Très cher lecteur (ou lectrice),
Le reste, c'est tout ce qui n'est pas analyse. Ce second recueil de mes méfaits en terminale S durant la saison 2006-2007 contient les exercices donnés en devoir sur les nombres complexes, les probabilités, la géométrie dans l'espace ou ceux donnés en spécialité mathématiques.
Pour cette introduction, j'avais penser faire une nouvelle diatribe contre toutes ces bonnes âmes pédagogistes qui savent comment faire. Et puis finalement, la paresse l'a emportée.
Ce troisième recueil conclut la série de mes mémoires pour cette année. Enfin, je vais pouvoir me reposer.
Bonne lecture et surtout bon courage !

Le sommaire des thèmes généraux abordés :

<u>Avertissement :</u> les propos tenus dans ces Mémoires d'outre première S ne seraient engagés les différentes administrations composant l'Education Nationale. Elles n'ont eu aucune part dans la rédaction et dans la publication de cet infâme ouvrage.
(*) Jérôme ONILLON est un professeur de mathématiques complètement désagrégé qui n'a jamais lu le moindre ouvrage de pédagogie puisque ils n'existent pas en bandes dessinées.

La taverne de l'Irlandais

vous présente

Mémoires d'outre terminale S
Le temps du reste

Une bordée d'exercices de non-analyse plus ou moins conçus par Jérôme ONILLON ou adaptés du bac donnés en devoir lors de la saison 2006-2007*

Vive la paresse et vivent les vacances !

Edition du lundi 25 juin 2007
Ce document est exclusivement distribué par le site la taverne de l'Irlandais
http://www.tanopah.com

Géométrie dans l'espace

Quand l'espace vous laisse sur le cube !

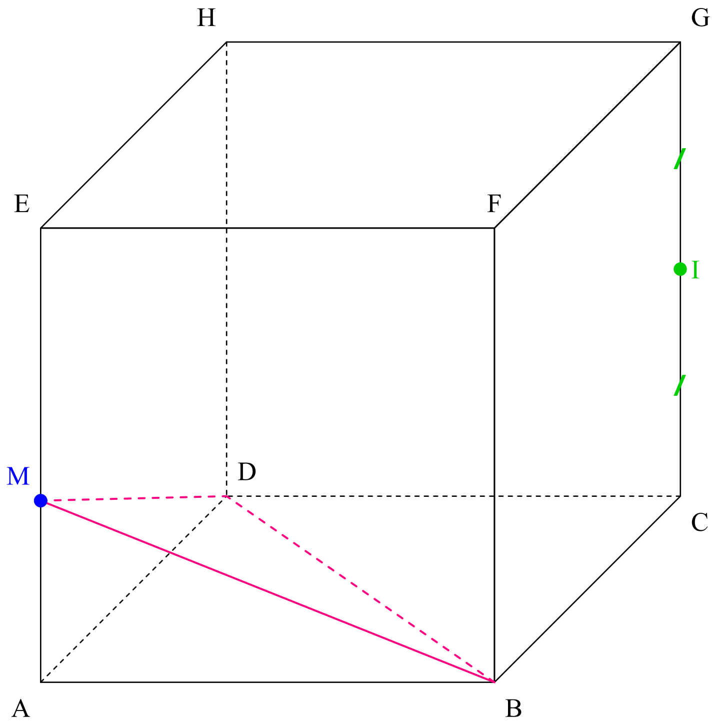
Le contexte

Le présent exercice est une adaptation d'un exercice donné au bac il y a un certain temps.
Il aborde la géométrie dans l'espace sous un angle non analytique : le plus abstrait.
Les techniques auxquelles il fait appel sont du programme de première S.

L'énoncé

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
On appelle I le milieu du segment [CG].
Le nombre a est un réel strictement positif.

On appelle M le point de la demi-droite $[\mathrm{AE})$ défini par $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{a}.\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.



a) Démontrer la proposition suivante (issue du théorème de la médiane) :

$$\text{Pour tout point N de l'espace,}\quad \overrightarrow{\mathrm{NC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NG}}=\mathrm{NI}^2-\frac{1}{4}$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points N de l'espace vérifiant l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{NC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NG}}=2$

On appelle K le barycentre des trois points pondérés $(\mathrm{M};a^2)$; $(\mathrm{B};1)$ et $(\mathrm{D};1)$.

b) Pourquoi le point K existe-t-il ?

Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{BK}}=\frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{\mathrm{BD}}$.

c) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{\mathrm{BK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, puis en déduire que $\overrightarrow{\mathrm{BK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}=0$.

d) Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{DK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$.

e) Que peut-on déduire des deux questions précédentes quant le point K vis-à-vis du triangle BDM ? On justifiera sa réponse.

Le corrigé

a) Pour tout point N de l'espace, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{NC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NG}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{NI}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{NI}}+\overrightarrow{\mathrm{IG}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{NI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NI}}+\overrightarrow{\mathrm{NI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IG}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NI}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IG}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{NI}}^2+\overrightarrow{\mathrm{NI}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{IG}}+\overrightarrow{\mathrm{IC}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IG}}\end{aligned}$$

Comme I est le milieu du segment [CG], alors $\overrightarrow{\mathrm{IC}}=-\overrightarrow{\mathrm{IG}}\iff\overrightarrow{\mathrm{IC}}+\overrightarrow{\mathrm{IG}}=\vec{o}$. Il vient :

$$\overrightarrow{\mathrm{NC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NG}}=\mathrm{NI}^2+\overrightarrow{\mathrm{NI}}\cdot\vec{o}-\overrightarrow{\mathrm{IG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IG}}=\mathrm{NI}^2+0-\mathrm{IG}^2=\mathrm{NI}^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\mathrm{NI}^2-\frac{1}{4}$$

➲ Déterminons la nature et les attributs de l'ensemble $\mathcal{E}$.

$$\mathrm{M}\in\mathrm{E}\iff\overrightarrow{\mathrm{NC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NG}}=2\iff\mathrm{NI}^2-\frac{1}{4}=2\iff\mathrm{NI}^2=\frac{9}{4}\iff\mathrm{IN}=\frac{3}{2}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ est la sphère de centre I et de rayon $\frac{3}{2}$.

b) Comme la somme des coefficients $a^2+1+1=a^2+2\geq 2$ est non nulle, alors le barycentre K des trois points pondérés $\left(M;a^2\right)$; $(B;1)$ et $(D;1)$ existe !

Ce barycentre K vérifie la relation vectorielle :

$$a^2\times\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD}=\vec{o} \Leftrightarrow \underbrace{a^2\times\overrightarrow{KB}+a^2\times\overrightarrow{BM}}_{a^2\times\overrightarrow{KM}}+\overrightarrow{KB}+\underbrace{\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BD}}_{\overrightarrow{KD}}=\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow a^2\times\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}=\left(a^2+2\right).\overrightarrow{BK}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{BM}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BK}$$

D'où l'égalité vectorielle demandée !

c) Calculons les produits scalaires demandés en utilisant le résultat de la question précédente. On commence par $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{BM}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AM}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM}$$

Si nous voulons aller plus loin, deux produits scalaires particuliers sont à établir.

- D'abord : $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=\underbrace{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}}_{\substack{=0\\ \text{car } \overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AM}}}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM}=0+AM^2=\frac{1}{a^2}$
- Ensuite : $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ car le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est normal au plan ABCD dont l'un des vecteurs directeurs est $\overrightarrow{BD}$.

Par conséquent, il vient :

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{a^2}{a^2+2}\times\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2+2}\times 0=\frac{1}{a^2+2}$$

➲ A présent, calculons le produit scalaire $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{BM}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}$$

Là encore, nous allons nous intéresser séparément aux deux produits scalaires particuliers qui apparaissent.

- D'abord : $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ car le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal au plan ABFE dont l'un des vecteurs directeurs est $\overrightarrow{BM}$.
- Ensuite : $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\underbrace{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}}_{\substack{=0\\ \text{car } \overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AD}}}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=0+AD^2=1$.

Ainsi, arrivons-nous à :

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{a^2+2}\times 0+\frac{1}{a^2+2}\times 1=\frac{1}{a^2+2}$$

➲ Maintenant, nous pouvons calculer simplement le dernier produit scalaire $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

$$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BK}\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{a^2+2}=0$$

d) Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB}$, nous allons nous inspirer très largement de ce qui a été fait précédemment car les points B et D tant dans le cube (leurs positions vis-à-vis de A) que pour le barycentre K (ils ont le même coefficient 1), jouent des rôles symétriques. Voyons le détail de la chose !

D'abord, si l'on cherche à exprimer $\overrightarrow{DK}$ en fonction de $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DB}$, alors on trouve :

$$\overrightarrow{DK}=\frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{DM}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{DB}$$

➲ A présent, intéressons-nous au produit scalaire $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AM}$. Nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{DM}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AM}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AM}$$

Nous savons déjà que $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

Reste à obtenir $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}\right)\cdot\overrightarrow{AM}=\underbrace{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AM}}_{\substack{=0\\ \text{car } \overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{AM}}}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM}=0+AM^2=\frac{1}{a^2}$

Par conséquent, il vient :

$$\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{a^2}{a^2+2}\times\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2+2}\times 0=\frac{1}{a^2+2}$$

➲ A présent, calculons le produit scalaire $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AB}$. Comme précédemment, il vient :

$$\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{DM}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{DB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{a^2}{a^2+2}\times\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{a^2+2}\times\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AB}$$

Intéressons-nous à ces deux derniers produits scalaires.

- D'abord : $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan ADHE dont l'un des vecteurs directeurs est $\overrightarrow{DM}$.

Ensuite : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=+\underbrace{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}}_{\substack{=0\\ \text{car } \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}}}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=1$.

Nous en arrivons à :

$$\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{a^2}{a^2+2}\times 0+\frac{1}{a^2+2}\times 1=\frac{1}{a^2+2}$$

➲ Et finalement, nous pouvons calculer un dernier produit scalaire : $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB}&=\overrightarrow{DK}\cdot\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\\&=\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{a^2+2}=0\end{aligned}$$

e) La première chose à dire est que le barycentre K des trois points pondérés M, B et D appartient au plan (MBD). Nous allons évoluer dans ce plan.

Ensuite, comme $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD}=0$, alors les droites (BK) et (MD) sont orthogonales dans le plan (MBD). Donc la droite (BK) est la hauteur du triangle MBD issue du sommet B.

Ensuite, comme $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB}=0$, alors les droites (DK) et (MB) sont orthogonales dans le plan (MBD). Donc la droite (DK) est la hauteur du triangle MBD issue du sommet D.

<u>Conclusion :</u> le point K étant le point de concours de deux des hauteurs du triangle MBD, c'est l'orthocentre de ce triangle.

Les nombres complexes

Les accents circomplexes

Le contexte

Cet exercice ne fait appel qu'aux règles de calcul dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ ainsi qu'à la résolution dans celui-ci des équations du second degré. En somme, il n'aborde que des techniques de base...

L'énoncé

Il en va des fonctions définies sur $\mathbb{C}$ comme de celles définies sur $\mathbb{R}$.
La fonction F est définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$F(z) = (1-\boldsymbol{i}).z + \overline{z} - 4.\boldsymbol{i}$$

a) Calculer l'image de $2+\boldsymbol{i}$ par la fonction F.
Note : *certaines machines étant capable de manipuler les nombres complexes, le détail des calculs est demandé.*

b) Déterminer l'antécédent de $1-\boldsymbol{i}$ par la fonction F.

Le polynôme P est défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = 2.z^3 - 8.z^2 - 2.z + 44$$

c) Calculer l'image du nombre $\boldsymbol{i}$ par P.

d) Démontrer que -2 est une racine du polynôme P.
Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = (z+2) \times \left(a.z^2 + b.z + c\right)$$

Note : *une grande attention sera portée à la rédaction de cette question.*

e) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$2.z^3 - 8.z^2 - 2.z + 44 = 0$$

Le corrigé

Il en va des fonctions complexes comme des réelles : les mêmes méthodes s'appliquent.

a) Calculons l'image de $2+\boldsymbol{i}$ par la fonction F.

$$F(2+\boldsymbol{i}) = \underbrace{(1-\boldsymbol{i}).(2+\boldsymbol{i})} + \overline{(2+\boldsymbol{i})} - 4.\boldsymbol{i} = \underbrace{2+\boldsymbol{i}-2.\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}^2} + 2 - \boldsymbol{i} - 4.\boldsymbol{i}$$

$$= 2 - \boldsymbol{i} - (-1) + 2 - 5.\boldsymbol{i} = 5 - 6.\boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion :</u> l'image de $2+\boldsymbol{i}$ par la fonction F est $5-6.\boldsymbol{i}$.
b) Déterminer les antécédents de $1-\boldsymbol{i}$ par la fonction F, c'est trouver tous les nombres complexes z tels que $F(z) = 1-\boldsymbol{i}$. Résolvons cette équation dans $\mathbb{C}$.

$$F(z) = 1-\boldsymbol{i} \quad \Leftrightarrow \quad (1-\boldsymbol{i}).z + \overline{z} - 4.\boldsymbol{i} = 1-\boldsymbol{i}$$

On appelle x et y les parties réelle et imaginaire du nombre complexe z.
Autrement dit, nous avons : $z = x + \boldsymbol{i}.y$ et par conséquent : $\overline{z} = x - \boldsymbol{i}.y$.
Reprenons la résolution de l'équation :

$$F(z) = 1-\boldsymbol{i} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(1-\boldsymbol{i}).(x+\boldsymbol{i}.y)} + (x - \boldsymbol{i}.y) - 4.\boldsymbol{i} = 1 - \boldsymbol{i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x + \cancel{\boldsymbol{i}.y} - \boldsymbol{i}.x - \boldsymbol{i}^2.y} + x - \cancel{\boldsymbol{i}.y} - 3.\boldsymbol{i} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2.x + y - 1) + \boldsymbol{i}.(-x-3) = 0$$

0 est le seul nombre complexe dont les parties réelle et imaginaire soient nulles. Il vient :

$$F(z) = 1-\boldsymbol{i} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{2.x + y - 1 = 0}_{\substack{\text{Partie réelle nulle} \\ \textit{Equation (1)}}} \quad \underline{\text{et}} \quad \underbrace{-x - 3 = 0}_{\substack{\text{Partie imaginaire nulle} \\ \textit{Equation (2)}}}$$

De l'équation ***(2)***, on obtient : $-x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$
Pour trouver y, on remplace x par sa valeur dans l'équation ***(1)***.

$$2 \times (-3) + y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6 + y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 7$$

<u>Conclusion :</u> $1-\boldsymbol{i}$ a un unique antécédent par la fonction F. Il s'agit de $-3+7.\boldsymbol{i}$.

c) Calculons l'image de $\boldsymbol{i}$ par le polynôme P.

$$P(\boldsymbol{i}) = 2 \times \boldsymbol{i}^3 - 8 \times \boldsymbol{i}^2 - 2 \times \boldsymbol{i} + 44 = -2.\boldsymbol{i} + 8 - 2.\boldsymbol{i} + 44 = 52 - 4.\boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion :</u> l'image de $\boldsymbol{i}$ par le polynôme P est $52 - 4.\boldsymbol{i}$.

Un truc à retenir : les puissances de *i*
Les puissances du nombre $\boldsymbol{i}$ sont cycliques suivant une période 4. Elles prennent successivement pour valeurs 1 ; $\boldsymbol{i}$; -1 et $-\boldsymbol{i}$. Les sept premières puissances de $\boldsymbol{i}$ sont :
$\boldsymbol{i}^0 = 1$ $\quad \boldsymbol{i}^1 = \boldsymbol{i}$ $\quad \boldsymbol{i}^2 = -1$ $\quad \boldsymbol{i}^3 = -\boldsymbol{i}$ $\quad \boldsymbol{i}^4 = 1$ $\quad \boldsymbol{i}^5 = \boldsymbol{i}$ $\quad \boldsymbol{i}^6 = -1$

d) Démontrons que -2 est une racine du polynôme P. Pour ce faire, calculons son image.

$$\begin{aligned} P(-2) &= 2\times(-2)^3 - 8\times(-2)^2 - 2\times(-2) + 44 \\ &= 2\times(-8) - 8\times 4 + 4 + 44 \\ &= -16 - 32 + 4 + 44 = -48 + 48 = 0 \end{aligned}$$

Comme -2 annule le polynôme P, alors -2 est l'une de ses racines.

Donc le polynôme P est factorisable par le facteur $z-(-2) = z+2$.

➲ Nous allons factoriser le polynôme P en extrayant un facteur $z+2$ de chacun de ses termes.

$$P(z) = \underbrace{2.z^3}_{\text{Combien y va-t-il de fois z+2 ?}} - 8.z^2 - 2.z + 44 = \overbrace{2.z^2\times(z+2) - 4.z^2}^{2.z^3} - 8.z^2 - 2.z + 44$$

$$= 2.z^2\times(z+2) \underbrace{-12.z^2}_{\text{Combien de z+2 ?}} - 2.z + 44 = 2.z^2\times(z+2) \overbrace{-12.z\times(z+2) + 24.z}^{-12.z^2} - 2.z + 44$$

$$= 2.z^2\times(z+2) - 12.z\times(z+2) + 22.z + 44$$

$$= 2.z^2\times\underbrace{(z+2)}_{\text{Le...}} - 12.z\times\underbrace{(z+2)}_{\text{...facteur..}} + 22\times\underbrace{(z+2)}_{\text{...commun}} = \underbrace{(z+2)\times(2.z^2 - 12.z + 22)}_{\text{Donc a=2 ; b=−12 et c=22}}$$

Un épilogue à cette question

Et si dans notre élan nous poursuivions la factorisation du polynôme P, il viendrait alors :

$$\begin{aligned} P(z) &= 2\times(z+2)\times(z^2 - 6.z + 11) = 2\times(z+2)\times\left[(z-3)^2 - 9 + 11\right] \\ &= 2\times(z+2)\times\left[(z-3)^2 - (-2)\right] = 2\times(z+2)\times\left[(z-3)^2 - \left(\boldsymbol{i}.\sqrt{2}\right)^2\right] \\ &= 2\times(z+2)\times\left(z - 3 - \boldsymbol{i}.\sqrt{2}\right)\times\left(z - 3 + \boldsymbol{i}.\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

e) Résolvons dans $\mathbb{C}$ dans l'équation $2.z^3 - 8.z^2 - 2.z + 44 = 0$.

Le premier membre ayant été scindé ou factorisé, il vient :

$$2.z^3 - 8.z^2 - 2.z + 44 = 0 \iff \underbrace{(z+2)\times(2.z^2 - 12.z + 22) = 0}_{\text{Un produit est nul si et seulement si...}}$$

$$\iff \underbrace{z+2=0}_{\substack{\text{...l'un de...} \\ \textit{Equation (1)}}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \underbrace{2.z^2 - 12.z + 22 = 0}_{\substack{\text{...ses facteurs l'est.} \\ \textit{Equation (2)}}}$$

La première sous-équation ***(1)*** se résout toute seule :

$$z+2=0 \iff z=-2$$

Pour résoudre l'équation ***(2)*** qui est du second degré, calculons son discriminant.

$$\Delta_{(2)} = (-12)^2 - 4\times 2\times 22 = 144 - 176 = -32 = \left(\boldsymbol{i}.\sqrt{32}\right)^2 = \left(\boldsymbol{i}.\sqrt{16}\times\sqrt{2}\right)^2 = \left(4.\boldsymbol{i}\times\sqrt{2}\right)^2$$

Comme son discriminant est négatif alors cette équation ***(2)*** admet deux solutions complexes non réelles et conjuguées.

$$z_1 = \frac{-(-12) - \boldsymbol{i}.4.\sqrt{2}}{4} = 3 - \boldsymbol{i}.\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(-12) + \boldsymbol{i}.4.\sqrt{2}}{4} = 3 + \boldsymbol{i}.\sqrt{2}$$

Ainsi venons nous d'établir :

$$2.z^3 - 8.z^2 - 2.z + 44 = 0 \iff \underbrace{z=-2}_{\text{Solution de }\textit{(1)}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \underbrace{z = 3 - \boldsymbol{i}.\sqrt{2} \quad \underline{\text{ou}} \quad z = 3 + \boldsymbol{i}.\sqrt{2}}_{\text{Solutions de }\textit{(2)}}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $P(z) = 0$ a trois solutions dans $\mathbb{C}$: -2 ; $3 - \boldsymbol{i}.\sqrt{2}$ et $3 + \boldsymbol{i}.\sqrt{2}$.

Le retour des fonctions...sans complexe

Le contexte

Un second exercice qui fait appel aux techniques de calcul dans $\mathbb{C}$.

L'énoncé

La fonction F est définie sur l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$ par :

$$F(z)=\frac{z+1}{z^2+1}$$

Rappelons que les fonctions complexes se manipulent comme leurs consoeurs réelles.

a) Pourquoi la fonction F est-elle seulement définie sur l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$?

b) Déterminer les images par la fonction F de 1 et $1+2.\boldsymbol{i}$.

c) Déterminer le ou les antécédents de 2 par la fonction F.

d) Déterminer les nombres complexes qui sont invariants par la fonction F, autrement dit les complexes z tels que $F(z)=z$.

Indication : *on pourra résoudre cette dernière équation.*

Le corrigé

a) Quelque soit le complexe z considéré, les numérateur $z+1$ et dénominateur z^2+1 existent. Par contre, le quotient $F(z)$ n'existe et ne peut exister que lorsque et seulement lorsque son dénominateur est non nul. Ainsi :

$$\text{La fraction } F(z) \text{ existe} \Leftrightarrow \text{Son dénominteur } z^2+1\neq 0$$
$$\Leftrightarrow z^2\neq -1 \Leftrightarrow \underbrace{z\neq -\boldsymbol{i} \quad \text{et} \quad z\neq \boldsymbol{i}}_{\text{Les deux complexes qui ont pour carré } -1}$$

<u>Conclusion :</u> tous les complexes peuvent avoir une image par F sauf $-\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{i}$. C'est pour cela que son ensemble de définition de la fonction F est $\mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$.

b) Calculons les images de 1 et $1+2.\boldsymbol{i}$ par la fonction F.

⏩ $F(z)=\dfrac{1+1}{1^2+1}=\dfrac{2}{2}=1$ Donc 1 est sa propre image : il est invariant par F.

⏩ $F(1+2.\boldsymbol{i})=\dfrac{(1+2.\boldsymbol{i})+1}{(1+2.\boldsymbol{i})^2+1}=\dfrac{2+2.\boldsymbol{i}}{1+4.\boldsymbol{i}+(2.\boldsymbol{i})^2+1}=\dfrac{2+2.\boldsymbol{i}}{1+4.\boldsymbol{i}-4+1}=\dfrac{2+2.\boldsymbol{i}}{4.\boldsymbol{i}-2}$

$$=\underbrace{\frac{(2+2.\boldsymbol{i})\times(4.\boldsymbol{i}+2)}{(4.\boldsymbol{i}-2)\times(4.\boldsymbol{i}+2)}=\frac{8.\boldsymbol{i}+4-8+4.\boldsymbol{i}}{(4.\boldsymbol{i})^2-(2)^2}=\frac{-4+12.\boldsymbol{i}}{-16-4}}_{\text{Attention car } 4.\boldsymbol{i}+2 \text{ n'est pas le conjugué de } 4.\boldsymbol{i}-2...}=\frac{-4+12.\boldsymbol{i}}{-20}=\frac{1+3.\boldsymbol{i}}{5}$$

c) Pour déterminer les antécédents de 2 par la fonction F, résolvons dans l'ensemble de définition de F qu'est $\mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$ l'équation $F(z)=2$.

Comme nous travaillons dans $\mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$, alors la quantité z^2+1 est non nulle. Nous allons pouvoir l'utiliser comme facteur...de paix !

$$F(z)=2 \Leftrightarrow \frac{z+1}{z^2+1}=2 \Leftrightarrow \underbrace{\cancel{(z^2+1)}\times\frac{z+1}{\cancel{z^2+1}}=2\times(z^2+1)}_{\substack{\text{Nous avons multiplié par } z^2+1\\ \text{On peut car sur } \mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}\text{, cette}\\ \text{quantité est non nulle}}} \Leftrightarrow 0=2.z^2+z+1$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation du second degré.

$$\Delta_{2.z^2+z+1}=1^2-4\times 2\times 1=1-8=-7=(7.\boldsymbol{i})^2$$

Comme son discriminant est négatif, alors notre équation admet deux solutions complexes non réelles et conjuguées :

$$z=\frac{-1-7.\boldsymbol{i}}{2\times 2}=\frac{-1-7.\boldsymbol{i}}{4} \quad \underline{\text{ou}} \quad z=\frac{-1+7.\boldsymbol{i}}{2\times 2}=\frac{-1+7.\boldsymbol{i}}{4}$$

<u>Conclusion :</u> comme les deux solutions trouvées sont à l'ensemble de définition de F, alors nous concluons que 2 admet deux antécédents par F que sont $\dfrac{-1-7.\boldsymbol{i}}{4}$ et $\dfrac{-1+7.\boldsymbol{i}}{4}$.

c) Pour déterminer les nombres complexes qui sont invariants par F, résolvons dans $\mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$ (l'ensemble de définition de F) l'équation $F(z)=z$.

$$F(z)=z \Leftrightarrow \frac{z+1}{z^2+1}=z \Leftrightarrow \underbrace{\cancel{\left(z^2+1\right)}\times\frac{z+1}{\cancel{z^2+1}}=z\times\left(z^2+1\right)}_{\text{Nous avons multiplié par } z^2+1 \text{ qui est non nul sur } \mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}.} \Leftrightarrow z+1=z^3+z$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{z^3-1=0}_{\text{1 est une solution évidente de cette équation...}} \Leftrightarrow \underbrace{\overbrace{z^3}^{\text{Combien de fois } z-1\text{ ?}}\quad -1=0}_{\text{...donc } z^3-1 \text{ est factorisable par } z-1}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{z^2\times(z-1)+z^2}^{=z^3}-1=0 \Leftrightarrow z^2\times(z-1)+\overbrace{(z-1)\times(z+1)}^{=z^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(z-1)\times\left(z^2+z+1\right)=0}_{\text{Un produit est nul si et...}} \Leftrightarrow \underbrace{\overbrace{z-1=0}^{\textit{Equation (1)}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \overbrace{z^2+z+1=0}^{\textit{Equation (2)}}}_{\text{...seulement si l'un de ses facteurs l'est}}$$

L'équation ***(1)*** a une unique solution. En effet : $z-1=0 \Leftrightarrow z=1$

Pour résoudre l'équation ***(2)*** qui est du second degré, calculons son discriminant :

$$\Delta_{(2)}=1^2-4\times1\times1=1-4=-3=\left(\sqrt{3}.\boldsymbol{i}\right)^2$$

Comme son discriminant est négatif, alors l'équation ***(2)*** admet deux solutions complexes non réelles et conjuguées :

$$z=\frac{-1-\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{2\times1}=\frac{-1-\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{2} \quad \underline{\text{ou}} \quad z=\frac{-1+\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{2\times1}=\frac{-1+\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{2}$$

<u>Conclusion :</u> comme les trois solutions trouvées appartiennent à $\mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$, alors il existe exactement trois nombres complexes invariants par F : 1 ; $\frac{-1-\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{2}$.

Gravité complexe

Le contexte

Un grand classique des exercices de bac sur les nombres complexes. Tout commence par la résolution d'une équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$ avant de s'aventurer sur l'application géométrique des nombres complexes

L'énoncé

On appelle ***(E)*** l'équation du troisième degré à coefficients complexes :

$$z^3-(2+2.\boldsymbol{i}).z^2+(2+4.\boldsymbol{i}).z-4.\boldsymbol{i}=0$$

a) Démontrer que l'imaginaire pur $2.\boldsymbol{i}$ est une solution de l'équation ***(E)***.
Déterminer deux réels b et c tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$z^3-(2+2.\boldsymbol{i}).z^2+(2+4.\boldsymbol{i}).z-4.\boldsymbol{i}=(z-2.\boldsymbol{i})\times\left(z^2+b.z+c\right)$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ***(E)***. On écrira les solutions trouvées d'abord sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On appelle A, B, C et I les points d'affixes respectives :

$$z_A=2.\boldsymbol{i} \qquad z_B=1+\boldsymbol{i} \qquad z_C=1-\boldsymbol{i} \qquad z_I=\frac{9-13.i}{7}$$

b) Sur le graphique fourni en annexe, placer les points A, B, C et I.

c) Montrer que le rapport $\frac{z_I-z_A}{z_C-z_A}$ est un réel que l'on calculera.
Que peut-on en déduire quant au point I ? On justifiera sa réponse.

d) Calculer l'affixe du point J qui est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;-4)$.

On appelle G le point d'intersection des droites (BI) et (CJ) que l'on admettra sécantes.

e) Démontrer que le point G est le barycentre des trois points pondérés $(A;2)$, $(B;-8)$ et $(C;-9)$.
En déduire les coordonnées du point G.

Le corrigé

a) Prouvons que l'imaginaire pur $2.\boldsymbol{i}$ est une solution de l'équation ***(E)***.

$$(2.i)^3-(2+2.i)\times(2.i)^2+(2+4.i)\times(2.i)-4.i=8\times i^3-(2+2.i)\times4\times i^2\cancel{+4.i}-8\cancel{-4.i}$$
$$=-8.i-(2+2.i)\times(-4)-8$$
$$=\cancel{-8.i}\cancel{+8}\cancel{+8.i}\cancel{-8}=0$$

Donc $2.i$ est une solution de ***(E)***. Le polynôme $P(z)=z^3-(2+2.i).z^2+(2+4.i).z-4.i$ est, par conséquent, factorisable par $z-2.i$. Il vient :

La méthode par identification des coefficients marche aussi. Mais elle est sans doute moins rapide...

$$\overset{\text{Combien de fois } z-2.i\,?}{z^3}\qquad-(2+2.i).z^2+(2+4.i).z-4.i=0$$
$$\overbrace{z^2\times(z-2.i)\cancel{+2.i.z^2}}^{\text{Au total } z^3}-2.z^2\cancel{-2.i.z^2}+2.z+4.i.z-4.i=0$$
$$z^2\times(z-2.i)\qquad\overset{\text{Combien de } z-2.i\,?}{-2.z^2}\qquad+2.z+4.i.z-4.i=0$$
$$z^2\times(z-2.i)\overbrace{-2.z\times(z-2.i)\cancel{-4.i.z}}^{\text{Au total } -2.z^2}+2.z\cancel{+4.i.z}-4.i=0$$
$$z^2\times\underbrace{(z-2.i)}_{\text{Un...}}-2.z\times\underbrace{(z-2.i)}_{\text{...facteur...}}+2\times\underbrace{(z-2.i)}_{\text{...commun}}=0$$

Nous venons de casser un polynôme complexe de degré 3. Intéressons-nous au second facteur du second degré...

$$(z-2.i)\times(z^2-2.z+2)=0$$
$$(z-2.i)\times\left[(z-1)^2-1+2\right]=(z-2.i)\times\left[(z-1)^2+1\right]=0$$
$$(z-2.i)\times\left[(z-1)^2-i^2\right]=(z-2.i)\times(z-1-i)\times(z-1+i)=0$$

Or, dans ℂ comme dans ℝ, un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.

$z-2.i=0$ <u>ou</u> $z-1-i=0$ <u>ou</u> $z-1+i=0$

$z=2.i$ <u>ou</u> $z=1+i$ <u>ou</u> $z=1-i$

<u>Conclusion :</u> l'équation ***(E)*** admet trois solutions complexes $1-i$; $1+i$ et $2.i$.

➲ Afin d'écrire ces trois solutions sous forme trigonométrique, calculons leurs modules.

$|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ | $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ | $|2.i|=|2|\times|i|=2\times1=2$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

- $$1-i=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\times\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\underbrace{\sqrt{2}\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\times\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}_{\text{Forme trigonométrique}}=\underbrace{\sqrt{2}\times e^{-i.\frac{\pi}{4}}}_{\text{Forme exponentielle}}$$
- $$1+i=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\underbrace{\sqrt{2}\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\times\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}_{\text{Ecriture trigonométrique}}=\underbrace{\sqrt{2}\times e^{i.\frac{\pi}{4}}}_{\text{Ecriture exponentielle}}$$
- $$2.i=2\times i=\underbrace{2\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{\text{Ecriture trigonométrique}}=\underbrace{2\times e^{i.\frac{\pi}{2}}}_{\text{Forme exponentielle}}$$

c) Calculons et simplifions le quotient proposé.

$$\frac{z_I-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\frac{9-13.i}{7}-2.i}{(1-i)-2.i}=\frac{\frac{9-13.i-14.i}{7}}{1-3.i}=\frac{1}{7}\times\frac{9-27.i}{1-3.i}=\frac{1}{7}\times\frac{9\times\cancel{(1-3.i)}}{\cancel{1-3.i}}=\frac{9}{7}\in\mathbb{R}$$

L'égalité complexe $z_{\overrightarrow{AI}}=\frac{9}{7}.z_{\overrightarrow{AC}}$ nous conduit à l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AI}=\frac{9}{7}.\overrightarrow{AC}$.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors le point I appartient à la droite (AC).

d) Comme J est le barycentre des deux points pondérés $(A;1)$ et $(B;-4)$, alors il vérifie l'égalité vectorielle $\overrightarrow{JA}-4.\overrightarrow{JB}=\vec{o}$. Traduisons cette dernière sous forme complexe.

$$\overrightarrow{JA}-4.\overrightarrow{JB}=\vec{o}\iff z_{\overrightarrow{JA}}-4.z_{\overrightarrow{JB}}=0\iff(z_A-z_J)-4.(z_B-z_J)=0$$
$$\iff(2.i)-z_J-4\times(1+i)+4.z_J=0\iff3.z_J=4+2.i$$

<u>Conclusion :</u> l'affixe du barycentre J est $\frac{4+2.i}{3}$.

e) On appelle H le barycentre des trois points pondérés $(A;2)$, $(B;-8)$ et $(C;-9)$.

Nous allons prouver que H est le point d'intersection des droites (BI) et (CJ).
Pour ce faire, nous pourrions calculer l'affixe du point H, puis prouver que les quotients $\frac{z_H-z_B}{z_I-z_B}$ et $\frac{z_H-z_C}{z_J-z_C}$ sont des quantités réelles à l'instar de ce que nous venons de faire.
Mais nous allons plutôt utiliser les propriétés du barycentre.
Comme le point I appartient à la droite (AC), alors il est un barycentre des points A et C.
Mais pour quels coefficients ? Voyons cela ! Nous savons :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{9}{7}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AI}=9.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 7.\overrightarrow{AI}=9.\overrightarrow{AI}+9.\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow 2.\overrightarrow{IA}-9.\overrightarrow{IC}=\vec{o}$$

Donc I est le barycentre des deux points pondérés $(A;2)$ et $(C;-9)$.

Comme H est le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(C;-9)$ et $(B;-8)$, alors en application de la règle d'associativité, H est aussi le barycentre des deux points pondérés $(I;2+(-9)=-7)$ et $(B;-8)$. Donc le point H appartient à la droite (BI).

De plus, comme J est le barycentre des points $(A;1)$ et $(B;-4)$, alors en application de la règle d'homogénéité, J est aussi le barycentre des points $\underbrace{(A;2) \text{ et } (B;-8)}_{\text{Les coefficients ont été multipliés par 2}}$.

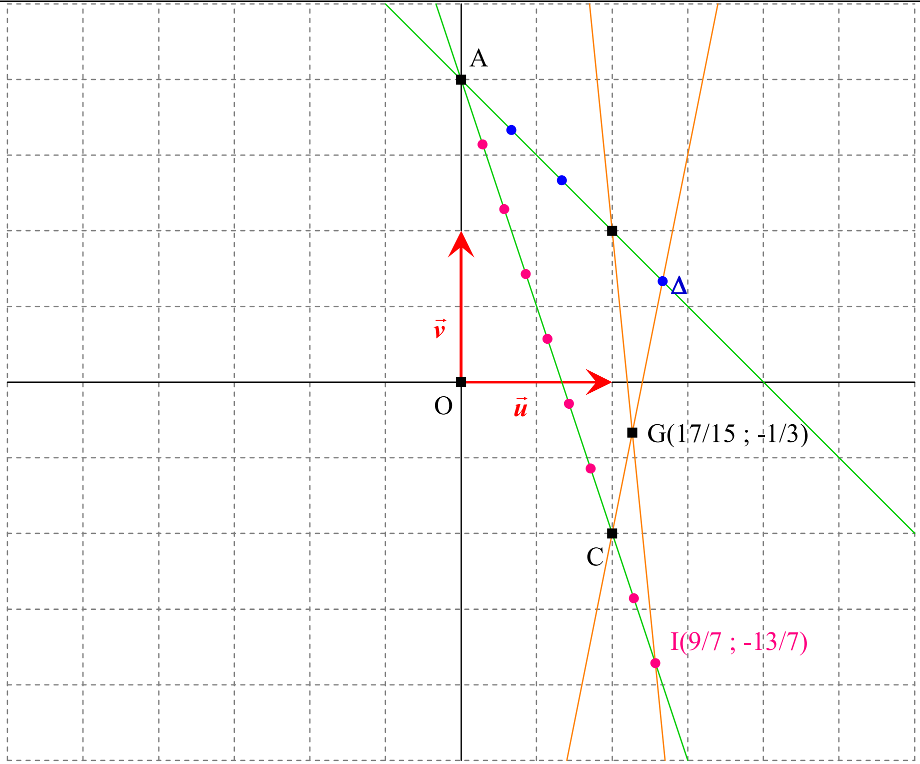
H étant le barycentre des trois points $(A;2)$, $(B;-8)$ et $(C;-9)$, il est donc aussi le barycentre des deux points pondérés $(J;2+(-8)=-6)$ et $(C;-9)$. Donc $H\in(CJ)$.

<u>Conclusion :</u> H est le point d'intersection des droites (BI) et (CJ). Donc H et G sont un seul et même point. Donc G est le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;-8)$ et $(C;-9)$.

➲ Pour calculer l'affixe de G, nous allons utiliser la formule prévue à cet effet.

$$z_G=\frac{2.z_A-8.z_B-9.z_C}{2-8-9}=\frac{2\times(2.\boldsymbol{i})-8\times(1+\boldsymbol{i})-9\times(1-\boldsymbol{i})}{-15}=\frac{-17+5.\boldsymbol{i}}{-15}=\frac{17}{15}-\frac{\boldsymbol{i}}{3}$$

A l'issue de l'exercice, la situation est celle ci-co,tre :



La similitude qui ne voulait pas direson nom

Le contexte

Le présent exercice est une adaptation d'une exercice de bac donné à tous. Sans le dire, il aborde l'étude d'une similitude directe f.

L'énoncé

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1°) Première partie : question de cours

On rappelle que pour tout vecteur non nul $\vec{w}$ d'affixe z, on a :

$$|z| = \|\vec{w}\| \qquad \text{et} \qquad \arg(z) = \left(\vec{u},\vec{w}\right)$$

Soient M, N et P trois points distincts du plan d'affixes respectives m, n et p.

a) En utilisant les rappels, démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)$

b) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

2°) Seconde partie : au début étaient quatre points

On appelle A, B, C et D les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 4+\boldsymbol{i} \qquad z_B = 1+\boldsymbol{i} \qquad z_C = 5.\boldsymbol{i} \qquad z_D = -3-\boldsymbol{i}$$

Sur la figure se trouvant au verso, placer les points A, B, C et D.

3°) Troisième partie : il était une fois l'application *f*

On appelle *f* la transformation du plan qui, à tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \left(1+2.\boldsymbol{i}\right).z-2-4.\boldsymbol{i}$$

a) Déterminer les images des points A et B par la transformation *f*.

b) Démontrer que la transformation *f* admet un unique point invariant Ω dont on donnera l'affixe ω.

4°) Quatrième partie : la construction géométrique d'une image par *f*

a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :

$$z'-z = -2.\boldsymbol{i}\times\left(2-\boldsymbol{i}-z\right)$$

b) En déduire pour tout point M du plan distinct de Ω, la valeur du quotient $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MM'}\right)$.

c) Quelle est la nature du triangle ΩMM' ? On justifiera sa réponse.

d) Soit E le point d'affixe $z_E = -1-\boldsymbol{i}.\sqrt{3}$.

Ecrire z_E sous forme exponentielle, puis placer le point E sur la figure.

Réaliser la construction du point E' qui est associé au point E par la transformation *f*.

5°) Dernière partie : l'image d'un cercle par *f*

a) Démontrer que pour tout point M du plan dont on appelle M' l'image par la transformation *f*, on a:

$$CM' = \sqrt{5}\times AM$$

b) En déduire l'image par la transformation *f* du cercle Γ de centre A passant par B.

Le corrigé

1°) Première partie : question de cours

a) Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ont pour affixes respectives $n-m$ et $p-m$. Il vient :

$$\arg\left(\frac{p-m}{n-m}\right) = \arg(p-m)-\arg(n-m) = \arg\left(z_{\overrightarrow{MP}}\right)-\arg\left(z_{\overrightarrow{MN}}\right)$$

$$= \left(\vec{u},\overrightarrow{MP}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{MN}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{MP}\right)+\left(\overrightarrow{MN},\vec{u}\right) = \underbrace{\left(\overrightarrow{MN},\vec{u}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{MP}\right)}_{\text{Relation de Chasles}} = \left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)$$

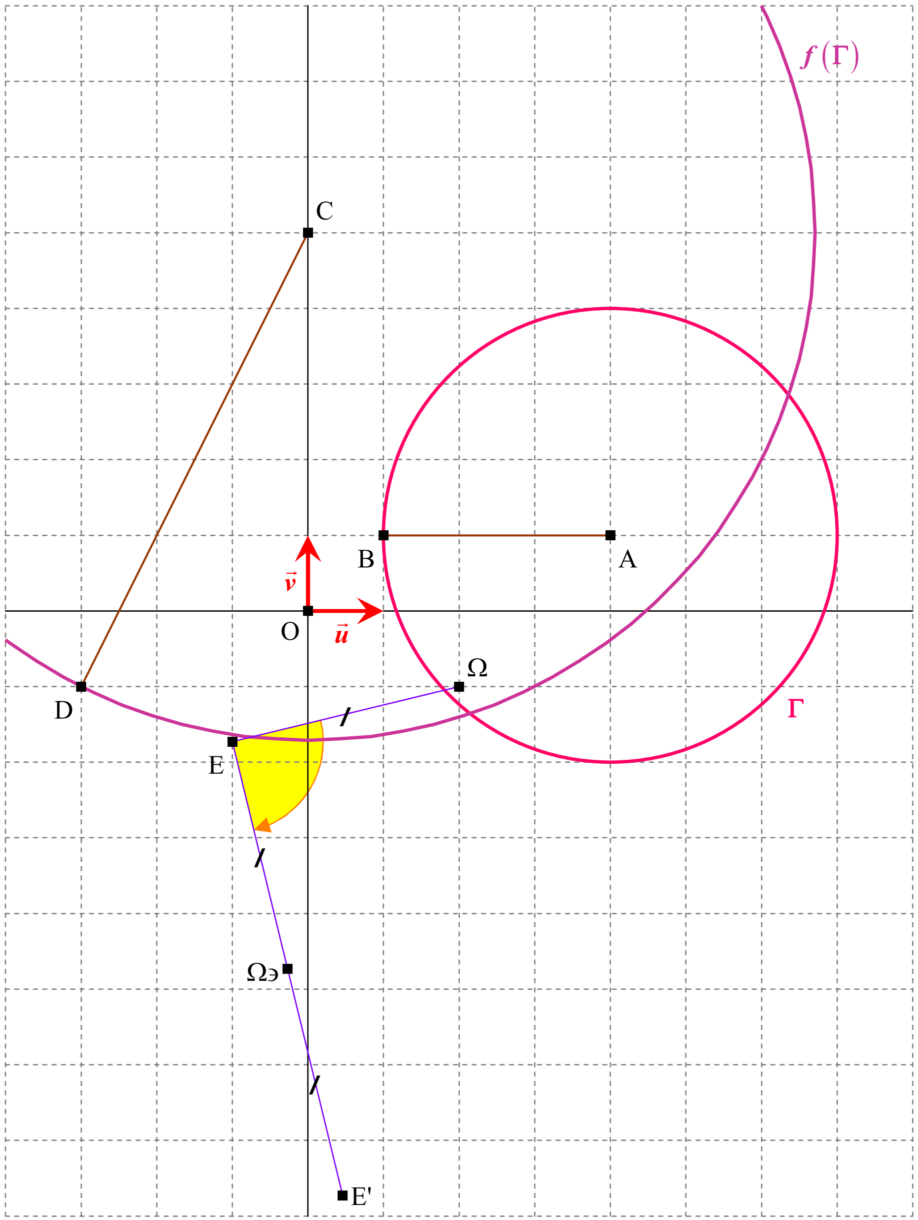
D'où l'égalité demandée.

b) Nous pouvons écrire :

$$\left|\frac{p-m}{n-m}\right| = \frac{|p-m|}{|n-m|} = \frac{\left|z_{\overrightarrow{MP}}\right|}{\left|z_{\overrightarrow{MN}}\right|} = \frac{\left\|\overrightarrow{MP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = \frac{MP}{MN}$$

2°) Seconde partie : au début étaient quatre points

Les points A, B, C et D sont placés sur la figure au verso.



3°) Troisième partie : il était une fois l'application *f*

a) Déterminons les affixes des points A' et B' qui sont les images de A et B par la transformation *f*.

$$z_{A'} = f(z_A) = (1+2.\boldsymbol{i})\times z_A - 2 - 4.\boldsymbol{i} = (1+2.\boldsymbol{i})\times(4+\boldsymbol{i}) - 2 - 4.\boldsymbol{i}$$
$$= 4 + \boldsymbol{i} + 8.\boldsymbol{i} - 2 - 2 - 4.\boldsymbol{i} = 5.\boldsymbol{i} = z_C$$
$$z_{B'} = f(z_B) = (1+2.\boldsymbol{i})\times z_B - 2 - 4.\boldsymbol{i} = (1+2.\boldsymbol{i})\times(1+\boldsymbol{i}) - 2 - 4.\boldsymbol{i}$$
$$= 1 + \boldsymbol{i} + 2.\boldsymbol{i} - 2 - 2 - 4.\boldsymbol{i} = -3 - \boldsymbol{i} = z_D$$

Conclusion : les images des points A et B par la transformation *f* sont respectivement les points C et D.

b) Déterminons les points invariants par la transformation *f*, c'est-à-dire les points M qui sont leur propre image par *f*.

$$M(z) \text{ est invariant par } f \Leftrightarrow f(z) = z \Leftrightarrow (1+2.\boldsymbol{i}).z - 2 - 4.\boldsymbol{i} = z$$
$$\Leftrightarrow 2.\boldsymbol{i}.z = 2 + 4.\boldsymbol{i}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{2+4.\boldsymbol{i}}{2.\boldsymbol{i}} = (1+2.\boldsymbol{i})\times\frac{1}{\boldsymbol{i}} = (1+2.\boldsymbol{i})\times(-\boldsymbol{i}) = 2 - \boldsymbol{i}$$

Conclusion : l'application *f* admet un unique point fixe Ω qui a pour affixe $\omega = 2 - \boldsymbol{i}$.

4°) Dernière partie : la construction géométrique d'une image par *f*

a) Pour tout nombre complexe z, nous pouvons écrire :

$$z' - z = (1+2.\boldsymbol{i}).z - 2 - 4.\boldsymbol{i} - z = 2.\boldsymbol{i}\times z - 2 - 4.\boldsymbol{i}$$

De l'autre côté, il vient :

$$-2.\boldsymbol{i}\times(2 - \boldsymbol{i} - z) = -4.\boldsymbol{i} + 2.\boldsymbol{i}^2 + 2.\boldsymbol{i}\times z = -4.\boldsymbol{i} - 2 + 2.\boldsymbol{i}\times z$$

Conclusion : pour tout nombre complexe z, nous avons : $z' - z = -2.\boldsymbol{i}\times(2 - \boldsymbol{i} - z)$

b) Pour tout point M du plan d'affixe z, nous pouvons écrire :

$$\frac{z_{\overrightarrow{MM'}}}{z_{\overrightarrow{M\Omega}}} = \frac{z' - z}{\omega - z} = \frac{-2.\boldsymbol{i}\times\cancel{(2 - \boldsymbol{i} - z)}}{\cancel{2 - \boldsymbol{i} - z}} = -2.\boldsymbol{i}$$

En nous appuyant sur ce qui a été rappelé lors de la première partie, nous pouvons dire :

- $\dfrac{MM'}{\Omega M} = \dfrac{MM'}{M\Omega} = \left|\dfrac{z' - z}{\omega - z}\right| = |-2.\boldsymbol{i}| = |-2|\times|\boldsymbol{i}| = 2\times 1 = 2$
- $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right) = \arg\left(\dfrac{z' - z}{\omega - z}\right) = \arg(-2.\boldsymbol{i}) = -\dfrac{\pi}{2}$ modulo $2.\pi$

c) Le triangle ΩMM' est rectangle en M et le côté MM' mesure le double du côté ΩM.

d) Commençons par calculer le module du complexe $z_E = -1 - \boldsymbol{i}.\sqrt{3}$.

$$|z_E| = \left|-1-\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Il vient alors :

$$z_E = \underbrace{-1-\boldsymbol{i}.\sqrt{3}}_{\text{Forme algébrique}} = 2\times\left[\frac{-1}{2}+\boldsymbol{i}\times\frac{-\sqrt{3}}{2}\right] = \underbrace{2\times\left[\cos\left(-\frac{2.\pi}{3}\right)+\boldsymbol{i}.\sin\left(-\frac{2.\pi}{3}\right)\right]}_{\text{Forme trigonométrique}} = \underbrace{2\times e^{-\frac{2\pi}{3}.\boldsymbol{i}}}_{\text{Ecriture exponentielle}}$$

<u>Conclusion :</u> le point E se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 2. L'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{OE}\right)$ mesure $-\frac{2.\pi}{3}$ radians.

➲ Pour construire le point E', on procède de la manière suivante :

- On construit l'image Ω' du point Ω par la rotation de centre E et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

  L'angle $\left(\overrightarrow{E\Omega},\overrightarrow{E\Omega'}\right)$ mesure $-\frac{\pi}{2}$ radians et $E\Omega = E\Omega'$.

- Le point E' est alors le symétrique du point E par rapport à Ω'.
  On a alors : $EE' = 2\times E\Omega = 2\times E\Omega'$

5°) Dernière partie : l'image d'un cercle par *f*

a) Pour tout point M d'affixe z, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} CM' &= |z'-z_C| = \left|\left[(1+2.\boldsymbol{i}).z-2-4.\boldsymbol{i}\right]-\left[(1+2.\boldsymbol{i}).z_A-2-4.\boldsymbol{i}\right]\right| \\ &= \left|(1+2.\boldsymbol{i}).z\cancel{-2}\cancel{-4.\boldsymbol{i}}-(1+2.\boldsymbol{i}).z_A\cancel{+2}\cancel{+4.\boldsymbol{i}}\right| \\ &= \left|(1+2.\boldsymbol{i}).z-(1+2.\boldsymbol{i}).z_A\right| = \left|(1+2.\boldsymbol{i})\times(z-z_A)\right| = |1+2.\boldsymbol{i}|\times|z-z_A| \end{aligned}$$

Calculons le module du nombre complexe $1+2.\boldsymbol{i}$.

$$|1+2.\boldsymbol{i}| = \sqrt{(1)^2+(2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout point M du plan, nous avons : $CM' = \sqrt{5}\times|z-z_A| = \sqrt{5}\times AM$.

b) Comme l'image du point B par la transformation *f* est le point D, alors en application de la question précédente, nous avons :

$$CD = \sqrt{5}\times AB$$

Le cercle Γ est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = AB$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \text{M appartient au cercle } \Gamma \; &\Leftrightarrow \; AM = AB \\ &\Leftrightarrow \; \sqrt{5}\times AM = \sqrt{5}\times AB \;\Leftrightarrow\; CM' = CD \\ &\Leftrightarrow \; \text{M' appartient au cercle de centre C passant par D} \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> l'image du cercle Γ est par la transformation *f* est le cercle de centre B passant par D.

Les complexes de septembre

Le contexte

Cet exercice est une adaptation d'un exercice donné au bac il y a un certain temps. Via une fonction complexe, il traite de la caractérisation complexe de certains ensembles.

L'énoncé

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = \boldsymbol{i}$ et $z_B = -\boldsymbol{i}$.

La fonction complexe f est définie sur l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{\boldsymbol{i}\}$ par :

$$f(z) = \frac{1-\boldsymbol{i}.z}{z-\boldsymbol{i}}$$

a) Pourquoi la fonction f est-elle seulement définie sur l'ensemble $\mathbb{C}\backslash\{\boldsymbol{i}\}$.

Vérifier que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}\backslash\{\boldsymbol{i}\}$, on a :

$$f(z) = -\boldsymbol{i} + \frac{2}{z-\boldsymbol{i}}$$

b) Prouver que $-\boldsymbol{i}$ n'a pas d'antécédent par la fonction f.
Déterminer les antécédents de 0 et de $\boldsymbol{i}$ par la fonction f.

A tout point M du plan différent de A et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = f(z)$$

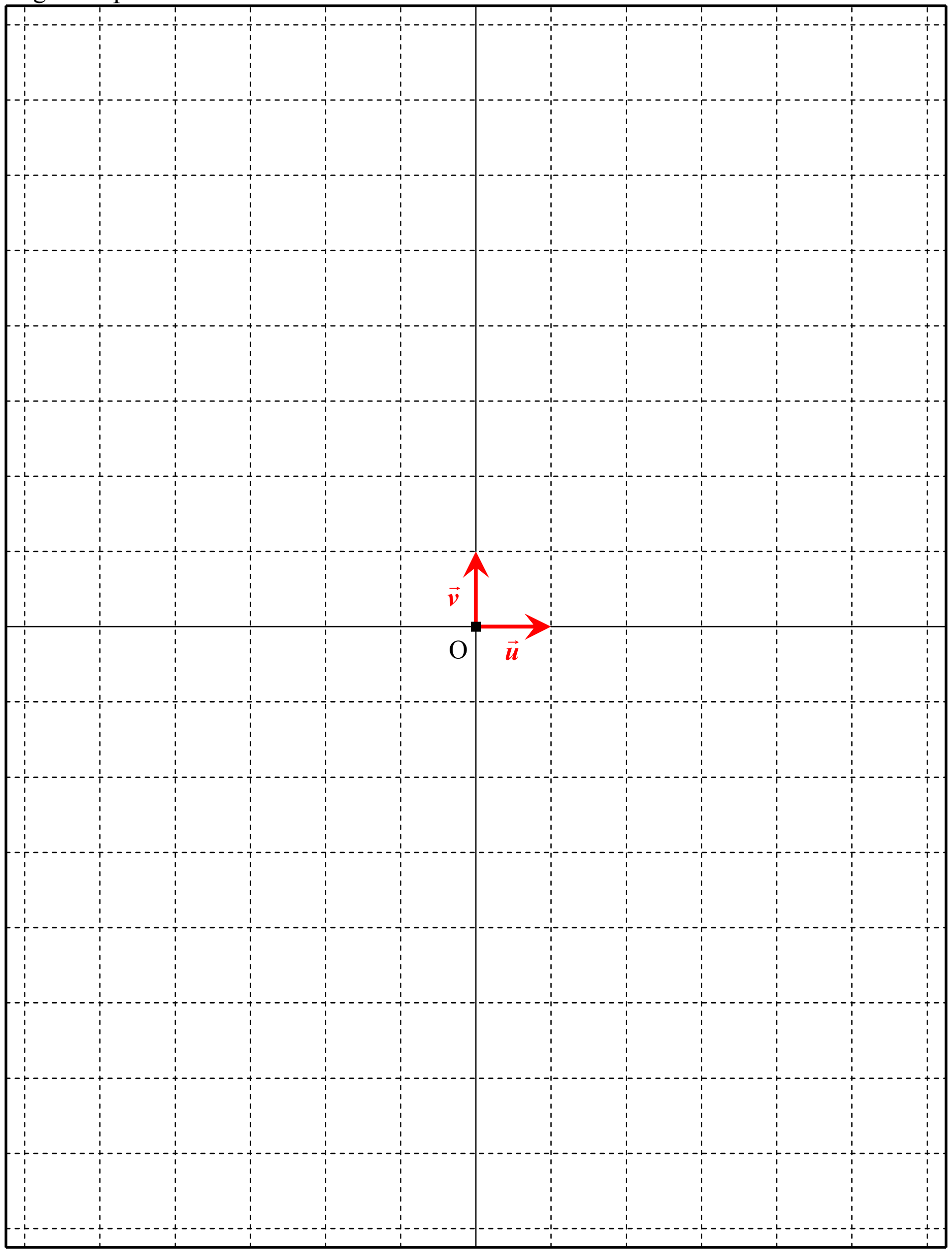
c) Démontrer que pour tout point M du plan distinct de A, on a l'égalité :

$$AM \times BM' = 2$$

Démontrer que lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 4, M' se déplace sur un cercle $\mathcal{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan d'affixe z tels que $z-\boldsymbol{i}$ soit un nombre réel non nul.
Démontrer que lorsque M décrit l'ensemble $\mathcal{E}$, M' se déplace sur une droite Δ que l'on précisera.
Lorsque M décrit $\mathcal{E}$, M' décrit-il toute la droite Δ ? On justifiera sa réponse.

e) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan d'affixe z tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur non nul.



Le corrigé

a) La fonction $f(z)=\dfrac{1-\boldsymbol{i}.z}{z-\boldsymbol{i}}$ est le quotient de deux quantités définies sur $\mathbb{C}$. Pour que ce quotient existe, il faut et il suffit que le dénominateur $z-\boldsymbol{i}$ soit non nul, donc que $z\neq \boldsymbol{i}$.

➲ Pour tout nombre complexe $z\neq\boldsymbol{i}$, nous pouvons écrire :

$$f(z)=\frac{-\boldsymbol{i}.z+1}{z-\boldsymbol{i}}=\frac{\overbrace{-\boldsymbol{i}.(z-\boldsymbol{i})+1}^{-\boldsymbol{i}.z}+1}{z-\boldsymbol{i}}=\frac{-\boldsymbol{i}.\cancel{(z-\boldsymbol{i})}}{\cancel{z-\boldsymbol{i}}}+\frac{2}{z-\boldsymbol{i}}=-\boldsymbol{i}+\frac{2}{z-\boldsymbol{i}}$$

***Note :** on pouvait aussi partir du second membre pour aboutir à f(z), ce qui était sans doute plus simple.*

b) Déterminons les antécédents de $-\boldsymbol{i}$ par la fonction f. Pour ce faire, nous allons résoudre dans $\mathbb{C}\backslash\{\boldsymbol{i}\}$ l'équation $f(z)=-\boldsymbol{i}$.

$$f(z)=-\boldsymbol{i}\iff \cancel{-\boldsymbol{i}}+\frac{2}{z-\boldsymbol{i}}=\cancel{-\boldsymbol{i}}\iff\frac{2}{z-\boldsymbol{i}}=0\iff\underbrace{\cancel{(z-\boldsymbol{i})}\times\frac{2}{\cancel{z-\boldsymbol{i}}}=0\times(z-\boldsymbol{i})=0}_{\text{Comme on travaille dans }\mathbb{C}\backslash\{\boldsymbol{i}\}\text{, on peut multiplier par le facteur } z-\boldsymbol{i}\text{ qui est non nul.}}$$

<u>Conclusion :</u> comme 2 n'est pas égal à 0, alors l'équation $f(z)=-\boldsymbol{i}$ n'a pas de solution.
Par conséquent, $-\boldsymbol{i}$ n'a pas d'antécédent par la fonction f.

➲ Pour déterminer les antécédents de 0 par f, résolvons dans $\mathbb{C}\backslash\{\boldsymbol{i}\}$ l'équation $f(z)=0$.

$$f(z)=0\iff\underbrace{\frac{1-\boldsymbol{i}.z}{\cancel{z-\boldsymbol{i}}}\times\cancel{(z-\boldsymbol{i})}=0\times(z-\boldsymbol{i})}_{\text{L'on résout dans }\mathbb{C}\backslash\{\boldsymbol{i}\}\text{ où le facteur } z-\boldsymbol{i}\text{ est toujours non nul...}}\iff 1-\boldsymbol{i}.z=0\iff z=\frac{-1}{-\boldsymbol{i}}=\frac{1}{\boldsymbol{i}}=-\boldsymbol{i}$$

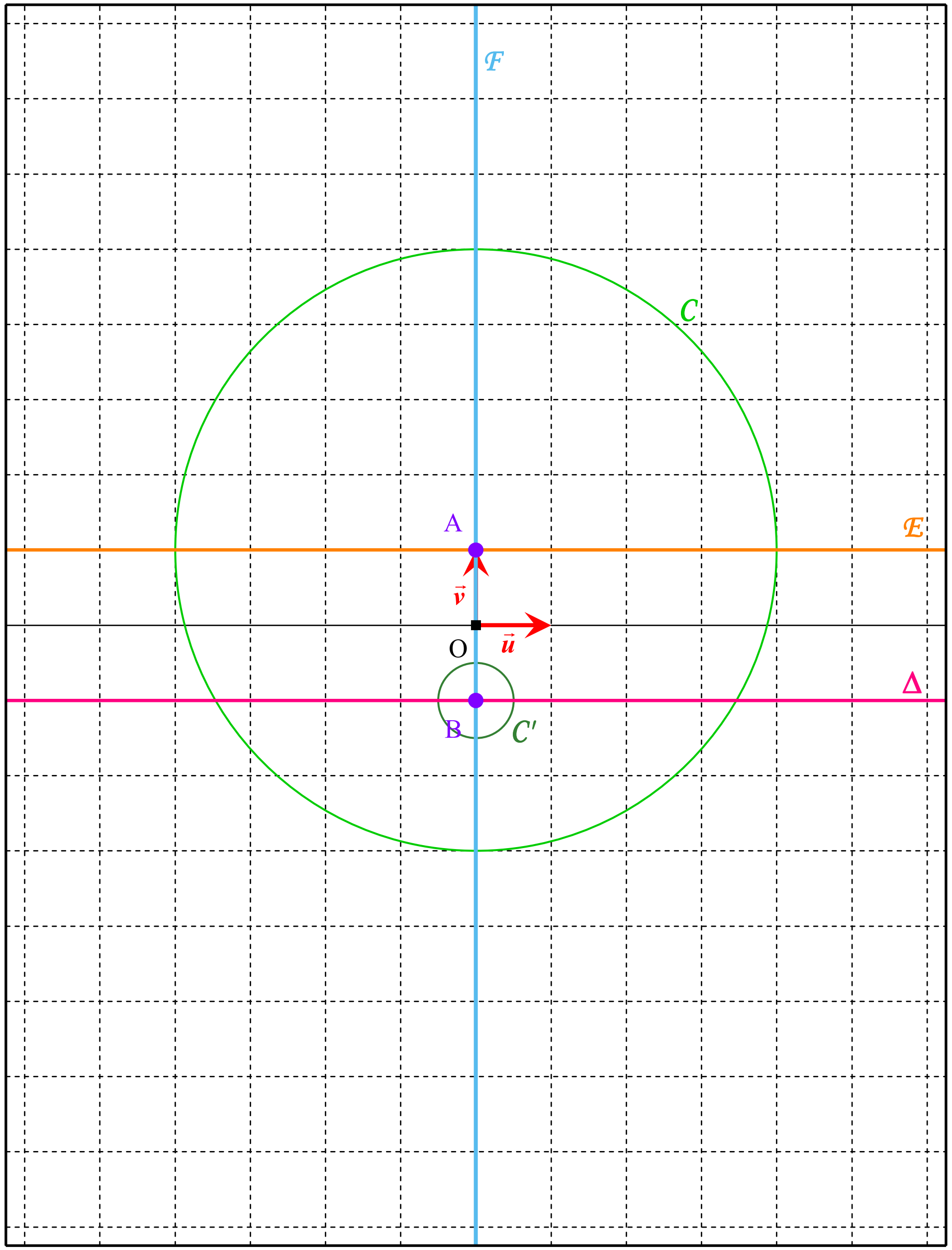
<u>Conclusion :</u> 0 a un seul antécédent par la fonction f : il s'agit de $-\boldsymbol{i}$.

➲ Enfin, pour connaître les antécédents de $\boldsymbol{i}$ par f, résolvons dans $\mathbb{C}\backslash\{\boldsymbol{i}\}$ l'équation :

$$f(z)=\boldsymbol{i}\iff\underbrace{\frac{1-\boldsymbol{i}.z}{\cancel{z-\boldsymbol{i}}}\times\cancel{(z-\boldsymbol{i})}=\boldsymbol{i}\times(z-\boldsymbol{i})}_{\text{L'on résout dans }\mathbb{C}\backslash\{\boldsymbol{i}\}\text{ où le facteur } z-\boldsymbol{i}\text{ est non nul...}}\iff 1-\boldsymbol{i}.z=\boldsymbol{i}.z+1\iff z=\frac{0}{-2.\boldsymbol{i}}=0$$

<u>Conclusion :</u> $\boldsymbol{i}$ a un unique antécédent par la fonction f qui est 0.

La figure à l'issue de l'exercice est la suivante :



c) Pour tout nombre complexe z distinct de $\boldsymbol{i}$, nous pouvons écrire :

$$z' = f(z) = -\boldsymbol{i} + \frac{2}{z-\boldsymbol{i}} \quad \Leftrightarrow \quad z' + \boldsymbol{i} = \frac{2}{z-\boldsymbol{i}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(z'+\boldsymbol{i}) \times (z-\boldsymbol{i}) = 2}_{\text{Sur } \mathbb{C}\setminus\{\boldsymbol{i}\}\text{, le facteur } z-\boldsymbol{i} \text{ est non nul. Donc on peut multiplier par...}}$$

Or l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM'}$ est $z_{\overrightarrow{BM'}} = z_{M'} - z_B = z' - (-\boldsymbol{i}) = z' + \boldsymbol{i}$.

De même, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$ est $z_{\overrightarrow{AM}} = z_M - z_A = z - \boldsymbol{i}$.

Leurs normes respectives sont donc données par $\left|z_{\overrightarrow{BM'}}\right| = |z' + \boldsymbol{i}|$ et $\left|z_{\overrightarrow{AM}}\right| = |z - \boldsymbol{i}|$. D'où :

$$AM \times BM' = |z-\boldsymbol{i}| \times |z'+\boldsymbol{i}| = |(z-\boldsymbol{i}) \times (z'+\boldsymbol{i})| = |2| = 2$$

➲ Lorsque le point M appartient au cercle de centre A et de rayon 4, on a alors $AM = 4$.

$$AM \times BM' = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \times BM' = 2 \quad \Leftrightarrow \quad BM' = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Donc le point M' appartient au cercle de centre B et de rayon 0,5.

d) Voyons ce qu'est ce perturbant ensemble $\mathcal{E}$.

$M(z) \in \mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad$ Il existe un réel non nul k tel que $z - \boldsymbol{i} = k$ soit $z = \boldsymbol{i} + k$

Autrement dit, $\mathcal{E}$ est la droite horizontale d'équation $y = 1$ privée du point A car il est précisé que le réel k est non nul.

➲ Lorsque le point M décrit l'ensemble $\mathcal{E}$, son affixe z est alors de la forme $z = \boldsymbol{i} + k$ où k est un réel. Ce qui s'écrit encore $z - \boldsymbol{i} = k$. Il vient alors :

$$z' = f(z) = -\boldsymbol{i} + \frac{2}{z-\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{i} + \frac{2}{k}$$

Donc le point M' d'affixe z' se trouve sur la droite horizontale Δ d'équation $y = -1$.

➲ Le point B appartient clairement à la droite Δ. Or la question 2.b nous a appris que son affixe $-\boldsymbol{i}$ n'avait pas d'antécédent par la fonction f.
Par conséquent, lorsque le point M décrit l'ensemble $\mathcal{E}$, le point M' ne parcourt pas toute la droite Δ.
Pour être complet, regardons où sont les antécédents M par f d'un point M' de la droite Δ qui est distinct de B.
L'affixe z' du point M' est de la forme $z' = -\boldsymbol{i} + \lambda$ où λ est un réel non nul. Il vient alors :

$$z' = f(z) = -\boldsymbol{i} + \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{z-\boldsymbol{i}} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad z - \boldsymbol{i} = \underbrace{\frac{2}{\lambda}}_{\text{Réel non nul}} \quad \Rightarrow \quad \text{M appartient à l'ensemble } \mathcal{E}$$

<u>Conclusion :</u> l'image de l'ensemble $\mathcal{E}$ par la fonction f est la droite Δ privée du point B.

e) Déterminons cet ensemble $\mathcal{F}$.

$M(z) \in \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad$ Il existe un réel non nul k tel que $f(z) = \boldsymbol{i}.k$

$\Leftrightarrow \quad$ Il existe un réel non nul k tel que $-\boldsymbol{i} + \dfrac{2}{z-\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{i}.k$

$\Leftrightarrow \quad$ Il existe un réel non nul k tel que $\dfrac{2}{z-\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{i}.(k+1)$

Là, deux cas doivent être envisagés suivant la nullité de la somme $k+1$:

- Si $k = -1$, alors nous savons depuis la question 2.b que $-\boldsymbol{i}$ n'a pas d'antécédent par f. Donc il n'existe pas de point M de $\mathcal{F}$ qui est associé au réel $k = -1$.
- Si $k \neq -1$ alors le nombre complexe non nul $\boldsymbol{i}.(k+1)$ peut être inversé. Il vient alors :

$$\frac{2}{z-\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{i}.(k+1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z-\boldsymbol{i}}{2} = \frac{1}{\boldsymbol{i}.(k+1)} \quad \Leftrightarrow \quad z = \boldsymbol{i} - \frac{2.\boldsymbol{i}}{k+1} = \boldsymbol{i}.\left(1 - \frac{2}{k+1}\right)$$

Il est déjà clair que le point M appartient à l'axe $(O;\vec{v})$. Mais où ça exactement ?
Le réel k qui est différent de 0 et -1 fait partie de l'un des trois intervalles suivants : $]-\infty;-1[$; $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$.

Où se trouve le point M lorsque le réel k est dans l'intervalle $]-\infty;-1[$?

$$k \in]-\infty;-1[\quad \Leftrightarrow \quad k+1 \in]-\infty;0[\quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} \in]-\infty;0[\quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2}{k+1} \in]0;+\infty[$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{k+1} \in]1;+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad M \in (O;\vec{v}) \setminus [AB)$$

Où se trouve le point M lorsque le réel k est dans l'intervalle $]-1;0[$?

$$k \in]-1;0[\quad \Leftrightarrow \quad k+1 \in]0;1[\quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} \in]1;+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2}{k+1} \in]-\infty;-2[$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{k+1} \in]-\infty;-1[\quad \Leftrightarrow \quad M \in (O;\vec{v}) \setminus [BA)$$

Où se trouve le point M lorsque le réel k est dans l'intervalle $]0;+\infty[$?

$$k \in]0;+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad k+1 \in]1;+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} \in]0;1[\quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2}{k+1} \in]-2;0[$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{k+1} \in]-1;1[\quad \Leftrightarrow \quad M \in]AB[$$

Sous-<u>conclusion :</u> dire que le réel k est différent de 0 et 1 équivaut donc à dire que le point M se trouve sur l'axe $(O;\vec{v})$ privé de A et B

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{F}$ est l'axe $(O;\vec{v})$ privé des points A et B.

La revanche de tous vos complexes

Le contexte

Cet exercice est un "classique dur" de ce qui se fait au bac. D'abord, on résout une équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$, ici à coefficients complexes, puis on s'amuse à démontrer avec les nombres complexes certaines propriétés géométriques. Notons qu'en utilisant la géométrie analytique, cela va parfois plus vite.

L'énoncé

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - La terrible équation...enfin, nous on l'aime bien !

On appelle ***(E)*** l'équation :

$$(E) \quad : \quad z^3-(4+i)\times z^2+(7+i)\times z-4=0$$

où z désigne un nombre complexe.

1.a) Montrer que ***(E)*** admet une solution réelle, notée z_1.

1.b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3-(4+i)\times z^2+(7+i)\times z-4=(z-z_1)\times(z-2-2.i)\times(a.z+b)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ***(E)***.

Partie B - Des points sympas

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1 ; $2+2.i$ et $1-i$.

1) Représenter les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure?

2) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2.i}{1-i}$. En déduire la nature du triangle OBC.

3) Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? On justifiera sa réponse.

4) Soit D l'image de O par la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et de centre C. Déterminer l'affixe du point D.

5) Quelle est la nature du quadrilatère OCDB ?

Le corrigé

Partie A - La terrible équation...enfin, nous on l'aime bien !

A.1.a) Supposons que le réel α soit solution de l'équation ***(E)***. On a alors :

$$\alpha^3-(4+i)\times\alpha^2+(7+i)\times\alpha-4=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\alpha^3-4.\alpha^2+7.\alpha-4\right)}_{\text{Partie réelle}}+i\times\underbrace{\left(-\alpha^2+\alpha\right)}_{\text{Partie imaginaire}}=0$$

Si le réel α est solution de l'équation ***(E)***, alors il est aussi solution de l'équation :

$$\underbrace{-\alpha^2+\alpha}_{\text{Partie imaginaire}}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\alpha\times(1-\alpha)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{\alpha=0 \ \underline{\text{ou}} \ \alpha=1}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

Les seules solutions réelles possibles de l'équation ***(E)*** sont donc 0 et 1. Mais le sont-elles ? Justement testons-les !

- $0^3-(4+i)\times0^2+(7+i)\times0-4=-4\neq0$. Donc 0 n'est pas solution de ***(E)***.
- $1^3-(4+i)\times1^2+(7+i)\times1-4=1-4-i+7+i-4=0$. D'où 1 est solution de ***(E)***.

<u>Conclusion :</u> l'équation ***(E)*** admet une unique solution réelle qui est 1.

A.1.b) Comme 1 est une des racines du polynôme $P(z)=z^3-(4+i)\times z^2+(7+i)\times z-4$, alors ce dernier est factorisable $z-1$. Procédons à cette factorisation !

$$\begin{aligned}P(z)&=\overbrace{z^2\times(z-1)+z^2}^{\text{Remplace } z^3}-(4+i)\times z^2+(7+i)\times z-4\\&=z^2\times(z-1)-(3+i).z^2+(7+i)\times z-4\\&=z^2\times(z-1)\overbrace{-(3+i).z\times(z-1)-(3+i).z}^{\text{Remplace } -(3+i).z^2}+(7+i)\times z-4\\&=(z-1)\times\left[z^2-(3+i).z\right]+4.z-4=(z-1)\times\left[z^2-(3+i).z+4\right]\end{aligned}$$

A présent, essayons de factoriser le trinôme $z^2-(3+i).z+4$ par $z-(2+2.i)$.

Il vient :

$$z^2-(3+i).z+4=\overbrace{\left(z-(2+2.i)\right)\times z+(2+2.i).z}^{\text{Remplace } z^2}-(3+i).z+4$$
$$=\left(z-(2+2.i)\right)\times z+(i-1).z+4$$
$$=\left(z-(2+2.i)\right)\times z+\overbrace{\left(z-(2+2.i)\right)\times(i-1)+(2+2.i).(i-1)}^{\text{Remplace } (i-1).z}+4$$
$$=\left(z-(2+2.i)\right)\times z+\left(z-(2+2.i)\right)\times(i-1)+2.i-2-2-2.i+4$$
$$=\underbrace{\left(z-(2+2.i)\right)}_{\text{Facteur...}}\times z+\underbrace{\left(z-(2+2.i)\right)}_{\text{...commun}}\times(i-1)=\left(z-(2+2.i)\right)\times\left(z+(i-1)\right)$$

<u>Conclusion :</u> $P(z)=\underbrace{z^3-(4+i)\times z^2+(7+i)\times z-4}_{\text{Forme développée}}=\underbrace{(z-1)\times\left(z-(2+2.i)\right)\times\left(z-(1-i)\right)}_{\text{Forme factorisée}}$

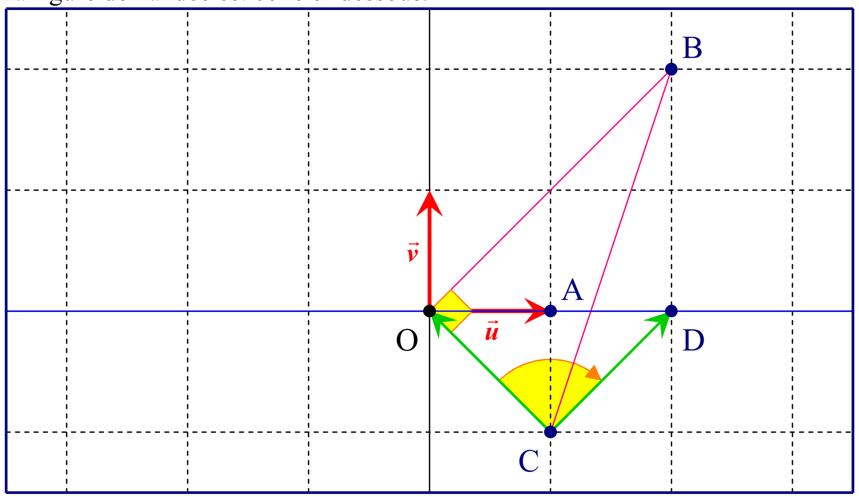
A.2) Son premier membre ayant été entièrement cassé, la résolution de ***(E)*** est évidente !

$$\underbrace{P(z)=0}_{\text{Un produit est nul...}}\Leftrightarrow\underbrace{z-1=0\ \underline{\text{ou}}\ z-(2+2.i)=0\ \underline{\text{ou}}\ z-(1-i)=0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}}$$
$$\Leftrightarrow\ z=1\ \underline{\text{ou}}\ z=2+2.i\ \underline{\text{ou}}\ z=1-i$$

<u>Conclusion :</u> l'équation ***(E)*** admet trois solutions : 1 ; $2+2.i$ et $1-i$.

Partie B - Des points sympas

B.1) La figure demandée est celle ci-dessous.



B.2) Ecrivons le quotient proposé sous forme algébrique :

$$\frac{2+2.i}{1-i}=\frac{(2+2.i)\times(1+i)}{(1-i)\times(1+i)}=\frac{2+2.i-2+2.i}{|1+i|^2}=\frac{4.i}{1^2+1^2}=\frac{4.i}{2}=2.i$$

Ce résultat a deux conséquences géométriques :

- $\dfrac{OB}{OC}=\left|\dfrac{z_B-z_O}{z_B-z_O}\right|=\left|\dfrac{2+2.i}{1-i}\right|=|2.i|=|2|\times|i|=2\times1=2$.
- $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(\dfrac{z_B-z_O}{z_B-z_O}\right)=\arg\left(\dfrac{2+2.i}{1-i}\right)=\arg(2.i)=\dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π

<u>Conclusion :</u> le triangle OCB est rectangle en O. Le côté [OB] mesure le double de [OC].

B.3) La droite (OA) qui est aussi l'axe $(O;\vec{u})$ semble être la bissectrice de l'angle $\widehat{COB}$.

D'abord, on a : $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)=\arg\left(\dfrac{z_A-z_O}{z_C-z_O}\right)=\arg\left(\dfrac{1}{1-i}\right)=\arg(1)-\arg(1-i)=-\arg(1-i)$

Calculons le module du complexe $1-i$: $|1-i|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

Il vient alors : $\dfrac{1-i}{|1-i|}=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i.\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i.\dfrac{-\sqrt{2}}{2}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\times\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Par conséquent : $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)=-\arg(1-i)=-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ modulo $2\pi=\dfrac{1}{2}\times\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)$

<u>Conclusion :</u> la droite (OA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{COB}$.

B.4) Comme D est l'image du point O par la rotation de centre C et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, alors :

$$z_D-z_C=e^{-i.\frac{\pi}{2}}\times(z_O-z_C)\ \Leftrightarrow\ z_D=(-i)\times(i-1)+(1-i)=1+i+1-i=2$$

<u>Conclusion :</u> l'affixe du point D est 2.

B.5) Calculons les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$z_{\overrightarrow{OB}}=z_B-z_O=2+2.i$ | $z_{\overrightarrow{CD}}=z_D-z_C=2-(1-i)=1+i$

<u>Conclusion :</u> comme $z_{\overrightarrow{OB}}=2\times z_{\overrightarrow{CD}}$, alors le quadrilatère OCDB est seulement un trapèze qui possède un angle droit en O.

Probabilités

La probabilité d'avoir raison

Le contexte

Cet exercice est un petit questionnaire à choix multiples de trois questions extrait d'un exercice de bac. Chaque question est une application plus ou moins directe du cours. On y parle de combinaison ("p parmi n"), de probabilité conditionnelle et de variable aléatoire.

L'énoncé

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte. On entourera la réponse choisie.
Une bonne réponse rapporte un point, une mauvaise enlève 0,5 point, une absence de réponse n'enlève, ni ne rajoute aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Aucune justification n'est demandée. On entourera la réponse choisie.

1) Une urne contient cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables à toucher. On extrait simultanément trois boules de l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?

$\frac{75}{512}$	$\frac{13}{56}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{15}{28}$

2) Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers de la population.
Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est de 0,25.
Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

$\frac{1}{120}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{40}$

3) Un joueur lance une fois un dé équilibré.
Il gagne 10 si le dé marque 1. Il gagne 1 si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
Quelle est la variance de X ?

2	13	16	17

Le corrigé

1) Comme toutes les boules sont indiscernables au toucher, elles ont toutes la même probabilité d'être tirées. Par conséquent, nous sommes en situation d'équiprobabilité.

On tire simultanément trois boules parmi huit. Il y a donc $\binom{8}{3} = 56$ tirages possibles.

Pour composer une des trois-combinaisons qui nous intéressent, on doit tirer deux boules noires à choisir parmi cinq ainsi qu'une boule rouge à choisir parmi trois.

Il y a $\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = 10 \times 3 = 30$ trois-combinaisons avec deux boules noires et une rouge.

La probabilité d'obtenir une trois-combinaisons "deux rouges une noire" est : $\frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.

2) On appelle G l'événement "l'individu est grippé" et V l'événement "l'individu est vacciné". Récapitulons les renseignements qui nous sont fournis par l'énoncé :

- Lorsque l'on rencontre un grippé, la probabilité qu'il soit vacciné est de $\frac{1}{10}$.

  Par conséquent : $p_G(V) = p(V \text{ sachant } G) = \frac{1}{10}$.

- Un individu sur trois a été vacciné. Donc : $p(V) = \frac{1}{3}$.

- La probabilité qu'un individu soit grippé est de 0,25. Par conséquent : $p(G) = \frac{1}{4}$.

On veut connaître la probabilité qu'un individu contracte la grippe sachant qu'il est vacciné. Autrement dit, on s'intéresse à la probabilité $p_V(G) = p(G \text{ sachant } V)$.
D'abord, calculons la probabilité que l'on a de rencontrer un individu grippé et vacciné.

$$p_G(V) = \frac{p(G \cap V)}{p(G)} \quad \Leftrightarrow \quad p(G \cap V) = p(G) \times p_G(V) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$p_V(G) = \frac{p(G \cap V)}{p(V)} = \frac{1/40}{1/4} = \frac{1}{40} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

<u>Conclusion :</u> quand un individu est vacciné, il a une chance sur dix d'être grippé.

3) La variable aléatoire X ne prend que trois valeurs : 0 ; 1 et 10. Sa loi de probabilité est :

$p(X=0)=\frac{1}{2}$	Le joueur a obtenu 3 ; 5 ou 6
$p(X=1)=\frac{1}{3}$	Le joueur a obtenu 2 ou 4
$p(X=10)=\frac{1}{6}$	Le joueur a obtenu 1.

Calculons l'espérance de la variable aléatoire X.

$$E(X)=p(X=0)\times 0+p(X=1)\times 1+p(X=10)\times 10=0+\frac{1}{3}+\frac{10}{6}=\frac{12}{6}=2$$

A présent, calculons la variance en utilisant la formule simplifiée de la variance.

$$V(X)=p(X=0)\times 0^2+p(X=1)\times 1^2+p(X=10)\times 10^2-(E(X))^2$$
$$=0+\frac{1}{3}+\frac{100}{6}-4=\frac{2+100-24}{6}=\frac{78}{6}=13$$

Conclusion : la variance de la variable aléatoire X est égale à 13 et son écart-type à $\sqrt{13}$.
Mais l'élément important de cette question est que si le prix de la mise est supérieur à 2 euros, alors il ne faut surtout pas jouer !

Une Paire de Urnes

Le contexte

Voilà un exercice original de dénombrement et de probabilité que vous ne trouverez nul part ailleurs puisqu'il est issu de mon cerveau. Il parle de combinaisons, de variable aléatoire et de probabilité conditionnelle.

L'énoncé

Soucieuse de renflouer ses caisses, la Blancoise des Jeux a décidé de lancer un nouveau jeu sur le marché : la Paire de Urnes.
Avant le jeu, le joueur s'acquitte d'une participation ou mise de m euros.
Dans un premier temps, le joueur tire au hasard et simultanément deux boules dans une première urne baptisée *Urne 1*.
Cette *Urne 1* contient au total sept boules indiscernables au toucher : deux vertes et cinq blanches.
On note les couleurs des deux boules tirées.
La seconde urne baptisée *Urne 2* contient elle trois boules vertes et cinq blanches.
A ces huit boules, on rajoute les deux tirées dans l'*Urne 1*. L'*Urne 2* contient maintenant dix boules indiscernables au toucher.
Le joueur tire alors au hasard une troisième boule dans l'*Urne 2*.
Au final, le joueur a tiré une *triplette* de trois boules vertes ou blanches.
Le gain brut du joueur est fonction du nombre de boules vertes que contient la *triplette*.

- ***0.*** Si la *triplette* ne comporte aucune boule verte, alors le joueur ne gagne rien.
- ***1.*** Si la *triplette* comporte une seule boule verte, alors le joueur est remboursé de sa mise m.
- ***2.*** Si la *triplette* comporte deux boules vertes, alors le joueur gagne dix euros.
- ***3.*** Si la *triplette* comporte trois boules vertes, alors le joueur gagne cent euros.

Une partie des points est consacrée à la rédaction et aux explications apportées.

On commence par s'intéresser au tirage des deux premières boules dans l'*Urne 1*.

a) Calculer la probabilité que le joueur tire une boule blanche et une boule verte dans l'*Urne 1*.
Calculer la probabilité le joueur tire deux boules blanches dans l'*Urne 1*.

On appelle G la variable aléatoire comptabilisant le gain algébrique (ou gain net) du joueur à l'issue du jeu.

b) Dresser un arbre pondéré décrivant la situation du jeu.

Vérifier que $p(G=0)=\frac{3}{7}$.

En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

c) Sachant que le joueur a été remboursé de sa mise m, déterminer la probabilité qu'il ait tiré deux boules blanches dans l'*Urne 1*.

d) Exprimer l'espérance mathématique $E(G)$ en fonction de la mise m.

Cette mise m étant un entier strictement positif, à combien la Blancoise des Jeux doit-elle fixer la mise m pour espérer faire un bénéfice moyen minimal d'un euro par partie ?

Le corrigé

a) Durant la première phase du jeu, il s'agit de tirer simultanément deux boules parmi sept. Les boules étant indiscernables au toucher et le tirage s'effectuant au hasard, nous sommes en situation d'équiprobabilité.

Au total, il y a $\binom{7}{2}=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$ tirages ou combinaisons possibles.

➲ Combien existe-t-il de combinaisons de deux boules avec une verte et une blanche ?
On doit choisir une verte parmi les deux dans l'*Urne 1* et une blanche parmi les cinq.

Donc il existe $\binom{2}{1}\times\binom{5}{1}=2\times 5=10$ combinaisons d'une boule verte et d'une blanche.

<u>Conclusion :</u> $p(\text{"Une verte et Une blanche dans l'}\textit{Urne 1}\text{"})=\frac{10}{21}$.

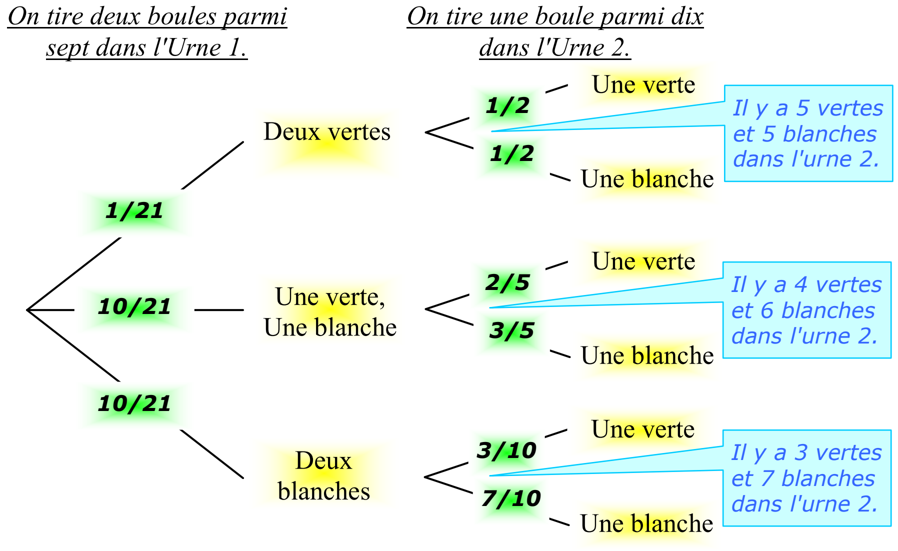
➲ Combien existe-t-il de combinaisons de deux boules blanches ?
On doit choisir deux boules blanches parmi les cinq disponibles.

Par conséquent, il existe $\binom{5}{2}=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$ combinaisons de deux boules blanches.

<u>Conclusion :</u> $p(\text{"Deux boules blanches dans l'}\textit{Urne 1}\text{"})=\frac{10}{21}=\frac{2}{3}$.

On en déduit que la probabilité de tirer deux boules vertes dans l'Urne 1 est de $\frac{1}{21}$.

b) La situation est la suivante :



➲ Une *triplette* conduit à quatre gains possibles. La variable aléatoire G prend les quatre valeurs $-m$ (aucune boule verte); 0 (une seule boule verte) ; $10-m$ (deux boules vertes) et $100-m$ (trois boules vertes).

En utilisant l'arbre pondéré, nous établissons la loi de probabilité de la variable aléatoire G

$$p(G=-m)=p\left(\underbrace{\text{Blanche et Blanche}}_{\textit{Urne 1}}\text{ et }\underbrace{\text{Verte}}_{\textit{Urne 2}}\right)=\frac{10}{21}\times\frac{7}{10}=\frac{1}{3}$$

$$p(G=0)=p\left(\underbrace{\text{Blanche et Blanche}}_{\textit{Urne 1}}\text{ et }\underbrace{\text{Verte}}_{\textit{Urne 2}}\right)+p\left(\underbrace{\text{Verte et Blanche}}_{\textit{Urne 1}}\text{ et }\underbrace{\text{Blanche}}_{\textit{Urne 2}}\right)$$
$$=\frac{10}{21}\times\frac{3}{10}+\frac{10}{21}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

$$p(G=10-m)=p\left(\underbrace{\text{Verte et Verte}}_{\textit{Urne 1}}\text{ et }\underbrace{\text{Blanche}}_{\textit{Urne 2}}\right)+p\left(\underbrace{\text{Verte et Blanche}}_{\textit{Urne 1}}\text{ et }\underbrace{\text{Verte}}_{\textit{Urne 2}}\right)$$
$$=\frac{1}{21}\times\frac{1}{2}+\frac{10}{21}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{42}+\frac{8}{42}=\frac{9}{42}=\frac{3}{14}$$

$$p(G=100-m)=p\left(\underbrace{\text{Verte et Verte}}_{\textit{Urne 1}}\text{ et }\underbrace{\text{Verte}}_{\textit{Urne 2}}\right)=\frac{1}{21}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{42}$$

On vérifie que la somme des probabilités trouvées $\frac{1}{3}+\frac{3}{7}+\frac{3}{14}+\frac{1}{42}=\frac{14+18+9+1}{42}=\frac{42}{42}$ est égale 1.

c) La mise du joueur ayant été remboursée, cela signifie que la triplette comporte exactement une boule verte.
Si deux boules blanches ont été tirées dans l'*Urne 1*, alors c'est une verte qui est piochée dans l'*Urne 2*.
Par conséquent, la probabilité conditionnelle demandée est la suivante :

$$p\left(\text{Blanche et Blanche dans l'}\textit{Urne 1}\text{ sachant } G=0\right)=\frac{p\left(\underbrace{\text{Blanche et Blanche}}_{\textit{Urne 1}}\text{ et }\underbrace{\text{Verte}}_{\textit{Urne 2}}\right)}{p\left(G=0\right)}$$

$$=\frac{1/7}{3/7}=\frac{1}{7}\times\frac{7}{3}=\frac{1}{3}$$

d) L'espérance mathématique de la variable aléatoire G est donnée par :

$$E\left(G\right)=\left(-m\right)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{3}{7}+\left(10-m\right)\times\frac{3}{14}+\left(100-m\right)\times\frac{1}{42}$$

$$=-\frac{1}{3}\times m+0+\frac{15}{7}-\frac{3}{14}\times m+\frac{50}{21}-\frac{1}{42}\times m=\frac{95}{21}-\frac{14+9+1}{42}\times m=\frac{95}{21}-\frac{4}{7}\times m$$

➲ La Blancoise des Jeux souhaite faire un bénéfice d'au moins 1€ par partie.
Autrement dit, elle souhaite que le joueur ait l'espoir(?) de perdre plus d'un euro par jeu, c'est-à-dire que l'espérance de gain net du joueur $E\left(G\right)$ soit inférieure ou égale à -1.
Résolvons cette inéquation d'inconnue *m*.

$$E\left(G\right)\leq -1 \iff \frac{95}{21}-\frac{4}{7}\times m\leq -1 \iff \frac{116}{21}\leq\frac{4}{7}\times m \iff m\geq\frac{116}{21}\times\frac{7}{4}=\frac{29}{3}=9+\frac{2}{3}$$

<u>Conclusion :</u> si la Blancoise de Jeux veut faire un bénéfice moyen d'au moins un euro par partie, elle doit fixer la mise *m* a au moins 10€.

La croisière s'allume...et ça prend un certain temps !

Le contexte

Cet exercice (encore issu de mon volcanique cerveau) aborde (en yacht) les probabilités continues et les schémas de Bernoulli. La situation exposée est inspirée d'un fait réel...

L'énoncé

Captain Nicko vient de s'acheter un vieux yacht : le *Royal Dutch*. Un splendide bateau construit au dix-neuvième siècle propulsé par huit chaudières à vapeur.
Seulement, pour qu'une chaudière à vapeur fournisse de la puissance, il faut qu'elle soit suffisamment chaude. Quand elle est au repos, il faut donc un certain temps avant qu'elle soit opérationnelle, le temps qu'elle chauffe.
On appelle X la variable aléatoire continue mesurant le temps exprimé en heures mis par une chaudière pour chauffer et devenir opérationnelle. On admet que ce temps X est inférieur ou égal à une heure.

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;1\right]$ par :

$$f\left(x\right)=1+2.x-3.x^2$$

a) Déterminer le signe de $f\left(x\right)$ sur l'intervalle $\left[0;1\right]$.
Démontrer que la fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle $\left[0;1\right]$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire continue X a pour densité de probabilité la fonction f.
Sauf mention contraire, les probabilités demandées seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

b) Calculer la probabilité qu'une chaudière soit opérationnelle en moins d'un quart d'heure.

c) Calculer la probabilité qu'une chaudière soit opérationnelle en plus d'une demie heure.

d) Même s'il n'a rien d'une chaudière, Captain Nicko est bouillant de colère ! Cela fait déjà plus d'une demie heure que sa chaudière préférée chauffe. Calculer la probabilité qu'elle soit opérationnelle avant la quarantième minute.

e) Ce matin là, le *Royal Dutch* était tranquillement mouillé dans une paisible baie d'une île de Méditerranée, quand soudain Captain Nicko reçut un message des plus urgents. Sa dulcinée de Séville voulait le voir de toute urgence. Il fallait donc appareiller dans le quart d'heure.

Sauf que les huit chaudières du bateau étaient toutes au repos, et que pour démarrer il fallait disposer d'au moins six chaudières opérationnelles.
En admettant que les huit chaudières sont indépendantes les unes des autres, calculer la probabilité que le *Royal Dutch* démarre dans le quart d'heure.
On donnera une valeur approchée arrondie au millième près.

Le corrigé

a) Calculons le discriminant de la fonction du second degré $f(x) = -3.x^2 + 2.x + 1$.

$$\Delta_{f(x)} = 2^2 - 4 \times (-3) \times 1 = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

Comme son discriminant est positif, alors $f(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x = \frac{-2-4}{2 \times (-3)} = \frac{-6}{-6} = 1 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{-2+4}{2 \times (-3)} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Par conséquent, le tableau de signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

<u>Conclusion :</u> la fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[0;1]$.

➲ La fonction f est clairement continue et positive ou nulle sur l'intervalle $[0;1]$.
Pour établir que f est une densité de probabilité sur le dit intervalle, il nous reste à prouver que l'intégrale $\int_0^1 f(x).dx$ est égale à 1.

Une primitive de la fonction $f(x) = -3.x^2 + 2.x + 1$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = -x^3 + x^2 + x$.
Nous pouvons alors écrire :

$$\int_0^1 f(x).dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (-1+1+1) - (-0+0+0) = 1$$

<u>Conclusion :</u> la fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0;1]$.

b) Dire qu'une chaudière est opérationnelle en moins d'un quart d'heure signifie que la variable aléatoire X appartient à l'intervalle $\left[0;\frac{1}{4}\right]$. Par conséquent, nous devons calculer :

$$p\left(X \in \left[0;\frac{1}{4}\right]\right) = \int_0^{1/4} f(x).dx = F\left(\frac{1}{4}\right) - F(0) = \left(-\frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{-1+4+16}{64} = \frac{19}{64}$$

c) Dire qu'une chaudière est opérationnelle en plus d'une demie heure signifie que la variable aléatoire X appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Par conséquent, nous calculons :

$$p\left(X \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right) = \int_{1/2}^{1} f(x).dx = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

c) Nous devons calculer la probabilité conditionnelle :

$$p\left(X \in \left[0;\frac{2}{3}\right] \text{ sachant } X \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right) = \frac{p\left(X \in \left[0;\frac{2}{3}\right] \cap \left[\frac{1}{2};1\right]\right)}{p\left(X \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right)} = \frac{p\left(X \in \left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]\right)}{p\left(X \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right)}$$

Seule nous manque la probabilité apparaissant au numérateur. Calculons là !

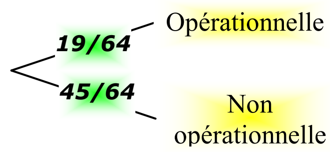
$$p\left(X \in \left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]\right) = \int_{1/2}^{2/3} f(x).dx = F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{22}{27} - \frac{5}{8} = \frac{176-135}{216} = \frac{41}{216}$$

Et finalement, il vient :

$$p\left(X \in \left[0;\frac{2}{3}\right] \text{ sachant } X \in \left[\frac{1}{2};1\right]\right) = \frac{41/216}{3/8} = \frac{41}{216} \times \frac{8}{3} = \frac{41}{81}$$

d) Chaque chaudière qui chauffe est pour Captain Nicko est une épreuve de Bernoulli. Pour chacune d'entre elles se pose la même et inquiétante question : sera-t-il opérationnelle dans le quart d'heure ?
D'après la question 2.b, la probabilité d'un tel événement est de $19/64$.

<u>*L'épreuve de la chaudière :*</u>



Le huit chaudières du Royal Dutch forment un schéma de Bernoulli de huit épreuves.
On appelle N la variable aléatoire comptant le nombre de chaudières opérationnelles dans le quart d'heure. N prend toutes les valeurs entières entre 0 et 8.

La loi de probabilité de N est la loi binomiale de paramètres 8 et $\frac{19}{64}$.

Pour tout réel $k \in \{0;1;\ldots;8\}$, on a : $p(N=k) = \binom{8}{i} \times \left(\frac{19}{64}\right)^k \times \left(\frac{45}{64}\right)^{8-k}$

Pour que le *Royal Dutch* puisse partir, il faut et il suffit qu'au moins six chaudières soient opérationnelles. Autrement dit, il faut et il suffit que N soit supérieur ou égal à 6.
Calculons la probabilité de l'événement $N \geq 6$.

$$p(N \geq 6) = p(N=6) + p(N=7) + p(N=8)$$

$$= \binom{8}{6} \times \left(\frac{19}{64}\right)^6 \times \left(\frac{45}{64}\right)^2 + \binom{8}{7} \times \left(\frac{19}{64}\right)^7 \times \frac{45}{64} + \left(\frac{19}{64}\right)^8 \approx 0,011$$

<u>Conclusion :</u> il y a un peu plus d'une chance sur cent que le *Royal Dutch* démarre dans le quart d'heure. La Dulcinée risque d'attendre un certain temps. Peut-être Captain Nicko ferait-il mieux d'y aller à la nage ?

Spécialité

Au printemps dernier dans la pampa

Le contexte

Cet exercice qui aborde la congruence et la divisibilité est une adaptation de l'exercice de spécialité du bac donné en Amérique du Sud en Novembre 2006.

L'énoncé

On rappelle la définition suivante.

Définition : a et b sont deux entiers relatifs.
Dire que a est congru à b modulo 7 signifie qu'il existe un entier relatif k tel que

$$a = b + 7 \times k$$

On écrit alors : $a \equiv b(7)$ ou encore $a \equiv b$ modulo 7

a) *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances.*

1. a est un entier relatif et on appelle r le reste de la division euclidienne de a par 7.
Démontrer que $a \equiv r(7)$.

2. a, b, c et d sont quatre entiers relatifs.
Démontrer que si $a \equiv b(7)$ et $c \equiv d(7)$, alors $a \times c \equiv b \times d(7)$

3. En déduire que pour tous entiers relatifs non nuls a et b, on a :
Si $a \equiv b(7)$, alors pour tout entier naturel non nul n, on a : $a^n \equiv b^n(7)$

b) Pour $a = 2$ et $a = 3$, déterminer un entier naturel non nul n tel que $a^n \equiv 1$ modulo 7 .

c) Soit a un entier naturel non divisible par 7.

1. Montrer que $a^6 \equiv 1$ modulo 7 .
Indication : *on pourra voir ce qu'il reste de a...*

On appelle <u>ordre de a modulo 7</u> le plus petit entier naturel non nul m tel que

$$a^m \equiv 1 \text{ modulo } 7$$

2. Pourquoi cet entier naturel non nul m existe-t-il ?

3. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par m vérifie l'égalité

$$a^r \equiv 1 \text{ modulo } 7$$

En déduire que m divise nécessairement 6.
Quelles sont les valeurs possibles de m ?

4. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

d) A tout entier naturel n, on associe le nombre :

$$\mathrm{A}_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$$

Montrer que $\mathrm{A}_{2006} \equiv 6$ modulo 7

Le corrigé

a) Démontrons les questions de cours proposées :

1. Si on appelle q et r les quotient et reste issus de la division euclidienne de a par 7, alors nous avons : $a = 7 \times q + r$. Donc $a \equiv r(7)$.

2. Comme $a \equiv b(7)$ et $c \equiv d(7)$, alors il existe deux entiers relatifs k et l tels que :

$$a = b + 7 \times k \quad \text{et} \quad c = d + 7 \times l$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} a \times c &= (b + 7 \times k) \times (d + 7 \times l) = b \times d + 7 \times b \times l + 7 \times k \times d + 49 \times k \times l \\ &= b \times d + 7 \times \underbrace{(b \times l + k \times d + 7 \times k \times l)}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Donc $a \times c \equiv b \times d(7)$.

3. Si $a \equiv b(7)$ alors en application du point ***2*** que nous venons d'établir :

$$a^n \equiv \underbrace{a \times \ldots \times a}_{\text{Produit de n facteurs } a} \equiv \underbrace{b \times \ldots \times b}_{\text{Produit de n facteurs } b} \equiv b^n(7)$$

b) Après quelques tâtonnements, comme $2^3 = 8 = 1 + 7$, alors $2^3 \equiv 1(7)$.

De même, attendu que $3^6 = 6561 = 7 \times 937 + 1$, alors $3^6 \equiv 1(7)$.

c) Dans cette question, a un entier naturel non divisible par 7.

1. Si on appelle r le reste de la division euclidienne de a par 7, alors :

⇨ d'après le point a.***1***, $a \equiv r(7)$

⇨ d'après le point a.***3***, $a^6 \equiv r^6 \ (7)$

Comme a n'est pas divisible par 7, alors le reste r est égal soit à 1, soit à 2, soit à 3, soit à 4, soit à 5, soit à 6.

Examinons les puissances sixièmes de ces six restes possibles.

❶ Clairement, $1^6 \equiv 1(7)$.

❷ Comme $2^6 = 64 = 7\times 9+1$, alors $2^6 \equiv 1(7)$.

❸ Comme $3^6 = 729 = 7\times 104+1$, alors $3^6 \equiv 1(7)$.

❹ Comme $2^6 \equiv 1(7)$, alors $4^6 \equiv \left(2^2\right)^6 \equiv \left(2^6\right)^2 \equiv 1^2 \equiv 1$ modulo 7 .

❺ Comme $5^6 = 15625 = 2232\times 7+1$, alors $5^6 \equiv 1(7)$.

❻ Et enfin : $6^6 \equiv (2\times 3)^6 \equiv 2^6\times 3^6 \equiv 1\times 1 \equiv 1$ modulo 7 .

<u>Conclusion :</u> pour tout $a \in \mathbb{N}$ non divisible par 7, nous avons $a^6 \equiv r^6 \equiv 1\ (7)$

2. Appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls n tels que $a^n \equiv 1$ modulo 7 .

Comme $a^6 \equiv 1\ (7)$, alors 6 appartient à cet ensemble $\mathcal{E}$.

Le sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ qu'est $\mathcal{E}$ admet donc un plus petit élément *m*.
D'où l'existence de l'ordre modulo 7 de l'entier *a*.

3. Le reste *r* de la division euclidienne de 6 par *m* vérifie les conditions :

$$6 = m\times q+r \quad \text{et} \quad 0 \le r < m$$

où *q* est le quotient de la division euclidienne de 6 par *m*.
Il vient alors :

$$\underbrace{1 \equiv a^6}_{\text{D'après c.}\mathbf{1}} \equiv a^{m\times q+r} \equiv a^{m\times q}\times a^r \equiv \underbrace{\left(a^m\right)^q\times a^r \equiv (1)^q\times a^r}_{\text{Car } m\in\mathcal{E}} \equiv 1\times a^r \equiv a^r \quad \text{modulo } 7$$

➲ Procédons par l'absurde. Supposons que *m* ne divise pas 6.
Alors le reste *r* évoqué précédemment est nécessairement non nul.

Comme $a^r \equiv 1(7)$ et que *r* est un entier naturel non nul, alors $r \in \mathcal{E}$.

Ainsi $\mathcal{E}$ contient-t-il un élément *r* qui est strictement plus petit que son plus petit élément *m*. Ce qui n'est pas trop possible...
Donc la supposition faite était erronée : *m* divise 6.

➲ Les seuls diviseurs naturels de 6 sont 1 ; 2 ; 3 et 6. Ce sont les quatre valeurs possibles pour l'entier naturel *m*.

4. Il est clair que les ordres modulo 7 des entiers 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 ne sont pas égaux à 1. Voyons leurs cas individuellement.

❷ Comme $2^2 \equiv 4(7)$ et $2^3 \equiv 1(7)$, alors l'ordre de 2 modulo 7 est <u>3</u>.

❸ Comme $3^2 \equiv 9 \equiv 2(7)$; $3^3 \equiv 27 \equiv 6(7)$ et $3^6 \equiv 1(7)$, alors l'ordre de 3 modulo 7 est <u>6</u>.

❹ Comme $4^2 \equiv 16 \equiv 2(7)$ et $4^3 \equiv 64 \equiv 1(7)$, alors l'ordre de 4 modulo 7 est <u>3</u>.

❺ Comme $5^2 \equiv 25 \equiv 4(7)$; $5^3 \equiv 125 \equiv 6(7)$ et $5^6 \equiv 1(7)$, alors l'ordre de 5 modulo 7 est <u>6</u>.

❻ Comme $6^2 \equiv 36 \equiv 35+1 \equiv 1(7)$, alors l'ordre de 6 modulo 7 est <u>2</u>.

d) Pour répondre à cette question, nous allons utiliser cette notion d'ordre modulo 7 évoquée lors de la question précédente.
D'abord remarquons :

$$2006 = 2\times 1003 \qquad 2006 = 3\times 668+2 \qquad 2006 = 334\times 6+2$$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
A_{2006} &\equiv 2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}+5^{2006}+6^{2006} \quad \text{modulo } 7\\
&\equiv 2^{3\times 668+2}+3^{6\times 334+2}+4^{3\times 668+2}+5^{6\times 334+2}+6^{2\times 1003} \quad \text{modulo } 7\\
&\equiv \left(2^3\right)^{668}\times 2^2+\left(3^6\right)^{334}\times 3^2+\left(4^3\right)^{668}\times 4^2+\left(5^6\right)^{334}\times 5^2+\left(6^2\right)^{1003} \quad \text{modulo } 7\\
&\equiv 1^{668}\times 4+1^{334}\times 9+1^{668}\times 16+1^{334}\times 25+1^{1003} \quad \text{modulo } 7\\
&\equiv 1\times 4+1\times 9+1\times 16+1\times 25+1 \quad \text{modulo } 7\\
&\equiv 4+9+16+25+1 \equiv 55 \equiv 7\times 7+6 \equiv 6 \quad \text{modulo } 7
\end{aligned}$$

Le monde merveilleux des isométries du plan

Le contexte

Cet exercice de spécialité traite des différents types d'isométries existants. Un exercice original que vous ne verrez jamais au bac car il est sorti de mon volcanique cerveau.

L'énoncé

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On appelle A, B, C, D et E les points d'affixes respectives :

$z_A = -1$ $\quad z_B = -\boldsymbol{i}$ $\quad z_C = 2+\boldsymbol{i}$ $\quad z_D = 2-\boldsymbol{i}$ $\quad z_E = -2-2.\boldsymbol{i}$

a) Démontrer qu'il existe une seule similitude directe ***f*** par laquelle les points A et B ont pour images respectives les points C et D.

b) Déterminer les attributs de la similitude directe ***f***.

On appelle ***s*** la similitude qui a tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \boldsymbol{i}.\overline{z}$$

c) La similitude ***s*** est-elle une isométrie ? La similitude ***s*** est-elle directe ou indirecte ?
Déterminer les images des points A et E par la similitude ***s***.
Déterminer l'ensemble Δ des points du plan qui sont invariants par la similitude ***s***.
Quelle est la nature de cette similitude ***s*** ?

On appelle ***g*** la similitude qui a tout point M du plan d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

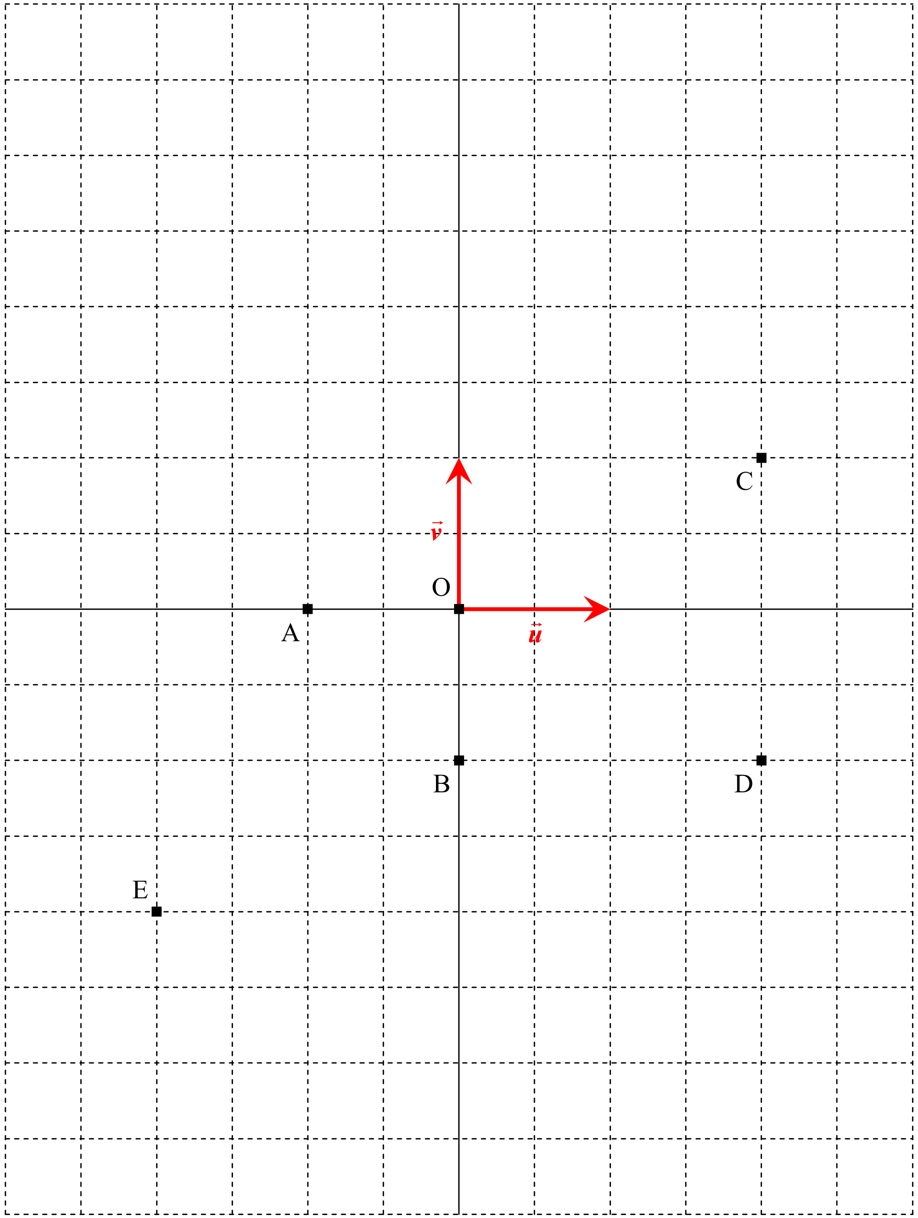
$$z' = \boldsymbol{i}.\overline{z}+1-\boldsymbol{i}$$

d) La similitude ***g*** est-elle une isométrie ? La similitude g est-elle directe ou indirecte ?
Vérifier que la similitude ***g*** est la composée d'une isométrie ***t*** que l'on précisera et de la similitude ***s***.
Démontrer que la similitude ***g*** est une symétrie axiale dont on précisera l'axe.

On appelle ***h*** la composée de la similitude ***s*** suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$

e) Déterminer l'expression complexe de la similitude ***h***.
La similitude ***h*** est-elle une isométrie ? Cette similitude ***h*** est-elle directe ou indirecte ?
Quelle est la nature de la similitude ***h*** ? On justifiera sa réponse.

f) Quelle est la nature de la similitude ***r*** qui est la composée de la symétrie d'axe $\left(O;\vec{u}\right)$ suivie de la similitude ***g*** ? On justifiera sa réponse.



Le corrigé

a) Une similitude directe ***f*** est parfaitement définie par le couple de nombres complexes $(a;b)$ qui détermine son expression complexe $f(z)=a.z+b$.

Ainsi, dire qu'il existe une unique similitude directe ***f*** par laquelle les points A et B ont respectivement pour images C et D équivaut-il à dire qu'il existe un seul couple de nombres complexes $(a;b)$ tels que $\begin{cases} \underbrace{a.z_A+b}_{f(z_A)}=z_C & \textbf{(1)} \\ \underbrace{a.z_B+b}_{f(z_B)}=z_D & \textbf{(2)} \end{cases}$.

Résolvons dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ le système d'inconnues a et b qu'est : $\begin{cases} -a+b=2+\boldsymbol{i} & \textbf{(1)} \\ -\boldsymbol{i}\times a+b=2-\boldsymbol{i} & \textbf{(2)} \end{cases}$.

Procédons par substitution. A partir l'équation ***(1)***, on exprime b en fonction de a.

$$-a+b=2+\boldsymbol{i} \iff b=a+2+\boldsymbol{i}$$

Dans l'équation ***(2)***, on remplace b par ce qu'il vaut en a. Il vient :

$$-\boldsymbol{i}\times a+\underbrace{\left(a+2+\boldsymbol{i}\right)}_{b}=2-\boldsymbol{i} \iff (1-\boldsymbol{i}).a=-2.\boldsymbol{i} \iff a=\frac{-2.\boldsymbol{i}}{1-\boldsymbol{i}}=\frac{-2.\boldsymbol{i}\times(1+\boldsymbol{i})}{1^2+(-1)^2}=\frac{-\cancel{2}.\boldsymbol{i}+\cancel{2}}{\cancel{2}}$$

Donc $a=1-\boldsymbol{i}$. Il vient alors pour b :

$$b=\underbrace{(1-\boldsymbol{i})}_{a}+2+\boldsymbol{i}=3$$

Conclusion : le système $\begin{cases} -a+b=2+\boldsymbol{i} & \textbf{(1)} \\ -\boldsymbol{i}\times a+b=2-\boldsymbol{i} & \textbf{(2)} \end{cases}$ admet une seule solution. Il s'agit du couple de nombres complexes $(1-\boldsymbol{i};3)$. Par conséquent, il existe une seule similitude directe ***f*** par laquelle A et B ont pour images C et D. Elle a pour expression complexe :

$$f(z)=(1-\boldsymbol{i})\times z+3$$

b) Du fait de son expression complexe, on peut dire de la similitude directe ***f*** que :

- Son rapport est le module de $1-\boldsymbol{i}$:

$$\text{Rapport de } f=|1-\boldsymbol{i}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

- Ses angles sont les arguments de $1-\boldsymbol{i}$:

$$1-\boldsymbol{i}=\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}\times\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\boldsymbol{i}\times\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\times e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{4}}$$

Donc un angle de la similitude directe ***f*** est $-\frac{\pi}{4}$.

- Son centre Ω qui est son unique point fixe a pour affixe la solution de l'équation

$$f(z)=z \iff \underbrace{(1-\boldsymbol{i})\times z+3}_{f(z)}=z \iff -\boldsymbol{i}.z=-3 \iff z=\frac{-3}{-\boldsymbol{i}}=-3.\boldsymbol{i}$$

Donc le centre Ω de la similitude directe ***f*** a pour affixe $-3.\boldsymbol{i}$.

c) Du fait de son expression complexe, $\boldsymbol{s}(z)=\boldsymbol{i}.\overline{z}$ est une similitude indirecte dont le rapport est donné par : $|\boldsymbol{i}|=1$. Autrement dit, ***s*** est une isométrie...indirecte.

➲ Déterminons les images des points A et E par l'isométrie indirecte ***s*** :

- $\boldsymbol{s}(z_A)=\boldsymbol{i}\times\overline{z_A}=\underbrace{\boldsymbol{i}\times\overline{(-1)}=\boldsymbol{i}\times(-1)}_{\text{Car un réel est son propre conjugué}}=-\boldsymbol{i}=z_B$.
- $\boldsymbol{s}(z_E)=\boldsymbol{i}\times\overline{z_E}=\boldsymbol{i}\times\overline{(-2-2.\boldsymbol{i})}=\boldsymbol{i}\times(-2+2.\boldsymbol{i})=-2.\boldsymbol{i}-2=z_E$

Conclusion : l'image de A par la similitude ***s*** est B. Quant à E, il est invariant par ***s***.

➲ Déterminons les points du plan qui sont invariants par l'isométrie indirecte ***s***.

$$\underbrace{M(z=x+\boldsymbol{i}.y)}_{\text{x et y sont les parties réelle et imaginaire de z}} \text{ est invariant par } \boldsymbol{s} \iff \boldsymbol{s}(z)=z \iff \boldsymbol{i}.\overline{z}=z$$

$$\iff \boldsymbol{i}\times\overline{(x+\boldsymbol{i}.y)}=x+\boldsymbol{i}.y \iff \underbrace{\boldsymbol{i}.x+y=x+\boldsymbol{i}.y}_{\text{Deux complexes sont égaux...}}$$

$$\iff \underbrace{x=y}_{\text{Parties réelles égales}} \text{ et } \underbrace{y=x}_{\text{Parties imaginaires égales}} \iff y=x$$

Conclusion : l'ensemble Δ des points du plan invariants par l'isométrie indirecte ***s*** est la droite d'équation $y=x$, celle que l'on appelle "la première bissectrice du plan".

➲ Comme ***s*** est une similitude qui a plus de deux points fixes et que, de par son expression complexe, ***s*** n'est pas l'application identique, alors ***s*** est la symétrie d'axe Δ.

d) Comme ***s***, la similitude ***g*** est indirecte et de rapport $|\boldsymbol{i}|=1$. C'est donc une isométrie.

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}\left(-\boldsymbol{i}-(-1)\right)$ a pour expression complexe :

$$t_{\overrightarrow{AB}}(z) = z + z_{\overrightarrow{AB}} = z + 1 - i$$

Pour tout nombre complexe z, nous pouvons écrire :

$$g(z) = i.\overline{z} + 1 - i = s(z) + 1 - i = t_{\overrightarrow{AB}}(s(z)) = t_{\overrightarrow{AB}} \circ s(z)$$

Conclusion : la similitude indirecte g est la composée de la réflexion s d'axe Δ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

➲ Pour connaître la nature de cette isométrie indirecte g, le mieux est encore d'essayer d'en déterminer les points fixes.

$$\underbrace{M(z = x + i.y)}_{\text{x et y sont les parties réelle et imaginaire de z}} \text{ est invariant par } g \Leftrightarrow g(z) = z \Leftrightarrow i.\overline{z} + 1 - i = z$$

$$\Leftrightarrow i \times \overline{(x + i.y)} + 1 - i = x + i.y$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(y+1) + i.(x-1) = x + i.y}_{\text{Deux nombres complexes sont égaux...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y + 1 = x}_{\text{Parties réelles égales}} \text{ et } \underbrace{x - 1 = y}_{\text{Parties imaginaires égales}}$$

$$\Leftrightarrow y = x - 1$$

Conclusion : les points fixes de g sont ceux de la droite Δ' d'équation $y = x - 1$.

A l'instar de s, comme g a au moins deux points fixes et qu'elle n'est pas l'application identique du plan, alors g est la réflexion d'axe Δ'.

Les coulisses *: le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal à l'axe de symétrie Δ de la réflexion* ***s****.*
Lorsque l'on compose une réflexion avec une translation de vecteur normal à l'axe de symétrie, on obtient une autre réflexion. L'axe de cette dernière est l'image de l'axe de symétrie initial translaté d'un demi-vecteur.

e) Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = (2+i) - (2-i) = 2.i$.

Donc l'expression complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ est : $t_{\overrightarrow{DC}}(z) = z + 2.i$.

Pour tout nombre complexe z, il vient alors :

$$h(z) = t_{\overrightarrow{DC}} \circ s(z) = t_{\overrightarrow{DC}}(s(z)) = s(z) + 2.i = i.\overline{z} + 2.i$$

Conclusion : l'expression complexe de h est $h(z) = i.\overline{z} + 2.i$.

Pour les mêmes raisons que s et g, la similitude h est une isométrie indirecte.

➲ Pour avoir une idée de ce qu'est h, le mieux est encore de connaître ses points fixes.

$$\underbrace{M(z = x + i.y)}_{\text{x et y sont les parties réelle et imaginaire de z}} \text{ est invariant par } h \Leftrightarrow h(z) = z \Leftrightarrow i.\overline{z} + 2.i = z$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(y) + i.(x+2) = x + i.y}_{\text{Deux nombres complexes sont égaux...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y = x}_{\text{Parties réelles égales}} \text{ et } \underbrace{x + 2 = y}_{\text{Parties imaginaires égales}}$$

Conclusion : comme y ne peut pas être à la fois égal à x et à $x + 2$, alors l'isométrie indirecte h n'a pas de points invariants. Ce n'est donc pas une symétrie axiale.

Les coulisses : *parmi les isométries, nous connaissons les translations, les rotations et les réflexions.* ***h*** *appartient à une quatrième famille que l'on appelle symétries glissées.*
hormis ces quatre catégories, il n'existe pas d'autres types d'isométrie.

f) Pour avoir une idée de ce qu'est la similitude r, déterminons son expression complexe.

L'expression de la réflexion $s_{(O;\vec{u})}$ d'axe $(O;\vec{u})$ est $s_{(O;\vec{u})}(z) = \overline{z}$.

Il vient alors pour tout nombre complexe z :

$$r(z) = g \circ s_{(O;\vec{u})}(z) = i \times \overline{s_{(O;\vec{u})}(z)} + 1 - i = i \times \overline{\overline{z}} + 1 - i = i \times z + 1 - i = e^{i.\frac{\pi}{2}} \times z + 1 - i$$

Conclusion : r est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω' d'affixe $\omega = \frac{1-i}{1-i} = 1$.

Les coulisses : *lorsque l'on compose deux réflexions dont les axes ne sont pas parallèles comme Δ' et $(O;\vec{u})$, on obtient une rotation de centre le point d'intersection des deux axes et d'angle le double de celui des deux axes.*
Lorsque les axes de symétrie sont parallèles, alors la composée de deux réflexions est une translation.

Une classification des similitudes par leurs points fixes

Les similitudes peuvent classées suivant le nombre de leurs points fixes.

	Similitudes directes Conservent les angles orientés	**Similitudes indirectes** Inversent les angles orientés
Aucun point fixe	Translation	Symétrie glissée *Composée d'une réflexion et d'une translation. Le vecteur de translation n'est pas normal à l'axe de symétrie*

Un seul point fixe	Homothétie, rotation ou composée permutable d'une homothétie et d'une rotation de même centre	Composée d'une symétrie axiale ou glissée suivie d'une homothétie
Au moins deux points fixes	L'application identique du plan	Symétrie axiale

Conséquence : une similitude qui n'est pas une isométrie a un unique point fixe.

Quand les plans remontent à la surface...

Le contexte

Les exercices de spécialité sur les sections planes donnés au bac sont très rares. En voici un original fabriqué par mon volcanique cerveau. C'est l'histoire de la surface représentative d'une fonction de deux variables que l'on coupe par toute une série de plans parallèles aux plans de coordonnées et une droite.

L'énoncé

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Dans ce repère représenté sur la figure ci-contre, on a tracé la surface $\mathcal{S}$ d'équation

$$z = x^2 - x \times y$$

où x, y et z sont des réels.

a) Démontrer que l'axe $Oz = \left(O;\vec{k}\right)$ est un axe de symétrie de la surface $\mathcal{S}$.

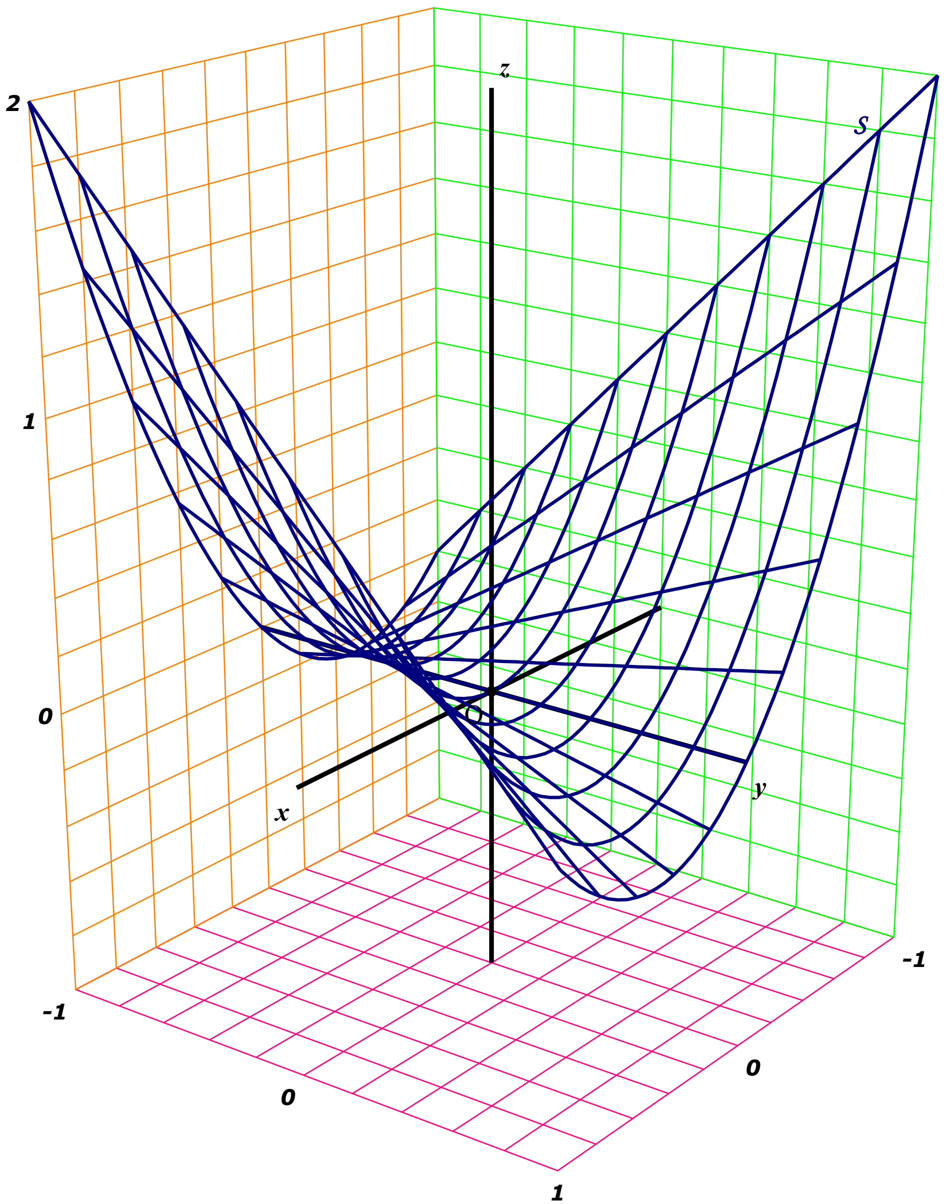
b) Déterminer l'intersection $\mathcal{I}_0$ de la surface $\mathcal{S}$ et du plan de coordonnées xOy.
Dans un repère adapté du plan xOy, tracer cette intersection $\mathcal{I}_0$.

c) λ étant un réel non nul, on appelle $\mathcal{P}_\lambda$ le plan d'équation $z = \lambda$.
Déterminer l'intersection $\mathcal{I}_\lambda$ de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}_\lambda$.
Dans le cas particulier $\lambda = 1$, tracer l'intersection $\mathcal{I}_1$ dans un repère adapté du plan $\mathcal{P}_1$.

d) λ étant un réel quelconque, on appelle $\mathcal{Q}_\lambda$ le plan d'équation $x = \lambda$.
Déterminer l'intersection $\mathcal{J}_\lambda$ de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{Q}_\lambda$.
Dans le cas particulier $\lambda = -1$, tracer l'intersection $\mathcal{J}_{-1}$ dans un repère adapté du plan $\mathcal{Q}_{-1}$.

e) $\mathcal{R}$ est le plan de vecteur normal $\vec{j}$ passant par le point $A(3;2;1)$.
Dans un repère adapté du plan $\mathcal{R}$ déterminer puis tracer l'intersection $\mathcal{K}$ de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{R}$.

f) On appelle *d* la droite passant par le point $B(-1;0;-1)$ et le point $C(1;1;2)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite *d*.
En déduire les coordonnées des points d'intersection de la droite *d* et la surface $\mathcal{S}$.



Le corrigé

a) Soit $M(x_M;y_M;z_M)$ un point de l'espace.

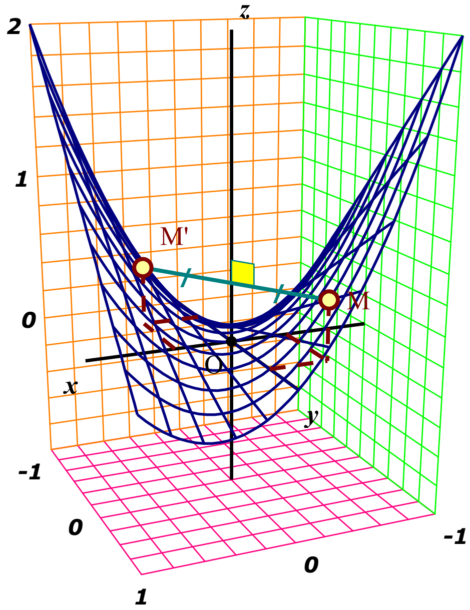
Son symétrique M' par rapport à l'axe $(O;\vec{k})$ a pour coordonnées $(-x_M;-y_M;z_M)$.

Si le point M appartient à la surface $\mathcal{S}$, alors ses coordonnées en vérifient l'équation. Donc :

$$z_M = x_M{}^2 - x_M \times y_M$$

Regardons s'il en va de même pour les coordonnées du point M'.

$$\begin{aligned} x_{M'}{}^2 - x_{M'} \times y_{M'} &= (-x_M)^2 - (-x_M)\times(-y_M) \\ &= \underbrace{x_M{}^2 - x_M \times y_M = z_M}_{\text{Car } M\in\mathcal{S}} \\ &= z_{M'} \end{aligned}$$



Comme ses coordonnées en vérifient l'équation, alors le point M' fait partie de la surface $\mathcal{S}$.

<u>Conclusion :</u> l'axe $(O;\vec{k})$ est un des axes de symétries de la surface $\mathcal{S}$.

b) Une équation du plan xOy est $z=0$ et l'un de ses vecteurs normaux est $\vec{k}$.

Un repère orthonormé du plan xOy est $(O;\vec{i},\vec{j})$. Ce repère est en quelques sortes la "projection orthogonale" sur xOy du repère orthonormé de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

D'ailleurs, nous avons l'équivalence :

$$\underbrace{\left.\begin{matrix}\text{M a pour coordonnées } (x;y) \\ \text{dans le repère } (O;\vec{i},\vec{j}) \text{ du plan xOy}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{M a pour coordodonnées } (x;y;0) \\ \text{dans le repère } (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \text{ de l'espace}\end{matrix}\right.}_{\substack{\text{Dans les deux cas, on a : } \overrightarrow{OM}=x\times\vec{i}+y\times\vec{j}+0\times\vec{k} \\ \text{Seulement valable lorsque et seulement lorsque le point M appartient au plan xOy}}}$$

Caractérisons l'ensemble $\mathcal{I}_0$ qui est l'intersection du plan xOy et de la surface $\mathcal{S}$.

Si nous travaillons dans l'espace muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ alors :

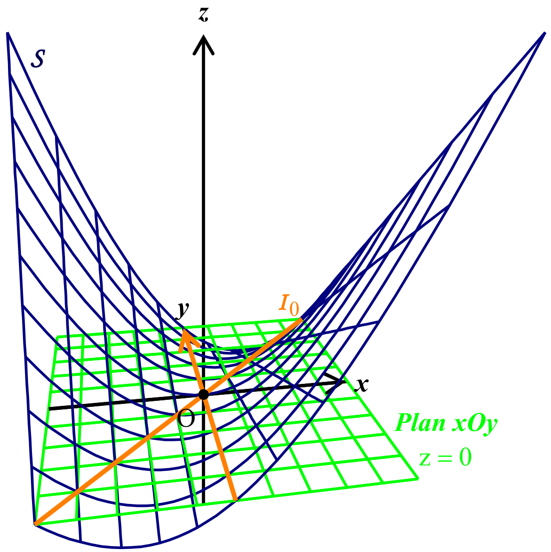
$$M(x;y;z) \in \mathcal{I}_0 = \text{Plan}(xOy) \cap \mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 & \leftarrow M \in \text{Plan}(xOy) \\ z = x^2 - x \times y & \leftarrow M \in \mathcal{S} \end{cases}$$

Tout cela n'est pas très parlant tout cela ! Heureusement, l'ensemble $\mathcal{I}_0$ est inclus dans le plan xOy muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. En travaillant dans ceux-ci, nous avons :

$$\overbrace{M(x;y) \in \mathcal{I}_0 \Leftrightarrow x^2 - x \times y = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x \times (x-y) = 0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \text{ ou } x - y = 0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}}^{\text{Le point M appartient au plan xOy muni du repère } (O;\vec{i},\vec{j})}$$

$$\Leftrightarrow M \in \text{Axe}(O;\vec{j}) \quad \text{ou} \quad M \in \text{Droite d'équation } y = x$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{I}_0$ est la réunion de deux droites passant par O.
L'une a pour vecteur directeur $\vec{j}$.
C'est l'axe $(O;\vec{j})$.
L'autre a pour vecteur directeur $\vec{i}+\vec{j}$. C'est la première bissectrice du plan xOy muni du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



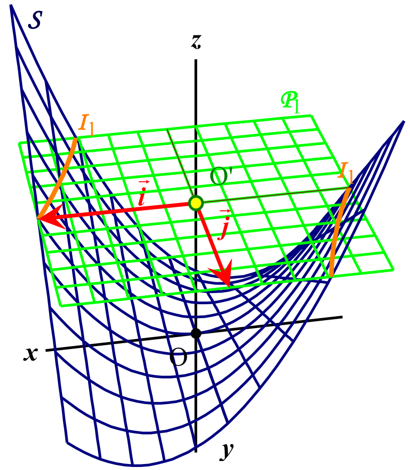
c) Dans ce paragraphe, λ est un réel non nul. Cela va avoir son importance !
Inspirons-nous de ce qui vient d'être fait ! Si on appelle O' le point de coordonnées $(0;0;\lambda)$, alors un repère du plan $\mathcal{P}_\lambda$ est $(O';\vec{i},\vec{j})$. C'est en quelques sortes la projection orthogonale du repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace dans le plan $\mathcal{P}_\lambda$.

L'ensemble $\mathcal{I}_\lambda$ est inclus dans le plan $\mathcal{P}_\lambda$. Nous pouvons écrire :

$$\overbrace{M(x;y) \in \mathcal{I}_\lambda \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - x \times y = \lambda}_{\text{Car }\begin{cases} M\in\mathcal{P}_\lambda \Rightarrow z=\lambda \\ M\in\mathcal{S} \Rightarrow z=x^2-x\times y\end{cases}} \Leftrightarrow \underbrace{x \times y = x^2 - \lambda \Leftrightarrow y = x - \frac{\lambda}{x}}_{\substack{\text{On peut diviser par x qui est nécessairement non nul.} \\ \text{En effet, si x=0, alors } x^2-x\times y=0-0=0\neq\lambda...}}}^{\text{Le point M appartient au plan } \mathcal{P}_\lambda \text{ muni du repère } (O';\vec{i},\vec{j})}$$

<u>Conclusion :</u> l'intersection $\mathcal{I}_\lambda$ est la courbe de la fonction $f(t) = t - \frac{\lambda}{t}$ représentée dans le repère $(O';\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe a deux asymptotes : l'axe $(O';\vec{j})$ et la première bissectrice du plan $\mathcal{P}_\lambda$. C'est une hyperbole.

Ci-contre, l'ensemble $\mathcal{I}_1$ est la courbe de la fonction $f(t) = t - \frac{1}{t}$ représentée dans le repère $(O';\vec{i},\vec{j})$ où le point O' a pour coordonnées $(0;0;1)$ ➔



d) A l'instar de ce qui a été fait dans les deux précédentes questions, nous allons "projeter" le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ dans le plan $\mathcal{Q}_\lambda$ dont l'un des vecteurs normaux est $\vec{i}$.
Clairement, les deux autres vecteurs de base $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux vecteurs directeurs du plan et le projeté orthogonal de l'origine O sur le plan $\mathcal{Q}_\lambda$ est le point $O''(\lambda;0;0)$.
Ainsi (et toujours en quelques sortes), le repère orthonormé $(O'';\vec{j},\vec{k})$ du plan $\mathcal{Q}_\lambda$ est-il le projeté orthogonal du repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace sur le plan $\mathcal{Q}_\lambda$.
L'ensemble $\mathcal{J}_\lambda$ est l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{Q}_\lambda$.
Si nous décidons de nous positionner dans l'espace muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ alors :

$$M(x;y;z) \in \mathcal{J}_\lambda = \mathcal{Q}_\lambda \cap \mathcal{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda & \leftarrow M \in \mathcal{Q}_\lambda \\ z = x^2 - x \times y & \leftarrow M \in \mathcal{S} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ \lambda \times y + z = \lambda^2 \end{cases}$$

C'est peu parlant ! Sauf que l'ensemble $\mathcal{J}_\lambda$ est inclus dans le plan $\mathcal{Q}_\lambda$ d'équation $x = \lambda$.

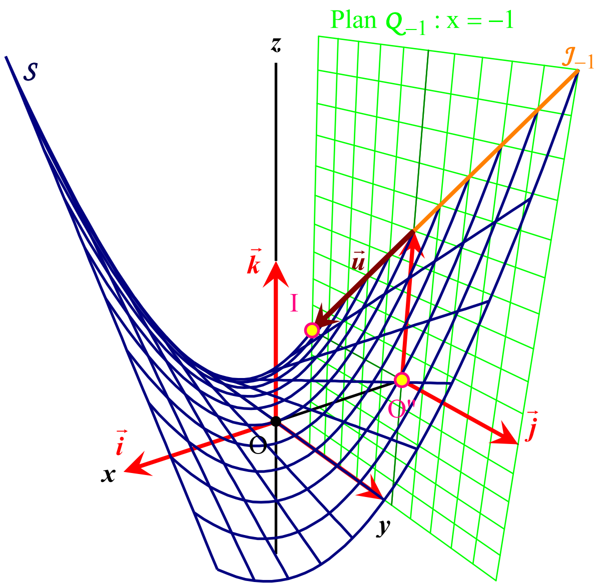
Dans le repère orthonormé $\left(O'';\vec{j},\vec{k}\right)$, l'équivalence précédente devient :

$$M(y;z) \in \mathcal{J}_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \times y + z = \lambda^2$$

λ étant un réel fixé, l'équation cartésienne $\lambda \times y + z - \lambda^2 = 0$ est celle d'une droite :

- qui passe par le point $I(\lambda;0)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}(-1;\lambda)$ si l'on se travaille dans le repère $\left(O'';\vec{j},\vec{k}\right)$ du plan $\mathcal{Q}_\lambda$.
- qui passe par le point $I(\lambda;\lambda;0)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}(0;-1;\lambda)$ si l'on se positionne dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace.

En particulier, lorsque le paramètre λ est égal à -1, l'ensemble $\mathcal{J}_{-1}$ est la droite qui passe par le point $I(-1;-1;0)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}(0;-1;-1)$ ➔



e) Si nous avions un peu de culture, nous pourrions affirmer d'emblée qu'un plan dont l'un des vecteurs normaux est $\vec{j}$ a une équation de la forme $y = \lambda$. Hélas, ce n'est pas le cas !

Alors déterminons une équation du plan $\mathcal{R}$ de vecteur normal $\vec{j}$ et qui passe $A(3;2;1)$ par des méthodes naturelles :

$$M(x;y;z) \in \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Les vecteurs } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)\times 0 + (y-2)\times 1 + (z-1)\times 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2$$

Donc une équation du plan $\mathcal{R}$ est $y = 2$. Comme quoi, si nous avions été plus cultivés...

La "projection orthogonale" du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ dans le plan $\mathcal{R}$ est le repère orthonormé $\left(O_{\mathcal{R}};\vec{i},\vec{k}\right)$ où le point $O_{\mathcal{R}}$ a pour coordonnées $(0;2;0)$.

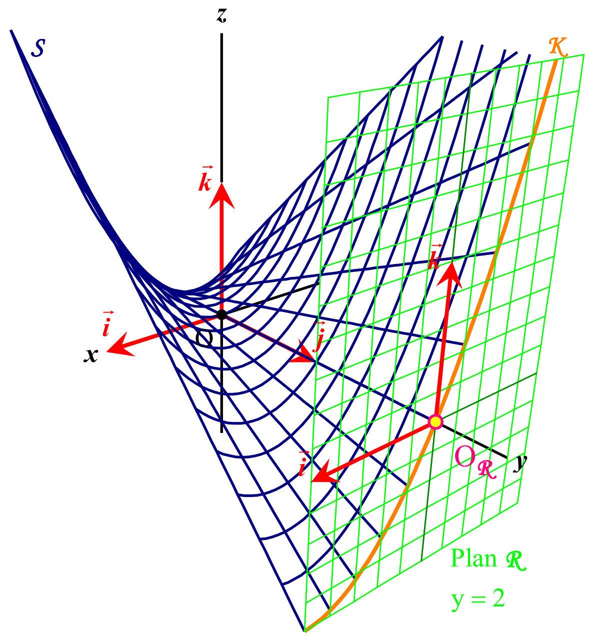
Bien sûr, $O_{\mathcal{R}}$ est la projection orthogonale de O sur $\mathcal{R}$.

L'ensemble $\mathcal{K}$ étant inclus dans ce plan $\mathcal{R}$, déterminons-en une équation dans le repère $\left(O_{\mathcal{R}};\vec{i},\vec{k}\right)$.

$$\overbrace{M(x;z) \in \mathcal{K} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 - x \times 2 = z}_{\text{Car } \begin{cases} M\in\mathcal{R} \Rightarrow y=2 \\ M\in\mathcal{S} \Rightarrow z=x^2-x\times y \end{cases}} \quad \Leftrightarrow \quad z = x^2 - 2\times x}^{\text{Le point M appartient au plan } \mathcal{R} \text{ muni du repère } \left(O_{\mathcal{R}};\vec{i},\vec{k}\right)}$$

<u>Conclusion :</u> l'intersection $\mathcal{K}$ de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{R}$ est la courbe représentative de la fonction $g(t) = t^2 - 2\times t$ représentée dans le repère $\left(O_{\mathcal{R}};\vec{i},\vec{k}\right)$.

Etant la courbe d'une fonction du second degré dans un repère orthonormé, $\mathcal{K}$ est une parabole.



f) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $d = (BC)$ qui passe par le point $B(-1;0;-1)$ et dont l'un des vecteurs directeurs est $\overrightarrow{BC}(2;1;3)$.

$$M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \text{Il existe un réel t tel que } \overrightarrow{BM} = t \times \overrightarrow{BC} \text{ soit } \underbrace{\begin{cases} x = -1 + 2 \times t \\ y = t \\ z = -1 + 3 \times t \end{cases}}_{\text{Représentation paramétrique de } d}$$

➲ Pour déterminer ce qu'est l'intersection $\mathcal{T}$ de cette droite d et notre surface $\mathcal{S}$, nous allons partir à l'aventure ! D'autres diront "procéder par conditions suffisantes..."
Soit $M(x;y;z)$ un point de cette intersection $\mathcal{T}$.

Comme le point M appartient à la droite d alors il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = -1 + 2 \times t \\ y = t \\ z = -1 + 3 \times t \end{cases}$

Comme M appartient aussi à la surface $\mathcal{S}$, alors ses coordonnées en vérifient l'équation et :

$$z = x^2 - x \times y \Leftrightarrow 3.t - 1 = (2.t-1)^2 - (2.t-1) \times t$$
$$\Leftrightarrow 3.t - 1 = 4.t^2 - 4.t + 1 - 2.t^2 + t \Leftrightarrow 0 = 2.t^2 - 6.t + 2$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 3.t + 1 = 0$$

Calculons le discriminant de cette équation du second degré d'inconnue t.

$$\Delta_{t^2-3.t+1=0} = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$

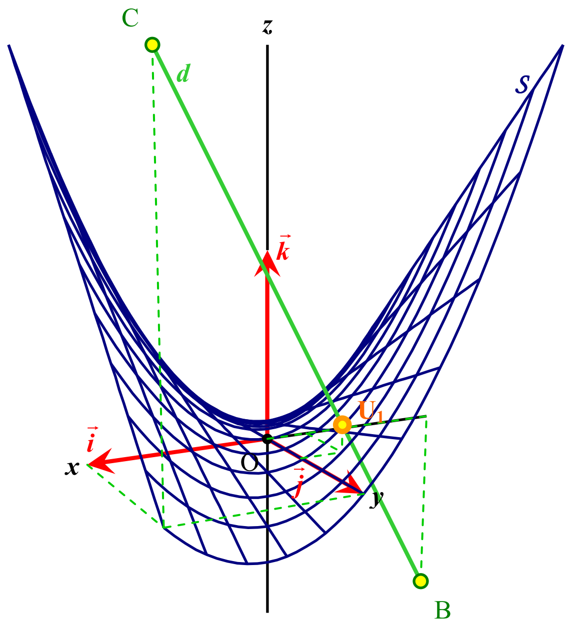
Comme son discriminant est positif, alors l'équation admet deux racines distinctes.

$$t = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad\qquad t = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x = -1 + \cancel{2} \times \dfrac{3-\sqrt{5}}{\cancel{2}} = 2 - \sqrt{5} \\ y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ z = -1 + 3 \times \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{7-3.\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \text{d'où } \begin{cases} x = -1 + \cancel{2} \times \dfrac{3+\sqrt{5}}{\cancel{2}} = 2 + \sqrt{5} \\ y = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ z = -1 + 3 \times \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{7+3.\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Ainsi si M appartient à l'ensemble $\mathcal{T}$, alors il est soit le point
$U_1\left(2-\sqrt{5}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{7-3.\sqrt{5}}{2}\right)$, soit le point $U_2\left(2+\sqrt{5}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{7+3.\sqrt{5}}{2}\right)$.

Mais réciproquement, rien ne dit que ces deux points U_1 et U_2 appartiennent à l'intersection $\mathcal{T}$.
Si nous étions des gens consciencieux, nous devrions le vérifier. Le travail serait fastidieux et nous ramènerait sur les chemins que nous venons d'emprunter.
Donc nous l'admettrons...



<u>Conclusion :</u> la droite d et la surface $\mathcal{S}$ ont deux points d'intersection :

$$U_1\left(2-\sqrt{5}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{7-3.\sqrt{5}}{2}\right)$$

et

$$U_2\left(2+\sqrt{5}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{7+3.\sqrt{5}}{2}\right).$$