Très cher lecteur (ou lectrice),
Juin est le mois du bilan : c'est le mois des conseils de classe, c'est le mois du bac et c'est aussi le mois où je rassemble mes devoirs pour les publier sur le site La taverne de l'Irlandais. Bref, c'est le début des vacances ! Ouf...
Durant cette saison 2006-2007, j'ai eu l'immense privilège (youpi !) d'avoir en charge une classe de terminale S avec la spécialité qui va avec. Comme chaque année, il a bien fallu tester si ceux d'en face maîtrisaient ce que j'avais essayer de leur apprendre. D'où les exercices que voilà. Comme ils étaient assez nombreux, j'ai décidé de les publier en deux étapes. Premier temps : celui de l'analyse, le présent recueil.
Ces exercices excèdent de beaucoup ce qui a pu être donné au bac cette année. A ma décharge, cette année, ils ont quand même fait très fort ou plutôt très faible au bac S. Le barème appliqué pour l'épreuve S de mathématiques de 2007 est aussi très intéressant : il est à la fois hypertexte, aléatoire et injuste. Avec par exemple, un même point donné à deux questions. Pour l'obtenir, il suffit de traiter juste l'une des deux questions. Ben oui, mais celui qui traite les deux ? Ben, euh... Chut ! C'est secret professionnel ! Même en travaillant plus, on ne gagne pas toujours plus.
Comme quoi, l'effort paye. Peut-être plus au bac mais après, sûrement ! Pour faire des profits, il faut savoir investir...
Bonne lecture et bon courage !

Le sommaire des thèmes généraux abordés :

<u>Avertissement :</u> les propos tenus dans ces Mémoires d'outre première S ne seraient engagés les différentes administrations composant l'Education Nationale. Elles n'ont eu aucune part dans la rédaction et dans la publication de cet infâme ouvrage.
(*) Jérôme ONILLON est un professeur de mathématiques complètement désagrégé qui n'a jamais lu le moindre ouvrage de pédagogie puisque ils n'existent pas en bandes dessinées.

La taverne de l'Irlandais
vous présente

Mémoires d'outre terminale S
Le temps de l'analyse

Une bordée d'exercices d'analyse plus ou moins conçus par Jérôme ONILLON ou adaptés du bac donnés en devoir lors de la saison 2006-2007*

L'intelligence des cons est une chose difficile à comprendre pour les gens intelligents.

Edition du lundi 25 juin 2007
Ce document est exclusivement distribué par le site la taverne de l'Irlandais
http://www.tanopah.com

Analyse classique

Le vaux n'est pas frai !

Le contexte

Juste un QCM de début de terminale sur une exploitation d'un tableau de variation

L'énoncé

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 0,5 point et chaque mauvaise en enlève 0,25. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. On appelle (C) sa courbe représentative. Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	7	↘	-3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

La droite d'équation $y=1$ est une asymptote à la courbe (C). **Vrai Faux**

La droite d'équation $y=7$ est une asymptote à la courbe (C) **Vrai Faux**

La droite d'équation $y=-3$ est une tangente à la courbe (C) **Vrai Faux**

L'équation $f(x)=10$ admet une unique solution dans l'ensemble $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ **Vrai Faux**

Le corrigé

Dans un questionnaire à choix multiples, on a le choix et les embarras qui vont avec. Pour éviter ces écueils, le mieux est encore de déterminer la bonne réponse par soi-même.

➲ *Première et seconde affirmations*

Les droites d'équation $y=1$ et $y=7$ sont horizontales.

Une asymptote horizontale est la conséquence d'une limite finie aux infinis.

Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x)=7$, alors la droite d'équation $y=7$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

Mais comme $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, alors la droite d'équation $y=1$ ne peut pas être une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. Et encore moins de l'autre côté !

➲ *Troisième affirmation*

La droite d'équation $y=-3$ est horizontale. Son coefficient directeur est 0.

Comme la fonction f admet un minimum local en -2, alors $f'(-2)=0$. La tangente à la courbe (C) en ce point est horizontale. Son équation est : $y=f(2)=-3$.

➲ *Quatrième affirmation*

Comme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ alors elle y est continue.

Trois cas sont à examiner suivant les variations de f :

- Sur l'intervalle $]-\infty;-2[$, la fonction f décroît strictement de 7 à -3.
  Donc l'équation $f(x)=10$ n'a aucune solution dans cet intervalle.
- Sur l'intervalle $[-2;1[$, f est strictement croissante passant de -3 à $+\infty$.
  Donc l'équation $f(x)=10$ a une unique solution dans cet intervalle.
- Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, f est strictement décroissante passant de $+\infty$ à $-\infty$.
  Donc l'équation $f(x)=10$ a une seule solution dans cet intervalle.

Conclusion : l'équation $f(x)=10$ a exactement deux solutions dans $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

Une histoire de continuité et de dérivabilité

Le contexte

Voici un problème construit autour des questions de continuité et de dérivabilité d'une fonction...qui est étudiée par ailleurs

L'énoncé

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in \left]-\infty;1\right] & \text{alors} \quad f(x) = x^2 - 3.x + 2 \\ \text{Si } x \in \left]1;3\right[\cup \left]3;+\infty\right[& \text{alors} \quad f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-3} \end{cases}$$

On appelle (C) la courbe représentative de cette fonction f.
L'objet de ce problème est l'étude complète de la fonction f.

1°) Première partie : la fonction f avant 1

Dans cette partie, nous allons étudier la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty;1\right[$.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $\left]-\infty;1\right[$?

Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty;1\right[$.

2°) Seconde partie : la fonction après 1

L'objet de cette partie est l'étude de la fonction f sur l'ensemble $\left]1;3\right[\cup \left]3;+\infty\right[$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \in \left]1;3\right[\cup \left]3;+\infty\right[$, on ait :

$$f(x) = a.x + b + \frac{c}{x-3}$$

b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique que l'on appellera Δ et dont on donnera l'équation réduite.
Déterminer la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ sur l'intervalle $\left]1;+\infty\right[$.

c) Déterminer les limites de $f(x)$ à gauche et à droite de 3.
Quelle est la conséquence graphique de ces limites ?

d) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'ensemble $\left]1;3\right[\cup \left]3;+\infty\right[$?

Démontrer que pour tout réel $x \in \left]1;3\right[\cup \left]3;+\infty\right[$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6.x + 1}{(x-3)^2}$$

En déduire les variations de la fonction f sur l'ensemble $\left]1;3\right[\cup \left]3;+\infty\right[$.

3°) Troisième partie : ce qu'il advient de f en 1

Jusqu'à présent, nous avons étudié la fonction f partout sauf en 1. Nous allons combler cet oubli avec ce qui suit.

a) Quelle est l'image de 1 par la fonction f ? On justifiera sa réponse.

b) La fonction f est-elle continue en 1 ? On justifiera sa réponse.

c) La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Si oui, donner la valeur du nombre dérivé de f en 1. On justifiera sa réponse.
En déduire l'équation réduite de la tangente T_1 à la courbe (C) en son point d'abscisse $x = 1$.

4°) Dernière partie : la courbe en guise de conclusion

Sur un même graphique, tracer la courbe (C) ainsi que la tangente T_1 et toutes les asymptotes rencontrées au cours du problème.

Le corrigé

1°) Première partie : la fonction f avant 1

Sur l'intervalle $\left]-\infty;1\right[$, l'expression de la fonction f est : $f(x) = x^2 - 3.x + 2$.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 3.x + 2 = (+\infty) - (-\infty) + 2 = +\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left]-\infty;1\right[$ car elle y est la restriction d'un polynôme du second degré.

Pour tout réel $x \in]-\infty;1[$, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = \left(x^2-3.x+2\right)'$$
$$= 2.x-3$$

Le signe de sa dérivée nous donne les variations de la fonction f sur $]-\infty;1[$.

x	$-\infty$		1
$f'(x)=2.x-3$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

2°) Seconde partie : la fonction après 1

Sur l'ensemble $]1;3[\cup]3;+\infty[$, l'expression de la fonction f est : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-3}$

a) Il existe deux méthodes permettant de déterminer les coefficients a, b et c demandés :

- ***Par identification : cette méthode relève du bricolage mais c'est l'officielle.***

Pour tout $x \in]1;3[\cup]3;+\infty[$, on veut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = a.x+b+\frac{c}{x-3} = \frac{a.x(x-3)+b.(x-3)+c}{x-3}$$
$$= \frac{a.x^2+(b-3.a).x+(c-3.b)}{x-3} = \frac{x^2-1}{x-3}$$

Deux fractions égales ayant le même dénominateur ont des numérateurs égaux.

Les numérateurs sont égaux : $a.x^2+(b-3.a).x+(c-3.b) = 1\times x^2+0\times x+(-1)$

Or deux polynômes égaux ont des coefficients égaux :On obtient alors :

$$\begin{cases} \text{Egalité des coefficients en } x^2 & : \quad a=1 \\ \text{Egalité des coefficients en } x & : \quad b-3.a=0 \quad \text{d'où} \quad b=3.a=3 \\ \text{Egalité des coefficients en "sans x"} & : \quad c-3.b=-1 \quad \text{d'où} \quad c=3.b-1=8 \end{cases}$$

- ***En décomposant la fonction rationnelle f(x).***

Pour tout réel $x \in]1;3[\cup]3;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{\overbrace{x^2}^{\text{Combien de fois } x-3 \text{ ?}}-1}{x-3} = \frac{\overbrace{x.(x-3)}^{x^2}+3.x-1}{x-3} = \frac{x.\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}+\frac{3.x-1}{x-3}$$

$$= x+\frac{\overbrace{3.x}^{\text{Combien de } x-3 \text{ ?}}-1}{x-3} = x+\frac{\overbrace{3.(x-3)}^{3.x}+9-1}{x-3} = x+\frac{3.\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}+\frac{8}{x-3}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel $x \in]1;3[\cup]3;+\infty[$, nous avons : $f(x) = \underbrace{x+3+\frac{8}{x-3}}_{\text{Forme décomposée de f}}$.

b) Utilisons l'écriture décomposée de f. Lorsque x tend vers $+\infty$:

- ⇨ La partie affine $x+3$ tend vers $+\infty$.
- ⇨ Comme $x-3$ s'en va vers $+\infty$, alors son inverse $\dfrac{8}{x-3}$ tend vers $\dfrac{8}{+\infty}=0^+$.

Donc leur somme $f(x)$ tend vers $+\infty$.

➲ Après ce que nous venons de dire, il apparaît clairement que la droite Δ d'équation réduite $y=x+3$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. En effet :

$$\lim_{x\to+\infty}(C)-\Delta = \lim_{x\to+\infty} f(x)-\underbrace{(x+3)}_{\text{ou } y} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x-3}=0$$

➲ Pour connaître la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ, on étudie le signe de leur différence d'ordonnées $f(x)-(x+3)=\dfrac{8}{x-3}$.

x	1		3		$+\infty$
8		$+$		$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	$\Vert$	$+$	

<u>Conclusion :</u> sur l'intervalle $]1;3[$, la courbe (C) est au-dessous de son asymptote Δ.

Sur l'intervalle $]3;+\infty[$, elle est au-dessus.

c) Pour répondre à cette question, nous allons utiliser le tableau de signe que nous venons de faire et où figure le problématique facteur $x-3$.

- ⇨ Limite à gauche de 3 : $\displaystyle\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-}\frac{x^2-1}{x-3} = \frac{9-1}{0^-} = \frac{8}{0^-} = -\infty$
- ⇨ Limite à droite de 3 : $\displaystyle\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+}\frac{x^2-1}{x-3} = \frac{8}{0^+} = +\infty$.

Conséquence graphique : la droite verticale d'équation $x=3$ est une asymptote à (C).

d) Comme :

- ⇨ Les fonctions $u(x)=x^2-1$ et $v(x)=x-3$ sont dérivables sur ℝ et de dérivées respectives $u'(x)=2.x$ et $v'(x)=1$.
- ⇨ La fonction $v(x)=x-3$ ne s'annule pas sur l'ensemble $]1;3[\cup]3;+\infty[$.

Alors le quotient $f=\frac{u}{v}$ est dérivable sur $]1;3[\cup]3;+\infty[$ et sur cet ensemble :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{[v(x)]^2}=\frac{2.x\times(x-3)-1\times(x^2-1)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6.x+1}{(x-3)^2}$$

Pour connaître le signe de la forme du second degré $N(x)=x^2-6.x+1$, calculons son discriminant : $\Delta_{N(x)}=(-6)^2-4\times1\times1=36-4=32=\left(\sqrt{16}\times\sqrt{2}\right)^2=\left(4\times\sqrt{2}\right)^2$

Comme son discriminant est positif alors $N(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{6-4.\sqrt{2}}{2}=3-2.\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{6+4.\sqrt{2}}{2}=3+2.\sqrt{2}$$

Le tableau de signe de $f'(x)$ et celui de variation f après 1 sont ceux ci-contre.

x	1		3		$3+2.\sqrt{2}$		$+\infty$
$N(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-3)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$6+4.\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

$$f\left(3+2.\sqrt{2}\right)=\frac{\left(3+2.\sqrt{2}\right)^2-1}{\left(3+2.\sqrt{2}\right)-3}=\frac{9+12.\sqrt{2}+8-1}{2.\sqrt{2}}=\frac{\left(16+12.\sqrt{2}\right)\times\sqrt{2}}{2.\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{16.\sqrt{2}+24}{4}=4.\sqrt{2}+6$$

3°) Troisième partie : ce qu'il advient de f en 1

a) Comme 1 appartient à l'intervalle $]-\infty;1]$ alors $f(1)=1^2-3\times1+2=0$.

b) Comme sur l'intervalle $]-\infty;1]$, f est la restriction de la fonction continue $x^2-3.x+2$ alors la fonction f est clairement continue à gauche de 1. Voyons si elle l'est à droite !

$$\underbrace{\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-3}}_{\text{A droite de 1, on travaille sur }]1;3[\cup]3;+\infty[}=\frac{0}{-2}=0=f(1)$$

<u>Conclusion :</u> comme la fonction f est aussi continue à droite de 1 alors f est continue en 1.

c) Pour savoir si f est dérivable en 1, déterminons les limites en 0 de $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

D'abord, intéressons-nous la limite à gauche de 0 de ce quotient.

$$\underbrace{\lim_{h\to0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{(1+h)^2-3\times(1+h)+2-0}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{h^2-h}{h}=\lim_{h\to0^-}h-1=-1}_{\text{A gauche de 0, on a h<0. Donc 1+h<1. On travaille alors sur l'intervalle }]-\infty;1[}$$

A présent, déterminons la limite à droite du quotient.

$$\underbrace{\lim_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{(1+h)^2-1}{(1+h)-3}-0}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\frac{h^2+2.h}{h-2}}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h+2}{h-2}=\frac{2}{-2}=-1}_{\text{A gauche de 0, on a h>0. Donc 1+h>1. On travaille alors sur l'ensemble }]1;3[\cup]3;+\infty[}$$

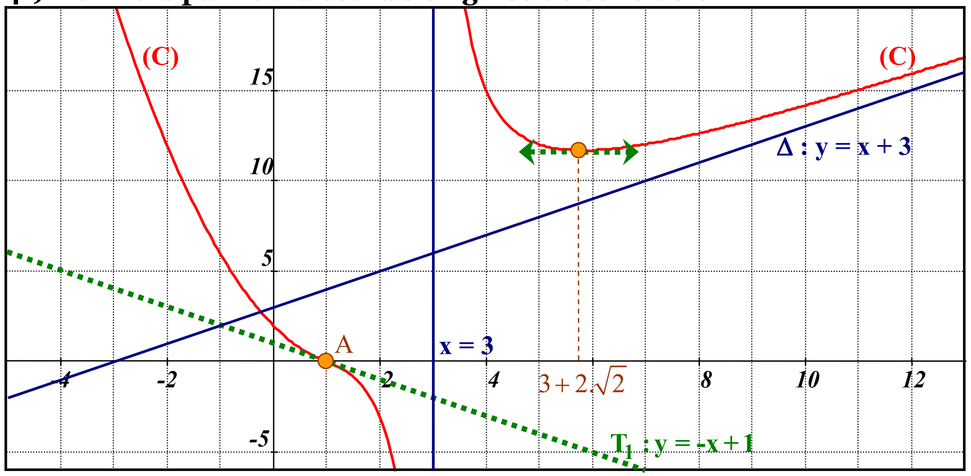
<u>Conclusion :</u> comme les limites à gauche et à droite de 0 du quotient $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ sont toutes deux égales à -1 alors la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1)=-1$.

➲ Le coefficient directeur de la tangente T_1 est égal au nombre dérivé de f en 1 : -1.
Donc l'équation réduite de cette droite est de la forme : $y=-x+p$. Reste à déterminer p.
La tangente T_1 passe aussi par le point $A(1;0)$ de la courbe (C). Par conséquent :

$$y_A=-x_A+p \quad\Leftrightarrow\quad 0=-1+p \quad\Leftrightarrow\quad p=1$$

<u>Conclusion :</u> l'équation réduite de la tangente T_1 est $y=-x+1$.

4°) Dernière partie : la courbe en guise de conclusion



La vie en trois morceaux

Le contexte

Cet exercice s'intéresse aux notions de continuité et de dérivabilité au travers d'une fonction f définie par morceaux. On y parle par conséquent aussi de limites et de dérivées.

L'énoncé

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{Si } x \in]-\infty;1[\quad \text{alors} \quad f(x)=\dfrac{3.x-3}{x-2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f(1)=0 \\ \text{Si } x \in]1;+\infty[\quad \text{alors} \quad f(x)=\sqrt{3.x^2+1}-2.x \end{cases}$$

On appelle (C) la courbe représentant cette fonction f.
On commence par étudier la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

a) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $]-\infty;1[$?

Etudier les variations de f sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

b) Démontrer que la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale Δ dont on donnera l'équation.
Etudier la position de relative de la courbe (C) et de la droite Δ sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

A présent, on s'intéresse à la fonction f après 1, c'est-à-dire sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

c) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Note : *une grande attention sera portée à la rédaction de cette question.*

d) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$?

Démontrer que pour tout réel $x \in]1;+\infty[$, on a :

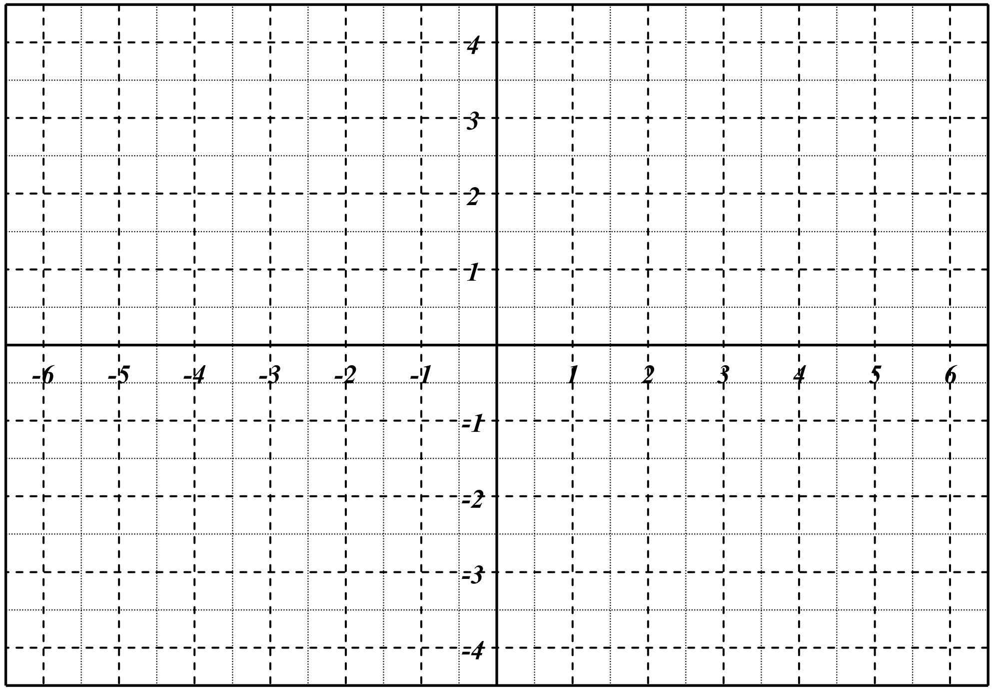
$$f'(x)=-\frac{3.x^2+4}{\sqrt{3.x^2+1}\times\left(3.x+2.\sqrt{3.x^2+1}\right)}$$

En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
Note : *on prendra soin de bien justifier les signes de chacun des facteurs.*

Maintenant, nous allons jeter notre dévolu sur la continuité de f et ses conséquences.

e) Démontrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.
Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

f) Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe (C) ainsi que son asymptote Δ.



g) Démontrer que l'équation $f(x)=-2$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on précisera dans lequel des deux intervalles $]-\infty;1[$ ou $]1;+\infty[$ elle se trouve.
Note : *dans cette question, on ne demande pas de résoudre cette équation.*

h) Résoudre par le calcul l'équation $f(x)=-2$.

Les questions précédentes nous ont permis d'établir que la fonction f était dérivable sur les intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$. Mais qu'en est-il en 1 ?

i) La fonction f est-elle dérivable en 1 ? On justifiera sa réponse.
Au vu de la courbe (C), ce résultat était-il prévisible ?

Le corrigé

Sur l'intervalle $]-\infty;1[$, l'expression de la fonction f est : $f(x)=\dfrac{3.x-3}{x-2}$

a) Comme :
- La fonction $u(x)=3.x-3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $u'(x)=3$
- La fonction $v(x)=x-2$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $v'(x)=1$ et qu'elle ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

Alors leur quotient f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

Pour tout réel $x\in]-\infty;1[$, on a :

$$f'(x)=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}=\frac{3\times(x-2)-1\times(3.x-3)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{3.x-6-3.x+3}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$$

Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction.
Le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;1[$ est celui ci-contre.

x	$-\infty$ $\quad\quad$ 1
-3	$-$
$(x-2)^2$	$+$
$f'(x)$	$-$
f	↘

b) De prime abord, $f(x)=\dfrac{3.x-3}{x-2}$ est en $-\infty$ une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Modifions l'écriture du quotient f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{3.x-3}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\times\frac{3-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}}_{\text{Factorisons les numérateur et dénominateur de } f(x) \text{ par leurs termes dominants respectifs.}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{3-0^-}{1-0^-}=\frac{3}{1}=3$$

<u>Conclusion :</u> comme la limite en $-\infty$ de f est égale à 3, alors la droite Δ d'équation $y=3$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

➲ Pour déterminer la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ, on étudie le signe de la différence d'ordonnées entre ces deux objets sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

Pour tout réel $x\in]-\infty;1[$, nous avons :

$$(C)-\Delta=f(x)-y=\frac{3.x-3}{x-2}-3=\frac{3.x-3-3.(x-2)}{x-2}=\frac{3.x-3-3.x+6}{x-2}=\frac{3}{x-2}$$

Sur l'intervalle $]-\infty;1[$, le facteur $x-2$ est négatif. Donc la différence d'ordonnées $(C)-\Delta$ est négative.

<u>Conclusion :</u> la courbe (C) est au-dessous de son asymptote Δ sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, l'expression de la fonction f est : $f(x)=\sqrt{3.x^2+1}-2.x$

c) Lorsque x tend vers $+\infty$, la somme $3.x^2+1$ tend vers $+\infty$. Donc sa racine aussi.

Par conséquent, la fonction $f(x)=\sqrt{3.x^2+1}-2.x$ est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.
Pour lever celle-ci, nous allons chercher à factoriser les deux termes de la somme par x.
Pour tout réel $x\in]1;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\sqrt{3.x^2+1}-2.x=\sqrt{x^2}\times\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-2.x$$
$$=\underbrace{|x|\times\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-2.x=x\times\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-2.x}_{\text{Comme x est positif, il est sa propre valeur absolue}}=x\times\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-2\right)$$

Quand x s'en va vers $+\infty$, la fonction $3+\dfrac{1}{x^2}$ tend vers $3+0^+=3$.

<u>Conclusion :</u> $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\times\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}-2\right)=(+\infty)\times\underbrace{\left(\sqrt{3}-2\right)}_{\text{Réel négatif}}=-\infty$

d) Comme la fonction $u(x)=3.x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et y est strictement positive, alors sa racine $\sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2.\sqrt{u}}=\frac{6.x}{2.\sqrt{3.x^2+1}}=\frac{3.x}{\sqrt{3.x^2+1}}$$

De plus, comme la fonction $v(x)=2.x$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f qui est leur différence, est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Pour tout réel $x \in]1;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = \frac{3.x}{\sqrt{3.x^2+1}} - 2 = \underbrace{\frac{3.x - 2.\sqrt{3.x^2+1}}{\sqrt{3.x^2+1}}}_{\text{On met tout au même dénominateur}} = \underbrace{\frac{\left(3.x - 2.\sqrt{3.x^2+1}\right)\times\left(3.x + 2.\sqrt{3.x^2+1}\right)}{\sqrt{3.x^2+1}\times\left(3.x + 2.\sqrt{3.x^2+1}\right)}}_{\text{On multiplie le numérateur par sa quantité conjuguée}}$$

$$= \frac{(3.x)^2 - \left(2.\sqrt{3.x^2+1}\right)^2}{\sqrt{3.x^2+1}\times\left(3.x + 2.\sqrt{3.x^2+1}\right)} = \frac{9.x^2 - 4\times\left(3.x^2+1\right)}{\sqrt{3.x^2+1}\times\left(3.x + 2.\sqrt{3.x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{-3.x^2 - 4}{\sqrt{3.x^2+1}\times\left(3.x + 2.\sqrt{3.x^2+1}\right)} = \frac{(-1)\times\left(3.x^2+4\right)}{\sqrt{3.x^2+1}\times\left(3.x + 2.\sqrt{3.x^2+1}\right)}$$

Examinons les signes de chacun des facteurs apparaissant dans le quotient qu'est $f'(x)$.

- $3.x^2 + 4$ est positif sur ℝ. En effet, pour tout réel x, $3.x^2 + 4 \geq 4$.
- La racine $\sqrt{3.x^2+1}$ qui ne s'annule jamais, est une quantité strictement positive.
- Et comme le terme $3.x$ est strictement positif sur l'intervalle $]1;+\infty[$, alors il en va de même pour la somme $3.x + 2.\sqrt{3.x^2+1}$.

Donc leur quotient $f'(x) = \frac{\ominus\times\oplus}{\oplus\times\oplus}$ est négatif sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Par conséquent, la fonction f est décroissante sur $]1;+\infty[$.

e) Comme, d'après les questions a et d, la fonction f est dérivable sur les intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$, alors elle y est aussi continue.

Tout le problème de la continuité se résume à ce qu'il advient de f en 1.

Pour le savoir, nous allons déterminer les limites de $f(x)$ à gauche et à droite de 1.

- $\underbrace{\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}}_{\text{On travaille alors sur }]-\infty;1[} \frac{3.x-3}{x-2} = \frac{0}{-1} = 0 = f(1)$ donc f est continue à gauche de 1.
- $\underbrace{\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}}_{\text{On travaille alors sur }]1;+\infty[} \sqrt{3.x^2+1} - 2.x = \sqrt{4} - 2 = 0 = f(1)$ donc f est continue à droite de 1.

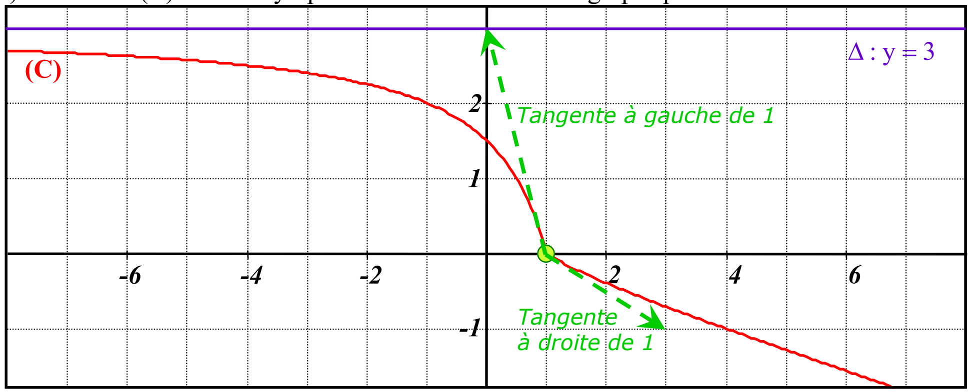
<u>Conclusion :</u> f est continue en 1 et par conséquent sur ℝ tout entier.

➲ La fonction f est continue sur ℝ, est strictement décroissante avant 1 et l'est également après. Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-\infty;+\infty[$.

Son tableau de variation est celui ci-contre

x	$-\infty$		$+\infty$
f	3	↘	$-\infty$

f) La courbe (C) et son asymptote Δ sont tracées sur le graphique ci-dessous.



g) Comme la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;+\infty[$, passant de 3 à $-\infty$, alors -2 qui appartient à l'intervalle $]-\infty;3[$ a un unique antécédent par f.

Autrement dit, l'équation $f(x) = -2$ a une unique solution α dans ℝ.

De plus, comme $f(1) = 0 > -2 = f(\alpha)$ et que f est décroissante sur ℝ, alors la solution α se situe après 1. Elle appartient l'intervalle $]1;+\infty[$.

h) Comme $\alpha \in]1;+\infty[$, alors $f(\alpha) = \sqrt{3.\alpha^2+1} - 2.\alpha = -2$. Exploitons cette égalité !

$$\sqrt{3.\alpha^2+1} - 2.\alpha = -2 \Rightarrow \sqrt{3.\alpha^2+1} = 2.\alpha - 2 \Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{3.\alpha^2+1}\right)^2 = (2.\alpha-2)^2}_{\text{On élève cette égalité au carré}}$$

$$\Rightarrow 3.\alpha^2 + 1 = 4.\alpha^2 - 8.\alpha + 4 \Rightarrow \alpha^2 - 8.\alpha + 3 = 0$$

Calculons le discriminant de l'équation du second degré $x^2 - 8.x + 3 = 0$:

$$\Delta = (-8)^2 - 4\times1\times3 = 64 - 12 = 52 = \left(\sqrt{52}\right)^2 = \left(\sqrt{4}\times\sqrt{13}\right)^2 = \left(2.\sqrt{13}\right)^2$$

Comme son discriminant est positif, alors cette équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{8-2.\sqrt{13}}{2} = 4-\sqrt{13} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{8+2.\sqrt{13}}{2} = 4+\sqrt{13}$$

Il est clair que la solution $4+\sqrt{13}$ appartient à l'intervalle $]1;+\infty[$

Par contre, comme $13>9$ alors $\sqrt{13}>3$ donc $-\sqrt{13}<-3$ donc $4-\sqrt{13}<1$

Comme la solution $4-\sqrt{13}$ n'appartient pas à $]1;+\infty[$ alors nécessairement $\boxed{\alpha = 4+\sqrt{13}}$

i) Pour déterminer si la fonction f est dérivable en 1, nous devons déterminer les limites à gauche et à droite de 0 du quotient $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

- La limite à gauche de 0 de notre quotient
  Pour tout réel $h \in]-\infty;0[$, nous avons que $1+h \in]-\infty;1[$. Par conséquent :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{3.(1+h)-3}{(1+h)-2}-0}{h} = \frac{\dfrac{3.h}{h-1}}{h} = \frac{3.\cancel{h}}{h-1}\times\frac{1}{\cancel{h}} = \frac{3}{h-1}$$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3}{h-1} = \frac{3}{-1} = -3$

- La limite à droite de 0 de notre quotient
  Pour tout réel $h \in]0;+\infty[$, nous avons que $1+h \in]1;+\infty[$. Par conséquent :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{3.(1+h)^2+1}-2.(1+h)-0}{h} = \frac{\sqrt{3.(1+h)^2+1}-2.(1+h)}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{\left(\sqrt{3.(1+h)^2+1}\right)^2-\left(2.(1+h)\right)^2}{h\times\left(\sqrt{3.(1+h)^2+1}+2.(1+h)\right)}}_{\text{On multiplie la fraction par la quantité conjuguée du numérateur.}} = \frac{3.h^2+6.h+4-4-8.h-4.h^2}{h\times\left(\sqrt{3.(1+h)^2+1}+2.(1+h)\right)}$$

$$= \frac{-2.\cancel{h}-h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}\times\left(\sqrt{3.(1+h)^2+1}+2.(1+h)\right)} = \frac{-2-h}{\sqrt{3.(1+h)^2+1}+2.(1+h)}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2-h}{\sqrt{3.(1+h)^2+1}+2.(1+h)} = \frac{-2}{\sqrt{4}+2} = -\frac{1}{2}$

<u>Conclusion :</u> comme les limites à gauche et à droite de 0 du quotient $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ sont différentes, alors la fonction f n'est pas dérivable en 1. Cette situation était prévisible car la tangente à la courbe (C) à gauche de 1 n'est pas confondue avec celle à droite.

Equations différentielles

Une équation d'un ciel différent

Le contexte

Une étude de fonction en exponentielle suivie de la résolution d'une équation différentielle utilisant cette fonction. Un scénario traditionnel d'exercice du bac...Enfin jusqu'à présent !

L'énoncé

La fonction f est définie sur ℝ par :

$$f(x) = 2.x^2 \times e^{-2.x}$$

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \left(4.x - 4.x^2\right).e^{-2.x}$$

Etudier les variations de la fonction f.

On appelle ***(E)*** l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' + 2.y = 4.x.e^{-2.x}$$

c) Démontrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle ***(E)***.

d) Démontrer qu'une fonction g est une solution de l'équation différentielle ***(E)*** si et seulement si la fonction $g - f$ est une solution de l'équation différentielle

(E') : $y' + 2.y = 0$.

e) Résoudre l'équation différentielle ***(E')*** : $y' + 2.y = 0$
En déduire les solutions de l'équation différentielle ***(E)***.

f) Résoudre l'équation différentielle $\begin{cases} y' + 2.y = 4.x.e^{-2.x} \\ y(0) = 5 \end{cases}$.

Le corrigé

a) Quand x tend vers $-\infty$:

☞ $2.x^2$ tend vers $+\infty$.

☞ $-2.x$ tend vers $+\infty$. Donc son exponentielle $e^{-2.x}$ s'en va vers $+\infty$.

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2.x^2 \times e^{-2.x} = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$.

➲ Lorsque x part vers $+\infty$:

☞ $2.x^2$ tend vers $+\infty$.

☞ $-2.x$ plonge vers $-\infty$. Donc son exponentielle $e^{-2.x}$ tend vers 0.

Par conséquent, le produit $f(x) = 2.x^2 \times e^{-2.x}$ est une forme indéterminée du type $\infty \times 0$.

Pour lever cette incertitude, modifions l'écriture de $f(x)$. Pour tout réel x, nous avons :

$$f(x) = 2.x^2 \times e^{-2.x} = 2.x^2 \times \frac{1}{e^{2.x}} = 2.\frac{x^2}{\left(e^x\right)^2} = 2.\left(\frac{x}{e^x}\right)^2$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$. Donc son inverse $\frac{x}{e^x}$ tend vers $\frac{1}{+\infty} = 0$.

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\times\left(\frac{x}{e^x}\right)^2 = 2\times 0 = 0$.

b) Comme les fonctions :

☞ $u(x) = 2.x^2$ de dérivée $u'(x) = 4.x$ est dérivable sur ℝ.

☞ $v(x) = e^{-2.x}$ de dérivée $v'(x) = -2.e^{-2.x}$ est aussi dérivable sur ℝ.

Alors leur produit $f = u \times v$ est aussi dérivable sur ℝ. Pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = u'(x)\times v(x) + v'(x)\times u(x) = 4.x \times e^{-2.x} + \left(-2.e^{-2.x}\right)\times 2.x^2$$
$$= 4.x \times e^{-2.x} - 4.x \times e^{-2.x} = \left(4.x - 4.x^2\right)\times e^{-2.x} = 4.x \times (1-x) \times e^{-2.x}$$

Les facteurs affines $4.x$ et $-x+1$ s'annulent respectivement en 0 et en 1.

Quand à l'exponentielle $e^{-2.x}$, elle est toujours strictement positive.
Calculons les images de 0 et 1 par la fonction f.

☞ $f(0) = 2\times 0^2 \times e^{-2\times 0} = 2\times 0 \times 1 = 0$

☞ $f(1) = 2\times 1^2 \times e^{-2\times 1} = 2\times 1 \times e^{-2} = \frac{2}{e^2}$

Le signe de sa dérivée f' va nous donner les variations de la fonction f.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$4.x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$e^{-2.x}$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$2/e^2$	↘	0

c) Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x)+2.f(x)=\left(4.x-4.x^2\right).e^{-2.x}+2\times\left(2.x^2\times e^{-2.x}\right)$$

$$=4.x.e^{-2.x}\cancel{-4.x^2.e^{-2.x}}\cancel{+4.x^2.e^{-2.x}}=4.x.e^{-2.x}$$

Conclusion : la fonction f est une solution de l'équation différentielle $y'+2.y=4.x.e^{-2.x}$.

d) Comme la fonction f est solution de l'équation différentielle ***(E)*** alors pour tout réel x :

$$f'(x)+2.f(x)=4.x.e^{-2.x}$$

Par suite, nous pouvons écrire :

La fonction g est une solution de ***(E)*** $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)+2.g(x)=4.x.e^{-2.x}$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)+2.g(x)=\underbrace{f'(x)+2.f(x)}_{\text{Car f solution de } (E)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)-f'(x)+2.g(x)-2.f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad (g-f)'(x)+2.(g-f)(x)=0$$

$\Leftrightarrow$ La fonction $g-f$ est une solution de ***(E')***

D'où l'équivalence demandée.

e) Les solutions de l'équation différentielle ***(E')*** : $y'+2.y=0 \Leftrightarrow y'=-2.y$ sont les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ de la forme $\varphi(x)=C\times e^{-2.x}$ où C est une constante réelle.

➲ Les deux précédentes questions vont nous permettre de répondre à celle-ci.

La fonction g est solution de ***(E)*** $\Leftrightarrow$ La fonction $g-f$ est une solution de ***(E')***

$\Leftrightarrow$ $g-f$ est une fonction de la forme $\varphi(x)=C.e^{-2.x}$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)-f(x)=C.e^{-2.x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=f(x)+C.e^{-2.x}$$

Conclusion : les solutions de l'équation ***(E)*** sont les fonctions g dérivables sur $\mathbb{R}$ de la forme $g(x)=2.x^2\times e^{-2.x}+C\times e^{-2.x}=e^{-2.x}\times\left(2.x^2+C\right)$ où C est une constante réelle.

f) D'après ce qui précède, les solutions de l'équation différentielle ***(S)*** $\begin{cases} y'+2.y=4.x.e^{-2.x} \\ y(0)=5 \end{cases}$

sont une ou des fonctions g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$g(x)=e^{-2.x}\times\left(2.x^2+C\right)$$

Ces solutions g doivent vérifier la condition initiale, à savoir :

$$g(0)=5 \Leftrightarrow e^{-2\times 0}\times\left(2\times 0^2+C\right)=5 \Leftrightarrow 1\times(0+C)=5 \Leftrightarrow C=5$$

Donc si g est une solution de l'équation ***(E)***, alors g est la fonction $g(x)=e^{-2.x}.\left(2.x^2+5\right)$

Réciproquement, il est clair que la fonction $g(x)=e^{-2.x}.\left(2.x^2+5\right)$ est une solution de ***(S)*** car g est une des solutions de ***(E)*** et elle vérifie la condition initiale $y(0)=5$.

Conclusion : l'équation différentielle $\begin{cases} y'+2.y=4.x.e^{-2.x} \\ y(0)=5 \end{cases}$ admet une unique solution. Il s'agit de la fonction $g(x)=e^{-2.x}.\left(2.x^2+5\right)$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dix fées rendent ciel

Le contexte

Une étude de fonction mêlant logarithme et exponentielle, puis la résolution d'une équation différentielle en s'appuyant sur celles du premier ordre vues en cours.

L'énoncé

La fonction auxiliaire g est définie sur ℝ par :

$$g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\ln\left(e^x+1\right)$$

a) Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
En étudiant son sens de variation, démontrer que la fonction g est strictement négative sur ℝ.

La fonction f est définie sur ℝ par :

$$f(x)=\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{e^x}$$

b) Démontrer que pour tout réel x, on a : $\ln\left(e^x+1\right)=x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=1$.
En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

d) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$
En déduire les variations de la fonction f sur son ensemble de définition ℝ.

On appelle ***(E)*** l'équation différentielle du premier ordre :

$$y'+y=\frac{1}{e^x+1}$$

e) Démontrer que la fonction f est une solution particulière de l'équation différentielle ***(E)***.

f) Démontrer qu'une fonction u est une solution de l'équation différentielle ***(E)*** si et seulement si la fonction $u-f$ est une solution de l'équation différentielle ***(E')*** $: y'+y=0$.

g) Résoudre l'équation différentielle ***(E')*** $: y'+y=0$
En déduire les solutions de l'équation différentielle ***(E)***.
Déterminer la solution de l'équation ***(E)*** qui vaut 3 en 0.

Le corrigé

a) Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$ et par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right)=0$.

On en déduit alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}-\ln\left(e^x+1\right)=\frac{0}{0+1}-0=0$.

➲ Comme les fonctions $u(x)=e^x$ et $v(x)=e^x+1$ de dérivées respectives $u'(x)=e^x$ et $v'(x)=e^x$ sont dérivables et strictement positives sur ℝ, alors les fonctions $\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{u(x)}{v(x)}$; $\ln\left(e^x+1\right)=\ln\left(v(x)\right)$ et g sont dérivables sur ℝ.
Pour tout réel x, nous pouvons alors écrire que :

$$g'(x)=\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)'-\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)'=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{\left[v(x)\right]^2}-\frac{v'(x)}{v(x)}$$

$$=\frac{e^x\times\left(e^x+1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x+1\right)^2}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{\cancel{e^{2.x}}+e^x\cancel{-e^{2.x}}}{\left(e^x+1\right)^2}-\frac{e^{2.x}+e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\cancel{e^x}-e^{2.x}\cancel{-e^x}}{\left(e^x+1\right)^2}$$

L'exponentielle $e^{2.x}$ et le carré $\left(e^x+1\right)^2$ sont deux quantités strictement positives sur ℝ.

Donc la dérivée $g'(x)$ est toujours négative. g est strictement décroissante sur ℝ.

Comme sa limite en $-\infty$ est 0 et qu'elle est strictement décroissante sur $]-\infty;+\infty[$, alors pour tout réel x, nous avons $g(x)<0$. La fonction g est toujours strictement négative.

b) $\forall x\in\mathbb{R}$, on a : $\ln\left(e^x+1\right)=\underbrace{\ln\left(e^x\times\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)=\ln\left(e^x\right)+\ln\left(1+e^{-x}\right)}_{\text{Le logarithme d'un produit...}}=x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$

➲ Sous son écriture actuelle, la fonction f est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

D'après ce qui a été fait, nous avons : $f(x)=\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}=\frac{x}{e^x}+\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^x}$

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{e^x}{x}$ s'envole vers $+\infty$. Donc son inverse $\frac{x}{e^x}$ tend vers 0.

De plus, $-x$ s'en va alors vers $-\infty$. Donc e^{-x} tend vers 0 et $\ln(1+e^{-x})$ vers $\ln(1)=0$.

Par conséquent, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}+\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^x}=0+\frac{0}{+\infty}=0+0\times\frac{1}{+\infty}=0+0\times 0=0$$

c) Comme la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$, alors elle l'est en particulier en 1. D'où :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\underbrace{\text{Nombre dérivé de ln en 1}}_{\text{La dérivée de ln est la fonction inverse}}=\frac{1}{1}=1$$

➲ Pour tout réel x, si l'on pose $h=e^x$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}=\frac{\ln(h+1)-0}{h}=\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, la quantité $h=e^x$ tend vers 0. Donc $f(x)$ tend vers 1.

d) En reprenant ce qui a été fait lors de la question a, nous pouvons dire que comme les fonctions $u(x)=\ln(e^x+1)$ et $v(x)=e^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et que la fonction v n'y est jamais nulle, alors leur quotient f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{[v(x)]^2}=\frac{\frac{e^x}{e^x+1}\times e^x-\ln(e^x+1)\times e^x}{[e^x]^2}$$

$$=\frac{1}{e^{\cancel{2}.x}}\times\cancel{e^x}\times\left(\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)\right)=\frac{g(x)}{e^x}$$

Par conséquent, le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$
e^x	$+$
$f'(x)$	$-$
f	1 ↘ 0

e) Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x)+f(x)=\frac{g(x)}{e^x}+\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}=\frac{\frac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)}{e^x}+\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$$

$$=\frac{\cancel{e^x}}{e^x+1}\times\frac{1}{\cancel{e^x}}-\cancel{\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}}+\cancel{\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}}=\frac{1}{e^x+1}$$

Donc la fonction f est une des solutions de l'équation différentielle ***(E)***.

f) Depuis la question précédente, nous savons que f est une solution particulière de l'équation ***(E)***. Donc pour tout réel x, nous avons : $f'(x)+f(x)=\frac{1}{e^x+1}$.

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\text{La fonction u est solution de } \textbf{\textit{(E)}} &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ u'(x)+u(x)=\frac{1}{e^x+1}\\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ u'(x)+u(x)=f'(x)+f(x)\\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ u'(x)-f'(x)+u(x)-f(x)=0\\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ (u-f)'(x)+(u-f)(x)=0\\ &\Leftrightarrow \text{La fonction } u-f \text{ est solution de } \textbf{\textit{(E')}}\end{aligned}$$

g) Les solutions de l'équation différentielle $y'+y=0 \Leftrightarrow y'=-y$ sont les fonctions φ de la forme $\varphi(x)=C\times e^{-x}$ où C est une constante réelle quelconque.

➲ D'après tout ce qui précède, il s'établit :

La fonction u est solution de ***(E)*** $\Leftrightarrow$ La fonction $u-f$ est solution de ***(E')***

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (u-f)(x)=C\times e^{-x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ u(x)=f(x)+C\times e^{-x}$

Conclusion : les solutions de l'équation ***(E)*** sont les fonctions u de la forme :

$$u(x)=\frac{\ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x}}+C\times e^{-x}=\ln\left(e^{x}+1\right)\times e^{-x}+C\times e^{-x}=e^{-x}\times\left(\ln\left(e^{x}+1\right)+C\right)$$

où C est une constante réelle quelconque.

➲ Déterminons l'expression de la solution u l'équation ***(E)*** vérifiant $u(0)=3$.

$$u(0)=e^{-0}\times\left(\ln\left(e^{0}+1\right)+C\right)=3 \Leftrightarrow 1\times\left(\ln(1+1)+C\right)=3 \Leftrightarrow C=3-\ln(2)$$

Conclusion : la solution de l'équation ***(E)*** qui vaut 3 en 0 est la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x)=e^{-x}\times\left(\ln\left(e^{x}+1\right)+3-\ln(2)\right)=e^{-x}\times\left(\ln\left(\frac{e^{x}+1}{2}\right)+3\right)$$

Des équations différentielles par parties

Le contexte

Le présent exercice est une adaptation donné au bac. Après la résolution d'une équation différentielle, il embraye sur l'étude d'une de ses solutions particulières et le calcul d'une intégrale par parties.

L'énoncé

Partie A

On appelle ***(E)*** l'équation différentielle :

$$y'-2.y=2.\left(e^{2.x}-1\right)$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

L'objet de cette première partie est la résolution de cette équation différentielle ***(E)***.

1) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=2.x.e^{2.x}+1$$

est une solution de l'équation différentielle ***(E)***.

2) On pose $y=z+h$. Montrer que y est solution de ***(E)*** si et seulement si z est solution de l'équation différentielle $z'-2.z=0$.

Résoudre cette dernière équation, puis en déduire les solutions de ***(E)***.

3) Démontrer qu'il existe une unique solution de ***(E)*** s'annulant en 0 que l'on appellera g.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=e^{2.x}.(2.x-1)+1$$

1) Déterminer le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

2) On s'intéresse à la courbe représentant cette fonction g.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1-g(x)\geq 0$.

b. Calculer l'intégrale $I=\int_{0}^{1/2}\left(1-g(x)\right).dx$

c. Interpréter graphiquement les résultats des questions B.2.a et B.2.b.

Le corrigé

Partie A

A.1) Comme les fonctions $u(x)=2.x$ et $v(x)=e^{2.x}$ de dérivées respectives $u'(x)=2$ et $v(x)=2.e^{2.x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors il en va de même pour h.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$h'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)+0=e^{2.x}\times(2+4.x)$$

Il vient alors :

$$h'(x)-2\times h(x)=\cancel{4.x.e^{2.x}}+2.e^{2.x}\cancel{-4.x.e^{2.x}}-2=2.e^{2.x}-2=2.\left(e^{2.x}-1\right)$$

<u>Conclusion :</u> la fonction $h(x)=2.x.e^{2.x}+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ est une solution de ***(E)***.

A.2) Prouvons l'équivalence demandée. Dans ce qui suit, les fonctions z et y sont supposées définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
y=z+h \text{ est solution de } \textbf{\textit{(E)}} &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ y'(x)-2.y(x)=2.\left(e^{2.x}-1\right)\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ (z+h)'(x)-2.(z+h)(x)=2.\left(e^{2.x}-1\right)\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ z'(x)-2.z(x)+\underbrace{\cancel{h'(x)-2.h(x)}=\cancel{2.\left(e^{2.x}-1\right)}}_{\text{Car h est solution de } \textbf{\textit{(E)}}.}\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ z'(x)-2.z(x)=0
\end{aligned}$$

➲ Les solutions de l'équation différentielle $z'-2.z=0 \Leftrightarrow z'=2.z$ sont les fonctions z dérivables sur $\mathbb{R}$ de la forme $z(x)=C\times e^{2.x}$ où C est une constante réelle à préciser.

Par conséquent, il vient :

$$\begin{aligned}
y=z+h \text{ est solution de } \textbf{\textit{(E)}} &\Leftrightarrow \text{z est solution de l'équation différentille } z'-2.z=0\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ z(x)=C\times e^{2.x}\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=C\times e^{2.x}+2.x.e^{2.x}+1
\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> les solutions de l'équation différentielle ***(E)*** sont les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x)=e^{2.x}.(2.x+C)+1$ où C est une constante réelle.

A.3) Supposons qu'il existe une fonction f solution de ***(E)*** et qui s'annule en 0.

Si f est solution de ***(E)*** alors elle est nécessairement de la forme $f(x)=e^{2.x}.(2.x+C)+1$.

Si f s'annule en 0, alors nous avons :

$$f(0)=0 \Leftrightarrow e^{2\times 0}.(2\times 0+C)+1=0 \Leftrightarrow C+1=0 \Leftrightarrow C=-1$$

Donc seule la fonction $g(x)=e^{2.x}.(2.x-1)+1$ peut être la solution de ***(E)*** s'annulant en 0.

Réciproquement, comme cette fonction g est solution de ***(E)*** et $g(0)=e^{0}.(0-1)+1=0$ alors on en déduit qu'il existe une seule fonction solution de ***(E)*** qui s'annule en 0.

Partie B

B.1) La fonction g est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une solution ***(E)***. A ce propos, pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$g'(x)=2.\left(e^{2.x}-1\right)+2.g(x)=\cancel{2.e^{2.x}}\cancel{-2}+4.x.e^{2.x}\cancel{-2.e^{2.x}}\cancel{+2}=4.x\times e^{2.x}$$

L'exponentielle $e^{2.x}$ étant toujours positive, c'est le facteur $4.x$ qui donne son signe à la dérivée $g'(x)$.

Nous savons déjà que $g(0)=0$.

Le tableau de variation de g est celui ci-contre ➔

Le minimum de g est 0. Il n'est atteint qu'en 0.

Donc $g(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 où il est nul.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
4.x		−	0	+	
$e^{2.x}$		+	|	+	
$g'(x)$		−	0	+	
g	1	↘	0	↗	$+\infty$

Même si cela n'est pas nécessaire, on peut déterminer les limites de g aux infinis.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2\times x.e^{x}\times e^{x}-e^{2.x}+1=2\times 0\times 0-0+1=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} (2.x-1).e^{2.x}+1=(+\infty)\times(+\infty)+1=+\infty$

B.2.a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1-g(x)\geq 0$

$$1-\left((2.x-1).e^{2.x}+1\right)\geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(1-2.x).e^{2.x}\geq 0 \Leftrightarrow 1-2.x\geq 0}_{\text{On divise l'inégalité par la quantité positive } e^{2.x}} \Leftrightarrow x\leq\frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $1-g(x)\geq 0$ est l'intervalle $]-\infty;0,5]$.

B.2.b) Pour calculer l'intégrale $I=\int_0^{1/2}\left[1-g(x)\right].dx=\int_0^{1/2}(1-2.x).e^{2.x}.dx$, nous allons effectuer une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u'(x) = e^{2.x} \\ u(x) = \frac{1}{2}.e^{2.x} \\ \text{u est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} v(x) = 1-2.x \\ v'(x) = -2 \\ \text{v est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$I = \int_0^{1/2} v(x)\times u'(x).dx = \left[u(x)\times v(x)\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} u(x)\times v'(x).dx$$

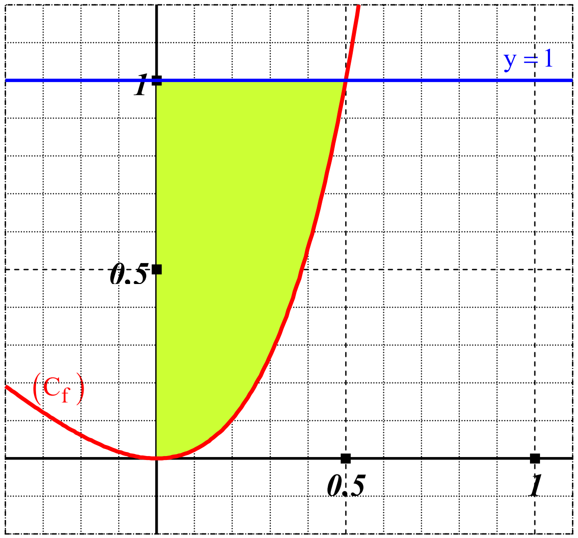
$$= \left[\frac{1}{2}.e^{2.x}\times(1-2.x)\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\frac{1}{2}.e^{2.x}\times(-2).dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}.e^{1}\times(1-1)\right) - \left(\frac{1}{2}.e^{0}\times(1-0)\right) + \int_0^{1/2} e^{2.x}.dx = 0-\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}.e^{2.x}\right]_0^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.e-\frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}$$

B.2.c) Sur l'intervalle $[0;0,5]$, la courbe représentant la fonction f est au-dessous de la droite horizontale d'équation $y=1$.

L'intégrale I représente l'aire du domaine compris entre la courbe représentant la fonction f, la droite horizontale d'équation $y=1$ et les droites verticales d'équation $x=0$ et $x=1/2$.



Exponentielle

La tête au carré de l'exponentielle

Le contexte

Cet exercice est un grand classique de la fonction exponentielle. On y parle de ses limites et dérivées, de croissances comparées. Il comporte la traditionnelle question demandant le nombre de solution d'une équation en utilisant sur le théorème des valeurs intermédiaires.

L'énoncé

La fonction f qui est définie sur ℝ a une expression de la forme :

$$\text{Pour tout réel } x, \qquad f(x) = \left(a.x^2 + b\right).e^x$$

On appelle (C) sa courbe représentative.
On sait de cette fonction f :

- L'image de 1 par la fonction f est égale au réel $2.e$.
- La tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse 1 est horizontale.

a) En résolvant un système de deux équations ayant pour inconnues a et b, et en utilisant les seuls renseignements précédents, déterminer l'expression de la fonction f sur ℝ.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que la fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \left(3 - x^2\right).e^x$$

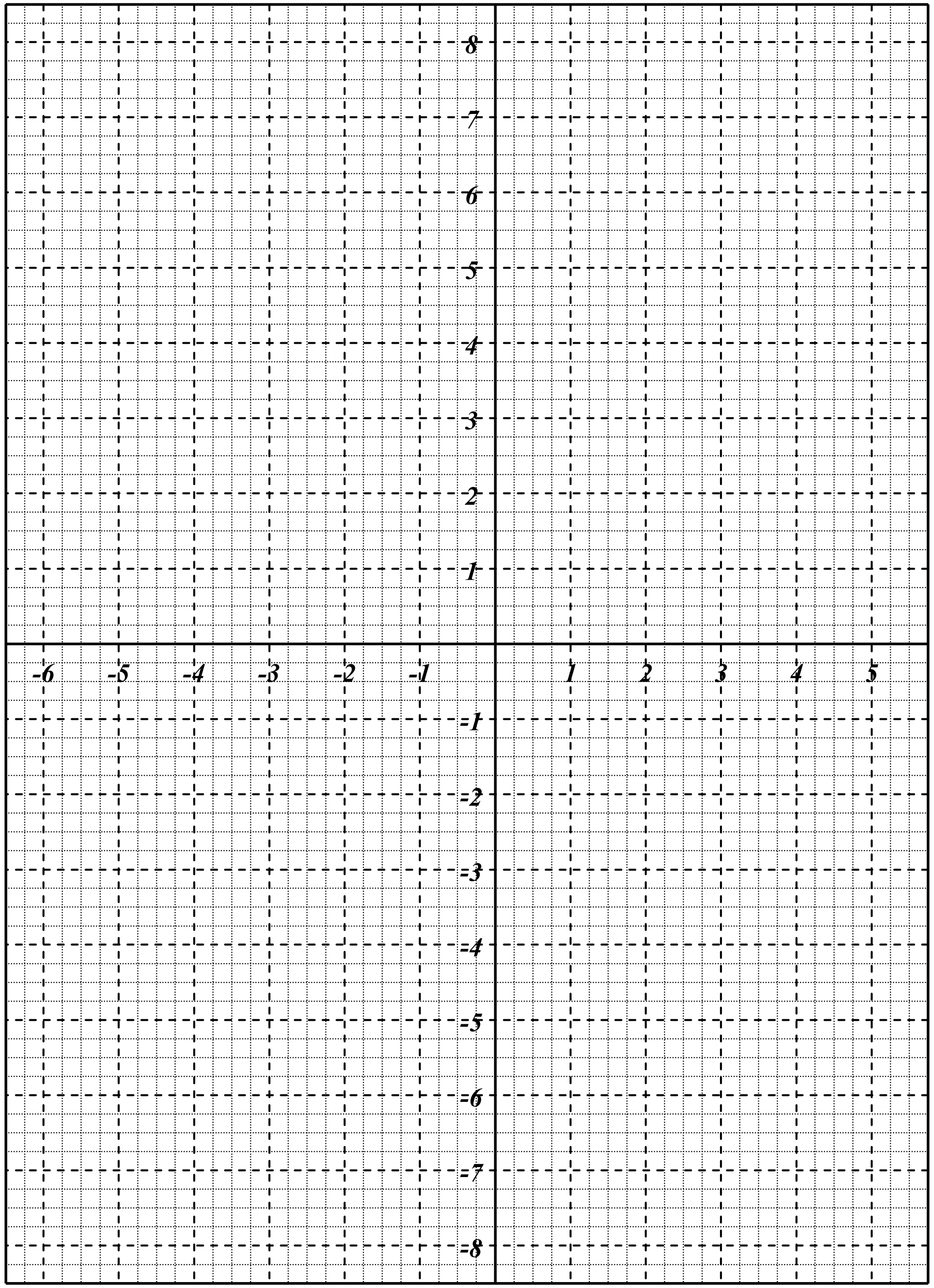
b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Quelles sont les conséquences graphiques de ces limites ?

c) Etudier les variations de la fonction f sur ℝ.

d) Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet dans ℝ exactement deux solutions α et β dont on déterminera deux valeurs approchées à 10^{-2} – près.

e) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à la courbe (C) en son point d'abscisse 0.

f) Dans le repère ci-contre, tracer la courbe (C) ainsi que toutes les droites rencontrées.



Le corrigé

a) Avant toutes choses, remarquons que comme :

- La fonction $u(x) = a.x^2 + b$ est dérivable sur ℝ et a pour dérivée $u'(x) = 2.a.x$
- La fonction $v(x) = e^x$ est dérivable sur ℝ et est sa propre dérivée.

Alors leur produit f est aussi dérivable sur ℝ. Pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = (u \times v)' = u' \times v + v' \times u$$
$$= 2.a.x \times e^x + e^x \times \left(a.x^2 + b\right) = e^x \times \left(a.x^2 + 2.a.x + b\right)$$

Exploitons les renseignements qui nous sont fournis à propos de la fonction f.

- L'image de 1 par la fonction f est égale au réel $2.e$.

$$f(1) = 2.e \Leftrightarrow \left(a \times 1^2 + b\right).e^1 = 2.e \Leftrightarrow (a+b).e = 2.e \Leftrightarrow \underbrace{a+b=2}_{\text{On a divisé par e}}$$

Ainsi a et b sont-ils solutions de l'équation $a + b = 2$. Nous la notons ***(1)***.

- La tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse 1 est horizontale.
  Autrement dit, le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse 0 est nul. Donc le nombre dérivé de la fonction f en 1 est nul. Ainsi :

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow e \times (a + 2.a + b) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3.a+b=0}_{\text{On a divisé par le réel non nul e}}$$

Ainsi a et b sont-ils aussi de l'équation $3.a + b = 0$ que nous appelons ***(2)***.

Les coefficients a et b sont les solutions 2×2 : $\begin{cases} a+b=2 & \textbf{\textit{(1)}} \\ 3.a+b=0 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$. Résolvons le !

D'abord, déterminons b. A partir de l'équation ***(1)***, on exprime a en fonction de b.

$$a + b = 2 \Leftrightarrow a = 2 - b$$

Puis dans l'équation ***(2)***, on remplace a par ce qu'il vaut en b. Il vient :

$$3.(2-b) + b = 0 \Leftrightarrow 6 - 2.b = 0 \Leftrightarrow 6 = 2b \Leftrightarrow b = 3$$

On en déduit alors : $a = 2 - 3 = -1$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel x, $f(x) = \left((-1) \times x^2 + 3\right).e^x = \underbrace{\left(3 - x^2\right).e^x}_{\text{Comme par hasard...}}$

b) Quand x tend vers $-\infty$, $3 - x^2$ tend vers $-\infty$ et e^x tend vers 0.
Par conséquent, leur produit f est une forme indéterminée du type $\infty \times 0$.
Pour lever celle-ci, développons f. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \left(3 - x^2\right).e^x = 3.e^x - x^2.e^x$$

La limite en $-\infty$ du premier terme $3.e^x$ est 0. Mais quid de celle de $x^2.e^x$?

Pour tout réel x, nous posons $t = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2.t$. Nous pouvons alors écrire :

$$x^2.e^x = (2.t)^2 \times e^{2.t} = 4 \times t^2 \times \left(e^t\right)^2 = 4 \times \left(t.e^t\right)^2$$

Or quand x tend vers $-\infty$, $t = \frac{x}{2}$ tend aussi vers $-\infty$. Donc $t.e^t$ tend vers 0.

Par conséquent : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2.e^x = 4 \times 0 = 0$

<u>Conclusion :</u> la limite de la fonction f en $-\infty$ est $0 - 0 = 0$. Par conséquent, l'axe des abscisses (c'est-à-dire la droite d'équation $y = 0$) est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

➲ Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(3 - x^2\right).e^x = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$$

c) Depuis la question a, nous savons que la fonction f est dérivable sur ℝ. Et nous savons aussi que pour tout réel x :

$$\underbrace{f'(x) = e^x \times \left(a.x^2 + 2.a.x + b\right) = e^x \times \left(-x^2 - 2.x + 3\right)}_{\text{Car a=−1 et b=3}}$$

L'exponentielle e^x est toujours positive.

Seul nous demeure inconnu le signe de la forme du second degré $N(x) = -x^2 - 2.x + 3$.

Pour le connaître, calculons son discriminant.

$$\Delta_{N(x)} = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

Comme son discriminant est positif, alors N admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-2)-4}{2 \times -1} = \frac{2-4}{-2} = 1$$

et

$$x_2 = \frac{-(-2)+4}{2 \times -1} = \frac{2+4}{-2} = -3$$

Le tableau de variation de f est celui ci-contre.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
e^x		+		+		+	
$-x^2-2.x+3$		−	0	+	0	−	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
f	0	↘	$-6.e^{-3}$	↗	$2.e$	↘	$-\infty$

$$f(-3) = \left(3 - (-3)^2\right).e^{-3} = (3-9).e^{-3} = -6.e^{-3} \qquad f(1) = \left(3 - 1^2\right).e^1 = 2.e$$

d) Comme la fonction f est dérivable sur ℝ, alors elle y est continue. Examinons ses diverses variations !

- Comme f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-3]$, et que l'image de cet intervalle par la fonction f est $\left[-6.e^{-3};0\right[$, <u>alors</u> 3 qui ne fait pas partie de $\left[-6.e^{-3};0\right[$ n'a aucun antécédent par f se situant dans l'intervalle $]-\infty;-3]$.
- Comme f est strictement croissante sur $]-3;1[$ et que $f\left(]-3;1[\right)=\left]-6.e^{-3};2.e\right[$, <u>alors</u> 3 qui appartient à l'intervalle $\left]-6.e^{-3};2.e\right[$ a un unique antécédent α dans l'intervalle $]-3;1[$.

  Cet antécédent α est 0. En effet : $f(0)=\left(3-0^2\right).e^0=3\times 1=3$
- Comme f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et que $f\left([1;+\infty[\right)=]-\infty;2.e]$, <u>alors</u> 3 qui fait partie de l'intervalle $]-\infty;2.e]$ a un unique antécédent β dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

  Grâce à tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve : $1{,}53<\beta<1{,}54$

<u>Conclusion :</u> l'équation $f(x)=3$ a dans ℝ deux solutions $\alpha=0$ et $\beta\approx 1{,}53$.

e) Le coefficient directeur de la tangente T_0 est le nombre dérivé de f en 0. Calculons le.

$$f'(0)=e^0\times\left(-0^2-0+3\right)=1\times 3=3$$

Donc l'équation réduite de la tangente T_0 est de la forme : $y=3.x+p$.

Cette tangente T_0 passe par le point A d'abscisse 0 de la courbe (C). Calculons l'ordonnée de ce dernier.

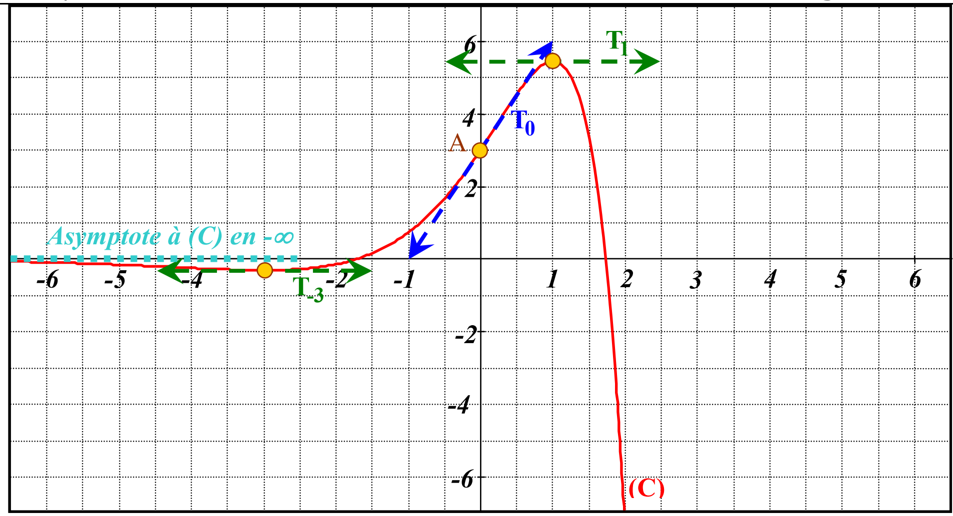
$$f(0)=\left(3-0^2\right)\times e^0=3\times 1=3$$

Comme le point $A(0;3)$ appartient à la droite T_0, alors ses coordonnées en vérifient l'équation réduite. Par conséquent :

$$y_A=3.x_A+p \quad\Leftrightarrow\quad 3=3\times 0+p \quad\Leftrightarrow\quad p=3$$

<u>Conclusion :</u> l'équation réduite de la tangente T_0 est $y=3.x+3$.

f) Sur le graphique ci-contre, sont représentées la courbe (C), la tangente T_0, l'asymptote en $-\infty$ ainsi que les deux tangentes horizontales à (C) en $x=-3$ et $x=1$.



L'exponentielle voit double

Le contexte

Cet exercice traite de la fonction exponentielle, de ses limites et de ses dérivées, ainsi que de cette notion assez mystérieuse de continuité.

L'énoncé

La fonction g est définie pour tout réel x par :

$$g(x)=(2.x-1).e^{2.x}+1$$

a) Calculer l'image de 0 par la fonction g.
Pourquoi la fonction g est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$g'(x)=4.x.e^{2.x}$$

En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{Si } x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[\quad \text{alors } f(x)=\dfrac{e^{2.x}-1}{x} \\ f(0)=2 \end{cases}$$

b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

c) Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

d) Démontrer que pour tout réel non nul x, on a :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

i) La courbe (C) est la suivante. Elle est symétrique par rapport à la droite Δ.

Le corrigé

a) Calculons l'image de 0 par la fonction auxiliaire g.

$$g(0)=(2\times0-1)\times e^{2\times0}+1=-1\times1+1=-1+1=0$$

➲ Comme :

- La fonction $u(x)=2.x-1$ de dérivée $u'(x)=2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $v(x)=e^{2.x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :
$v'(x)=(2.x)'\times e^{2.x}=2.e^{2.x}$.

Alors la fonction $g=u\times v+1$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, nous avons :

$$g'(x)=\underbrace{2\times e^{2.x}+2.e^{2.x}\times(2.x-1)}_{u'\times v+v'\times u}+0=\cancel{2\times e^{2.x}}+4.x.e^{2.x}-\cancel{2\times e^{2.x}}=4.x.e^{2.x}$$

L'exponentielle $e^{2.x}$ est strictement positive.
C'est donc le facteur $4.x$ qui donne son signe à la dérivée $g'(x)$.
Le tableau de variation de g est le celui ci-contre.
Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est 0. Il est atteint en $x=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4.x$		$-$	0	$+$	
$e^{2.x}$		$+$	|	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	↘	0	↗	$+\infty$

<u>Conclusion :</u> d'après son tableau de variation, nous pouvons dire que $g(x)$ est nulle en 0 et strictement positive ailleurs.
Même si elles ne sont pas demandées, on peut déterminer les limites de g aux infinis.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{2\times x.e^x\times e^x-e^{2.x}+1}_{\text{On met en évidence les limites du cours}}=2\times0\times0-0+1=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=(+\infty)\times(+\infty)+1=+\infty$

b) Nous pouvons écrire que pour tout réel x non nul, nous avons :

$$f(x)=\frac{e^{2.x}-1}{x}=\frac{\left(e^x\right)^2}{x}-\frac{1}{x}=e^x\times\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}$$

Maintenant que nous avons mis en évidence les limites établies dans le cours, nous pouvons connaître celle de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x \times \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = (+\infty)\times(+\infty) - 0 = +\infty$$

➲ Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2.x}-1}{x} = \frac{0-1}{-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

c) Comme :

- La fonction $u(x) = e^{2.x} - 1$ de dérivée $u'(x) = 2.e^{2.x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $v(x) = x$ de dérivée $v'(x) = 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et surtout est non nulle sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Alors leur quotient f est dérivable et donc continue sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Reste à savoir ce qui se passe en 0. La limite de f est-elle égale à 2 ? Cherchons la !

Sous l'écriture $\frac{e^{2.x}-1}{x}$, $f(x)$ est en 0 une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

Mais, pour tout réel x non nul, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{e^{2.x}-1}{x} = \frac{\left(e^x\right)^2 - 1^2}{x} = \frac{\left(e^x-1\right)\times\left(e^x+1\right)}{x} = \frac{e^x-1}{x}\times\left(e^x+1\right)$$

Nous venons de faire apparaître certaines limites du cours. A présent, concluons !

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x}\times\left(e^x+1\right) = 1\times(1+1) = 1\times2 = 2$$

<u>Conclusion :</u> comme $\lim_{x\to0} f(x) = 2 = f(0)$, alors la fonction f est continue en 0. Comme elle l'était déjà partout ailleurs alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

d) Nous avons déjà établi que la fonction f était dérivable sur $]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$.

Calculons sa dérivée. Pour tout réel x non nul, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = \frac{u'\times v - v'\times u}{v^2} = \frac{2.e^{2.x}\times x - 1\times\left(e^{2.x}-1\right)}{x^2}$$

$$= \frac{2.x.e^{2.x} - e^{2.x} + 1}{x^2} = \frac{(2.x-1).e^{2.x}+1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Depuis la question a, nous connaissons le signe de $g(x)$. Par conséquent, le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	
x^2		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$	
f	0	↗	2	↗	$+\infty$

Ce qu'il faut absolument savoir : les limites essentielles de l'exponentielle

Dans ce corrigé, nous nous sommes appuyés sur cinq limites particulières qui ont été établies en cours et qui doivent être parfaitement sues. Rappelons-les !

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} x.e^x = 0$$

A partir de ces cinq limites fondamentales, on établit aussi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n.e^x = 0$$

Logarithme népérien

Les belles histoires de l'ogre à rythme

Le contexte

Une première étude de fonction incluant le logarithme népérien. Au menu : limites, dérivées et primitives.

L'énoncé

La fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2.x + 1 - \ln(x+1)$$

Dans cet exercice, nous allons étudier la fonction f ainsi que sa primitive F.

a) Pourquoi la fonction f est-elle seulement définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$?

b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

c) Pour tout réel x strictement positif, simplifier l'écriture de $\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

En utilisant ce qui précède, établir la limite de f en $+\infty$.

d) Déterminer les variations de f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

e) Démontrer que l'image de $-\frac{1}{2}$ par la fonction f est un réel strictement positif.

En déduire le signe de $f(x)$.

f) Démontrer que la fonction $G(x) = (x+1).\ln(x+1) - x$ est une primitive de la fonction $g(x) = \ln(x+1)$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

On appelle F la primitive de f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ telle que $F(1) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$.

g) Déterminer l'expression de cette primitive F. On veillera à donner l'écriture de $F(x)$ la plus simplifiée possible.

Déduire des questions précédentes les variations de la fonction F.

Le corrigé

a) Il est clair que la quantité $2.x+1$ existe quelque soit le réel x considéré.
Par contre, le logarithme $\ln(x+1)$ n'existe que lorsque et seulement lorsque $x+1$ est strictement positif car la fonction ln n'est pas définie que sur $]0;+\infty[$. Autrement dit :

$$\ln(x+1) \text{ existe} \iff x+1>0 \iff x>-1 \iff x \in]-1;+\infty[$$

C'est pour cela que l'ensemble de définition de la fonction f est $]-1;+\infty[$.

b) Lorsque x tend vers 1, $x+1$ tend vers 0^+, donc $\ln(x+1)$ plonge vers $-\infty$. Ainsi :

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2\times(-1) + 1 - (-\infty) = -1 + (+\infty) = +\infty$$

Par conséquent, la droite verticale d'équation $x=-1$ est une asymptote à la courbe représentant la fonction f.

c) Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left[x \times \left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}_{\text{La somme des logarithmes est le logarithme du produit}} = \ln\left(x + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\right) = \ln(x+1)$$

➲ De prime abord, lorsque x tend vers $+\infty$:

- ⏩ $2.x+1$ tend vers $+\infty$.
- ⏩ $x+1$ tend vers $+\infty$, donc son logarithme $\ln(x+1)$ s'en va aussi vers $+\infty$.

Donc la fonction f est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
Modifions l'expression de la fonction f. Pour tout réel strictement positif x, nous avons :

$$f(x) = 2.x + 1 - \ln(x+1) = 2.x + 1 - \ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= x \times \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} \times \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

Lorsque x tend vers $+\infty$:

- ⏩ Les termes $\frac{1}{x}$ et $\frac{\ln(x)}{x}$ tendent vers 0.
- ⏩ $1+\frac{1}{x}$ tend vers 1, donc son logarithme $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers $\ln(1) = 0$.

Donc $f(x)$ tend vers $(+\infty)\times(2+0-0-0\times 0)=(+\infty)\times 2=+\infty$.

d) Comme la fonction $u(x)=x+1$ de dérivée $u'(x)=1$ est dérivable sur ℝ et qu'elle est strictement positive sur $]-1;+\infty[$, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]-1;+\infty[$, nous avons : $(\ln(x+1))'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{1}{x+1}$.

Par suite, comme $2.x+1$ est dérivable sur ℝ, alors la fonction $f(x)=2.x+1-\ln(x+1)$ est dérivable sur $]-1;+\infty[$. Pour tout réel x de cet intervalle, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=2+0-\frac{1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}=\frac{2\times(x+1)-1}{x+1}=\frac{2.x+1}{x+1}$$

Par conséquent, le tableau de variation de la fonction f est celui ci-contre.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2.x+1$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\ln(2)$	↗	$+\infty$

Calculons l'image de $-\frac{1}{2}$ par f.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1-\ln\left(-\frac{1}{2}+1\right)$$
$$=-1+1-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\ln(2)$$

e) Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et, que $1<2$ alors :

$$0=\ln(1)<\ln(2)=f\left(-\frac{1}{2}\right).$$

<u>Conclusion :</u> comme le minimum de f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ qui est $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\ln(2)$, est strictement positif, alors la fonction f est toujours strictement positive sur $]-1;+\infty[$.

f) De par ce qui précède, la fonction G est clairement dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$. Pour tout réel x appartenant à cet intervalle, nous pouvons écrire :

$$G'(x)=[(x+1).\ln(x+1)]'-[x]'=(x+1)'\times\ln(x+1)+(x+1)\times(\ln(x+1))'-1$$
$$=1\times\ln(x+1)+\cancel{(x+1)}\times\frac{1}{\cancel{x+1}}-1=\ln(x+1)+1-1=\ln(x+1)=g(x)$$

<u>Conclusion :</u> comme G est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que sa dérivée est la fonction g, alors G est une primitive de la fonction g sur cet intervalle.

g) La primitive F de la fonction $f(x)=2.x+1-g(x)$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ a une expression de la forme :

$$F(x)=x^2+x-G(x)+\text{Constante}=x^2+x-(x+1).\ln(x+1)+x+\text{Constante}$$
$$=x^2+2.x-(x+1).\ln(x+1)+\text{Constante}$$

Reste à trouver la valeur de la constante. Nous savons : $F(1)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)$. Il vient alors :

$$\underbrace{1^2+2\times 1-(1+1)\times\ln(1+1)+\text{Constante}}_{F(1)}=\ln\left(\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow 3-2.\ln(2)+\text{Constante}=-\ln(4)$$
$$\Leftrightarrow 3-\cancel{\ln(2^2)}+\text{Constante}=-\cancel{\ln(4)}$$
$$\Leftrightarrow \text{Constante}=-3$$

<u>Conclusion :</u> Pour tout réel $x\in]-1;+\infty[$, on a : $F(x)=x^2+2.x-(x+1).\ln(x+1)-3$

Comme sa dérivée f est strictement positive sur $]-1;+\infty[$, alors F est strictement croissante sur cet intervalle.

Les yeux de ln

Le contexte

L'étude d'une fonction comprenant un logarithme avec dérivation, tangentes, limites et croissantes comparées et le théorème des valeurs intermédiaires. Un classique du genre !

L'énoncé

La fonction auxiliaire g est définie par :

$$g(x)=1+x-x\times\ln(x)$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g. On prendra soin à bien justifier sa réponse.

Etudier les variations de la fonction g sur son ensemble de définition D_g.

Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans D_g une unique solution que l'on notera α.

A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de cette solution α à 10^{-2} près.

En déduire le signe de $g(x)$ sur son ensemble de définition D_g.

La fonction principale f est définie par :

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x+1}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

b) Quel est l'ensemble de définition D_f de la fonction f ? On justifiera sa réponse.

c) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition D_f.

Quelles sont les conséquences graphiques de celles-ci ?

d) Montrer que pour tout réel $x\in D_f$, on a :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x\times(x+1)^2}$$

En déduire les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

e) Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

f) On appelle A le point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

Déterminer l'équation réduite de la tangente T_A à la courbe (C) au point A.

g) Sur le graphique ***(1)*** fourni en annexe, tracer la courbe (C) ainsi que les diverses droites rencontrées au cours de l'exercice.

Le corrigé

a) La seule chose qui pose problème dans l'expression de g est le logarithme.

$$g(x)\text{ existe }\Leftrightarrow\ \ln(x)\text{ existe }\Leftrightarrow\ x>0$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de g est l'intervalle $]0;+\infty[$.

➲ Comme les fonctions $1+x$ et x sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ alors la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, nous avons :

$$g'(x)=0+1-\left(1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right)=1-\ln(x)+-1=-\ln(x)=(-1)\times\ln(x)$$

Même si elles ne sont pas explicitement demandées, déterminons les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+x-x\times\ln(x)$$
$$=1+0-0=1$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+x\times(1-\ln(x))$$
$$=1+(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$$

De plus :

$$g(1)=1+1-1\times\ln(1)=2+1\times 0=2$$

Le tableau de variation de g est donc ➚

x	0		1		$+\infty$
-1		$-$		$-$	
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	1	↗	2	↘	$-\infty$

➲ Comme la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors elle y est continue.

- Comme g est strictement croissante sur $]0;1]$ et que 0 n'appartient pas à l'intervalle $]1;2]=g(]1;0])$, alors 0 n'a aucun antécédent par g dans $]0;1]$.
- Comme g est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et que 0 fait partie de l'intervalle $]-\infty;2[=g(]1;+\infty[)$, alors 0 a un unique antécédent α dans $]1;+\infty[$.

<u>Conclusion :</u> l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. A l'aide de la calculatrice, on trouve : $3,59\le\alpha\le 3,60$.

Du fait de l'équation $g(x)=0$ et de son tableau de variation, le tableau de signe de g est :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

b) Deux choses posent problème dans l'expression de f : le logarithme et le dénominateur.

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\ln(x)$ existe <u>et</u> son dénominateur $x+1\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x>0$ <u>et</u> $x\neq -1$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de f est l'intervalle $]0;+\infty[$.

c) Commençons par la limite à droite de 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x)}{x+1}=\dfrac{-\infty}{1}=-\infty$.

Donc l'axe des ordonnées (équation réduite $x=0$) est une asymptote à la courbe (C).

➲ Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Modifions l'écriture de f. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x+1}=\frac{\ln(x)}{x}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x}=1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\times\dfrac{1}{1}=0$.

Donc l'axe des abscisses (équation réduite $y=0$) est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

d) Comme :

- La fonction $u(x)=\ln(x)$ de dérivée $u'(x)=\dfrac{1}{x}$, est dérivable sur $]0;+\infty[$.
- La fonction $v(x)=x+1$ de dérivée $v'(x)=1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est non nulle sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

Alors le quotient $f=\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x>0$, nous avons :

$$f'(x)=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}=\frac{\frac{1}{x}\times(x+1)-1\times\ln(x)}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1-x\times\ln(x)}{x}}{(x+1)^2}=\frac{g(x)}{x\times(x+1)^2}$$

Par conséquent, le tableau de variation est le suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

e) Comme α est une solution de l'équation $g(x)=0$, alors nous avons :

$$1+\alpha-\alpha\times\ln(\alpha)=0 \Leftrightarrow 1+\alpha=\alpha\times\ln(\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}=\frac{\ln(\alpha)}{\alpha+1}=f(\alpha)$$

D'où l'égalité recherchée.

Comme $3{,}59\leq\alpha\leq 3{,}60$ alors $\dfrac{1}{3{,}60}\leq f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}\leq\dfrac{1}{3{,}59}$ soit $0{,}27\leq f(\alpha)\leq 0{,}28$.

f) Comme $A(x_A;y_A)$ est le point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe des abscisses, alors son ordonnée $y_A=f(x_A)$ est nulle. Résolvons l'équation $f(x_A)=0$ dans $]0;+\infty[$.

$$\frac{\ln(x_A)}{x_A+1}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\ln(x_A)}{\cancel{x_A+1}}\times\cancel{(x_A+1)}}_{\text{Comme on travaille sur }]0;+\infty[,\ x_A+1 \text{ est non nul. Donc on peut multiplier par.}}=0\times(x_A+1) \Leftrightarrow \ln(x_A)=0 \Leftrightarrow x_A=1$$

Donc le point A a pour coordonnées $(1;0)$.

Le coefficient directeur de la tangente T_A est le nombre dérivé de f en 1.

$$f'(1)=\frac{1+1-1\times\ln(1)}{1\times(1+1)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

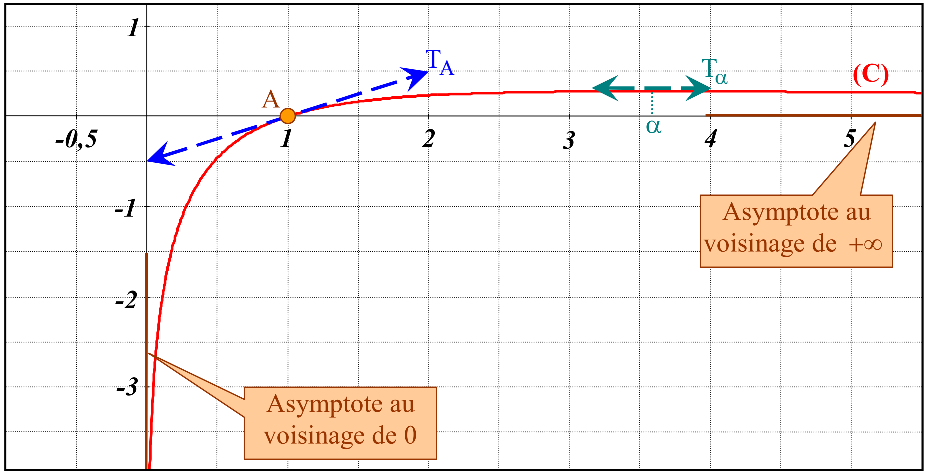
Donc l'équation réduite de T_A est de la forme $y=\dfrac{1}{2}.x+p$. Reste à trouver p.

Comme la tangente T_A passe par le point $A(1;0)$, alors les coordonnées de ce dernier vérifient l'équation réduite de cette première. Autrement dit :

$$A \in T_A \quad \Leftrightarrow \quad y_A = \frac{1}{2}\times x_A + p \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}\times 1 + p \quad \Leftrightarrow \quad p = -\frac{1}{2}$$

Conclusion : l'équation réduite de la tangente T_A est $y = \frac{1}{2}.x - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$.

g) La courbe (C) représentant la fonction f, sa tangente T_A ainsi que ses deux asymptotes sont tracées sur le graphique ci-dessous.



La vie tourmentée de Hélène de Aiffe

Le contexte

Une fonction est définie graphiquement. On étudie sa composée avec la fonction ln.

L'énoncé

La courbe (C) de La fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée sur la page suivante. De plus, on sait :

- La fonction f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;0]$ et $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

  f est strictement décroissante sur l'intervalle restant $[0;1,5]$.
- La droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite $y = \frac{2}{3}.x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
- La droite $\mathcal{D}'$ d'équation réduite $y = 5$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
- La droite Δ est la tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse 4.
- Les images de 0 et 3 par la fonction f sont égales au nombre e.

  0 a exactement deux antécédents par la fonction f. Il s'agit de -2 et 1,5.

A partir du graphique ***(2)*** et de ces renseignements, répondre aux questions suivantes :

a) Compléter les égalités suivantes :

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \qquad f(-2) = \qquad f'(4) = \qquad f(4) =$$

b) Quelles sont les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$? On justifiera ses réponses.

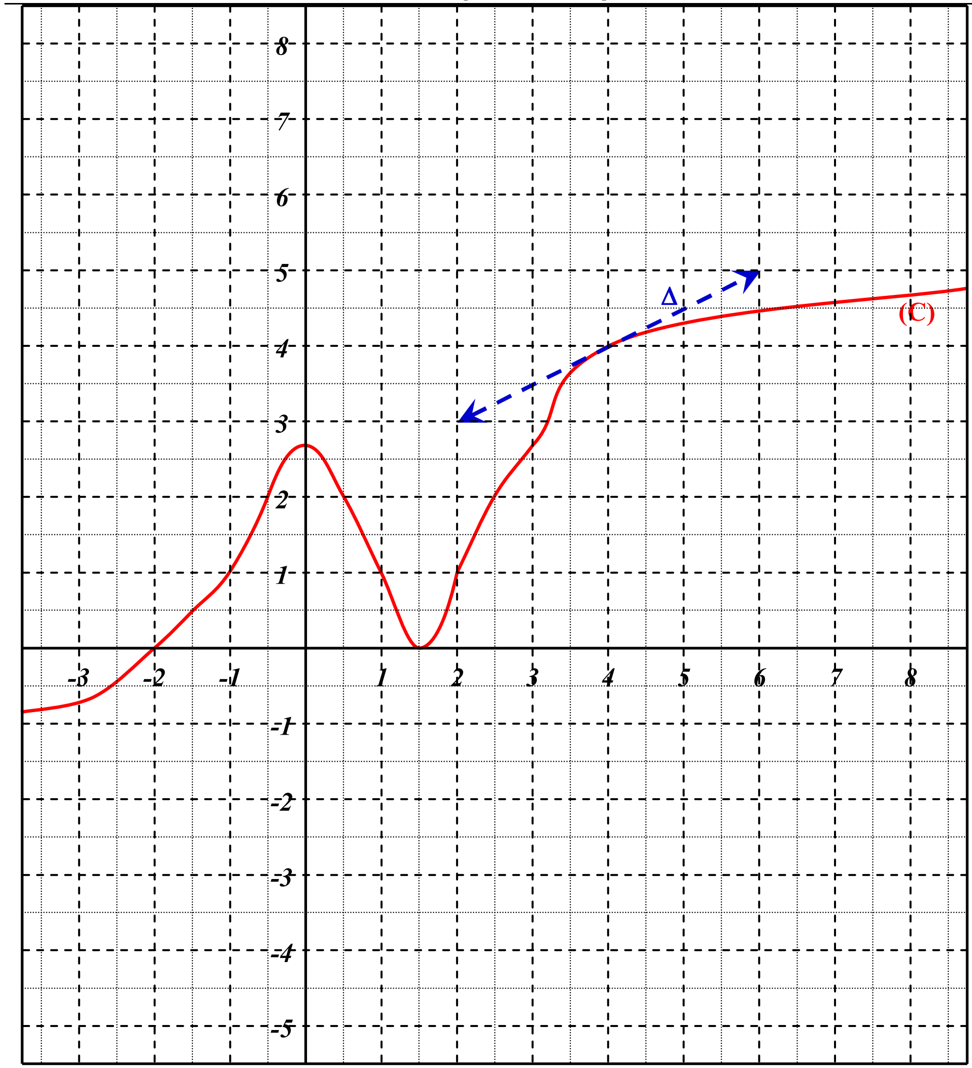
La fonction g est définie par :

$$g(x) = \ln(f(x))$$

On appelle (C') sa courbe représentative.

c) Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

d) Exprimer $g(-1,5)$; $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g(4)$ en fonction de $\ln(2)$.



e) Résoudre dans D_g l'équation $g(x)=1$, puis l'inéquation $g(x)>0$.

f) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D_g.
Quelles sont les conséquences graphiques de celles-ci ?

g) Déterminer $g'(0)$ et $g'(4)$.

h) Etablir les variations de g sur son ensemble de définition D_g.

i) Sur le graphique, tracer la courbe (C') ainsi que toutes les droites mises en évidence au cours de l'exercice.

Le corrigé

a) Comme la fonction dérivable f admet un minimum local en $1,5$, alors la tangente à la courbe (C) en ce point est horizontale. Donc son coefficient directeur $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ est nul.

➲ La courbe (C) passe par le point de coordonnées $(-2;0)$. Donc $f(-2)=0$.

➲ Le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe (C) en son point d'abscisse 4 est :

$$f'(4)=\frac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}}=\frac{1}{2}.$$

➲ La courbe (C) passe par le point de coordonnées $(4;4)$. Par conséquent : $f(4)=4$.

b) Comme la droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite $y=\frac{2}{3}.x-1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{3}.x-1=-\infty$.
De même, la droite horizontale $\mathcal{D}'$ d'équation réduite $y=5$ étant une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$, nous en déduisons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$.

c) La seule chose qui puisse faire que g n'existe pas est le logarithme.

$$g(x)\text{ existe} \Leftrightarrow \underbrace{f(x)>0}_{\text{Car ln n'est définie que sur }]0;+\infty[} \Leftrightarrow \underbrace{x\in\left]-2;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[}_{\text{D'après le graphique et les renseignements}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition D_g de la fonction g est $]-2;1,5[\cup]1,5;+\infty[$.

d) Exprimons les images demandées en fonction de ln(2).

✸ $g(-1,5)=\ln(f(-1,5))=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$

- $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln(2)$
- $g(4) = \ln(f(4)) = \ln(4) = \ln\left(2^2\right) = 2\times\ln(2)$

e) Résolvons dans l'ensemble $D_g =]-2;1,5[\cup]1,5;+\infty[$, l'équation $g(x)=1$.

$$g(x)=1 \Leftrightarrow \ln(f(x))=1 \Leftrightarrow f(x)=e \Leftrightarrow x=0 \ \underline{\text{ou}}\ x=3$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $g(x)=1$ a exactement deux solutions. Il s'agit de 0 et 3.

➲ Résolvons l'inéquation $g(x)>0$ dans l'ensemble $D_g =]-2;1,5[\cup]1,5;+\infty[$.

$$g(x)>0 \Leftrightarrow \ln(f(x))>0 \Leftrightarrow f(x)>1 \Leftrightarrow \underbrace{x\in]-1;1[\cup]2;+\infty[}_{\text{D'après le graphique...}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x)>0$ est $]-1;1[\cup]2;+\infty[$.

f) Trois limites (voire même quatre...) sont à déterminer :

- Quand x tend vers -2, $f(x)$ tend vers 0^+ et $g(x)=\ln(f(x))$ tend vers $-\infty$.
  Donc la droite δ d'équation $x=-2$ est une asymptote à (C').
- De même, comme $\lim\limits_{x\to1,5} f(x)=0^+$, alors $\lim\limits_{x\to1,5} g(x)=\lim\limits_{x\to1,5}\ln(f(x))-\infty$.
  La droite δ' d'équation $x=1,5$ est une autre asymptote à la courbe (C').
- Enfin, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$, alors $\lim\limits_{x\to1,5} g(x)=\ln(5)$.
  Par conséquent, la droite horizontale δ" d'équation $y=\ln(5)$ est une asymptote à la courbe (C') au voisinage de $+\infty$

g) Comme la fonction f est dérivable sur ℝ et strictement positive sur $]-2;1,5[\cup]1,5;+\infty[$, alors la fonction g est dérivable sur son ensemble de définition $]-2;1,5[\cup]1,5;+\infty[$.

Pour tout réel $x\in]-2;1,5[\cup]1,5;+\infty[$, nous avons : $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

En particulier :

$$g'(0)=\dfrac{\overbrace{f'(0)}^{\text{Car f admet un maximum local en 0}}}{f(0)}=\frac{0}{3}=0 \qquad g'(4)=\frac{f'(4)}{f(4)}=\frac{1/2}{4}=\frac{1}{8}$$

Par conséquent, les tangentes T_0 et T_4 à la courbe (C') en ses points d'abscisses 0 et 4 ont pour coefficients directeurs respectifs 0 et $\frac{1}{8}$

h) La fonction g est la composée de la fonction f suivie de la fonction logarithme népérien.

- Sur l'intervalle $]-2;0[$, la fonction g est croissante car nous avons :

$$\underset{\in]-2;0[}{x}\xrightarrow[\text{croissante sur }]-2;0[]{f}\underset{\in]0;e[}{f(x)}\xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{Ln}\underset{\in]-\infty;1[}{g(x)}$$

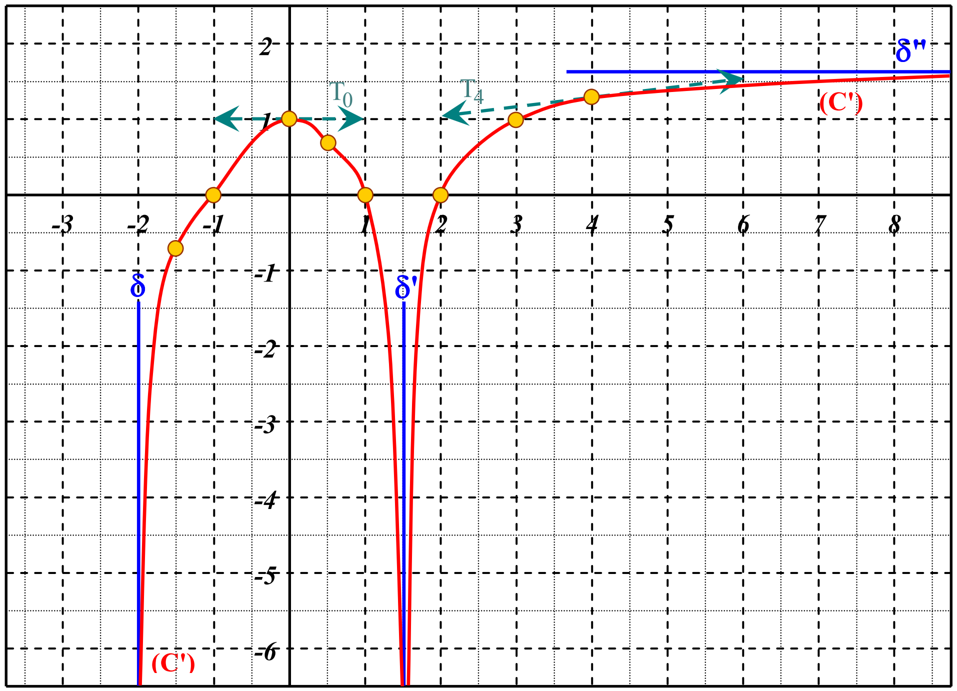
- Sur l'intervalle $]0;1,5[$, la composée g est décroissante car nous avons alors :

$$\underset{\in]0;1,5[}{x}\xrightarrow[\text{décroissante sur }]0;1,5[]{f}\underset{\in]0;e[}{f(x)}\xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{Ln}\underset{\in]-\infty;1[}{g(x)}$$

- Sur l'intervalle $]3/2;+\infty[$, la fonction g est croissante car alors :

$$\underset{\in]1,5;+\infty[}{x}\xrightarrow[\text{décroissante sur }]1,5;+\infty[]{f}\underset{\in]0;5[}{f(x)}\xrightarrow[\text{Croissante sur }]0;+\infty[]{Ln}\underset{\in]-\infty;\ln(5)[}{g(x)}$$

i) Avec tous les points et droites mis en évidence au cours de l'exercice, nous obtenons :



Primitives

Des histoires de primitives

Le contexte

Un exercice rapide pour déterminer trois primitives "classiques".

L'énoncé

a) Déterminer la primitive F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction

$$f(x)=6.x^2-4.x+1+\frac{2}{x^2}$$

telle que $F(1)=4$.

b) Déterminer la primitive F définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$f(x)=5.e^{3.x+1}$$

telle que $F(0)=4$.

c) Déterminer la primitive F définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$f(x)=\frac{2.x}{\sqrt{3.x^2+1}}$$

telle que $F(4)=1$.

Le corrigé

a) La primitive F sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f(x)=6\times x^2-4\times x+1+2\times\frac{1}{x^2}$ est de la forme :

$$F(x)=6\times\frac{1}{3}.x^3-4\times\frac{1}{2}.x^2+x+2\times\frac{-1}{x}+\text{Constante}=2.x^3-2.x^2+x-\frac{2}{x}+\text{Constante}$$

Déterminons cette constante. Nous savons que $F(1)=4$. Par suite, il vient :

$$\underbrace{2\times1^3-2\times1^2+1-\frac{2}{1}+\text{Constante}=0}_{F(1)}\Leftrightarrow -1+\text{Constante}=4\Leftrightarrow \text{Constante}=5$$

<u>Conclusion :</u> la primitive F est définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=2.x^3-2.x^2+x-\frac{2}{x}+5$

b) Au vu de son expression, f semble être une fonction intégrable de la forme $u'.e^u$.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=5.e^{3.x+1}=5\times\frac{1}{3}\times3\times e^{3.x+1}=\frac{5}{3}\times u'(x)\times e^{u(x)}$$

où la fonction $u(x)=3.x+1$ a pour dérivée $u'(x)=3$.

Comme la fonction $u(x)=3.x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la primitive F de la fonction f est définie sur cet ensemble et a une expression de la forme :

$$F(x)=\frac{5}{3}\times e^{u(x)}+\text{Constante}=\frac{5}{3}\times e^{3.x+1}+\text{Constante}$$

Or nous savons que $F(0)=4$. Par conséquent, il vient :

$$\underbrace{\frac{5}{3}\times e^{3\times0+1}+\text{Constante}}_{F(0)}=4\Leftrightarrow\frac{5}{3}.e^1+\text{Constante}=4\Leftrightarrow\text{Constante}=4-\frac{5}{3}.e$$

<u>Conclusion :</u> la primitive F est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\frac{5}{3}.e^{3.x+1}+4-\frac{5}{3}.e$

c) f semble être une fonction intégrale de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. Pour tout réel x, nous avons :

$$f(x)=\frac{2.x}{\sqrt{3.x^2+1}}=\frac{1}{3}\times\frac{6.x}{\sqrt{3.x^2+1}}=\frac{1}{3}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

où la fonction $u(x)=3.x^2+1$ a pour dérivée $u'(x)=6.x$.

Pour tout réel x, il est clair que $u(x)=3.x^2+1\geq1$. Donc u est strictement positive

Comme la fonction $u(x)=3.x^2+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors la primitive F de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$F(x)=\frac{1}{3}\times2.\sqrt{u(x)}+\text{Constante}=\frac{2}{3}.\sqrt{3.x^2+1}+\text{Constante}$$

Nous recherchons une primitive F de f particulière. Celle telle que $F(4)=1$. Il vient :

$$\frac{2}{3}.\sqrt{3\times4^2+1}+\text{Constante}=1\Leftrightarrow\frac{2}{3}\times\sqrt{49}+\text{Constante}=1\Leftrightarrow\text{Constante}=1-\frac{14}{13}=-\frac{11}{3}$$

<u>Conclusion :</u> la primitive F recherchée est définie que $\mathbb{R}$ par $F(x)=\frac{2}{3}.\sqrt{3.x^2+1}-\frac{11}{3}$.

QCM comme Que C'est Méchant !

Le contexte

Un QCM sur les formules usuelles de recherche de primitives.

L'énoncé

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 2 points et chaque mauvaise en enlève 0,5. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=9.x^2-2.x+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$?

$F(x)=18.x-2+\sqrt{2.x}$	$F(x)=3.x^3-x^2+\sqrt{2.x}$
$F(x)=9.x^3-2.x^2+\sqrt{2.x}+1$	$F(x)=3.x^3-x^2+\frac{x}{\sqrt{2}}+171$

b) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-\frac{e^x}{e^x+1}$$

Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

$F(x)=\frac{1}{(e^x+1)^2}$	$F(x)=-2.\sqrt{e^x+1}$
$F(x)=\ln(e^x+1)$	$F(x)=\ln\left(\frac{1}{e^x+1}\right)$

c) La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{e^{x+1}}$$

Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$?

$F(x)=\ln(x)+\ln(e^{x+1})$	$F(x)=\ln(x.e^{x+1})$
$F(x)=\ln(x)+e^{x+1}$	$F(x)=\ln(x)-\frac{1}{e^{x+1}}$

d) La fonction f est définie sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{4}\right[$ par :

$$f(x)=\frac{3}{4.x-1}$$

Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de f sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{4}\right[$?

$F(x)=\frac{3}{4}.\ln(1-4.x)$	$F(x)=12.\ln(1-4.x)$
$F(x)=\frac{3}{4}.\ln(4.x-1)$	$F(x)=12.\ln(4.x-1)$

Le corrigé

a) Dans l'expression de la fonction f, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est une constante et non une fonction. Toutes les primitives F du polynôme $f(x)=9\times x^2-2\times x+\frac{1}{\sqrt{2}}\times 1$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$F(x)=9\times\frac{1}{3}.x^3-2\times\frac{1}{2}.x^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\times x+\text{Constante}=3.x^3-x^2+\frac{x}{\sqrt{2}}+\text{Constante}$$

La seule proposition de cette forme est la fonction $F(x)=3.x^3-x^2+\frac{x}{\sqrt{2}}+171$.

b) Pour tout réel x, nous avons : $f(x) = -\frac{e^x}{e^x+1} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$

Comme la fonction $u(x) = e^x + 1$ de dérivée $u'(x) = e^x$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors toutes les primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$F(x) = -\ln(u(x)) + \text{Constante} = \ln\left(\frac{1}{u(x)}\right) + \text{Constante} = \ln\left(\frac{1}{e^x+1}\right) + \text{Constante}$$

La seule proposition de cette forme est la fonction $F(x) = \ln\left(\frac{1}{e^x+1}\right)$.

c) Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{e^{x+1}} = \frac{1}{x} + e^{-(x+1)} = \frac{1}{x} + e^{-x-1} = \frac{1}{x} - (-1) \times e^{-x-1}$$

Examinons les deux termes de cette somme :

- Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est ln(x).
- Comme la fonction $u(x) = -x-1$ de dérivée $u'(x) = -1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors une primitive de $(-1) \times e^{-x-1} = u'(x) \times e^{u(x)}$ sur $\mathbb{R}$ est $e^{u(x)} = e^{-x-1}$.

Donc toutes les primitives F sur $]0;+\infty[$ de la fonction f sont de la forme :

$$F(x) = \ln(x) - e^{-(x+1)} + \text{Constante} = \ln(x) - \frac{1}{e^{x+1}} + \text{Constante}$$

La seule proposition de cette forme est la fonction $F(x) = \ln(x) - \frac{1}{e^{x+1}}$.

d) La fonction f est presque de la forme $\frac{u'}{u}$. Mais sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{4}\right[$, la fonction affine $4.x-1$ est strictement négative. Sous sa forme actuelle, la fonction $f(x) = \frac{3}{4.x-1}$ n'est pas intégrable. Donnons-lui cette vertu !

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{4}\right[$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{3}{4.x-1} = \frac{3 \times (-1)}{(4.x-1) \times (-1)} = -3 \times \frac{1}{-4.x+1} = -3 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{-4}{-4.x+1} = \frac{3}{4} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Comme la fonction $u(x) = -4.x+1$ de dérivée $u'(x) = -4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est strictement positive sur l'intervalle $]-\infty;-1/4[$, alors toutes les primitives F sur ce dernier intervalle de la fonction f sont de la forme :

$$F(x) = \frac{3}{4}.\ln(u(x)) + \text{Constante} = \frac{3}{4}.\ln(1-4.x) + \text{Constante}$$

La seule proposition de cette forme est la fonction $F(x) = \frac{3}{4}.\ln(1-4.x)$.

Les suites

La suite d'une suite est-elle sa convergence ?

Le contexte

Cet exercice traite d'une suite convergente définie par récurrence à partir d'une fonction. C'est une adaptation durcie d'un exercice donné au bac.

L'énoncé

a) Sachant que toute suite croissante majorée est convergente, prouver que si une suite est décroissante et minorée, alors elle est aussi convergente.

Désormais et dans tout le reste de l'exercice, on appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{Pour tout entier naturel n, } u_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times \left(u_n + \dfrac{2}{u_n} \right) \end{cases}$$

b) On appelle f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

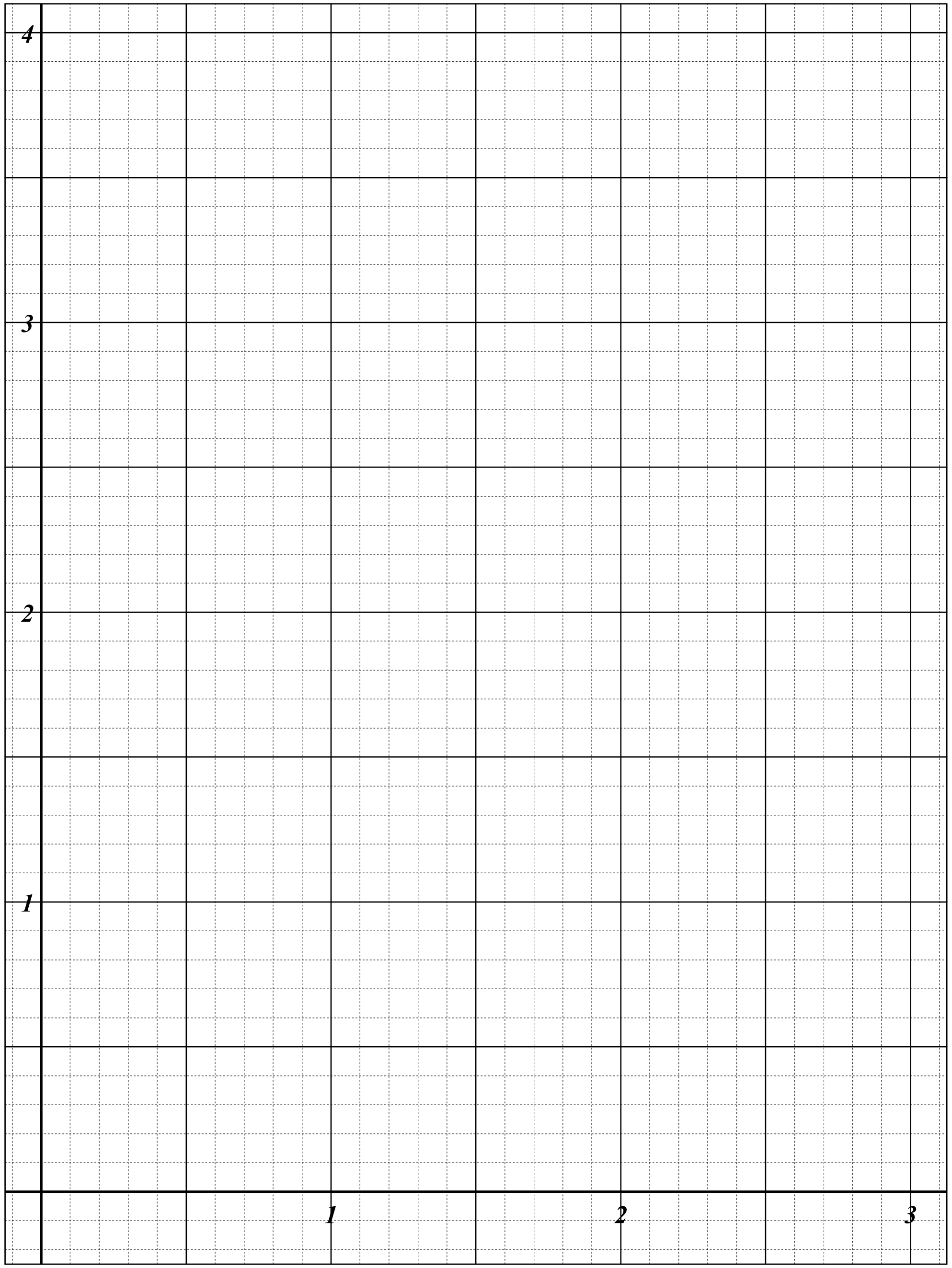
Etudier le sens de variation de la fonction f, et tracer sa courbe représentative sur le graphique ci-contre.
Utiliser ce même graphique pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 appartenant à l'axe des abscisses, et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3. On laissera apparents les traits de construction.

c) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n \geq \sqrt{2}$.

d) Démontrer que pour tout $x \in \left[\sqrt{2};+\infty\right[$, on a $f(x) \leq x$.

En utilisant ce qui précède, prouver que la suite (u_n) est convergente.

e) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ



Le corrigé

a) Soit (u_n) une suite décroissante et minorée.

On appelle (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = -u_n$.

Exploitons ce que nous savons de la suite (u_n).

- Comme la suite (u_n) est décroissante, alors pour tout entier naturel n, on a :

  $$u_{n+1} \leq u_n \quad \text{donc} \quad -u_{n+1} \geq -u_n \quad \text{soit} \quad v_{n+1} \geq v_n$$

  Donc la suite (v_n) est croissante.

- Comme la suite (u_n) est minorée, alors il existe un réel M tel que :

  Pour tout entier naturel n, $u_n \geq M$ donc $v_n = -u_n \leq -M$

  Donc la suite (v_n) est majorée par $-M$.

Comme la suite (v_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente vers un réel α.

<u>Conclusion :</u> la suite (u_n) converge vers le réel $-\alpha$.

b) La fonction $f(x) = \frac{1}{2}\times\left(x+\frac{2}{x}\right)$ est clairement dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{x^2-2}{x^2} = \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\times\left(x+\sqrt{2}\right)}{2.x^2}$$

Déterminons les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}\times\left(0^+ + (+\infty)\right) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}\times\left((+\infty) + 0^+\right) = +\infty$

Calculons l'image de $\sqrt{2}$ par f :

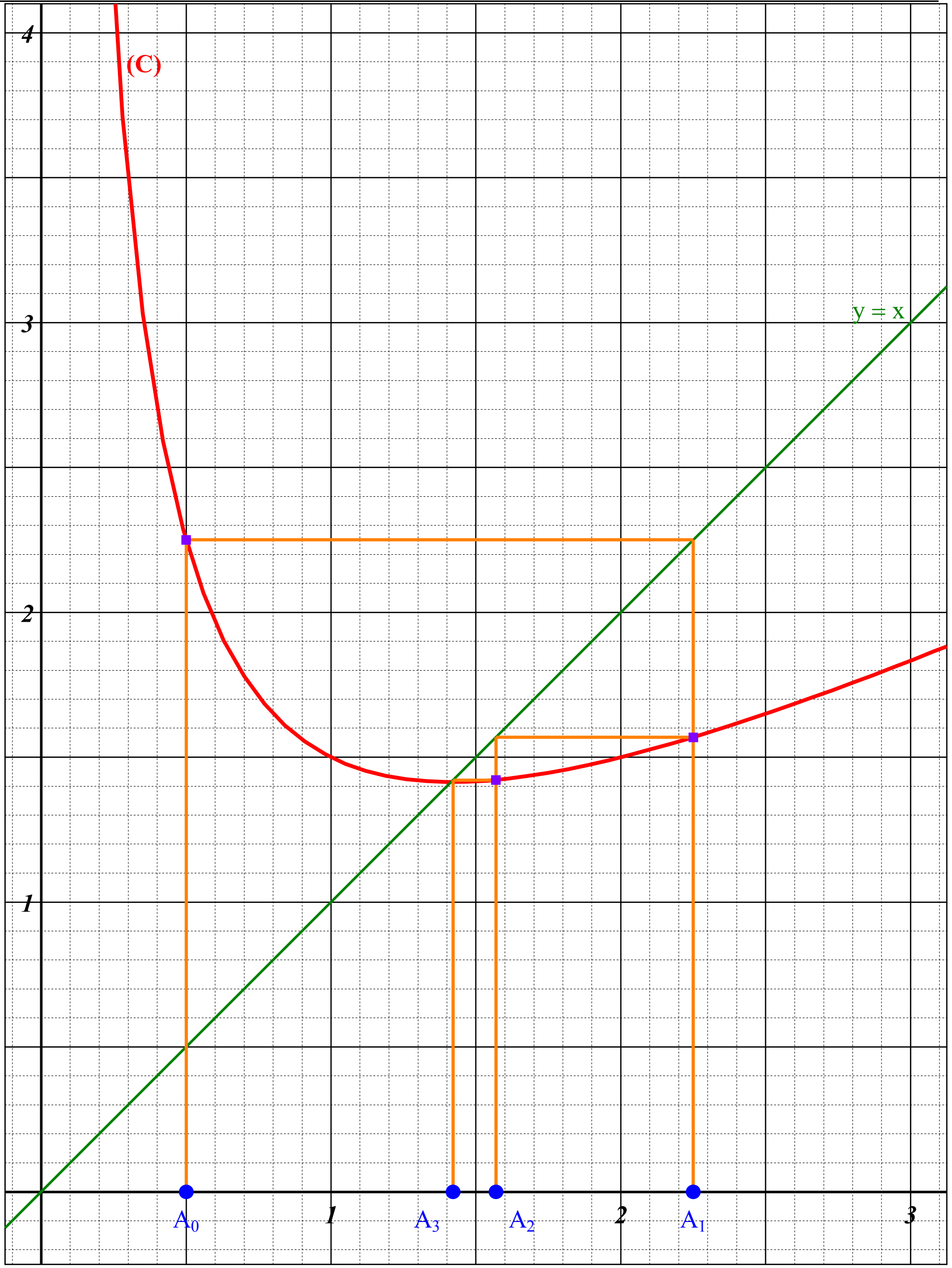
$$f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}.\sqrt{2}$$

Par conséquent, le tableau de variation de f est celui ci-contre ↗

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x-\sqrt{2}$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{2}$		$+$		$+$	
$2.x^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

➲ Les points demandés sont les suivants :



c) Montrons par récurrence sur l'entier naturel non nul n, la propriété $\mathcal{P}_n : u_n \geq \sqrt{2}$.

- La première propriété $\mathcal{P}_1$ est-elle vraie ?

  Calculons le terme u_1.

$$u_1 = \frac{1}{2}\times\left(u_0+\frac{2}{u_0}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{1/2}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+2\times\frac{2}{1}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{9}{2} = \frac{9}{4}$$

  Comme $\frac{9}{4}$ est supérieur à 2 qui lui même est supérieur à sa racine alors $u_1 \geq \sqrt{2}$

  Donc la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- Le principe de récurrence : la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie implique-t-elle que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ soit alors aussi vraie ?

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie, autrement dit que $u_n \geq \sqrt{2}$.

  Comme la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$, alors

$$u_{n+1} = \underbrace{f(u_n) \geq f\left(\sqrt{2}\right)}_{\text{f conserve l'ordre...}} = \sqrt{2}$$

  Donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. D'où le principe de récurrence.

<u>Conclusion :</u> pour tout entier strictement positif n, nous avons $u_n \geq \sqrt{2}$

A partir du rang 1, la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$.

d) Pour tout réel $x \in \left[\sqrt{2};+\infty\right[$, intéressons-nous à la différence $x - f(x)$. Nous avons :

$$x - f(x) = x - f(x) = x - \frac{x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-2}{2.x}$$

Or si $x \in \left[\sqrt{2};+\infty\right[$ alors $x \geq \sqrt{2}$ donc $x^2 \geq \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ donc $x^2 - 2$ est positif ou nul.

Sur l'intervalle $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$, la différence $x - f(x)$ est positive ou nulle d'où $f(x) \leq x$.

➲ La suite (u_n) étant déjà minorée, si nous parvenons à prouver qu'elle est décroissante, nous établirons de facto sa convergence.

Nous savons que pour tout entier naturel non nul n, u_n appartient à l'intervalle $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

En application de ce qui précède, il vient alors : $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$.

Donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

<u>Conclusion :</u> comme, à partir du rang 1, la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, alors elle est convergente vers un réel ℓ.

e) Comme :

- Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\times\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right) = f(u_n)$.
- La fonction f est continue sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ car elle y est dérivable.
- La suite (u_n) converge vers le réel ℓ.

Alors la limite ℓ est solution de l'équation $x = f(x) \iff x = \frac{1}{2}\times\left(x+\frac{2}{x}\right)$

➲ Résolvons dans l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ l'équation $x = \frac{1}{2}\times\left(x+\frac{2}{x}\right)$

$$x = \frac{1}{2}\times\left(x+\frac{2}{x}\right) \iff 2.x = x+\frac{2}{x} \iff x = \frac{2}{x} \iff x^2 = 2$$

$$\iff \underbrace{\cancel{x = -\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{2}}_{\text{Nous résolvons dans l'intervalle }]0;+\infty[}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $x = \frac{1}{2}\times\left(x+\frac{2}{x}\right)$ admet dans l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$ une seule solution qui est $\sqrt{2}$. Comme la suite (u_n) est à termes positifs, alors sa limite ℓ est $\sqrt{2}$.

De l'étude d'une fonction à celle d'une suite d'intégrales

Le contexte

Cet exercice est une adaptation d'un autre donné au bac. Tout commence par l'étude d'une fonction, avant de s'intéresser à la convergence d'une suite définie par une intégrale. Un grand classique des suites.

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\ln(1+2.x)$$

Partie A - Etude de la fonction f

1) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I.

2) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\frac{1}{2}$.

3) On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par :

$$g(x)=f(x)-x$$

a. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle I.

b. Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions : 0 et une autre que l'on appellera α et qui appartient à l'intervalle $[1;2]$.

c. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle I

4) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;\alpha[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0;\alpha[$.

On appelle (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel n} \end{cases}$$

Partie B - Etude de la suite récurrente (u_n)

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à $]0;\alpha[$.

2) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante.

3) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

Partie C - Recherche de la limite de la suite (u_n)

1) Montrer que pour tout réel $x\geq 1$, on a $f'(x)\leq\frac{2}{3}$.

2) Recherche de la limite de la suite (u_n).

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\int_{u_n}^{\alpha} f'(t).dt\leq\frac{2}{3}\times(\alpha-u_n)$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $\alpha-u_{n+1}\leq\frac{2}{3}\times(\alpha-u_n)$.

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que $0\leq\alpha-u_n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Le corrigé

Partie A - Etude de la fonction f

A.1) La fonction f est la composée suivante :

$$\underset{\in]-0,5;+\infty[}{x} \xrightarrow[\text{Strictement croissante sur } \mathbb{R}]{u(t)=2.t+1} \underset{\in]0;+\infty[}{2.x+1} \xrightarrow[\text{Strictement croissante sur }]0;+\infty[]{\ln} f(x)=\ln(1+2.x)$$

<u>Conclusion :</u> la fonction f est la composée de deux fonctions strictement croissantes. Donc f est elle aussi strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

A.2) Quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par la droite, $2.x+1$ tend vers 0^+. Donc $f(x)$ plonge vers $-\infty$. La droite verticale d'équation $x=-0,5$ est une asymptote à la courbe représentant f.

A.3.a) Comme g est la différence de la fonction $u(x)=\ln(2.x+1)$ qui est dérivable sur I et de la fonction $v(x)=x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors g est seulement dérivable sur I.

Pour tout réel $x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, nous pouvons écrire :

$$g'(x) = u'(x) - v'(x) = \frac{2}{2.x+1} - 1 = \frac{2-(2.x+1)}{2.x+1} = \frac{1-2.x}{2.x+1}$$

Calculons l'image de $\frac{1}{2}$ par g

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1+2\times\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$
$$= \ln(2) - \frac{1}{2}$$

Nous connaissons les signes des deux facteurs affines $-2.x+1$ et $2.x+1$.

Par conséquent, le tableau de variation de g sur l'intervalle I est celui ci-contre ➔

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2.x$		$+$	0	$-$	
$2.x+1$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2)-1/2$	$\searrow$	$-\infty$

Même si elles ne sont pas expressément demandées, déterminons les limites de g aux bornes de son ensemble de définition I.

- $\lim\limits_{x\to-0,5^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-0,5^+} f(x) - x = (-\infty) - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x \times \left[\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x} - 1\right] = (+\infty)\times\left[0 + \frac{\ln(2)}{+\infty} - 1\right] = +\infty$

A.3.b) Comme la fonction g est dérivable sur l'intervalle I, alors elle y est continue.

Ensuite, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) - \frac{1}{2}$ est une quantité strictement positive; En effet, nous avons :

$$4 > e \Rightarrow \underbrace{\ln(4) > \ln(e)}_{\text{Ln est croissante sur }]0;+\infty[} \Rightarrow 2\times\ln(2) > 1 \Rightarrow \ln(2) > \frac{1}{2} \Rightarrow \ln(2) - \frac{1}{2} > 0$$

Enfin :

- Comme g est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et que 0 appartient à l'intervalle $\left]-\infty;\ln(2)-\frac{1}{2}\right] = f\left(\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right)$, alors 0 a un antécédent par f dans $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.
- Comme g est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et que 0 fait partie de $\left]-\infty;\ln(2)-\frac{1}{2}\right] = f\left(\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)$, alors 0 a un antécédent dans $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Au final, l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions.

Comme $g(0) = \ln(2\times0+1) - 0 = \ln(1) - 0 = 0$, alors l'une d'elles est 0.

De plus, $g(1) = \ln(3) - 1$ est négatif, alors que $g(2) = \ln(5) - 2$ est positif. En effet :

- $3 > e \Rightarrow \underbrace{\ln(3) > \ln(e)}_{\text{Ln est croissante sur }]0;+\infty[} \Rightarrow \ln(3) > 1 \Rightarrow \ln(3) - 1 > 0$
- $5 < (2,5)^2 < e^2 \Rightarrow \ln(5) < \ln(e^2) \Rightarrow \ln(5) < 2 \Rightarrow \ln(5) - 2 < 0$

Comme $[1;2] \subset]0,5;+\infty[$, alors la seconde solution α appartient à cet intervalle $[1;2]$.

A.3.c) Compte tenu des questions précédentes, le tableau de signe de $g(x)$ est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

A.4) Comme les images 0 et α par g sont 0, alors nous avons :

$g(0) = f(0) - 0 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ | $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$

Il vient alors :

Si $x \in]0;\alpha[$ alors $0 < x < \alpha \Rightarrow \underbrace{0 = f(0) < f(x) < f(\alpha) = \alpha}_{\text{Car f est strictement croissante sur I}} \Rightarrow f(x) \in]0;\alpha[$

D'où l'implication demandée.

Partie B - Etude de la suite récurrente (u_n)

B.1) Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété $\mathcal{P}_n$: $u_n \in]0;\alpha[$.

- Au premier rang : la propriété $\mathcal{P}_0$ est-elle vraie ?

  Comme $u_0 = 1$ et que α est un réel de l'intervalle $[1;2]$ qui est strictement supérieur à 1 car $g(1) \neq 0 = g(\alpha)$, alors clairement, $u_0 \in]0;\alpha[$.

- Le principe de récurrence : $\mathcal{P}_n$ vraie implique-t-elle $\mathcal{P}_{n+1}$ vraie ?

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie. On a alors :

$$u_n \in]0;\alpha[\quad \text{donc} \quad \underbrace{u_{n+1} = f(u_n) \in]0;\alpha[}_{\text{D'après la question A.4}} \quad \text{donc} \quad \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie}$$

<u>Conclusion :</u> tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $]0;\alpha[$. La suite est donc minorée par 0 et majorée par α.

B.2) Pour connaître la variation de la suite (u_n), intéressons-nous au signe de la différence de deux de ses termes consécutifs. Pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$$

Or, d'après la question précédente, tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $]0;\alpha[$. En application de la question A.3.c, $g(u_n)$ est toujours positif.

<u>Conclusion :</u> Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

B.3) Comme la suite (u_n) est croissante et est majorée par α, alors elle est convergente.

Partie C - Recherche de la limite de la suite (u_n)

C.1) Pour tout réel x de l'intervalle I, nous avons : $f'(x) = \dfrac{2}{2.x+1}$. Par conséquent :

$$\text{Si} \quad x \geq 1 \quad \text{alors} \quad 2.x+1 \geq 3 \quad \text{donc} \quad \underbrace{\frac{1}{2.x+1} \leq \frac{1}{3}}_{\substack{\text{Inverse est} \\ \text{décroissante sur }]0;+\infty[}} \quad \text{d'où} \quad f'(x) = \frac{2}{2.x+1} \leq \frac{2}{3}$$

C.2.a) Pour tout n∈ℕ, nous avons : $u_n < \alpha$. Parler de l'intervalle $[u_n;\alpha]$ a donc un sens.

Comme (u_n) est une suite croissante et que $u_0 = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

Par conséquent, l'intervalle $[u_n;\alpha]$ est inclus dans $[1;+\infty[$ ... où on a l'inégalité $f'(x) \leq \dfrac{2}{3}$.

Intégrons cette dernière sur l'intervalle $[u_n;\alpha]$. Il vient :

$$\underbrace{f'(x) \leq \frac{2}{3}}_{\text{Valable pour tout } x\in[u_n;\alpha]} \quad \text{d'où} \quad \underbrace{\int_{u_n}^{\alpha} f'(x).dx \leq \int_{u_n}^{\alpha} \frac{2}{3}.dx}_{\text{On intègre l'inégalité sur } [u_n;\alpha]} = \left[\frac{2}{3}.x\right]_{u_n}^{\alpha} = \frac{2}{3}\times(u_n - \alpha)$$

C.2.b) Or une primitive de la dérivée f' sur l'intervalle $[u_n;\alpha]$ est...la fonction f. Il vient :

$$\int_{u_n}^{\alpha} f'(x).dx = [f(x)]_{u_n}^{\alpha} = f(\alpha) - f(u_n) = \alpha - u_{n+1}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, nous avons : $\alpha - u_{n+1} \leq \dfrac{2}{3}\times(\alpha - u_n)$.

➲ Nous avons déjà établi que la différence $\alpha - u_n$ était toujours strictement positive.

Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété Q_n : $\alpha - u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

- Au premier rang : la propriété Q_0 est-elle vraie ?

  Comme $u_0 = 1$ et que α fait partie de l'intervalle $[1;2]$, alors la différence

  $\alpha - u_0$ est nécessairement inférieure ou égal à $1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0$. Donc Q_0 est vraie.

- Le principe de récurrence : Q_n vraie implique-t-elle Q_{n+1} vraie ?

  Supposons que la propriété Q_n soit vraie. Il vient alors :

$$\underbrace{\alpha - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}\times(\alpha - u_n) \leq \frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\text{Cet enchainement est possible car les facteurs } \alpha-u_{n+1}\text{ ; }\alpha-u_n \text{ et 2/3 sont tous positifs}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

  Donc Q_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, nous avons : $0 \leq \alpha - u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

C.3) Comme la suite $(\alpha - u_n)$ est coincée entre 0 et la suite $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ qui tend vers 0, alors en application du théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que la suite $(\alpha - u_n)$ tend vers 0. Et par conséquent, la suite (u_n) tend vers α.

On pouvait faire autrement...
Cette question aurait pu être tranchée plus rapidement en disant que la limite ℓ de la suite (u_n) était nécessairement l'une des solutions de l'équation $f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0$.
Cette équation a deux solutions que sont 0 et α. Mais comme (u_n) est croissante et que $u_0 = 1$, alors la seule limite possible pour la suite (u_n) demeure α.