycentrique" en I !

$$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4.\overrightarrow{AI}=3.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4.\overrightarrow{AI}\underbrace{-3.\overrightarrow{AI}-3.\overrightarrow{IB}}_{-3.\overrightarrow{AB}}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}+3.\overrightarrow{BI}=\vec{0}$$

En remettant tout dans l'ordre, nous obtenons $\overrightarrow{IA}+3.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Autrement écrit, le point I est le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,3)$.

Passons au point J qui est défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{BC}$. Lui aussi va devenir un barycentre, en l'occurrence celui de B et C. Reste à trouver les coefficients pour ces derniers.

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{BJ}-\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{BJ}\underbrace{-\overrightarrow{BJ}-\overrightarrow{JC}}_{\overrightarrow{BC}}=\vec{0} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CJ}=\vec{0}$$

Ainsi J est-il le barycentre des points pondérés $(B,2)$ et $(C,1)$.

Enfin, barycentrisons le point K qui est situé aux trois cinquièmes du segment [AC].

$$\overrightarrow{AK}=\frac{3}{5}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{AK}\underbrace{-3.\overrightarrow{AK}-3.\overrightarrow{KC}}_{-3.\overrightarrow{AC}}=\vec{o} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{AK}+3.\overrightarrow{CK}=\vec{o}$$

Bref, le point K est le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(C,3)$.

A présent, nous décidons d'appeler E le barycentre des trois points pondérés $(A,2)$, $(B,6)$ et $(C,3)$. Par définition, nous avons donc :

$$2.\overrightarrow{EA}+6.\overrightarrow{EB}+3.\overrightarrow{EC}=\vec{o}$$

La question qui se pose est pourquoi introduire un tel point ?

C'est une bonne question dont la réponse repose en partie sur les trois points I, J et K. C'est en pensant à eux que les trois coefficients 2; 6 et 3 ont été choisis.

Comme le point I est le barycentre des points $(A,1)$ et $(B,3)$ alors $\overrightarrow{IA}+3.\overrightarrow{IB}=\vec{o}$.

Si nous multiplions cette relation par 2, elle devient $2.\overrightarrow{IA}+6.\overrightarrow{IB}=\vec{o}$.

Bref, le point I est aussi le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,6)$.

Autrement dit, les coefficients en A et B retenus pour le barycentre E. A ce propos, modifions la relation vectorielle définissant ce dernier.

$$2.\overrightarrow{EA}+6.\overrightarrow{EB}+3.\overrightarrow{EC}=\vec{o} \Leftrightarrow \underbrace{2.\overrightarrow{EI}+2.\overrightarrow{IA}}+\underbrace{6.\overrightarrow{EI}+6.\overrightarrow{IB}}+3.\overrightarrow{EC}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 8.\overrightarrow{EI}\ \underbrace{+2.\overrightarrow{IA}+6.\overrightarrow{IB}}_{\substack{=\vec{o}\\ \textit{car barycentre...}}}\ +3.\overrightarrow{EC}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 8.\overrightarrow{EI}+3.\overrightarrow{EC}=\vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{EI}=-\frac{3}{8}.\overrightarrow{EC}$$

Ainsi le point E est le barycentre des points pondérés $\underbrace{(I,8)}_{\textit{Pour }(A,2)\textit{ et }(B,6)}$ et $(C,3)$.

Mais surtout, la dernière relation vectorielle nous indique que les vecteurs $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que le point E appartient à la droite (CI).

Et ce qui a été fait avec le barycentre I peut être reproduit avec les points J et K. Ainsi :

- J est le barycentre des points pondérés $(B,2)$ et $(C,1)$. Donc :

$$2.\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{o} \Leftrightarrow \underbrace{6.\overrightarrow{JB}+3.\overrightarrow{JC}=\vec{o}}_{\textit{Tout a été multiplié par 3}}$$

  Par suite, la relation vectorielle définissant le barycentre E devient :

$$2.\overrightarrow{EA}+\underbrace{6.\overrightarrow{EJ}+6.\overrightarrow{JB}}_{6.\overrightarrow{EB}}+\underbrace{3.\overrightarrow{EJ}+3.\overrightarrow{JC}}_{3.\overrightarrow{EC}}=\vec{o} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{EA}+9.\overrightarrow{EJ}\underbrace{+6.\overrightarrow{JB}+3.\overrightarrow{JC}}_{=\vec{o}}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 2.\overrightarrow{EA}+9.\overrightarrow{EJ}=\vec{o}$$

  Bref, E est le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(J,9)$, les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EJ}$ sont colinéaires et surtout E appartient à la droite (AJ).

- K est le barycentre des points $(A,2)$ et $(C,3)$. Donc $2.\overrightarrow{KA}+3.\overrightarrow{KC}=\vec{o}$

  La relation vectorielle définissant le barycentre E devient alors :

$$\underbrace{2.\overrightarrow{EK}+2.\overrightarrow{KA}}_{2.\overrightarrow{EA}}+6.\overrightarrow{EB}+\underbrace{3.\overrightarrow{EK}+3.\overrightarrow{KC}}_{3.\overrightarrow{EC}}=\vec{o} \Leftrightarrow 6.\overrightarrow{EB}+5.\overrightarrow{EK}\underbrace{+2.\overrightarrow{KA}+3.\overrightarrow{KC}}_{=\vec{o}}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 6.\overrightarrow{EB}+5.\overrightarrow{EK}=\vec{o}$$

  Bref, E est le barycentre des points pondérés $(B,6)$ et $(K,5)$, les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires et surtout E appartient à la droite (BK).

Conclusion : le barycentre E appartenant aux trois droites (CI), (AJ) et (BK), celles-ci sont donc concourantes en ce point.

Précisons qu'à la différence de la solution analytique, celle reposant sur les barycentres repose sur une notion vue exclusivement en première. Par ailleurs, elle requiert une certaine expérience du calcul vectoriel. Comme quoi, c'est vraiment là-dessus que tout repose !

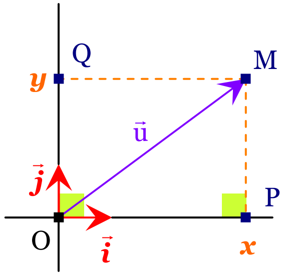
Le monde merveilleux des repères orthonormés

Ce que vous verrez en première scientifique...peut-être ?

Le roman de la norme et de la distance

Désormais et sauf mention contraire, les repères que nous considérerons seront supposés orthonormés. C'est-à-dire que les deux vecteurs constituant la base seront perpendiculaires et qu'ils auront pour norme 1.

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, est-il possible d'établir une formule donnant la norme d'un vecteur $\vec{u}$ en fonction de ses coordonnées $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$?
La réponse à cette question découle du théorème de Pythagore. Voyons cela !
On appelle M le point du plan défini par $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$. M a alors pour coordonnées $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.



P est le projeté du point M sur l'axe $(O;\vec{i})$ parallèlement à l'axe $(O;\vec{j})$. Q est le projeté de ce même point M sur l'axe des ordonnées parallèlement à celui des abscisses.

Comme le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé alors le parallélogramme OPMQ est un splendide rectangle. Le triangle OMP est donc rectangle en P. Par conséquent, le théorème de Pythagore lui est applicable. Il vient alors :

$$OM^2 = OP^2 + PM^2 = OP^2 + \underbrace{OQ^2}_{\text{car OPMQ est un parallélogramme}}$$

Or la distance OM est égale à la norme du vecteur $\vec{u}$.

De plus, P étant le projeté du point M sur l'axe $(O;\vec{i})$ parallèlement à $(O;\vec{j})$, nous avons la relation vectorielle $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{x}.\vec{i}$. C'est la définition des coordonnées d'un point. Quant aux normes de ces vecteurs, nous avons :

$$OP = \|\overrightarrow{OP}\| = \|\boldsymbol{x}.\vec{i}\| = |\boldsymbol{x}| \times \underbrace{\|\vec{i}\|}_{\text{=1 car repère orthonormé...}} = |\boldsymbol{x}|$$

De la même façon, nous avons pour le point Q la relation $\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{y}.\vec{j}$. Ce qui nous amène à :

$$OQ = \|\overrightarrow{OQ}\| = \|\boldsymbol{y}.\vec{j}\| = |\boldsymbol{y}| \times \|\vec{j}\| = |\boldsymbol{y}|$$

Notre égalité issue de Pythagore devient alors :

$$\underbrace{\|\vec{u}\|^2}_{OM} = \underbrace{|\boldsymbol{x}|^2}_{OP} + \underbrace{|\boldsymbol{y}|^2}_{OQ} = \underbrace{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}_{\text{La valeur absolue est inutile car le carré positive tout...}}$$

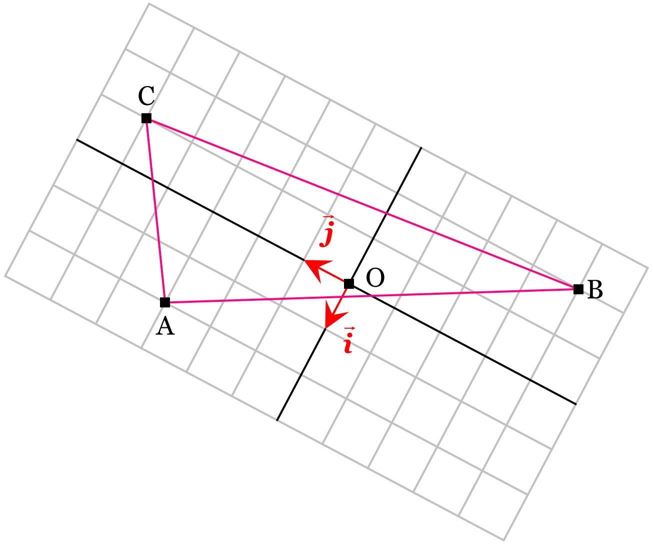
Par passage à la racine carrée, nous en déduisons le théorème suivant :

> ***Théorème donnant la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé***
>
> Si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ alors sa norme est donnée par :
>
> $$\|\vec{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}$$

Le théorème précédent permet de calculer la distance existant entre deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Elle est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.

> ***Théorème donnant la distance existant entre deux points dans un repère orthonormé***
>
> Dans un repère orthonormé, la distance existant entre les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ est donnée par :
>
> $$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Précisons que la distance entre A et B (tout comme la norme d'un vecteur $\vec{u}$) ne dépend pas du repère choisi. Les points étant fixes, si l'on change de repère orthonormé, ce sont les coordonnées de A et B qui changeront. Mais dans tous les cas, nous aboutirons à la même distance ou à la même norme.



Nos deux formules précédentes peuvent, par exemple, servir à établir si un triangle est rectangle ou non. Voyons comment avec la situation ci-contre:

Le triangle ABC y est-il rectangle ?

Pour le savoir, calculons les carrés des longueurs de ses trois côtés dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ où $A(2;3)$, $B(-2;-4)$ et $C(-1;5)$.

Puis Pythagore parlera !

- $AB^2 = \left(\sqrt{\underbrace{((-2)-2)}_{x_B - x_A}{}^2 + \underbrace{((-4)-3)}_{y_B - y_A}{}^2}\right)^2 = (-4)^2 + (-7)^2 = 16 + 49 = 65$
- $AC^2 = \left(\sqrt{((-1)-2)^2 + (5-3)^2}\right)^2 = (-3)^2 + (2)^2 = 9 + 4 = 13$
- $BC^2 = \left(\sqrt{((-1)-(-2))^2 + (5-(-4))^2}\right)^2 = (1)^2 + (9)^2 = 1 + 81 = 82$

BC étant le plus grand côté (il a le carré le plus grand), le triangle ABC ne peut être rectangle qu'en A. Or, il est clair que $\underbrace{AB^2 + AC^2}_{78} \neq \underbrace{BC^2}_{82}$. En application du théorème de Pythagore (ou de sa réciproque ?), nous concluons que le triangle n'est pas rectangle en A.

Si nous avons pu nous prononcer, c'est parce que nous avons travaillé dans un repère orthonormé. Sans ce dernier, nous n'aurions pu employer notre formule.

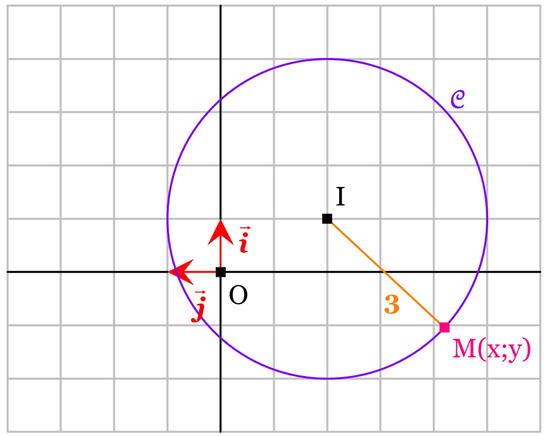
Des cercles et de leurs équations

Ici comme après, nous évoluerons dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A l'instar des droites, les cercles sont des ensembles de points. A l'image de ce que nous avons fait pour les droites, nous allons essayer de leur trouver des tests d'appartenance : à quelles conditions sur ses coordonnées un point $M(x;y)$ appartient-il à un cercle $\mathscr{C}$? Voilà l'objet de notre quête !

Le mieux pour nous est de travailler avec un cas particulier. Puis nous essaierons de généraliser nos découvertes particulières.

A quelle(s) condition(s) sur ses coordonnées un point $M(x;y)$ fait-il partie du cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(-2;3)$ et de rayon 3 ?



Le repère orthonormé ci-dessus a quelque chose d'exotique...

Par définition, le cercle $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M du plan dont la distance vis-à-vis de I est égale à 3. Traduisons ce fait avec des coordonnées !

$$\begin{aligned}
M(x;y) \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow \text{La distance IM est égale à } 3 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2}}_{\text{IM en repère orthonormé}} = 3 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9}_{\substack{\text{On a passé l'égalité au carré} \\ \text{Les deux membres étant positifs,} \\ \text{l'équivalence est préservée}}} \\
&\Leftrightarrow x^2 + 4.x + 4 + y^2 - 2.y + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4.x - 2.y - 4 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi dire que le point $M(x;y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ équivaut à dire que ses coordonnées vérifient l'équation $x^2+y^2+4.x-2.y-4=0$.

Cette équation est de la forme $\textit{tout}=0$. C'est une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$. C'est un test d'appartenance à celui-ci.

Et ce qui a été fait pour notre exemple, peut être refait pour n'importe quel autre cercle du plan. Ainsi pouvons nous affirmer :

Théorème sur les équations de cercles en repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, toute cercle $\mathcal{C}$ admet une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ où $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont trois réels. C'est un test d'appartenance à celle-ci.

A l'instar de ce qui s'était passé pour les droites, se pose alors la question réciproque : toute équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ se rapporte-t-elle toujours à un cercle ? Et si oui, quels sont ses centre et rayon ?
Pour le savoir, nous allons essayer de faire apparaître à partir l'équation une égalité de la forme $\text{Centre}-\text{point}=\text{rayon}$.

Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant $x^2+y^2+\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$.

$$M(x;y)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \underbrace{x^2+y^2+\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0}_{\textit{Il y a peut-être là le carré d'une distance IM}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2+\boldsymbol{a}.x}_{\textit{Début de l'identité remarquable }\left(x+\frac{a}{2}\right)^2} + \underbrace{y^2+\boldsymbol{b}.y}_{\textit{Début de l'identité remarquable }\left(y+\frac{b}{2}\right)^2} +\boldsymbol{c}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)^2}_{x^2+\boldsymbol{a}.x}+\underbrace{\left(y+\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)^2}_{y^2+\boldsymbol{b}.y}+\boldsymbol{c}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x+\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)^2}_{\textit{Nous avons là le carré d'une distance IM avec }I\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)} = \underbrace{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}}_{\textit{Mais ce truc ci peut-il être le carré d'un rayon ?}}$$

Seuls les nombres positifs et 0 sont des carrés. Donc, nous devons envisager plusieurs cas :

➲ Si la quantité $\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}$ est négative alors la dernière équation devient

$$M(x;y)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \underbrace{IM^2=\overbrace{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}}^{\textit{Négatif}}}_{\substack{\textit{Un carré n'est jamais négatif.}\\ \textit{Aucun point M ne peut la satisfaire}}}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ se résume à l'ensemble vide.

➲ Si le second membre $\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}$ est nul alors l'équivalence devient :

$$M(x;y)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \underbrace{IM^2=0}_{\textit{Le seul carré nul est celui de 0}} \Leftrightarrow \underbrace{IM=0}_{\substack{\textit{Les points I et M}\\ \textit{sont confondus}}}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ se résume au seul point $I\left(-\frac{\boldsymbol{a}}{2};-\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)$.

Nous pourrions dire que $\mathcal{E}$ est alors le cercle de centre I et de rayon 0.

➲ Si la quantité $\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}$ est positive alors elle est le carré de sa racine.

La dernière égalité se transforme pour devenir :

$$M(x;y)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow IM^2=\overbrace{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}}^{\textit{Positif}}$$

N'oublions pas une règle vue en troisième :
Deux nombres ont pour carré a :
sa racine et l'opposé de celle-ci.

$$\Leftrightarrow IM=\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}} \quad \textbf{\textit{ou}} \quad \underbrace{IM=-\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}}}_{\substack{\textit{Or la distance IM ne peut}\\ \textit{pas être négative.}\\ \textit{Ce cas n'existe pas !}}}$$

$$\Leftrightarrow IM=\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}}$$

Autrement dit, dire que M vérifie l'équation $x^2+y^2+\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$

équivaut à dire que sa distance vis-à-vis de $I\left(-\frac{\boldsymbol{a}}{2};-\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)$ est $\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}}$

Conclusion : $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $I\left(-\frac{\boldsymbol{a}}{2};-\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}}$.

Ainsi toute équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ ne se rapporte pas nécessairement à un cercle. Cela mérite bien un théorème !

Théorème à propos des équations cartésiennes de cercle

Pour qu'une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ soit celle d'un cercle $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que la quantité $\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}$ soit positive (ou nulle).

Le cercle $\mathcal{C}$ a alors pour centre le point $I\left(-\frac{\boldsymbol{a}}{2};-\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right)$ et pour rayon $\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}^2}{4}+\frac{\boldsymbol{b}^2}{4}-\boldsymbol{c}}$.

Il était une fois le produit scalaire...

Le produit scalaire ayant déjà été amplement maltraité que ce soit dans le plan, dans l'espace voire ailleurs, notre ambition actuelle se bornera à son utilisation dans le cadre de la géométrie analytique plane.

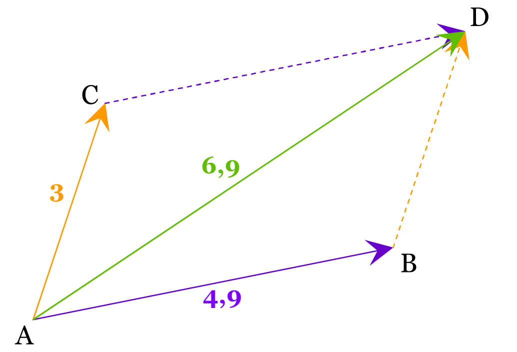
Le produit scalaire est une application (ou fonction) qui à deux vecteurs fait correspondre un scalaire, c'est-à-dire un réel. Il est défini par :

Définition du produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\underbrace{\vec{u}.\vec{v}}_{\text{"}\vec{u}\text{ scalaire }\vec{v}\text{"}}$ et défini par :

$$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}.\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$$

Par exemple, calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans la situation suivante :



Dans le parallélogramme ABDC, nous avons : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$. Par suite :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}.\left[\underbrace{\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2}_{\overrightarrow{AD}}-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\times\left[6{,}9^2-4{,}9^2-3^2\right]=\frac{1}{2}\times 14{,}6=7{,}3$$

De par sa définition, ce produit scalaire présente les propriétés suivantes :

- Le produit scalaire est commutatif c'est-à-dire $\vec{u}.\vec{v}=\underbrace{\vec{v}.\vec{u}}_{\textit{Ca commute !}}$.

  En effet : $\vec{v}.\vec{u}=\frac{1}{2}.\left[\|\vec{v}+\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2\right]=\underbrace{\frac{1}{2}.\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]}_{\textit{Les additions vectorielles et réelles sont commutatives}}=\vec{u}.\vec{v}$

  Certains vous diront aussi que le produit scalaire est symétrique.
- Le produit scalaire de tout vecteur avec lui-même (aussi appeler carré scalaire) est égal au carré de sa norme. Autrement dit : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

  Ceci car :

$$\vec{u}.\vec{u}=\frac{1}{2}.\left[\|\vec{u}+\vec{u}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{u}\|^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}.\left[\|2.\vec{u}\|^2-2.\|\vec{u}\|^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}.\left[\left(2\times\|\vec{u}\|\right)^2-2.\|\vec{u}\|^2\right]=\frac{1}{2}.\left[4\times\|\vec{u}\|^2-2.\|\vec{u}\|^2\right]=\frac{1}{2}\times 2.\|\vec{u}\|^2=\|\vec{u}\|^2$$

Expression du produit scalaire en repère orthonormé

Nous avons défini le produit scalaire à partir de la norme. Or dans un repère orthonormé, nous connaissons l'expression de cette dernière. Par son biais, nous allons chercher à exprimer le produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées.

Posons le décor : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs dont les coordonnées dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ sont respectivement $\underbrace{(x;y)}_{\vec{u}}$ et $\underbrace{(x';y')}_{\vec{v}}$. Donc les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Comme nous travaillons dans un repère orthonormé, nous pouvons écrire :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}.\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}.\underbrace{\left[\left(\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - \left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^2\right]}_{\text{Le carré élimine la racine...}}$$

$$= \frac{1}{2}.\left[(x+x')^2+(y+y')^2-\left(x^2+y^2\right)-\left(x'^2+y'^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}.\left[\underbrace{x^2+2.x.x'+x'^2}+\underbrace{y^2+2.y.y'+y'^2}-x^2-y^2-x'^2-y'^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}.[2.x.x'+2.y.y'] = \underbrace{\frac{1}{2}\times 2}_{=1}\times[x.x'+y.y'] = x.x'+y.y'$$

Connaissant les coordonnées de deux vecteurs dans un repère orthonormé, nous disposons désormais d'une formule nous donnant leur produit scalaire.

> ***Théorème exprimant le produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées dans un repère orthonormé***
>
> Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé quelconque alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est égal à $x.x'+y.y'$

Comme pour la norme, nous devons insister sur le fait que le produit scalaire de deux vecteurs ne dépend pas du repère orthonormé choisi. Quand on change de repère orthonormé, les coordonnées des deux vecteurs changent mais leur produit scalaire reste toujours le même.

Linéarité du produit scalaire

Le théorème précédent ouvre la porte à ce qu'on appelle la bilinéarité du produit scalaire. D'abord il permet de prouver que le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition vectorielle. En effet, si dans un repère orthonormé, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix}$ alors $\vec{v}+\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x'+x" \\ y'+y" \end{pmatrix}$.

Par suite, nous pouvons écrire :

$$\vec{u}.[\vec{v}+\vec{w}] = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{u}}.\underbrace{\begin{pmatrix} x'+x" \\ y'+y" \end{pmatrix}}_{\vec{v}+\vec{w}}$$

$$= \underbrace{x.(x'+x")+y.(y'+y")}_{\text{Produit scalaire en repère orthonormé}}$$

$$= \underbrace{x.x'+x.x"}_{\text{On distribue}} + \underbrace{y.y'+y.y"}_{\text{On redistribue}} = \overbrace{\underbrace{x.x'+y.y'}+\underbrace{x.x"+y.y"}}^{\text{On réordonne...}} = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$$

Le produit scalaire étant commutatif, ce qui peut être distribué par la gauche, peut l'être aussi par la droite.

Puis, le théorème précédent permet de démontrer que le produit scalaire laisse passer la multiplication d'un vecteur par un réel. En effet, pour tout réel $\boldsymbol{k}$:

$$(\boldsymbol{k}.\vec{u}).\vec{v} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}.x \\ \boldsymbol{k}.y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{k}.x.x'+\boldsymbol{k}.y.y' = \boldsymbol{k}.\underbrace{[x.x'+y+y']}_{\text{On reconnaît le produit scalaire } \vec{u}.\vec{v}} = \boldsymbol{k}.\vec{u}.\vec{v}$$

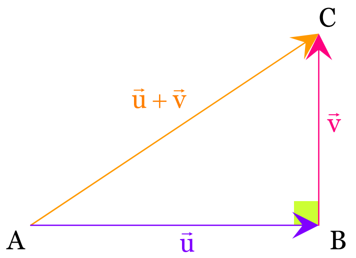
Ainsi le produit scalaire présente-t-il les propriétés suivantes :

> ***Théorème : la linéarité du produit scalaire***
>
> Le produit scalaire est distributif (à droite comme à gauche) par rapport à l'addition vectorielle. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, nous avons :
>
> $$\underbrace{\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}}_{\text{Distributivité à gauche}} \qquad \underbrace{(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{u}}_{\text{Distributivité à droite}}$$
>
> Le produit scalaire laisse passer la multiplication d'un vecteur par un réel.
>
> $$(\boldsymbol{k}.\vec{u}).\vec{v} = \boldsymbol{k}.(\vec{u}.\vec{v}) \qquad \vec{u}.(\boldsymbol{k}.\vec{v}) = \boldsymbol{k}.(\vec{u}.\vec{v})$$

Le produit scalaire de vecteurs orthogonaux est un gros nul !

Une des grandes qualités du produit scalaire est qu'il constitue un test d'orthogonalité pour deux vecteurs. Voyons le pourquoi et le comment de la chose !

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux (leurs directions sont perpendiculaires). Ils engendrent un triangle ABC qui est rectangle en B.



Le théorème de Pythagore est applicable à ce splendide triangle rectangle.

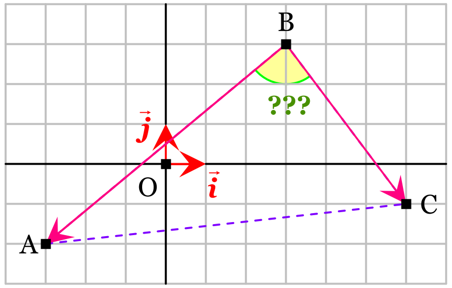
$$\begin{aligned}
\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} &\Leftrightarrow \text{Le triangle ABC est retangle en B}\\
&\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2\\
&\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\\
&\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0\\
&\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}.\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]}_{\vec{u}.\vec{v}} = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, deux vecteurs orthogonaux ont-ils leur produit scalaire nul !

> ***Théorème liant orthogonalité de deux vecteurs et leurs coordonnées***
>
> Ce qui suit n'est valable que dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
>
> Dire que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux <u>équivaut à dire que</u> leur produit scalaire $\vec{u}.\vec{v} = x.x'+y.y'$ est nul.

Ce théorème permet de savoir si oui ou non deux droites sont perpendiculaires.

Par exemple, dans la situation suivante, le triangle ABC est-il rectangle en B ?



Pour le savoir, calculons le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ à partir de des coordonnées de ces derniers dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}(-3)-3\\(-2)-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}6-3\\(-1)-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = (-6)\times 3 + (-5)\times(-4) = -18+20 = 2 \neq 0$$

Leur produit scalaire étant non nul, les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas orthogonaux. Donc le triangle ABC n'est pas rectangle en B.

Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'ils ont même direction. Pour peu que $\vec{u}$ soit non nul, une autre caractérisation possible de cet état de fait est qu'il existe un réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\vec{v} = \boldsymbol{k}.\vec{u}$. Injectons cela dans le produit scalaire de ces deux vecteurs !

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} &= \frac{1}{2}.\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]\\
&= \frac{1}{2}.\left[\|\vec{u}+\boldsymbol{k}.\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\boldsymbol{k}.\vec{u}\|^2\right]\\
&= \frac{1}{2}.\left[\|(1+\boldsymbol{k}).\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \boldsymbol{k}^2.\|\vec{u}\|^2\right]\\
&= \frac{1}{2}.\left[(1+\boldsymbol{k})^2\times\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \boldsymbol{k}^2.\|\vec{u}\|^2\right]\\
&= \frac{1}{2}.\left[\|\vec{u}\|^2 + 2.\boldsymbol{k}.\|\vec{u}\|^2 + \boldsymbol{k}^2.\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \boldsymbol{k}^2.\|\vec{u}\|^2\right]\\
&= \frac{1}{2}\times 2\times\boldsymbol{k}\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\| = \underbrace{\boldsymbol{k}\times\|\vec{u}\|}_{\textit{Presque la norme de } \vec{v}}\times\|\vec{u}\|
\end{aligned}$$

Normalement :
$$\underbrace{\|\boldsymbol{k}.\vec{u}\| = |\boldsymbol{k}|\times\|\vec{u}\|}_{\textit{Omission de la valeur absolue}}$$
Mais le carré est là pour tout positiver !

Là deux cas et demi doivent être envisagés :

- Si le vecteur $\vec{v}$ a même sens que $\vec{u}$ alors le coefficient $\boldsymbol{k}$ est positif et égal à sa valeur absolue $|\boldsymbol{k}|$. Par suite :

$$\vec{u}.\vec{v} = \boldsymbol{k}.\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\| = |\boldsymbol{k}|.\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\| = \|\boldsymbol{k}.\vec{u}\|\times\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|$$

- Si le sens de $\vec{v}$ est opposé à celui de $\vec{u}$ alors le réel $\boldsymbol{k}$ est négatif et est alors l'opposé de sa valeur absolue. En clair $\boldsymbol{k} = -|\boldsymbol{k}|$. Il vient alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \boldsymbol{k}.\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\| = \underbrace{-|\boldsymbol{k}|}_{\text{L'ppposé d'un positif est négatif}}.\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\| = -\|\boldsymbol{k}.\vec{u}\|\times\|\vec{u}\| = -\|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|$$

- Enfin si le vecteur $\vec{v}$ est nul alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ l'est aussi. En effet :

$$\vec{u}.\vec{0} = \frac{1}{2}.\left[\|\vec{u}+\vec{0}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{0}\|^2\right] = \frac{1}{2}.\left[\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - 0\right] = \frac{1}{2}\times 0 = 0$$

Mais cela était prévisible depuis la définition.

La conclusion de tout cela est que le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires se calcule aisément !

Théorème à propos du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

Le produit de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires est donné par :

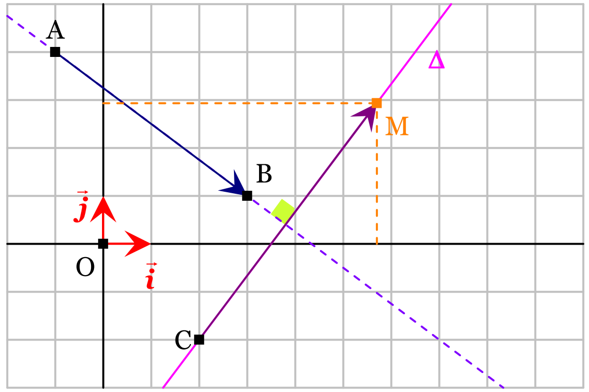
- S'ils ont même sens alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.
- S'ils ont des sens opposés alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$
- Si (au moins) l'un des deux est nul alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

A propos du vecteur normal

Un vecteur est dit <u>normal</u> à une droite si la direction de ce premier est perpendiculaire à la direction de cette seconde.

Une droite Δ qui est perpendiculaire à une autre droite donnée $\mathcal{D}$ et qui passe par un point précis, est parfaitement définie. C'est la simple application de la règle : "Il existe une seule perpendiculaire à une droite passant par un point donné".

Cette autre droite $\mathcal{D}$ peut être remplacée par l'un de ses vecteurs directeurs : celui est alors un vecteur normal de la droite Δ. Car seule leur direction nous intéresse. En définitive, une droite Δ est parfaitement définie par l'un de ses points et l'un de ses vecteurs normaux. L'intérêt de cette substitution est qu'elle permet d'obtenir assez rapidement une équation pour la droite Δ. Voyons cela avec l'exemple suivant :



L'histoire se passe dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. La droite Δ est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C.

Déterminons une équation cartésienne de cette perpendiculaire Δ.

La première chose que nous dirons est que les directions du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de la droite Δ étant perpendiculaires, le premier est un vecteur normal de la seconde.

Ensuite, dire qu'un point M appartient à la droite Δ équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ (même direction que Δ) et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

Or deux vecteurs orthogonaux ont leur produit scalaire nul. Travaillant dans repère orthonormé, nous connaissons l'expression de ce dernier. Bref, nous avons trouvé un filon. Exploitons-le !

$$\begin{aligned}
M(x,y)\in &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-2\\y+2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}\\
&\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0}_{\text{Produit scalaire nul !}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y+2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow \underbrace{(x-2)\times 4+(y+2)\times(-3)=0}_{\text{Vivent les repères orthonormés !}}\\
&\Leftrightarrow 4.x-8-3.y-6=0 \Leftrightarrow 4.x-3.y-14=0
\end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne de la perpendiculaire Δ est $4.x-3.y-14=0$.

Comme quoi, il n'y a pas que les vecteurs directeurs qui conduisent aux équations cartésiennes de droites.

Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite

Mais l'apport du vecteur normal ne se limite pas aux perpendiculaires. En effet, il permet d'établir dans un repère orthonormé une formule donnant la distance entre un point connu par ses coordonnées et une droite dont on sait l'une des équations cartésiennes.

Mais avant tout cela, il est un résultat que nous devons énoncer et démontrer.

Théorème donnant un vecteur normal d'une droite dont on connaît une équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, un vecteur normal de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$.

Ceci car un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\end{pmatrix}$. Effectuons son produit scalaire avec notre candidat à la normalité qu'est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$.

$$\vec{n}.\vec{u}=\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}\times(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}}_{\text{Nous travaillons dans un repère orthonormé...}}=-\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}=0$$

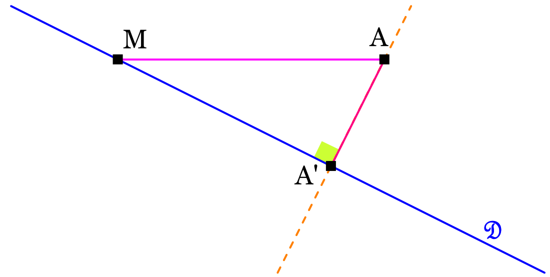
Leur produit scalaire étant nul, les vecteurs $\vec{n}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Par conséquent, la direction de $\vec{n}$ est perpendiculaire à celle de $\mathcal{D}$. Ce qui fait de ce premier un vecteur normal de cette seconde.

Distance entre un point et une droite dans un repère orthonormé

Poursuivons notre progression. La distance entre un point A et une droite $\mathcal{D}$ est la distance minimale existant entre notre point A et chacun des points M de la droite $\mathcal{D}$.

Cette distance minimale est atteinte lorsque le point M est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$. Appelons A' ce projeté orthogonal.



Certaines âmes incrédules nous interpellerons en nous sommant de le prouver !

Eh bien, voici pourquoi la distance est minimale en A et A'.

Quelque soit le point M de la droite $\mathcal{D}$ considéré, le triangle AA'M est rectangle en A'. Le théorème de Pythagore lui est donc applicable. Aussi avons-nous :

$$AM^2=AA'^2+\underbrace{A'M^2}_{\text{Nombre positif}}$$

Donc le carré de AM est supérieur au carré de AA'. Or nous parlons de distances c'est-à-dire de nombres positifs ou nuls. Par conséquent, la distance AM est nécessairement toujours plus grande que la distance AA'.

Conclusion : la distance entre le point A et chacun des points de la droite $\mathcal{D}$ est minimale lorsque M est projeté orthogonal A' de A sur $\mathcal{D}$. Autrement écrit :

$$\boldsymbol{d}(A;\mathcal{D})=AA'$$

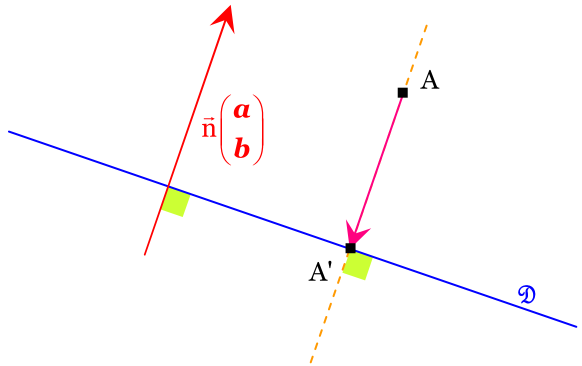
A présent, nous disposons de tous les ingrédients permettant d'établir une formule donnant la distance dans un repère orthonormé entre un point connu par ses coordonnées et une droite déterminée par l'une ses équations. Plantons le décor de nos ébats finaux !

Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, nous allons déterminer la distance entre le point $A(x_A;y_A)$ et le droite $\mathcal{D}$ d'équation $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$.

Appelons A' le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$.

Un vecteur normal de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$.

Ce dernier vecteur est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}x_{A'}-x_A\\ y_{A'}-y_A\end{pmatrix}$.



Le produit scalaire des vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AA'}$ peut s'écrire de deux manières :
D'une part, ces deux vecteurs sont colinéaires :

$$\vec{n}.\overrightarrow{AA'} = \pm\|\vec{n}\|\times\|\overrightarrow{AA'}\| = \pm\underbrace{\left[\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}\right]}_{\textit{Repère orthonormé}}\times AA'$$

De l'autre, leur produit scalaire peut se calculer à partir de leurs coordonnées.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_{A'}-x_A\\y_{A'}-y_A\end{pmatrix} = \boldsymbol{a}.(x_{A'}-x_A)+\boldsymbol{b}.(y_{A'}-y_A)$$

$$= \underbrace{\boldsymbol{a}.x_{A'}+\boldsymbol{b}.y_{A'}}_{=-c} - \boldsymbol{a}.x_A-\boldsymbol{b}.y_A = -[\boldsymbol{a}.x_A+\boldsymbol{b}.y_A+\boldsymbol{c}]$$

car A' appartient à la droite 𝔇.
Donc ses coordonnées en vérifient
*l'équation **a**.x+**b**.y+**c** = 0*

Concaténons ses égalités :

$$\pm\left[\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}\right]\times AA' = \vec{n}.\overrightarrow{AA'} = -[\boldsymbol{a}.x_A+\boldsymbol{b}.y_A+\boldsymbol{c}]$$

Les obstacles à notre avance sont les signes moins plus ou moins potentiels.
Eliminons-les en passant cette double égalité à la valeur absolue. En trois mots, on positive tout !

$$\left[\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}\right]\times AA' = |\vec{n}.\overrightarrow{AA'}| = |\boldsymbol{a}.x_A+\boldsymbol{b}.y_A+\boldsymbol{c}|$$

$$\left[\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}\right]\times AA' = |\boldsymbol{a}.x_A+\boldsymbol{b}.y_A+\boldsymbol{c}|$$

$$AA' = \frac{|\boldsymbol{a}.x_A+\boldsymbol{b}.y_A+\boldsymbol{c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}$$

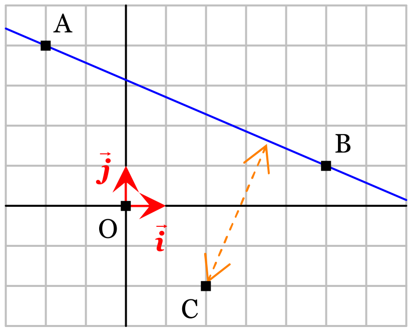
Cette dernière étape conclut notre offensive. Car désormais, nous savons calculer dans un repère orthonormé la distance entre un point et une droite.

Théorème donnant la distance entre un point et une droite en repère orthonormé

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la distance entre le point $A(x_A;y_A)$ et la droite 𝔇 dont une équation cartésienne est $\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$, est donnée par :

$$\boldsymbol{d}(A;\mathfrak{D}) = \frac{|\boldsymbol{a}.x_A+\boldsymbol{b}.y_A+\boldsymbol{c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}}$$

Mettons cette superbe formule, symbole de notre gloire, en oeuvre !
Déterminons la distance existant entre le point C et la droite (AB).



Pour commencer, déterminons une équation cartésienne de la droite (AB).

$$M(x;y)\in(AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-4\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{vmatrix}x+2 & 7\\y-4 & 3\end{vmatrix}}_{\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\times 3-(y-4)\times 7 = 0$$

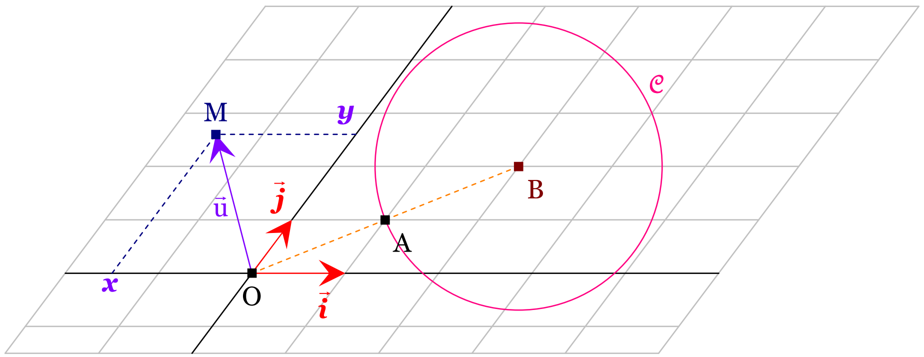
Ainsi une équation cartésienne de (AB) est $3.x-7.y+34=0$. Ensuite :

$$\boldsymbol{d}(C;(AB)) = \frac{|3.x_C-7.y_C+34|}{\sqrt{(3)^2+(-7)^2}} = \frac{|3\times(-2)-7\times(-2)+34|}{\sqrt{9+49}} = \frac{|-6+14+34|}{\sqrt{9+49}} = \frac{42}{\sqrt{58}}$$

Parce que nous avons travaillé dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, nous pouvons clamer que la distance entre le point C et la droite (AB) est de $\dfrac{42}{\sqrt{58}}$.

La vie au-delà des repères orthonormés ?

A l'exception des équations de droite, toutes les formules que nous venons de voir pour la norme, le produit scalaire ou les équations cartésiennes de cercle ne sont valables que dans des repères orthonormés. Mais au-delà de ceux-ci, le charme s'estompe-t-il ? Est-il possible de trouver une formule donnant la norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées lorsque le repère n'est pas orthonormé ? Et puis, qu'advient-il des équations cartésiennes du type $x^2+y^2+\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{c}=0$? Se rapportent-elles toujours à des cercles ?
Plutôt que de nous lancer dans une étude théorique, nous allons voir ce qu'il en est avec le cas particulier suivant :



Dans la situation ci-dessus, le vecteur $\vec{i}$ a pour norme 7, le vecteur $\vec{j}$ a pour norme 5 et la distance OA est égale à $\sqrt{116}=2.\sqrt{29}$.

Le repère non orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ dans lequel nous allons travailler s'appuie sur le parallélogramme $\left(O,\vec{i},\vec{j},A\right)$.

Dans ce repère, nous allons essayer d'établir des formules nous donnant norme et produit scalaire. Nous essaierons aussi de voir quelles têtes ont les équations cartésiennes de cercle avec le cas de notre cercle $\mathscr{C}$ de centre B et qui passe par A.
Sans tarder, passons en revue ces trois questions qui hantent mes nuits :

➲ ***Déterminons une formule donnant la norme d'un vecteur $\vec{u}$ à partir de ses coordonnées $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.***

D'entrée, nous avons la relation vectorielle : $\vec{u}=\boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{y}.\vec{j}$.
Pour parvenir à notre objectif, nous allons utiliser le carré scalaire et aussi la distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition.

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u}\right\|^2 &= \vec{u}.\vec{u}\\ &= \underbrace{\left(\boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{y}.\vec{j}\right).\left(\boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{y}.\vec{j}\right)}_{\text{On détaille et on développe...}}\\ &= \boldsymbol{x}.\vec{i}.\boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{x}.\vec{i}.\boldsymbol{y}.\vec{j}+\boldsymbol{y}.\vec{j}.\boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{y}.\vec{j}.\boldsymbol{y}.\vec{j}=\boldsymbol{x}^2.\vec{i}^2+2.\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}.\vec{i}.\vec{j}+\boldsymbol{y}^2.\vec{j}^2\end{aligned}$$

Afin d'aller plus loin, nous devons connaître les produits scalaires des vecteurs de base.

D'abord $\vec{i}^2=\left\|\vec{i}\right\|^2=7^2=49$. nsuite $\vec{j}^2=\left\|\vec{j}\right\|^2=5^2=25$.

Et enfin :

$$\begin{aligned}\vec{i}.\vec{j}&=\frac{1}{2}.\left[\underbrace{\left\|\vec{i}+\vec{j}\right\|^2}_{OA}-\left\|\vec{i}\right\|^2-\left\|\vec{j}\right\|^2\right]\\ &=\frac{1}{2}\times\left[\sqrt{116}^2-7^2-5^2\right]=\frac{1}{2}\times\left[116-49-25\right]=\frac{1}{2}\times 42=21\end{aligned}$$

Par suite, il vient :

$$\left\|\vec{u}\right\|^2=\boldsymbol{x}^2\times\underbrace{49}_{\vec{i}^2}+2.\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}\times\underbrace{21}_{\vec{i}.\vec{j}}+\boldsymbol{y}^2\times\underbrace{25}_{\vec{j}^2}=49.\boldsymbol{x}^2+42.\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}+25.\boldsymbol{y}^2$$

Finalement, nous pouvons conclure :

> ***Conclusion :*** la norme du vecteur $\vec{u}$ dont les coordonnées dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ sont $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}$, est donnée par :
>
> $$\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{49.\boldsymbol{x}^2+42.\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}+25.\boldsymbol{y}^2}$$

Cette formule n'est pas aussi sympathique que celle existant dans les repères orthonormés. Mais, à bien y regarder, elle n'est pas si monstrueuse que cela. C'est d'ailleurs par son biais que nous allons calculer la distance AB.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ayant pour coordonnées $(1;1)$, nous pouvons écrire :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{49\times1^2+42\times1\times1+25\times1} = \sqrt{49+42+25} = \sqrt{116}$$

Ce qui est absolument normal vu que A est le milieu de [OB].

➲ *Déterminons une équation du cercle $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.*

Il s'agit de savoir à quelle(s) condition(s) sur ses coordonnées un point $M(x;y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre $B(2;2)$ passant par $A(1;1)$.

A l'instar de ce qui a été fait dans les repères orthonormés, nous allons utiliser le fait que le cercle $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points du plan dont la distance vis-à-vis du centre B est égale au rayon $AB=\sqrt{116}$.

$M(x;y)\in\mathcal{C} \Leftrightarrow$ La distance BM est égale à AB

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{49.(x-2)^2+42.(x-2).(y-2)+25.(y-2)^2}}_{\substack{\text{La distance dans le repère }(O;\vec{i},\vec{j})\\ \text{Le vecteur }\overrightarrow{BM}\text{ a pour coordonnées }\binom{x-2}{y-2}}} = \sqrt{116}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{49.(x-2)^2+42.(x-2).(y-2)+25.(y-2)^2 = 116}_{\substack{\text{On passe l'égalité au carré}\\ \text{Les deux membres étant positifs, l'équivalence est préservée}}}$$

$$\Leftrightarrow 49.\left[x^2-4.x+4\right]+42.\left[x.y-2.x-2.y+4\right] +25.\left[y^2-4.y+4\right]=116$$

$$\Leftrightarrow 49.x^2-196.x+196+42.x.y-84.x-84.y+168 +25.y^2-100.y+100=116$$

$$\Leftrightarrow 49.x^2+25.y^2+42.x.y-280.x-184.y+348=0$$

Ainsi pouvons-nous conclure :

> ***Conclusion :*** une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est :
>
> $$49.x^2+25.y^2+42.x.y-280.x-184.y+348=0$$

Là encore, c'est un petit peu plus compliqué que ce nous avions obtenu dans les repères orthonormés. Il y a un peu plus de termes...

L'équation du cercle $\mathcal{C}$ que nous avons trouvée est un test d'appartenance à celui-ci. D'après la figure, le point D de coordonnées $(3;3)$ semble appartenir au cercle $\mathcal{C}$. Vérifions-le avec son équation cartésienne. Dans le premier membre de celle-ci, on remplace x et y par les coordonnées de D.

$$\begin{aligned}&49.x_D^2+25.y_D^2+42.x_D.y_D-280.x_D-184.y_D+348\\ &=49\times3^2+25\times3^2+42\times3\times3-280\times3-184\times3+348\\ &=441+225+378-840-552+348\\ &=1392-1392=0\end{aligned}$$

Ses coordonnées vérifiant l'équation du cercle $\mathcal{C}$, le point D en fait donc partie.

➲ *Déterminons une formule donnant le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ en fonction de leurs coordonnées dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.*

Connaissant les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, nous avons les relations vectorielles :

$$\vec{u}=\boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{y}.\vec{j} \text{ et } \vec{v}=\boldsymbol{x'}.\vec{i}+\boldsymbol{y'}.\vec{j}\,.$$

De plus, nous savons que le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition vectorielle. Par suite, il vient :

$$\vec{u}.\vec{v}=\underbrace{\overbrace{\left(\boldsymbol{x}.\vec{i}+\boldsymbol{y}.\vec{j}\right)}^{\vec{u}}.\overbrace{\left(\boldsymbol{x'}.\vec{i}+\boldsymbol{y'}.\vec{j}\right)}^{\vec{v}}}_{\substack{\text{On procède à un double}\\ \text{développement classique...}}} = \underbrace{\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x'}.\underbrace{\vec{i}.\vec{i}}_{=49}+\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y'}.\underbrace{\vec{i}.\vec{j}}_{=21}+\boldsymbol{y}.\boldsymbol{x'}.\underbrace{\vec{j}.\vec{i}}_{=21}+\boldsymbol{y}.\boldsymbol{y'}.\underbrace{\vec{j}.\vec{j}}_{=25}}_{\substack{\text{Ces produits scalaires entre vecteurs de base ont}\\ \text{déjà été calculés lorsque nous nous sommes}\\ \text{intéressés à la norme}}}$$

Les choses ont été rapides mais nous avons notre formule.

> ***Conclusion :*** le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est donné par :
>
> $$\vec{u}.\vec{v}=49.\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x'}+21.\left(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y'}+\boldsymbol{y}.\boldsymbol{x'}\right)+25.\boldsymbol{y}.\boldsymbol{y'}$$

Les formules que nous venons d'établir dans le cas particulier de notre repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ préfigurent ce qui existe en général. Nos trois raisonnements peuvent être reproduits dans n'importe quel repère pour peu que l'on dispose de certains renseignements comme les normes des deux vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$, et le produit scalaire $\vec{i}.\vec{j}$.

Ce qu'il restera de toutes nos aventures...

La conclusion de tous nos ébats, est qu'en toutes circonstances, quelque soit le repère choisi, il est possible de trouver des expressions aux norme et produit scalaire ainsi que des équations aux cercles. Cependant leurs formes sont plus compliquées que si le repère était orthonormé.

Nous inspirant de ce que nous avons fait, il est apparaît que dans un repère quelconque $(O;\vec{i},\vec{j})$, si on pose :

$$\boldsymbol{a} = \vec{i}^2 = \|\vec{i}\|^2 \qquad \boldsymbol{b} = \vec{i}.\vec{j} \qquad \boldsymbol{c} = \vec{j}^2 = \|\vec{j}\|^2$$

➲ L'expression de la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{x}^2 + 2.\boldsymbol{b}.\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}.\boldsymbol{y}^2}$$

➲ L'expression du produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x'}\\ \boldsymbol{y'}\end{pmatrix}$ est :

$$\vec{u}.\vec{v} = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{x}.\boldsymbol{x'} + \boldsymbol{b}.(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y'} + \boldsymbol{y}.\boldsymbol{x'}) + \boldsymbol{c}.\boldsymbol{y}.\boldsymbol{y'}$$

➲ Toute équation cartésienne d'un cercle est de la forme :

$$\boldsymbol{a}.x^2 + 2.\boldsymbol{b}.x.y + \boldsymbol{c}.y^2 + \ldots x + \ldots y + \ldots = 0$$

Lorsque le repère est orthonormé, les coefficients $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ sont égaux à 1. Quant à $\boldsymbol{b}$, il est nul vu que les deux vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux. On retrouve alors les formules démontrées précédemment.

Comme quoi, la monde des repères orthonormés est peut être bien une petite merveille...

Numériser le plan : l'arme absolue ?

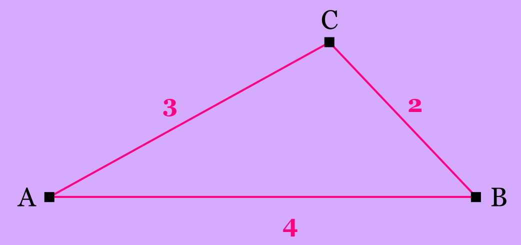
Le problème traité à la fin du premier chapitre nous a montré que numériser le plan apportait une solution peu compliquée bien que longue. Il nous a aussi prouvé que la voie analytique n'était pas toujours la plus efficace car le calcul vectoriel et les barycentres offraient une alternative intéressante.

Une des grosses marottes des matheux est la recherche de la nature d'un ensemble de points vérifiant une certaine égalité. C'est un problème de ce type que nous allons essayer de résoudre par la voie analytique. Puis nous essaierons de voir si le barycentre ne permet pas d'aller plus vite.

Le texte de notre mission !

ABC est un sympathique triangle du plan ayant pour mesures :

AB = 4 AC = 3 BC = 2



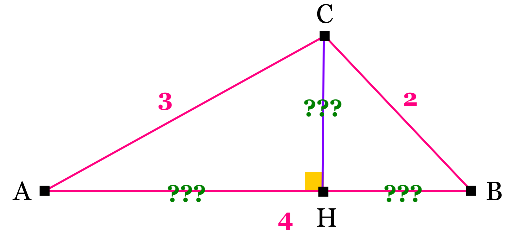
Déterminons l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant l'équation :

$$3.AM^2 - 4.BM^2 + 2.CM^2 = 26$$

La voie analytique : la numérisation du problème

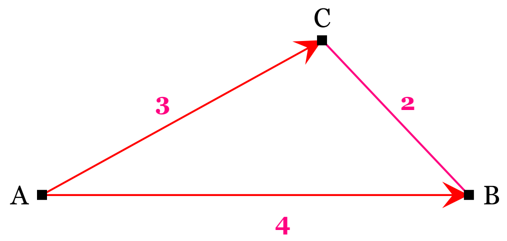
Choisir la voie analytique exige de choisir un repère adapté à notre travail.

Un repère idéal serait un repère orthonormé. Sauf que dans notre situation, il n'y en a pas d'évident. Bien sûr, nous pourrions introduire un quatrième point H qui serait le projeté orthogonal de C sur la droite (AC) et ainsi évoluer dans un repère dont H serait l'origine et (HB) et (HC) les axes de coordonnées.



Le problème de cette telle démarche est qu'ignorant les valeurs exactes des distances HA, HB et HC, nous ne pourrions connaître les coordonnées exactes des points A, B et C. Evéidemment, nous pourrions les calculer mais il n'est pas dit que nous trouverions des valeurs sympathiques. C'est pourquoi nous allons opter pour un repère non orthonormé. Nous décidons de travailler dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Dans ce repère, l'origine A a pour coordonnées $(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$.



L'égalité caractérisant l'ensemble $\mathcal{E}$ repose sur les distances. Le repère choisi n'étant pas orthonormé, la formule concernant la norme vue en début de chapitre ne s'appliquent pas. Nous devons donc déterminer une formule donnant la norme d'un vecteur en fonction de ses coordonnées dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. En d'autres termes, nous allons reproduire dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ le raisonnement fait lors du précédent paragraphe.

Si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ alors :

$$\vec{u}=\boldsymbol{x}.\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{y}.\overrightarrow{AC}$$

La norme d'un vecteur est égale à la racine carrée de son carré scalaire. Ainsi :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{\underbrace{\vec{u}.\vec{u}}_{\textit{Produit scalaire}}}\\ &= \sqrt{\underbrace{\left(\boldsymbol{x}.\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{y}.\overrightarrow{AC}\right).\left(\boldsymbol{x}.\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{y}.\overrightarrow{AC}\right)}_{\textit{On procède à un double développement scalaire}}}\\ &= \sqrt{\boldsymbol{x}^2.\overrightarrow{AB}^2+2.\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{y}^2.\overrightarrow{AC}^2}\end{aligned}$$

Le carré scalaire $\overrightarrow{AB}^2$ est égal au carré de la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire au carré de la longueur AB. Autrement dit : $\overrightarrow{AB}^2=AB^2=16$.

De la même manière, le carré scalaire $\overrightarrow{AC}^2$ vaut $AC^2=9$.

Il nous reste à déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. Pour ce faire, il nous faudrait la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Sauf nous n'avons pas ce renseignement ! Par contre, nous connaissons la longueur BC et nous savons aussi que le produit scalaire laisse passer la multiplication d'un vecteur par un réel. Nous allons utiliser ces deux faits.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \underbrace{-\overrightarrow{BA}}_{\overrightarrow{AB}}.\overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{1}{2}.\left[\left\|\underbrace{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{BC}}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right]\\ &= -\frac{1}{2}.\left[2^2-4^2-3^2\right]=-\frac{1}{2}.[4-16-9]=-\frac{1}{2}\times(-21)=10{,}5\end{aligned}$$

Première conclusion : la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est donnée par :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{16.\boldsymbol{x}^2+21.\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}+9.\boldsymbol{y}^2}$$

A partir de cet énoncé, nous pouvons en déduire une formule donnant le carré de la distance entre un point $M(x;y)$ et un point que nous appellerons $I(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$.

$$\begin{aligned}IM^2 &= \left\|\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-\boldsymbol{a}\\ y-\boldsymbol{b}\end{pmatrix}\right\|^2\\ &= \left(\sqrt{16.(x-\boldsymbol{a})^2+21.(x-\boldsymbol{a}).(y-\boldsymbol{b})+9.(y-\boldsymbol{b})^2}\right)^2\\ &= 16.\left[x^2-2.\boldsymbol{a}.x+\boldsymbol{a}^2\right]+21.\left[x.y-\boldsymbol{b}.x-\boldsymbol{a}.y+\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}\right]+9.\left[y^2-2.\boldsymbol{b}.y+\boldsymbol{b}^2\right]\\ &= 16.x^2+\left[-32.\boldsymbol{a}-21.\boldsymbol{b}\right].x++9.y^2+\left[-21.\boldsymbol{a}-18.\boldsymbol{b}\right].y+21.x.y\\ &\quad +16.\boldsymbol{a}^2+21.\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}+9.\boldsymbol{b}^2\end{aligned}$$

Nous préparons le terrain pour la grande manoeuvre à venir. Retenez bien cette formule (bonne chance !) car nous la réutiliserons plus tard !

Nous disposons à présent de tous les instruments pour numériser l'égalité définissant l'ensemble $\mathcal{E}$.

$$M(x;y)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow 3.AM^2-4.BM^2+2.CM^2=26$$

$$\Leftrightarrow 3.\left\|\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\|^2-4.\left\|\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y\end{pmatrix}\right\|^2+2.\left\|\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}\right\|^2=26$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3.\left[16.x^2+21.x.y+9.y^2\right]-4.\left[16.(x-1)^2+21.(x-1).y+9.y^2\right]\\ \qquad +2.\left[16.x^2+21.x.(y-1)+9.(y-1)^2\right]=26\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3.\left[16.x^2+21.x.y+9.y^2\right]\\ -4.\left[16.x^2-32.x+16+21.x.y-21.y+9.y^2\right]\\ +2.\left[16.x^2+21.x.y-21.x+9.y^2-18.y+9\right]=26\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\underline{48.x^2+63.x.y+27.y^2}\\ \underline{-64.x^2+128.x-64-84.x.y+84.y-36.y^2}\\ \underline{+32.x^2+42.x.y-42.x+18.y^2-36.y+18=12}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 16.x^2+86.x+9.y^2+48.y+21.x.y-72=0$$

A l'issue d'une chevauchée assez fantastique et longue, faite de calculs assez périlleux, nous avons débouché sur une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Cette équation $16.x^2+86.x+9.y^2+48.y+21.x.y-72=0$ semble être une équation cartésienne de cercle.

Un possible cercle dont il va nous falloir déterminer les coordonnées du centre et le rayon ! Une vraie promenade de santé en perspective !

C'est là que le travail préparatoire effectué précédemment sur le carré de la distance IM va être utile. Nous allons essayer de faire apparaître IM^2 dans l'équation $16.x^2+86.x+9.y^2+48.y+21.x.y-72=0$. Tout le problème sera l'identification des coordonnées $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ du point I.

$$\overbrace{\underbrace{16.x^2+9.y^2+21.x.y}_{\text{Pas de problème}}+\underbrace{86}_{-32.\boldsymbol{a}-21.\boldsymbol{b}}.x+\underbrace{48}_{-21.\boldsymbol{a}-18.\boldsymbol{b}}.y}^{\text{Tout cela est le début du carré d'une distance IM...}}-72=0$$

Autrement les éventuelles coordonnées $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ de l'éventuel centre I de notre éventuel cercle sont les solutions du système 2×2 :

$$\begin{cases}-32.\boldsymbol{a}-21.\boldsymbol{b}=86 & \textbf{(1)}\\ -21.\boldsymbol{a}-18.\boldsymbol{b}=48 & \textbf{(2)}\end{cases}$$

Ce système se résout aisément par combinaisons linéaires. Après calculs, on trouve :

$$\boldsymbol{a}=-4 \qquad \boldsymbol{b}=2$$

Ainsi le début de l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{E}$ est bien un carré de la distance IM où le point I a pour coordonnées $(-4;2)$. Tout cela ouvre une perspective circulaire dans laquelle nous ne pouvons que nous engouffrer !

$$M(x;y)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \underbrace{16.x^2+9.y^2+21.x.y+86.x+48.y}_{\text{Presque du } IM^2\text{...}}-72=0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{IM^2-\underbrace{\left[16\times(-4)^2+21\times(-4)\times 2+9\times 2^2\right]}_{16.\boldsymbol{a}^2+21.\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}+9.\boldsymbol{b}^2}}^{\text{On retranche ce qu'on najoute de fait : effet nul}}-72=0$$

$$\Leftrightarrow IM^2-124-72=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{IM^2=196 \Leftrightarrow IM=14}_{\text{Car une distance est un nombre positif ou nul...}}$$

Ainsi dire que le point M appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ équivaut à dire que sa distance vis-à-vis du point $I(-4;2)$ est égale à 14.

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de rayon 14 et de centre le point I défini par :

$$\underbrace{\overrightarrow{AI}=-4.\overrightarrow{AB}+2.\overrightarrow{AC}}_{\text{Car I a pour coordonnées } (-4;2) \text{ dans le repère } (A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$$

Une fois encore, la géométrie analytique nous a permis de triompher ! Certes, mais le voie a été longue et pénible ! La question qui se pose à présent est de savoir si le calcul vectoriel et les barycentres n'offriraient pas une solution moins douloureuse et surtout beaucoup plus efficace. Comme pour le premier problème...

La solution des barycentres : une meilleure voie ?

On appelle I le barycentre des points pondérés $(A,3)$, $(B,-4)$ et $(C,2)$.

Autrement dit, I est défini par la relation vectorielle $3.\overrightarrow{AI}-4.\overrightarrow{BI}+2.\overrightarrow{CI}=\vec{0}$.

Les esprits suspicieux remarqueront que les coefficients retenus pour les trois points sont ceux apparaissant dans la relation $3.AM^2-4.BM^2+2.CM^2=26$ définissant l'ensemble $\mathcal{E}$. Qu'ils se rassurent, c'est fait exprès !

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{E} &\Leftrightarrow 3.AM^2-4.BM^2+2.CM^2=26\\
&\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AM}^2-4.\overrightarrow{BM}^2+2.\overrightarrow{CM}^2=26\\
&\Leftrightarrow 3.\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)^2-4.\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right)^2+2.\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IM}\right)^2=26\\
&\Leftrightarrow \overbrace{\begin{cases}3.\left[\overrightarrow{AI}^2+2.\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}^2\right]-4.\left[\overrightarrow{BI}^2+2.\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}^2\right]\\ \qquad +2.\left[\overrightarrow{CI}^2+2.\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}^2\right]=26\end{cases}}^{\textit{On développe chaque carré scalaire...}}\\
&\Leftrightarrow \overbrace{3.AI^2+2.\underbrace{\left[3.\overrightarrow{AI}-4.\overrightarrow{BI}+2.\overrightarrow{CI}\right]}_{\substack{=\vec{0}\\ \textit{Car I est le barycentre de}\\ \textit{(A,3) ; (B,-4) et (C,2)}}}.\overrightarrow{IM}-4.BI^2+2.CI^2+IM^2}^{\textit{On regroupe et on réduit}}=26\\
&\Leftrightarrow 3.AI^2+\underbrace{2.\vec{0}.\overrightarrow{IM}}_{=0}-4.BI^2+2.CI^2+IM^2=26\\
&\Leftrightarrow IM^2=26-3.\underbrace{AI^2}_{???}+4.\underbrace{BI^2}_{???}-2.\underbrace{CI^2}_{???}
\end{aligned}$$

A présent, tout le problème à présent est de savoir combien valent les distances AI, BI et CI.

I étant un point que nous avons introduit, ce sont des renseignements que nous ignorons. Et là, nous ne voyons d'autre solution de recourir à...la géométrie analytique. Vu ce qui a déjà été fait, le mieux semble encore de retravailler dans le repère non orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ afin de calculer ces trois distances.

Au préalable, il nous faut déterminer les coordonnées $(x_I;y_I)$ du point I dans ce repère.

Le barycentre I est défini par la relation vectorielle $3.\overrightarrow{AI}-4.\overrightarrow{BI}+2.\overrightarrow{CI}=\vec{0}$.
Traduisons cette dernière sous forme de coordonnées.

$$3.\underbrace{\begin{pmatrix}x_I\\y_I\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AI}}-4.\underbrace{\begin{pmatrix}x_I-1\\y_I\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{BI}}+2.\underbrace{\begin{pmatrix}x_I\\y_I-1\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{CI}}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}x_I+4\\y_I-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales. Ainsi, nos deux vecteurs ont :

Mêmes abscisses	Mêmes ordonnées
$x_I+4=0 \Leftrightarrow x_I=-4$	$y_I-2=0 \Leftrightarrow y_I=2$

Le point I a donc pour coordonnées $(-4;2)$. Ce qui n'est pas sans nous rappeler certaines choses vue dans la voie analytique...

Connaissant les coordonnées des points A, B C et I dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$, nous pouvons calculer les distances qui nous intéressent.

➲ $AI^2=\left\|\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}\right\|^2=16\times(-4)^2+21\times(-4)\times2+9\times2^2=256-168+36=124$

➲ $BI^2=\left\|\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}\right\|^2=16\times(-5)^2+21\times(-5)\times2+9\times2^2=400-210+36=226$

➲ $CI^2=\left\|\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}\right\|^2=16\times(-4)^2+21\times(-4)\times1+9\times1^2=256-84+9=181$

Ces calculs faits, nous pouvons reprendre notre chemin à partie de la dernière qui caractérisait l'ensemble $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{E} &\Leftrightarrow IM^2=26-3\times\underbrace{124}_{AI^2}+4\times\underbrace{226}_{BI^2}-2\times\underbrace{181}_{CI^2}\\
&\Leftrightarrow \underbrace{IM^2=196 \Leftrightarrow IM=14}_{\substack{\textit{Le cas IM = -14 n'existe pas}\\ \textit{car une distance n'est jamais négative}}}
\end{aligned}$$

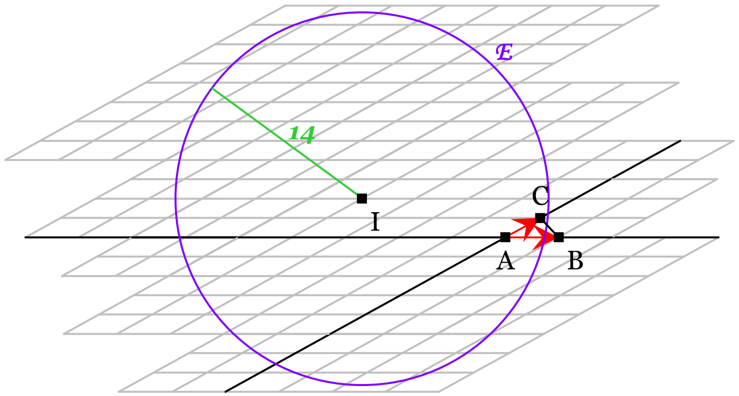
Encore une fois, nous pouvons l'annoncer au monde entier :

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de rayon 14 et de centre le point I défini par :

$$\overrightarrow{AI}=-4.\overrightarrow{AB}+2.\overrightarrow{AC}$$

L'épilogue de toutes nos aventures

Avant d'épiloguer sur nos ébats, nos allons tracer cet ensemble $\mathcal{E}$, c'est-à-dire le cercle de centre I et de rayon 14.



Certains auraient pu s'attendre à un cercle beaucoup plus grand. C'est qu'ils ont oublié une peu vite que le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ n'était pas orthonormé. En effet, la norme du vecteur d'abscisse $\overrightarrow{AB}$ mesure 4 et celle du vecteur d'ordonnée $\overrightarrow{AC}$ mesure 3.

Au début de ce document, nous proclamions à qui voulait l'entendre que la géométrie analytique était une avancée majeure en ce sens qu'elle permettait de numériser et de résoudre efficacement de nombreux problèmes.

Il est vrai que les problèmes auxquels nous avons été confronté, celui de concourance de trois droites dans un triangle comme celui que nous venons de traité, ont pu être résolus par la voie analytique. Dans les deux cas, la route a été longue mais finalement sans grande difficulté.

A l'usage, il apparaît que parfois on peut aller plus vite en recourant au calcul vectoriel et aux barycentres. Ce fut notamment le cas dans le premier problème.

Dans celui que nous concluons, l'emploi du barycentre n'a pas été décisif. Certes, il nous a évité les développements pharaoniques issus de la traduction sous forme de coordonnées de l'égalité $3.AM^2 - 4.BM^2 + 2.CM^2 = 26$.

Cela dit, nous avons été bloqué assez rapidement. Nous avons alors opté pour la voie analytique et le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. Réutilisant des résultats vus précédemment, nous avons alors pu conclure.

A l'issue de toutes nos aventures, il apparaît que la géométrie analytique offre presque à coup sûr une solution à tout problème. Une solution parfois longue et pénible. Cependant, celle-ci peut être rendue moins douloureuse, moins périlleuse en débroussaillant le terrain, en empruntant d'autres voies comme le calcul vectoriel et les barycentres. C'est seulement quand il n'y a plus d'espoir que numériser le plan devient l'arme absolue.

Informations diverses

*Le présent document a été conçu et réalisé par Jérôme ONILLON en juillet 2004. Une figure a été réalisée avec le logiciel de géométrie **Déclic**. Le fichier PDF a été généré avec **GhostWord**.*

*Il est exclusivement distribué par le site la **taverne de l'Irlandais** (www.tanopah.com). Aucune rémunération (ni aucun frais) ne peut être perçu dessus. Il ne constitue pas un document officiel et est fourni sans aucune garantie.*

Contre tous mes ennemis, j'ai réappris à vivre.
Ma seule volonté est qu'ils périssent.