Très cher lecteur (ou lectrice),

Cette année encore, je propose aux égarés et aux inconscients le recueil de tous les exercices donnés en devoir certifiés 100% pédagogiquement incorrects par les plus hautes autorités morales donnés en première S.

Car durant cette saison 2006-2007, j'avais en charge une première S. Les pauvres !

La nouveauté en section scientifique ne se situe pas au niveau des programmes mais plutôt au niveau du profil des élèves qui sont de moins en moins...scientifiques. Mais bon, quand chaque année il y a une heure de mathématiques en moins par semaine, il ne faut pas trop s'étonner si des élèves qui en d'autres temps auraient été moyens sont devenus justes.

Ce qui me console, c'est qu'une matière aussi mineure que le français connaît le même phénomène : 800 heures de moins sur une scolarité et des élèves de cinquième d'aujourd'hui qui ont le même niveau en orthographe que des élèves de CM2 d'il y a vingt ans.

Mais heureusement en 2009, les TICE arriveront à notre secours avec l'Epreuve Expérimentale au baccalauréat en série S. Une épreuve qu'il faudra préparer sans augmentation d'horaire et avec les mêmes programmes...aussi lourds et incohérents. A défaut de remonter le niveau, on va remonter les notes.

Bon, je crois qu'il faut que je me taise sinon je vais encore avoir des problèmes...

Bonne lecture et surtout bon courage !

Le sommaire des thèmes généraux abordés :

Analyse...avec dérivation 2
Analyse...sans dérivation 14
Angles et trigonométrie 23
Barycentres 29
Dérivation et dérivées 35
Géométrie analytique 41
Homothétie 45
Probabilités 46
Produit scalaire 49
Second degré et polynômes 52
Statistiques 56
Suites 58

La taverne de l'Irlandais

vous présente

Mémoires d'outre première S

L'intégralité des exercices de mathématiques plus ou moins conçus par Jérôme ONILLON, et donnés en devoir lors de la saison 2006-2007

A la mémoire de ceux qui surent dire non.

Analyse…avec dérivation

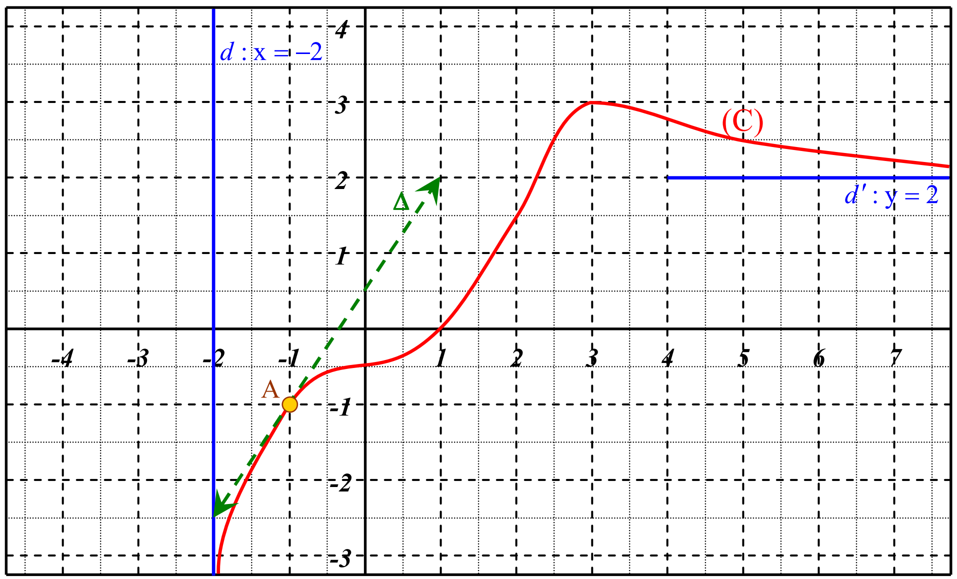
La vie tourmentée de l'inverse d'une fonction f

Le contexte

Cet exercice fait le lien entre les aspects graphique et numérique d'une même notion comme tangente/nombre dérivé ou asymptote/limite. Il aborde également la composée d'une fonction et de la fonction inverse.

L'énoncé

La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $]-2;+\infty[$. Sa courbe représentative (C) est la suivante :



De plus, on sait de f et de sa courbe (C) :

- La fonction f est croissante sur $]-2;3[$ et décroissante sur $]3;+\infty[$.
- La droite *d* d'équation $x = -2$ est une asymptote à la courbe (C).
- La droite d' d'équation $y = 2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.
- La droite Δ est la tangente à la courbe (C) en son point A.

A partir du graphique et des renseignements ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

a) Compléter les égalités ci-dessous :

$f'(-1) =$ $\qquad$ $f(1) =$ $\qquad$ $f'(3) =$ $\qquad$ $f(-1) =$

b) Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers -2, puis lorsque x tend vers $+\infty$. On justifiera ses réponses.

La fonction g dont la courbe représentative est appelée (C'), est définie par :

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

c) Pourquoi l'ensemble de définition de la fonction g est-il $D_g =]-2;1[\cup]1;+\infty[$?

d) Déterminer les images par g de -1 ; 0 ; 2 et 3.

e) Dresser le tableau de signe de la fonction f sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.
Déterminer toutes les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D_g.
Quelles sont les conséquences graphiques de ces limites sur la courbe (C') ?

f) Pourquoi la fonction g est-elle dérivable sur $D_g =]-2;1[\cup]1;+\infty[$?
Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f'(x)$.
En déduire les valeurs des coefficients directeurs des tangentes T_{-1} et T_3 à la courbe (C') en ses points d'abscisses -1 et 3.

g) Etablir les variations de la fonction g sur son ensemble de définition.

h) En utilisant ce qui précède, tracer une esquisse de la courbe (C') ainsi que toutes les droites et tous les points mis en évidence au cours de l'exercice.

Le corrigé

a) Le coefficient directeur de la tangente Δ est : $f'(-1) = \dfrac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}} = \dfrac{3}{2}$.

- ➲ La courbe (C) passe par le point de coordonnées $(1;0)$. Donc $f(1) = 0$.
- ➲ Comme f admet un maximum en $x = 3$ alors $f'(3) = 0$. La tangente y est horizontale.
- ➲ Le point $A(-1;-1)$ appartient la courbe (C). Par conséquent $f(-1) = -1$.

b) Comme la droite d d'équation $x=-2$ est une asymptote à la courbe (C) et que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-2;3[$, alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 par la droite est $-\infty$.

➲ Comme la droite d' d'équation $y=2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$, alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 2.

c) A l'exception de 0, tous les réels ont un inverse. Par conséquent :

$$g(x)=\frac{1}{f(x)} \text{ existe } \Leftrightarrow \text{ Son dénominateur } f(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \text{ et } x\in\,]-2;+\infty[$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de la fonction g est $]-2;+\infty[\setminus\{1\}=]-2;1[\cup]1;+\infty[$.

d) Déterminons les images de -1 ; 0 ; 2 et 3 par la fonction g.

$$g(-1)=\frac{1}{f(-1)}=\frac{1}{-1}=-1 \qquad g(0)=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{-0,5}=-2$$

$$g(2)=\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{3/2}=\frac{2}{3} \qquad g(3)=\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{3}$$

Donc la courbe (C') passe par les points $A(-1;-1)$; $E(0;-2)$; $F\left(2;\frac{2}{3}\right)$ et $G\left(3;\frac{1}{3}\right)$..

e) D'après sa courbe (C) et les divers renseignements, le tableau de signe de f est :

x	$-\infty$	*A gauche*	1	*A droite*	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

➲ L'ensemble de définition de g étant $]-2;1[\cup]1;+\infty[$, quatre limites sont à déterminer.

- Quand x tend vers -2 par la droite, $f(x)$ tend vers $-\infty$. Donc la fonction $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $\dfrac{1}{-\infty}=0^-$. La courbe (C') tend vers le point $E(-2;0)$.
- Quand x tend vers 1 par la gauche, $f(x)$ tend vers 0^- et $g(x)$ tend vers $-\infty$.
- Quand x tend vers 1 par la droite, $f(x)$ tend vers 0^+ et $g(x)$ tend vers $+\infty$. Donc la droite d'' d'équation $x=1$ est une asymptote à la courbe (C').
- Quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers 2. Donc $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$.

  La droite horizontale d''' d'équation $y=0,5$ est une asymptote à la courbe (C') au voisinage de $+\infty$.

f) Comme la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ et non nulle sur l'ensemble $]-2;1[\cup]1;+\infty[$, alors son inverse g est dérivable sur $]-2;1[\cup]1;+\infty[$.

Pour tout réel x de cet ensemble, nous avons : $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}$.

Et en particulier : $g'(-1)=-\dfrac{f'(-1)}{(f(-1))^2}=-\dfrac{1,5}{(-1)^2}=-1,5$ et $g'(3)=-\dfrac{f'(3)}{(f(3))^2}=-\dfrac{0}{9}=0$

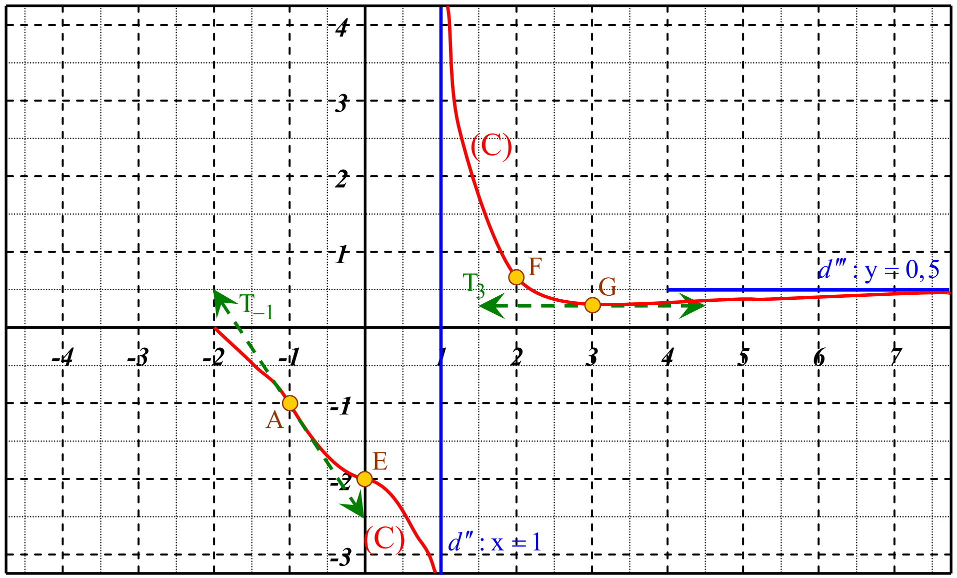
<u>Conclusion :</u> les coefficients directeurs des tangentes T_{-1} et T_3 sont $-1,5$ et 0.

g) Les variations de g peuvent s'obtenir en considérant qu'elle est la composée de la fonction f suivie de la fonction inverse. Mais on peut aussi se servir des dérivées.

Comme la fonction f est croissante sur $]-2;3[$ alors sa dérivée $f'(x)$ y est positive *(ou nulle)*.
De même, comme f est décroissante sur $]3;+\infty[$ alors la dérivée $f'(x)$ y est négative *(ou nulle)*.
Le tableau de variation de g est celui ci-contre➔

x	-2		1		3		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$(f(x))^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
g	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$1/3$	↗	$1/2$

h) L'esquisse de la courbe (C') accompagnée de tous les points et droites mis en évidence au cours de l'exercice est tracée ci-dessous.



L'inconnue homographique

Le contexte

Savoir à quel coefficient, on doit telle asymptote. Voilà l'objet de cet exercice !

L'énoncé

La fonction homographique h a une expression de la forme :

$$h(x) = a + \frac{b}{x-c}$$

où a, b et c sont trois coefficients réels que nous allons déterminer.

On sait également que la courbe représentant la fonction h passe par le point de coordonnées $(4;-5)$

Enfin, le tableau de variation de la fonction h est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$		5		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$(x-5)^2$		$+$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	‖	$-$	
h	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3

Le corrigé

Déterminer les valeurs des trois coefficients a, b et c. On expliquera sa réponse.

Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction inverse $\frac{b}{x-c}$ tend vers 0. La seule possibilité pour que la limite en $+\infty$ de $h(x) = a + \frac{b}{x-c}$ soit -3 est que $a = -3$.

Ensuite, pour que $h(x) = -3 + \frac{b}{x-c}$ tende vers $+\infty$ lorsque x tend vers 5 par la droite, il faut nécessairement que le dénominateur $x - c$ tende vers 0. On en déduit : $c = 5$.

Enfin, comme $h(4) = -5$ alors : $-3 + \frac{b}{4-5} = -5 \Leftrightarrow -3 - b = -5 \Leftrightarrow b = 2$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel $x \neq 5$, nous avons $h(x) = -3 + \frac{2}{x-5}$

Il était une fois...la fonction rationnelle f

Le contexte

L'exercice suivant est l'étude complète d'une fonction rationnelle. Il fait appel à de multiples notions d'analyse : limites et asymptotes, second degré, dérivation et variations.

L'énoncé

La fonction rationnelle f est définie par :

$$f(x)=\frac{9.x^2+24.x}{3.x+4}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Déterminer le ou les antécédents de 6 par la fonction f.

c) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f.
Quelles sont les conséquences graphiques de ces limites sur la courbe (C) ?

d) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \in D_f$, on ait :

$$f(x)=a.x+b+\frac{c}{3.x+4}$$

Démontrer que la courbe (C) admet aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$ une asymptote oblique Δ dont on donnera l'équation réduite.
Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ.

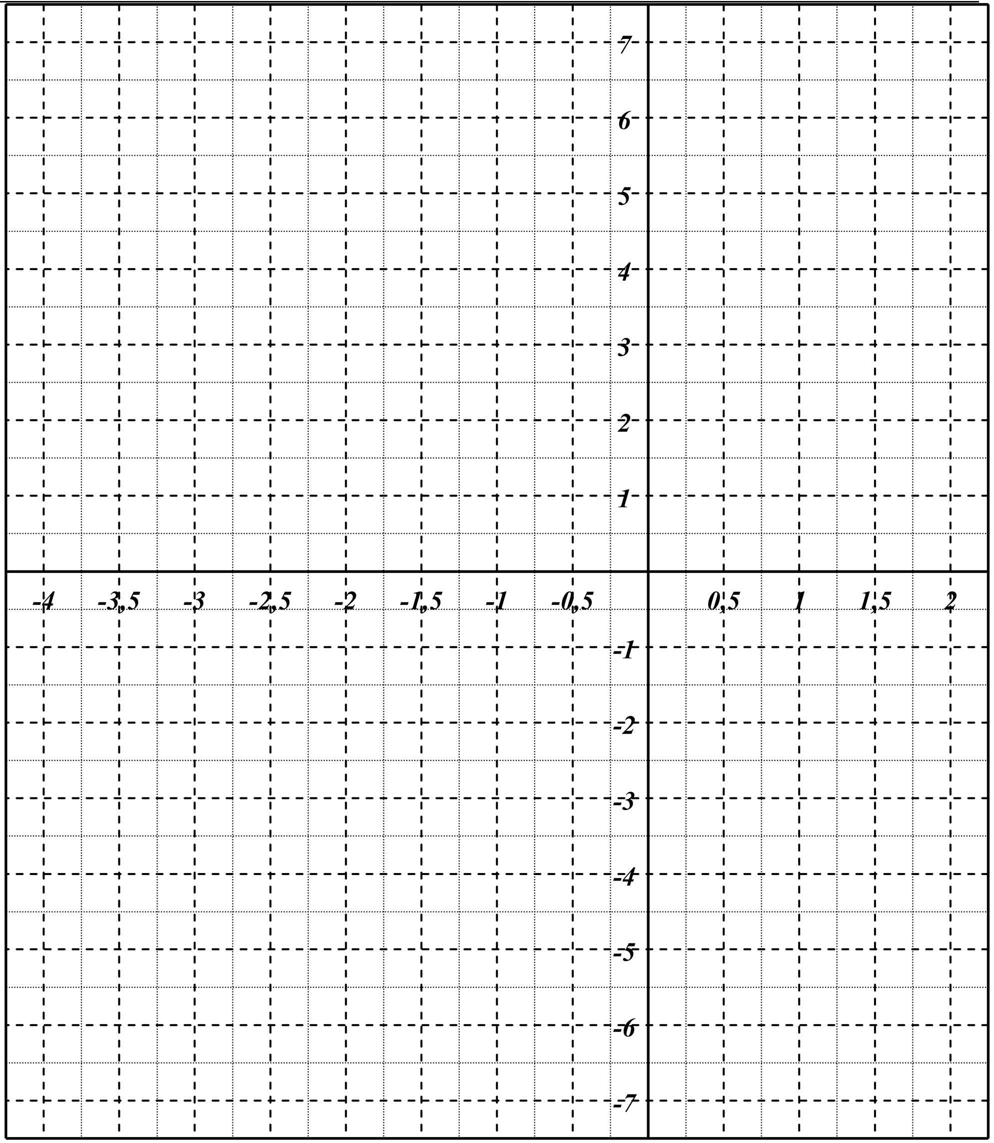
e) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur D_f ?
Démontrer que pour tout réel $x \in D_f$, on a :

$$f'(x)=\frac{27.x^2+72.x+96}{(3.x+4)^2}$$

En déduire les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

f) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

g) On appelle A le point de la courbe (C) d'abscisse 0.
Déterminer l'équation réduite de la tangente T_A à la courbe (C) au point A.



h) Sur le graphique ci-dessus, tracer la courbe (C) ainsi que toutes les droites rencontrées au cours de l'exercice.

Le corrigé

a) Les numérateur $9.x^2+24.x$ et dénominateur $3.x+4$ existent pour tout réel x. Par contre, le quotient $f(x)$ n'existe pas toujours.

$$f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \text{ Son dénominateur } 3.x+4\neq 0 \Leftrightarrow 3.x\neq -4 \Leftrightarrow x\neq -\frac{3}{4}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition D_f de f est la réunion $\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[\cup\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

b) Pour déterminer les antécédents de 6 par la fonction f, résolvons dans D_f l'équation :

$$f(x)=6 \Leftrightarrow \frac{9.x^2+24.x}{3.x+4}-6=0 \Leftrightarrow \frac{\left(9.x^2+24.x\right)-6\times(3.x+4)}{3.x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9.x^2+24.x-18.x-24}{3.x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{9.x^2+6.x-24}{\cancel{3.x+4}}\times\left(\cancel{3.x+4}\right)=0\times(3.x+4)}_{\text{Comme on travaille dans } D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4/3\}\text{, on peut multiplier par le facteur } 3.x+4 \text{ qui est non nul.}} \Leftrightarrow 9.x^2+6.x-24=0$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation qui est du second degré.

$$\Delta_{9.x^2+6.x-24=0}=6^2-4\times 9\times(-24)=36+864=900=30^2$$

Comme son discriminant est positif, alors l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-6+30}{2\times 9}=\frac{24}{18}=\frac{4\times\cancel{6}}{3\times\cancel{6}}=\frac{4}{3} \quad\text{et}\quad x_2=\frac{-6-30}{2\times 9}=\frac{-36}{18}=-2$$

Les deux solutions trouvées appartiennent à l'ensemble $D_f=\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[\cup\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$.

<u>Conclusion :</u> 6 admet deux antécédents par la fonction f. Il s'agit de -2 et $\frac{4}{3}$.

c) L'ensemble de définition de f comporte quatre bornes. Il y a quatre limites à trouver. Si nous étions malins, nous établirions dès maintenant la forme décomposée de f. Mais nous allons nous débrouiller autrement.

✍ *Limite de f en +∞*

Nous avons : $\lim\limits_{x\to+\infty} 9.x^2+24.x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3.x+4=+\infty$.

Donc lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ est une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Modifions l'écriture de la fonction f. Pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4/3;0\}$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{9.x^2+24.x}{3.x+4}=\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}\times\frac{9+\frac{24}{x^2}}{3+\frac{4}{x}}=x\times\frac{9+\frac{24}{x^2}}{3+\frac{4}{x}}$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{4}{x}$ et $\frac{24}{x^2}$ tendent vers 0^+.

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\times\frac{9+\frac{24}{x^2}}{3+\frac{4}{x}}=(+\infty)\times\frac{9+0^+}{3+0^+}=(+\infty)\times 3=+\infty$

✍ *Limite de f en -∞*

Quand x tend vers $-\infty$, $\frac{4}{x}$ et $\frac{24}{x^2}$ tendent respectivement vers 0^- et 0^+.

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\times\frac{9+\frac{24}{x^2}}{3+\frac{4}{x}}=(-\infty)\times\frac{9+0^+}{3+0^-}=(-\infty)\times 3=-\infty$.

✍ *Limite à gauche de -4/3*

Quand x tend vers $-\frac{4}{3}$ par la gauche :

- Le numérateur $9.x^2+24.x$ tend vers $9\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2+24\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-16$
- Le dénominateur $3.x+4$ tend vers 0^-.
  En effet le tableau de signe de $3.x+4$ est

x	$-\infty$	A gauche	$-\frac{4}{3}$	A droite	$+\infty$
$3.x+4$		$-$	0	$+$	

Donc $f(x)$ tend vers $\frac{-16}{0^-}=+\infty$

✍ *Limite à droite de -4/3*

En reprenant ce qui vient d'être fait, nous avons : $\lim\limits_{\substack{x\to-4/3\\ \text{droite}}} f(x)=\frac{-16}{0^+}=-\infty$.

<u>Conséquence :</u> la droite verticale *d* d'équation $x=-\frac{4}{3}$ est une asymptote à la courbe (C).

d) Décomposons la fonction rationnelle f. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\}$, nous avons :

$$f(x)=\frac{\overbrace{9.x^2}^{\text{Combien de fois 3.x+4 ?}}+24.x}{3.x+4}=\frac{\overbrace{3.x\times(3.x+4)-12.x}^{=9.x^2}+24.x}{3.x+4}=\frac{3.x\times\cancel{(3.x+4)}}{\cancel{3.x+4}}+\frac{\overbrace{12.x}^{\text{Combien de 3.x+4 ?}}}{3.x+4}$$

$$=3.x+\frac{\overbrace{4\times(3.x+4)-16}^{=12.x}}{3.x+4}=3.x+\frac{4\times\cancel{(3.x+4)}}{\cancel{3.x+4}}+\frac{-16}{3.x+4}=3.x+4-\frac{16}{3.x+4}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel $x\in\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[\cup\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$, on a : $f(x)=3.x+4-\frac{16}{3.x+4}$.

➲ L'écriture décomposée de $f(x)$ laisse apparaître l'équation réduite de l'asymptote.

Quand x tend vers $+\infty$, $3.x+4$ tend vers $+\infty$. Donc son inverse $\frac{-16}{3.x+4}$ tend vers 0^-.

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(3.x+4)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{16}{3.x+4}=0^-.$$

De même :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(3.x+4)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{16}{3.x+4}=-\frac{16}{-\infty}=0^+$$

<u>Conclusion :</u> la droite Δ d'équation $y=3.x+4$ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis.

➲ Pour connaître la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ, étudions le signe de leur différence d'ordonnées :

$$f(x)-(3.x+4)=-\frac{16}{3.x+4}$$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
-16		$-$		$-$	
$3.x+4$		$-$	0	+	
(C) − Δ		+	‖	$-$	

<u>Conclusion :</u> la courbe (C) est au-dessus de son asymptote Δ sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[$.

Elle est au-dessous sur l'intervalle $\left]-4/3;+\infty\right[$.

Retours sur les limites

Le grand avantage de l'écriture décomposée est qu'elle évite les formes indéterminées.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3.x+4-\frac{16}{3.x+4}=(+\infty)+4-0^+=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3.x+4-\frac{16}{3.x+4}=(+\infty)+4-0^-=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-4/3\\ \text{Gauche}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-4/3\\ \text{Gauche}}} 3.x+4-\frac{16}{3.x+4}=-4+4-(-\infty)=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-4/3\\ \text{Droite}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-4/3\\ \text{Droite}}} 3.x+4-\frac{16}{3.x+4}=-4+4-(+\infty)=-\infty$

e) Comme :

- La fonction $u(x)=9.x^2+24.x$ de dérivée $u'(x)=18.x+24$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $v(x)=3.x+4$ de dérivée $v'(x)=3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nulle sur l'ensemble $\left]-\infty,-4/3\right[\cup\left]-4/3;+\infty\right[$.

Alors la fonction f est dérivable sur $\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[\cup\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$. Pour tout réel $x\in D_f$, on a :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

$$=\frac{(18.x+24)\times(3.x+4)-3\times\left(9.x^2+24.x\right)}{(3.x+4)^2}$$

$$=\frac{54.x^2+72.x+72.x+96-27.x^2-72.x}{(3.x+4)^2}$$

$$=\frac{27.x^2+72.x+96}{(3.x+4)^2}$$

Pour connaître le signe du numérateur :

$$N(x) = 27.x^2 + 72.x + 96$$

qui est une forme du second degré, calculons son discriminant

$$\Delta_{N(x)} = 72^2 - 4 \times 27 \times 96 = -5184$$

Comme son discriminant est négatif, alors $N(x)$ est positif comme son coefficient dominant 27.
Le tableau de variation de la fonction f est celui ci-contre ➔

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$27.x^2 + 72.x + 96$	$+$		$+$
$(3.x+4)^2$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
f	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$

f) Tous les points de la courbe (C) ont des coordonnées de la forme $(x; f(x))$.

Les points de l'axe des abscisses sont ceux du plan dont l'ordonnée est nulle.
Donc les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Résolvons cette équation dans $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{9.x^2 + 24.x}{\cancel{3.x+4}} \times \cancel{(3.x+4)}}_{\text{Comme on travaille dans } D_f = \mathbb{R}\backslash\{-4/3\}\text{, on peut multiplier par le facteur } 3.x+4 \text{ qui est non nul.}} = 0 \times (3.x+4) \Leftrightarrow 9.x^2 + 24.x = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x.(9.x+24) = 0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \ \underline{\text{ou}} \ 9.x + 24 = 0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est}} \Leftrightarrow x = 0 \ \underline{\text{ou}} \ x = -\frac{8}{3}$$

Les deux solutions trouvées font partie de l'ensemble de définition D_f ..

<u>Conclusion :</u> la courbe (C) et l'axe des abscisses ont deux points d'intersection : ils ont pour abscisses $-\frac{8}{3}$ et 0.

g) La question précédente nous permet de dire que le point A a pour coordonnées $(0;0)$.

Le coefficient directeur de la tangente T_A est le nombre dérivé $f'(0)$. Calculons le !

$$f'(0) = \frac{27 \times 0^2 + 72 \times 0 + 96}{(3 \times 0 + 4)^2} = \frac{0+0+96}{16} = \frac{96}{16} = 6$$

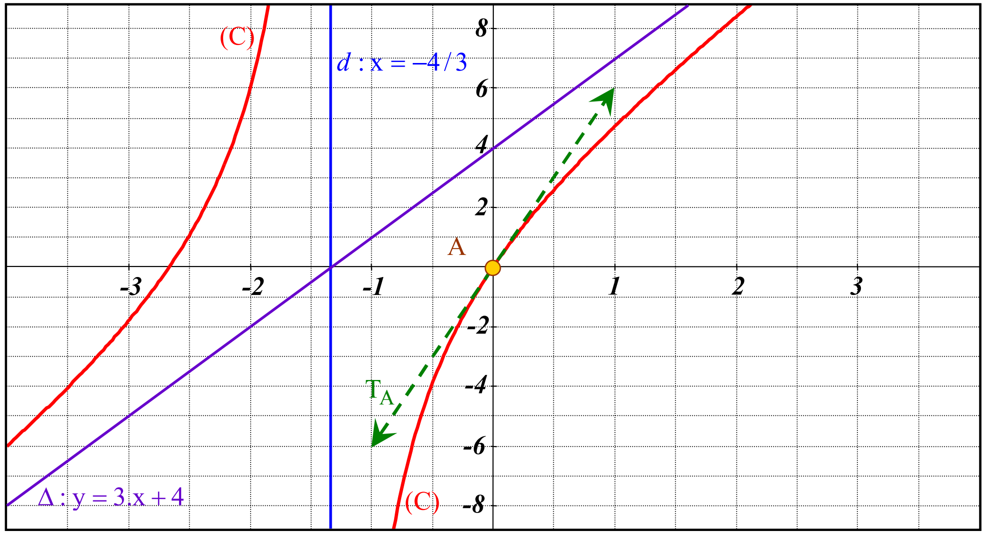
Donc la tangente T_A a une équation réduite de la forme $y = 6 \times x + p$.

Comme la tangente T_A passe par le point A, alors les coordonnées de ce dernier vérifient l'équation réduite de la première.

$$A \in T_A \Leftrightarrow y_A = 6 \times x_A + p \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} \times 0 + p \Leftrightarrow p = 0$$

<u>Conclusion :</u> la tangente T_A a pour équation réduite $y = 6.x$.

h) La courbe (C), ses deux asymptotes *d* et Δ, ainsi que la tangente T_A sont tracées sur le graphique ci-dessous.



Total problème d'analyse !

Le contexte

Au travers de l'étude d'une fonction rationnelle, le problème suivant aborde quelques-unes des principales compétences d'analyse vues en première S : limites et asymptotes, dérivation et variation, centre de symétrie.

L'énoncé

La fonction f est définie par :

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+2.x-8}$$

On appelle (C) la courbe représentative de cette fonction f.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f. On justifiera sa réponse.

b) Déterminer toutes les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f.
Quelles sont les conséquences graphiques sur la courbe (C) de ces limites ?

c) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur son ensemble de définition D_f ?
Démontrer que pour tout réel $x \in D_f$, on a :

$$f'(x)=-\frac{x^2+2.x+10}{\left(x^2+2.x-8\right)^2}$$

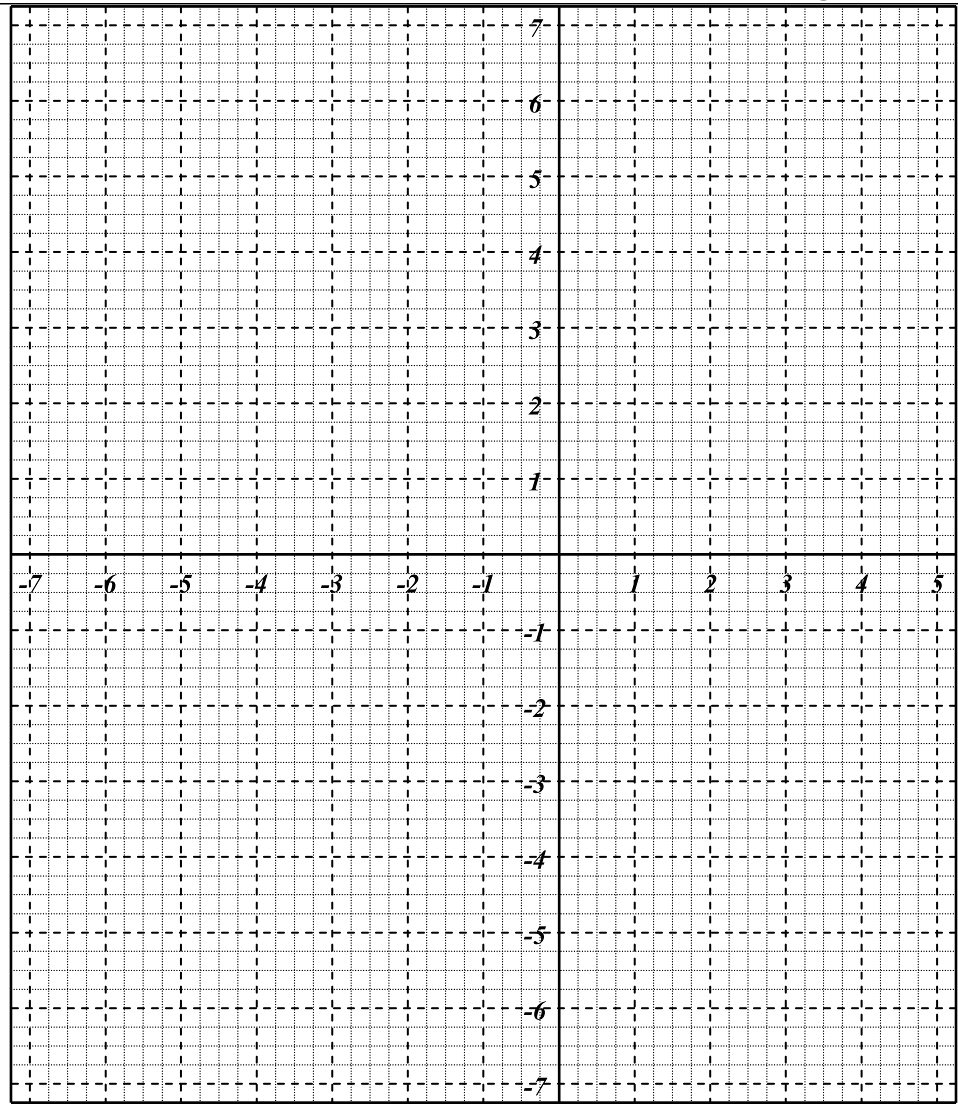
En déduire le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition.

d) Prouver que pour tout réel $h \in \mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$, la somme $\dfrac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2}$ est constante.
Que peut-on en déduire quant à la courbe (C) ?

On appelle A le point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses.

e) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_A à la courbe (C) en son point A.
La courbe (C) admet-elle des tangentes horizontales ? On justifiera sa réponse.

f) Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe (C) ainsi que toutes les droites rencontrées au cours du problème.



La fonction g est l'inverse de la fonction f. Elle est définie par :

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

On appelle (C') la courbe représentant de cette fonction g.

g) Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

Exprimer $g(x)$ en fonction de x. Que constate-t-on ?

Déterminer toutes les asymptotes de la fonction g. On justifiera ses réponses.

Etablir les variations de la fonction g sur D_g .

Le corrigé

a) Les numérateur $N(x) = x+1$ et dénominateur $D(x) = x^2 + 2.x - 8$ sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Leur quotient f ne peut exister que lorsque et seulement lorsque le dénominateur $D(x)$ est non nul.

Pour connaître les racines de cette forme du second degré 2, calculons son discriminant

$$\Delta_{D(x)} = 2^2 - 4\times 1\times(-8) = 4+32 = 36 = 6^2$$

Comme son discriminant est positif, $D(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-2-6}{2\times 1} = \frac{-8}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+6}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

<u>Conclusion :</u> tous les réels sauf -4 et 2 ont une image par f. L'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-4;2\} =]-\infty;-4[\cup]-4;2[\cup]2;+\infty[$.

De plus, pour tout réel $x \in D_f$, nous avons : $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2.x-8} = \frac{x+1}{(x+4)\times(x-2)}$.

b) Commençons par déterminer les limites de f aux infinis. Pour tout réel $x \in D_f$, on a :

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2.x-8} = \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} \times \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}} = \frac{1}{x}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}$$

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, les quantités $\frac{1}{x}$; $\frac{2}{x}$ et $\frac{8}{x^2}$ tendent vers 0. Par conséquent :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}} = 0^- \times \frac{1+0^-}{1+0^- - 0^+} = 0^- \times 1 = 0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}} = 0^+ \times \frac{1+0^+}{1+0+-0^+} = 0^+ \times 1 = 0$

<u>Conséquence :</u> la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis.

Pour étudier les limites en -4 et 2, dressons d'abord le tableau de signe du $D(x)$.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Déterminons les limites à gauche et à droite de -4 .

  A gauche : $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ A droite : $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$

  <u>Conséquence :</u> la droite verticale d'équation $x = -4$ est une asymptote à (C).

- Déterminons les limites à gauche et à droite de 2.

  A gauche : $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$ A droite : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

  <u>Conséquence :</u> la droite verticale d'équation $x = 2$ est une asymptote à (C).

c) Comme les fonctions $N(x) = x+1$ et $D(x) = x^2+2.x-8$ de dérivées respectives $N'(x) = 1$ et $D'(x) = 2.x+2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et que le dénominateur $D(x)$ ne s'annule par sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-4;2\}$, alors la fonction f est dérivable sur cet ensemble D_f .

Pour tout réel $x \in D_f$, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = \frac{N'(x)\times D(x) - D'(x)\times N(x)}{[D(x)]^2} = \frac{1\times(x^2+2.x-8)-(2.x+2)\times(x+1)}{(x^2+2.x-8)^2}$$

$$= \frac{x^2+2.x-8-2.x^2-2.x-2.x-2}{(x^2+2.x-8)^2} = \frac{-x^2-2.x-10}{(x^2+2.x-8)^2} = -\frac{x^2+2.x+10}{(x^2+2.x-8)^2}$$

Pour connaître le signe du numérateur, calculons son discriminant :

$$\Delta_{x^2+2.x+10} = 2^2 - 4\times 1\times 10 = 4-40 = -36$$

Comme son discriminant est négatif, alors le numérateur est toujours positif comme son coefficient dominant 1.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$x^2+2.x+10$		$+$		$+$		$+$	
$(D(x))^2$		$+$	0	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↘	0

d) Pour tout réel $h \in \mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$, nous avons :

$$(-1+h)^2=(h-1)^2=h^2-2.h+1 \quad \text{et} \quad (-1-h)^2=(-1)^2\times(h+1)^2=h^2+2.h+1$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\frac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2}&=\frac{1}{2}\times\left[f(-1+h)+f(-1-h)\right]\\&=\frac{1}{2}\times\left[\frac{(-1+h)+1}{(-1+h)^2+2\times(-1+h)-8}+\frac{(-1-h)+1}{(-1-h)^2+2\times(-1-h)-8}\right]\\&=\frac{1}{2}\times\left[\frac{h}{h^2-2.h+1-2+2.h-8}+\frac{-h}{h^2+2.h+1-2-2.h-8}\right]\\&=\frac{1}{2}\times\left[\frac{h}{h^2-9}+\frac{-h}{h^2-9}\right]=\frac{1}{2}\times 0=0\end{aligned}$$

➲ Les points M et M' de la courbe (C) d'abscisses $-1+h$ et $-1-h$ ont pour coordonnées:

$$M(-1+h;f(-1+h)) \quad \text{et} \quad M'(-1-h;f(-1-h))$$

Cherchons les coordonnées du milieu I du segment [MM'].

$$x_I=\frac{x_M+x_{M'}}{2}=\frac{(-1+h)+(-1-h)}{2}=-1 \qquad y_I=\frac{y_M+y_{M'}}{2}=\frac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2}=0$$

Donc le point $I(-1;0)$ est le milieu du segment [MM']. Autrement dit, le point $M'(-1-h;f(-1-h))$ est le symétrique du point $M(-1+h;f(-1+h))$ par rapport à I.

<u>Conclusion :</u> le point I est un centre de symétrie de la courbe (C).

e) Comme le point A appartient à l'axe des abscisses, alors son ordonnée y_A est nulle.

Comme le point A appartient à la courbe (C), alors son ordonnée est l'image de son abscisse par la fonction f. Pour déterminer cette dernière, résolvons dans D_f l'équation :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{(x^2+2.x-8)\times\frac{x+1}{x^2+2.x-8}=0\times(x^2+2.x-8)}_{\text{On peut multiplier par } x^2+2.x-8 \text{ qui est non nul sur } D_f} \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Donc le point A a pour coordonnées $(-1;0)$ ...le centre de symétrie de (C).

Le coefficient directeur de la tangente T_A est le nombre dérivé de f en -1. Calculons-le !

$$f'(-1)=-\frac{(-1)^2+2\times(-1)+10}{\left((-1)^2+2\times(-1)-8\right)^2}=-\frac{1-2+10}{(1-2-8)^2}=-\frac{9}{(-9)^2}=-\frac{1}{9}$$

Donc l'équation réduite de la tangente T_A est de la forme $y=-\frac{1}{9}.x+p$.

Comme le point A appartient à la tangente T_A, alors les coordonnées du premier vérifient l'équation réduite de la seconde. Il vient :

$$y_A=-\frac{1}{9}.x_A+p \Leftrightarrow 0=-\frac{1}{9}\times(-1)+p \Leftrightarrow p=-\frac{1}{9}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation réduite de la tangente T_A est $y=-\frac{1}{9}.x-\frac{1}{9}=-\frac{x+1}{9}$

➲ Une tangente est horizontale si et seulement si son coefficient directeur $f'(a)$ est nul .

Or d'après le tableau de variation de f qui est aussi celui de signe de sa dérivée, $f'(x)$ est toujours négative sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4;2\}$, elle ne s'y annule jamais.

<u>Conclusion :</u> la courbe (C) n'a aucune tangente horizontale.

g) La fonction g est l'inverse de la fonction f.

Depuis la question e, nous savons que 0 a un seul antécédent par f. Il s'agit de -1.

$$g(x) \text{ existe} \Leftrightarrow f(x) \text{ existe et est non nul} \Leftrightarrow \underbrace{x\in D_f}_{\text{Existe}} \text{ et } \underbrace{x\neq -1}_{\text{Non nul}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de g est $D_g=D_f\setminus\{-1\}=\mathbb{R}\setminus\{-4;-1;2\}$.

➲ Pour tout réel $x\in D_g$, nous pouvons écrire :

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{x^2+2.x-8}{x-1}=\frac{(x+4)\times(x-2)}{x-1}$$

➲ L'expression précédente de g est valable seulement si x est différent de -4 ; -1 et 2.

Or l'ensemble de définition de la fonction $\varphi(x)=\dfrac{x^2+2.x-8}{x-1}$ est clairement $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

φ est parfaitement définie en -4 et 2. Alors pourquoi la fonction g ne l'est-elle pas ?
La réponse est simple : parce que g est l'inverse de f. Elle hérite de cette dernière.
Regardons ce qu'il advient de la fonction g aux voisinages de -4 et 2.

- Déterminons les limites de g à gauche et à droite de -4.

$$\lim_{x\to -4^-} g(x)=\lim_{x\to -4^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{-\infty}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -4^+} g(x)=\lim_{x\to -4^+}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

<u>Conséquence :</u> g est prolongeable par continuité en -4 en posant $g(-4)=0$.

- Examinons les limites de g à gauche et à droite de 2.

$$\lim_{x\to 2^-} g(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{-\infty}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^+} g(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

<u>Conséquence :</u> g est prolongeable par continuité en 2 en posant $g(2)=0$.

Ces nouvelles images sont parfaitement compatibles avec l'expression de g. En effet :

$$\varphi(-4)=\frac{(-4+4)\times(-4-2)}{-4+1}=\frac{0\times(-6)}{-3}=0 \qquad \varphi(2)=\frac{(2+4)\times(2-2)}{2+1}=\frac{6\times 0}{3}=0$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de g peut être étendu à $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Pour tout réel $x\neq -1$, nous avons alors : $g(x)=\dfrac{x^2+2.x-8}{x+1}$

➲ Vu ce que nous venons de dire, les asymptotes et les "vraies" limites de la fonction g sont à rechercher aux infinis et au voisinage de -1.

- ***La fonction g au voisinage de -1***

$$\lim_{x\to -1^-} g(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} g(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

Donc la droite verticale d'équation $x=-1$ est une asymptote à la courbe (C').

- ***La fonction g aux voisinages des infinis***

L'expression de cette fonction g n'est pas sans rien nous dire. Décomposons-là !
Pour tout réel x différent de -1, nous pouvons écrire :

$$g(x)=\frac{x^2+2.x-8}{x+1}=\frac{\overbrace{x\times(x+1)-x}^{x^2}+2.x-8}{x+1}=x+\frac{x-8}{x+1}$$
$$=x+\frac{1\times(x+1)-1-8}{x+1}=x+1+\frac{-9}{x+1}$$

Comme les limites aux infinis de $\dfrac{-9}{x+1}$ sont nulles, alors la droite d'équation $y=x+3$ est une asymptote à la courbe (C') aux voisinages des infinis.

➲ Par définition, la fonction g est l'inverse de la fonction f. C'est des variations de cette seconde établies lors de la question c que vont venir celles de cette première. Pour ce faire, nous allons devoir envisager quatre cas :

- Sur l'intervalle $]-\infty;-4[$, la composée $g=\text{Inverse}\circ f$ est croissante car :

$$\underset{\in]-\infty;-4[}{x}\xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur }]-\infty;-4[}]{f}\underset{\in]-\infty;0[}{x}\xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur }]-\infty;0[}]{\text{Inverse}}\underset{\in]-\infty;0[}{g(x)}$$

- Sur l'intervalle $]-4;-1[$, la composée $g=\text{Inverse}\circ f$ est croissante car :

$$\underset{\in]-4;-1[}{x}\xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur }]-4;-1[}]{f}\underset{\in]0;+\infty[}{x}\xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur }]0;+\infty[}]{\text{Inverse}}\underset{\in]0;+\infty[}{g(x)}$$

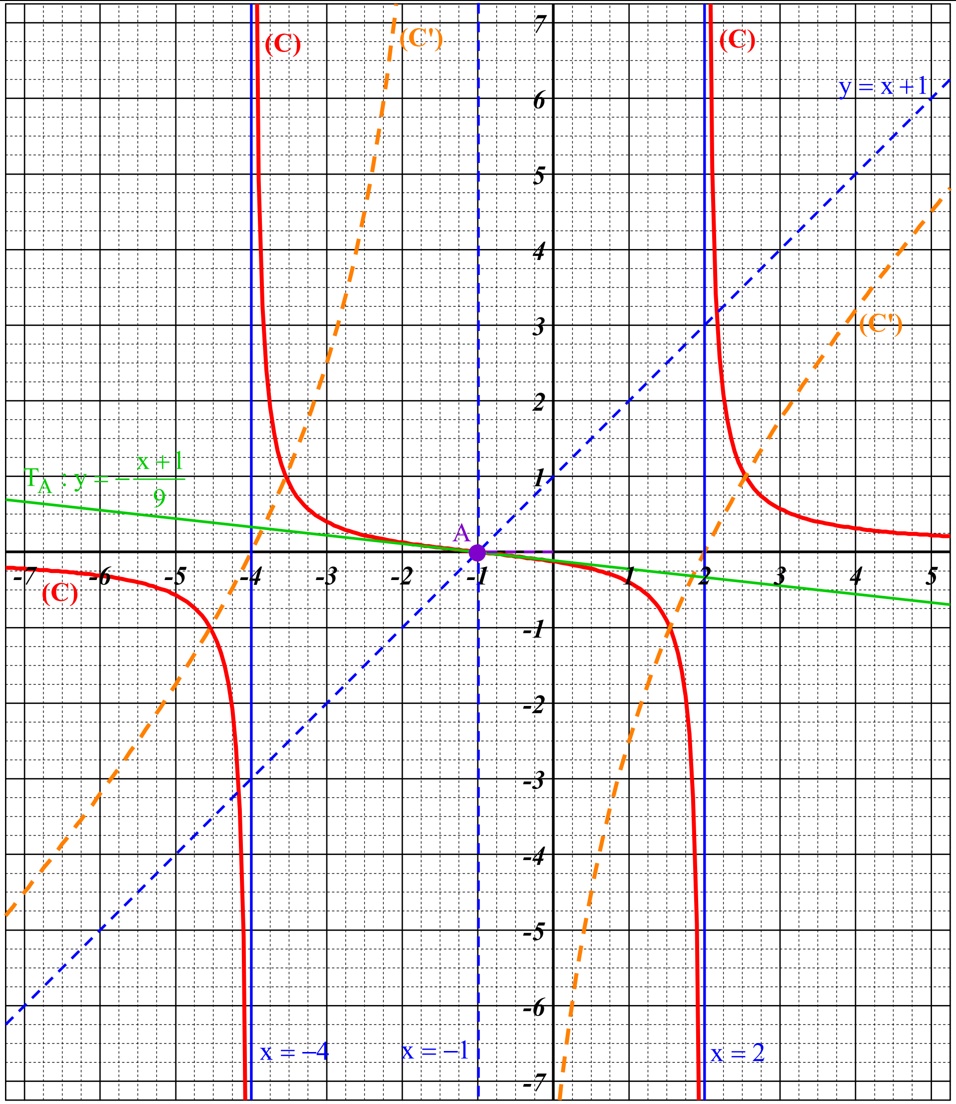
- Sur l'intervalle $]-1;2[$, la composée $g=\text{Inverse}\circ f$ est croissante car :

$$\underset{\in]-1;2[}{x}\xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur }]-1;2[}]{f}\underset{\in]-\infty;0[}{x}\xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur }]-\infty;0[}]{\text{Inverse}}\underset{\in]-\infty;0[}{g(x)}$$

- Sur l'intervalle $]2;+\infty[$, la composée $g=\text{Inverse}\circ f$ est croissante car :

$$\underset{\in]2+\infty[}{x}\xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur }]2;+\infty[}]{f}\underset{\in]0;+\infty[}{x}\xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur }]0;+\infty[}]{\text{Inverse}}\underset{\in]0;+\infty[}{g(x)}$$

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, nous n'avons pas refait exactement le même raisonnement car à chaque fois, les lieux et les arguments invoqués étaient différents.
La fonction g provient de f et mêmes pour les variations, celle-ci transmet ses restrictions.



(C)
(C')
(C)
y = x + 1
(C')
T_A : y = − (x + 1)/9
A
(C)
x = −4
x = −1
x = 2

Analyse...sans dérivation

Quand Ca Marche...

Le contexte

Ce QCM aborde principalement les composées de deux fonctions et aussi le second degré.

L'énoncé

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise en enlève 0,25. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) Les fonctions f et g sont définies pour tout réel x par :

$$f(x) = 2.x^2 + 1 \qquad g(x) = 3.x - 1$$

Parmi les fonctions suivantes, laquelle est la composée $f \circ g$?

$f \circ g(x) = 2.x^2 + 3.x$	$f \circ g(x) = 6.x^2 + 2$	$f \circ g(x) = 18.x^2 - 12.x + 3$

b) La fonction du second degré f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 12.x^2 - 12.x + 3$$

On s'intéresse au signe de $f(x)$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

$f(x)$ est négatif, positif ou nul	$f(x)$ n'est jamais strictement négatif. Il est positif ou nul	$f(x)$ est toujours strictement positif

c) La fonction du second degré f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 3.x^2 + 15.x + c$$

où c est un réel que l'on ne connaît pas.
Par contre, on sait que $f(x)$ admet deux racines et que l'une d'entre elles est 2.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est la seconde racine du polynôme $f(x)$?

-7	-2	$2,5$	3

d) La fonction u est définie, décroissante et strictement négative sur $]-\infty;+\infty[$.
La fonction v est définie pour tout réel x par :

$$v(x) = x^2 - 5$$

On s'intéresse à la composée $v \circ u$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

$v \circ u$ est décroissante sur $]-\infty;+\infty[$	$v \circ u$ est croissante sur $]-\infty;+\infty[$

Le corrigé

a) Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2 \times (g(x))^2 + 1$$
$$= 2 \times (3.x - 1)^2 + 1 = 2 \times (9.x^3 - 6.x + 1) + 1 = 18.x^2 - 12.x + 3$$

<u>Conclusion :</u> la proposition correcte est la troisième.

b) Pour connaître le signe du trinôme $f(x) = 12.x^2 - 12.x + 3$, calculons son discriminant :

$$\Delta_{f(x)} = (-12)^2 - 4 \times 12 \times 3 = 144 - 144 = 0$$

Comme son discriminant est nul, alors $f(x)$ a une unique racine : $x_1 = -\frac{-12}{2 \times 12} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Son tableau de signe est alors :

x	$-\infty$		$0,5$		$+\infty$
$12.x^2 - 12.x + 3$		$+$	0	$+$	
		Signe de 12		*Signe de 12*	

<u>Conclusion :</u> $f(x)$ n'est jamais strictement négatif. Il est positif ou nul.

c) Appelons x_2 cette seconde racine inconnue. La somme des deux racines $2 + x_2$ du trinôme $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ est égale à $-\frac{b}{a} = -\frac{15}{3} = -5$. Donc : $x_2 = -5 - 2 = -7$.

d) La fonction $v \circ u$ est la composée suivante :

$$x \in]-\infty;+\infty[\xrightarrow[\text{décroissante sur }]-\infty;+\infty[]{u} \underbrace{u(x) \in]-\infty;0[}_{\text{Car u est strictement négative}} \xrightarrow[\text{décroissante sur }]-\infty;0[\text{ comme la fonction carrée}]{v(t)=t^2-5=\text{Carré}-5} v \circ u(x)$$

<u>Conclusion :</u> la composée de deux fonctions décroissantes est croissante. Donc $v \circ u$ est croissante sur ℝ.

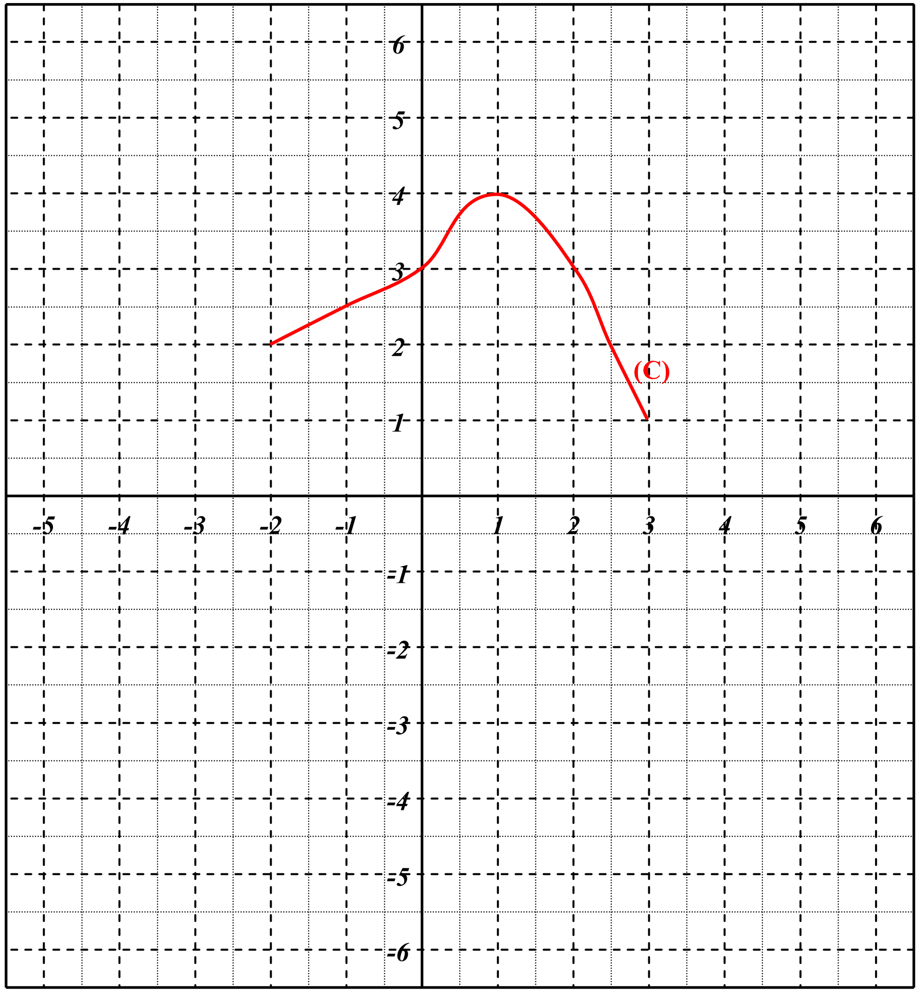
Les dessins intelligents

Le contexte

Cet exercice fait appel à des compétences graphiques. Il aborde les questions de composition de fonctions et celles de déduction d'une courbe à une autre.

L'énoncé

La fonction f est définie et continue (sa courbe est sans trou mais ce n'est pas important) sur l'intervalle $[-2;3]$. Sa courbe représentative (C) est la suivante :



A partir du graphique ci-contre, répondre aux questions suivantes :

a) Compléter les égalités suivantes :

$f(-2)=$ $\qquad$ $f(1)=$ $\qquad$ $f(3)=$

b) Déterminer les antécédents de 3 par la fonction f.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur son intervalle de définition.

La fonction h est définie pour tout réel x de l'intervalle $[-4;1]$ par :

$$h(x)=3-f(x+2)$$

On appelle (C') la courbe représentative de cette fonction h.

d) Calculer $h(-1)$.
Déterminer les images de -4 et 0 par la fonction h.

e) Déterminer le ou les antécédents par la fonction h de 0.

f) Résoudre l'inéquation $h(x)\leq 1$.

g) Par quelles transformations du plan, passe-t-on de la courbe (C) à la courbe (C') ?
Tracer une esquisse de la courbe (C') sur le graphique ci-contre.

h) Etudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[-4;1]$. On justifiera ses réponses.
Toutes les variations de h énoncées seront démontrées.

Le corrigé

a) Par lecture graphique, on trouve :
$f(-2)=2$ $\quad$ $f(1)=4$ $\quad$ $f(3)=1$.

b) 3 a deux antécédents par la fonction f.
Il s'agit de 0 et 2.

c) Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-2;3]$ est celui ci-contre

x	-2		1		3
f			4		
		↗		↘	
	2				1

d) Calculons les trois images demandées. Pour ce faire, nous allons utiliser le graphique :

- $h(-1)=3-f(-1+2)=3-f(1)=3-4=-1$
- $h(-4)=3-f(-4+2)=3-f(-2)=3-2=1$
- $h(0)=3-f(0+2)=3-f(2)=3-3=0$

e) Pour déterminer les antécédents de 0 par h, nous devons résoudre l'équation $h(x)=0$.

$$h(x)=0 \Leftrightarrow 3-f(x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x+2)=3 \Leftrightarrow x+2=0 \ \underline{\text{ou}}\ x+2=2}_{\text{D'après la question 4.b, 3 a deux antécédents par f. Il s'agit de 0 et 2}} \Leftrightarrow x=-2 \ \underline{\text{ou}}\ x=0$$

<u>Conclusion :</u> 0 a deux antécédents par h. Il s'agit de -2 et 0.

f) Résolvons l'inéquation proposée...comme la question précédente.

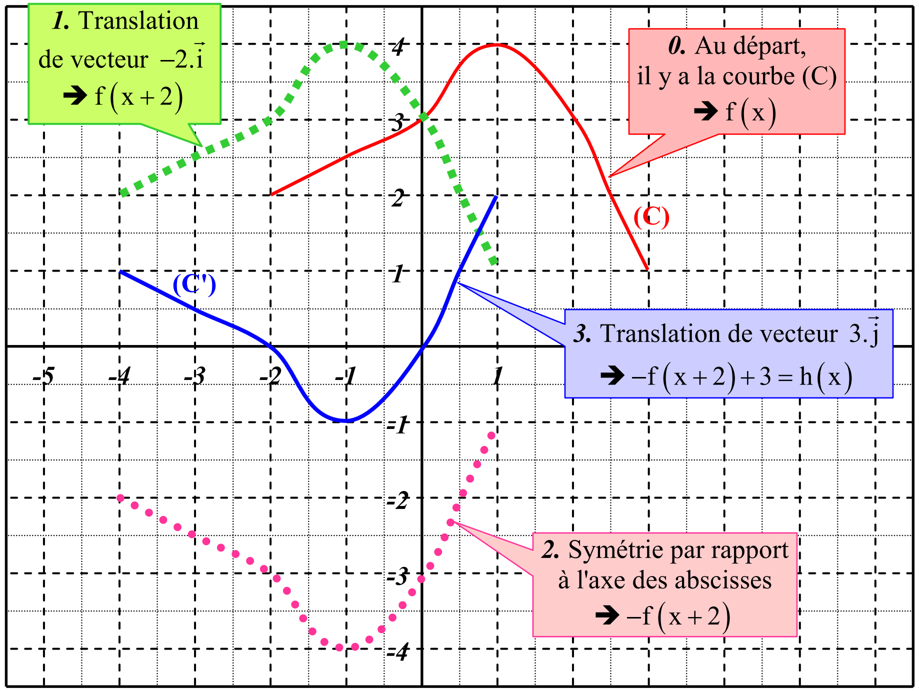
$$h(x)\leq 1 \Leftrightarrow 3-f(x+2)\leq 1 \Leftrightarrow -f(x+2)\leq -2 \Leftrightarrow \underbrace{f(x+2)\geq 2}_{\text{On a multiplié par }-1}$$

Or l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t)\geq 2$ est l'intervalle $[-2;2,5]$. Par suite :

$$h(x)\leq 1 \Leftrightarrow \underbrace{f(x+2)\geq 2 \Leftrightarrow -2\leq x+2\leq 2,5}_{x+2 \text{ appartient à l'ensemble des solutions } [-2;2,5] \text{ de l'inéquation } f(t)\geq 2} \Leftrightarrow -4\leq x\leq 0,5$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x)\leq 1$ est l'intervalle $[-4;0,5]$.

g) On passe de la courbe (C) à la courbe (C') représentant h de la manière suivante.



h) D'après sa courbe (C'), deux cas sont à envisager quant aux variations de la fonction h.

- Sur l'intervalle $[-4;-1]$, la situation de la fonction h est :

$$x\in[-4;-1] \xrightarrow[\substack{\text{Croissante}\\ \text{sur } \mathbb{R}}]{u(t)=t+2} x+2\in[-2;1] \xrightarrow[\substack{\text{Croissante}\\ \text{sur } [-2;1]}]{f} f(x+2) \xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur } \mathbb{R}}]{v(t)=-t+3} h(x)$$

<u>Conclusion :</u> la composée $h=v\circ f\circ u$ est donc décroissante sur l'intervalle $[-4;-1]$.

- Sur l'intervalle $[-1;1]$, la situation de la fonction h est :

$$x\in[-1;1] \xrightarrow[\substack{\text{Croissante}\\ \text{sur } \mathbb{R}}]{u(t)=t+2} x+2\in[1;3] \xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur } [1;3]}]{f} f(x+2) \xrightarrow[\substack{\text{Décroissante}\\ \text{sur } \mathbb{R}}]{v(t)=-t+3} h(x)$$

<u>Conclusion :</u> la composée $h=v\circ f\circ u$ est croissante sur l'intervalle $[-1;1]$.

Une fonction paipaire

Le contexte

Cet exercice consiste en l'étude d'une fonction paire sans utiliser la dérivation. Les variations sont établies en disant qu'elle est la composée de fonctions de référence.
Sont également au programme parité et second degré.

L'énoncé

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{4.x^2+5}{x^2+3}$$

On appelle (C) la courbe représentative de cette fonction f.

a) La fonction f est-elle paire ? Est-elle impaire ? On justifiera sa réponse.
Quelle conséquence cela a-t-il sur la courbe (C) ?

b) Déterminer le ou les antécédents de 3 par la fonction f.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\geq 4$.
Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

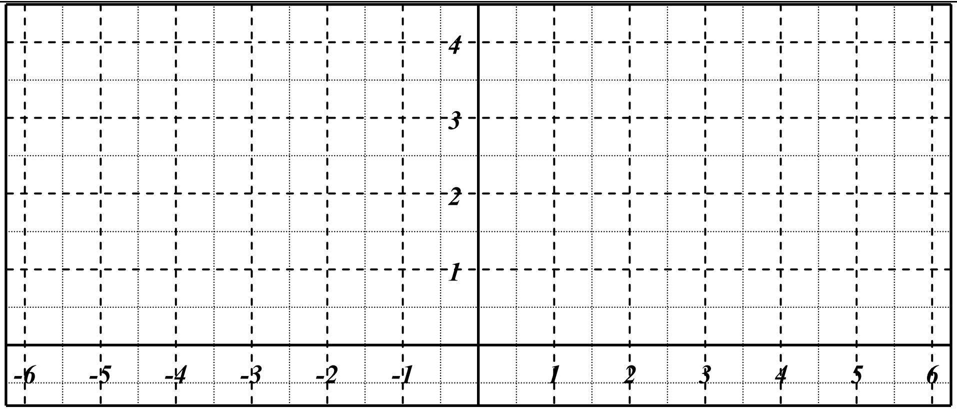
d) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel x, on ait :

$$f(x)=a+\frac{b}{x^2+3}$$

En déduire une décomposition de f à l'aide des fonctions de référence et étudier le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$. On justifiera bien toutes les étapes.

e) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$. Justifier.
Préciser les extrema de la fonction f ainsi que les valeurs de x où ils sont atteints.
Quelles semblent être les limites de f aux infinis ?

f) Tracer la courbe (C) sur le graphique ci-contre.



Le corrigé

a) Du fait de la parité de la fonction carrée, f semble paire. Prouvons-le !
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

La fonction carré est paire

$$f(-x)=\frac{4\times(-x)^2+5}{(-x)^2+3}=\frac{4\times x^2+5}{x^2+3}=f(x)$$

La fonction carré est paire

Conclusion : comme tout réel x et son opposé $-x$ ont des images égales par f, alors cette dernière fonction est paire. Par conséquent, sa courbe (C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

➲ Par contre, la fonction f n'est pas impaire. En effet, si l'on calcule les images de 2 et de son opposé -2, on obtient :

$$f(2)=\frac{4\times 2^2+5}{2^2+3}=\frac{4\times 4+5}{4+3}=\frac{21}{7}=3$$

$$\underbrace{f(-2)=f(2)}_{\text{Car f est paire...}}=3$$

Conclusion : comme les images par f de 2 et de son opposé -2 ne sont pas opposées alors la fonction f n'est pas impaire.

La question qui tracasse : les fonctions qui sont à la fois paire et impaire ?
Une fonction qui est à la fois paire et impaire, nous en connaissons déjà une : la fonction nulle. Mais en existe-t-il d'autres ? Et si oui, à quoi ressemblent-elles ?
Soit f une fonction qui est paire et impaire. On note D_f son ensemble de définition.

Comme f est paire, alors pour tout réel $x \in D_f$, nous avons : $f(-x) = f(x)$.

Comme f est impaire, alors pour tout réel $x \in D_f$, nous avons : $f(-x) = -f(x)$.

Autrement dit, pour tout réel $x \in D_f$, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{f(x) = f(-x)}_{\text{Parité}} \underbrace{= -f(x)}_{\text{Imparité}} \Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow \underbrace{f(x)+f(x)}_{2.f(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{0}{2} = 0$$

<u>Conclusion :</u> la seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

b) Déterminer les antécédents de 3 par f, c'est trouver tous les réels x dont l'image par f est égale à 3. Pour cela, nous devons résoudre l'équation $f(x) = 3$.

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{4.x^2+5}{x^2+3} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{4.x^2+5-3\times(x^2+3)}{x^2+3} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2+3} = 0$$

Un quotient n'est nul que lorsque et seulement lorsque son numérateur l'est et que dans le même temps, son dénominateur ne l'est. Par conséquent :

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x^2-4}{x^2+3} = 0}_{\text{Ce quotient est nul}} \Leftrightarrow \underbrace{x^2-4=0}_{\substack{\text{Son numérateur est nul} \\ \textit{Equation (1)}}} \ \underline{\text{et}}\ \underbrace{x^2+3 \neq 0}_{\substack{\text{Son dénominateur est non nul} \\ \textit{Inéquation (2)}}}$$

Résolvons l'équation ***(1)*** :

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \ \underline{\text{ou}}\ x = 2$$

Et pour ce qui est de l'inéquation ***(2)*** :

$$x^2 + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -3$$

Comme aucun carré ne peut être égal à -3, alors tous les réels x sont solution de ***(2)***.
Ainsi, nous avons obtenu :

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \underbrace{x = -2 \ \underline{\text{ou}}\ x = 2}_{\text{Solutions de } \textit{(1)}} \ \underline{\text{et}}\ \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{Solutions de } \textit{(2)}}$$

<u>Conclusion :</u> 3 a deux antécédents par la fonction f. Il s'agit de -2 et 2.

A propos de l'ensemble de définition de f
$f(x)$ est un quotient qui ne peut exister que lorsque et seulement lorsque son dénominateur x^2+3 est non nul . Ce qui est toujours le cas !
C'est pour cela que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.

c) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation demandée.

$$f(x) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{4.x^2+5}{x^2+3} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4.x^2+5-4\times(x^2+3)}{x^2+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-7}{x^2+3} \geq 0$$

Déterminons le signe du facteur x^2+3 ?
Comme un carré est toujours positif ou nul alors pour tout réel x, nous avons :

$$x^2 \geq 0 \quad \text{donc} \quad \underbrace{x^2+3 \geq 3}_{\text{On ajoute 3...}} \quad \text{donc} \quad x^2+3 \text{ est toujours strictement positif}$$

Par conséquent, le tableau de signe de notre quotient est le suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
-7	$-$
x^2+3	$+$
$\frac{-7}{x^2+3}$	$-$

Comme le quotient $\frac{-7}{x^2+3}$ n'est jamais négatif, alors l'inéquation $f(x) \geq 4$ n'a aucune solution.
Par conséquent, pour tout réel x, nous avons :

$$\underbrace{f(x) < 4}_{\text{Le contraire de } f(x)\geq 4}$$

Donc 4 est un majorant de la fonction f

d) Deux méthodes permettent de décomposer la fonction rationnelle f.

- ***Première méthode : par identification des coefficients***

On veut écrire la fonction f sous la forme :

$$a + \frac{b}{x^2+3} = \frac{a.(x^2+3)+b}{x^2+3} = \underbrace{\frac{a.x^2+3.a+b}{x^2+3} = \frac{4.x^2+5}{x^2+3}}_{\text{Deux fractions égales...}} = f(x)$$

Or deux fractions égales ayant le même dénominateur ont de facto des numérateurs égaux. Par conséquent : $\underbrace{a \times x^2 + (3.a+b) = 4 \times x^2 + 5}_{\text{Deux polynômes égaux...}}$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même puissance égaux. Il vient :

$$\begin{cases} \text{Egalité des coefficients en } x^2 : & a = 4 \\ \text{Egalité des coefficients en } x : & 0 = 0 \leftarrow \text{Très utile !} \\ \text{Egalité des coefficients constants :} & 3.a+b=5 \Rightarrow 12+b=5 \Rightarrow b=-7 \end{cases}$$

- ***Seconde méthode : en faisant apparaître le numérateur dans le dénominateur***

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{\overbrace{4.x^2}^{\substack{\text{Combien de} \\ \text{fois } x^2+3\text{ ?}}}+5}{x^2+3} = \frac{\overbrace{4\times(x^2+3)-12}^{=4.x^2}+5}{x^2+3} = \frac{4\times\cancel{(x^2+3)}}{\cancel{x^2+3}} + \frac{-7}{x^2+3} = 4 + \frac{-7}{x^2+3}$$

<u>Conclusion :</u> l'écriture dite décomposée de la fonction rationnelle f est : $f(x)=4+\dfrac{-7}{x^2+3}$

➲ Déterminons le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Comme pour tout réel x, nous avons :

$$f(x)=-7\times\frac{1}{\left(x^2\right)+3}+4,$$

alors la fonction f est la composée des fonctions de références suivantes :

$$\underset{[0;+\infty[}{\overset{x}{\in}}\ \xrightarrow[\text{Croissante sur }[0;+\infty[]{\text{Carré}}\ \underset{[0;+\infty[}{\overset{x^2}{\in}}\ \xrightarrow[\text{Fonction affine croissante}]{u(t)=t+3}\ \underset{[3;+\infty[}{\overset{x^2+3}{\in}}\ \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]0;+\infty[]{\text{Inverse}}\ \frac{1}{x^2+3}\ \xrightarrow[\text{Fonction affine décroissante}]{v(t)=-7.t+4}\ f(x)$$

<u>Conclusion :</u> la fonction f qui est la composée $v\circ\text{Inverse}\circ u\circ\text{Carré}$, est donc croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

e) Comme la fonction f est paire et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$, alors elle est décroissante sur l'intervalle symétrique $]-\infty;0]$.

Par conséquent, son tableau de variation sur ℝ est celui ci-contre.

Calculons l'image de 0 par f.

$$f(0)=\frac{4\times0^2+5}{0^2+3}=\frac{5}{3}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	4	↘	5/3	↗	4

➲ D'après son tableau de variation, la fonction f admet un minimum en $x=0$. Il vaut $\dfrac{5}{3}$.

Par contre, elle n'admet aucun maximum. Même pas 4 ! En effet, depuis la question c, nous savons qu'aucun réel x n'a pour image 4 par f. Or un extremum doit être atteint.
4 est un majorant mais ce n'est pas un maximum

➲ Quand x tend vers $+\infty$ c'est-à-dire devient de plus en plus grand, x^2+3 devient aussi de plus en plus grand.

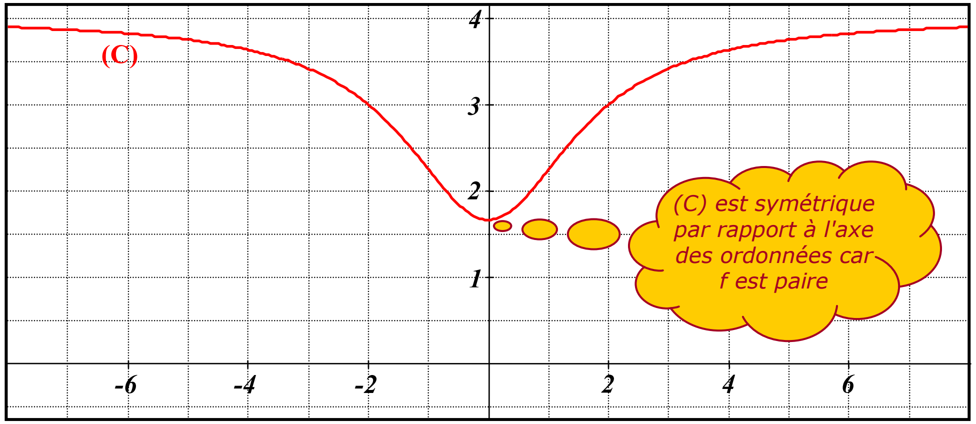
Donc son inverse $\dfrac{-7}{x^2+3}$ est de plus en plus petit, c'est-à-dire de plus en plus proche de 0.

Donc $f(x)=4+\dfrac{-7}{x^2+3}$ devient de plus en plus proche 4.

<u>Conclusion :</u> on dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, est égale à 4.

Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$. De la même façon, on établit : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=4$

f) La courbe (C) représentant la fonction f est la suivante :



Symétrique mais pas paipaire !

Le contexte

Cet exercice est une étude de fonction sans utiliser la dérivation. Les variations de la fonction s'établissent en utilisant le fait qu'elle est une composée de fonctions de référence. Il est également question d'axe de symétrie et de second degré.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=\frac{2.x^2+4.x+7}{x^2+2.x+2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Pourquoi la fonction f est-elle définie sur $\mathbb{R}$?
Indication : *autrement dit, pourquoi tout réel x a-t-il une image par f ?*

b) Déterminer le ou les antécédents de 3 par la fonction f.

c) Démontrer que pour tout réel x, $f(x)>2$

d) Démontrer que la droite verticale Δ d'équation $x=-1$ est un axe de symétrie de la courbe (C).

e) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel x, on ait :

$$f(x)=a+\frac{b}{x^2+2.x+2}$$

En déduire que pour tout réel x :

$$f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2+1}$$

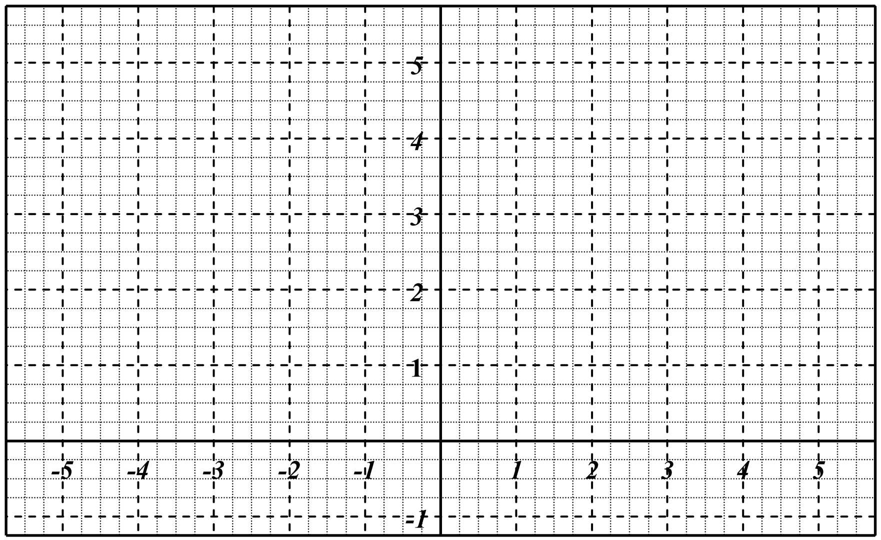
Cette dernière forme est appelée écriture décomposée de f.

f) En écrivant f comme étant une composée de fonctions de référence, déterminer son sens de variation sur l'intervalle $]-\infty;-1[$.

g) Quel est le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$? On justifiera sa réponse.
Déterminer les extrema de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

h) En utilisant l'écriture décomposée de la fonction f, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. On détaillera son raisonnement.

i) Sur la graphique ci-dessous, tracer la courbe (C) ainsi que la droite Δ.



Le corrigé

a) Les fonctions du second degré $N(x)=2.x^2+4.x+7$ et $D(x)=x^2+2.x+2$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, tout réel x a une image par les fonctions N et D.

Mais le quotient $f(x)=\frac{2.x^2+4.x+7}{x^2+2.x+2}$ ne peut exister que lorsque et seulement lorsque son dénominateur $x^2+2.x+2$ est non nul.

Déterminons le signe de la forme du second degré $D(x)=x^2+2.x+2$.
Pour ce faire, calculons son discriminant.

$$\Delta_{D(x)}=2^2-4\times1\times2=4-8=-4$$

Comme son discriminant est négatif, alors la forme du second degré $D(x)$ est toujours du signe de son coefficient dominant 1 : $D(x)$ est toujours positif.
Ce résultat ne resservira tout au long de l'exercice.
<u>Conclusion :</u> comme son dénominateur $D(x)=x^2+2.x+2$ n'est jamais nul sur $\mathbb{R}$, alors la fonction rationnelle $f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Pour déterminer les antécédents de 3 par la fonction f, résolvons l'équation $f(x)=3$.

$$f(x)=3 \Leftrightarrow \frac{2.x^2+4.x+7}{x^2+2.x+2}-3=0 \Leftrightarrow \frac{(2.x^2+4.x+7)-3\times(x^2+2.x+2)}{x^2+2.x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2.x^2+4.x+7-3.x^2-6.x-6}{x^2+2.x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-2.x+1}{x^2+2.x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{(x^2+2.x+2)}\times\frac{-x^2-2.x+1}{\cancel{x^2+2.x+2}}=0\times(x^2+2.x+2)}_{\text{On multiplie les deux membres de l'équation par le réel positif donc non nul qu'est } x^2+2.x+2 \text{ de façon à éliminer le dénominateur.}}$$

$$\Leftrightarrow -x^2-2.x+1=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2.x-1=0}_{\text{On a tout multiplié par }-1}$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation du second degré.

$$\Delta=2^2-4\times1\times(-1)=4+4=8=\left(\sqrt{8}\right)^2=\left(\sqrt{4}\times\sqrt{2}\right)^2=\left(2.\sqrt{2}\right)^2$$

Comme son discriminant est positif, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-2-2.\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-2+2.\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}$$

<u>Conclusion :</u> 3 a deux antécédents par la fonction f qui sont $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$.

c) Pour connaître laquelle des deux quantités $f(x)$ ou 2 est la plus grande, nous allons chercher le signe de leur différence $f(x)-2$. Pour tout réel x, nous avons :

$$f(x)-2=\frac{2.x^2+4.x+7-2.(x^2+2.x+2)}{x^2+2.x+2}=\frac{2.x^2+4.x+7-2.x^2-4.x-4}{x^2+2.x+2}=\frac{3}{x^2+2.x+2}$$

Or, depuis la question 2.a, nous savons que le dénominateur $D(x)=x^2+2.x+2$ est toujours strictement positif.

<u>Conclusion :</u> comme le quotient de deux positifs l'est aussi, il vient que pour tout réel x :

$$f(x)-2=\frac{\oplus}{\oplus} \text{ est positif} \Leftrightarrow f(x)-2>0 \Leftrightarrow f(x)>2$$

d) Pour prouver que la droite Δ d'équation $x=-1$ est un axe de symétrie de la courbe (C), nous devons établir que pour tout réel h, $\underbrace{-1+h \text{ et } -1-h \text{ ont mêmes images par f}}_{f(-1+h)=f(-1-h)}$.

Soit h un réel quelconque.

- Calculons l'image de $-1+h=h-1$ par la fonction f.

$$f(h-1)=\frac{2.(h-1)^2+4.(h-1)+7}{(h-1)^2+2.(h-1)+2}=\frac{2.h^2-4.h+2+4.h-4+7}{h^2-2.h+1+2.h-2+2}=\frac{2.h^2+5}{h^2+1}$$

- Calculons l'image de $-1-h=(-1)\times(1+h)$ par la fonction f.

Une chose intéressante : $(-1-h)^2=(-1)^2\times(1+h)^2=1\times(1+h)^2=(1+h)^2$

$$f(-1-h)=\frac{2.(1+h)^2+4.(-1-h)+7}{(1+h)^2+2.(-1-h)+2}=\frac{2.h^2+4.h+2-4-4.h+7}{h^2+2.h+1-2-2.h+2}=\frac{2.h^2+5}{h^2+1}$$

<u>Conclusion :</u> comme pour tout réel h, $f(-1+h)=f(-1-h)$, alors la droite Δ d'équation $x=-1$ est un axe de symétrie de la courbe (C)...qui représente f.

e) Pour décomposer la fonction rationnelle f, la meilleure des méthodes est encore d'essayer faire apparaître le dénominateur dans le numérateur de façon à simplifier. Pour tout réel x, nous avons :

$$f(x)=\frac{\overbrace{2.x^2}^{\text{Combien de fois } x^2+2.x+2\text{ ?}}+4.x+7}{x^2+2.x+2}=\frac{\overbrace{2\times(x^2+2.x+2)-4.x-4}^{=2.x^2 \text{ au total !}}+4.x+7}{x^2+2.x+2}$$

$$=\frac{2\times\cancel{(x^2+2.x+2)}}{\cancel{x^2+2.x+2}}+\frac{3}{x^2+2.x+2}=2+\frac{3}{x^2+2.x+2}$$

De plus, comme pour tout réel x, nous avons aussi :

$$D(x)=\underbrace{\overbrace{x^2+2.x}^{\text{Début d'une...}}+2}_{\text{Forme développée}}=\overbrace{(x+1)^2-1}^{\text{...identité remarquable}}+2=\underbrace{(x+1)^2+1}_{\text{Ecriture canonique}}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel x, nous avons : $f(x)=\underbrace{2+\frac{3}{x^2+2.x+2}=2+\frac{3}{(x+1)^2+1}}_{\text{Ecritures décomposées de f}}$.

f) Sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, la fonction f est la composée suivante :

$$\underset{]-\infty;-1[}{\overset{x}{\in}} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{u(t)=t+1} \underset{]-\infty;0[}{\overset{x+1}{\in}} \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]-\infty;0[]{\text{Carré}} \underset{]0;+\infty[}{\overset{(x+1)^2}{\in}} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{u(t)=t+1} \cdots$$

$$\underset{]1;+\infty[}{\overset{(x+1)^2+1}{\in}} \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]0;+\infty[]{\text{Inverse}} \frac{1}{(x+1)^2+1} \xrightarrow[\text{Croissante sur } \mathbb{R}]{v(t)=2+3.t} 2+\frac{1}{(x+1)^2+1}$$

<u>Conclusion :</u> sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, la composée $f = v \circ \text{Inverse} \circ u \circ \text{Carré} \circ u$ est croissante.

g) Comme la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ et que sa courbe est symétrique par rapport à la droite Δ d'équation $x=-1$, alors la fonction f est décroissante sur $]-1;+\infty[$ qui est l'intervalle symétrique de $]-\infty;-1[$ par rapport à -1.

Le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est celui ci-contre :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f			5		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	2				2

Le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est 5. Il est atteint en $x=-1$.
Par contre, f n'a pas de minimum.

h) Qu'advient-il de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, c'est-à-dire lorsqu'il devient grand ?

Quand x devient grand, $x+1$ devient aussi grand. Et son carré $(x+1)^2$ devient gigantesque.

Ainsi quand x tend vers $+\infty$, la quantité $(x+1)^2+1$ tend aussi vers $+\infty$.

Donc, son inverse $\dfrac{3}{(x+1)^2+1}$ tend vers $0\ \dfrac{3}{+\infty}=0$. Elle devient petite.

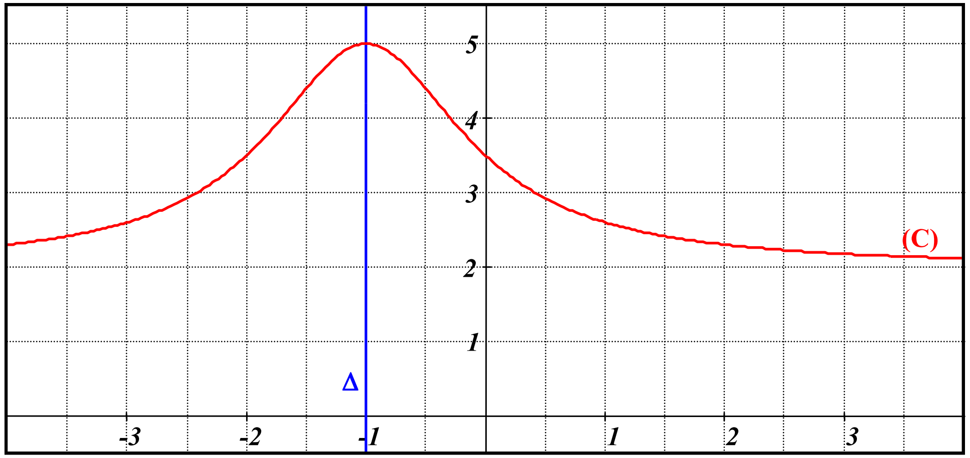
Par conséquent, $f(x)=2+\dfrac{3}{(x+1)^2+1}$ tend vers $2+0=2$.

<u>Conclusion :</u> La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale 2. On résume cela par :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

De la même façon, on prouve : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$

i) La courbe (C) est la suivante. Elle est symétrique par rapport à la droite Δ..



Angles et trigonométrie

Avis de grand froid

Le contexte

Cet exercice assez difficile à appréhender aborde les angles orientés, les coordonnées polaires et leur conversion avec leurs consoeurs cartésiennes.

L'énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dans ce repère :

- Le point A a pour coordonnées polaires $\left(r_A = 2;\theta_A = \dfrac{\pi}{6}\right)$.
- Le point B a pour coordonnées cartésiennes $(-2;-2)$.

a) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point A.
Construire le point A dans le repère ci-contre en utilisant ses coordonnées polaires.

b) Déterminer par le calcul les coordonnées polaires du point B.

On appelle C l'image du point O par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

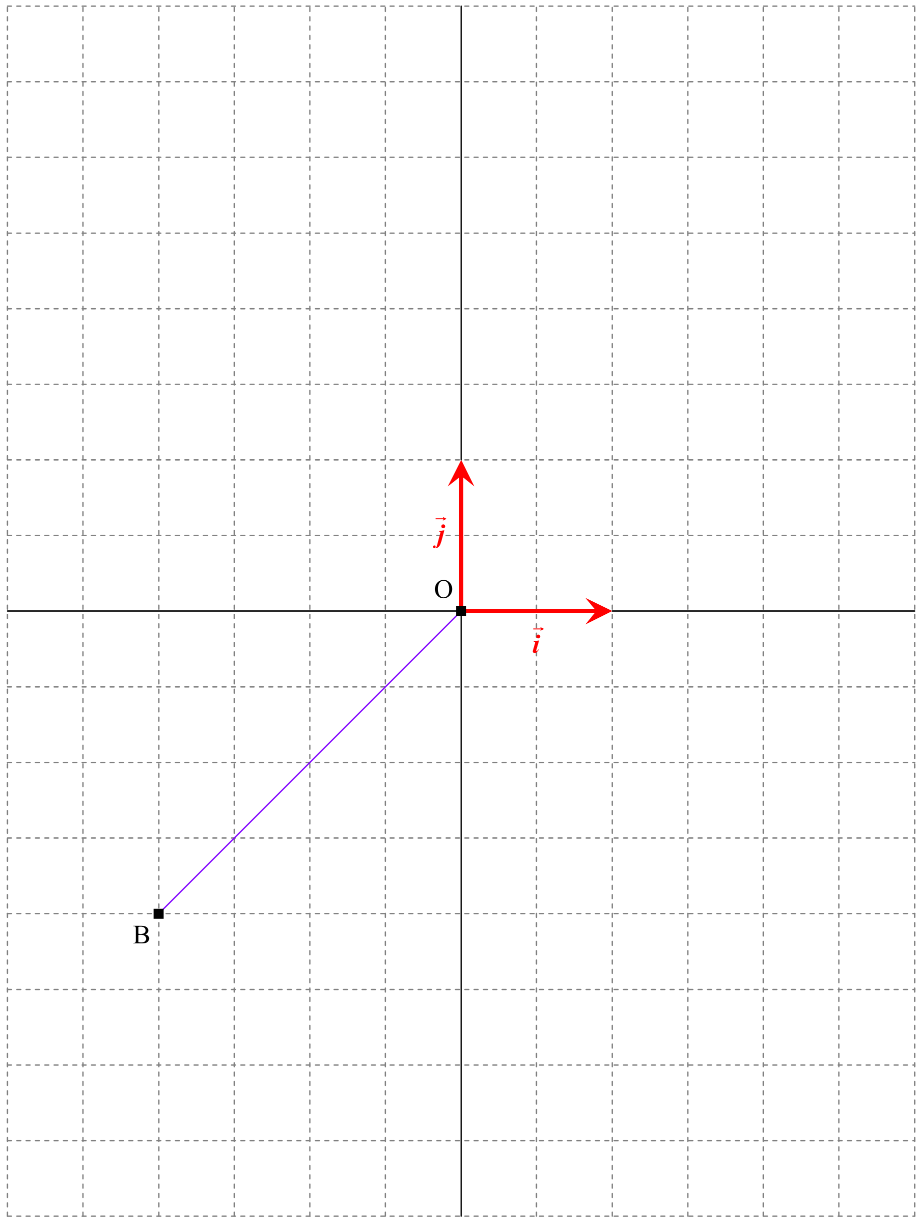
On note E l'image du point O par la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{5\pi}{6}$

c) Construire les points D et E sur la figure ci-contre.

d) Démontrer que $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}\right)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AE}\right)$ modulo 2π

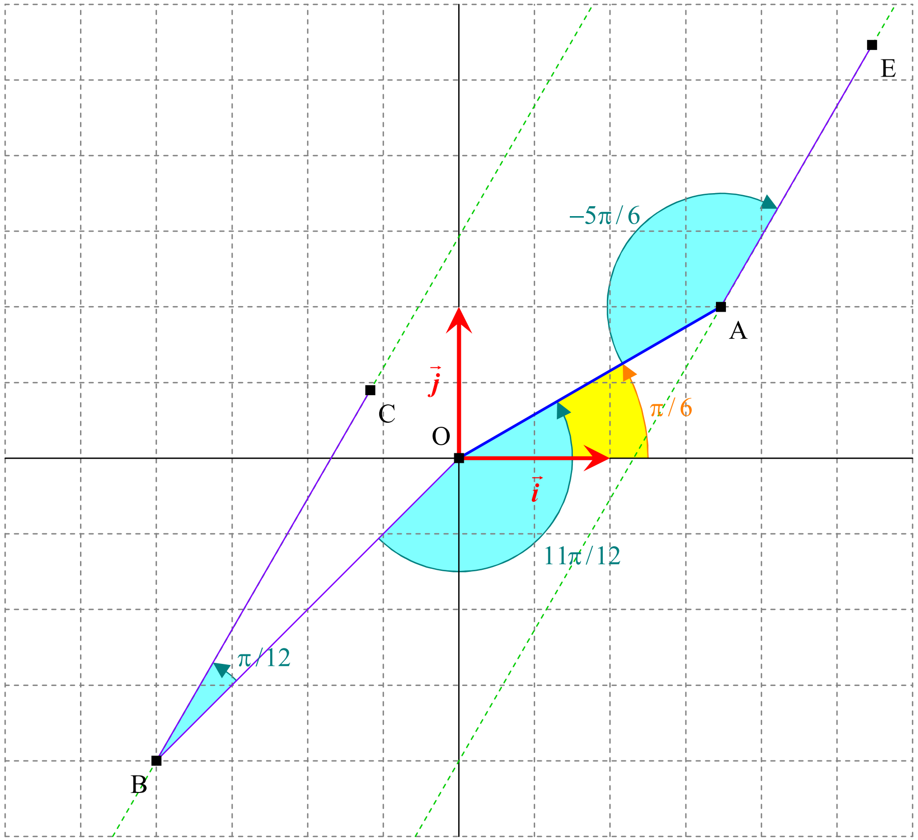
Une grande attention sera accordée à la rédaction de cette question ainsi qu'aux justifications apportées.

e) Démontrer que les droites (BC) et (AE) sont parallèles.



Le corrigé

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



a) Comme le point A a pour coordonnées polaires $\left(r_A = 2; \theta_A = \frac{\pi}{6}\right)$ alors nous avons :

$$\overrightarrow{OA} = 2\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right).\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).\vec{j}\right] = 2\times\left[\frac{\sqrt{3}}{2}.\vec{i} + \frac{1}{2}.\vec{j}\right] = \sqrt{3}.\vec{i} + \vec{j}$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées cartésiennes du point A sont $\left(\sqrt{3};1\right)$.

b) D'abord, calculons le module r_B du point B de coordonnées cartésiennes $(-2;-2)$.

$$r_B = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4}\times\sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$$

Il vient alors :

$$\overrightarrow{OB} = -2.\vec{i} - 2.\vec{j} = 2.\sqrt{2}\times\left[-\frac{2}{2.\sqrt{2}}.\vec{i} - \frac{2}{2.\sqrt{2}}.\vec{j}\right] = 2.\sqrt{2}\times\left[-\frac{\sqrt{2}\times\cancel{\sqrt{2}}}{2.\cancel{\sqrt{2}}}.\vec{i} - \frac{\sqrt{2}\times\cancel{\sqrt{2}}}{2.\cancel{\sqrt{2}}}.\vec{j}\right]$$

$$= 2.\sqrt{2}\times\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}.\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\vec{j}\right] = 2.\sqrt{2}\times\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right).\vec{i} + \cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right).\vec{j}\right]$$

<u>Conclusion :</u> les coordonnées polaire du point B dans le repère polaire $\left(O;\vec{i}\right)$ sont :

$$\left(r_B = 2.\sqrt{2}; \theta_B = \frac{5.\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi\right)$$

c) Comme C est l'image de O par la rotation d'angle $\frac{\pi}{12}$ et de centre O , alors l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BC}\right)$ mesure $\frac{\pi}{12}$ radians et, les distances BO et BC sont égales.

De la même manière, il vient : $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AE}\right) = -\frac{5.\pi}{6}$ modulo 2π et AO = AE .

d) Nous pouvons écrire :

$$\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}\right) = \underbrace{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}\right) + \left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AE}\right)}_{\text{Merci à la relation de Chasles !}} \text{ modulo } 2\pi$$

$$= \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}\right) + \underbrace{\left(-\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)} + \underbrace{\left(-\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AE}\right)} \text{ modulo } 2\pi$$

$$= \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}\right) + \underbrace{\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) + \pi} + \underbrace{\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AE}\right) + \pi} \text{ modulo } 2\pi$$

$$= \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}\right) + \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AE}\right) + 2.\pi \text{ modulo } 2\pi$$

$$= \underbrace{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}\right) + \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AE}\right) \text{ modulo } 2\pi}_{\text{Car on travaille modulo } 2\pi\text{...}}$$

e) Intéressons-nous à l'angle orienté formé par les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}$. Lors de la précédente question, nous l'avons exprimé comme une somme d'autres angles :

- $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}\right) = -\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{12}$ modulo 2π

- $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{OB},\vec{i}\right)+\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)=-\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)+\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{9\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}=\frac{11\pi}{12}$
- $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{5.\pi}{6}$ modulo 2π

Il vient alors :

$$\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}\right)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AE}\right) \text{ modulo } 2\pi$$

$$=-\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}-\frac{10\pi}{12}=0 \text{ modulo } 2\pi$$

<u>Conclusion :</u> comme une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}\right)$ est 0, alors les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, donc les droites (BC) et (AE) sont parallèles.

Ces équations trigos qui vous donnent le tournis !

Le contexte

Voici trois équations trigonométriques à résoudre ! Les démarches sont relativement simples mais les calculs sont assez longs et délicats. Certains diront que leurs résolutions peuvent être envisagées plus simplement. Ils n'auront pas nécessairement tort.

L'énoncé

a) Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'équation $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$ l'équation $2.\cos(3.x)+\sqrt{3}=0$.

c) Résoudre dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'équation $\cos\left(2.x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Le corrigé

a) Nous allons résoudre cette équation en la transformant en une égalité de sinus :

$$\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \underbrace{x=\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad x=\pi-\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi}_{\text{où } k \text{ est un entier relatif}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad x=\frac{2\pi}{3}+k\times 2\pi}_{\text{où } k \text{ est un entier relatif}}$$

Dans l'intervalle de longueur 2π qu'est $[0;2\pi]$:

- le seul réel de la forme $\frac{\pi}{3}+k\times 2\pi$ est $\frac{\pi}{3}$.
- le seul réel de la forme $\frac{2\pi}{3}+k\times 2\pi$ est $\frac{2\pi}{3}$.

<u>Conclusion :</u> cette équation a deux solutions dans $[0;2\pi]$. Il s'agit de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

b) Pour résoudre cette équation, nous allons nous ramener à une égalité de cosinus.

$$2.\cos(3.x)+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 2.\cos(3.x)=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos(3.x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3.x=\frac{7\pi}{6}+k\times 2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad 3.x=-\frac{7\pi}{6}+k\times 2\pi}_{\text{où } k \text{ est un entier relatif}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=\frac{7\pi}{18}+k\times\frac{2\pi}{3} \quad \underline{\text{ou}} \quad x=-\frac{7\pi}{18}+k\times\frac{2\pi}{3}}_{\text{où } k \text{ est un entier relatif}}$$

✍ Déterminons les réels de la forme $\frac{7\pi}{18}+k\times\frac{2\pi}{3}$ se trouvant dans l'intervalle $[0;2\pi]$.

$$\frac{7\pi}{18}+k\times\frac{2\pi}{3}\in[0;2.\pi] \Leftrightarrow 0\le\frac{7\pi}{18}+k\times\frac{2\pi}{3}\le 2.\pi \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{18}\le k\times\frac{2\pi}{3}\le 2\pi-\frac{7\pi}{18}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{18}\le k\times\frac{2\cancel{\pi}}{3}\le\frac{29\cancel{\pi}}{18} \Leftrightarrow -\frac{7}{18}\times\frac{3}{2}\le k\le\frac{29}{18}\times\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{12}\le k\le\frac{29}{12}$$

Trois entiers relatifs se trouvent dans l'intervalle $\left[-\frac{7}{12};\frac{29}{12}\right]$. Il s'agit de 0; 1 et 2.

Donc il y a dans l'intervalle $[0;2\pi]$ trois solutions de la forme $\frac{7\pi}{18}+k\times\frac{2\pi}{3}$:

$$\underbrace{\frac{7\pi}{18}+0\times\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{18}}_{k=0} \quad \underbrace{\frac{7\pi}{18}+1\times\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{18}+\frac{12\pi}{18}=\frac{19\pi}{18}}_{k=1} \quad \underbrace{\frac{7\pi}{18}+2\times\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{18}+\frac{24\pi}{18}=\frac{31\pi}{18}}_{k=2}$$

✍ Déterminons les réels de la forme $-\frac{7\pi}{18}+k\times\frac{2\pi}{3}$ se trouvant dans l'intervalle $[0;2\pi]$.

$$-\frac{7\pi}{18}+k\times\frac{2\pi}{3}\in[0;2.\pi] \Leftrightarrow 0\le-\frac{7\pi}{18}+k\times\frac{2\pi}{3}\le 2.\pi \Leftrightarrow \frac{7\pi}{18}\le k\times\frac{2\pi}{3}\le 2\pi+\frac{7\pi}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{18}\le k\times\frac{2\cancel{\pi}}{3}\le\frac{43\cancel{\pi}}{18} \Leftrightarrow \frac{7}{18}\times\frac{3}{2}\le k\le\frac{43}{18}\times\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{12}\le k\le\frac{43}{12}$$

Trois entiers relatifs se trouvent dans l'intervalle $\left[\frac{7}{12};\frac{43}{12}\right]$. Il s'agit de 1 ; 2 et 3.

Donc il y a dans l'intervalle $[0;2\pi]$ trois solutions de la forme $-\frac{7\pi}{18}+k\times\frac{2\pi}{3}$:

$$\underbrace{-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}=-\frac{7\pi}{18}+\frac{12\pi}{18}=\frac{5\pi}{18}}_{k=1} \quad \underbrace{-\frac{7\pi}{18}+2\times\frac{2\pi}{3}=-\frac{7\pi}{18}+\frac{24\pi}{18}=\frac{17\pi}{18}}_{k=2}$$

$$\underbrace{-\frac{7\pi}{18}+3\times\frac{2\pi}{3}=-\frac{7\pi}{18}+\frac{36\pi}{18}=\frac{29\pi}{18}}_{k=3}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $2.\cos(3.x)+\sqrt{3}=0$ admet dans l'intervalle $[0;2\pi]$ six solutions

$$\frac{5\pi}{18};\ \frac{7\pi}{18};\ \frac{17\pi}{18};\ \frac{19\pi}{18};\ \frac{29\pi}{18} \text{ et } \frac{31\pi}{18}$$

c) Pour résoudre cette équation, nous allons nous ramener à une égalité de sinus.

Nous savons que pour tout réel t, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos(t)$. Il vient alors :

$$\cos\left(2.x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(2.x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2.x+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2.x+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{5}+k\times 2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad 2.x+\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{5}+k\times 2\pi}_{\text{où } k \text{ est un entier relatif}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2.x=\frac{4\pi}{20}-\frac{15\pi}{20}+k\times 2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad 2.x=\frac{16\pi}{20}-\frac{15\pi}{20}+k\times 2\pi}_{\text{où } k \text{ est un entier relatif}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2.x=-\frac{11\pi}{20}+k\times 2\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad 2.x=\frac{\pi}{20}+k\times 2\pi}_{\text{où } k \text{ est un entier relatif}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=-\frac{11.\pi}{40}+k\times\pi \quad \underline{\text{ou}} \quad x=\frac{\pi}{40}+k\times\pi}_{\text{où } k \text{ est un entier relatif}}$$

✍ Cherchons les réels de la forme $-\frac{11\pi}{40}+k\times\pi$ dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

$$-\frac{11\pi}{40}+k\times\pi\in[-\pi;\pi] \Leftrightarrow -\pi\le-\frac{11\pi}{40}+k\times\pi\le\pi \Leftrightarrow -\pi+\frac{11\pi}{40}\le k\times\pi\le\pi+\frac{11\pi}{40}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{29\cancel{\pi}}{40}\le k\times\cancel{\pi}\le\frac{51\cancel{\pi}}{40} \Leftrightarrow -\frac{29}{40}\le k\le\frac{51}{40}$$

Seuls deux entiers relatifs se trouvent dans l'intervalle $\left[-\frac{29}{40};\frac{51}{40}\right]$. Il s'agit de 0 et 1.

Donc l'intervalle $[-\pi;\pi]$ contient exactement deux réels de la forme $-\frac{11\pi}{40}+k\times\pi$.

Il s'agit de : $\underbrace{-\frac{11\pi}{40}+0\times\pi=-\frac{11\pi}{40}}_{k=0}$ et $\underbrace{-\frac{11\pi}{40}+1\times\pi=\frac{29\pi}{40}}_{k=1}$

✍ Cherchons les réels de la forme $\frac{\pi}{40}+k\times\pi$ dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

$$\frac{\pi}{40}+k\times\pi\in[-\pi;\pi] \Leftrightarrow -\pi\le\frac{\pi}{40}+k\times\pi\le\pi \Leftrightarrow -\pi-\frac{\pi}{40}\le k\times\pi\le\pi-\frac{\pi}{40}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{41.\cancel{\pi}}{40}\le k\times\cancel{\pi}\le\frac{39.\cancel{\pi}}{40} \Leftrightarrow -\frac{41}{40}\le k\le\frac{39}{40}$$

Seuls deux entiers relatifs se trouvent dans l'intervalle $\left[-\frac{41}{40};\frac{39}{40}\right]$. Il s'agit de -1 et 0.

Donc l'intervalle $[-\pi;\pi]$ contient exactement deux réels de la forme $\frac{\pi}{40}+k\times\pi$.

Il s'agit de : $\underbrace{\frac{\pi}{40}+(-1)\times\pi=-\frac{39\pi}{40}}_{k=-1}$ et $\underbrace{\frac{\pi}{40}+0\times\pi=\frac{\pi}{40}}_{k=0}$

<u>Conclusion :</u> l'équation $\cos\left(2.x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ a quatre solutions dans $[-\pi;\pi]$.

Il s'agit de : $-\frac{39\pi}{40}$; $-\frac{11\pi}{40}$; $\frac{\pi}{40}$ et $\frac{29\pi}{40}$

Tétât au lieu de parler !

Le contexte

Cet exercice est une application directe de formules vues dans le cours. D'ailleurs, lors de la question c, il est demandé d'en établir une de ces formules. C'est ce que certains appellent une Restitution Organisée des Connaissances.

L'énoncé

On appelle θ le réel de l'intervalle $\left[-\frac{3.\pi}{2};-\pi\right]$ tel que $\sin(\theta)=\frac{12}{13}$.

a) Déterminer la valeur exacte de $\cos(\theta)$.

b) Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$.

c) Cette question est une question de cours.
a et b sont deux réels quelconques.
Rappeler la formule exprimant $\cos(a+b)$ en fonction des cosinus et sinus de a et b.
En utilisant cette formule, démontrer que pour tout réel a, on a :

$$\cos(2.a)=2\times\cos^2(a)-1$$

En déduire la valeur de $\cos(2.\theta)$.

Le corrigé

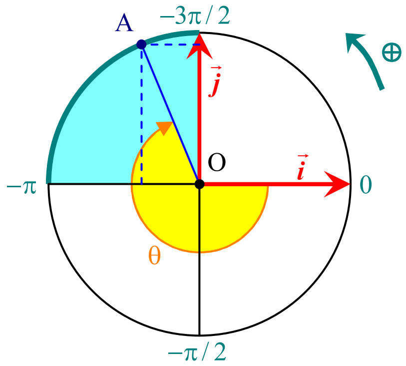
a) Les cosinus et sinus du réel θ vérifient l'égalité :

$$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1 \Leftrightarrow \cos^2(\theta)=1-\sin^2(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\theta)=1-\left(\frac{12}{13}\right)^2=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}=\left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta)=-\frac{5}{13} \ \underline{\text{ou}}\ \cos(\theta)=\frac{5}{13}$$

Or θ est un réel de l'intervalle $\left[-\frac{3.\pi}{2};-\pi\right]$. Donc son cosinus est négatif.



Conclusion : le cosinus du réel θ vaut $-\dfrac{5}{13}$.

b) Appliquant la formule du sinus d'une différence, il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\cos(\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\sin(\theta)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{-5}{13}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{12}{13}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{-17}{13}=-\frac{17.\sqrt{2}}{26}$$

c) La formule demandée est :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\times\cos(b)-\sin(a)\times\sin(b)$$

Pour tout réel a, il vient alors :

$$\cos(2.a)=\cos(a+a)=\cos(a)\times\cos(a)-\sin(a)\times\sin(a)$$
$$=\cos^2(a)-\sin^2(a)=\cos^2(a)-\underbrace{\left[1-\cos^2(a)\right]}_{=\sin^2(a)}$$
$$=\cos^2(a)-1+\cos^2(a)=2\times\cos^2(a)-1$$

On en déduit alors :

$$\cos(2.\theta)=2\times\cos^2(\theta)-1=2\times\left(-\frac{5}{13}\right)^2-1=2\times\frac{25}{169}-1=\frac{50}{169}-\frac{169}{169}=-\frac{119}{169}$$

Barycentres

Les barycentres des Bermudes

Le contexte

Cet exercice traite du barycentre sous tous ces aspects : sa définition, son placement et son utilité dans la détermination d'ensembles de points. Un chouette gars ce barycentre !

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle du plan tel que :

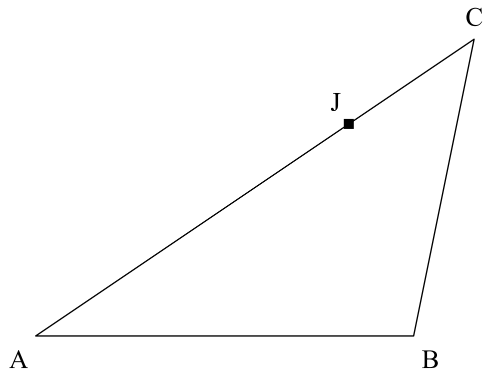
AB = 5cm   AC = 7cm   BC = 4cm

On note I le barycentre des deux points pondérés $(A;4)$ et $(B;6)$.

On appelle J le point du segment [AC] tel que $AJ = 5cm$.

Le point K est défini par la relation vectorielle :

$$8.\overrightarrow{BK} + 5.\overrightarrow{CB} = \vec{o}$$



a) Placer le point I sur la figure ci-dessus. On indiquera le détail de la construction.

b) Démontrer que le point J est un barycentre pour les points pondérés A et C. On indiquera les coefficients de pondération de ces derniers.

c) Prouver que le point K est un barycentre pour les points pondérés B et C. On indiquera les coefficients de pondération de ces derniers.
Placer le point K sur la figure.

d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que les vecteurs $2.\overrightarrow{MA} + 5.\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.
Tracer cet ensemble $\mathcal{E}$ sur la figure ci-dessus.

e) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que $\left\| 3.\overrightarrow{MB} + 5.\overrightarrow{MC} \right\| = 24$
Tracer cet ensemble $\mathcal{F}$ sur la figure ci-dessus.

Le point L est l'unique point du plan défini par la relation vectorielle :

$$2.\overrightarrow{LA} + 3.\overrightarrow{LB} + 5.\overrightarrow{LC} = \vec{o}$$

f) En utilisant la relation précédente, démontrer que le point L est un barycentre pour les points B et J. On précisera les coefficients de pondération de ces derniers.

g) Démontrer que le point L est le milieu du segment [IC].

h) Prouver que les trois droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes.

Le corrigé

a) Comme le point I est le barycentre des points pondérés $(A;4)$ et $(B;6)$, alors il vérifie la relation vectorielle $4.\overrightarrow{IA} + 6.\overrightarrow{IB} = \vec{o}$.
Qui plus est, ce point I est sur la droite (AB). Mais où exactement ? Pour le savoir, exprimons le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Nous avons :

$$4.\overrightarrow{IA} + 6.\overrightarrow{IB} = \vec{o} \Leftrightarrow 4.\overrightarrow{IA} + \underbrace{6.\overrightarrow{IA} + 6.\overrightarrow{AB}}_{\substack{=6.\overrightarrow{IB} \\ \text{Merci Chasles !}}} = \vec{o} \Leftrightarrow 10.\overrightarrow{IA} + 6.\overrightarrow{AB} = \vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 10.\overrightarrow{IA} = 6.\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow 10.\overrightarrow{AI} = 6.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{6}{10}.\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}.\overrightarrow{AB}$$

<u>Conclusion :</u> le point I se trouve aux trois cinquièmes du segment [AB] à partir de A.
Comme ce segment mesure 5 centimètres alors I est à trois centimètres de A.

b) Pour établir que J est un barycentre pour les points pondérés A et C, nous devons rechercher une relation vectorielle du type : $\ldots\times\overrightarrow{JA} + \ldots\times\overrightarrow{JC} = \vec{o}$.
D'après les données et la figure, le point J se trouve aux cinq septièmes du segment [AC] à partir de A. Donc nous avons la relation vectorielle : $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{7}.\overrightarrow{AC}$. Il vient alors :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{7}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AJ} = 5.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AJ} = \underbrace{5.\overrightarrow{AJ} + 5.\overrightarrow{JC}}_{=5.\overrightarrow{AC}} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{AJ} + 5.\overrightarrow{CJ} = \vec{o}$$

<u>Conclusion :</u> comme $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JC}=\vec{o}$ et que la somme des coefficients $2+5=7$ est non nulle, alors le point J est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(C;5)$.

c) Deux choses sont à faire dans cette question. D'abord, placer le point K.

$$8\overrightarrow{BK}+5\overrightarrow{CB}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad 8\overrightarrow{BK}=5\overrightarrow{BC} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{BK}=\frac{5}{8}\overrightarrow{BC}$$

Donc le point K se trouve aux cinq huitièmes du segment [BC] à partir de B. Comme ce segment mesure 4 centimètres alors $BK=2{,}5\text{cm}$.

Seconde chose : prouver que le point K est un barycentre pour les points B et C.

$$8\overrightarrow{BK}+5\overrightarrow{CB}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad 8\overrightarrow{BK}+\underbrace{5\overrightarrow{CK}+5\overrightarrow{KB}}_{5\overrightarrow{CB}}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad 8\overrightarrow{BK}+5\overrightarrow{CK}-5\overrightarrow{BK}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow\quad 3\overrightarrow{BK}+5\overrightarrow{CK}=\vec{o}$$

<u>Conclusion :</u> comme $3\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{KC}=\vec{o}$ et que la somme des coefficients $3+5=8$ est non nulle, alors le point K est un barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(C;5)$.

d) Comme J est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(C;5)$, alors en application du théorème de réduction vectorielle, nous avons que pour tout point M du plan :

$$2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MC}=\overbrace{\underbrace{2\overrightarrow{MJ}+2\overrightarrow{JA}}_{2\overrightarrow{MA}}+\underbrace{5\overrightarrow{MJ}+5\overrightarrow{JC}}_{5\overrightarrow{MC}}=(2+5)\overrightarrow{MJ}+\underbrace{2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JC}}_{\substack{=\vec{o}\\ \text{car J est le barycentre}\\ \text{de }(A;2)\text{ et }(C;5).}}}^{\text{Le théorème de réduction vectorielle cout-circuite ce calcul...}}=7\overrightarrow{MJ}$$

Par conséquent, il vient :

$M\in\mathcal{E}$ $\Leftrightarrow$ Le vecteur $2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MC}=7\overrightarrow{MJ}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ Les droites (MJ) et (AB) sont parallèles

$\Leftrightarrow$ M appartient à la parallèle à la droite (AB) passant par le point J.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ est la parallèle à la droite (AB) passant par J.

e) Comme K est le barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(C;5)$, alors en application du théorème de réduction vectorielle, nouas avons que pour tout point M du plan :

$$3\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}=(3+5)\overrightarrow{MK}=8\overrightarrow{MK}$$

Par suite, il vient :

$$M\in\mathcal{F} \quad\Leftrightarrow\quad \left\|3\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\right\|=24 \quad\Leftrightarrow\quad \left\|8\overrightarrow{MK}\right\|=24$$

$$\Leftrightarrow\quad |8|\times\left\|\overrightarrow{MK}\right\|=24 \quad\Leftrightarrow\quad MK=\frac{24}{8}=3$$

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{F}$ est l'ensemble des points M du plan se trouvant à trois centimètres du point K. Donc $\mathcal{F}$ est le cercle de centre K et de rayon 3 centimètres.

f) Comme J est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(C;5)$, alors en application du théorème de réduction vectorielle, nous avons : $2\overrightarrow{LA}+5\overrightarrow{LC}=(2+5)\overrightarrow{LJ}=7\overrightarrow{LJ}$.

Par conséquent, la relation vectorielle définissant le point L devient :

$$2\overrightarrow{LA}+3\overrightarrow{LB}+5\overrightarrow{LC}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{2\overrightarrow{LA}+5\overrightarrow{LC}}_{\text{On remplace...}}+3\overrightarrow{LB}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{7\overrightarrow{LJ}}_{\text{...et hop !}}+3\overrightarrow{LB}=\vec{o}$$

<u>Conclusion :</u> comme $3\overrightarrow{LB}+7\overrightarrow{LJ}=\vec{o}$ et que la somme des coefficients $7+3=10$ est non nulle, alors le point L est le barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(J;7)$.

g) Le point I étant le barycentre des points pondérés $(A;4)$ et $(B;6)$, il est aussi le $\underbrace{\text{barycentre des points pondérés }(A;2)\text{ et }(B;3)}_{\text{On divise les coefficients par 2. Théorème d'homogénéité...}}$.

En effet :

$$\left.\begin{array}{c}\text{I barycentre}\\ \text{de }(A;4)\text{ et }(B;6)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{4\overrightarrow{IA}+6\overrightarrow{IB}=\vec{o}}_{\text{On divise tout...}} \Leftrightarrow \underbrace{2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{o}}_{\text{...par 2}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{I barycentre}\\ \text{de }(A;2)\text{ et }(B;3)\end{array}\right.$$

Toujours est-il qu'en application du théorème de réduction vectorielle, il vient :

$$2\overrightarrow{LA}+3\overrightarrow{LB}=(2+3)\overrightarrow{LI}=5\overrightarrow{LI}.$$

La relation vectorielle définissant le point L devient alors :

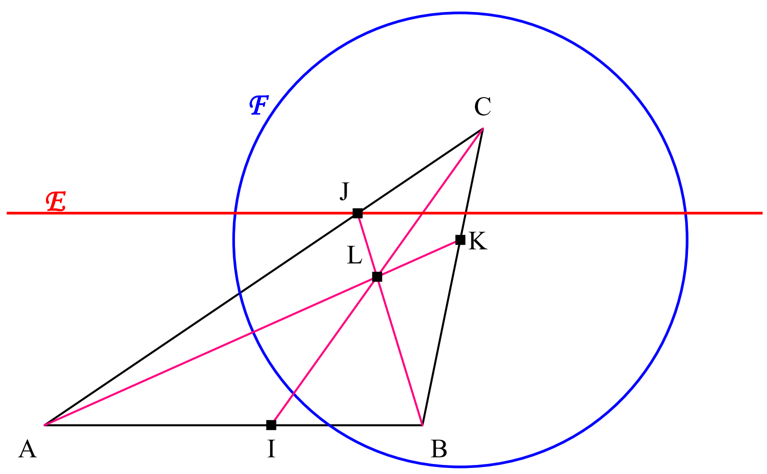
$$\underbrace{2\overrightarrow{LA}+3\overrightarrow{LB}}_{\text{On remplace...}}+5\overrightarrow{LC}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{5\overrightarrow{LI}}+5\overrightarrow{LC}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\overrightarrow{LI}+\overrightarrow{LC}=\vec{o}}_{\text{En divisant tout par 5}}$$

<u>Conclusion :</u> le point L est l'isobarycentre des points I et C. Autrement dit L est le milieu du segment [IC].

h) Comme L est un barycentre des points B et J, alors L appartient à la droite (BJ).
Il est clair que le point L fait aussi partie de la droite (CI).
Prouvons que le point L appartient également à la droite (AK).
Comme K est le barycentre des points pondérés $(B;3)$ et $(C;5)$, alors d'après ce brave théorème de réduction vectorielle, nous avons : $3\overrightarrow{LB}+5\overrightarrow{LC}=8\overrightarrow{LK}$.
La relation vectorielle définissant L (encore elle !) devient alors :

$$2\overrightarrow{LA}+\underbrace{3\overrightarrow{LB}+5\overrightarrow{LC}}_{\text{Toujours...}}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad 2\overrightarrow{LA}+\underbrace{8\overrightarrow{LK}}_{\text{...pareil !}}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\text{L barycentre}\\ \text{de }(A;2)\text{ et }(K;8)\end{array}\right.$$

Le barycentre de deux points étant aligné avec ceux-ci, le point L appartient à (AK).
<u>Conclusion :</u> comme (AK), (BJ) et (CI) ne sont pas parallèles et que le point L fait partie de ces trois droites, alors elles sont concourantes en L.



Quatre points ensembles

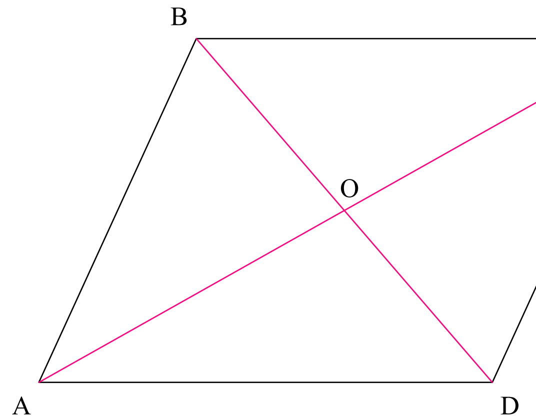
Le contexte

Cet exercice aborde le placement du barycentre de quatre points en utilisant la règle dite d'associativité, puis il enchaîne sur l'utilisation du barycentre comme moyen pour simplifier une égalité vectorielle définissant l'appartenance à un ensemble.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme de centre O tel que :

AB = 6cm AB = 5cm BD = 6cm



a) Construire le point G qui est le barycentre des quatre points pondérés $(A;2)$, $(B;3)$, $(C;2)$ et $(D;-1)$. On expliquera et justifiera sa construction.

b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M vérifiant l'égalité :

$$\left\|2.\overrightarrow{MA}+3.\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|6.\overrightarrow{MC}\right\|$$

Le corrigé

a) Nous allons construire le point G au moyen de deux barycentres partiels.

Le point O est le milieu du segment [AC]. Donc O est l'isobarycentre des deux points pondérés $(A;2)$ et $(C;2)$.

On appelle I le barycentre des deux autres points pondérés $(B;3)$ et $(D;-1)$. Le point I existe car la somme des coefficients de pondération $3+(-1)=2$ est non nulle.
Construisons ce point I qui se trouve sur la droite (BD).
Comme I est le barycentre des deux points pondérés $(B;3)$ et $(D;-1)$ alors :

$$3.\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}=\vec{o} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{BD}=\vec{o} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}=-\frac{1}{2}.\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BO}$$

Par conséquent, le point I est le symétrique du point O par rapport à B.
Comme G est le barycentre des quatre points $\underbrace{(A;2),\ (C;2)}_{\text{Barycentre O}},\ \underbrace{(B;3)\text{ et }(D;-1)}_{\text{Barycentre I}}$ alors en application de la règle d'associativité, G est aussi le barycentre des deux points pondérés $(O;2+2=4)$ et $(I;3+(-1)=2)$.
Les points O et I étant construits, nous pouvons placer le point G. En effet, comme G est le barycentre de $(O;4)$ et $(I;2)$, alors nous avons la relation vectorielle :

$$4.\overrightarrow{GO}+2.\overrightarrow{GI}=\vec{o} \Leftrightarrow 4.\overrightarrow{GO}+2.\overrightarrow{GO}+2\overrightarrow{OI}=\vec{o} \Leftrightarrow 6.\overrightarrow{GO}=2.\overrightarrow{IO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{2}{6}.\overrightarrow{OI}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{OI}$$

<u>Conclusion :</u> le point G se trouve au tiers du segment [OI] à partir du point O.

b) Comme G est le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;3)$, $(C;2)$ et $(D;-1)$, alors en application du théorème de réduction vectorielle, pour tout point M du plan, on a :

$$2.\overrightarrow{MA}+3.\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\underbrace{2.\overrightarrow{MG}+2.\overrightarrow{GA}}_{=2.\overrightarrow{MA}}+\underbrace{3.\overrightarrow{MG}+3.\overrightarrow{GB}}_{=3.\overrightarrow{MB}}+\underbrace{2.\overrightarrow{MG}+2.\overrightarrow{GC}}_{=2.\overrightarrow{MC}}\underbrace{-\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{GD}}_{=-\overrightarrow{MD}}$$

$$=(2+3+2-1).\overrightarrow{MG}+\underbrace{2.\overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GB}+2.\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GD}}_{=\vec{o}\text{ car G est le barycentre de }(A;2),\ (B;3),\ (C;2)\text{ et }(D;-1)}$$

$$=6.\overrightarrow{MG}$$

Le théorème de réduction vectorielle évite ces calculs...

Par conséquent, il vient :

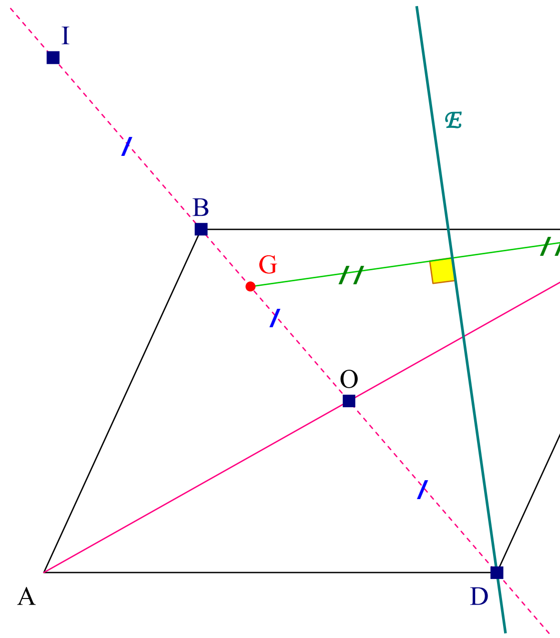
$$M\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \left\|2.\overrightarrow{MA}+3.\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|6.\overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow \left\|6.\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|6.\overrightarrow{MC}\right\|$$

$$\Leftrightarrow |6|\times\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=|6|\times\left\|\overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow \cancel{6}\times MG=\cancel{6}\times MC \Leftrightarrow MG=MC$$

$\Leftrightarrow$ M est équidistant des points G et C

$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment [GC]

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment [GC].
La figure obtenue est la suivante :



Note : la médiatrice $\mathcal{E}$ passe du segment [CG] par le point D car le triangle (CGD) est isocèle dans le cas présent. Mais si l'on change les dimensions du parallélogramme ABCD, la chose n'est plus nécessairement vraie.

Un point en trois points essentiels

Le contexte

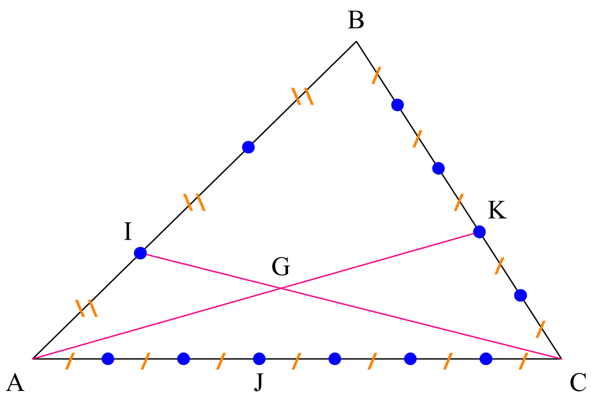
Cet exercice montre comment prouver que trois droites sont concourantes en utilisant un barycentre.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle du plan tel que :

$AB = 6\text{cm}$ $\quad AC = 7\text{cm}$ $\quad BC = 5\text{cm}$

I est le point du segment [AB] tel que $AI = 2\text{cm}$.
J est le point du segment [AC] tel que $AJ = 3\text{cm}$.
K est le point du segment [BC] tel que $BK = 3\text{cm}$.
On appelle G le point d'intersection des droites (CI) et (AK).



a) Démontrer que le point G est un barycentre pour les trois points pondérés A, B et C. On indiquera les coefficients de pondération.

b) Démontrer que les points B, G et J sont alignés.

Le corrigé

a) Comme le point I appartient à la droite (AB), alors il est un barycentre pour les points pondérés A et B. Déterminons pour quels coefficients.

Le point I vérifie la relation vectorielle $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$$

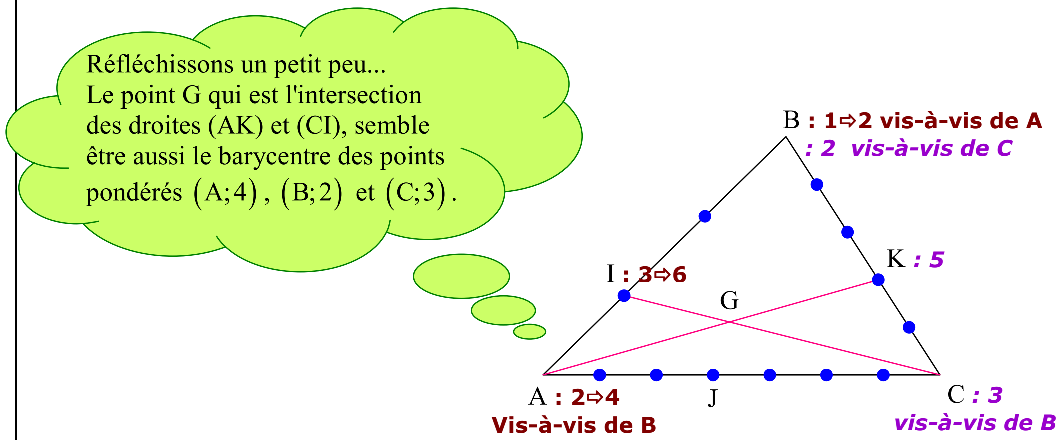
Comme $2.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et que la somme des coefficients $2+1=3$ est non nulle, alors le point I est le barycentre des deux points pondérés $(A;2)$ et $(B;1)$.

Le point K appartenant à la droite (BC), il est un barycentre pour les points B et C. Mais pour quels coefficients ?

Le point K vérifie la relation vectorielle $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5}.\overrightarrow{BC}$. Par suite :

$$\overrightarrow{BK} = \frac{3}{5}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{BK} = 3.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{BK} = 3.\overrightarrow{BK} + 3.\overrightarrow{KC} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{BK} + 3.\overrightarrow{CK} = \vec{0}$$

Comme $2.\overrightarrow{KB} + 3.\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ et que la somme des coefficients $2+3=5$ est non nulle, alors K est le barycentre des deux points pondérés $(B;2)$ et $(C;3)$.



On appelle H le barycentre des trois points pondérés $(A;4)$, $(B;2)$ et $(C;3)$.

Comme I est le barycentre deus points pondérés $(A;2)$ et $(B;1)$, alors il l'est aussi pour les coefficients $\underbrace{(A;4) \text{ et } (B;2)}_{\text{Tous les coefficients multipliés par 2}}$.

En application de la règle d'associativité, le point H est aussi le barycentre des points pondérés $\underbrace{(I;4+2=6)}_{\text{Barycentre de } (A;4) \text{ et } (B;2)}$ et $(C;3)$. Donc le point H appartient à la droite (CI).

De même, comme K est le barycentre des points pondérés $(B;2)$ et $(C;3)$, alors toujours en application de la règle d'associativité, H est le barycentre des points $(A;4)$ et $(K;5)$.
Par conséquent, le point H appartient aussi à la droite (AK).
Ainsi le point H est-il le point d'intersection des droites (AK) et (CI). Donc $H = G$.
<u>Conclusion :</u> le point G est le barycentre des trois points pondérés $(A;4)$, $(B;2)$ et $(C;3)$

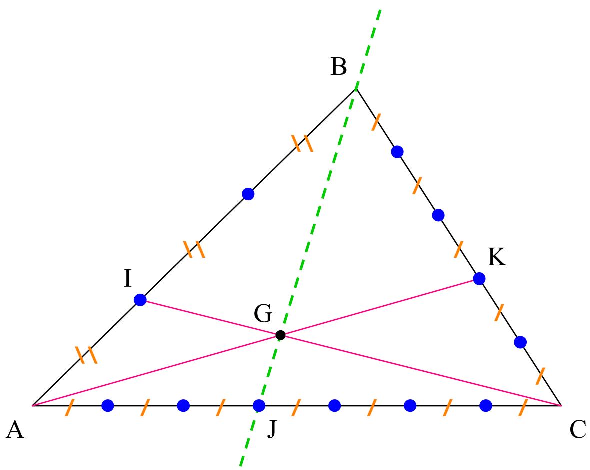
b) Le point J appartient à la droite (AC). C'est donc un barycentre pour ces deux points. Déterminons pour quels coefficients.

Le point J vérifie la relation vectorielle $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{7}.\overrightarrow{AC}$. Par conséquent :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{7}.\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad 7.\overrightarrow{AJ} = 3.\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad 7.\overrightarrow{AJ} = 3.\overrightarrow{AJ} + 3.\overrightarrow{JC} \quad \Leftrightarrow \quad 4.\overrightarrow{AJ} + 3.\overrightarrow{CJ} = \vec{o}$$

Comme la somme des coefficients $4+3=7$ est non nulle, alors J est le barycentre des points pondérés $\underbrace{(A;4) \text{ et } (C;3)}_{\text{Tiens donc !}}$.

Comme G est le barycentre des trois points pondérés $(A;4)$, $(C;3)$ et $(B;2)$, alors en application de la règle d'associativité, G est le barycentre des points $(J;7)$ et $(B;2)$.
Comme le barycentre de deux points distincts appartient à la droite définie par ceux-ci, alors les points G, J et B sont alignés.



Dérivation et dérivées

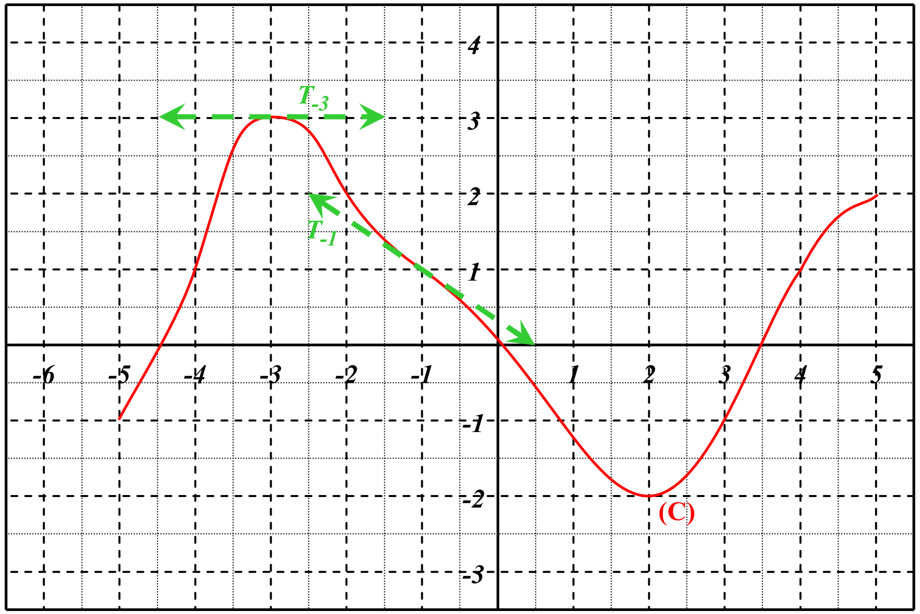
Quand la courbe prend la tangente, ça dérive !

Le contexte

Cet exercice fait la liaison entre les aspects graphique et numérique de la notion tangente/nombre dérivé.

L'énoncé

La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[-5;5]$. Sa courbe représentative (C) est tracée sur le graphique ci-dessous :



Sur le graphique ci-dessus, les droites T_{-3} et T_{-1} désignent les tangentes à la courbe (C) respectivement à ses points d'abscisses -3 et -1.

a) Compléter les égalités suivantes :

$f'(-3) =$ $\qquad$ $f(-1) =$

$f'(-1) =$ $\qquad$ $f(-3) =$

b) On sait que le nombre dérivé de la fonction f en 4 est égal à 2.
Déterminer l'équation réduite de la tangente T_4.
Sur le graphique, tracer la tangente T_4 à la courbe (C) en son point d'abscisse 4.

Le corrigé

a) Le nombre dérivé de la fonction f en -3 est le coefficient directeur de la tangente T_{-3}.
Comme celle-ci est horizontale, alors son coefficient directeur est nul. Donc $f'(-3) = 0$.

➲ L'image de -1 par la fonction f est l'ordonnée du point de la courbe (C) d'abscisse -1.
La courbe (C) passe par le point de coordonnées $(-1;1)$. Par conséquent, $f(-1) = 1$.

➲ $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_{-1}. Sur celle-ci, quand on progresse de 3 en abscisse, on baisse de 2 en ordonnées. Donc $f'(-1) = \dfrac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}} = -\dfrac{2}{3}$

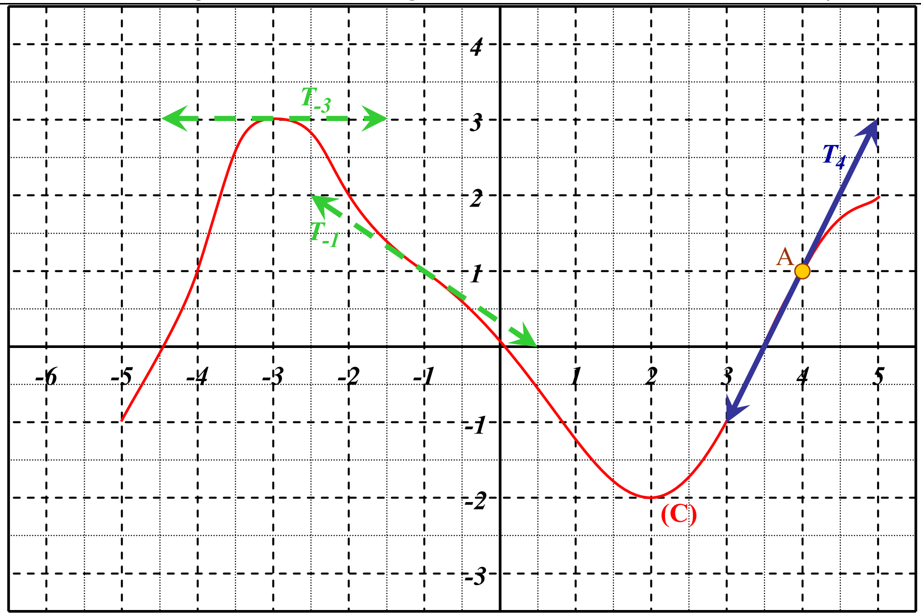
➲ Comme la courbe (C) passe par le point de coordonnées $(-3;3)$, alors $f(-3) = 3$.

b) La tangente T_4 passe par le point $A(4;1)$ de la courbe (C) et a pour coefficient directeur $f'(4) = 2$. Donc, l'équation réduite de la tangente T_4 est de la forme $y = 2.x + p$
Comme le point A appartient à la tangente T_4, alors ses coordonnées en vérifient l'équation.

$$A(4;1) \in (C) \quad \Leftrightarrow \quad y_A = 2.x_A + p \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 4 \times 2 + p \quad \Leftrightarrow \quad p = 1 - 8 = -7$$

<u>Conclusion :</u> l'équation réduite de la tangente T_4 est $y = 2.x - 7$.

Pour tracer cette droite T_4 sur le graphique, son point A et son coefficient directeur nous suffisent.



Un dérivé de QCM

Le contexte

Cet exercice fait appel à certaines formules usuelles de dérivation : dérivées de l'inverse d'une fonction et d'un quotient de deux fonctions.
Pour résoudre la dernière question, on peut se passer la formule donnant la dérivée de la racine d'une fonction. Quand cet exercice a été donné, elle n'avait pas été vue.

L'énoncé

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 2 points et chaque mauvaise en enlève 0,5. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0. Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) La fonction f est définie sur ℝ par :

$$f(x)=\frac{1}{4.x^2+1}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction f ?

$f'(x)=8.x$	$f'(x)=\frac{1}{8.x}$	$f'(x)=-\frac{8.x}{4.x^2+1}$	$f'(x)=-\frac{8.x}{\left(4.x^2+1\right)^2}$

b) La fonction f est définie sur l'ensemble $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{5.x^2+1}{3.x+2}$$

Cette fonction f est dérivable sur son ensemble de définition.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction f ?

$f'(x)=\frac{10.x}{3}$	$f'(x)=\frac{15.x^2+20.x-3}{(3.x+2)^2}$	$f'(x)=\frac{45.x^2+20.x+3}{(3.x+2)^2}$

c) La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=\sqrt{h^2+1}$$

La fonction f est dérivable sur ℝ.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est le nombre dérivé de f en 0 ?

-1	0	$\frac{1}{2}$	1

Le corrigé

a) Comme la fonction $\begin{cases} u(x)=4\times x^2+1 \\ u'(x)=4\times 2.x+0=8.x \end{cases}$ est dérivable et non nulle (car strictement positive) sur ℝ, alors son inverse la fonction f est dérivable sur ℝ. Pour tout réel x, on a :

$$f'(x)=-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}=-\frac{8.x}{(4.x^2+1)^2}$$

b) Comme les fonctions $\begin{cases} u(x)=5\times x^2+1 \\ u'(x)=5\times 2.x+0=10.x \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x)=3\times x+2 \\ v'(x)=3\times 1+0=3 \end{cases}$ sont dérivables sur ℝ et, comme v se n'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,5\}$, alors leur quotient $f=\frac{u}{v}$ est dérivable sur $]-\infty;-1,5[\cup]-1,5;+\infty[$. Pour tout réel de cet ensemble, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{10.x\times(3.x+2)-3\times(5.x^2+1)}{(3.x+2)^2}=\frac{15.x^2+20.x-3}{(3.x+2)^2}$$

c) Aucune formule ne permet de calculer le nombre dérivé de f en 0. Pour connaître celui-ci, nous devons revenir à la définition du nombre dérivée qui est la limite d'un certain quotient. Pour tout réel h non nul et proche de 0, nous pouvons écrire :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{(0+h)^2+1}-\sqrt{0^2+1}}{h}=\underbrace{\frac{\sqrt{h^2+1}-1}{h}=\frac{\left(\sqrt{h^2+1}-1\right)\times\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)}{h\times\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)}}_{\text{On multiplie par la quantité conjuguée de } \sqrt{h^2+1}-1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{h^2+1}\right)^2-1^2}{h\times\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)}=\frac{h^2+1-1}{h\times\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)}=\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}\times\left(\sqrt{h^2+1}+1\right)}=\frac{h}{\sqrt{h^2+1}+1}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{\sqrt{h^2+1}+1}=\frac{0}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{0}{2}=0$ alors $f'(0)=0$.

Le polynôme, des puissances en somme...

Le contexte

Cet exercice est une étude des variations d'une fonction polynomiale du troisième degré au moyen de l'outil de la dérivation. Cela, dans le but de déterminer son signe.

L'énoncé

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=2.x^3+9.x^2-60.x+68$$

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b) Calculer les images de -5 et 2 par la fonction f.

c) Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f. On indiquera l'ensemble de dérivabilité.
En déduire les variations de la fonction f.

d) A l'aide de la calculatrice, calculer l'image de $-8,5$ par la fonction f.
Déduire des questions précédentes, le tableau de signe de la fonction f.

Le corrigé

a) Quelque soit le réel x considéré, la somme $2.x^3+9.x^2-60.x+68$ existe. Autrement dit, tout réel x a une image par f. L'ensemble de définition du polynôme f est ℝ.

b) Calculons les images demandées :

- $f(-5)=2\times(-5)^3+9\times(-5)^2-60\times(-5)+68=2\times(-125)+9\times 25+300+68$
  $=-250+225+300+68=343$
- $f(2)=2\times 2^3+9\times 2^2-60\times 2+68=2\times 8+9\times 4-120+68$
  $=16+36-120+68=0$

<u>Conclusion :</u> les images de -5 et 2 par la fonction f sont respectivement 343 et 0.

c) A l'instar de toutes les fonctions puissances x^n, la fonction polynomiale f est dérivable sur ℝ. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=2\times\left(x^3\right)'+9\times\left(x^2\right)'-60\times(x)'+(68)'$$
$$=2\times 3.x^2+9\times 2.x-60\times 1+0=6.x^2+18.x-60$$

Le signe de la dérivée $f'(x)=6.x^2+18.x-60$ va nous donner les variations de la fonction f. Pour connaître ce premier, calculons le discriminant de la fonction du second degré qu'est $f'(x)$.

$$\Delta_{f'(x)}=18^2-4\times 6\times(-60)=324+1440=1764=42^2$$

Comme son discriminant est strictement positif, alors la fonction du second degré $f'(x)$ admet deux racines distinctes.

$$x_1=\frac{-18-42}{2\times 6}=\frac{-60}{12}=-5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-18+42}{2\times 6}=\frac{24}{12}=2$$

Le tableau de variation de la fonction f est celui ci-contre.

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	343	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) Calculons l'image de $-8,5=-17/2$ par la fonction f.

$$f\left(-\frac{17}{2}\right)=2\times\left(-\frac{17}{2}\right)^3+9\times\left(-\frac{17}{2}\right)^2-60\times\left(-\frac{17}{2}\right)+68=2\times\frac{-4913}{8}+9\times\frac{289}{4}+510+68$$

$$=\frac{-4913+2601+2040+272}{4}=\frac{0}{4}=0$$

Donc la fonction f s'annule en $-8,5$.

Compte tenu de son tableau de variation, le tableau de signe de $f(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$-8,5$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Le carré par la racine

Le contexte

Cet exercice traite de la dérivabilité et de la dérivée de la fonction racine carrée...au travers de l'étude d'une autre fonction.

L'énoncé

La fonction f est définie par :

$$f(x)=\left(x^2+2\right)\times\sqrt{x}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

b) Calculer l'image de 0 par la fonction f.

c) Quel est l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ? On justifiera sa réponse.
En dérivant la fonction f, démontrer que pour tout réel strictement positif x, on a :

$$f'(x)=\frac{5.x^2+2}{2.\sqrt{x}}$$

En déduire les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Le corrigé

a) Quelque soit le réel considéré, la somme x^2+2 existe toujours. Par contre, la racine $\sqrt{x}$ n'existe que lorsque et seulement lorsque x est un réel positif ou nul.
<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de la fonction f est $[0;+\infty[$.

b) $f(0)=\left(0^2+2\right)\times\sqrt{0}=2\times 0=0$.

c) Comme les fonctions :

- $u(x)=x^2+2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $u'(x)=2.x$.
- $v(x)=\sqrt{x}$ est seulement dérivable sur $]0;+\infty[$ et a pour dérivée $v'(x)=\dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$.

Alors leur produit $f(x)=u(x)\times v(x)$ est seulement dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = u' \times v + v' \times u = 2.x \times \sqrt{x} + \frac{1}{2.\sqrt{x}} \times \left(x^2+2\right)$$

$$= \frac{2.x \times \sqrt{x} \times 2.\sqrt{x}}{2.\sqrt{x}} + \frac{x^2+2}{2.\sqrt{x}} = \frac{2.x \times 2.x + x^2 + 2}{2.\sqrt{x}} = \frac{4.x^2 + x^2 + 2}{2.\sqrt{x}} = \frac{5.x^2+2}{2.\sqrt{x}}$$

Or, un carré est une quantité qui est toujours positive ou nulle.
Donc pour tout réel x, nous avons :

$x^2 \geq 0$ donc $5.x^2 \geq 0$

donc $5.x^2 + 2 \geq 2$

donc $5.x^2 + 2$ est positif

De plus, la racine d'un réel strictement positif est une quantité strictement positive.
Par conséquent, le tableau de variation de la fonction f est celui ci-contre :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$5.x^2+2$	$+$
$2.\sqrt{x}$	$+$
$f'(x)$	$+$
f	$\nearrow$ $+\infty$

Un trop grand choix de dérivées

Le contexte

Cet exercice est un QCM sur les dérivées d'une composée. Composée avec la fonction racine carrée, une fonction puissance ou avec la fonction inverse.

***L**'énoncé*

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise en enlève 0,25. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, entourer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) La fonction f est définie par :

$$f(x) = \sqrt{2.x^2+7}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction f ?

$f'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{4.x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{2.x^2+7}}$
$f'(x) = \frac{2.x}{\sqrt{2.x^2+7}}$	$f'(x) = \frac{4.x}{\sqrt{2.x^2+7}}$

b) La fonction f est définie par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction f ?

$f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$	$f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
$f'(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$	$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

c) La fonction f est définie par :

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ?:

$]-2;2[$	$[-2;2]$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$

d) La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction f ?

$f'(x)=-\frac{4.x}{x^2+1}$ ⋮ $f'(x)=-\frac{4.x}{\left(x^2+1\right)^2}$ ⋮ $f'(x)=\frac{4.x}{\left(x^2+1\right)^2}$ ⋮ $f'(x)=-\frac{4.x}{\left(x^2+1\right)^3}$

Le corrigé

a) Comme la fonction $u(x)=2.x^2+7$ de dérivée $u'(x)=4.x$ est dérivable et surtout strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors sa racine $f=\sqrt{u}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\times\sqrt{u(x)}}=\frac{4.x}{2\times\sqrt{2.x^2+7}}=\frac{2.x}{\sqrt{2.x^2+7}}$$

b) Comme :

- ⏩ La fonction $u(x)=-x+\frac{\pi}{3}$ de dérivée $u'(x)=-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ⏩ La fonction $v(t)=\cos(t)$ de dérivée $v'(t)=-\sin(t)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors leur composée $f=v\circ u=v(u)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)=u'(x)\times v'(u(x))=(-1)\times\left(-\sin(u(x))\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

c) Le tableau de signe de la fonction $u(x)=4-x^2=(2-x)\times(2+x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Comme la fonction $u(x)=4-x^2$ de dérivée $u'(x)=-2.x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est seulement positive que sur l'intervalle $]-2;2[$, alors sa racine $f=\sqrt{u}$ est seulement dérivable sur $]-2;2[$.

Pour tout réel x appartenant à $]-2;2[$, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\times\sqrt{u(x)}}=\frac{-2.x}{2\times\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

d) La fonction f est l'inverse d'une composée. Nous allons donc procéder en deux étapes.
D'abord, comme la fonction $u(x)=x^2+1$ de dérivée $u'(x)=2.x$ est dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$, alors il en va de même pour son carré $v=u^2$.
Pour tout réel x, nous avons :

$$v'(x)=2\times u'(x)\times(u(x))^{2-1}=4.x\times\left(x^2+1\right)$$

Ensuite, comme la fonction $v(x)=\left(x^2+1\right)^2$ est dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$, alors son inverse $f=\frac{1}{v}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=-\frac{v'(x)}{(v(x))^2}=-\frac{4.x\times\left(x^2+1\right)}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2}=-\frac{4.x\times\cancel{\left(x^2+1\right)}}{\left(x^2+1\right)^{\cancel{4}\,3}}=-\frac{4.x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Géométrie analytique

La droite qui n'Euler de rien

Le contexte

Au travers du traditionnel sujet de la droite d'Euler, cet exercice aborde la géométrie analytique et toutes les compétences attendues en première S : équations de droites et de cercles, coordonnées d'un barycentre, recherche des coordonnées d'un point d'intersection.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, le plan est muni repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. L'unité de longueur est le centimètre. On complétera la figure ci-contre au fur et à mesure des questions.
Dans ce repère, on considère les points suivants :

$$A(-4;1) \qquad B(2;-1) \qquad C(-1;5)$$

On appelle (Γ) (prononcer "gamma") l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient l'équation :

$$x^2+y^2+x-3.y-10=0$$

a) Démontrer que l'ensemble (Γ) est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon.
Les points A, B et C appartiennent-ils au cercle (Γ) ? On justifiera sa réponse.
Qu'est alors le point Ω pour le triangle ABC ?
Sur la figure, placer les points A, B, et C, puis construire le cercle (Γ).

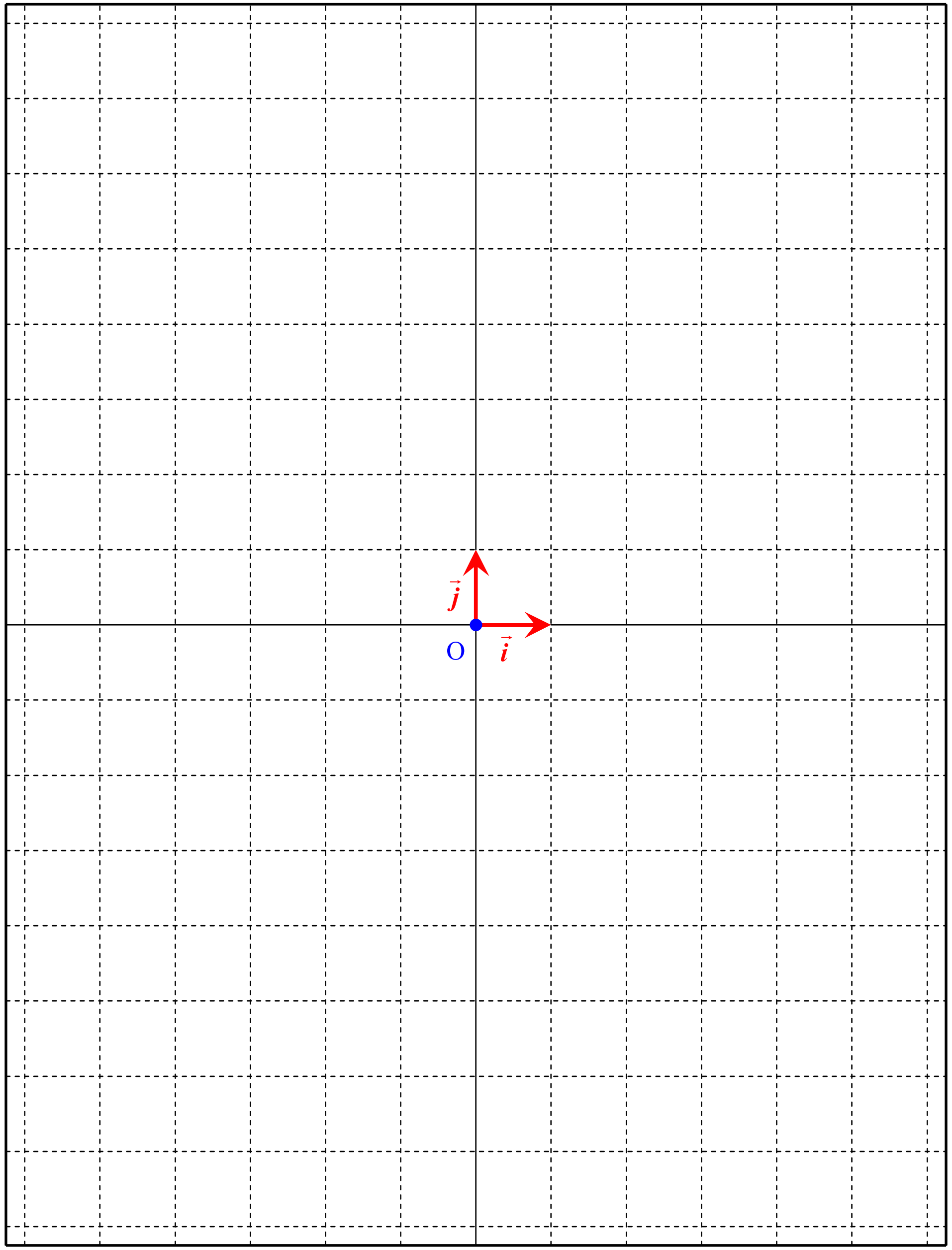
b) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ qui est la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point A.
Prouver que la droite Δ' d'équation cartésienne $3.x+4.y-2=0$ est l'une des trois hauteurs du triangle ABC.
En déduire les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

c) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

d) Démontrer que les points Ω, H et G sont alignés.

La droite *d* définie par les points Ω, H et G est appelée <u>droite d'Euler du triangle ABC</u>.

e) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d*.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite *d* et du cercle (Γ).



Le corrigé

a) Prouvons que l'ensemble (Γ) est un cercle. Nous pouvons écrire :

$$M(x;y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow \underbrace{x^2+x}_{\text{Débuts...}} + \underbrace{y^2-3.y}_{\text{...d'identités...}} -10=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}_{\text{...remar...}}+\underbrace{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}_{\text{..quables.}}-10=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{50}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{50}{4}$$

On appelle alors Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+1/2 \\ y-3/2 \end{pmatrix}$ et $\Omega M=\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}$.

L'équivalence précédente devient alors :

$$M(x;y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow \underbrace{\Omega M^2=\frac{50}{4} \Leftrightarrow \Omega M=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{\sqrt{25}\times\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}.\sqrt{2}}_{\text{Il y a équivalence car la longueur } \Omega M \text{ ne peut pas être égale au négatif } -2,5\times\sqrt{2}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble (Γ) est le cercle de centre $(-0,5;1,5)$ et de rayon $2,5\times\sqrt{2}$.

➲ Pour savoir si les trois points A, B et C appartiennent au cercle (Γ), nous allons regarder si les coordonnées des premiers vérifient l'équation du second.

- Le point $A(-4;1)$ appartient-il au cercle (Γ) ?

$$x_A{}^2+y_A{}^2+x_A-3.y_A-10=(-4)^2+1^2+(-4)-3\times1-10$$
$$=16+1-4-3-10=0$$

Donc oui, le point $A(-4;1)$ appartient au cercle (Γ).

- Le point $B(2;-1)$ appartient-il au cercle (Γ) ?

$$x_B{}^2+y_B{}^2+x_B-3.y_B-10=4+1+2+3-10=0 \quad \text{donc } B(2;-1)\in(\Gamma).$$

- Le point $C(-1;5)$ appartient-il au cercle (Γ) ?

$$x_C{}^2+y_C{}^2+x_C-3.y_C-10=1+25-1-15-10=0 \quad \text{donc } C(-1;5)\in(\Gamma).$$

➲ Comme les trois points appartiennent au cercle (Γ), alors ce dernier est le cercle circonscrit au triangle ABC. Par conséquent, son centre Ω est le point de concours des médiatrices dudit triangle ABC

b) La droite Δ est définie par son point $A(-4;1)$ et son vecteur normal $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$. D'où :

$$M(x;y)\in\Delta \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+4\\y-1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow (x+4)\times(-3)+(y-1)\times6=0$$
$$\Leftrightarrow -3.x-12+6.y-6=0 \Leftrightarrow -3.x+6.y-18=0$$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne de la droite Δ est $\underbrace{x-2.y+6=0}_{\text{On a tout divisé par } -3}$.

La droite Δ est clairement la hauteur du triangle ABC issue de A.

➲ Un des vecteurs normaux de la droite Δ' d'équation cartésienne $3.x+4.y-2=0$ est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}(-1)-(-4)\\5-1\end{pmatrix}$. Donc la droite Δ' est perpendiculaire au côté [AC].

Regardons si les coordonnées du sommet B vérifient l'équation cartésienne de Δ'.

$$3.x_B+4.y_B-2=3\times2+4\times(-1)-2=6-4-2=0$$

Donc la droite Δ' passe bien par le point $B(2;-1)$.

<u>Conclusion :</u> la droite Δ' est la hauteur du triangle ABC issue de B.

➲ L'orthocentre $H(x_H;y_H)$ du triangle ABC est le point d'intersection des hauteurs Δ et Δ'. Donc les coordonnées du premier vérifient les deux équations des secondes :

$$\begin{cases} H\in\Delta \Leftrightarrow x_H-2.y_H+6=0 & \textbf{\textit{(1)}} \\ H\in\Delta' \Leftrightarrow 3.x_H+4.y_H-2=0 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

Résolvons ce système linéaire de deux équations à deux inconnues par substitution.
A partir de l'équation ***(1)***, exprimons x_H en fonction de y_H.

$$x_H-2.y_H+6=0 \Leftrightarrow x_H=2.y_H-6$$

Puis, dans l'équation ***(2)***, on remplace x_H par ce qu'il vaut en y_H. Il vient alors :

$$3.x_H+4.y_H-2=0 \Leftrightarrow 3.(2.y_H-6)+4.y_H-2=0 \Leftrightarrow 6.y_H-18+4.y_H-2=0$$
$$\Leftrightarrow 10.y_H=20 \Leftrightarrow y_H=\frac{20}{10}=2$$

Et par conséquent :

$$x_H=2.y_H-6=2\times2-6=4-6=-2$$

Conclusion : les coordonnées de l'orthocentre H sont $(-2;2)$.

La méthode des paresseux : oh mais il semblerait que...
On pouvait aussi jeter un oeil sur la figure puis voir si, à tout hasard, le point de coordonnées $(-2;2)$ vérifiaient les équations des hauteurs Δ et Δ'. C'était plus...rapide !

c) Comme G est l'isobarycentre des trois points pondérés $(A;1)$; $(B;1)$ et $(C;1)$, alors ses coordonnées $(x_G;y_G)$ sont données par :

- $x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} = \dfrac{(-4)+2+(-1)}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1$
- $y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} = \dfrac{1+(-1)+5}{3} = \dfrac{5}{3}$

Conclusion : le centre de gravité G du triangle ABC a pour coordonnées $\left(-1;\dfrac{5}{3}\right)$.

d) Pour établir que les points H, G et Ω sont alignés, calculons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}(-1)-(-2)=1\\(5/3)-2=-1/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{H\Omega}\begin{pmatrix}(-0,5)-(-2)=1,5\\1,5-2=-0,5\end{pmatrix}$.

$$\det\left(\overrightarrow{HG},\overrightarrow{H\Omega}\right)=\begin{vmatrix}1 & 3/2\\-1/3 & -1/2\end{vmatrix}=1\times\frac{-1}{2}-\frac{-1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

Comme leur déterminant est nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{H\Omega}$ sont colinéaires.
Conclusion : l'orthocentre H, le centre de gravité G et le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC sont alignés sur une droite *d* que l'on appelle droite d'Euler.
Il en va ainsi dans tous les triangles...

e) Un vecteur directeur de la droite *d* est $\overrightarrow{H\Omega}\begin{pmatrix}1,5\\-0,5\end{pmatrix}$. Un autre est son double $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

La droite *d* est définie par son point $H(-2;2)$ et son vecteur directeur $\vec{u}$. Par suite :

$$M(x;y)\in d \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}x+2\\y-2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{HM},\vec{u}\right)=\begin{vmatrix}x+2 & 3\\y-2 & -1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x+2)\times(-1)-(y-2)\times 3=0$$

$$\Leftrightarrow -x-2-3.y+6=0 \Leftrightarrow -x-3.y+4=0$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite *d* est $\underbrace{x+3y-4=0}_{\text{Tout a été multiplié par }-1.}$.

➲ Déterminons les points d'intersection de la droite *d* et du cercle (Γ).

Soit $N(x_N;y_N)$ un point appartenant à la fois à *d* et à (Γ).
Les coordonnées du premier vérifient les deux équations des seconds. Par conséquent :

$$\begin{cases} N\in d \Leftrightarrow x_N+3.y_N-4=0 & \textbf{(1)}\\ N\in(\Gamma) \Leftrightarrow x_N^2+y_N^2+x_N-3.y_N-10=0 & \textbf{(2)}\end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système non linéaire de deux équations à deux inconnues par substitution.
A partir de l'équation ***(1)***, on exprime x_N en fonction de y_N. Il vient alors :

$$x_N+3.y_N-4=0 \Leftrightarrow x_N=4-3.y_N$$

Puis, dans l'équation ***(2)***, on remplace x_N par ce qu'il vaut en y_N. Ainsi :

$$x_N^2+y_N^2+x_N-3.y_N-10=0$$
$$(4-3.y_N)^2+y_N^2+(4-3.y_N)-3.y_N-10=0$$
$$16-24.y_N+9.y_N^2+y_N^2+4-3.y_N-3.y_N-10=0$$
$$10.y_N^2-30.y_N+10=0$$
$$y_N^2-3.y_N+1=0$$

Calculons le discriminant de cette équation du second degré d'inconnue y_N.

$$\Delta_{y_N^2-3.y_N+1}=(-3)^2-4\times1\times1=9-4=5=\left(\sqrt{5}\right)^2$$

Donc l'équation $y_N^2-3.y_N+1=0$ admet deux racines distinctes qui sont :

$y_N=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ d'où $x_N=4-3.y_N=\dfrac{8}{2}-\dfrac{9}{2}+\dfrac{3.\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3.\sqrt{5}-1}{2}$

$y_N=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ d'où $x_N=4-3.y_N=\dfrac{8}{2}-\dfrac{9}{2}-\dfrac{3.\sqrt{5}}{2}=-\dfrac{3.\sqrt{5}+1}{2}$

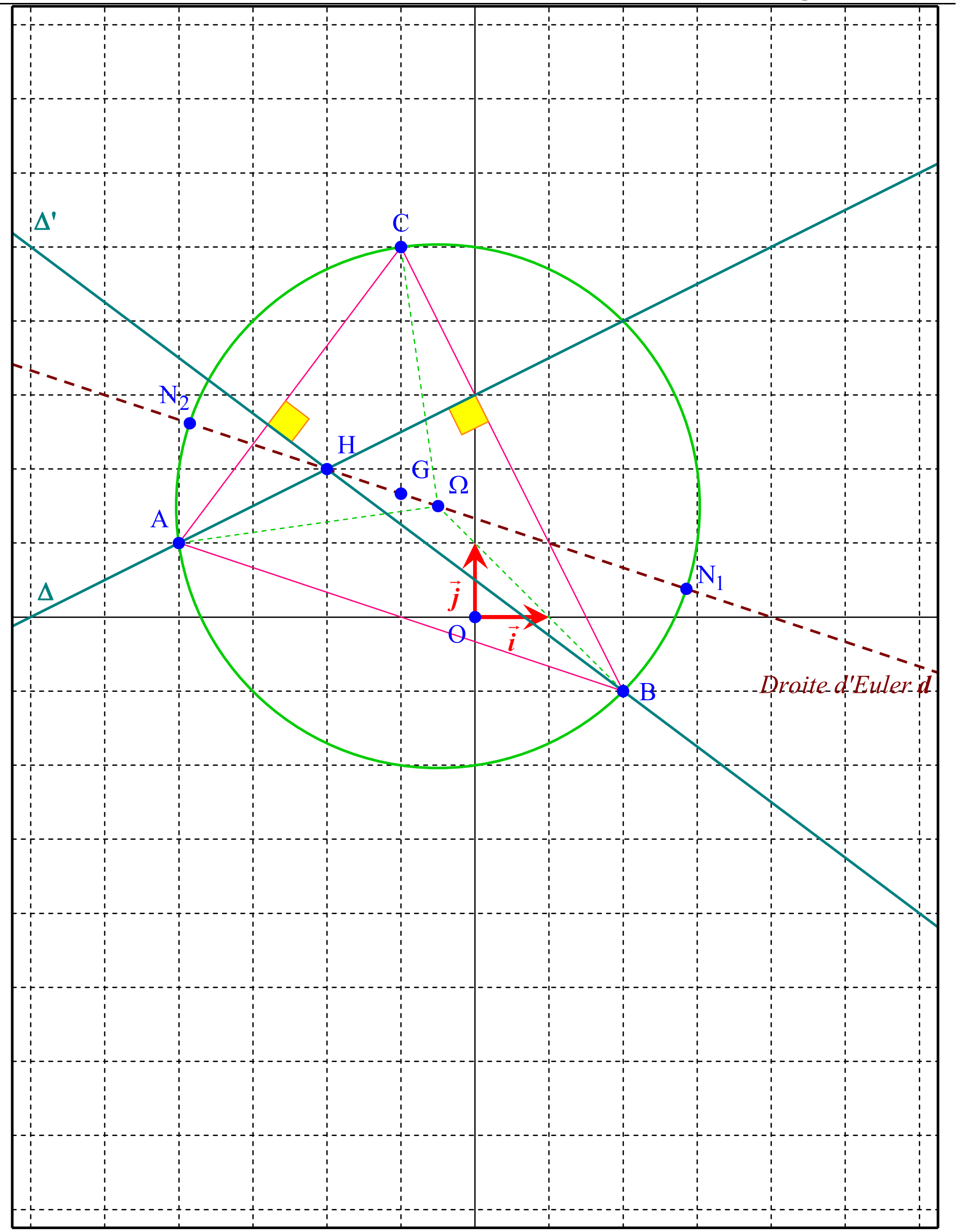
Conclusion : le cercle (Γ) et la droite *d* ont deux points d'intersection qui sont :

$$N_1\left(\frac{3.\sqrt{5}-1}{2};\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{et} \quad N_2\left(-\frac{3.\sqrt{5}+1}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Petite précision utile : implication n'est pas équivalence...

Comme nous avons procédé par implications, nous avons juste établi que si N est un point d'intersection du cercle (Γ) et la droite *d*, alors c'est soit le point N_1, soit le point N_2.

Cela dit, rien ne prouve que le point N_1 ou le point N_2 appartiennent à fois à la droite *d* ou au cercle (Γ). Si nous étions consciencieux, il faudrait le vérifier...



Homothétie

Une petite ballade homothétique

Le contexte

Cet exercice est une question de cours : démontrer que la composée de deux homothéties de rapports inverses mais qui n'ont pas nécessairement le même centre est une translation.
La principale difficulté : travailler avec ce mystérieux réel non nul k.

L'énoncé

I et J sont deux points distincts du plan et k est un réel non nul.
On appelle $\boldsymbol{h}$ l'homothétie de centre I et de rapport k.

On appelle $\boldsymbol{h'}$ l'homothétie de centre J et de rapport $\dfrac{1}{k}$.

On note $\boldsymbol{T}$ la composée de l'homothétie $\boldsymbol{h}$ suivie de l'homothétie $\boldsymbol{h'}$.
Autrement dit, l'image d'un point M du plan par la transformation $\boldsymbol{T}$ est le point M" défini par :

$$\mathrm{M} \xrightarrow{\text{Homothétie } \boldsymbol{h}} \mathrm{M}' = \boldsymbol{h}(\mathrm{M}) \xrightarrow{\text{Homothétie } \boldsymbol{h'}} \boldsymbol{T}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'' = \boldsymbol{h'}(\mathrm{M}')$$

Le but de cet exercice est de déterminer la nature de cette transformation $\boldsymbol{T}$.

Soit M un point quelconque du plan.
On appelle M' son image par $\boldsymbol{h}$.
On note M" l'image de M' par l'homothétie $\boldsymbol{h'}$.

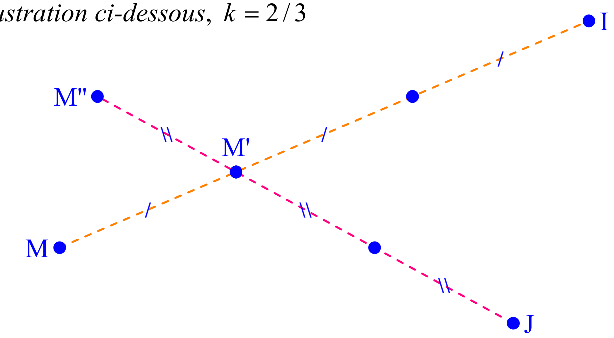
a) Quelle relation vectorielle définit le point M' ?

Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \left(1-\dfrac{1}{k}\right)\times\overrightarrow{\mathrm{IM}'}$

b) En s'inspirant de la question précédente, exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M'M''}}$ en fonction de du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M'J}}$.

c) En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM''}}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.
Que peut-on en déduire quand à la nature de la transformation $\boldsymbol{T}$?

Sur la figure d'illustration ci-dessous, $k = 2/3$



Le corrigé

a) Comme M' est l'image de M par l'homothétie $\boldsymbol{h}$ centre I et de rapport k, alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{IM}'} = k\times\overrightarrow{\mathrm{IM}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IM}'} = k\times\overrightarrow{\mathrm{IM}'} + k\times\overrightarrow{\mathrm{M'M}} \Leftrightarrow k\times\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = (k-1)\times\overrightarrow{\mathrm{IM}'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \frac{k-1}{k}\times\overrightarrow{\mathrm{IM}'} = \left(\frac{k}{k}-\frac{1}{k}\right)\times\overrightarrow{\mathrm{IM}'} = \left(1-\frac{1}{k}\right)\times\overrightarrow{\mathrm{IM}'}$$

b) Comme M" est l'image de M' par l'homothétie $\boldsymbol{h'}$ centre J et de rapport $\dfrac{1}{k}$, alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{JM}''} = \frac{1}{k}\times\overrightarrow{\mathrm{JM}'} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{JM}'} + \overrightarrow{\mathrm{M'M''}} = \frac{1}{k}\times\overrightarrow{\mathrm{JM}'} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{M'M''}} = \frac{1}{k}\times\overrightarrow{\mathrm{JM}'} - \overrightarrow{\mathrm{JM}'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{M'M''}} = \left(\frac{1}{k}-1\right)\times\overrightarrow{\mathrm{JM}'} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{M'M''}} = \left(1-\frac{1}{k}\right)\times\overrightarrow{\mathrm{M'J}}$$

c) D'après ce qui vient d'être fait, nous pouvons écrire que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{\mathrm{M}\boldsymbol{T}(\mathrm{M})} = \overrightarrow{\mathrm{MM}''} = \overrightarrow{\mathrm{MM}'} + \overrightarrow{\mathrm{M'M''}}$$

$$= \underbrace{\left(1-\frac{1}{k}\right)\times\overrightarrow{\mathrm{IM}'}}_{\text{D'après a}} + \underbrace{\left(1-\frac{1}{k}\right)\times\overrightarrow{\mathrm{M'J}}}_{\text{D'après b}} = \left(1-\frac{1}{k}\right)\times\left(\overrightarrow{\mathrm{IM}'}+\overrightarrow{\mathrm{M'J}}\right) = \left(1-\frac{1}{k}\right)\times\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$$

Comme I et J sont deux points fixés et que k est un réel fixé, alors le vecteur $\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\times\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ est constant. L'image de tout point M du plan par la transformation $\boldsymbol{T}$ est le point M" défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}''} = \left(1-\frac{1}{k}\right)\times\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \text{Un vecteur constant}$$

<u>Conclusion :</u> la transformation $\boldsymbol{T}$ est une translation. Il en va toujours ainsi de la composée de deux homothéties de rapports inverses.

Probabilités

Preskomlétéès, le nouveau jeu improbable !

Le contexte

Pour réussir un exercice de probabilité, l'essentiel est de bien comprendre la situation exposée. Une fois ce travail d'analyse fait, l'exercice devient une promenade de santé.
Le présent exercice aborde les notions de variable aléatoire, d'espérance mathématique mais aussi et sans trop le dire, de probabilité conditionnelle.

L'énoncé

Dans le souci bien compréhensible de profiter de la crédulité de ses semblables, la Blancoise des Jeux a décidé de lancer un nouveau jeu sur le marché : le Preskomlétéès.
Avant le jeu, le joueur s'acquitte d'une participation ou mise de *m* euros.
Une première urne baptisée *Urne 1* contient sept boules indiscernables au toucher : deux vertes et cinq blanches.
Dans un premier temps, le joueur tire au hasard, successivement et sans remise deux boules dans cette *Urne 1*.

a) Déterminer les probabilité des événements suivants :

- V_1 : le joueur tire deux boules vertes dans l'*Urne 1*.
- B_1 : le joueur tire deux boules blanches dans l'*Urne 1*.
- M_1 : le joueur tire une boule verte et une boule blanche dans l'*Urne 1*.

Le jeu n'est pas fini. Une seconde urne baptisée *Urne 2* contient elle trois boules vertes et cinq blanches. A ces huit boules, on rajoute les deux tirées dans l'*Urne 1*.
L'*Urne 2* contient maintenant dix boules indiscernables au toucher.
Le joueur tire alors au hasard une troisième boule dans l'*Urne 2*.
Au final, le joueur a tiré une *triplette* de trois boules vertes ou blanches : deux dans l'*Urne 1* et une dans l'*Urne 2*.
Le gain brut du joueur est fonction du nombre de boules vertes que contient la *triplette*.

0. Si la *triplette* ne comporte aucune boule verte, alors le joueur ne gagne rien.
1. Si la *triplette* comporte une seule boule verte, alors le joueur est remboursé de sa mise *m*.
2. Si la *triplette* comporte deux boules vertes, alors le joueur gagne dix euros.
3. Si la *triplette* comporte trois boules vertes, alors le joueur gagne cent euros.

b) Dresser un arbre pondéré décrivant la situation du jeu complet.

On appelle X la variable aléatoire comptabilisant le gain algébrique (ou net) du joueur à l'issue du jeu.

c) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On vérifiera notamment que $p\left(X=0\right)=\dfrac{3}{7}$.

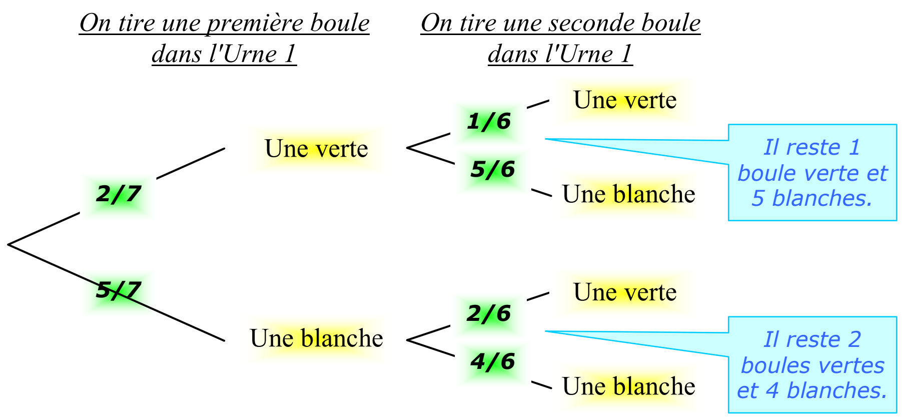
d) Exprimer l'espérance mathématique $E\left(X\right)$ en fonction de la mise *m*.

La Blancoise des jeux décide de fixer la mise *m* à 5€. Le jeu est-il favorable au joueur ?
A combien la Blancoise des Jeux doit-elle fixer la mise *m* pour que espérer faire un bénéfice d'au minimum 2€ par jeu ?

e) On sait que la *triplette* que vient de tirer le joueur ne comporte qu'une seule boule verte.
Calculer alors la probabilité que la boule verte ait été tirée dans l'*Urne 2*.

Le corrigé

a) Dans l'*Urne 1* qui contient deux boules vertes et cinq blanches, on tire successivement et sans remise deux boules. La situation de ce tirage est la suivante :



Par conséquent, les probabilités des événements demandées sont les suivantes :

- $p\left(V_1\right)=p\left(\text{"Une boule verte puis une boule verte"}\right)=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{42}=\dfrac{1}{21}$.
- $p\left(B_1\right)=p\left(\text{"Une boule blanche puis une boule blanche"}\right)=\dfrac{5}{7}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{20}{42}=\dfrac{10}{21}$

- $p(M_1) = p(\text{"Verte puis blanche"}) + p(\text{"Blanche puis verte"})$

$$= \frac{2}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{7}\times\frac{2}{6} = \frac{10}{42}+\frac{10}{42} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$$

Nous aurions pu obtenir la probabilité de l'événement M_1 en remarquant que les trois événements V_1 ; B_1 et M_1 forment une partition de l'univers des probabilités. Comprenez par là que quand on n'est pas dans l'un des trois événements, c'est qu'on est nécessairement dans l'un des deux autres.
Par conséquent :

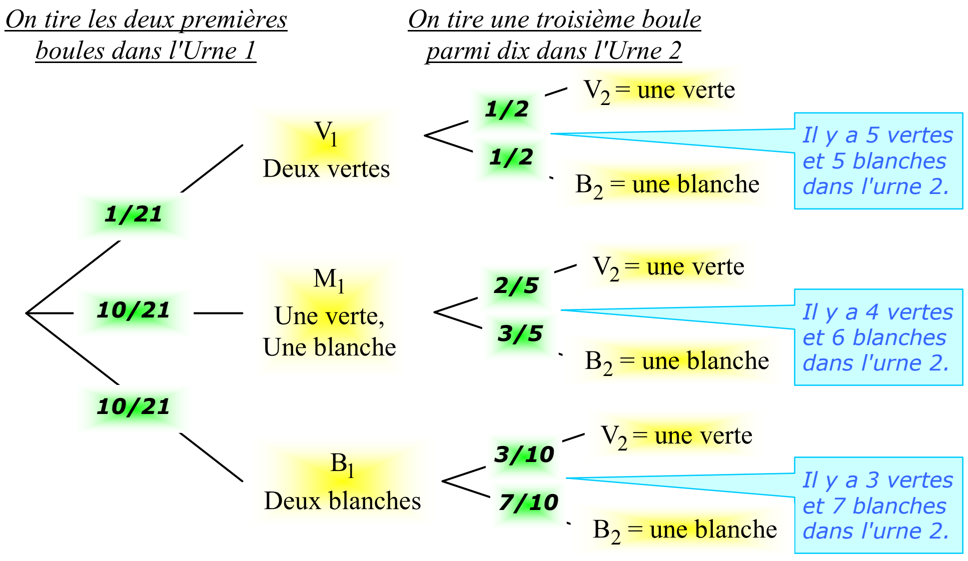
$$p(M_1) = 1 - p(V_1) - p(B_1) = 1 - \frac{1}{21} - \frac{10}{42} = \frac{10}{42}$$

Note : Evénement M_1 comme mixte : une verte et une blanche.

b) Pour plus de clarté, nous appellerons V_2 et B_2 les événements suivants :

- V_2 : la troisième boule tirée dans l'*Urne 2* est verte.
- B_2 : la troisième boule tirée dans l'*Urne 2* est blanche.

La situation alors est la suivante :



c) Une *triplette* conduit à quatre gains bruts possibles. Le gain algébrique ou net correspond à la différence entre le gain brut et la mise *m*.
La variable aléatoire X prend les quatre valeurs $-m$ (aucune boule verte); 0 (une seule boule verte) ; $10-m$ (deux boules vertes) et $100-m$ (trois boules vertes).

En utilisant l'arbre pondéré dressé à la question précédente, nous pouvons dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

- $\underbrace{p(X=-m)}_{\text{Aucune boule verte}} = p(B_1 \cap B_2) = \frac{10}{21}\times\frac{7}{10} = \frac{1}{3}$
- $\underbrace{p(X=0)}_{\text{Une boule verte}} = p(B_1 \cap V_2) + p(M_1 \cap B_2) = \frac{10}{21}\times\frac{3}{10}+\frac{10}{21}\times\frac{3}{5} = \frac{1}{7}+\frac{2}{7} = \frac{3}{7}$
- $\underbrace{p(X=10-m)}_{\text{Deux boules vertes}} = p(V_1 \cap B_2) + p(M_1 \cap V_2) = \frac{1}{21}\times\frac{1}{2}+\frac{10}{21}\times\frac{2}{5} = \frac{1}{42}+\frac{8}{42} = \frac{9}{42} = \frac{3}{14}$
- $\underbrace{p(X=100-m)}_{\text{Trois boules vertes}} = p(V_1 \cap V_2) = \frac{1}{21}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{42}$

Pour voir si l'on ne sait pas tromper, on vérifie que la somme des probabilités trouvées $\frac{1}{3}+\frac{3}{7}+\frac{3}{14}+\frac{1}{42} = \frac{14+18+9+1}{42} = \frac{42}{42}$ est égale 1.

d) L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est donnée par :

$$E(X) = (-m)\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{3}{7} + (10-m)\times\frac{3}{14} + (100-m)\times\frac{1}{42}$$

$$= -\frac{1}{3}\times m + 0 + \frac{15}{7} - \frac{3}{14}\times m + \frac{50}{21} - \frac{1}{42}\times m = \frac{95}{21} - \frac{14+9+1}{42}\times m = \frac{95}{21} - \frac{4}{7}\times m$$

➲ Si la Blancoise des jeux fixe la mise *m* à 5€, alors l'espérance de gain X est donnée par :

$$E(X) = \frac{95}{21} - \frac{4}{7}\times 5 = \frac{95}{21} - \frac{20}{7} = \frac{95}{21} - \frac{60}{21} = \frac{35}{21} = \frac{5}{3} \approx 1{,}66€$$

<u>Conclusion :</u> comme son espérance de gain net est positive, alors le jeu est favorable au joueur. Le gain moyen brut qu'il peut espérer est de 6,66€.

➲ La Blancoise des Jeux souhaite faire un bénéfice d'au moins 2€ par jeu. Autrement dit, elle souhaite que l'espérance de gain net du joueur $E(X)$ soit au plus égale à $-2€$.
Pour répondre à cette question, nous devons résoudre l'inéquation d'inconnue *m* :

$$E(X) \leq -2 \iff \frac{95}{21} - \frac{4}{7}\times m \leq -\frac{42}{21} \iff \frac{137}{21} \leq \frac{4}{7}\times m \iff m \geq \frac{137}{21}\times\frac{7}{4} = \frac{137}{12} = 11 + \frac{5}{12}$$

<u>Conclusion :</u> si la Blancoise de Jeux veut faire un bénéfice moyen d'au moins deux euros par jeu, elle doit fixer la mise *m* à au moins 12€.
Dans un tel cas de figure, une *triplette* comportant deux boules vertes rapporte moins qu'une *triplette* comportant une seule boule verte. Ce qui nuit la crédibilité du jeu.

e) On sait que la *triplette* qui vient d'être tirée ne comporte qu'une seule boule verte.
L'ensemble de référence a changé car on sait que l'événement $X = 0$ est réalisé. La probabilité qu'il se réalise était de $\frac{3}{7}$.

Dans la situation où nous sommes, l'événement "la boule verte a été tirée dans l'*Urne 2*" correspond à l'événement $B_1 \cap V_2$.

Par conséquent, la probabilité demandée est donnée par :

$$p\left(V_2 \text{ sachant } X = 0\right) = \frac{p\left(B_1 \cap V_2\right)}{p\left(X = 0\right)} = \frac{1/7}{3/7} = \frac{1}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{3} = \frac{1}{3}$$

Produit scalaire

Le triangle des bermudas

Le contexte

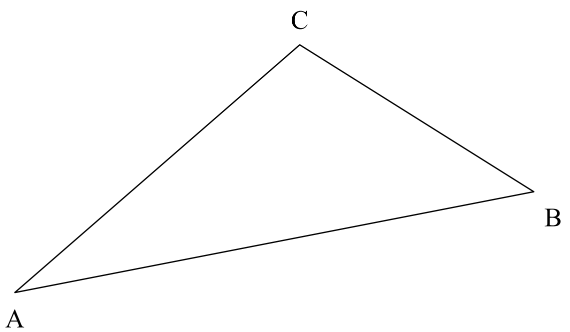
Cet exercice traite essentiellement de l'utilité du produit scalaire dans la simplification d'égalités définissant des ensembles de points.

L'énoncé

Le triangle ABC qui est représenté ci-dessous est un tel que :

$$AB = 7\text{cm} \qquad AC = 5\text{cm} \qquad \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{6}$$

L'unité de longueur de cet exercice est le centimètre.



Dans tout l'exercice, une grande attention sera portée à la rédaction ainsi qu'aux justifications fournies.

a) Calculer la longueur du côté [BC]. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée arrondie au millimètre près.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.
Déterminer la valeur exacte du sinus de l'angle géométrique $\widehat{ABC}$, puis une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ exprimée en degrés et arrondie au dixième de degré près.
Dans quelle unité $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$ est-il exprimé ?

On appelle J le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(B;5)$.

c) Placer le point J sur la figure. On indiquera le détail de la construction.
Démontrer le théorème de réduction vectorielle appliqué au barycentre J dont l'énoncé est :

$$\text{Pour tout point M du plan, } 2.\overrightarrow{MA} + 5.\overrightarrow{MB} = \ldots\overrightarrow{MJ}$$

d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CA} = -10\ .$$

e) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}'$ des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\overrightarrow{MC}\cdot\left(2.\overrightarrow{MA} + 5.\overrightarrow{MB}\right) = 0$$

f) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = -7$$

g) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}'$ des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$2.MA^2 + 5.MB^2 = 133$$

Le corrigé

a) En application du théorème d'Al-Kashi, nous pouvons écrire :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 49 + 25 - 2\times 7\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 74 - 35.\sqrt{3}$$

Donc $BC = \sqrt{74 - 35.\sqrt{3}} \approx 3,7\text{cm}$

b) Nous pouvons écrire :

$$\text{Aire du triangle ABC} = \frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{1}{2}\times 7\times 5\times\frac{1}{2} = \frac{35}{4} = 8,75\text{cm}^2$$

➲ D'après la formule des sinus, nous avons :

$$\frac{BC}{\sin\left(\widehat{BAC}\right)} = \frac{AC}{\sin\left(\widehat{ABC}\right)} = \frac{AB}{\sin\left(\widehat{ACB}\right)}$$

En ne retenant que la première égalité, il vient :

$$\frac{BC}{\sin\left(\widehat{BAC}\right)} = \frac{AC}{\sin\left(\widehat{ABC}\right)} \quad \text{d'où} \quad \sin\left(\widehat{ABC}\right) = \sin\left(\widehat{BAC}\right)\times\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}\times\frac{5}{\sqrt{74 - 35.\sqrt{3}}}$$

L'angle géométrique $\widehat{ABC}$ mesure environ 43,1°.
➲ Le sinus étant un rapport (de longueurs), il n'est exprimé dans aucune unité.

c) Comme J est le barycentre des deux points pondérés $(A;2)$ et $(B;5)$, alors il vérifie l'égalité vectorielle $\overrightarrow{JA}+5.\overrightarrow{JB}=\vec{o}$. Triturons cette dernière !

$$2.\overrightarrow{JA}+5.\overrightarrow{JB}=\vec{o} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{JA}+5.\overrightarrow{JA}+5.\overrightarrow{AB}=\vec{o} \Leftrightarrow 7.\overrightarrow{JA}=5.\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{5}{7}.\overrightarrow{AB}$$

Le point J se trouve aux cinq septièmes du segment [AB].

➲ Pour tout point M du plan, nous pouvons écrire :

$$2.\overrightarrow{MA}+5.\overrightarrow{MB}=2.\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}\right)+5.\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)=7.\overrightarrow{MJ}+\underbrace{2.\overrightarrow{JA}+5.\overrightarrow{JB}}_{=\vec{o}}=7.\overrightarrow{MJ}$$

D'où le théorème de réduction vectorielle recherché.

d) On appelle H le point de la droite (AC) situé à 2 centimètres du point C à l'opposé de A.

Ce point H vérifie la relation vectorielle $\overrightarrow{CH}=-\frac{2}{5}.\overrightarrow{CA}$.

De plus :

$$\underbrace{\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}=-CH\times CA=-2\times 5=-10}_{\text{Car les vecteurs } \overrightarrow{CH} \text{ et } \overrightarrow{CA} \text{ sont colinéaires de sens opposés}}$$

Donc le point H appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ mais son utilité ne s'arrête pas là. En effet :

$$M\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CA}=10 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HM}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=10 \Leftrightarrow \overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{CA}=10$$

$$\Leftrightarrow 10+\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{CA}=10 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{CA}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\perp\overrightarrow{CA}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par H.

e) Pour savoir ce qu'est l'ensemble $\mathcal{E}'$, nous allons utiliser le résultat de la question 2.c.

$$M\in\mathcal{E}' \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\cdot\left(2.\overrightarrow{MA}+5.\overrightarrow{MB}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\cdot\left(7.\overrightarrow{MJ}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\perp\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow \text{Le triangle MJC est rectangle en M}$$

$$\Leftrightarrow \text{M appartient au cercle de diamètre [JC]}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}'$ est le cercle de diamètre [JC].

f) On appelle I le milieu du segment [AC].
En application d'une des égalités du théorème de la médiane appliquée au segment [AC] de milieu I, nous pouvons écrire que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$$

$$=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right)}_{=\vec{o}\text{ car I est le milieu de [AC]}}+\overrightarrow{IA}\cdot\left(-\overrightarrow{IA}\right)=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\vec{o}-\overrightarrow{IA}^2$$

$$=MI^2+0-IA^2=MI^2-IA^2$$

Il vient alors :

$$M\in\mathcal{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=-7 \Leftrightarrow MI^2-2,5^2=-7 \Leftrightarrow MI^2=-7+6,25=-0,75$$

Or un carré n'est jamais négatif. L'égalité $MI^2=-0,75$ n'est jamais réalisée.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{F}$ est l'ensemble vide.

g) Tout d'abord, nous allons chercher à simplifier la somme $2.MA^2+5.MB^2$.

Pour tout point M du plan, nous pouvons écrire :

$$2.MA^2+5.MB^2=2\times\overrightarrow{MA}^2+5\times\overrightarrow{MB}^2=2\times\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}\right)^2+5\times\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)^2$$

$$=2\times\left(\overrightarrow{MJ}^2+2\times\left(\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{JA}\right)+\overrightarrow{JA}^2\right)+5\times\left(\overrightarrow{MJ}^2+2\times\left(\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{JB}\right)+\overrightarrow{JB}^2\right)$$

$$=2\times MJ^2+4\times\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{JA}+2\times JA^2+5\times MJ^2+10\times\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{JB}+5\times JB^2$$

$$=7\times MJ^2+2\times JA^2+5\times JB^2+\underbrace{4\times\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{JA}+10\times\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{JB}}_{\text{Factorisons par le vecteur } 2.\overrightarrow{MJ}}$$

Après ce changement de colonne, reprenons !

$$2.MA^2+5.MB^2=7\times MJ^2+2\times 5^2+5\times 2^2+\left(2.\overrightarrow{MJ}\right)\cdot\underbrace{\left(2.\overrightarrow{JA}+5.\overrightarrow{JB}\right)}_{=\vec{o}}$$

$$=7\times MJ^2+50+20+\left(2.\overrightarrow{MJ}\right)\cdot\vec{o}=7\times MJ^2+50+20+0=7\times MJ^2+70$$

Voilà une démonstration qui n'est pas sans rappeler celle d'une des égalités du théorème de la médiane.

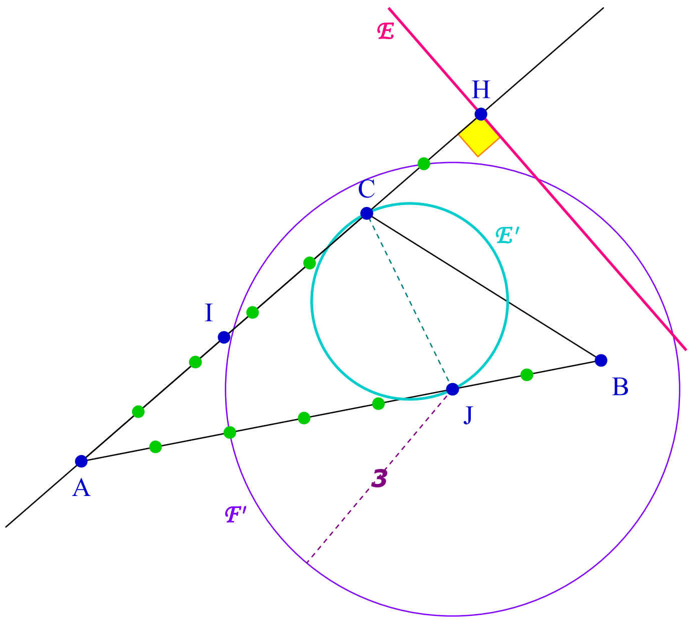
Pour ce qui est de l'ensemble $\mathcal{F}'$, il vient alors :

$$M\in\mathcal{F}' \Leftrightarrow 2\times MA^2+5\times MB^2=133 \Leftrightarrow 7\times MJ^2+70=133$$

$$\Leftrightarrow 7\times MJ^2=63 \Leftrightarrow \underbrace{MJ^2=9 \Leftrightarrow MJ=3}_{\text{Car une longueur est une quantité positive ou nulle.}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{F}'$ est le cercle de centre J et de rayon 3.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Second degré et polynômes

Vivent les inégalités !

Le contexte

Cet exercice comporte cinq équations ou inéquations qui, le cas échéant, se résolvent en recourant au discriminant et aux formules du second degré.

L'énoncé

a) Résoudre dans ℝ l'équation :

$$(4.x+1)^2-2=5.x-3$$

b) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$(7.x+3)^2\leq(5.x-1)^2$$

c) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$x-1\geq\frac{20}{2.x+1}$$

d) Résoudre dans ℝ l'équation bicarrée :

$$2.x^4-15.x^2-27=0$$

e) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$2+\frac{7}{x-3}\leq\frac{1}{x+2}$$

L'énoncé

a) Pour résoudre cette équation du second degré, nous allons la développer, puis la réduire.

$$(4.x+1)^2-2=5.x-3 \Leftrightarrow 16.x^2+8.x+1-2=5.x-3 \Leftrightarrow 16.x^2+3.x+2=0$$

Calculons le discriminant de cette équation du second degré.

$$\Delta=3^2-4\times16\times2=9-128=-119$$

Comme son discriminant Δ est négatif alors cette équation du second degré n'a pas de solution.

b) Cette inéquation peut être résolue de deux manières :

⏩ ***Au moyen d'une identité remarquable : on recherche une factorisation.***

$$(7.x+3)^2\leq(5.x-1)^2 \Leftrightarrow \underbrace{(7.x+3)^2-(5.x-1)^2}_{a^2-b^2}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[(7.x+3)+(5.x-1)\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(7.x+3)-(5.x-1)\right]}_{(a-b)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (12.x+2)\times(2.x+4)\leq 0$$

Les facteurs affines $12.x+2$ et $2.x+4$ s'annulent respectivement en $-\frac{1}{6}$ et -2.

Le tableau de signe de leur produit est :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
$12.x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2.x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Leur produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit $(12.x+2)\times(2.x+4)$ est négatif ou nul entre -2 et $-\frac{1}{6}$.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left[-2;-\frac{1}{6}\right]$

⏩ ***En développant tout, puis en cherchant le signe d'une forme du second degré***

$$(7.x+3)^2\leq(5.x-1)^2 \Leftrightarrow 49.x^2+42.x+9\leq 25.x^2-10.x+1 \Leftrightarrow 24.x^2+52.x+8\leq 0$$

Pour connaître le signe du trinôme $N(x)=24.x^2+52.x+8$, calculons son discriminant :

$$\Delta_{N(x)}=(52)^2-4\times24\times8=2704-708=1936=44^2$$

Comme son discriminant est positif, $N(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-52-44}{2\times24}=-\frac{96}{48}=-2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-52+44}{2\times24}=-\frac{8}{48}=-\frac{1}{6}$$

Son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
N(x)		+	0	−	0	+	
		Signe de 24		*Signe contraire de 24*		*Signe de 24*	

$N(x)$ est négatif ou nul sur l'intervalle $[-2;-1/6]$. C'est l'ensemble des solutions

c) Pour résoudre cette inéquation, nous allons tout ramener dans un seul membre et chercher à pouvoir nous prononcer sur le signe d'une fraction.

$$x-1\geq\frac{20}{2.x+1}\Leftrightarrow x-1-\frac{20}{2.x+1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)\times(2.x+1)}{2.x+1}-\frac{20}{2.x+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2.x^2+x-2.x-1-20}{2.x+1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2.x^2-x-21}{2.x+1}\geq 0$$

Déterminons le signe du numérateur $N(x)=2.x^2-x-21$. Calculons son discriminant.

$$\Delta_{N(x)}=(-1)^2-4\times 2\times(-21)=1+168=169=13^2$$

Comme son discriminant est positif, $N(x)$ a deux racines :

$$x_1=\frac{-(-1)-13}{2\times 2}=-\frac{12}{4}=-3 \quad\text{et}\quad x_2=\frac{-(-1)+13}{2\times 2}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}=3,5$$

Le dénominateur $2.x+1$ s'annule en $-0,5$. Le tableau de signe du quotient est :

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2.x^2-x-21$		+	0	−	|	−	0	+	
$2.x+1$		−	|	−	0	+	|	+	
Leur quotient		−	0	+	||	−	0	+	

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-3;-0,5[\cup[3,5;+\infty[$.

d) Avant de résoudre cette équation bicarrée, nous allons factoriser la forme du second degré $Q(t)=2.t^2-15.t-27$. Pour cela, calculons son discriminant.

$$\Delta_{Q(t)}=(-15)^2-4\times 2\times(-27)=225+216=441=21^2$$

Donc $Q(t)$ a deux racines distinctes :

$$t_1=\frac{-(-15)-21}{2\times 2}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2} \quad\text{et}\quad t_1=\frac{-(-15)+21}{2\times 2}=\frac{36}{4}=9$$

L'écriture factorisée de $Q(t)$ est donc : $Q(t)=2\times(t+1,5)\times(t-9)$

A présent, nous sommes en mesure de résoudre l'équation bicarrée initiale :

$$2.x^4-15.x^2-27=0\Leftrightarrow 2\times\left(x^2\right)^2-15\times\left(x^2\right)-27=0\Leftrightarrow Q\left(x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\times\left(x^2+1,5\right)\times\left(x^2-9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\times\left(x^2+1,5\right)\times(x-3)\times(x+3)=0}_{\text{Un produit est nul si et seulement si...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2+1,5=0 \ \underline{\text{ou}}\ x-3=0\ \underline{\text{ou}}\ x+3=0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2=-1,5}_{\substack{\text{Comme un carré n'est jamais négatif,}\\ \text{cette sous-équation n'a pas de solution}}}\quad \underline{\text{ou}}\ x=3\ \underline{\text{ou}}\ x=-3$$

<u>Conclusion :</u> l'équation bicarrée $2.x^4-15.x^2-27=0$ a deux solutions : -3 et 3.

e) Cette inéquation va être résolue pareillement à celle de la 1.c.

$$2+\frac{7}{x-3}\leq\frac{1}{x+2}\Leftrightarrow\frac{2\times(x-3)\times(x+2)}{(x-3)\times(x+2)}+\frac{7\times(x+2)}{(x-3)\times(x+2)}-\frac{1\times(x-3)}{(x-3)\times(x+2)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\times(x-3)\times(x+2)+7\times(x+2)-1\times(x-3)}{(x-3)\times(x+2)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2.x^2+4.x-6.x-12+7.x+14-x+3}{(x-3)\times(x+2)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2.x^2+4.x+5}{(x-3)\times(x+2)}\leq 0$$

Nous devons déterminer le signe du numérateur $N(x)=2.x^2+4.x+5$. Pour ce faire, on calcule son discriminant :

$$\Delta_{N(x)}=4^2-4\times 2\times 5=16-40=-24$$

Comme son discriminant est négatif alors la forme du second degré $N(x)$ est toujours du même signe, elle est toujours positive comme son coefficient dominant 2.
Par conséquent, le tableau de signe du quotient est :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$2.x^2+4.x+5$		$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Leur quotient		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

<u>Conclusion :</u> le quotient $\dfrac{2.x^2+4.x+5}{(x-3)\times(x+2)}$ est négatif ou nul sur l'intervalle $]-2;3[$. C'est l'ensemble des solutions de notre inéquation.

Troisième degré...ou de force

Le contexte

L'objet de cet exercice est la factorisation complète d'un polynôme du troisième degré. D'abord par une racine, puis en utilisant les formules du second degré.

L'énoncé

Le polynôme P est défini pour tout réel x par :

$$P(x)=3.x^3-13.x^2-11.x+5$$

a) Démontrer que -1 est une racine du polynôme $P(x)$.

Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x, on ait :

$$P(x)=(x+1)\times\left(a.x^2+b.x+c\right)$$

b) En utilisant ce qui précède, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{-x^2+x-1}{3.x^3-13.x^2-11.x+5}\leq 0$$

Le corrigé

a) Calculons l'image de -1 par le polynôme P.

$$P(-1)=3\times(-1)^3-13\times(-1)^2-11\times(-1)+5=-3-13+11+5=0$$

Donc -1 est une racine du polynôme P.

Par conséquent, $P(x)$ est factorisable par $x-(-1)=x+1$.

➲ La factorisation peut être effectuée de deux façons :

⏩ ***Par identification des coefficients de même degré***

On veut écrire le polynôme $P(x)=3.x^3-13.x^2-11.x+5$ sous la forme :

$$P(x)=(x+1)\times\left(a.x^2+b.x+c\right)=a.x^3+b.x^2+c.x+a.x^2+b.x+c$$

$$=\underbrace{a.x^3+(a+b).x^2+(b+c).x+c=3.x^3+(-13)\times x^2+(-11)\times x+5}_{\text{Voilà ce que l'on recherche !}}$$

Deux polynômes égaux ont des coefficients de même puissance égaux. Il vient :

$$\begin{cases} \text{Egalité des coefficients en } x^3 : & a=3 \\ \text{Egalité des coefficients en } x^2 : & a+b=-13 \quad \text{donc} \quad b=-13-3=-16 \\ \text{Egalité des coefficients en } x : & b+c=-11 \quad \text{donc} \quad c=-11+16=5 \\ \text{Egalité des coefficients constants :} & c=5 \quad \leftarrow \text{ Tout est bien qui finit bien !} \end{cases}$$

⏩ ***En faisant apparaître le facteur x+1 dans chacun des termes du polynôme P(x)***

$$P(x)= \overbrace{3.x^3}^{\text{Combien y va-t-il de fois } x+1 \text{ ?}} -13.x^2-11.x+5 = \overbrace{3.x^2\times(x+1)-3.x^2}^{3.x^3}-13.x^2-11.x+5$$

$$= 3.x^2\times(x+1)\overbrace{-16.x^2}^{\text{Combien de } x+1 \text{ ?}}-11.x+5 = 3.x^2\times(x+1)\overbrace{-16.x\times(x+1)+16.x}^{-16.x^2}-11.x+5$$

$$= 3.x^2\times(x+1)-16.x\times(x+1)+5.x+5$$

$$= 3.x^2\times\underbrace{(x+1)}_{\text{Le...}}-16.x\times\underbrace{(x+1)}_{\text{...facteur..}}+5\times\underbrace{(x+1)}_{\text{...commun}} = \underbrace{(x+1)\times\left(3.x^2-16.x+5\right)}_{\text{Donc } a=3 \text{ ; } b=-16 \text{ et } c=5}$$

Conclusion : pour tout réel x, nous avons $P(x)=(x+1)\times\left(3.x^2-16.x+5\right)$

b) Après ce que nous venons de faire, l'inéquation proposée devient :

$$\frac{-x^2+x-1}{3.x^3-13.x^2-11.x+5}\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-x^2+x-1}{(x+1)\times\left(3.x^2-16.x+5\right)}\leq 0$$

Dans ce quotient, seuls les signes des deux facteurs du second degré nous pose problèmes.

Commençons par le signe du numérateur $N(x)=-x^2+x-1$. Calculons son discriminant.

$$\Delta_{N(x)}=1^2-4\times(-1)\times(-1)=1-4=-3$$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $N(x)$ est toujours du signe de son coefficient dominant -1, il est toujours négatif.

Intéressons-nous à présent au facteur du second degré $D(x)=3.x^2-16.x+5$.

Calculons son discriminant :

$$\Delta_{D(x)}=(-16)^2-4\times3\times5=256-60=196=14^2$$

Comme son discriminant est positif, alors $D(x)$ a deux racines distinctes.

$$x_1=\frac{-(-16)-14}{2\times3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad\text{et}\quad x_2=\frac{-(-16)+14}{2\times3}=\frac{30}{6}=5$$

Donc le tableau de signe du facteur du second degré $D(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		$1/3$		5		$+\infty$
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		Signe de 3		*Signe contraire de 3*		*Signe de 3*	

Et le tableau de signe du quotient est :

x	$-\infty$		-1		$1/3$		5		$+\infty$
$-x^2+x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3.x^2-16.x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
Leur quotient		$+$	||	$-$	||	$+$	||	$-$	

Conclusion : le quotient $\dfrac{-x^2+x-1}{3.x^3-13.x^2-11.x+5}$ est négatif ou nul sur $\left]-1;\frac{1}{3}\right[\cup\left]5;+\infty\right[$.

C'est l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Statistiques

Statistiques à choix multiples

Le contexte

Les statistiques sont l'un des chapitres les plus passionnants de la première S...à condition de les aborder en QCM vu que c'est la calculatrice qui fait tout le boulot.
Leur seul intérêt est surtout l'introduction de la notation Σ pour somme.

L'énoncé

La répartition des salaires annuels des 120 employés de l'entreprise d'études statistiques sur Internet Komisépa e-Stat est la suivante :

Salaire	Entre 10000 et 18000 euros	Entre 18000 et 22000 euros	Entre 22000 et 30000 euros	Entre 30000 et 42000 euros
Classe associée	$[10000;18000[$	$[18000;22000[$	$[22000;30000[$	$[30000;42000[$
Effectif	18	32	44	26

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise en enlève 0,25. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) Parmi les propositions suivantes, laquelle est l'écart-type n de la série statistique ?

7166	7196	24767	26000

b) En supposant que les individus d'une même classe sont répartis de manière homogène dans celle-ci, parmi les propositions suivantes, laquelle est le premier quartile Q_1 de la série statistique ?

18000	19500	20500	22000

c) En 2007, la direction de l'entreprise envisage d'augmenter les salaires de 5%. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

La moyenne des salaires annuels sera multipliée par 0,05.	La moyenne des salaires annuels sera multipliée par 1,05
La moyenne des salaires annuels sera multipliée par 1,5	La moyenne des salaires annuels restera la même

d) Finalement, en 2007, la direction de l'entreprise augmentera tous les salaires annuels de 800€. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

La moyenne et l'écart-type resteront les mêmes	La moyenne augmentera mais l'écart-type restera le même
La moyenne restera la même mais l'écart-type augmentera	La moyenne et l'écart-type augmenteront

e) On s'intéresse à la somme S des sept premiers carrés non nuls d'entiers pairs.

$$S = 4+16+36+64+100+144+196$$

Parmi les sommes suivantes, laquelle est égale à cette somme S ?

$\sum_{k=1}^{7} k^2$	$\sum_{k=1}^{7} 2\times k^2$	$\sum_{k=0}^{7} (2.k)^2$	$\sum_{k=1}^{7} (2.k)^2$

Le corrigé

a) Afin de connaître l'écart-type n (celui portant sur 120 individus) de cette série statistique, il faut au préalable en calculer la moyenne, Dans le calcul de celle-ci, comme notre série est à caractère quantitatif continu, la modalité remplaçant chaque classe est le milieu de celle-ci car on fait l'hypothèse qu'à l'intérieur de chaque classe les individus sont uniformément répartis.

$$\overline{x} = \frac{\sum \text{Effectif} \times \text{Modalité}}{\text{Effectif total}} = \frac{18\times 14000 + 32\times 20000 + 44\times 26000 + 26\times 36000}{120} \approx 24767$$

La variance de la série statistique est alors donnée par :

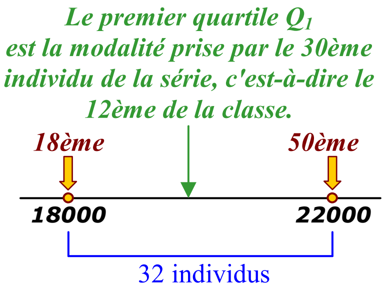
$$V = \underbrace{\frac{\left(\sum \text{Effectif} \times \text{Modalité}^2\right)}{\text{Effectif total}} - \text{Moyenne}^2}_{\text{Formule simplifiée de la variance}}$$

$$= \frac{18\times 14000^2 + 32\times 20000^2 + 44\times 26000^2 + 26\times 36000^2}{120} - 24767^2 \approx 51345556$$

Par conséquent, l'écart-type n vaut $\sqrt{V} \approx 7166$.

b) Le premier quartile Q_1 est la modalité prise par le trentième individu (le quart de 120). Ce trentième individu se trouve dans la classe $[18000;22000[$.

En supposant que dans cette classe, les individus sont uniformément répartis, ce trentième individu se trouve aux $\frac{12}{32}$ de l'intervalle $[18000;22000[$. D'où :



$$Q_1 = \frac{12}{32} \text{ de } [18000;22000[= \underbrace{18000}_{\text{Départ de la classe}} + \frac{12}{32} \times \underbrace{4000}_{\text{Longueur de la classe}} = 19500$$

c) Par combien un salaire est-il multiplié lorsqu'on l'augmente de 5% ? Réfléchissons !

$$\text{Nouveau Salaire} = \underbrace{\text{Salaire}}_{\text{Au départ...}} + \underbrace{5\% \text{ du Salaire}}_{\text{Augmentation}} = \text{Salaire} + 0,05 \times \text{Salaire} = \underbrace{1,05}_{1+5\%} \times \text{Salaire}$$

Si la direction augmente tous les salaires de 5%, ceux-ci sont donc multipliés par 1,05.
Cela revient à appliquer la transformation affine $f(t) = 1,05 \times t$ à la série statistique.
La moyenne des nouveaux salaires sera donc multipliée par 1,05.

d) Augmenter tous les salaires de 800€, cela revient à appliquer la transformation affine $f(t) = t + 800$ à notre série statistique.
La moyenne des nouveaux salaires est donc augmentée de 800€. Par contre, l'écart-type reste le même. Car les écarts entre les salariés sont toujours les mêmes.

e) La somme S de sept premiers carrés entiers pairs peut aussi s'écrire :

$$S = 4 + 16 + 36 + 64 + 100 + 144 + 196 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2$$

$$= (2\times1)^2 + (2\times2)^2 + (2\times3)^2 + (2\times4)^2 + (2\times5)^2 + (2\times6)^2 + (2\times7)^2 = \sum_{k=1}^{7} (2.k)^2$$

Suites

Attention à la suite !

Le contexte

Cet exercice est un peu fourre-tout. La première question traite de la détermination de l'expression d'une suite arithmétique connaissant certaines choses sur ses termes. Les trois autres questions abordent les variations de suites.

L'énoncé

a) (u_n) est une suite arithmétique telle que :

$$u_{15} = -23 \qquad u_7 + u_8 + u_9 = 15$$

Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

b) La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{3^n}{n+1}$$

Etablir le sens de variation de la suite (v_n).

c) La suite (t_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$t_n = \frac{n^2 + 2.n + 4}{n+2}$$

Etablir le sens de variation de la suite (t_n).

d) La suite (u_n) est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \text{pour tout entier naturel n, } u_{n+1} = (u_n)^2 + u_n + 1 \end{cases}$$

Calculer le terme u_3

Etablir le sens de variation de la suite (u_n).

Le corrigé

a) Pour définir parfaitement une suite arithmétique, il suffit de connaître sa raison et l'un de ses termes. On peut alors en déduire son expression en fonction de n.
Si on appelle r la raison de la suite arithmétique (u_n) alors nous avons :

$$u_{15} = u_0 + 15 \times r \qquad u_7 = u_0 + 7 \times r \qquad u_8 = u_0 + 8 \times r \qquad u_9 = u_0 + 9 \times r$$

Il vient alors :

$$u_{15} = u_0 + 15 \times r = -23 \Leftrightarrow u_0 = -23 - 15 \times r \quad \textbf{\textit{(1)}}$$

Or nous savons également :

$$u_7 + u_8 + u_9 = 15 \Leftrightarrow 3 \times u_0 + (7+8+9) \times r = 15 \Leftrightarrow 3 \times u_0 + 24 \times r = 15 \quad \textbf{\textit{(2)}}$$

Dans l'équation ***(2)***, remplaçons u_0 par ce qu'il vaut en r d'après ***(1)***. Il vient :

$$3 \times u_0 + 24 \times r = 15 \Leftrightarrow 3 \times (-23 - 15 \times r) + 24 \times r = 15 \Leftrightarrow -69 - 45 \times r + 24 \times r = 15$$

$$\Leftrightarrow -21 \times r = 84 \Leftrightarrow r = \frac{84}{-21} = -4$$

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_n = u_{15} + (n-15) \times r = -23 + (n-15) \times (-4) = -23 - 4 \times n + 60 = 37 - 4 \times n.$$

b) Pour connaître le sens de variation de la suite (v_n), étudions le signe de la différence de deux de ses termes consécutifs quelconques. Pour tout entier naturel n, nous avons :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3^{n+1}}{(n+1)+1} - \frac{3^n}{n+1} = \frac{3^n \times 3}{n+2} - \frac{3^n}{n+1} = 3^n \times \left[\frac{3}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= 3^n \times \left[\frac{3 \times (n+1) - 1 \times (n+2)}{(n+2) \times (n+1)}\right] = 3^n \times \frac{2.n+1}{(n+2) \times (n+1)}$$

Pour tout entier naturel n, les facteurs 3^n ; $2.n+1$; $n+2$ et $n+1$ sont strictement positifs.
Donc la différence $v_{n+1} - v_n$ est toujours positive. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} > v_n$.
<u>Conclusion :</u> la suite (v_n) est strictement croissante.

c) Pour déterminer le sens de variation de la suite $t_n = \dfrac{n^2 + 2.n + 4}{n+2}$, étudions le sens de variation de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + 2.x + 4}{x+2}$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Comme :

- les fonctions $u(x) = x^2 + 2.x + 4$ et $v(x) = x + 2$ de dérivées respectives $u'(x) = 2.x + 2$ et $v'(x) = 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

- Le dénominateur $v(x)$ est non nul sur $[0;+\infty[$.

Alors la fonction f est dérivable sur ce dernier intervalle.
Pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - v'(x)\times u(x)}{[v(x)]^2} = \frac{(2.x+2)\times(x+2) - 1\times(x^2+2.x+4)}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{2.x^2+4.x+2.x+4-x^2-2.x-4}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4.x}{(x+2)^2}$$

Or sur l'intervalle $]0;+\infty[$, les facteurs $x^2+4.x$ et $(x+2)^2$ sont strictement positifs.
Comme sa dérivée $f'(x)$ est strictement positive sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors la fonction f y est strictement croissante.
<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, nous avons : $t_{n+1} = \underbrace{f(n+1) > f(n)}_{\text{f est strictement croissante sur } [0;+\infty[} = t_n$

Par conséquent, la suite (t_n) est strictement croissante.

d) Pour calculer le quatrième terme de cette suite (u_n) qui est définie par récurrence, nous devons déterminer les valeurs de tous les termes qui le précèdent.

- $u_1 = (u_0)^2 + u_0 + 1 = (-2)^2 + (-2) + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$
- $u_2 = (u_1)^2 + u_1 + 1 = (3)^2 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$
- $u_3 = (u_2)^2 + u_2 + 1 = (13)^2 + (13) + 1 = 169 + 13 + 1 = 183$

Le quatrième terme de la suite (u_n) vaut 183.

➲ Pour connaître le sens de variation de la suite (u_n), intéressons-nous au signe de la différence de deux de ses termes consécutifs quelconques.
Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \left((u_n)^2 + u_n + 1\right) - u_n = (u_n)^2 + 1$$

Or le carré $(u_n)^2$ est une quantité qui est toujours positive ou nulle.
Donc la différence $u_{n+1} - u_n$ est toujours supérieure ou égale à 1. Autrement dit, elle est toujours strictement positive.
<u>Conclusion :</u> la suite (u_n) est strictement croissante.

Fortune de poche

Le contexte

Cet exercice est un grand classique : une suite est définie par récurrence. A partir d'un suite géométrique auxiliaire, on établit son expression. Puis on étudie ses variations et sa limite.

L'énoncé

C'est la nouvelle année et le temps des bonnes résolutions. Toto qui ce premier janvier, n'a qu'un seul euro en poche a réussi a déniché un travail qui lui rapporte trois euros à la fin de chaque journée.
Mais, pour sa subsistance, Toto dépense chaque jour les trois quarts du capital qu'il avait dans sa poche la veille en fin de journée.
On appelle u_n le capital que Toto a dans sa poche à la fin de la nième journée, une fois qu'il a été payé. u_0 représente le capital initial de Toto. Donc $u_0 = 1$.

a) Vérifier qu'à la fin de la première journée, le capital de la poche de Toto s'élève à 3,25€ c'est-à-dire que : $u_1 = 3,25$.
Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. On expliquera sa réponse.

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}.x + 3$$

On remarquera que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

b) Tracer la courbe (C) représentant la fonction f sur le graphique ci-contre.
En utilisant la courbe (C), construire sur l'axe des abscisses les points A_0, A_1, A_2 et A_3 qui ont pour abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3. On laissera apparents les traits de construction.

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par :

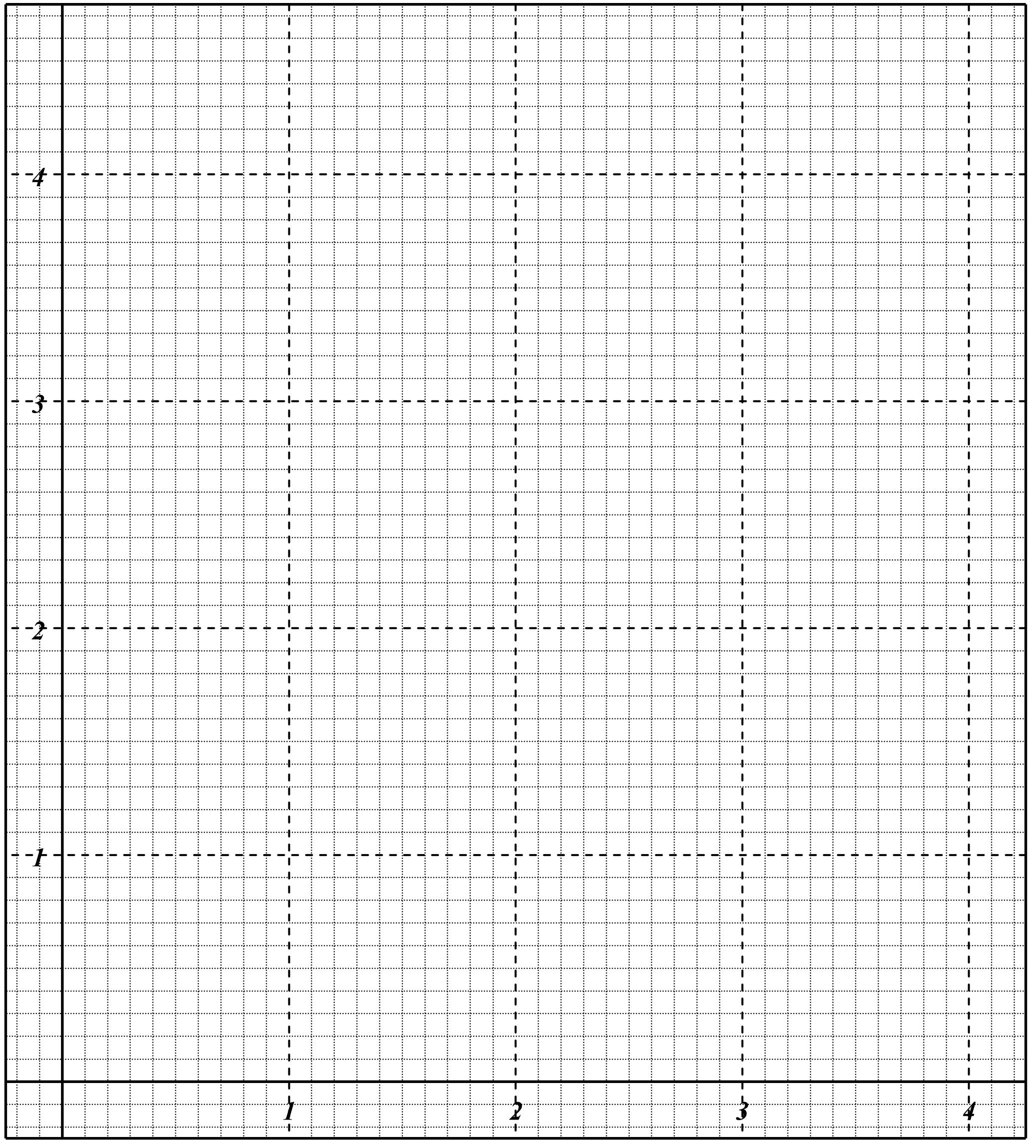
$$v_n = 4 - u_n$$

c) Calculer v_0 et v_1.
Exprimer u_n en fonction de v_n.

Démontrer que pour entier naturel n, on a : $v_{n+1} = \frac{1}{4}\times v_n$

Quelle est la nature de la suite (v_n) ? On précisera ses attributs.

En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 4 - 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$



d) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leq 4$$

Que peut-on en déduire quand au capital de la poche de Toto ?

Le corrigé

a) Entre la journée 0 et la journée 1, Toto perd les trois quarts de son capital u_0. Il lui reste donc $\frac{1}{4}\times u_0$ auquel viennent se rajouter trois euros.

Autrement dit :

$$u_1 = \left(u_0 - \frac{3}{4}\times u_0\right) + 3 = \frac{1}{4}\times u_0 + 3 = \frac{1}{4}\times 1 + 3 = 0,25 + 3 = 3,25$$

Le même phénomène se reproduisant entre la journée n et la suivante $n+1$, nous en déduisons :

$$u_{n+1} = \left(u_n - \frac{3}{4}\times u_n\right) + 3 = \frac{1}{4}\times u_n + 3 = f(u_n)$$

b) La courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{4}.x + 3$ est la droite qui passe par les points de coordonnées $(0;3)$ et $(4;4)$.

On construit les quatre points demandés A_0, A_1, A_2 et A_3 en s'appuyant sur la courbe (C) où chaque point a des coordonnées de la forme $(x;f(x))$, et sur la première bissectrice du plan qui est l'ensemble des points du plan dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

c) Calculons les deux premiers termes de la suite (v_n).

$$v_0 = 4 - u_0 = 4 - 1 = 3 \qquad v_1 = 4 - u_1 = 4 - 3,25 = 0,75$$

Et plus généralement, pour tout entier naturel n, nous avons : $u_n = 4 - v_n$.

➲ Pour prouver que la suite (v_n) est géométrique, exprimons v_{n+1} en fonction de v_n.

Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$v_{n+1} = 4 - u_{n+1} = 4 - \left(\frac{1}{4}.u_n + 3\right) = 1 - \frac{1}{4}.u_n = 1 - \frac{1}{4}.(4 - v_n) = 1 - 1 + \frac{1}{4}.v_n = \frac{1}{4}.v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = 3$.

Il vient alors que pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Et par conséquent :

$$u_n = 4 - v_n = 4 - 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

d) Afin de connaître le sens de variation de la suite (u_n), étudions le signe de la différence de deux de ses termes consécutifs quelconques.
Pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = \left[4 - 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] - \left[4 - 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = 4 - 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\times\frac{1}{4} - 4 + 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n \times\left(-\frac{3}{4}+3\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n\times\frac{9}{4}$$

Les termes $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $\frac{9}{4}$ étant positifs, il en va de même pour la différence $u_{n+1} - u_n$.

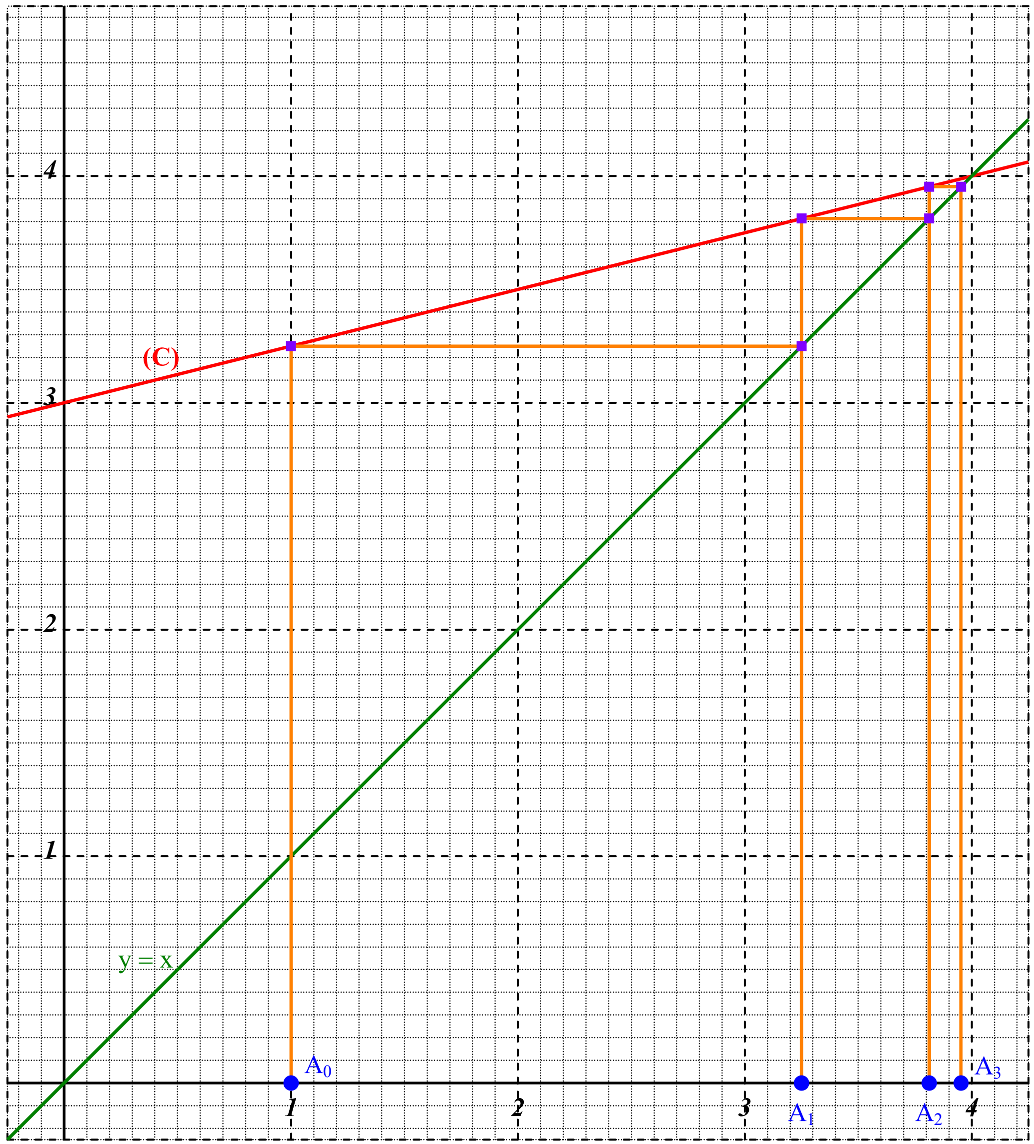
<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, nous avons $u_{n+1} > u_n$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

➲ Comme pour tout entier naturel n, le facteur $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ est strictement positif alors :

$$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0 \quad \text{donc} \quad -3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n < 0 \quad \text{d'où} \quad u_n = 4 - 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 4$$

<u>Conclusion :</u> le capital de Toto ne cessera de croître mais il n'excédera jamais quatre euros.



Les riches prairies du Québec

Le contexte

Voilà le traditionnel exercice de première S où deux situations sont modélisées l'une par une suite arithmétique et l'autre par une suite géométrique. On met alors en oeuvre les diverses formules inhérentes à ces deux types de suite.

L'énoncé

Il y a bien longtemps dans ce que l'on appelait alors le Canada Français, vivaient deux fermiers, Archi et Désiré, récents immigrants de leur Poitou natal. Nous étions alors au début de l'automne et un hiver rigoureux s'annonçait. Il fallait donc que nos deux compères fassent provision de foin pour pouvoir nourrir leurs vaches quand les neiges polaires auraient tout recouvert. Un soir, alors qu'ils refaisaient le monde à la taverne du coin qu'on disait tenue par un irlandais, un mot en entraînant un autre, ils en virent à se lancer un défi : le premier qui accumulerait 10000 livres de foin ! Les vénérables prairies québécoises allaient souffrir.
Le premier octobre qui était le premier jour du pari, Archi produisit 330 livres de foin. Mais les jours suivants, la fatigue se faisant sentir, sa production quotidienne diminuait chaque jour de 5 livres par rapport à la veille.
On appelle a_n la masse de foin exprimée en livres produite par Archi le nième jour du pari. Nous avons donc $a_1 = 330$.
Quand à Désiré, il commença doucement : seulement 120 livres de foin produites le premier jour. Mais les jours suivants, sa production quotidienne augmentait chaque jour de 3% par rapport à la veille.
On note d_n la masse de foin exprimée en livres produite par Désiré le nième jour du pari. Nous avons donc $d_1 = 120$.
Dans cet exercice, une grande attention sera portée à la qualité de la rédaction.
La livre est une ancienne unité de masse au même titre que le gramme.

a) Calculer a_2.
Pour tout entier naturel non nul n, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
Quelle est la nature de la suite (a_n) ? En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
Calculer la masse de foin produite par Archi le vingtième jour.

b) Montrer que $d_2 = 123,6$.
Pour tout entier naturel non nul n, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.
Quelle est la nature de la suite (d_n) ? En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
Calculer la masse de foin produite par Désiré le vingtième jour.

c) Durant le mois d'octobre qui compte 31 jours, qui de Archi ou de Désiré produit au total le plus de foin ? On justifiera sa réponse.

d) Qui gagne le pari ? On expliquera sa réponse.

Le corrigé

a) D'un jour sur l'autre, la masse de foin produite a_n baisse de 5 livres. Par conséquent :

- $a_2 = a_1 - 5 = 330 - 5 = 325$
- Pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_{n+1} = a_n - 5$

Donc la suite (a_n) est arithmétique de raison -5 et de premier terme $a_1 = 330$.
Il vient alors pour tout entier naturel non nul n :

$$a_n = a_1 + (n-1)\times(-5) = 300 - 5.n + 5 = 335 - 5.n$$

La masse de foin produite par Archi le vingtième jour est le vingtième terme de la suite.

$$a_{20} = 335 - 5\times 20 = 335 - 100 = 235$$

Le vingtième jour, Archi produit 235 livres de foin.

b) Entre le premier et le second jour, la masse de foin produite d_n augmente de 3%.
Par conséquent :

$$d_2 = \underbrace{d_1 + 3\% \text{ de } d_1 = d_1 + 0,03\times d_1 = 1,03\times d_1}_{\text{Augmenter de 3\% revient à multiplier par 1,03}} = 1,03\times 120 = 123,6$$

Comme le même phénomène se répète les jours suivants, alors pour tout entier naturel non nul n, nous avons également :

$$d_{n+1} = \underbrace{d_n + 3\% \text{ de } d_n = d_n + 0,03\times d_n = 1,03\times d_n}_{\text{Augmenter de 3\% revient à multiplier par 1,03}}$$

Donc la suite (d_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme $d_1 = 120$.
Il vient alors que pour tout entier naturel non nul n :

$$d_n = d_1\times(1,03)^{n-1} = 120\times(1,03)^{n-1}$$

La masse de foin produite par Désiré le vingtième jour est le vingtième terme de la suite.

$$d_{20} = 120\times(1,03)^{20-1} = 120\times 1,03^{19} \approx 210,4$$

Le vingtième jour, Désiré produit environ 210,4 livres de foin.

c) Pour savoir ce que Archi et Désiré ont produit durant les 31 jours du mois d'octobre, c'est-à-dire durant les 31 premiers jours du pari, nous devons additionner leurs 31 premières productions journalières.

$$\text{Production d'Archi} = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_{31}}_{\text{Somme de 31 termes consécutifs d'une suite arithmétique}} = 31 \times \frac{a_1 + a_{31}}{2} = 31 \times \frac{330+180}{2} = 7905 \text{ lbs}$$

$$\text{Production de Désiré} = \underbrace{d_1 + d_2 + \ldots + d_{31}}_{\text{Somme de 31 termes consécutifs d'une suite géométrique}} = 120 \times \frac{1-(1,03)^{31}}{1-1,03} \approx 6000,3 \text{ lbs}$$

Conclusion : durant le mois d'octobre, c'est Archi qui produira le plus de foin.

d) Celui qui gagne le pari est le premier dont la production totale dépasse 10000 livres.
On appelle A_n la production totale de foin d'Archi à la fin du nième jour. Nous avons :

$$A_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{\text{Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique}} = n \times \frac{a_1 + a_n}{2} = n \times \frac{330 + (335 - 5.n)}{2} = \frac{665 \times n - 5 \times n^2}{2}$$

On note D_n la production totale de foin de Désiré à la fin du nième jour. Nous avons :

$$D_n = \underbrace{d_1 + d_2 + \ldots + d_n}_{\text{Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique}} = 120 \times \frac{1-(1,03)^n}{1-1,03} = 4000 \times \left((1,03)^n - 1\right)$$

Les deux productions totales au nième jour sont bien sûr exprimées en livres.
En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrices, on s'aperçoit que la suite (A_n) dépasse les 10000 livres pour $n = 46$. La suite (D_n) dépasse ce seuil pour $n = 43$.

Conclusion : Les dix milles livres de foin seront produites par Désiré en 43 jours contre 46 jours pour Archi. C'est donc ce premier qui remporte le pari. Mais nul doute qu'il aura été aidé son compère à boucler son quota...enfin on peut toujours rêver !

Des suites aux limites

Le contexte

Cet exercice traite des limites de suites exponentielles de la forme q^n.
La dernière question permet de tester la culture trigonométrique du candidat...

L'énoncé

a) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite (u_n) définie par :

$$\text{Pour tout entier naturel n,} \quad u_n = 2 \times 3^n - 4^n$$

b) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite (v_n) définie par :

$$\text{Pour tout entier naturel non nul n,} \quad v_n = \frac{2^n + 1}{5^n - 3^n}$$

c) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite (w_n) définie par :

$$\text{Pour tout entier naturel n,} \quad w_n = \frac{n \times \sin(n \times \pi) - 2 \times n^2}{n+1}$$

Le corrigé

a) Quand n tend vers $+\infty$, les suites exponentielles 3^n et 4^n s'envolent vers $+\infty$.
Donc la suite (u_n) est une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

Pour lever l'indétermination, factorisons la différence u_n par son terme le plus fort : 4^n.

Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_n = 2 \times 3^n - 4^n = 4^n \times \left[2 \times \frac{3^n}{4^n} - 1\right] = 4^n \times \left[2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right]$$

Quand n tend vers $+\infty$, la suite exponentielle $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ tend vers 0.

Par conséquent : $\lim\limits_{n \to =\infty} u_n = (+\infty) \times [2 \times 0 - 1] = (+\infty) \times (-1) = -\infty$.

b) Lorsque n tend vers $+\infty$, les suites exponentielles 2^n ; 3^n et 5^n tendent vers $+\infty$.

Donc la suite (v_n) est une forme très indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty-\infty}=\frac{\infty}{???}$.

Pour lever toutes ces incertitudes, factorisons les numérateur et dénominateur de la fraction v_n par leurs termes les plus forts : 2^n et 5^n.

Pour tout entier naturel non nul n, nous avons :

$$v_n=\frac{2^n+1}{5^n-3^n}=\frac{2^n}{5^n}\times\frac{1+\frac{1}{2^n}}{1-\frac{3^n}{5^n}}=\left(\frac{2}{5}\right)^n\times\frac{1+\frac{1}{2^n}}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, les suites $\frac{1}{2^n}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ tendent vers 0.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to=\infty} v_n=0\times\frac{1+0}{1-0}=0\times 1=0$

c) Comme tant de choses, la suite (w_n) n'est pas aussi infernale qu'elle en a l'air...

En effet, le sinus de tout multiple de π, c'est-à-dire de tout réel de la forme $n\times\pi$ où n est un entier naturel, est égal à 0.

Autrement dit, pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$w_n=\frac{n\times\sin(n\times\pi)-2\times n^2}{n+1}=\frac{n\times 0-2\times n^2}{n+1}=-\frac{2.n^2}{n+1}=\frac{n^2}{n}\times\frac{-2}{1+\frac{1}{n}}=n\times\frac{-2}{1+\frac{1}{n}}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n}$ tend vers 0.

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=(+\infty)\times\frac{-2}{1+0}=(+\infty)\times(-2)=-\infty$.