Préface et avertissements

Après le **journal de marche d'une première scientifique** publié l'an dernier, la **taverne de l'Irlandais** se devait de poursuivre son oeuvre de corruption de la première scientifique. Après **rêves secrets et devoirs interdits de seconde**, voici ceux de première scientifique.

Le présent document est un récapitulatif des huit devoirs surveillés avec leurs corrigés donnés cette saison 2004-2005 dans une classe de première scientifique. Ceux-ci (les devoirs comme les élèves) respectent plus ou moins les programmes officiels. Mais bien souvent ils les interprètent. Bref™, comme c'est d'habitude !

Contrairement à ce qui avait été fait durant la saison 2003-2004, la quasi-totalité du programme a été traitée cette année et même trépassée dans beaucoup de cas. Reste à savoir ce qu'en ont retenu les élèves ?

Tous les exercices figurant dans le présent document sont originaux, n'ont pas été pris sur un quelconque livre et sont issus du cerveau volcanique de leur auteur. D'ailleurs ils ne sont qu'à lui. Mais qui d'autre voudrait les revendiquer ?

Le présent document n'a aucune valeur officielle. Il n'engage que son auteur.

Les huit devoirs repris dans ce document étaient d'une durée de deux heures. Leurs longueurs et leurs difficultés firent que bien souvent plus de 20 points étaient distribués.

Voici donc Rêves secrets et devoirs interdits de première scientifique : une saison 2004-2005 de devoirs surveillés de mathématiques.

Jérôme ONILLON, professeur (dés)agrégé de maths...

Au sommaire :

Dans la Collection Inquiétantes Confessions,
la taverne de l'Irlandais vous présente

Rêves secrets et devoirs interdits de première Scientifique

une saison 2004-2005 de devoirs surveillés de maths

Edition du jeudi 8 septembre 2005

Au secret de nos vies présentes

Devoir Surveillé No.1

Le contexte

Ce premier devoir qui dura deux heures, intervint au début octobre 2004. Il portait sur :

- Le second degré, les équations produits et quotients, la factorisation des polynômes connaissant une racine.
  La division euclidienne polynomiale avait été introduite.
- Le barycentre et son utilisation.

Il fut assez bien réussi dans l'ensemble. Ce jour là, la calculatrice était autorisée.

L'énoncé

Première partie : la vie rêvée des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes. Chaque résolution sera conclue par l'ensemble des solutions.

$$3.x^2+8.x+10=2-6.x \qquad \frac{2.x+3}{2.x-5}+\frac{2-x}{x-7}\leq 0$$

$$\frac{4}{x+2}+3\geq\frac{2}{x+1} \qquad 3.x+\frac{26}{x+3}\geq 7$$

Seconde partie : le monde merveilleux des barycentres

Le triangle ACD est défini par :

$AC=7\text{cm}$ $\quad AD=5\text{cm}$ $\quad CD=4\text{cm}$

Le point B est défini par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{CB}=\frac{2}{5}.\overrightarrow{AC}$$

Le point J est le barycentre des trois points pondérés $(A;3)$, $(C;5)$ et $(D;4)$.

Dans exercice, chaque point introduit devra être parfaitement défini et construit.

a) Faire une figure correspondant à la situation décrite ci-dessus. Tout au long de l'exercice, diverses choses seront ajoutées à cette figure.

b) Démontrer que le point B est un barycentre des points A et C. On précisera les coefficients de pondération affectés à ces derniers.

c) Construire le point J. On expliquera, détaillera et justifiera le processus de construction de ce barycentre.

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left\|3.\overrightarrow{MA}+5.\overrightarrow{MC}+4.\overrightarrow{MD}\right\|=48$.

d) Déterminer puis représenter sur la figure cet ensemble $\mathcal{E}$.

On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $2.\overrightarrow{MA}-7.\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}$ soient colinéaires.

e) Déterminer, puis représenter sur la figure cet ensemble $\mathcal{F}$.

Dernière partie : on va tout casser !

Le but de cette partie est la résolution de l'inéquation $\dfrac{2.x^4+5.x^2+2}{x^4+x^3-x^2-7.x-6}\geq 0$.

Pour cela, nous devons au préalable factoriser la fraction du premier membre.
Factoriser (casser ou scinder) entièrement un polynôme signifie l'écrire comme étant un produit de facteurs affines de la forme $a.x+b$ et de trinômes du second degré non factorisables (à discriminant négatif) de la forme $a.x^2+b.x+c$.
Bref, rien que des facteurs dont on connaît le signe. Il est alors possible de dresser le tableau de signe du polynôme.

Le polynôme du quatrième degré P est défini pour tout réel x par :

$$P(x)=2.x^4+5.x^2+2$$

a) En s'intéressant à la forme du second degré $F(X)=2.X^2+5.X+2$, factoriser entièrement le polynôme P(x).

Le polynôme Q, lui aussi du quatrième degré, est défini pour tout réel x par :

$$Q(x)=x^4+x^3-x^2-7.x-6$$

b) Déterminer les images par la fonction polynomiale Q de -1 ; 1 et 2.
En utilisant ce qui précède, factoriser entièrement le polynôme Q(x).

c) En utilisant les deux précédentes questions, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{2.x^4+5.x^2+2}{x^4+x^3-x^2-7.x-6}\geq 0$$

Le corrigé

Première partie : la vie rêvée des équations

➲ Résolvons dans ℝ l'équation $3.x^2+8.x+10=2-6.x$ qui semble du second degré.
Notre stratégie consiste à tout ramener dans le premier membre, puis recourir au discriminant.

$$3.x^2+8.x+10=2-6.x \iff 3.x^2+14.x+8=0$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation du second degré.

$$\Delta_{3.x^2+14.x+8}=14^2-4\times3\times8=196-96=100=10^2$$

Son discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x=\frac{-14-10}{2\times3}=\frac{-24}{6}=-4 \qquad \underline{\text{ou}} \qquad x=\frac{-14+10}{2\times3}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$$

Conclusion : l'équation $3.x^2+8.x+10=2-6.x$ a deux solutions que sont -4 et $-\frac{2}{3}$.

➲ Résolvons dans ℝ l'inéquation $\frac{2.x+3}{2.x-5}+\frac{2-x}{x-7}\leq 0$.
Le mieux semble être de rechercher à étudier le signe d'une fraction. Pour additionner les deux fractions composant le premier membre, nous devons préalablement les mettre au même dénominateur : nous optons pour $(2.x-5).(x-7)$.

$$\frac{2.x+3}{2.x-5}+\frac{2-x}{x-7}\leq 0 \iff \frac{(2.x+3).(x-7)}{(2.x-5).(x-7)}+\frac{(2-x).(2.x-5)}{(x-7).(2.x-5)}\leq 0$$

$$\iff \frac{\left[2.x^2-14.x+3.x-21\right]+\left[4.x-10-2.x^2+5.x\right]}{(2.x-5).(x-7)}\leq 0$$

$$\iff \frac{-2.x-31}{(2.x-5).(x-7)}\leq 0$$

Résoudre l'inéquation $\frac{2.x+3}{2.x-5}+\frac{2-x}{x-7}\leq 0$, c'est savoir quand $\frac{-2.x-31}{(2.x-5).(x-7)}$ est négatif ou nul.
Les trois facteurs affines $-2.x-31$; $2.x-5$ et $x-7$ s'annulent respectivement en $-\frac{31}{2}$; $\frac{5}{2}$ et 7.
Nous connaissons leurs signes. Dressons le tableau de signe de la fraction qu'ils constituent

x	$-\infty$		$-\frac{31}{2}$		$\frac{5}{2}$		7		$+\infty$
$-2.x-31$		+	0	–		–		–	
$2.x-5$		–		–	0	+		+	
$x-7$		–		–		–	0	+	
La fraction		+	0	–	‖	+	‖	–	

Conclusion : la fraction est négative ou nulle sur l'ensemble $\left[-\frac{31}{2};2,5\right[\cup\left]7;+\infty\right[$.

C'est l'ensemble des solutions de notre inéquation.

➲ Résolvons dans ℝ l'inéquation $\frac{4}{x+2}+3\geq\frac{2}{x+1}$.
Là encore, le mieux est de chercher à se prononcer sur le signe d'une fraction dont on connaîtra le signe de chacun des facteurs.

$$\frac{4}{x+2}+3-\frac{2}{x+1}\geq 0 \iff \frac{4.(x+1)}{(x+2).(x+1)}+\frac{3.(x+2).(x+1)}{(x+2).(x+1)}-\frac{2.(x+2)}{(x+1).(x+2)}\geq 0$$

$$\iff \frac{\left[4.x+4\right]+\left[3.x^2+9.x+6\right]-\left[2.x+4\right]}{(x+2).(x+1)}\geq 0$$

$$\iff \frac{3.x^2+11.x+6}{(x+2).(x+1)}\geq 0$$

Dans cette dernière fraction, seul le signe du numérateur $N(x)=3.x^2+11.x+6$ nous est inconnu. Pour le connaître, calculons le discriminant de cette forme du second degré.

$$\Delta_{N(x)}=11^2-4\times3\times6=121-72=49=7^2$$

Son discriminant étant positif, N(x) a donc deux racines distinctes.

$$x_1=\frac{-11-7}{2\times3}=-\frac{18}{6}=-3 \qquad \underline{\text{ou}} \qquad x_2=\frac{-11+7}{2\times3}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$$

N(x) est du signe de son coefficient dominant 3, c'est-à-dire positif, à l'extérieur de ses racines -3 et $-\frac{2}{3}$. Il est négatif entre et nul sur celles-ci.
Connaissant les signes de tous ses facteurs, dressons le tableau de signe de la fraction.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$N(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
La fraction		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

Conclusion : la fraction est positive ou nulle sur $\left]-\infty;-3\right] \cup \left]-2;-1\right[\cup \left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$.

C'est aussi l'ensemble des solutions de notre inéquation.

➲ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3.x + \dfrac{26}{x+3} \geq 7$.

La stratégie reste la même : tout ramener dans le premier membre, mettre au même dénominateur $x+3$ pour additionner. Enfin se prononcer sur le signe d''une fraction...

$$3.x + \frac{26}{x+3} - 7 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3.x.(x+3)+26-7.(x+3)}{x+3} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3.x^2+2.x+5}{x+3} \geq 0$$

Dans cette dernière fraction, seul le signe de $N(x) = 3.x^2 + 2.x + 5$ nous échappe !

Pour le connaître, calculons le discriminant de ce polynôme du second degré.

$$\Delta_{N(x)} = 2^2 - 4 \times 3 \times 5 = 4 - 60 = -57$$

Vu que son discriminant est négatif, N(x) est toujours du signe de son coefficient dominant 3, c'est-à-dire toujours positif !

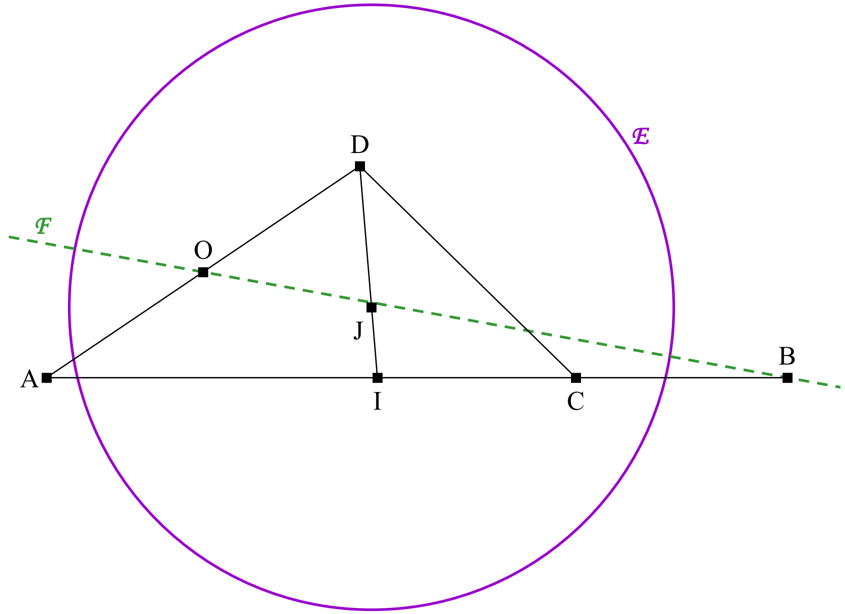
Le tableau de signe de la fraction est désormais à notre portée. Dressons-le !

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$N(x)$		$+$	|	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	
Le quotient		$-$	||	$+$	

Conclusion : la fraction est positive ou nulle après -3. L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $\left]-3;+\infty\right[$.

Seconde partie : le monde merveilleux des barycentres

a) A l'issue de cette partie, la figure est la suivante :



b) Pour pouvoir proclamer que le point B est le barycentre des deux points pondérés $(A;\alpha)$ et $(C;\gamma)$, il nous faut obtenir une relation vectorielle du type $\alpha.\overrightarrow{BA} + \gamma.\overrightarrow{BC} = \vec{o}$.

Le point B est défini par l'égalité $\overrightarrow{CB} = \frac{2}{5}.\overrightarrow{AC}$. Modifions cette dernière !

$$\overrightarrow{CB} = \frac{2}{5}.\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{5.\overrightarrow{CB} = 2.\overrightarrow{AC}}_{\text{On multiplie tout par 5}} \quad \Leftrightarrow \quad 5.\overrightarrow{CB} + \underbrace{2.\overrightarrow{CB} + 2.\overrightarrow{BA}}_{2.\overrightarrow{CA}} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad 2.\overrightarrow{BA} \underbrace{-7.\overrightarrow{BC}}_{7.\overrightarrow{CB}} = \vec{o}$$

Conclusion : le point B est le barycentre des points pondérés $(A;2)$ et $(C;-7)$.

c) J étant le barycentre des points $(A;3)$, $(C;5)$ et $(D;4)$, il est défini par la relation vectorielle :

$$3.\overrightarrow{JA} + 5.\overrightarrow{JC} + 4.\overrightarrow{JD} = \vec{o}$$

Pour pouvoir placer facilement le point J, nous introduisons le barycentre partiel I des points pondérés $(A;3)$ et $(C;5)$. Celui-ci est défini par la relation $3.\overrightarrow{IA}+5.\overrightarrow{IC}=\vec{o}$.

Pour le construire, nous devons la modifier et viser une égalité de la forme $\overrightarrow{AI}=\ldots\overrightarrow{AC}$.

$$3.\overrightarrow{IA}+\underbrace{5.\overrightarrow{IA}+5.\overrightarrow{AC}}_{5.\overrightarrow{IC}}=\vec{o}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad 8.\overrightarrow{IA}=5.\overrightarrow{CA} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AI}=\frac{5}{8}.\overrightarrow{AC}$$

Le barycentre partiel I est donc situé aux cinq huitièmes du segment [AC] à partir de A. En nous appuyant sur le I, il nous est désormais possible de placer J.

A partir de la relation vectorielle $3.\overrightarrow{JA}+5.\overrightarrow{JC}+4.\overrightarrow{JD}=\vec{o}$, nous allons chercher à exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{ID}$.

$$\underbrace{3.\overrightarrow{JA}+5.\overrightarrow{JC}}_{\substack{=8.\overrightarrow{JI}\\ \text{car I est le barycentre}\\ \text{de (A;3) et (C;5)}}}+4.\overrightarrow{JD}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad 8\overrightarrow{JI}+4.\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{ID}=\vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{IJ}=\frac{4}{12}.\overrightarrow{ID}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{ID}$$

Conclusion : le barycentre J est situé au tiers du segment [ID] à partir de I.

d) Pour savoir ce qu'est cet ensemble $\mathcal{E}$, modifions l'égalité qui le caractérise !

$$M\in\mathcal{E} \quad\Leftrightarrow\quad \left\|3.\overrightarrow{MA}+5.\overrightarrow{MC}+4.\overrightarrow{MD}\right\|=48$$

$$\Leftrightarrow\quad \underbrace{\left\|12.\overrightarrow{MJ}\right\|}_{\substack{\text{car J est le barycentre}\\ \text{de (A;3), (C;5) et (D;4)}\\ \text{Réduction d'une somme vectorielle}}}=48 \quad\Leftrightarrow\quad 12\times MJ=48 \quad\Leftrightarrow\quad JM=4$$

Conclusion : $\mathcal{E}$ est aussi l'ensemble des points M du plan dont la distance vis-à-vis de J est égale à 4 : $\mathcal{E}$ est le cercle de centre J et de rayon 4.

e) Là encore, pour déterminer ce qu'est l'ensemble $\mathcal{F}$, nous allons travailler sur la relation qui le caractérise !

$$M\in\mathcal{F} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{2.\overrightarrow{MA}-7.\overrightarrow{MC}}_{\substack{=-5.\overrightarrow{MB}\\ \text{car B barycentre de (A;2) et (C;-7)}}} \text{ colinéaire à } \underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}}_{\substack{=2.\overrightarrow{MO}\\ \text{si on appelle O le milieu de }[AD]\\ \text{aussi isobarycentre de (A;1) et (D;1)}}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \underbrace{\overrightarrow{MB}\text{ colinéaire à }\overrightarrow{MO}}_{\substack{\text{car -5.}\overrightarrow{MB}\text{, }\overrightarrow{MB}\text{, 2.}\overrightarrow{MO}\text{ et }\overrightarrow{MO}\\ \text{ont la même direction}}} \quad\Leftrightarrow\quad \text{Les points M, B et O sont alignés}$$

Conclusion : $\mathcal{F}$ est aussi l'ensemble des points M qui sont alignés avec les points O et B. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}$ n'est autre que la droite (BO).

Dernière partie : on va tout casser !

L'objet de cette partie est la résolution de l'inéquation $\dfrac{2.x^4+5.x^2+2}{x^4+x^3-x^2-7.x-6}\geq 0$. Pour y parvenir, il faut au préalable scinder ou factoriser totalement ses numérateur et dénominateur en des produits dont on connaîtra le signe des facteurs. Puis, nous n'aurons plus qu'à dresser le tableau de signe de la fraction et conclure...

a) On commence par essayer de factoriser le numérateur $P(x)=2.x^4+5.x^2+2$.

Ce dernier est un polynôme de degré 4. La formule du discriminant lui est inapplicable.

Factorisons la forme du second degré $F(X)=2.X^2+5.X+2$. Pour cela, calculons son discriminant :

$$\Delta_{F(X)}=(5)^2-4\times 2\times(2)=25-16=9=3^2$$

Son discriminant étant positif, le trinôme F(X) a donc deux racines distinctes :

$$X_1=\frac{-5-3}{2\times 2}=\frac{-8}{4}=-2 \qquad\qquad X_2=\frac{-5+3}{2\times 2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Ainsi, la forme factorisée de F(X) est-elle :

$$F(X)=2.X^2+5.X+2=2\times\left(X-(-2)\right)\times\left(X-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=(X+2).\underbrace{(2.X+1)}_{2\times(X+1/2)}$$

Ayant factorisé le trinôme F(X), nous allons pouvoir scinder une première fois P(x).

$$P(x)=2.x^4+5.x^2+2=2.\left(x^2\right)^2+5.x^2+2=\underbrace{F\left(x^2\right)=\left(x^2+2\right).\left(2.x^2+1\right)}_{\text{X a été remplacé par }x^2}$$

La question qui se pose à présent, est de savoir s'il est possible d'aller plus loin ? Peut-on casser les deux facteurs du second degré x^2+2 et $2.x^2+1$ composant notre produit.

Les facteurs du second degré x^2+2 et $2.x^2+1$ sont deux sommes d'un carré (toujours positif ou nul) et du nombre positif. Par conséquent, ils sont eux-mêmes toujours positifs. Ils ne sont donc pas factorisables en produits de facteurs affines.

Conclusion : la forme factorisée ultime de P(x) est $\left(x^2+2\right).\left(2.x^2+1\right)$.

b) Calculons les images par la fonction Q de -1 ; 1 et 2.

- $Q(-1)=(-1)^4+(-1)^3-(-1)^2-7\times(-1)-6=1-1-1+7-6=0$
- $Q(1)=(1)^4+(1)^3-(1)^2-7\times(1)-6=1+1-1-7-6=-12$
- $Q(2)=(2)^4+(2)^3-(2)^2-7\times(2)-6=16+8-4-14-6=0$

Les réels -1 et 2 annulant le polynôme Q(x) (comprenez que leurs images par Q sont égales à 0), ils en sont deux racines.
En conséquence de quoi, le polynôme Q(x) est factorisable par les facteurs $\underbrace{x+1}_{x-(-1)}$ et $x-2$. C'est-à-dire que Q(x) peut s'écrire sous la forme :

$$Q(x)=\underbrace{(x+1).(x-2)}_{=x^2-x-2}.\underbrace{(\dots)}_{\text{Une forme du second degré}}$$

Pour déterminer cette forme du second degré, nous pourrions chercher à factoriser Q(x) par $x+1$, puis par $x-2$. Mais on peut aussi factoriser Q(x) par leur produit $x^2-x-2=(x+1).(x-2)$. Ce qui est beaucoup plus rapide !
Pour effectuer cette factorisation, deux méthodes sont envisageables : la division euclidienne ou faire le facteur x^2-x-2 dans l'expression de Q(x). Une seule aurait suffi à notre bonheur, c'est pourquoi nous allons les traiter toutes les deux !

Première méthode : procédons à la division euclidienne du polynôme du quatrième degré $Q(x)=x^4+x^3-x^2-7.x-6$ par le polynôme du second degré x^2-x-2.

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^4+x^3-x^2-7.x-6 & x^2-x-2 \\
\ominus & x^4-x^3-2.x^2 & \overline{x^2+2.x+3} \\
\hline
 & 2.x^3+x^2-7.x-6 & \\
\ominus & 2.x^3-2.x^2-4.x & \\
\hline
 & 3.x^2-3.x-6 & \\
\ominus & 3.x^2-3.x-6 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Par conséquent, nous pouvons conclure :

$$\underbrace{Q(x)}_{\text{dividende}}=\underbrace{\left(x^2-x-2\right)}_{\text{diviseur}}.\underbrace{\left(x^2+2.x+3\right)}_{\text{quotient}}+\underbrace{0}_{\text{reste}}=\underbrace{(x+1).(x-2)}_{x^2-x-2}.\left(x^2+2.x+3\right)$$

Seconde méthode : nous allons faire apparaître le trinôme x^2-x-2 dans l'écriture développée de Q(x).

$$\begin{aligned}
Q(x)&=x^4+x^3-x^2-7.x-6\\
&=\underbrace{x^2.\left(x^2-x-2\right)+x^3+2.x^2}_{x^4}+x^3-x^2-7.x-6\\
&=x^2.\left(x^2-x-2\right)+\underbrace{2.x^3}+x^2-7.x-6\\
&=x^2.\left(x^2-x-2\right)+\underbrace{2.x.\left(x^2-x-2\right)+2.x^2+4.x}_{2.x^3}+x^2-7.x-6\\
&=x^2.\left(x^2-x-2\right)+2.x.\left(x^2-x-2\right)+\underbrace{3.x^2}-3.x-6\\
&=x^2.\left(x^2-x-2\right)+2.x.\left(x^2-x-2\right)+\underbrace{3.\left(x^2-x-2\right)+3.x+6}_{3.x^2}-3.x-6\\
&=x^2.\left(x^2-x-2\right)+2.x.\left(x^2-x-2\right)+3.\left(x^2-x-2\right)\\
&=\left(x^2-x-2\right).\left(x^2+2.x+3\right)=\underbrace{(x+1).(x-2)}_{x^2-x-2}.\left(x^2+2.x+3\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons scindé Q(x) en un produit de deux facteurs affines $x+1$ et $x-2$, ainsi que d'une forme du second degré $x^2+2.x+3$.
Mais cette dernière est-elle factorisable ? Pour le savoir, calculons son discriminant :

$$\Delta_{x^2+2.x+3}=(2)^2-4\times1\times3=4-12=-8$$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $x^2+2.x+3$ n'est pas factorisable. Qui plus est, il est toujours du même signe, c'est-à-dire positif comme son coefficient dominant 1.

Conclusion : la forme factorisée ultime de Q(x) est $(x+1).(x-2).\left(x^2+2.x+3\right)$.

c) Compte tenu de ce qui vient d'être fait, l'inéquation pro(im)posée peut aussi s'écrire :

$$\frac{\overbrace{2.x^4+5.x^2+2}^{P(x)}}{\underbrace{x^4+x^3-x^2-7.x-6}_{Q(x)}}\geq0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\left(x^2+2\right).\left(2.x^2+1\right)}{(x+1).(x-2).\left(x^2+2.x+3\right)}\geq0$$

Connaissant le signe de chacun des facteurs apparaissant dans la forme factorisée de notre fraction, nous pouvons en dresser le tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2+1		$+$	|	$+$	|	$+$	
$2.x^2+1$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x^2+2.x+3$		$+$	|	$+$	|	$+$	
Leur quotient		$+$	||	$-$	||	$+$	

Conclusion : la fraction est positive ou nulle avant -1 et après 2. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]2;+\infty\right[$.

Devoir Surveillé No.2

Le contexte

Ce second devoir de deux heures eut lieu à la fin octobre 2004, juste avant les vacances de Toussaint. La calculatrice était autorisée. Ce devoir reprenait le programme du précédent devoir en y ajoutant l'homothétie. Il portait sur :

- Le second degré, factorisation d'un polynôme, résolution d'une inéquation par tableau de signe.
- Savoir démontrer qu'une fonction du second degré est croissante ou décroissante par l'étude du signe de la différence de deux images.
- Le barycentre.
- L'homothétie.

Ce second devoir fut nettement moins réussi que le précédent car il comportait une grosse partie géométrie. L'initiative n'est pas une qualité partagée par beaucoup qui confondent les maths avec des recettes de cuisine.

L'énoncé

Première partie : on va tout casser, second service !

Le polynôme P est défini pour tout réel x par :

$$P(x) = 3.x^3 - x^2 - 9.x + 10$$

a) Démontrer que -2 est une racine du polynôme P.
En déduire une factorisation du polynôme P(x).

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{3.x^3 - x^2 - 9.x + 10}{7 - 3.x} \geq 0$.

Seconde partie : variations au second degré

La fonction h est définie pour tout réel x par :

$$h(x) = 4.x^2 - 8.x - 21$$

a) Calculer les images par la fonction h de 1 et -2.

b) Déterminer les antécédents par la fonction h de 39.

c) Démontrer que pour tous réels x et y :

$$h(x) - h(y) = 4.(x - y).(x + y - 2)$$

d) Etablir le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;1[$. On justifiera sa réponse.
Etablir le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]1;+\infty[$. On justifiera sa réponse.
Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction h.

Dernière partie : géométrie acrobatique et périlleuse !

ABCD est un trapèze non croisé dont les deux côtés parallèles sont [AB] et [CD]. On appelle O le point d'intersection de ses diagonales [AC] et [BD].
On appelle I le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;-2)$.
On appelle J le symétrique du point C par rapport au point B.
Le point K est défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}.\overrightarrow{AC}$

a) Faire une figure correspondant à la situation décrite ci-dessus. Au cours de l'exercice, certains points ou objets seront rajoutés.
On indiquera la relation vectorielle qui permet de placer le point I.

b) Démontrer que le point J est un barycentre pour les points B et C. On déterminera les coefficients de pondération de ces deux derniers.

c) Démontrer que le point K est un barycentre pour les points A et C. On déterminera les coefficients de pondération de ces deux derniers.

d) Démontrer que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes.

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité de normes :

$$\left\| 3.\overrightarrow{AM} - 2.\overrightarrow{BM} \right\| = \left\| \overrightarrow{CM} - 2.\overrightarrow{BM} \right\|$$

e) Déterminer la nature et les attributs de cet ensemble $\mathcal{E}$.

On appelle h l'homothétie de centre O qui transforme A en C.

f) Construire le point B' qui est l'image du point B par cette homothétie h. On justifiera la construction.

On appelle I' l'image du point I par l'homothétie h.

g) Démontrer que le point I' est un barycentre pour les points pondérés C et D. On précisera les coefficients de pondération de ces deux derniers.

h) Construire le point D', image du point D par l'homothétie h. On justifiera sa construction.

Le corrigé

Première partie : on va tout casser, second service !

Cet exercice est dans la ligne de la troisième partie du premier devoir. Nous ferons référence à cette dernière.

a) Calculons l'image de -2 par le polynôme P.

$$P(-2)=3\times(-2)^3-(-2)^2-9\times(-2)+10=3\times(-8)\underbrace{-4+18+10}=-24\underbrace{+24}=0$$

➲ Comme -2 annule le polynôme P, il est l'une de ses racines et il y a un facteur $x-(-2)=x+2$ dans la forme factorisée de P. Faisons le apparaître !

$$P(x)=\overbrace{3.x^3}^{\text{Combien de fois x+2 ?}}-x^2-9.x+10=\overbrace{3.x^2.(x+2)-6.x^2}^{3.x^3}-x^2-9.x+10$$

$$=3.x^2.(x+2)\overbrace{-7.x^2}^{\text{Combien de fois x+2 ?}}-9.x+10=3.x^2.(x+2)\overbrace{-7.x.(x+2)+14.x}^{-7.x^2}-9.x+10$$

$$=3.x^2.(x+2)-7.x.(x+2)\overbrace{+5.x+10}^{\text{Mais c'est bien sur !}}$$

$$=3.x^2.\underbrace{(x+2)}_{\text{Facteur...}}-7.x.\underbrace{(x+2)}_{\text{...vraiment...}}+5.\underbrace{(x+2)}_{\text{...commun}}=(x+2).\left[3.x^2-7.x+5\right]$$

Conclusion : une forme factorisée du polynôme P est $P(x)=(x+2).\left[3.x^2-7.x+5\right]$.

Nous pourrions factoriser cette second facteur du second degré mais dans quel but ?

b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation proposée. En appliquant la factorisation trouvée à la question précédente, il vient :

$$\frac{3.x^3-x^2-9.x+10}{7-3.x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2).\left[3.x^2-7.x+5\right]}{-3.x+7}\geq 0$$

Les signes des facteurs affines $x+2$ et $-3.x+7$ ne posent aucun problème.

Pour connaître celui de la forme du second degré $N(x)=3.x^2-7.x+5$, calculons son discriminant.

$$\Delta_{N(x)}=(-7)^2-4\times3\times5=49-60=-11$$

Son discriminant étant négatif, la forme du second degré $N(x)=3.x^2-7.x+5$ est toujours du signe de son coefficient dominant 3, elle est toujours positive.

Par conséquent, le tableau de signe du quotient $\dfrac{(x+2).\left[3.x^2-7.x+5\right]}{-3.x+7}$ est :

x	$-\infty$		-2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3.x^2-7.x+5$		$+$		$+$		$+$	
$-3.x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
Leur quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Conclusion : La fraction est positive ou nulle sur l'intervalle $\left[-2;\frac{7}{3}\right[$. C'est l'ensemble des solutions de notre inéquation.

Seconde partie : variations au second degré

a) Calculons les images de 1 et -2 par la fonction du second degré h.

- $h(1)=4\times(1)^2-8\times(1)-21=4-8-21=-25$
- $h(-2)=4\times(-2)^2-8\times(-2)-21=4\times4+16-21=16-5=11$

b) Déterminer les antécédents de 39 par la fonction h, c'est trouver tous les réels x dont l'image par h est égale à 39 ou c'est-à-dire ceux tels que $h(x)=39$. Pour ce faire, résolvons l'équation $h(x)=39$.

$$h(x)=39 \quad\Leftrightarrow\quad 4.x^2-8.x-21=39 \quad\Leftrightarrow\quad 4.x^2-8.x-60=0$$

Calculons le discriminant de cette dernière équation du second degré :

$$\Delta_{4.x^2-8.x-60=0}=(-8)^2-4\times4\times(-60)=64+960=1026=32^2$$

Son discriminant étant positif; l'équation $4.x^2-8.x-60=0$ a donc deux solutions :

$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}=\frac{8-32}{8}=-3 \quad \text{ou} \quad x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a}=\frac{8+32}{8}=5$$

Conclusion : 39 a deux antécédents par la fonction h que sont -3 et 5.

c) Nous allons partir de ce que nous donne l'énoncé : la forme développée réduite de h.
Pour tous réels x et y, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
h(x)-h(y)&=\left[4.x^2-8.x-21\right]-\left[4.y^2-8.y-21\right]\\
&=4.x^2-4.y^2-8.x+8.y-21+21=4.\left(x^2-y^2\right)-8.(x-y)\\
&=4.\underbrace{(x-y)}_{\text{Facteur...}}.(x+y)-8.\underbrace{(x-y)}_{\text{...commun}}=(x-y).\left[4.(x+y)-8\right]\\
&=(x-y).\left[4.x+4.y-8\right]=(x-y).\underbrace{\left[4\times(x+y-2)\right]}_{\text{On factorise par 4}}\\
&=4.(x-y).(x+y-2)
\end{aligned}$$

Cette forme va nous servir pour établir les variations de h.

d) Déterminons le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;1[$.

Soient x et y deux réels de l'intervalle $]-\infty;1[$ tels que $x<y$. Comment leurs images h(x) et h(y) sont-elles rangées ?
Pour le savoir, déterminons le signe de leur différence $h(x)-h(y)$.
Nous pouvons dire :

- Comme $x<y$ alors la différence $x-y$ est inférieure à 0 c'est-à-dire négative.
- Comme $\begin{cases}x<1\\y<1\end{cases}$ alors $\underbrace{x+y}_{\text{Somme des plus petits}} < \underbrace{1+1}_{\text{Somme des plus grands}}$. Donc $x+y-2<0$.

  Par conséquent, le facteur $x+y-2$ est négatif.

Donc leur produit $h(x)-h(y)=\underbrace{4}_{\text{Positif}}.\underbrace{(x-y)}_{\text{Négatif}}.\underbrace{(x+y-2)}_{\text{Négatif}}$ est positif. Donc $\underbrace{h(x)>h(y)}_{\text{car } h(x)-h(y)>0}$

Conclusion : en résumé sur l'intervalle $]-\infty;1[$, si $\underbrace{x<y}_{\text{L'ordre...}}$ alors $\underbrace{h(x)>h(y)}_{\text{...change}}$.

La fonction h changeant l'ordre sur $]-\infty;1[$, elle est donc décroissante sur l'intervalle.

➲ Etablissons le sens de variation de h sur l'autre intervalle $]1;+\infty[$.

x et y sont cette fois deux réels de cet intervalle $]1;+\infty[$ tels que $x<y$. Encore une fois, nous allons nous poser la question : comment leurs images par h sont-elles rangées ?
Nous pouvons dire :

- Le facteur $x-y$ est toujours négatif car $x<y$.
- Comme $\begin{cases}x>1\\y>1\end{cases}$ alors $\underbrace{x+y}_{\text{Somme des plus grands}} > \underbrace{1+1}_{\text{Somme des plus petits}}$. Donc $x+y-2$ est positif.

Par conséquent, leur produit $h(x)-h(y)=\underbrace{4}_{\text{Positif}}.\underbrace{(x-y)}_{\text{Négatif}}.\underbrace{(x+y-2)}_{\text{Positif}}$ est négatif.

Toutes ces émotions vont nous permettre de conclure...

Conclusion : sur l'intervalle $]1;+\infty[$, si $\underbrace{x<y}_{\text{L'ordre...}}$ alors $\underbrace{h(x)<h(y)}_{\text{...est conservé}}$.

h conservant l'ordre sur l'intervalle $]1;+\infty[$, elle y est croissante.

➲ En conclusion de cette question, nous dressons le tableau de variation de h.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h	$+\infty$	↘	-25	↗	$+\infty$

Dernière partie : géométrie acrobatique et périlleuse !

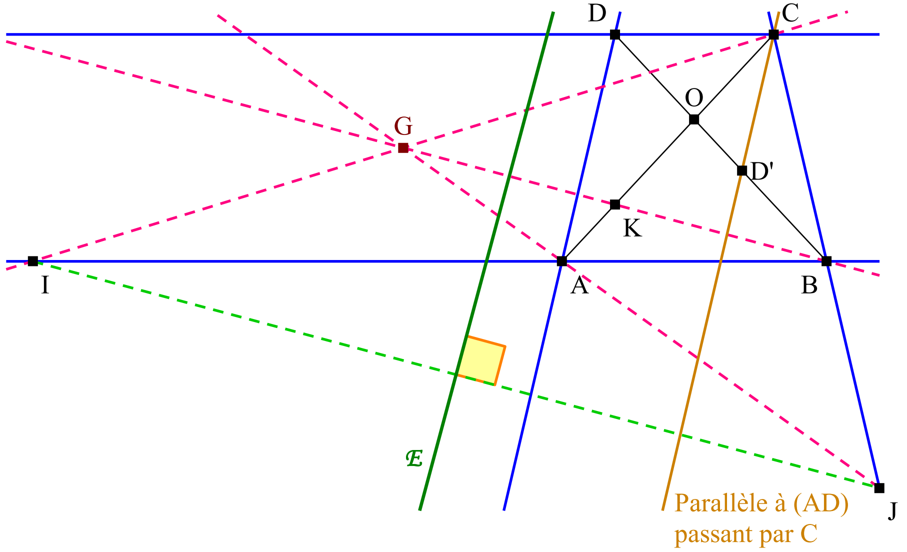
a) Dire que le point I est le barycentre des deux points pondérés $(A;3)$ et $(B;-2)$ signifie qu'il vérifie la relation vectorielle :

$$3.\overrightarrow{IA}-2.\overrightarrow{IB}=\vec{o}$$

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ à partir de cette dernière relation.

$$3.\overrightarrow{IA}\underbrace{-2.\overrightarrow{IA}-2.\overrightarrow{AB}}_{-2.\overrightarrow{IB}\text{ par Chasles}}=\vec{o}\iff\overrightarrow{IA}=2.\overrightarrow{AB}\iff\overrightarrow{AI}=-2.\overrightarrow{AB}$$

Cette dernière relation permet de placer le point I et de construire la figure demandée.



b) Le point J est le symétrique de C par rapport à B. Cela signifie que B est le milieu du segment [JC]. Donc ces trois points vérifient l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{JC}=2.\overrightarrow{JB}\iff 2.\overrightarrow{JB}-\overrightarrow{JC}=\vec{o}$$

Conclusion : J est le barycentre des points pondérés $(B;2)$ et $(C;-1)$.

c) Le point K est défini par la relation vectorielle : $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}.\overrightarrow{AC}$.

La colinéarité induite par cette relation nous indique déjà que le point K appartient à la droite (AC). Il est donc un barycentre des points A et C. Mais pour quels coefficients ? Pour le savoir, nous allons modifier cette relation et aller vers une autre plus barycentrique de la forme $\ldots\overrightarrow{KA}+\ldots\overrightarrow{KC}=\vec{o}$. Nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}.\overrightarrow{AC}\iff 4.\overrightarrow{AK}=\underbrace{\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}}_{=\overrightarrow{AC}}\iff 3.\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{KC}=\vec{o}\iff 3.\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{CK}=\vec{o}$$

Conclusion : K est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(C;1)$.

d) Pour résoudre ce genre de question, il faut juste connaître le truc. Nous allons prouver que les trois droites sont concourantes en introduisant un barycentre.
Les questions précédentes nous ont appris :

- I est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;-2)$.
- J est le barycentre des points pondérés $(B;2)$ et $(C;-1)$. Donc il l'est aussi pour les points pondérés $\underbrace{(B;-2)\text{ et }(C;1)}_{\text{On multiplie tous les coefficients par }-1.}$.
- K est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(C;1)$.

Au vu de ces éléments, nous introduisons le point G que nous définissons comme étant le barycentre des trois points pondérés $(A;3)$; $(B;-2)$ et $(C;1)$.

Ce barycentre G existe car la somme des coefficients $3+(-2)+1=2$ est non nulle.

Ce point G a trois particularités qui découlent des barycentres partiels et de l'associativité du barycentre.

- Comme I est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;-2)$ alors le point G est aussi le barycentre des points $\underbrace{(I;3+(-2)=1)}_{(A;3)\text{ et }(B;-2)}$ et $(C;1)$.

  Or le barycentre de deux points appartient à la droite définie par ces derniers. C'est une histoire de relation vectorielle et de colinéarité...
  Donc G appartient à la droite (CI). Pour être plus précis, G est même le milieu du segment [CI].

- Comme le point J est le barycentre des points pondérés $(B;-2)$ et $(C;1)$ alors le point G est aussi le barycentre des points $(A;3)$ et $\underbrace{(J;(-2)+1=-1)}_{(B;-2)\text{ et }(C;1)}$.

  Donc le point G appartient à la droite (AJ).

- Comme le point K est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(C;1)$ alors le point G est aussi le barycentre des points $(B;-2)$ et $\underbrace{(K;3+1=4)}_{(A;3)\text{ et }(C;1)}$.

  Donc le point G appartient la droite (BK).

Conclusion : les trois droites non parallèles (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes en un point G qui est le milieu du segment [CI] mais surtout le barycentre des points pondérés $(A;3)$; $(B;-2)$ et $(C;1)$.

e) Modifions l'égalité définissant l'appartenance à $\mathcal{E}$ pour en savoir plus sur cet ensemble.

$$M \in \mathcal{E} \iff \underbrace{\left\|3.\overrightarrow{AM} - 2.\overrightarrow{BM}\right\|}_{\substack{\text{I barycentre de} \\ (A;3) \text{ et } (B;-2).}} = \underbrace{\left\|\overrightarrow{CM} - 2.\overrightarrow{BM}\right\|}_{\substack{\text{J barycentre de} \\ (B;-2) \text{ et } (C;1).}} \iff \underbrace{\left\|\left(3+(-2)\right).\overrightarrow{IM}\right\| = \left\|\left((-2)+1\right).\overrightarrow{JM}\right\|}_{\substack{\text{Théorème de réduction des sommes} \\ \text{vectorielles appliqué à gauche et à droite}}}$$

$$\iff \left\|\overrightarrow{IM}\right\| = \left\|-\overrightarrow{JM}\right\| \iff IM = JM$$

$\iff$ Le point M est équidistant des points I et J

Conclusion : $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points du plan équidistant des points I et J.
Autrement dit, $\mathcal{E}$ est le médiatrice du segment [IJ].

f) Avec l'homothétie h, le centre O, le point B et son image B' sont alignés. Donc nous savons déjà que B' est sur la droite (OB).
Ensuite, comme les images respectives des points A et B sont les points C et B' alors l'image de la droite (AB) par h est la droite (CB'). Qui plus est, ces deux droites sont parallèles. Car par une homothétie, une droite et son image son image sont parallèles.
Cela nous amène à dire que le point B' appartient également à la parallèle à la droite (AB) passant par C.
Conclusion : l'image $B' = h(B)$ est le point d'intersection de la droite (OB) et de la parallèle à (AB) passant par C. Autrement dit, le point B' est le point D.

g) Les points I', C et D sont les images respectives des points I, A et B par h.
Or une homothétie conserve les barycentres avec les coefficients de pondération.
Donc si I est le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;-2)$ alors le point $I' = h(I)$ est le barycentre des points pondérés $(C = h(A);3)$ et $(D = h(B);-2)$.

h) Cette question est la répétition de la 3f.
Avec l'homothétie h, le centre O, le point D et son image D' sont alignés. Donc le point D' appartient à la droite (OD).
Ensuite, comme $\begin{cases} h(A) = C \\ h(D) = D' \end{cases}$ alors l'image de la droite (AD) par l'homothétie h est la droite (CD') qui lui est parallèle. Donc D' appartient aussi à la parallèle à (AD) passant par C.
Conclusion : l'image D' est le point d'intersection de la droite (OD) et de la parallèle à la droite (AD) passant par C.

Devoir Surveillé No.3

Le contexte

Ce devoir d'une durée de deux heures eut lieu à la fin novembre 2004. Il portait sur :

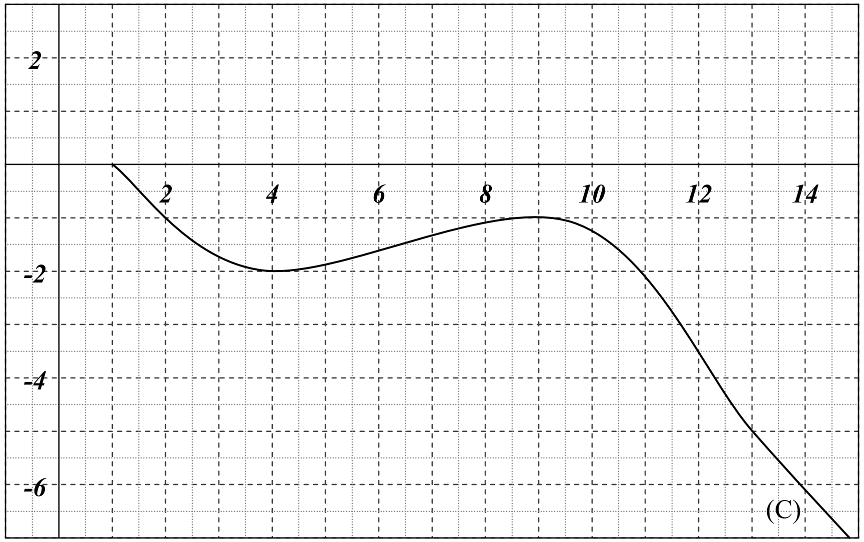
- La composée de deux fonctions, variations de la fonction inverse.
- Les limites et les asymptotes. Ce que l'on résume pompeusement par les comportements asymptotiques.
  Contrairement à l'année précédente, la règle du terme dominant pour les polynômes ou du quotient des termes dominants pour les fonctions rationnelles n'était pas acceptée...

Le premier exercice fut plutôt bien réussi. Le second dont il avait été conseillé de le garder pour la fin, fut peu traité. La dernière partie fut un petit désastre. Il allait falloir revenir dessus au devoir suivant...

L'énoncé

Première partie : graphiquement et inversement (remix)

La fonction f est définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$. Sa courbe représentative (C) est la suivante :



De plus, on sait de la fonction f :

- L'image de 1 par la fonction f est 0.
- f est croissante sur l'intervalle $[4;9]$ et décroissante sur les intervalles $[1;4]$ et $[9;+\infty[$.
- Lorsque x tend vers $+\infty$, f(x) tend vers $-\infty$.

a) Déterminer graphiquement les images de 4 ; 9 et 11 par la fonction f.

b) Déterminer graphiquement les antécédents de -1 par la fonction f.

On appelle g la fonction inverse de la fonction f. Ainsi pour tout x, avons-nous :

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

On note (C') la courbe représentative de cette fonction g.
En s'aidant du graphique ci-contre, répondre aux questions ci-dessous :

c) A quelle condition, $g(x)$ existe-t-il ?
En déduire l'ensemble de définition de la fonction g.

d) Déterminer $g(2)$, $g(4)$, $g(9)$ et $g(13)$.

e) De quelles fonctions, la fonction g est-elle la composée ?
Déterminer les variations de la fonction g sur les intervalles $]1;4]$, $[4;9]$ et $[9;+\infty[$.

f) Dresser le tableau de signe de g(x) sur son ensemble de définition.

g) Déterminer la limite de g(x) lorsque x tend vers 1 par la droite.
Quelle conséquence graphique cela a-t-il ?

h) Déterminer la limite de g(x) lorsque x tend vers $+\infty$ de g(x).
Quelle conséquence graphique cela a-t-il ?

i) En s'aidant des divers éléments rencontrés au cours de l'exercice, tracer sur le graphique ci-contre une courbe pouvant être la courbe (C'). On fera figurer sur le graphique ses diverses asymptotes

Seconde partie : interlude sans limite

Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction $j(x)=\sqrt{\frac{4.x^4+1}{x^2+1}}-x$

Dernière partie : à propos d'une fonction rationnelle h

La fonction rationnelle h est définie par :

$$h(x) = \frac{4.x^2 + 12.x + 5}{2.x + 4}$$

On appelle (C) la courbe représentative de cette fonction h.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction rationnelle h.

b) Calculer les images par h de -3 et 2.
Déterminer le ou les antécédents de 0 par la fonction h.

c) Déterminer les limites de h(x) lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.

d) Déterminer les limite à gauche, puis à droite de -2 de la fonction h.
Quelle(s) conséquence(s) graphique(s) ces limites ont-elles ?

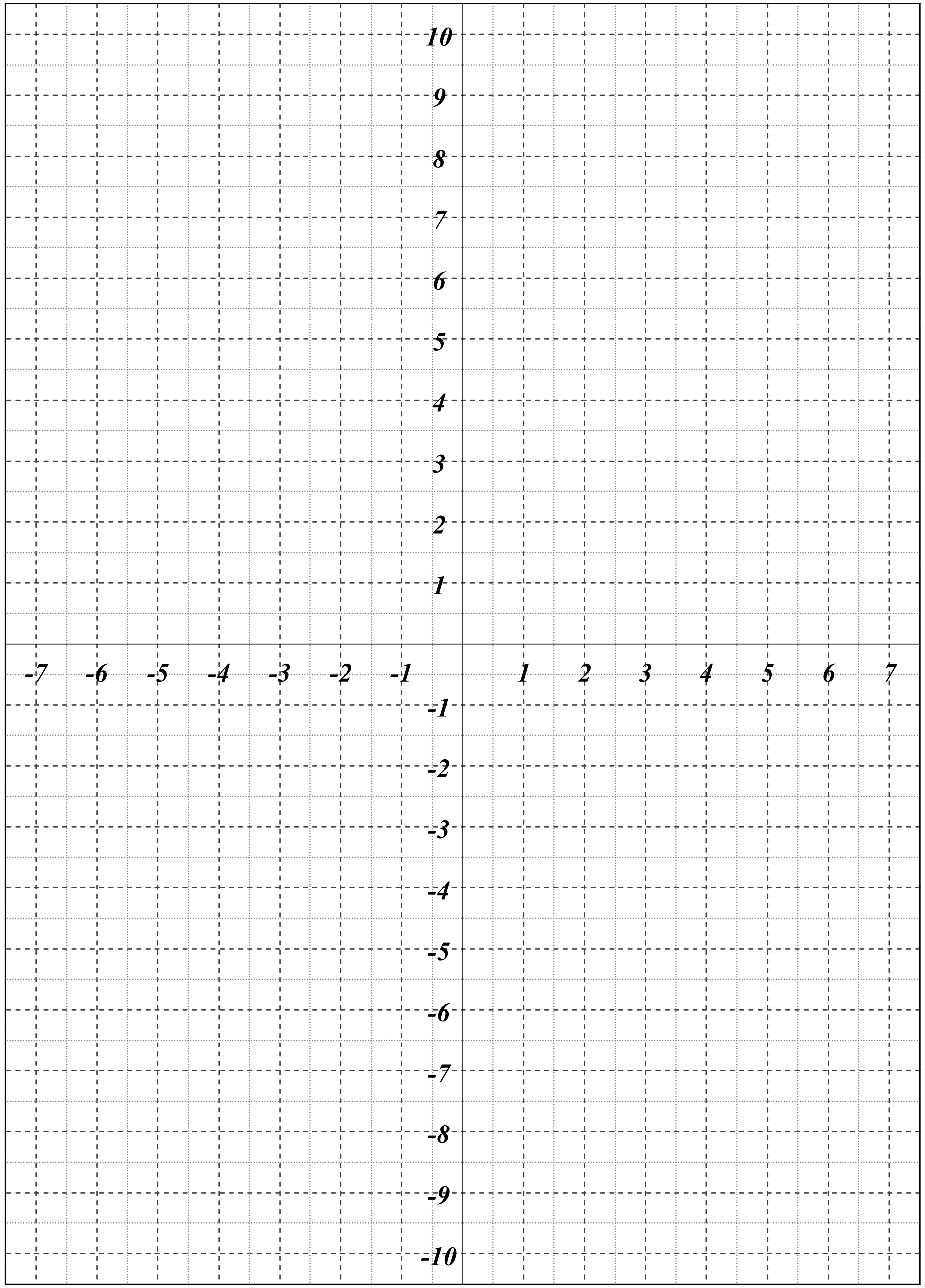
e) Déterminer trois a, b et c tels que pour tout $x \in D_h$, on ait :

$$h(x) = a.x + b + \frac{c}{2.x + 4}$$

f) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2.x + 2$ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.
Etudier la position relative de la courbe (C) et de son asymptote Δ.

g) Démontrer que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$.
Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.
Conclure cette question en dressant le tableau de variation de h.

h) Dans le repère ci-contre, tracer la courbe (C) ainsi que les deux asymptotes rencontrées au cours de l'exercice.



Le corrigé

Première partie : graphiquement et inversement (remix)

a) D'après le graphique, les images respectives de 4 ; 9 et 11 par la fonction f sont -2 ; -1 et -2.

b) D'après le graphique, exactement deux points de la courbe (C) ont une ordonnée égale à -1. Ils ont pour abscisses 2 et 9. Ce sont les deux antécédents de -1 par f.

c) La fonction g est l'inverse de f. Tous les réels sauf 0 peuvent être inversés. Ainsi :

$$\mathrm{g}(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \text{Son dénominateur } \mathrm{f}(x) \text{ est non nul} \Leftrightarrow \underbrace{x \in]1;+\infty[}_{\text{D'après le graphique}}$$

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction g est $]1;+\infty[$

d) Pour déterminer les images demandées par g, il faut au préalable connaître celles par f. Cela se fait au moyen au graphique.

$$g(2)=\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{-1}=-1 \qquad g(4)=\frac{1}{f(4)}=\frac{1}{-2}=-0,5$$

$$g(9)=\frac{1}{f(9)}=\frac{1}{-1}=-1 \qquad g(13)=\frac{1}{f(13)}=\frac{1}{-5}=-0,2$$

e) La fonction g est la composée de la fonction f suivie de la fonction inverse. Cette dernière est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$. Connaissant les variations de f, nous allons pouvoir obtenir celles de g. Voyons cela !

- Sur l'intervalle $]1;4]$, nous avons la situation suivante :

  $$x \in]1;4] \xrightarrow[\text{décroissante sur }]1;4]]{\text{f}} f(x) \in [-2;0[\xrightarrow[\substack{\text{décroisssante sur }]-\infty;0[\\ \text{donc sur } [-2;0[}]{\text{Inverse}} g(x)$$

  Donc la composée g est croissante sur l'intervalle $]1;4]$. L'ordre changeant à deux reprises, du début sur la fin il est conservé.

- Sur l'intervalle $[4;9]$, la situation est la suivante :

  $$x \in [4;9] \xrightarrow[\text{croissante sur } [4;9]]{\text{f}} f(x) \in [-2;-1] \xrightarrow[\substack{\text{décroisssante sur }]-\infty;0[\\ \text{donc sur } [-2;-1]}]{\text{Inverse}} g(x)$$

  L'ordre ne change qu'une seule fois. Donc g est décroissante sur $[4;9]$.

- Sur l'intervalle $[9;+\infty[$, la situation est la suivante :

  $$x \in [9;+\infty[\xrightarrow[\substack{\text{décroissante} \\ \text{sur } [9;+\infty[}]{\text{f}} f(x) \in]-\infty;-1] \xrightarrow[\substack{\text{décroisssante sur }]-\infty;0[\\ \text{donc sur }]-\infty;-1]}]{\text{Inverse}} g(x)$$

  Donc la composée g est croissante sur l'intervalle $[9;+\infty[$.

f) Un nombre non nul et son inverse ont le même signe. Par conséquent, la fonction g est négative sur son ensemble de définition $]1;+\infty[$ à l'instar de f.

g) Lorsque x tend vers 1 par la droite, f(x) tend vers 0^- (car f est négative d'après sa courbe). Donc son inverse g(x) tend vers $\frac{1}{0^-}=-\infty$.

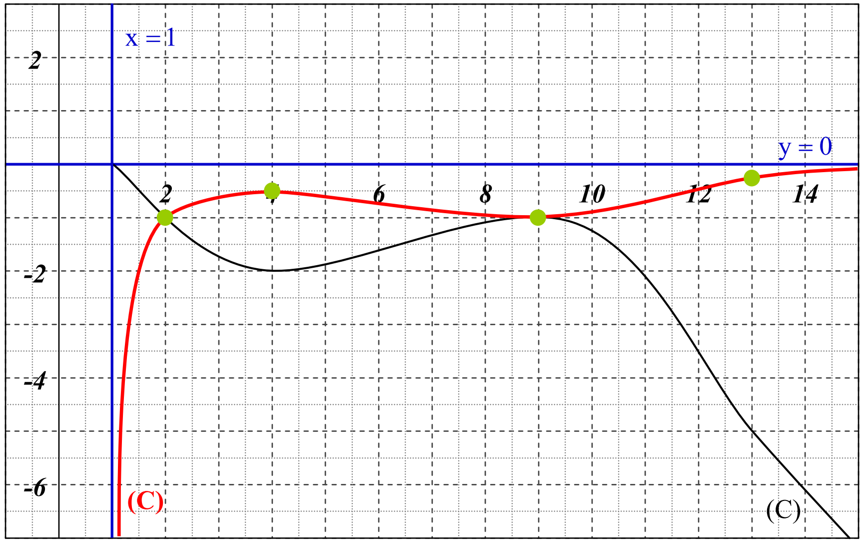
Par conséquent, la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe (C') représentant g : cette dernière plonge le long de cette première lorsque x se rapproche de 1 par la droite.

***Note :** envisager une limite à gauche de 1 est complètement stupide car les fonctions f et g n'y sont pas définies. Il est très probable que certains y ont pensé...*

h) Lorsque x tend vers $+\infty$, f(x) tend vers $-\infty$ d'après l'énoncé. Donc son inverse g(x) tend vers $\frac{1}{-\infty}=0^-$.

En conséquence, la droite d'équation $y=0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C') au voisinage de $+\infty$.

i) Cette question est une sorte de conclusion de l'exercice. Au cours de celui-ci, des éléments caractéristiques de la courbe (C') ont été mis en évidence.
A commencer par les deux asymptotes découvertes aux questions 1.g et 1.h. C'est par elles que nous commencerons.
Puis on place les quatre points fournis par les calculs d'images de la question 1.d.
Enfin, on esquisse une courbe passant par ces quatre points et s'appuyant sur les deux asymptotes.
La courbe (C') représentant la fonction g peut être celle qui suit :



Seconde partie : interlude sans limite

Examinons j(x) sous la forme qui nous est proposée.

Quand x tend vers $+\infty$, les quantités $4.x^4+1$ et x^2+1 tendent vers $+\infty$.

Donc leur quotient $\dfrac{4.x^4+1}{x^2+1}$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Essayons de lever cette dernière en modifiant l'écriture de j(x). Nous allons factoriser ses numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts. Puis, ils s'expliqueront !

Pour tout réel $x>0$ (on travaille au voisinage de $+\infty$), nous avons :

$$j(x)=\underbrace{\sqrt{\frac{4.x^4+1}{x^2+1}}}_{\text{On travaille sous la racine}}-x=\sqrt{\frac{x^4.\left(4+\frac{1}{x^4}\right)}{x^2.\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}-x=\sqrt{\frac{x^4}{x^2}.\frac{4+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}}-x=\sqrt{x^2.\frac{4+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}}-x$$

Voyons si l'indétermination est levée. Quand x tend vers $+\infty$:

- x^2 tend vers $+\infty$.
- $4+\dfrac{1}{x^4}$ et $1+\dfrac{1}{x^2}$ tendent respectivement vers $4+0^+=4$ et $1+0^+$.

  Donc leur quotient tend vers $\dfrac{4}{1}=4$.

Donc $\dfrac{4.x^4+1}{x^2+1}$ tend vers $(+\infty)\times 4=+\infty$. Par suite, $\sqrt{\dfrac{4.x^4+1}{x^2+1}}$ s'en va aussi vers $+\infty$.

Par conséquent en $+\infty$, j(x) est une forme indéterminée du type $\underbrace{\infty}_{\sqrt{\dots}}-\underbrace{\infty}_{x}$.

Visiblement, nous n'avons pas été assez loin. Reprenons notre travail sur j(x).

Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$j(x)=\sqrt{x^2.\frac{4+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}}-x=\underbrace{\sqrt{x^2}}_{\substack{=|x|\\ \text{Mais x}\\ \text{est positif}}}\times\sqrt{\frac{4+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}}-x=x\times\sqrt{\frac{4+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}}-x=x.\left[\sqrt{\frac{4+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}}-1\right]$$

Voyons si cette fois, tous les blocages sont levés.

Quand x tend vers $+\infty$, la différence $\sqrt{\dfrac{4+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}}-1$ tend vers $\sqrt{\dfrac{4}{1}}-1=2-1=1$.

Donc $j(x)$ tend vers $\underbrace{(+\infty)}_{x}\times\underbrace{1}_{[\dots]}=+\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x)=+\infty$.

Dernière partie : à propos d'une fonction rationnelle h

Il existe de multiples manières de traiter cette partie. Si vous souhaitez voir un florilège des techniques possibles, reportez-vous au journal d'une première scientifique saison 2003-2004 ou à la seconde partie du quatrième devoir. Pour le temps présent, nous nous contenterons d'utiliser les techniques les plus dans le programme. Nous nous abstiendrons d'employer pas la division euclidienne des polynômes.

a) La fonction h(x) est un quotient de deux polynômes. La seule chose qui peut l'empêcher d'exister est que son dénominateur soit nul.

Le quotient h(x) existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $2.x+4\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x\neq -2$

Conclusion : à l'exception de -2, tous les réels ont une image par h.

Par suite, l'ensemble de définition de la fonction h est $\mathbb{R}\setminus\{-2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$.

b) Calculons les images de -3 et 2 par la fonction h. C'est du boulot pour la machine !

- $h(-3)=\dfrac{4\times(-3)^2+12\times(-3)+5}{2\times(-3)+4}=\dfrac{4\times9-36+5}{-6+4}=\dfrac{5}{-2}=-2,5$
- $h(2)=\dfrac{4\times(2)^2+12\times(2)+5}{2\times(2)+4}=\dfrac{4\times4+24+5}{4+4}=\dfrac{45}{8}=5,625$

➲ Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h, c'est déterminer tous les réels x dont l'image par h est égale 0. Pour ce faire, nous allons résoudre <u>dans l'ensemble de définition de h</u> l'équation $h(x)=0$.

Dans l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, le quotient h(x) existe quoiqu'il arrive. Il est donc inutile de se préoccuper de la nullité du dénominateur.
Et sous réserve qu'elle existe, pour qu'une fraction soit nulle il faut et il suffit que son numérateur le soit.

$$h(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{h(x)=\frac{4.x^2+12.x+5}{2.x+4}=0}_{\text{Sur } \mathbb{R}\backslash\{-2\}\text{, ce quotient existe toujours. Une fraction qui existe est nulle si et....}} \Leftrightarrow \underbrace{4.x^2+12.x+5=0}_{\text{...seulement si son numérateur l'est.}}$$

Pour résoudre cette dernière équation du second degré, calculons son discriminant.

$$\Delta_{4.x^2+12.x+5=0}=(12)^2-4\times4\times5=144-80=64=8^2$$

Son discriminant étant positif, notre équation a deux solutions distinctes :

$$x=\frac{-12-8}{2\times4}=\frac{-20}{8}=-\frac{5}{2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-12+8}{2\times4}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Conclusion : 0 a deux antécédents par la fonction h que sont $-2,5$ et $-0,5$.

c) Déterminons la limite de h(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
Voyons ce que nous donne la forme de h(x) proposée par l'énoncé.
Quand x tend vers $+\infty$:

- Le numérateur $4.x^2+12.x+5$ s'en va vers $+\infty$.
- Le dénominateur $2.x+4$ tend lui aussi vers $+\infty$.

Donc leur quotient h(x) est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$ même si on peut penser qu'en fin de compte, le numérateur du second degré impose sa loi sur le dénominateur affine...
Afin de nous prononcer, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur de h(x) par leurs termes les plus forts. Et après, nous verrons ce qu'il résultera de cette confrontation.

Pour tout $\underbrace{x\in\mathbb{R}\backslash\{-2;0\}}_{\text{Pour inverser x...}}$, nous pouvons écrire :

$$h(x)=\frac{4.x^2+12.x+5}{2.x+4}=\frac{x^2}{x}\times\frac{4+\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{4}{x}}=x\times\frac{4+\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{4}{x}}$$

Voyons si l'indétermination est levée. Quand x tend vers $+\infty$:

- $4+\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2}$ tend vers $4+0^++0^+=4$.
- $2+\frac{4}{x}$ tend vers $2+0^+=2$

Donc h(x) tend vers $(+\infty)\times\frac{4}{2}=+\infty$.

➲ Pour trouver la limite lorsque x tend vers $-\infty$ de h(x), réutilisons l'écriture établie précédemment. Elle est valable également au voisinage de $-\infty$.
Quand x tend vers $-\infty$:

- $4+\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2}$ tend vers $4+0^-+0^+=4$.
- $2+\frac{4}{x}$ tend vers $2+0^-=2$

Donc h(x) tend vers $(-\infty)\times\frac{4}{2}=-\infty$.

Note : *si à ce moment de l'exercice, nous avions eu la forme décomposée de la h, il n'y aurait pas eu d'indétermination. Les limites aux infinis nous auraient été données par la partie affine de h.*

d) Quand x se rapproche de -2 par la gauche c'est-à-dire en y étant inférieur :

- Le numérateur $4.x^2+12.x+5$ tend vers $4\times(-2)^2+12\times(-2)+5=-3$.
- Le dénominateur $2.x+4$ tend vers $2\times(-2)+4=0$ mais en étant négatif.
  En effet, comme $x<-2$ alors $2.x<-4$ donc $2.x+4<0$.
  On résume tout cela en disant que $2.x+4$ tend vers 0^-.

Donc leur quotient h(x) tend vers $\frac{-3}{0^-}=+\infty$.
Le quotient est positif car ses numérateur et dénominateur sont négatifs.

De même, quand x tend vers -2 par la droite, c'est-à-dire par valeurs supérieures :

- Le numérateur $4.x^2+12.x+5$ tend toujours vers -3.
- Le dénominateur $2.x+4$ tend vers 0^+.
  Il est positif car $x>-2$ donc $2.x>-4$ donc $2.x+4>0$.

Par conséquent leur quotient h(x) tend vers $\dfrac{-3}{0^+}=-\infty$.

Conclusion : $\underbrace{\lim_{x\to-2^-} h(x)=+\infty}_{\text{Limite à gauche}}$ et $\underbrace{\lim_{x\to-2^+} h(x)=-\infty}_{\text{Limite à droite}}$

Quand x se rapproche de -2 par la gauche ou par la droite, la courbe (C) qui représente h s'envole ou plonge se collant ainsi de plus en plus à la droite verticale d'équation $x=-2$. C'est ce qui fait de cette dernière une asymptote à la courbe de (C).

e) Nous allons décomposer la fonction rationnelle h(x) en faisant apparaître son dénominateur $2.x+4$ dans chacun des termes de son numérateur $4.x^2+12.x+5$.
Pour tout réel $x\in\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, nous pouvons écrire :

$$h(x)=\frac{\overbrace{4.x^2}^{\text{Combien de fois 2.x+4 ?}}+12.x+5}{2.x+4}=\frac{\overbrace{2.x\times(2.x+4)-8.x}^{4.x^2}+12.x+5}{2.x+4}=\overbrace{\frac{2.x\times(2.x+4)}{2.x+4}+\frac{4.x+5}{2.x+4}}^{\text{On fractionne afin de pouvoir simplifier la première fraction}}$$

$$=2.x+\frac{\overbrace{4.x}^{\text{Combien de fois 2.x+4 ?}}+5}{2.x+4}=2.x+\frac{\overbrace{2\times(2.x+4)-8}^{4.x}+5}{2.x+4}=2.x+\overbrace{\frac{2\times(2.x+4)}{2.x+4}+\frac{-3}{2.x+4}}^{\text{On refractionne et on simplifie...}}$$

$$=2.x+2+\frac{-3}{2.x+4}$$

Conclusion : la forme décomposée de la fonction rationnelle est :

$$h(x)=\frac{4.x^2+12.x+5}{2.x+4}=\underbrace{2.x+2}_{\text{Partie affine}}+\underbrace{\frac{-3}{2.x+4}}_{\text{Partie inverse}}$$

f) Pour prouver que la droite Δ d'équation $y=2.x+2$ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis, nous allons établir qu'en allant vers ceux-ci la différence d'ordonnées $h(x)-[2.x+2]$ entre la courbe (C) et la droite Δ tend vers 0.
Calculons justement cette différence d'ordonnées.

Pour tout réel $x\neq-2$, nous avons :

$$(C)-\Delta=h(x)-\underbrace{[2.x+2]}_{\text{Mais c'est la partie affine de h !?!}}=\underbrace{2.x+2+\frac{-3}{2.x+4}}_{\text{Forme décomposée de h}}-[2.x+2]=\frac{-3}{2.x+4}$$

Or lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, le dénominateur $2.x+4$ tend lui aussi vers $-\infty$ ou vers $+\infty$. Donc son inverse $\dfrac{-3}{2.x+4}$ tend vers $\dfrac{-3}{\infty}=0$.

Conclusion : Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(C)-\Delta=0$ alors la droite Δ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage des infinis. En allant vers ceux-ci, la courbe (C) colle de plus en plus à la droite Δ.

➲ Pour connaître la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ, c'est-à-dire savoir qui est au-dessus de l'autre, étudions le signe de leur différence d'ordonnées $(C)-\Delta=h(x)-[2.x+2]=\dfrac{-3}{2.x+4}$.
Le tableau de signe de ce dernier quotient ne pose aucun problème.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
-3		$-$		$-$	
$2.x+4$		$-$	0	$+$	
$(C)-\Delta$		$+$	‖	$-$	
Position relative		La courbe (C) est au-dessus de son asymptote Δ	‖	La courbe (C) est au-dessous de son asymptote Δ	

g) Pour établir les variations de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;-2[$, nous allons nous appuyer sur son écriture décomposée.
Sa partie affine $f(x)=2.x+2$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ car son coefficient directeur 2 est positif. Elle l'est donc en particulier sur l'intervalle $]-\infty;-2[$.

Sa partie inverse $g(x)=\dfrac{-3}{2.x+4}$ peut être vue comme étant la composée suivante :

$$\underset{]-\infty;-2[}{\underset{\in}{x}} \xrightarrow[\text{Fonction affine croissante}]{u(t)=2.t+4} \underset{]-\infty;0[}{\underset{\in}{2.x+4}} \xrightarrow[\text{Décroissante sur }]-\infty;0[]{\text{Inverse}} \underset{]-\infty;0[}{\underset{\in}{\frac{1}{2.x+4}}} \xrightarrow[\text{Fonction affine décroissante}]{v(t)=-3.t} \frac{-3}{2.x+4}$$

Dans le montage ci-dessus, l'ordre change exactement deux fois. Donc du début sur la fin, g conserve l'ordre. Donc la partie inverse g est croissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$

Conclusion : Comme les deux fonctions f et g sont croissantes sur $]-\infty;-2[$, il en va de même pour leur somme h.

➲ Pour établir le sens de variation de h sur $]-2;+\infty[$, nous allons utiliser une autre méthode que celle employée sur le précédent intervalle.

Soient x et y deux réels de l'intervalle $]-2;+\infty[$ tels que $x<y$.

Cherchons comment leurs images respectives h(x) et h(y) sont rangées.

Pour le savoir, nous allons essayer de connaître le signe de leur différence :

$$h(x)-h(y)=\left[2.x+2+\frac{-3}{2.x+4}\right]-\left[2.y+2+\frac{-3}{2.y+4}\right]$$

$$=2.x-2.y+\underbrace{\frac{-3}{2.x+4}+\frac{3}{2.y+4}}_{\text{Additionnons ces deux fractions}}=2.(x-y)+\frac{-3.(2.y+4)+3(2.x+4)}{(2.x+4).(2.y+4)}$$

$$=2.(x-y)+\frac{6.x-6.y}{(2.x+4).(2.y+4)}=2.\overbrace{(x-y)}^{\text{Facteur...}}+\frac{6.\overbrace{(x-y)}^{\text{...commun}}}{(2.x+4).(2.y+4)}$$

$$=(x-y).\left[2+\frac{6}{(2.x+4).(2.y+4)}\right]$$

Déterminons les signes de chacun des facteurs apparaissant dans cette différence factorisée.

- Comme $x<y$ alors la différence $x-y$ est inférieure à 0 donc négative.
- Comme x et y appartiennent à l'intervalle $]-2;+\infty[$ alors les facteurs $2.x+4$ et $2.y+4$ sont positifs.

  Donc il en va de même pour leur produit et son inverse $\dfrac{6}{(2.x+4).(2.y+4)}$.

  Donc le facteur $2+\dfrac{6}{(2.x+4).(2.y+4)}$ est aussi positif.

Par conséquent, le produit $h(x)-h(y)=\underbrace{(x-y)}_{\text{Négatif}}.\underbrace{\left[2+\frac{6}{(2.x+4).(2.y+4)}\right]}_{\text{Positif}}$ est négatif.

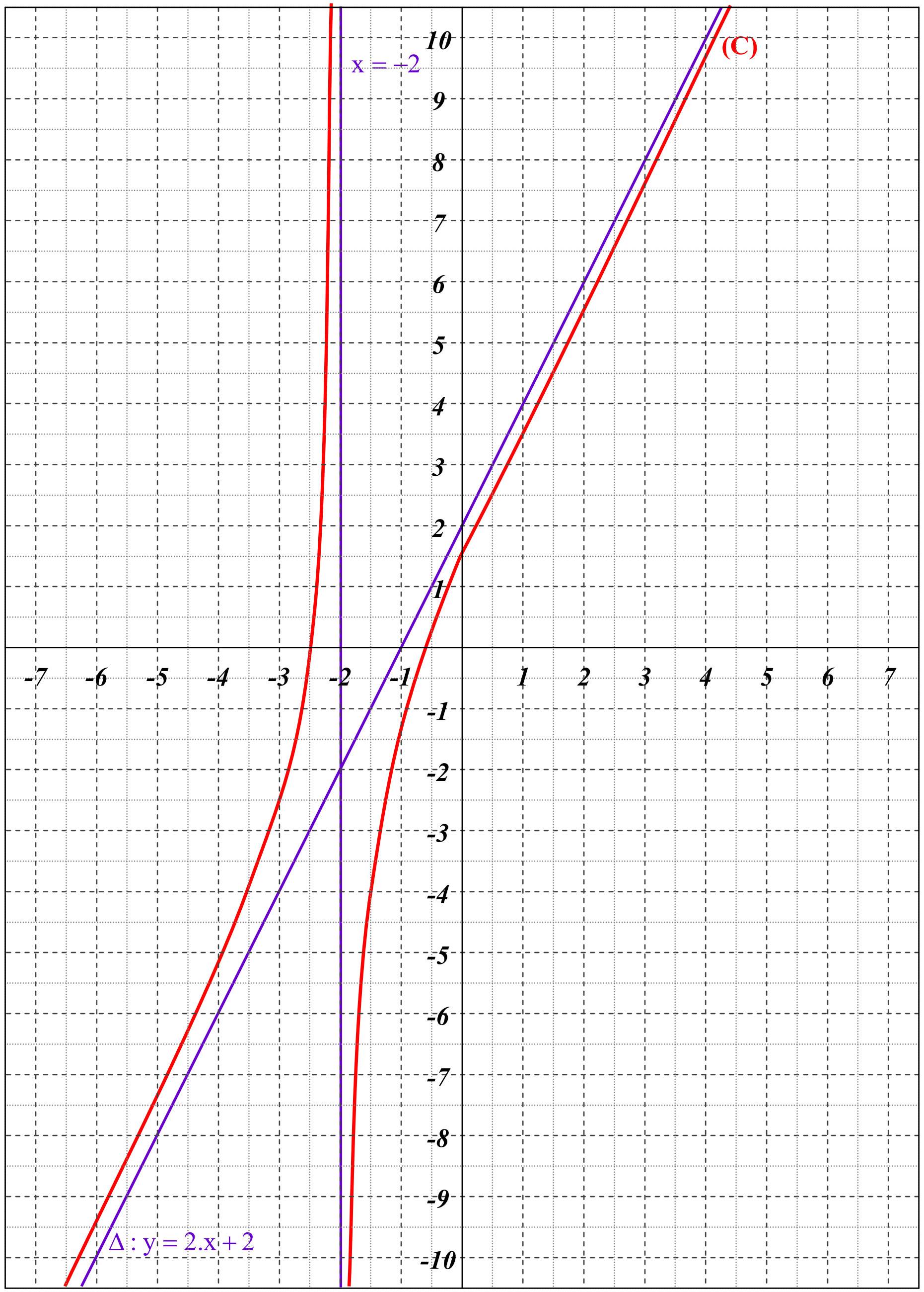
Conclusion : sur $]-2;+\infty[$, si $\underbrace{x<y}_{\text{L'ordre...}}$ alors $h(x)-h(y)<0$ donc $\underbrace{h(x)<h(y)}_{\text{...est conservé}}$.

Comme elle y conserve l'ordre, la fonction h est croissante sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

➲ Finalement le tableau de variation de la fonction h est :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
h			$+\infty$ ‖		$+\infty$
		↗	‖	↗	
	$-\infty$		‖ $-\infty$		

h) Les premières choses à tracer sont les deux asymptotes à la courbe (C) découvertes aux questions 3.d et 3.f. Puis par quelques points fournis par les images calculées, par les antécédents de 0 ou par la calculatrice, on construit la courbe à deux branches qu'est (C). Cela donne le résultat suivant :


(C)
x = −2
Δ : y = 2.x + 2

Devoir Surveillé No.4

Le contexte

Ce quatrième devoir de deux heures eut lieu à la veille des vacances de Noël 2004. Il portait sur :

- Limites et asymptotes.
- Nombre dérivé et tangente à une courbe, dérivées des fonctions usuelles, utilisation pour établir les variations d'une fonction.
  La dérivée de la composée n'avait pas été vue.

Ce devoir fut assez bien réussi. Un devoir similaire avait déjà été donné l'année passée. Seul le dernier exercice demeura inaccessible.

L'énoncé

Première partie : illusions et vraisemblances

La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-2;9\right]$. Sa courbe représentative (C) est tracée ci-contre.
Les segments fléchés et tracés en pointillés représentent les tangentes à la courbe (C) à ses points d'abscisses 1 ; 3 ; 5 et 8. La courbe (C) n'admet que deux tangentes horizontales.
Sans justification et à l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :

a) Compléter les égalités suivantes :

$f\left(1\right)=$ $\qquad\qquad$ $f'\left(3\right)=$

$f'(5)=$ $\qquad\qquad$ $f\left(8\right)=$

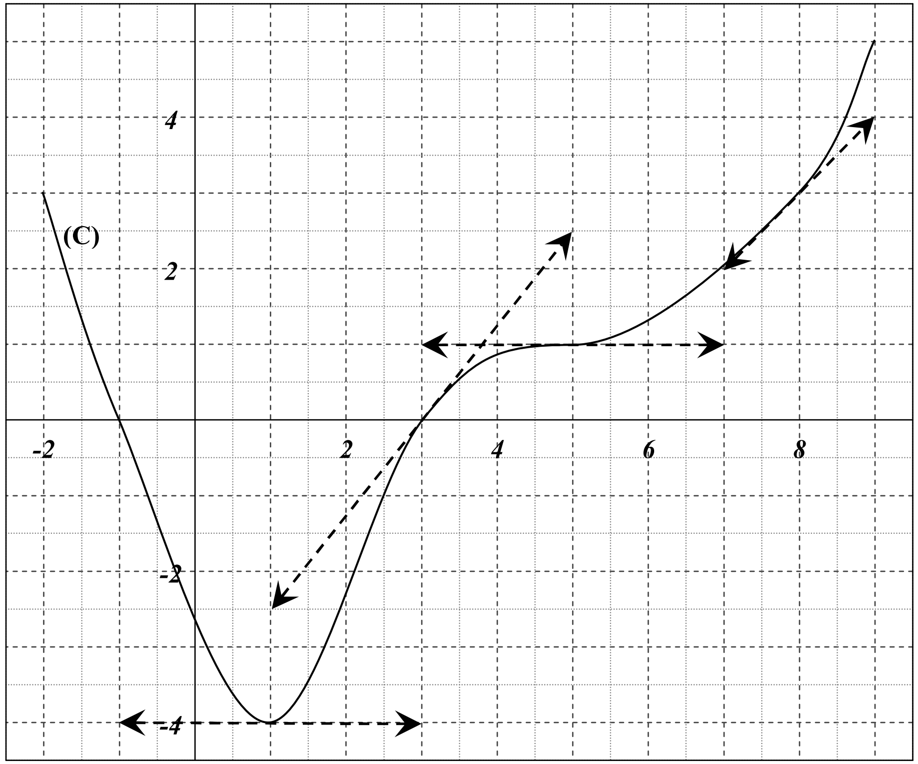
b) Donner une estimation du nombre dérivé de la fonction f en -1 .

....

c) Résoudre dans l'intervalle $\left[-2;9\right]$ les inéquations suivantes :

$f(x)\leq 0$ $\qquad\qquad$ $f'(x)>0$

S = ... $\qquad$ S = ...



Seconde partie : un degré trop loin ?

La fonction polynomiale g est définie pour tout réel x par :

$$g(x)=x^4+2.x^3-5.x^2-12.x+7$$

On informe l'aimable participant que l'image de $\frac{3}{2}$ par g est égale à $-\frac{167}{16}=-10,4375$.

a) Déterminer les images par la fonction g de -1 et -2 .

b) Déterminer les limites de la fonction g lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$. On justifiera ses réponses.

c) Pourquoi la fonction g est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Calculer la dérivée $g'(x)$.
Démontrer que -1 est une racine de la dérivée $g'(x)$.
En déduire une factorisation de $g'(x)$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction g. On expliquera sa démarche tout en évitant d'être trop long.

Troisième partie : il était une fois...la fonction rationnelle h

La fonction rationnelle h est définie par :

$$h(x)=\frac{x^2-3.x-2}{2-x}$$

On appelle (C) la courbe représentant la fonction h. De plus, on sait :

$h(-2)=2$ $\quad$ $h(0)=-1$ $\quad$ $h(3)=2$ $\quad$ $h(4)=-1$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h. On justifiera sa réponse.

b) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x\in D_h$, on ait :

$$h(x)=a.x+b+\frac{c}{2-x}$$

c) Déterminer <u>toutes les limites</u> de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition D_h. On précisera les éventuelles conséquences sur (C) découlant de celles-ci.

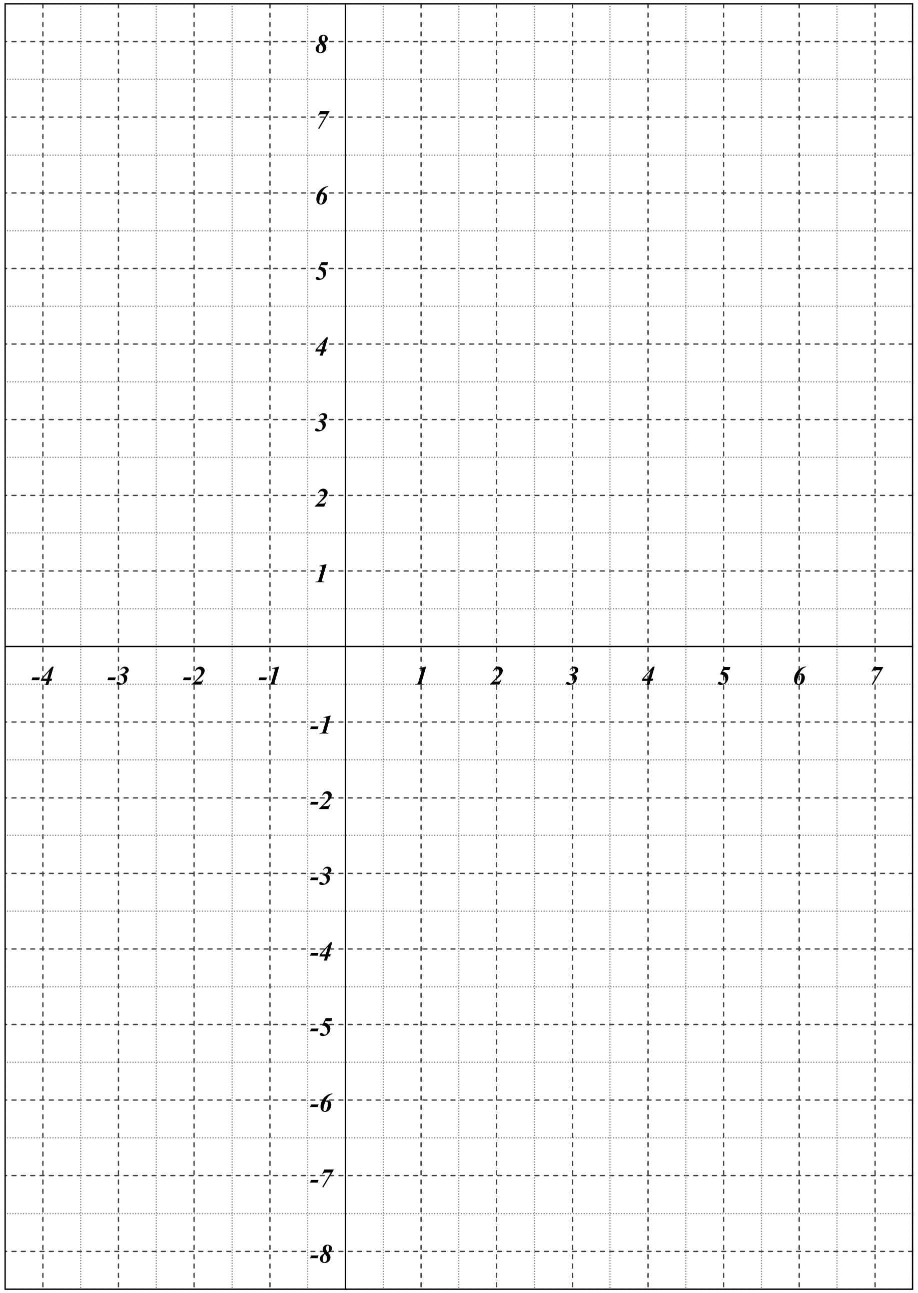
d) Démontrer que la courbe (C) admet aux voisinages des infinis (c'est-à-dire en $-\infty$ et en $+\infty$) une asymptote Δ dont on précisera l'équation.
Etudier la position relative de la courbe (C) et de cette asymptote Δ.

e) Pourquoi la fonction h est-elle dérivable sur son ensemble de définition D_h ?
En dérivant la fonction h, démontrer que pour tout $x\in D_h$:

$$h'(x)=\frac{-x^2+4.x-8}{(2-x)^2}$$

En déduire le tableau de variation de la fonction h.

f) En utilisant tout ce qui précède, dresser dans le repère ci-contre une courbe pouvant être (C). On fera apparaître les diverses droites rencontrées au cours de l'exercice.



Dernière partie : que reste-t-il de nos racines ?

La fonction j est définie pour tout réel x de l'intervalle $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ par :

$$j(x)=\sqrt{3.x+1}$$

En s'intéressant à la limite d'un certain quotient, déterminer le nombre dérivé de la fonction j en 8.

Le corrigé

Première partie : Illusions et vraisemblances

a) Les images de 1 et 8 par la fonction f sont $f(1)=-4$ et $f(8)=3$.

Les nombres dérivés de la fonction f en 3 et 5 sont les coefficients directeurs des tangentes à la courbe (C) en ces points.

La tangente à la courbe (C) en $x=3$ monte de 5 graduations en ordonnées lorsque l'on progresse de 4 en abscisse. Son coefficient directeur $f'(3)$ est donc égal à $\frac{5}{4}$.

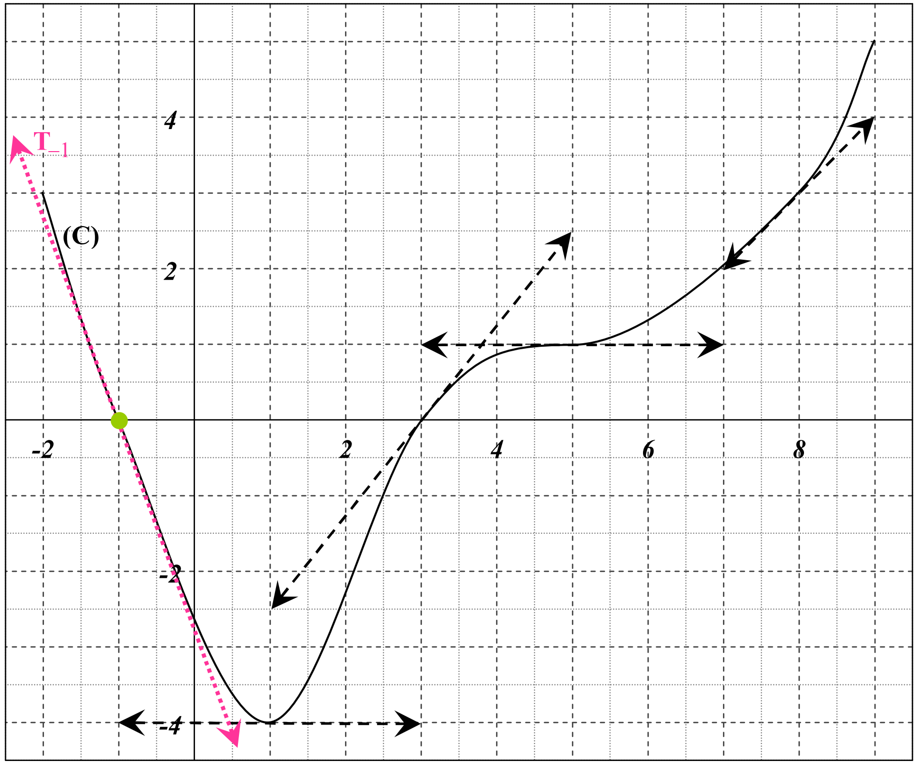
La tangente à (C) en $x=5$ est horizontale. Donc son coefficient directeur $f'(5)$ est nul.

b) Pour répondre à cette question, traçons une esquisse de la tangente T_{-1} à la courbe (C) en $x=-1$. Pour ce faire, nous allons prolonger en une droite une portion de la courbe (C) se trouvant autour du point de coordonnées $(-1;0)$.

On observe alors que le coefficient directeur $f'(-1)$ de la tangente présumée T_{-1} est compris entre $-2,5$ et -3.

c) L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leq 0$ est l'intervalle $[-1;3]$.

Pour résoudre l'inéquation $f'(x)>0$, nous devons considérer les points de la courbe (C) où le coefficient directeur de la tangente est strictement positif, c'est-à-dire où la tangente est montante ou croissante. L'ensemble des solutions est donc $]1;5[\cup]5;9]$



Seconde partie : un degré trop loin ?

a) Calculons les images de -1 et 2 par la fonction g.

$$g(-1)=(-1)^4+2\times(-1)^3-5\times(-1)^2-12\times(-1)+7=1-2-5+12+7=13$$

$$g(-2)=(-2)^4+2\times(-2)^3-5\times(-2)^2-12\times(-2)+7=16-16-20+24+7=11$$

b) Sous son écriture initiale $g(x)=x^4+2.x^3-5.x^2-12.x+7$, la fonction g est aux infinis une forme plusieurs fois indéterminée. De façon à lever ces indéterminations, factorisons g(x) par sa puissance dominante x^4.

Pour tout réel non nul x, nous pouvons écrire :

$$g(x)=x^4.\left[1+2.\frac{x^3}{x^4}-5.\frac{x^2}{x^4}-12.\frac{x}{x^4}+7.\frac{1}{x^4}\right]=x^4.\left[1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{12}{x^3}+\frac{7}{x^4}\right]$$

A présent, voyons si nous pouvons nous prononcer sur les limites de g aux infinis.
Lorsque x tend vers $-\infty$:

- x^4 tend vers $+\infty$
- $1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{12}{x^3}+\frac{7}{x^4}$ tend vers $1+0^- - 0^+ - 0^- + 0^+ = 1$

Donc g(x) tend vers $(+\infty)\times 1 = +\infty$.
Pour ce qui est de la limite en $+\infty$, nous pouvons écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^4}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}} . \underbrace{\left[1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{12}{x^3}+\frac{7}{x^4}\right]}_{\substack{\downarrow\\ 1+0^+-0^+-0^++0^+}} = (+\infty)\times 1 = +\infty$$

c) La fonction g étant une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle l'est elle aussi.
Calculons sa dérivée.

$$g'(x) = \underbrace{\left(x^4+2.x^3-5.x^2-12.x+7\right)'}_{\text{La dérivée de la somme est...}} = \underbrace{4.x^3+2\times 3.x^2-5\times 2.x-12\times 1+0}_{\text{...est la somme des dérivées}}$$

$$= 4.x^3+6.x^2-10.x-12$$

Si nous voulons connaître les variations de la fonction g, il va nous falloir au préalable déterminer le signe de sa dérivée $g'(x)$. C'est justement l'objet des questions suivante.

➲ Calculons l'image de -1 par le polynôme $g'(x)$

$$g'(-1) = 4\times(-1)^3+6\times(-1)^2-10\times(-1)-12 = -4+6+10-12 = 16-16 = 0$$

-1 annulant le polynôme $g'(x)$, il est l'une de ses racines. Par conséquent, $g'(x)$ est factorisable par $x-(-1)=x+1$.

➲ Pour factoriser le polynôme $g'(x)$ par $x+1$, on peut poser la division euclidienne de ce premier par ce second.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4.x^3+6.x^2-10.x-12 & x+1 \\ \cline{3-3}
\ominus & 4.x^3+4.x^2 & 4.x^2+2.x-12 \\ \cline{2-2}
 & 2.x^2-10.x-12 & \\
\ominus & 2.x^2+2.x & \\ \cline{2-2}
 & -12.x-12 & \\
\ominus & -12.x-12 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Par suite : $\underbrace{g'(x)=4.x^3+6.x^2-10.x-12}_{\text{dividende}} = \underbrace{(x+1)}_{\text{diviseur}}.\underbrace{\left(4.x^2+2.x-12\right)}_{\text{quotient}} + \underbrace{0}_{\text{reste}}$

Une autre méthode consiste à faire apparaître le facteur $x+1$ dans chacun des termes de la somme $g'(x)$ de façon à pouvoir factoriser par celui-ci.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$g'(x) = 4.x^3+6.x^2-10.x-12 = \overbrace{4.x^2.(x+1)-4.x^2}^{4.x^3}+6.x^2-10.x-12$$

$$= 4.x^2.(x+1)+2.x^2-10.x-12 = 4.x^2.(x+1)+\overbrace{2.x.(x+1)-2.x}^{2.x^2}-10.x-12$$

$$= 4.x^2.(x+1)+2.x.(x+1)-12.x-12 = 4.x^2.(x+1)+2.x.(x+1)\overbrace{-12.(x+1)}^{-12.x-12}$$

$$= (x+1).\left(4.x^2+2.x-12\right)$$

Dans les deux cas, la factorisation pourrait être poursuivie en s'intéressant à la forme du second degré qu'est $N(x)=4.x^2+2.x-12$. Ne sachant où aller, nous ne resterons là..
c) La dernière écriture de $g'(x)$ ouvre la voie à la connaissance de son signe.
Le signe du facteur affine $x+1$ n'est pas un problème. Par contre, nous devons déterminer celui du facteur du second degré $N(x)=4.x^2+2.x-12$. Pour cela, calculons son discriminant.

$$\Delta_{N(x)} = 2^2-4\times 4\times(-12) = 4+192 = 196 = 14^2$$

Son discriminant étant positif, le trinôme $N(x)$ a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-14}{2\times 4} = \frac{-16}{8} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2+14}{2\times 4} = \frac{-12}{8} = -1,5$$

Nous pouvons affirmer que N(x) est positif comme son coefficient dominant 4 avant -2 et après $-1,5$. Et aussi qu'il est négatif entre ses deux racines, c'est-à-dire sur $\left]-2;-1,5\right[$.

Connaissant le signe de chacun de ses facteurs, le tableau de signe de $g'(x)$ nous est ouvert. Et par suite, celui de variation de g aussi.

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$4.x^2+2.x-12$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	11	$\nearrow$	13	$\searrow$	$-\frac{167}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

Troisième partie : il était une fois…la fonction rationnelle h

a) Un quotient a un sens si et seulement si son dénominateur est non nul. Par suite :

Le quotient $h(x)=\dfrac{x^2-3.x-2}{2-x}$ existe $\Leftrightarrow$ son dénominateur $2-x\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x\neq 2$

A l'exception de 2, tous les réels ont une image par la fonction h.

Conclusion : l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}\setminus\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

b) Il s'agit de décomposer la fonction rationnelle h. Pour y parvenir, une première méthode consiste à diviser euclidiennement le numérateur par son dénominateur.

Posons la division euclidienne de $x^2-3.x-2$ par $-x+2$:

$$\begin{array}{rl|l} & x^2-3.x-2 & -x+2 \\ \ominus & x^2-2.x & -x+1 \\ \hline & -x-2 & \\ \ominus & -x+2 & \\ \hline & -4 & \end{array}$$

Il résulte de cette opération l'égalité : $\underbrace{x^2-3.x-2}_{\text{Dividende}}=\underbrace{(2-x)}_{\text{Diviseur}}.\underbrace{(-x+1)}_{\text{Quotient}}+\underbrace{(-4)}_{\text{Reste}}$

Par suite, pour tout réel $x\in D_h$, il vient alors :

$$h(x)=\frac{(2-x).(-x+1)}{2-x}+\frac{-4}{2-x}=\underbrace{-x+1}_{\text{On a simplifié par } 2-x}+\frac{4}{\underbrace{x-2}_{\text{On a simplifié par -1}}}$$

Une seconde méthode consiste à faire apparaître le dénominateur à partir de chaque terme du numérateur, puis à simplifier au fur et à mesure.

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, nous pouvons écrire :

$$h(x)=\frac{x^2-3.x-2}{2-x}=\frac{\overbrace{(-x).(2-x)+2.x}^{x^2}-3.x-2}{2-x}=\frac{(-x).(2-x)}{2-x}+\frac{-x-2}{2-x}$$

$$=-x+\frac{\overbrace{1\times(2-x)-2}^{-x}-2}{2-x}=-x+\frac{1\times(2-x)}{2-x}+\frac{-4}{2-x}$$

$$=-x+1+\frac{-4}{2-x}=-x+1+\frac{4}{\underbrace{x-2}_{\text{On simplifie par -1}}}$$

c) Il y a au total quatre limites à chercher : une par borne de son ensemble de définition.

➲ Déterminons la limite de h en $-\infty$. Nous utiliserons l'écriture décomposée de h(x).

Lorsque x tend vers $-\infty$:

- $-x+1$ tend vers $+\infty$
- $x-2$ tend vers $-\infty$ donc $\dfrac{4}{x-2}$ tend vers $\dfrac{4}{-\infty}=0^-$

Donc h(x) tend vers $+\infty$.

➲ Déterminons la limite de h(x) lorsque x tend vers 2 par la gauche. Pour cela, nous allons nous servir de la forme initiale de h(x).

Lorsque x tend vers 2 par la gauche, c'est-à-dire par valeurs inférieures :

- Le numérateur $x^2-3.x-2$ tend vers $2^2-3\times 2-2=4-6-2=-4$
- Le dénominateur $2-x$ tend vers 0^+ .
  En effet comme $x<2$ alors $0<2-x$ autrement dit $2-x$ est positif

Donc le quotient h(x) tend vers $\dfrac{-4}{0^+}=-\infty$

➲ Déterminons la limite de h(x) lorsque x tend vers 2^+, toujours avec la forme initiale.
Lorsque x tend vers 2 par la gauche, c'est-à-dire par valeurs supérieures :

- Le numérateur $x^2 - 3.x - 2$ tend toujours vers -4
- Le dénominateur $2 - x$ tend vers 0^-
  En effet comme $x > 2$ alors $0 > 2 - x$ c'est-à-dire que $2 - x$ est négatif

Donc la fonction rationnelle h(x) tend vers $\frac{-4}{0^-} = +\infty$

➲ Déterminons la limite de la fonction h en $+\infty$ avec son écriture décomposée.
Lorsque x tend vers $+\infty$:

- $-x + 1$ tend vers $-\infty$
- $x - 2$ tend vers $+\infty$ donc $\frac{4}{x-2}$ tend vers $\frac{4}{+\infty} = 0^+$

Donc h(x) tend vers $-\infty$.

Conséquences : comme les limites à gauche et à droite de 2 de la fonction h sont infinies alors la droite verticale $\mathcal{D}$ d'équation $x = 2$ est une asymptote à la courbe (C).

d) Au vu de ce qui a été fait dans la question précédente, il semble qu'aux infinis la fonction rationnelle h se comporte comme la fonction affine $a(x) = -x + 1$.
Autrement dit, il semble que la droite Δ d'équation $y = -x + 1$ soit une asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis. Pour prouver cette impression, intéressons-nous à la différence d'ordonnées existant entre la courbe (C) et la droite Δ.
Pour tout réel $x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$, nous avons :

$$(C) - \Delta = h(x) - y = \underbrace{-x + 1 + \frac{4}{x-2}}_{h(x)} - (-x + 1) = \frac{4}{x-2}$$

Or depuis la question précédente, nous savons que les limites du quotient $\frac{4}{x-2}$ aux infinis sont nulles. Ainsi nous avons :

$$\underbrace{\lim_{x \to -\infty} (C) - \Delta = 0^- \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (C) - \Delta = 0^+}_{\text{Plus x s'en va vers les infinis, plus la courbe (C) se rapproche de la droite } \Delta}$$

Conclusion : la droite Δ d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis.

➲ Pour connaître la position relative de la courbe (C) et de son asymptote Δ, nous devons déterminer le signe de leur différence d'ordonnées $(C) - \Delta = \frac{4}{x-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
4	+		+
$x - 2$	−	0	+
$(C) - \Delta$	−	‖	+
Position relative	(C) au-dessous de Δ	‖	(C) au-dessus de Δ

e) Les deux fonctions $u(x) = x^2 - 3.x - 2$ et $v(x) = 2 - x$ sont dérivables sur l'ensemble de définition de la fonction h qu'est $D_h =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.
D'ailleurs leurs dérivées respectives sont :

$$u'(x) = \left(x^2 - 3.x - 2\right)' = 2.x - 3 \qquad \textit{et} \qquad v'(x) = (-x + 2)' = -1$$

De plus, comme v ne s'annule pas sur D_h alors leur quotient $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est aussi dérivable sur cet ensemble.

➲ Pour calculer la dérivée de la fonction h, nous allons utiliser la formule de dérivation d'un quotient. Pour tout réel $x \in D_h$, nous pouvons écrire :

$$h'(x) = \frac{u'.v - v'.u}{v^2} = \frac{(2.x - 3).(2 - x) - (-1).\left(x^2 - 3.x - 2\right)}{(2 - x)^2}$$

$$= \frac{\overbrace{4.x - 2.x^2 - 6 + 3.x}+\overbrace{x^2 - 3.x - 2}}{(2 - x)^2} = \frac{-x^2 + 4.x - 8}{\underbrace{(-x + 2).(-x + 2)}_{\text{Le problème des carrés est que l'on oublie parfois...}}}$$

C'est de la connaissance du signe de la dérivée $h'(x)$ que découlera celle des variations de h.
Le dénominateur étant un produit de deux fonctions affines, il ne pose guère de problèmes. Car le carré d'un nombre est avant tout un produit de celui-ci par lui-même...

Pour connaître le signe de la forme du second degré qu'est $N(x) = -x^2 + 4.x - 8$, nous devons calculer son discriminant :

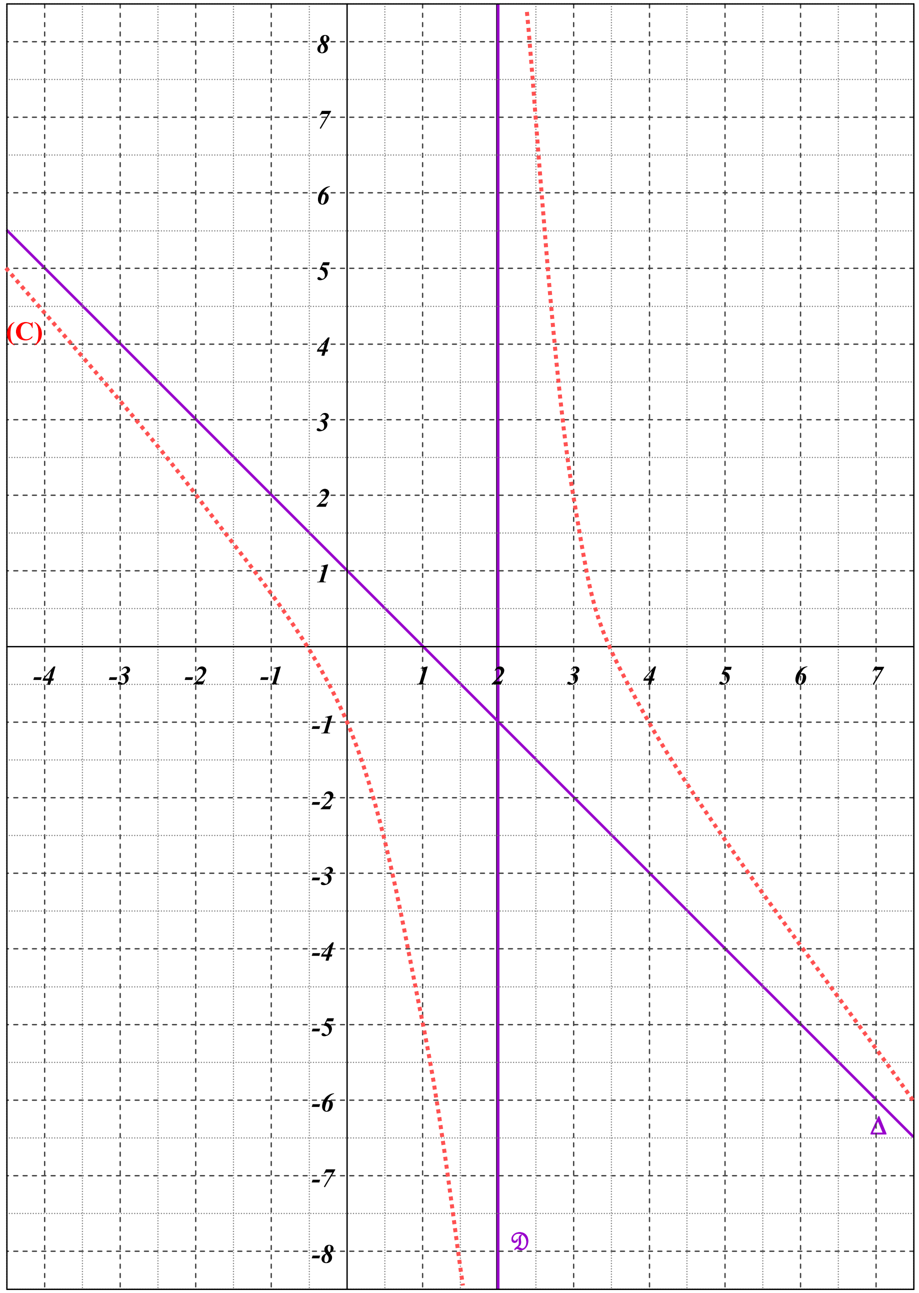
$$\Delta_{N(x)} = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 16 - 32 = -16$$

Son discriminant étant négatif, le numérateur N(x) est toujours négatif à l'instar de son coefficient dominant -1.

Le tableau de signe de $h'(x)$ et celui de variation de h sont désormais à notre portée.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-x^2 + 4.x - 8$		$-$	|	$-$	
$-x + 2$		$+$	0	$-$	
$-x + 2$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$-$	||	$-$	
h	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$-\infty$

f) Pour tracer la courbe (C) représentant la fonction h, nous allons nous appuyer sur les quatre points découlant des quatre images généreusement fournies et surtout sur les deux asymptotes $\mathcal{D}$ au voisinage de 2 et Δ aux voisinages des infinis.



Dernière partie : que reste-t-il de nos racines ?

Pour savoir si la fonction $j(x)=\sqrt{3.x+1}$ est dérivable en 8 et éventuellement, y déterminer son nombre dérivé, nous allons chercher la limite lorsque h tend vers 0 du quotient $\dfrac{j(8+h)-j(8)}{h}$. A ce propos, examinons-le de plus près !

Pour tout réel h non nul mais proche de 0, nous avons :

$$\frac{j(8+h)-j(8)}{h}=\frac{\sqrt{3.(8+h)+1}-\sqrt{3\times 8+1}}{h}=\frac{\sqrt{3.h+25}-\sqrt{25}}{h}=\frac{\sqrt{3.h+25}-5}{h}$$

Essayons de déterminer la limite du quotient avec cette dernière écriture.

Lorsque h tend vers 0, $3.h+25$ tend vers 25 donc $\sqrt{3.h+25}$ tend vers $\sqrt{25}=5$.

Donc le numérateur $\sqrt{3.h+25}-5$ tend vers 0.

Donc le quotient $\dfrac{j(8+h)-j(8)}{h}$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

Nous devons donc poursuivre notre entreprise de transformation.

Pour lever l'indétermination existant, nous allons multiplier le numérateur $\sqrt{3.h+25}-5$ par sa quantité conjuguée $\sqrt{3.h+25}+5$.

Pour tout réel h non nul mais proche de 0, nous pouvons écrire :

$$\frac{j(8+h)-j(8)}{h}=\frac{\overbrace{\left(\sqrt{3.h+25}-5\right).\left(\sqrt{3.h+25}+5\right)}^{\text{Numérateur et dénominateur multipliés par la quantité conjuguée }\sqrt{3.h+25}+5}}{h.\left(\sqrt{3.h+25}+5\right)}=\frac{\overbrace{\left(\sqrt{3.h+25}\right)^2-(5)^2}^{\text{Ce qui conduit à une identité remarquable...}}}{h.\left(\sqrt{3.h+25}+5\right)}$$

$$=\frac{3.h+25-25}{h.\left(\sqrt{3.h+25}+5\right)}=\overbrace{\frac{3.h}{h.\left(\sqrt{3.h+25}+5\right)}}^{\text{On simplifie par h qui est non nul}}=\frac{3}{\sqrt{3.h+25}+5}$$

Regardons si nous pouvons obtenir la limite du quotient avec cette dernière écriture.

Lorsque h tend vers 0, nous savons que $\sqrt{3.h+25}$ tend vers 5.

Donc le dénominateur $\sqrt{3.h+25}+5$ tend vers 10.

Donc le quotient $\dfrac{j(8+h)-j(8)}{h}=\dfrac{3}{\sqrt{3.h+25}+5}$ tend vers $\dfrac{3}{10}$.

Conclusion : la fonction $j(x)=\sqrt{3.x+1}$ est dérivable en 8 et son nombre dérivé $j'(8)$ est égal à 0,3.

Devoir Surveillé No.5

Le contexte

Ce cinquième devoir surveillé d'une durée de deux heures eut lieu à la fin du mois de janvier 2005. Il portait sur :

- Dérivée d'un quotient et d'une composée, utilisation de la dérivée pour établir les variations d'une fonction. Limites et asymptotes.
- Géométrie analytique : savoir lire des coordonnées de points dans un repère, savoir manipuler des équations de droites ou de cercles.

Ce devoir très technique et qui réclamait une bonne dose d'initiative fut un véritable désastre. Beaucoup diront que le second exercice est largement hors programme. Une chose similaire avait été faite en devoir à la maison...

L'énoncé

Première partie : vous devriez penser à votre orientation !

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Dans ce repère, la droite $\mathcal{D}$ la a pour équation $3.x-4.y-1=0$.

On appelle $\mathcal{C}$ le cercle de centre B et de rayon 4 centimètres.

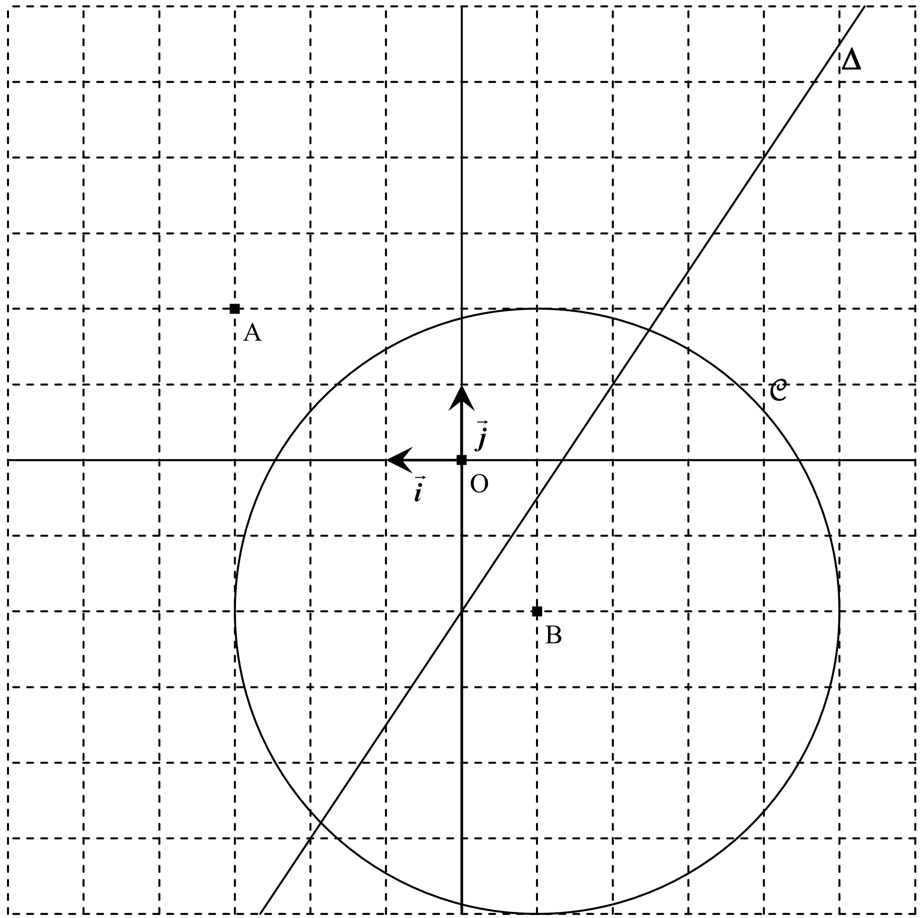
a) A partir de la figure ci-contre, déterminer les coordonnées des points A et B dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

c) Le point A appartient-il à la droite $\mathcal{D}$? On justifiera sa réponse.
Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique ci-contre. On indiquera les différentes étapes ayant permis de tracer celle-ci.

d) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon 4 centimètres dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

e) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.



Seconde partie : les pissenlits par la racine ?

La fonction h est définie par :

$$h(x)=\frac{2.x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

On appelle (C) sa courbe représentative. L'objet de cet exercice est l'étude de cette fonction h.

a) Expliquer pourquoi l'ensemble de définition de la fonction h est $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

b) Calculer l'image de -2 par la fonction h. On l'écrira sous la forme $a.\sqrt{3}$ où a est un rationnel.

c) Déterminer toues les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition. On indiquera les éventuelles conséquences graphiques sur la courbe (C).

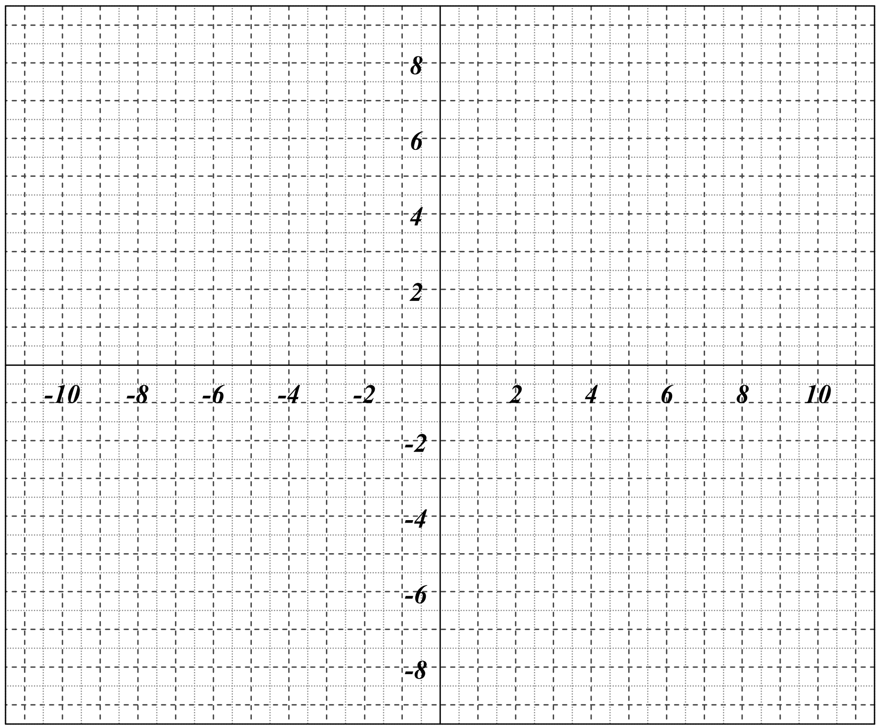
Indication : *pour certaines limites, on pourra utiliser le fait que* $\sqrt{x^2} = |x|$.

d) Justifier que la fonction h est dérivable sur son intervalle de définition.

Démontrer que pour tout réel $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$:

$$h'(x) = \frac{-x-2}{\sqrt{x^2-1}.\left(x^2-1\right)}$$

En déduire le tableau de variation de la fonction h.



e) Dans le repère ci-contre, tracer une esquisse de la courbe (C) accompagnée de toutes les asymptotes rencontrées. On tracera également la seule tangente horizontale de la courbe (C).

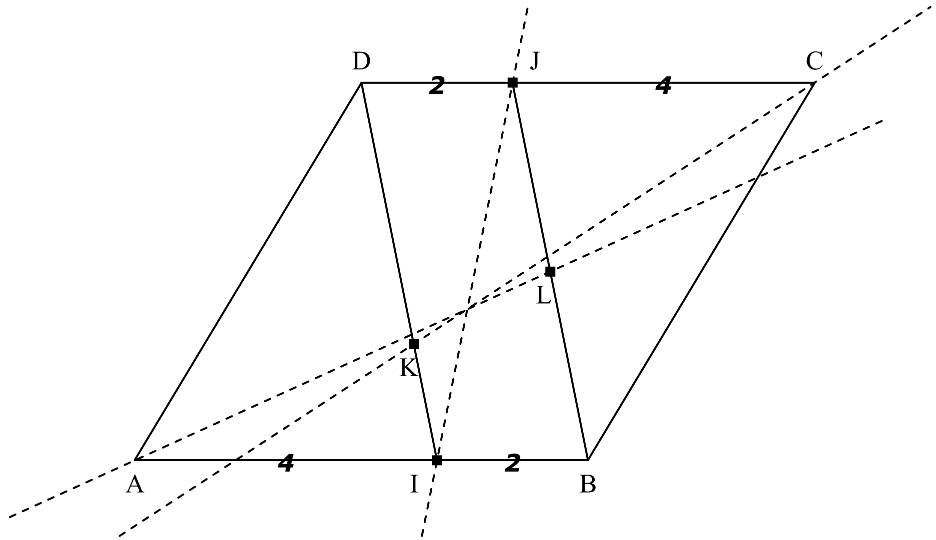
Dernière partie : seul(e) face au reste du monde !

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme. Les distances indiquées sont celles existant entre deux points consécutifs. Elles sont exprimées en centimètres.

Le points K est défini par :

$$\overrightarrow{DK} = \frac{9}{13}.\overrightarrow{DI}$$

Le point L est le milieu du segment [BJ].



Démontrer que les droites (AL), (CK) et (IJ) sont concourantes.

Le corrigé

Première partie : vous devriez penser à votre orientation !

a) Comme $\overrightarrow{OA} = 3.\vec{i} + 2.\vec{j}$ et $\overrightarrow{OB} = (-1).\vec{i} + (-2).\vec{j}$ alors les coordonnées des points A et B dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ sont respectivement $(3;2)$ et $(-1;-2)$.

b) La figure nous permet de dire que la droite Δ passe les points $C(0;2)$ et $D(-2;1)$.

Cherchons à quelles conditions sur ces coordonnées $(x;y)$ un point M appartient à Δ.

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in\Delta \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Les points C, M et D sont alignés}\\
&\Leftrightarrow \quad \text{Les vecteurs } \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x\\ y+2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix}x & -2\\ y+2 & 3\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow \quad 3.x-(-2).(y+2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3.x+2.y+4=0
\end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite Δ est $3.x+2.y+4=0$.

c) Pour savoir si le point $A(3;2)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$, utilisons le test d'appartenance que constitue l'équation cartésienne de cette dernière.

$$3.x_A-4.y_A-1=3\times3-4\times2-1=9-8-1=0$$

Les coordonnées de A vérifiant l'équation de $\mathcal{D}$, le point appartient à la droite.

➲ Deux points et une règle suffisent pour tracer une droite. Connaissant déjà un point de la droite $\mathcal{D}$ en la personne de A, il reste juste en déterminer un autre. Après quelques tâtonnements, on remarque que les coordonnées du point $E(-5;-4)$ vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$. En effet :

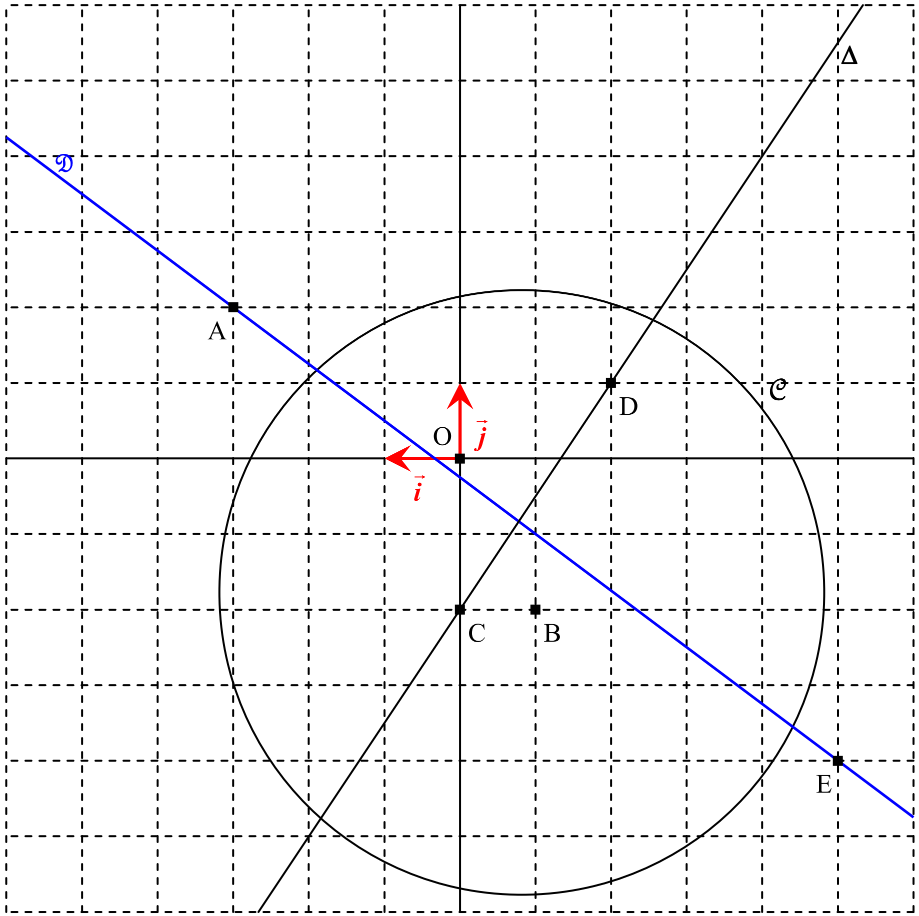
$$3.x_E-4.y_E-1=3\times(-5)-4\times(-4)-1=-15+16-1=0$$

La droite $\mathcal{D}$ est donc aussi la droite (AE). En plaçant E, nous pouvons tracer celle-ci.

d) Le cercle $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M du plan se trouvant à 4 centimètres du centre B. C'est cette caractérisation qui va nous donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in\mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad BM=4 \quad \Leftrightarrow \quad BM^2=16\\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2+(y+2)^2=16\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+2.x+1+y^2+4.y+4-16=0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+2.x+4.y-11=0
\end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est $x^2+y^2+2.x+4.y-11=0$.



e) Appartenir à l'intersection de deux objets, c'est être élément de ceux-ci.

$$M(x;y)\in\mathcal{C}\cap\mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{cases} M\in\mathcal{C} \quad \text{donc} \quad x^2+y^2+2.x+4.y-11=0\\ M\in\mathcal{D} \quad \text{donc} \quad 3.x-4.y-1=0\end{cases}}_{\text{Les coordonnées du point M vérifient l'équation de chaque objet}}$$

Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$, nous devons résoudre le système non linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x^2+y^2+2.x+4.y-11=0 & \textbf{\textit{(1)}}\\ 3.x-4.y-1=0 & \textbf{\textit{(2)}}\end{cases}$$

Procédons par substitution !

A partir de l'équation ***(2)***, on exprime l'inconnue y en fonction de x.

$$3.x-4.y-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3.x-1=4.y \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{3}{4}.x-\frac{1}{4}$$

Puis dans l'équation ***(1)***, on remplace x par ce qu'il vaut en y.

$$x^2+\left(\frac{3}{4}.x-\frac{1}{4}\right)^2+2.x+\underbrace{(3.x-1)}_{4.y}-11=0$$

$$x^2+\underbrace{\frac{9}{16}.x^2-\frac{6}{16}.x+\frac{1}{16}}+2.x+3.x-1-11=0$$

$$\left(1+\frac{9}{16}\right).x^2+\left(-\frac{3}{8}+2+3\right).x-1-11+\frac{1}{16}=0$$

$$\frac{25}{16}.x^2+\frac{37}{8}.x-\frac{191}{16}=0$$

$$\underbrace{25.x^2+74.x-191=0}_{\text{On multiplie les deux membres de l'égalité par 16.}}$$

Calculons le discriminant de cette équation du second degré d'inconnue x.

$$\Delta_{25.x^2+74.x-191=0}=(74)^2-4\times 25\times(-191)=5476+19100=24576$$

Le discriminant n'étant pas le carré d'un entier, nous allons essayons de le simplifier.

Décomposons 24576 en facteurs premiers : $24576=2^{13}\times 3=2^{12}\times 6=4096\times 6$.

Donc :

$$\sqrt{24576}=\sqrt{4096\times 6}=\sqrt{4096}\times 6=64.\sqrt{6}$$

Revenons à notre équation du second degré. Son discriminant étant positif, elle admet deux solutions distinctes :

➥ La première solution est $x=\dfrac{-74-64\sqrt{6}}{2\times 25}=\dfrac{2\times(-37)-2\times 32.\sqrt{6}}{2\times 25}=\dfrac{-37-32.\sqrt{6}}{25}$

Calculons l'ordonnée correspondant à cette abscisse.

$$y=\frac{3}{4}.\frac{-37-32.\sqrt{6}}{25}-\frac{1}{4}=-\frac{111}{100}-\frac{24.\sqrt{6}}{25}-\frac{25}{100}=-\frac{135}{100}-\frac{24.\sqrt{6}}{25}=-\frac{34+24.\sqrt{6}}{25}$$

➥ La seconde solution est $x=\dfrac{-74+64\sqrt{6}}{2\times 25}=\dfrac{2\times(-37)+2\times 32.\sqrt{6}}{2\times 25}=\dfrac{-37+32.\sqrt{6}}{25}$

Calculons l'ordonnée correspondant à cette abscisse.

$$y=\frac{3}{4}.\frac{-37+32.\sqrt{6}}{25}-\frac{1}{4}=-\frac{111}{100}+\frac{24.\sqrt{6}}{25}-\frac{25}{100}=-\frac{135}{100}+\frac{24.\sqrt{6}}{25}=-\frac{34}{25}+\frac{24.\sqrt{6}}{25}$$

Conclusion : le cercle $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ ont deux points d'intersection. Ils ont pour coordonnées $\left(-\dfrac{37+32.\sqrt{6}}{25};-\dfrac{34+24.\sqrt{6}}{25}\right)$ et $\left(\dfrac{-37+32.\sqrt{6}}{25};\dfrac{-34+24.\sqrt{6}}{25}\right)$.

Seconde partie : les pissenlits par la racine ?

a) Deux choses peuvent empêcher la fraction h(x) d'exister : sa racine $\sqrt{x^2-1}$ et son dénominateur s'il est nul.

$$\text{h(x) existe} \Leftrightarrow \underbrace{x^2-1 \text{ est positif ou nul}}_{\sqrt{x^2-1}\text{ existe}} \;\; \textbf{\textit{et}} \;\; \underbrace{\sqrt{x^2-1}\text{ est non nul}}_{\text{Le dénominateur est non nul}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-1>0$$

Tout le problème est de savoir quand la forme du second degré $x^2-1=(x-1).(x+1)$ est positive. Pour cela, dressons le tableau de signe de ce produit.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

x^2-1 est positif avant -1 et après 1, c'est-à-dire sur l'ensemble $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

Conclusion : les réels ayant une image par h sont ceux de l'ensemble $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$. C'est l'ensemble de définition de h.

b) Calculons l'image de -2 par la fonction h.

$$h(-2)=\frac{2\times(-2)+1}{\sqrt{(-2)^2-1}}=\frac{-3}{\sqrt{4-1}}=\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

c) Au total, l'ensemble de définition de la fonction h a quatre bornes ouvertes. Il y a donc quatre limites à déterminer : deux aux infinis, une à gauche de -1 et une dernière à droite de 1. Nous allons les aborder dans l'ordre.

➲ Déterminons la limite de la fonction h en $-\infty$.
Lorsque x tend vers $-\infty$:

- Le numérateur $2.x+1$ tend vers $-\infty$.
- x^2-1 tend vers $+\infty$ donc le dénominateur $\sqrt{x^2-1}$ tend vers $+\infty$.

Donc $h(x)$ est une forme indéterminée du type $\frac{-\infty}{+\infty}$.

Modifions l'écriture de h(x). Pour ce faire, nous allons factoriser ses numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts. Pour tout $x \in \left]-\infty;-1\right[$, nous avons:

$$h(x)=\frac{2.x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x.\left[2+\frac{1}{x}\right]}{\sqrt{x^2.\left[1-\frac{1}{x^2}\right]}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2}}.\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{x}{\underbrace{|x|}_{\text{Or x est négatif}}}.\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{x}{-x}.\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

Voyons si avec cette écriture, nous pouvons nous prononcer sur la limite de h en $-\infty$.
Quand x tend vers $-\infty$:

- Le numérateur $2+\frac{1}{x}$ tend vers $2+0^-=2$.
- $1-\frac{1}{x^2}$ tend vers $1-0^+$ donc le dénominateur $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$ s'en va vers $\sqrt{1}=1$.

Donc h(x) tend vers $-\frac{2}{1}=-2$.

La conséquence de cette limite est que la droite d'équation $y=-2$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

➲ Déterminons la limite de la fonction h à gauche de -1 .
Lorsque x tend vers -1 par la gauche :

- Le numérateur $2.x+1$ tend vers $2\times(-1)+1=-1$.
- x^2-1 tend vers 0^+ d'après son tableau de signe (Voir la question 2.a) donc le dénominateur $\sqrt{x^2-1}$ s'en va vers $\sqrt{0^+}=0^+$.

Donc h(x) tend vers $\frac{-1}{0^+}=-\infty$

En conséquence, la droite verticale d'équation $x=-1$ est une asymptote à la courbe (C).

➲ Déterminons la limite de la fonction h à droite de 1.
Lorsque x tend vers 1 par la droite :

- Le numérateur $2.x+1$ tend vers $2\times1+1=3$.
- x^2-1 tend vers 0^+ d'après son tableau de signe (Voir 2.a) donc le dénominateur $\sqrt{x^2-1}$ s'en va vers $\sqrt{0^+}=0^+$.

Donc h(x) tend vers $\frac{1}{0^+}=+\infty$.

Donc la droite verticale d'équation $x=1$ est une asymptote à la courbe (C).

➲ Déterminons la limite de la fonction h en $+\infty$.
Lorsque x tend vers $+\infty$:

- Le numérateur $2.x+1$ tend vers $+\infty$.
- x^2-1 tend vers $+\infty$ donc le dénominateur $\sqrt{x^2-1}$ tend vers $+\infty$.

Donc $h(x)$ est une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Nous devons modifier l'écriture de h(x) pour pouvoir nous prononcer. Pour ce faire, nous allons réutiliser une partie de ce que nous avions fait en $-\infty$.
Pour tout $x \in \left]1;+\infty\right[$ (travaillons au voisinage de $+\infty$), nous pouvons écrire :

$$h(x)=\frac{x.\left[2+\frac{1}{x}\right]}{\sqrt{x^2.\left[1-\frac{1}{x^2}\right]}}=\frac{x}{\underbrace{|x|}_{\text{Or ici x est positif}}}.\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{x}{x}.\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

Cette modification d'écriture a-t-elle levée l'indétermination ? Voyons cela !
Quand x tend vers $+\infty$:

- Le numérateur $2+\frac{1}{x}$ tend vers $2+0^+=2$.
- $1-\frac{1}{x^2}$ tend vers $1-0^+$ donc le dénominateur $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$ s'en va vers $\sqrt{1}=1$.

Donc h(x) tend vers $\frac{2}{1}=2$.

Les mêmes causes produisant les mêmes effets, nous pouvons dire que la droite d'équation $y=2$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

En définitive, la courbe de la fonction h admet quatre asymptotes distinctes.

d) La fonction h est un quotient de la forme $\dfrac{u}{v}$ où :

- La fonction affine $u(x)=2.x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur D_h.
  De plus : $u'(x)=2$
- Comme x^2-1 est dérivable et positive sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ (voir son tableau de signe) alors la fonction $v(x)=\sqrt{x^2-1}$ est aussi dérivable sur cet intervalle.

  De plus : $v'(x)=\left(\sqrt{f}\right)'=\dfrac{f'}{\sqrt{f}}=\dfrac{\left(x^2-1\right)'}{2.\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{2.x}{2.\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Etant un quotient de deux fonctions dérivables sur l'ensemble $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et comme son dénominateur v(x) ne s'y annule pas alors la fonction h y est aussi dérivable.

➲ Pour calculer la dérivée de h, appliquons la formule de dérivation du quotient.
Pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$h'(x)=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$$

$$=\frac{2.\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}.(2.x+1)}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{\overbrace{\dfrac{2.\sqrt{x^2-1}\times\sqrt{x^2-1}-x.(2.x+1)}{\sqrt{x^2-1}}}^{\text{On met le numérateur au même dénominateur...}}}{x^2-1}$$

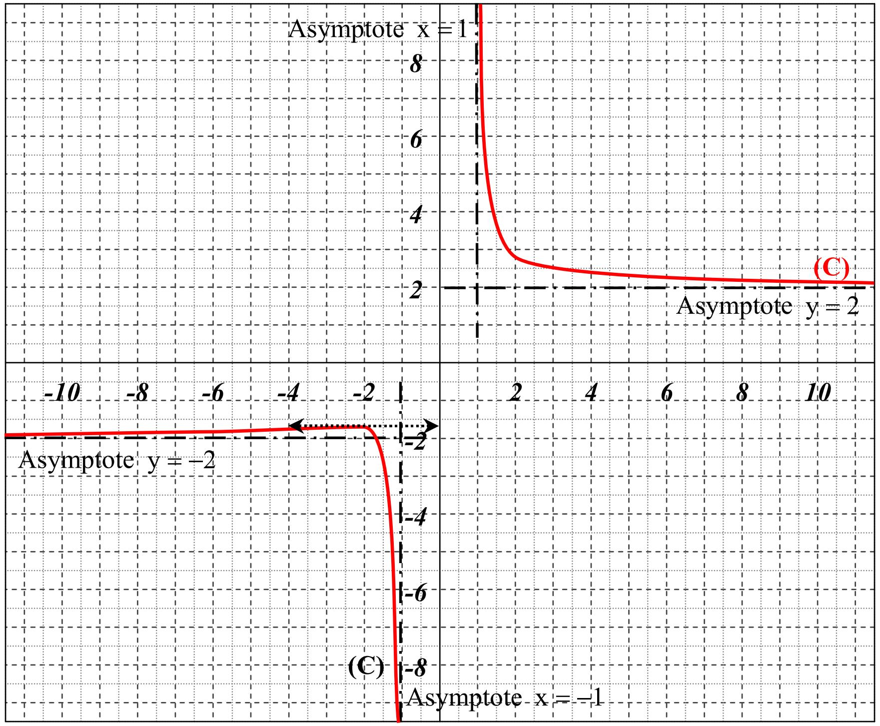
$$=\frac{\dfrac{2.\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-2.x^2-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{2.\left(x^2-1\right)-2.x^2-x}{\sqrt{x^2-1}.\left(x^2-1\right)}$$

$$=\frac{2.x^2-2-2.x^2-x}{\sqrt{x^2-1}.\left(x^2-1\right)}=\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-1}.\left(x^2-1\right)}$$

Sur l'ensemble $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, les facteurs x^2-1 et $\sqrt{x^2-1}$ sont positifs. Quant au facteur affine $-x-2$, il est positif avant -2, nul en ce point et négatif après.
Connaissant les signes de tous les facteurs apparaissant dans l'expression de $h'(x)$, nous pouvons dresser son tableau de signe. Ce qui nous ouvrira celui de variation de h.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$-x-2$		+	0	−		−		−	
x^2-1		+		+	0	−	0	+	
$\sqrt{x^2-1}$		+		+	0		0	+	
$h'(x)$		+	0	−	‖	Non définie	‖	−	
h	-2	↗	$-\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖	Non définie	‖ $+\infty$	↘	2

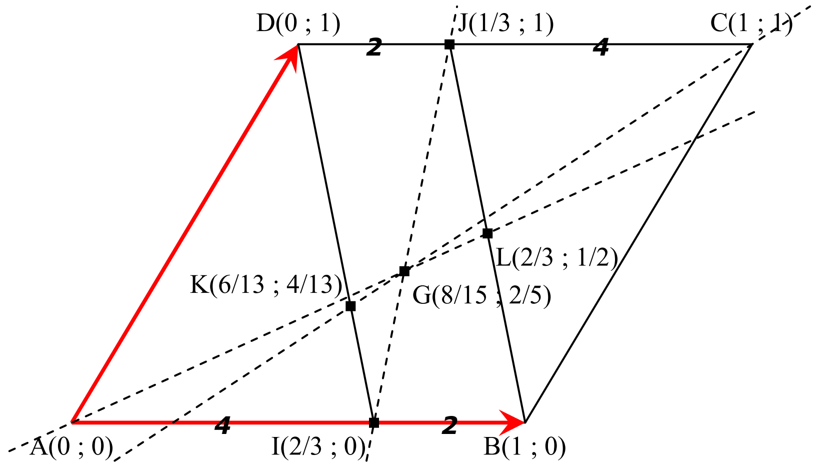
e) La courbe (C) représentant h flanquée de ses quatre asymptotes est la suivante :



Dernière partie : seul(e) face au reste du monde !

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser l'outil analytique.

❶ La première chose à faire est de se fixer un repère de travail : nous optons pour le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. A défaut d'être le plus simple, c'est le plus évident !



❷ La seconde étape de notre action va être de déterminer les coordonnées de tous les points apparaissant sur la figure.
Le point A a pour coordonnées $(0;0)$ car c'est l'origine, le point $B(1;0)$ car il marque l'unité en abscisse et D $(0;1)$ parce qu'il fait la même chose en ordonnée.

ABCD étant un parallélogramme, nous avons : $\overrightarrow{AC}=1.\overrightarrow{AB}+1.\overrightarrow{AD}$.

Donc le point C a pour coordonnées $(1;1)$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

Ensuite, comme $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}+0.\overrightarrow{AD}$ alors les coordonnées du point I sont $\left(\frac{2}{3};0\right)$.

De même, ayant $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}=1.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}$, les coordonnées de J sont $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

➥ Pour déterminer les coordonnées du point $(x_K;y_K)$ du point K, traduisons sous forme de coordonnées la relation vectorielle qui définit ce point.

$$\overrightarrow{DK}=\frac{9}{13}.\overrightarrow{DI} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_K \\ y_K-1 \end{pmatrix}=\frac{9}{13}.\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_K \\ y_K-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6/13 \\ -9/13 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_K=6/13 \\ y_K=1-9/13=4/13 \end{cases}$$

Ainsi le point K a-t-il pour coordonnées $\left(\frac{6}{13};\frac{4}{13}\right)$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

➥ Pour déterminer les coordonnées $(x_L;y_L)$ du point L, nous allons utiliser le fait qu'il est le milieu du segment [BJ]. Il vérifie donc l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{BJ} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_L-1 \\ y_L \end{pmatrix}=\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3} \\ 1-0=1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_L-1 \\ y_L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0,5 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_L=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3} \\ y_L=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc le point L a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

❸ Pour établir que trois droites sont concourantes, une voie consiste à établir que le point d'intersection de deux d'entre elles appartient à celle qui reste. C'est ainsi que nous allons procéder. C'est la troisième phase de la manoeuvre.
On appelle $G(x_G;y_G)$ le point d'intersection des droites (AL) et (IJ).
Si nous optons pour ces deux droites, c'est que les coordonnées des points incriminés semblent promettre des calculs moins compliqués que celles des points C et K.

Le point G appartenant à la droite (AL), les vecteurs $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x_G-0=x_G \\ y_G-0=y_G \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. Donc leur déterminant est nul :

$$\underbrace{\begin{vmatrix} x_G & 2/3 \\ y_G & 1/2 \end{vmatrix}}_{\det\left(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AL}\right)}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.x_G-\frac{2}{3}.y_G=0 \Leftrightarrow \underbrace{3.x_G-4.y_G=0}_{\text{On multiplie les deux membres par 6}}$$

De même, comme G est aussi élément de la droite (IJ) alors il existe une colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} x_G-2/3 \\ y_G \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et là encore, leur déterminant est nul !

$$\underbrace{\begin{vmatrix} x_G - 2/3 & -1/3 \\ y_G & 1 \end{vmatrix}}_{\det\left(\overrightarrow{IG},\overrightarrow{IJ}\right)} = 0 \Leftrightarrow \left(x_G - \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right).y_G = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3.x_G + y_G - 2 = 0}_{\text{On multiplie les deux membres par 3}}$$

Implicitement, nous avons déterminé deux équations cartésiennes dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ pour les droites (AL) et (IJ). Les coordonnées de leur point d'intersection G sont les solutions du système linéaire de deux équations :

$$\begin{cases} 3.x_G - 4.y_G = 0 & \textit{(1)} \quad \leftarrow G \in (AL) \\ 3.x_G + y_G - 2 = 0 & \textit{(2)} \quad \leftarrow G \in (IJ) \end{cases}$$

Pour déterminer y_G, nous allons combiner les deux équations afin d'éliminer x_G.

$$\textit{(2)} - \textit{(1)} \longrightarrow 5.y_G - 2 = 0 \Leftrightarrow 5.y_G = 2 \Leftrightarrow y_G = \frac{2}{5}$$

Pour obtenir x_G, nous remplaçons y_G par sa valeur dans l'équation *(1)*.

$$3.x_G - 4 \times \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow 3.x_G = \frac{8}{5} \Leftrightarrow x_G = \frac{8}{15}$$

Donc le point G a pour coordonnées $\left(\frac{8}{15};\frac{2}{5}\right)$ dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

La dernière chose à vérifier est l'appartenance du point G à la droite (CK).

Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} 8/15 - 1 = -7/15 \\ 2/5 - 1 = -3/5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} 6/13 - 1 = -7/13 \\ 4/13 - 1 = -9/13 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Pour le savoir, calculons leur déterminant dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

$$\det\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CK}\right) = \begin{vmatrix} -7/15 & -7/13 \\ -3/5 & -9/13 \end{vmatrix} = \frac{-7}{15} \times \frac{-9}{13} - \frac{-3}{5} \times \frac{-7}{13} = \underbrace{\frac{21}{65}}_{\text{Après simplification par 3}} - \frac{21}{65} = 0$$

Leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires.
Donc les points G, C et K sont alignés. Le point d'intersection G appartient à la troisième droite (CK).

Conclusion : les trois droites (AL), (CK) et (IJ) sont concourantes en un point G qui est défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{8}{15}.\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}.\overrightarrow{AD}$.

Une autre fin : l'appartenance de G à la droite (CK) via une équation cartésienne.

La droite (CK) est définie par son vecteur directeur $\overrightarrow{CK}\left(\frac{6}{13} - 1 = -\frac{7}{13};\frac{4}{13} - 1 = -\frac{9}{13}\right)$ et par son point C. Par suite :

Le point $M(x;y)$ appartient à (CK) $\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CK}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & -7/13 \\ y-1 & -9/13 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1).\frac{-9}{13} - (y-1).\frac{-7}{13} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{13}.x + \frac{9}{13} + \frac{7}{13}.y - \frac{7}{13} = 0$$

Donc une équation cartésienne de la droite (CK) est $\underbrace{9.x - 7.y - 2 = 0}_{\text{On multiplie tout par 13}}$.

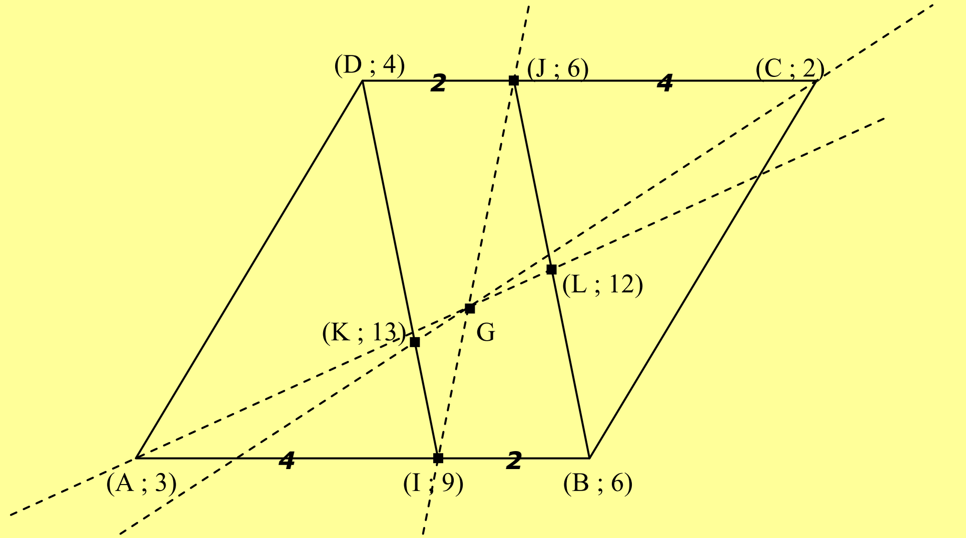
Il ne reste plus alors qu'à vérifier que le point G appartient à la droite (CK).

$$9.x_G - 7.y_G - 2 = 9.\frac{8}{15} - 7.\frac{2}{5} - 2 = \frac{24}{5} - \frac{14}{5} - \frac{10}{5} = 0$$

Comme ses coordonnées en vérifient l'équation, Le point G appartient à la droite (CK)...

On pouvait aller plus vite avec les barycentres et l'associativité de ces derniers !

Le point de concours G est le barycentre des points $(A;3)$, $(B;6)$, $(C;2)$ et $(D;4)$...



Devoir Surveillé No.6

Le contexte

Ce sixième devoir de deux heures qui eut lieu début mars 2005 reprenait le programme du précédent en y adjoignant le produit scalaire. Il portait sur :

- La dérivée de la racine d'une fonction. Limites et asymptotes.
- Géométrie analytique, équations de droite et de cercle, produit scalaire.

De nouveau, ce fut un désastre. Comme quoi, quand ça veut pas, ça peut pas !

L'énoncé

Première partie : doux, dur et dingue !

La fonction j est définie pour tout réel x de l'ensemble $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par :

$$j(x)=\frac{\sqrt{2.x^2+1}}{x+1}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Dresser le tableau de signe de la fonction j.

b) Déterminer toutes les limites de la fonction j aux bornes de son ensemble de définition. On indiquera les conséquences graphiques éventuelles sur la courbe (C).
Note : *une grande attention sera portée à la rédaction des réponses ainsi qu'aux justifications de celles-ci.*

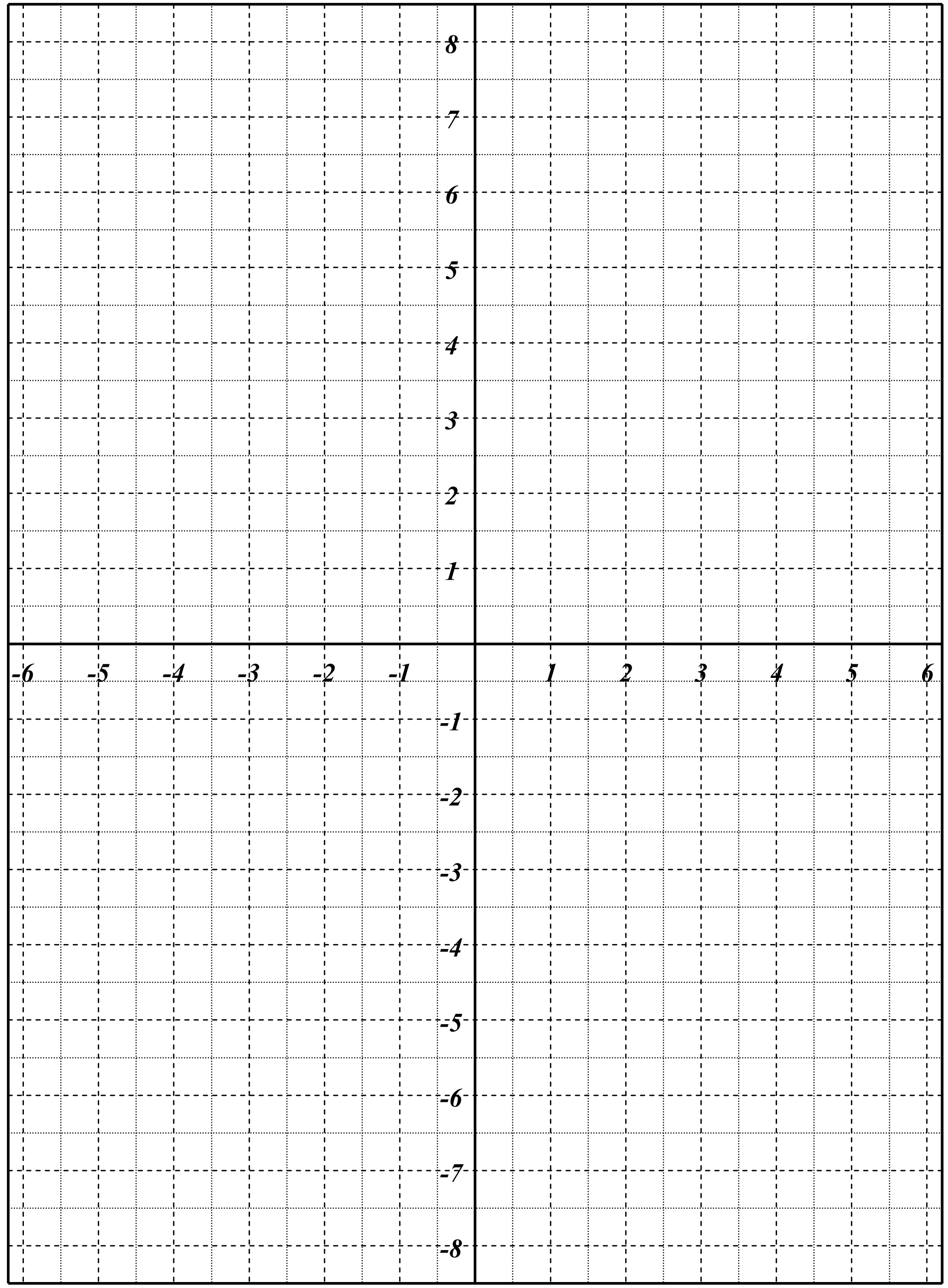
c) Démontrer que pour tout réel x de l'ensemble $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$, on a :

$$j'(x)=\frac{2.x-1}{\sqrt{2.x^2+1}.(x+1)^2}$$

Dresser le tableau de variation de la fonction j.

d) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à la courbe (C) en son point A d'abscisse 0.

e) Dans le repère ci-contre, tracer la courbe (C) accompagnée de toutes les asymptotes rencontrées. On tracera également la tangente T_0 .



Seconde partie : ça va cogner !

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Les normes des deux vecteurs de base mesurent (normalement) un centimètre.
Dans ce repère, on considère les points :

$$A\left(-2;1\right) \qquad B\left(-5;-3\right)$$

a) Déterminer par le calcul une équation cartésienne de la droite Δ.

On appelle $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $3.x-2.y+4=0$.

b) Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur la figure ci-contre.

c) Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont-elles perpendiculaires ? On justifiera sa réponse.

d) Démontrer que les droites $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles.
Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

On appelle G le barycentre des points pondérés $\left(A;3\right)$ et $\left(B;2\right)$.

e) Déterminer par le calcul les coordonnées du point G.
Placer ce point sur la figure ci-contre.

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan vérifiant l'équation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=14$.

f) Déterminer la nature et les attributs de l'ensemble $\mathcal{E}$.
Tracer cet ensemble $\mathcal{E}$ sur la figure ci-contre.

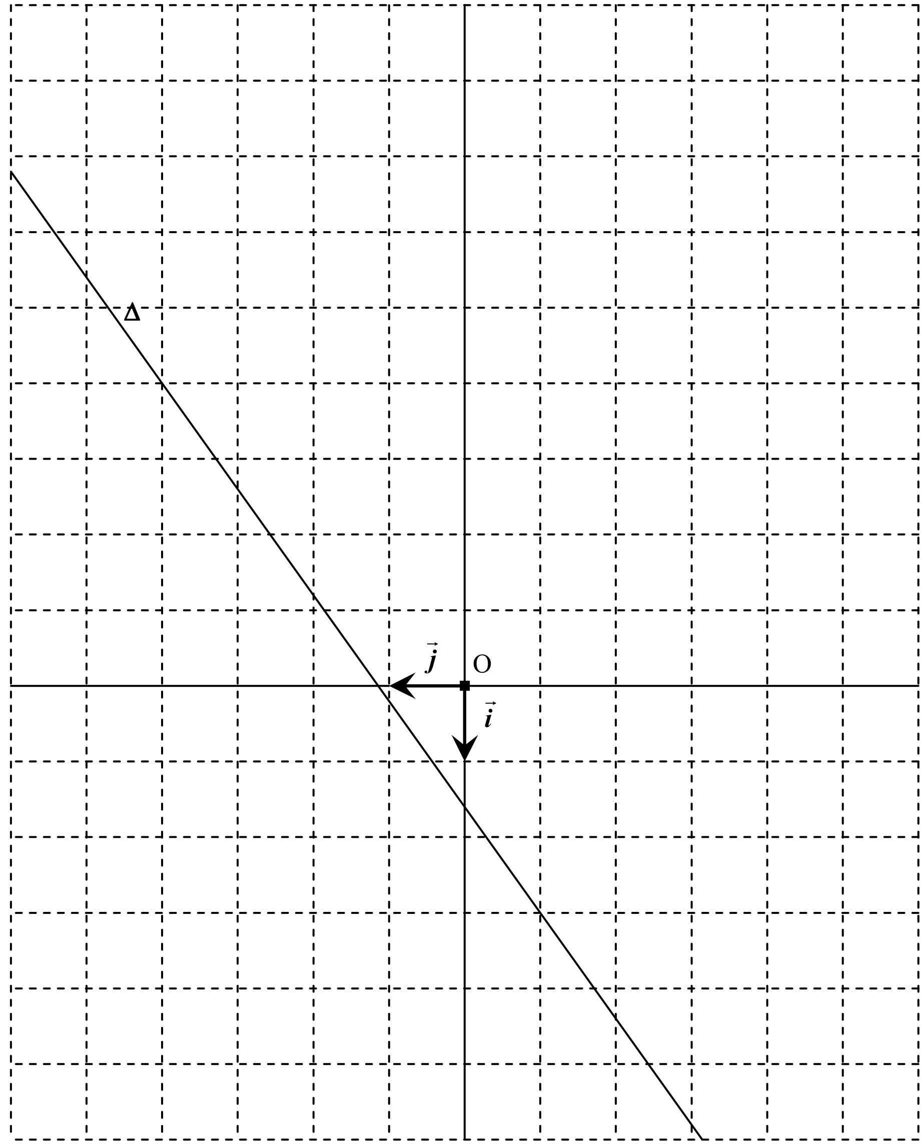
On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M du plan vérifiant l'équation

$$3.MA^2+2.MB^2=50$$

g) Démontrer que pour tout point M du plan, on a :

$$3.MA^2+2.MB^2=5.MG^2+30$$

En déduire la nature et les attributs de l'ensemble $\mathcal{F}$.
Tracer ce dernier sur la figure ci-contre.
Note : *en préalable à cette question, on pourra calculer les distances AG et BG.*



Le corrigé

Première partie : doux, dur et dingue !

En préambule, nous allons dire pourquoi la fonction j est définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

D'abord, comme la somme $2.x^2+1$ est toujours positive alors sa racine $\sqrt{2.x^2+1}$ existe pour tout réel x. Le numérateur ne pose donc aucun problème.
Ensuite, j(x) est un quotient. Comme chacun de ceux-ci, il ne peut exister que si son dénominateur est non nul. Autrement dit :

Le quotient j(x) existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $x+1\neq 0$ $\Leftrightarrow$ $x\neq -1$

A l'exception de -1 , tous les réels ont une image par j. D'où son ensemble de définition.

a) Parce que $2.x^2+1$ ne s'annule jamais, la racine $\sqrt{2.x^2+1}$ est toujours positive.
De plus, le facteur affine $x+1$ s'annule en -1 , est négatif avant et positif après.
Par conséquent, le tableau de signe de leur quotient j(x) est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\sqrt{2.x^2+1}$	+	|	+
$x+1$	−	0	+
j(x)	−	||	+

b) L'ensemble de définition de la fonction j comporte quatre bornes ouvertes. C'est en celles-ci que nous devons déterminer les limites de j. Traitons-les dans l'ordre !

➲ Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction j.
Quand x tend vers $-\infty$:

- x^2 tend vers $+\infty$ donc $2.x^2+1$ aussi donc $\sqrt{2.x^2+1}$ s'en va vers $+\infty$.
- $x+1$ tend vers $-\infty$.

Donc j(x) est une forme indéterminée du type $\dfrac{+\infty}{-\infty}$.

Pour lever l'indétermination, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur de j(x) par leurs termes les plus forts afin qu'ils expliquent entre eux.

Comme nous devons voir ce qui se passe au voisinage de $-\infty$, nous décidons de travailler sur l'intervalle $]-\infty;-1[$. Cependant le début de notre calcul sera valable pour tous les réels x ayant une image par j.

Pour tout réel $x<-1$, nous pouvons écrire :

$$j(x)=\frac{\sqrt{2.x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2.\left[2+\frac{1}{x^2}\right]}}{x.\left[1+\frac{1}{x}\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2}}{x}.\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{|x|}{x}.\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}\underset{\text{négatif}}{\overset{\text{x est}}{=}}\frac{-x}{x}.\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=-\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$

Voyons si nous pouvons nous prononcer sur la limite de j avec cette dernière écriture.
Quand x tend vers $-\infty$:

- x^2 tend vers $+\infty$ donc $\dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0^+ donc $\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}$ tend vers $\sqrt{2}$.
- $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0^- donc $1+\dfrac{1}{x}$ tend vers 1.

Donc j(x) tend vers $-\dfrac{\sqrt{2}}{1}=-\sqrt{2}$.

La conséquence graphique de cette limite est que la droite horizontale d'équation $y=-\sqrt{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

➲ Déterminons la limite de la fonction j à gauche de -1 .
Quand x tend vers -1 par la gauche :

- Le numérateur $\sqrt{2.x^2+1}$ tend vers $\sqrt{2.(-1)^2+1}=\sqrt{2\times1+1}=\sqrt{3}$.
- Le dénominateur $x+1$ tend vers 0^- d'après le tableau de signe de j(x).

Donc j(x) tend vers $\dfrac{\sqrt{3}}{0^-}=-\infty$.

➲ Déterminons la limite de la fonction j à droite de -1.
Quand x tend vers -1 par la gauche :

- Le numérateur $\sqrt{2.x^2+1}$ tend vers $\sqrt{3}$.
- Le dénominateur $x+1$ tend vers 0^+.

Donc $j(x)$ tend vers $\frac{\sqrt{3}}{0^+}=+\infty$.
Par conséquent, la droite verticale d'équation $x=-1$ est une asymptote à la courbe (C).

➲ Déterminons la limite de la fonction j en $+\infty$.
A l'instar de ce qui se passe de l'autre côté, la fonction j est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{+\infty}$. Pour lever celle-ci, nous allons réutiliser une partie de ce qui fut fait en $-\infty$.
Vu que nous nous intéressons à ce qui se passe en $+\infty$, nous décidons de travailler pour les réels x strictement positifs. Nous évoluerons sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Pour tout réel positif x, nous pouvons écrire :

$$j(x)=\underbrace{\frac{\sqrt{x^2}}{x.}.\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{|x|}{x.}.\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}}_{x\text{ est supposé positif donc non nul}}\overset{\substack{x\text{ est}\\ \text{positif}}}{=}\frac{x}{x}.\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$

Regardons si l'indétermination est levée. Quand x tend vers $+\infty$:

- x^2 tend vers $+\infty$ donc $\frac{1}{x^2}$ tend vers 0^+ donc $\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$ tend vers $\sqrt{2}$.
- $\frac{1}{x}$ tend vers 0^+ donc $1+\frac{1}{x}$ tend vers 1.

Donc $j(x)$ tend vers $\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$.
Par conséquent, la droite horizontale d'équation $y=\sqrt{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c) Avant de la dériver, nous allons dire pourquoi la fonction j est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
Comme la fonction $u(x)=2.x^2+1$ est dérivable et positive sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $\sqrt{u}$ l'est aussi. De plus :

$$\left(\sqrt{2.x^2+1}\right)'=\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2.\sqrt{u}}=\frac{4.x}{2.\sqrt{2.x^2+1}}=\frac{2.x}{\sqrt{2.x^2+1}}.$$

Quant à la fonction $v(x)=x+1$, elle est aussi dérivable sur $]-\infty;+\infty[$ et $v'(x)=1$.

Comme ses numérateur u et dénominateur v sont dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et surtout que son dénominateur v ne s'y annule pas alors la fonction $j=\frac{u}{v}$ est aussi dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

Calculons la dérivée de la fonction j
Pour tout réel x de l'ensemble $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$j'(x)=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$$

$$=\frac{\frac{2.x}{\sqrt{2.x^2+1}}.(x+1)-1\times\sqrt{2.x^2+1}}{(x+1)^2}=\frac{\overbrace{\frac{2.x.(x+1)-\left(\sqrt{2.x^2+1}\right)^2}{\sqrt{2.x^2+1}}}^{\text{On met le numérateur au même dénominateur !}}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2.x^2+2.x-2.x^2-1}{\sqrt{2.x^2+1}.(x+1)^2}=\frac{2.x-1}{\sqrt{2.x^2+1}.(x+1)^2}$$

Le signe de facteur affine $2.x+1$ ne pose aucun problème. Nous avons vu que la racine $\sqrt{2.x^2+1}$ était toujours positive. Quant au carré $(x+1)^2$, hormis -1 où il est s'annule, il est toujours positif.
Connaissant les signes de ses facteurs, nous pouvons dresser le tableau de signe de la dérivée $j'(x)$ ce qui nous donnera les variations de la fonction j.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2.x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{2.x^2+1}$		$+$		$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$j'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
j	$-\sqrt{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	↗	$\sqrt{2}$

e) L'équation réduite de la tangente T_0 est de la forme $y = m.x + p$.
Le coefficient directeur m de cette droite est le nombre dérivé de la fonction j en 0.
Calculons-le !

$$j'(0) = \frac{2\times 0 - 1}{\sqrt{2\times(0)^2+1}\times(0+1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{1}\times 1} = -1$$

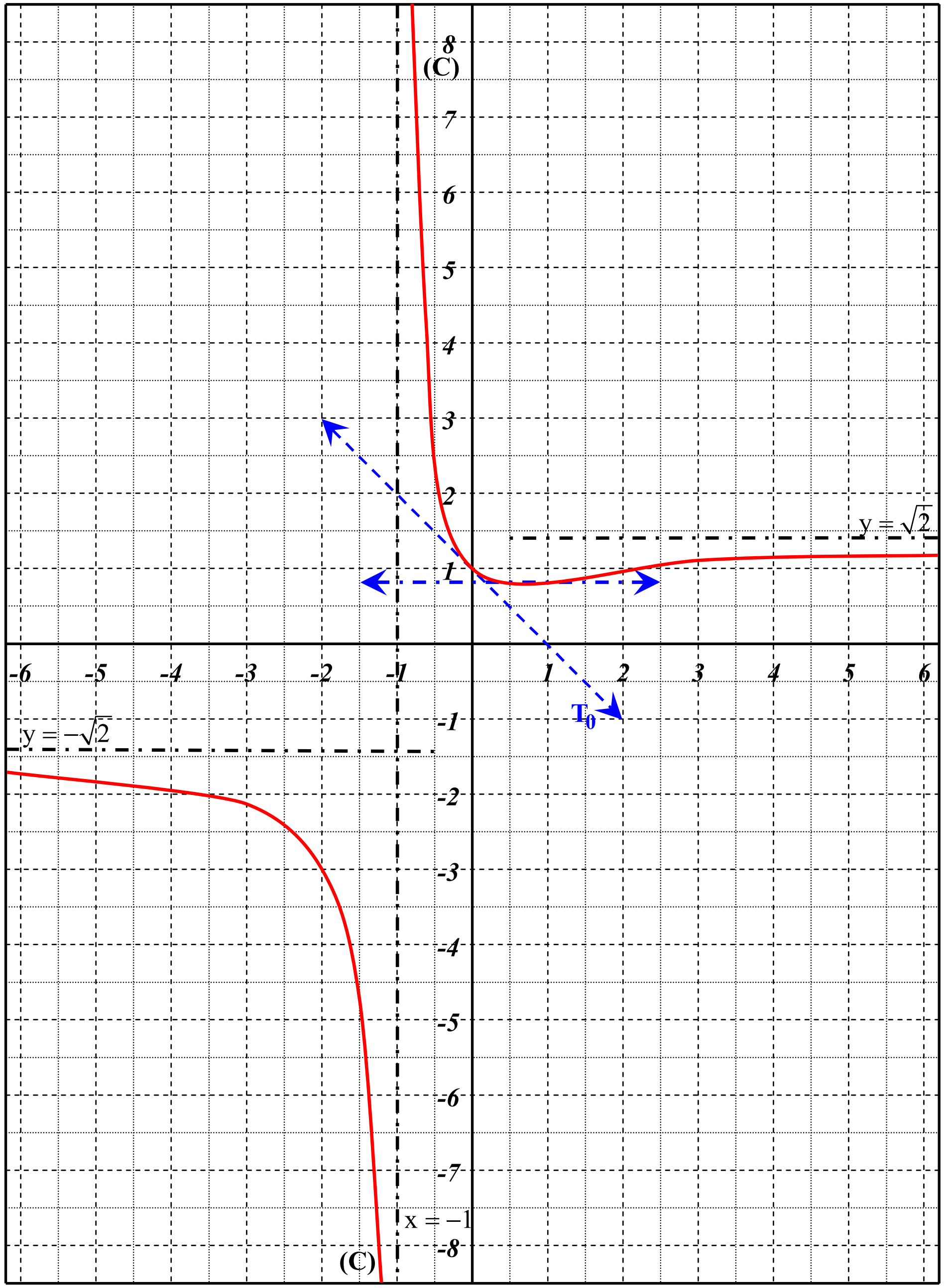
Donc l'équation réduite de T_0 est de la forme $y = -x + p$.
Comme le point de coordonnées $A\left(0; j(0) = 1\right)$ appartient à la droite T_0 alors les coordonnées du premier vérifient l'équation de la seconde. Ainsi :

$$y_A = -x_A + p \quad\Leftrightarrow\quad 1 = -0 + p \quad\Leftrightarrow\quad p = 1$$

Conclusion : l'équation réduite de la tangente T_0 est $y = -x + 1$

e) La courbe (C) représentant la fonction j accompagnée de ses trois asymptotes et de la tangente T_0 est représentée ci-contre.

Est également représentée en bleu la tangente horizontale à la courbe (C) en $x = \frac{1}{2}$ où j admet un changement de variation et un minimum local.



Seconde partie : ça va cogner !

Même si aucune question n'était posée à leur sujet, les points $A(-2;1)$ et $B(-5;-3)$ se placent à partir des relations définissant leurs coordonnées dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$$\overrightarrow{OA}=-2.\vec{i}+\vec{j} \qquad \overrightarrow{OB}=-5.\vec{i}-3.\vec{j}$$

a) D'après la figure, les points $E(-4;4)$ et $F(3;-1)$ appartiennent à la droite Δ. Ainsi :

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in\Delta \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Les vecteurs } \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x+4\\ y-4\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}7\\ -5\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}\\
&\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EF}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix}x+4 & 7\\ y-4 & -5\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow \quad (x+4).(-5)-(y-4).7=0 \quad \Leftrightarrow \quad -5.x-20-7.y+28=0\\
&\Leftrightarrow \quad -5.x-7.y+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{5.x+7.y-8=0}_{\text{On multiplie les deux membres de l'équation par }-1.}
\end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite Δ est $5.x+7.y-8=0$

Note : *pour vérifier que l'équation trouvée est juste, on peut regarder si les coordonnées des points E et F qui ont servi à la déterminer, la vérifient.*

b) Une droite peut se tracer avec deux de ses points ou bien, avec un point et l'un de ses vecteurs directeurs. Nous optons pour cette seconde voie.

Après quelques essais, on constate que le point $C(-2;-1)$ appartient à la droite 𝔇. En effet, ses coordonnées en vérifient l'équation donnée :

$$3.x_C-2.y_C+4=3\times(-2)-2\times(-1)+4=-6+2+4=0$$

De plus, un vecteur directeur de la droite 𝔇 : $\underbrace{3}_{a}.x+\underbrace{(-2)}_{b}.y+\underbrace{4}_{c}=0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b=2\\ a=3\end{pmatrix}$.

La droite 𝔇 passe par le point $C(-2;-1)$ et a pour direction celle du vecteur $\vec{u}(2;3)$.

c) Pour savoir si les droites 𝔇 et Δ sont perpendiculaires, nous allons regarder si leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux. Calculons leur produit scalaire.

$$\vec{u}.\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}7\\ -5\end{pmatrix}=\underbrace{2\times 7+3\times(-5)}_{\substack{\text{Nous travaillons dans}\\ \text{un repère orthonormé}}}=14-15=-1\neq 0$$

Leur produit scalaire étant non nul, les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas orthogonaux.
Conclusion : les droites 𝔇 et Δ ne sont pas perpendiculaires.

d) Pour déterminer si les droites 𝔇 et Δ sont parallèles, regardons si leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires en calculant le déterminant de ceux-ci.

$$\det\left(\vec{u};\overrightarrow{EF}\right)=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & -5\end{vmatrix}=2\times(-5)-3\times 7=-10-21=-31\neq 0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas colinéaires.
Conclusion : les droites 𝔇 et Δ ne sont pas parallèles mais sécantes en un point I.

➲ Comme le point I appartient aux deux droites 𝔇 et Δ alors ses coordonnées $(x_I;y_I)$ vérifient leurs deux équations cartésiennes. Elles sont donc solutions du système :

$$\begin{cases}3.x_I-2.y_I+4=0 & \textit{(1)} \quad \leftarrow I\in\mathcal{D}\\ 5.x_I+7.y_I-8=0 & \textit{(2)} \quad \leftarrow I\in\Delta\end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système par un double coup de combinaisons linéaires !

Pour déterminer x_I, nous éliminons y_I.

$$\begin{aligned}
\oplus\ \textit{(1)} &\xrightarrow{\times 7} 21.x_I-14.y_I+28=0\\
\textit{(2)} &\xrightarrow{\times 2} 10.x_I+14.y_I-16=0\\
\hline
&31.x_I+12=0\\
&x_I=-\frac{12}{31}
\end{aligned}$$

Pour obtenir y_I, nous allons anéantir x_I.

$$\begin{aligned}
\oplus\ \textit{(1)} &\xrightarrow{\times 5} 15.x_I-10.y_I+20=0\\
\textit{(2)} &\xrightarrow{\times(-3)} -15.x_I-21.y_I+24=0\\
\hline
&-31.y_I+44=0\\
&y_I=\frac{44}{31}
\end{aligned}$$

Conclusion : les coordonnées du point d'intersection I sont $\left(-\frac{12}{31};\frac{44}{31}\right)$.

e) Appelons $(x_G;y_G)$ les coordonnées du point G. Celui-ci étant le barycentre des points pondérés $(A;3)$ et $(B;2)$, il est défini par la relation vectorielle :

$$\begin{aligned}
3.\overrightarrow{AG}+2.\overrightarrow{BG}=\vec{o} \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{3.\begin{pmatrix}x_G+2\\ y_G-1\end{pmatrix}}_{\text{Distribuons 3}}+\underbrace{2.\begin{pmatrix}x_G+5\\ y_G+3\end{pmatrix}}_{\text{Distribuons 2}}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix}3.x_G+6\\ 3.y_G-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2.x_G+10\\ 2.y_G+6\end{pmatrix}}_{\text{Additionnons ces deux vecteurs}}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix}5.x_G+16\\ 5.y_G+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Deux vecteurs égaux}\\ \text{ont des coordonnées égales}}}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}\text{Mêmes abscisses : } & 5.x_G+16=0 \quad \text{donc} \quad x_G=-16/5\\ \text{Mêmes ordonnées : } & 5.y_G+3=0 \quad \text{donc} \quad y_G=-3/5\end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion : les coordonnées du barycentre G sont $(-3,2;-0,6)$.

f) Pour savoir ce qu'est l'ensemble $\mathcal{E}$, nous allons chercher à en déterminer une équation. Nous allons nous demander à quelles conditions un point M appartient à cet ensemble.

$$M(x;y)\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=14 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x+5\\y+3\end{pmatrix}=14$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+2).(x+5)+(y-1).(y+3)}_{\text{Produit scalaire dans un repère orthonormé}}=14$$

$$\Leftrightarrow x^2+5.x+2.x+10+y^2+3.y-y-3=14$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2+7.x+y^2+2.y=7}_{\text{Oh mais ne serait-ce une équation de cercle ?}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+3,5)^2-12,25}_{x^2+6.x}+\underbrace{(y+1)^2-1}_{y^2+2.y}=7$$

$$\Leftrightarrow (x+3,5)^2+(y+1)^2=20,25$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{JM^2=20,25}_{\text{si on appelle }J(-3,5;-1)} \Leftrightarrow JM=\sqrt{20,25}=4,5$$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre $J(-3,5;-1)$ et de rayon 4,5.

Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $J(-3,5;-1)$ et de rayon 4,5 cm.

Un autre chemin : les propriétés du produit scalaire et le milieu du segment [AB]
Le point J introduit précédemment est le milieu du segment [AB]. Rétrospectivement, on peut penser que l'introduction de ce point permet d'améliorer l'égalité définissant $\mathcal{E}$.

$$M\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}}_{\text{Décomposons les avec J qui est le milieu de [AB]}}=14 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JM}\right).\left(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{JM}\right)}_{\text{Développons ce double-produit}}=14$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BJ}}_{\text{Or }\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AJ}}+\underbrace{\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{BJ}}_{\text{Factorisons par }\overrightarrow{JM}}+\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{JM}=14$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-\overrightarrow{AJ}^2}_{\text{Les carrés scalaires...}}+\overrightarrow{JM}.\underbrace{\left(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BJ}\right)}_{=\vec{o}\text{ car J est le milieu de [AB]}}+\underbrace{\overrightarrow{JM}^2}_{\text{...sont égaux...}}=1 \Leftrightarrow \underbrace{-AJ^2+JM^2}_{\text{...aux carrés des distances}}=14$$

Comme AJ mesure 2,5 centimètres, on arrive finalement à $JM^2=14+2,5^2=20,25$ ...

g) Pour établir l'égalité demandée, nous allons partir du premier membre et décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ pour obtenir du vecteur $\overrightarrow{MG}$.
Pour tout point M du plan, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{3.MA^2+2.MB^2}_{\text{Le carré de la norme est...}}=\underbrace{3.\overrightarrow{MA}^2+2.\overrightarrow{MB}^2}_{\text{...aussi le carré scalaire}}=3.\underbrace{\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2}_{\text{Identités...}}+2.\underbrace{\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2}_{\text{...remarquables}}$$

$$=3.\left[\overrightarrow{MG}^2+2.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}^2\right]+2.\left[\overrightarrow{MG}^2+2.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}^2\right]$$

$$=3.MG^2+\underbrace{6.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}}_{\text{Factorisons...}}+3.GA^2+2.MG^2+\underbrace{4.\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}}_{\text{...par }2.\overrightarrow{MG}.}+2.GB^2$$

$$=5.MG^2+3.GA^2+2.GB^2+2.\overrightarrow{MG}.\underbrace{\left[3.\overrightarrow{GA}+2.\overrightarrow{GB}\right]}_{=\vec{o}\text{ car G est le barycentre de }(A;3)\text{ et }(A;2)\text{ .}}$$

$$=5.MG^2+3.GA^2+2.GB^2+2.\overrightarrow{MG}.\vec{o}$$

$$=5.MG^2+3.GA^2+2.GB^2+0=5.MG^2+3.GA^2+2.GB^2$$

Si nous voulons aller plus loin, il nous faut calculer les carrés de distances GA^2 et GB^2 à partir des coordonnées des points en cause.

$$GA^2=\left(\sqrt{(x_A-x_G)^2+(y_A-y_G)^2}\right)^2=(1,2)^2+(1,6)^2=1,44+2,56=4$$

$$GB^2=\left(\sqrt{(x_B-x_G)^2+(y_B-y_G)^2}\right)^2=(-1,8)^2+(-2,4)^2=3,24+5,76=9$$

Reprenons notre marche en avant !

$$3.MA^2+2.MB^2=5.MG^2+3.GA^2+2.GB^2=5.MG^2+3\times4+2\times9=5.MG^2+30$$

D'où l'égalité recherchée.

➲ Pour déterminer la nature et les attributs de l'ensemble $\mathcal{F}$, nous allons modifier l'égalité définissant l'ensemble en utilisant ce qui vient d'être accompli.

$$M\in\mathcal{F} \Leftrightarrow \underbrace{3.MA^2+2.MB^2}_{\text{On remplace...}}=50 \Leftrightarrow 5.MG^2+30=50$$

$$\Leftrightarrow 5.MG^2=20 \Leftrightarrow GM^2=4 \Leftrightarrow GM=2$$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre G et de rayon 2

Conclusion : $\mathcal{F}$ est le cercle de centre $G\left(-\frac{16}{5};-\frac{3}{5}\right)$ et de rayon 2.

Un autre chemin : la voie analytique

Pour déterminer les nature et attributs de l'ensemble $\mathcal{F}$, on peut aussi chercher à en déterminer une équation dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ à l'instar de ce qui a été fait dans la question 2.f pour l'ensemble $\mathcal{E}$.

$$M(x;y)\in\mathcal{F} \Leftrightarrow \underbrace{3.AM^2+2.BM^2}_{\text{Les distances n'ont pas de sens...}}=50$$

$$\Leftrightarrow 3.\left(\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}\right)^2+2.\left(\sqrt{(x+5)^2+(y+3)^2}\right)^2=50$$

$$\Leftrightarrow 3.\left[x^2+4.x+4+y^2-2.y+1\right]+2.\left[x^2+10.x+25+y^2+6.y+9\right]=50$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{5.x^2+32.x+5.y^2+6.y+83=50}_{\text{Divisé par 5...}}$$

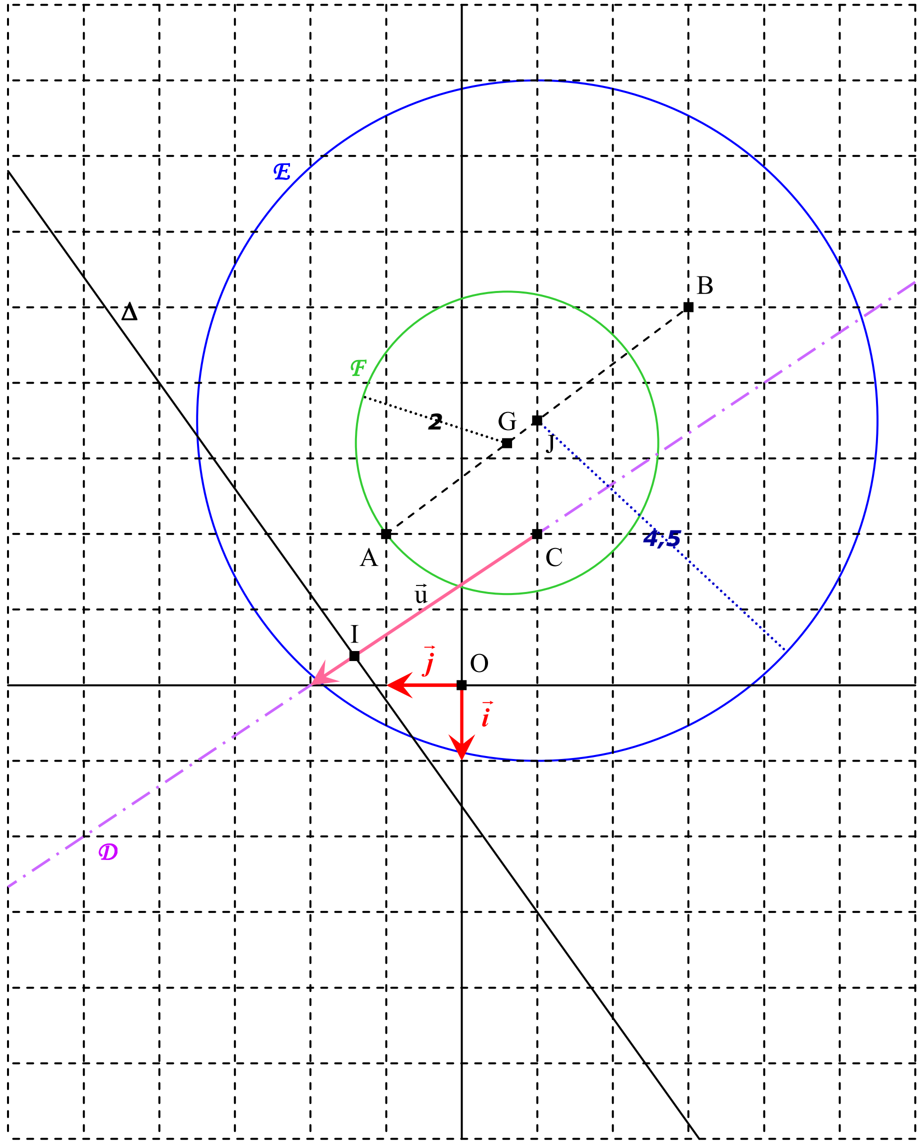
$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2+6,4.x+y^2+1,2.y=-6,6}_{\text{...ça ressemble à une équation de cercle}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+3,2)^2-10,24}_{x^2+6,4.x}+\underbrace{(y+0,6)^2-0,36}_{y^2+1,2.y}=-6,6$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+3,2)^2+(y+0,6)^2}_{(x-x_G)^2+(y-y_G)^2}=4 \Leftrightarrow GM^2=4 \Leftrightarrow GM=2$$

$$\Leftrightarrow \text{M appartient au cercle de centre } G(-3,2;-0,6) \text{ et de rayon 2}$$

Comme quoi la méthode analytique permet aussi d'aboutir au résultat ! Son seul défaut réside dans les calculs qu'elle requiert



Devoir Surveillé No.7

Le contexte

Ce septième devoir de deux heures qui eut lieu à la fin mars 2005 portait sur les suites :

- Limites des suites. En particulier, celles des suites géométriques.
- Suites arithmétiques et géométriques, somme des n premiers entiers, somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique. Emploi de celles-ci pour la modélisation de phénomènes.

Ce devoir fut plutôt bien réussi. Il reprenait un devoir donné l'année précédente.

L'énoncé

Première partie : qu'adviendra-t-il de ces cinq suites ?

Dans le présent exercice, une grande attention sera portée à la rédaction ainsi qu'au raisonnement.

a) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 3.n - 2^{-n}$$

b) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{3.n-5}{\sqrt{4.n^2+1}}$$

c) Déterminer la limite de la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = 9^{\sqrt{n}} + (-6)^n$$

d) Déterminer la limite de la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$s_n = \frac{5^{n+1}-2^n}{5^n+2^{2.n}}$$

e) Déterminer la limite de la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$t_n = \frac{0,5^n - 0,4^n}{0,5^n + 0,4^n}.$$

Seconde partie : les poussières de la colère

Excédé par leurs réflexions à son encontre, Zeus Roi des Dieux et maître absolu de l'Olympe a décidé de punir Héraclès et Sisyphe. A ces deux mortels, il ordonne de réduire en poussière deux montagnes pesant chacune 150000 kilogrammes avec leurs seules mains. Chacun la sienne !

Sûr de sa force, Héraclès décide de commencer doucement. Le premier jour de son châtiment, il réduit en poussière 2000 kilogrammes de rochers provenant de sa montagne. Puis les jours suivants, il augmente cette quantité de 300 kilogrammes par jour.

On appelle H_n la masse de rochers réduits en poussière par Héraclès le jour n.

Désespéré, Sisyphe se lance à corps perdus dans cette divine épreuve. Le premier jour de son nouveau supplice, il réduit en poussière 8000 kilogrammes de sa montagne. Mais ses efforts insensés ont un prix. La fatigue s'accumulant, la masse de pierre qu'il réduit en poussière quotidiennement diminue de 4% par rapport au jour précédent.

On appelle S_n la masse de rochers réduits en poussière par Sisyphe le jour n.

Les deux suites (H_n) et (S_n) commencent au rang 1. Leurs premiers termes sont :

$$H_1 = 2000 \qquad S_1 = 8000$$

a) Calculer H_2 et H_3.

Pour tout entier naturel non nul n, exprimer H_{n+1} en fonction de H_n. On justifiera la relation donnée.

Quelle est la nature de la suite (H_n) ? On précisera ses attributs.

En déduire l'expression de H_n en fonction de n.

Déterminer la masse totale de rochers qui aura été réduite en poussière par Héraclès durant les deux premières semaines de son supplice.

b) Calculer S_2 et S_3.

Pour tout entier naturel non nul n, exprimer S_{n+1} en fonction de S_n. On justifiera la relation donnée.

Quelle est la nature de la suite (S_n) ? On précisera ses attributs.

En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Déterminer la masse totale de rochers qui aura été réduite en poussière par Sisyphe durant les deux premières semaines de son châtiment.

c) Zeus l'a décidé : celui qui terminera le premier la transformation de sa montagne en poussière pourra couler des jours heureux au royaume d'Hadès.

Qui d'Héraclès ou de Sisyphe terminera le premier sa montagne ? On indiquera comment la réponse a été trouvée. Combien de jours cela aura-t-il nécessité ?

Dernière partie : la dernière marche des survivants de Banda

Il y a bien longtemps vivaient sur une île reculée de la mer de Banda au nord de l'actuelle Australie les 500 derniers survivants d'une espèce d'hominidés apparue des centaines de milliers d'années auparavant. Nous les appellerons les Hommes de Banda. Même s'ils n'étaient pas nos semblables, ils avaient pourtant développé une sorte de langage, une culture et ce qui s'apparentait à une société.
Et puis un jour, arrivant de la mer sur ses gigantesques navires, l'Homme Moderne débarqua sur cette île oubliée de tous avec sa civilisation, ses Divinités, son arrogance et son avidité. Le paradis de ces petits êtres au visage rond et d'un mètre de hauteur se transforma alors lentement en un enfer dont nul ne devait réchapper.
De par leur vigoureuse natalité, la population des Hommes de Banda augmentait de 7% par an. Mais à ce chiffre, il fallait enlever 42 individus chaque année. Ceux qui avaient été tués par les méfaits des nouveaux arrivants. Mais l'Homo Sapiens pouvait-il laisser ces petits hommes à l'écart de son progrès ?
Dans cet exercice, nous considérons que l'année zéro correspond à l'arrivée de l'Homme Moderne sur l'île.
On appelle P_n la population des Hommes de Banda l'année n. Même si P_n n'est pas un entier, on ne procédera à aucun arrondi.
Le premier terme de la suite (P_n) est $P_0 = 500$.

a) Déterminer P_1 et P_2. On expliquera comment ceux-ci ont été obtenus.
Pour tout entier naturel n, exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

On appelle (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = P_n - 600$$

b) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. On donnera sa raison et son premier terme.
En déduire l'expression de P_n en fonction de n.

c) Démontrer que la suite (P_n) est décroissante.
Déterminer la limite mathématique de la suite (P_n).

d) L'Homme Moderne débarqua sur l'île en 1789. En quelle année, les Hommes de Banda disparurent-ils définitivement ?

Le corrigé

Première partie : qu'adviendra-t-il de ces cinq suites ?

a) Pour tout entier naturel n, nous avons : $u_n = 3.n - 2^{-n} = 3.n - \frac{1}{2^n}$.

Quand n tend vers $+\infty$, les termes $3.n$ et 2^n tendent vers $+\infty$.

Donc u_n s'en va vers $(+\infty) - \frac{1}{+\infty} = (+\infty) - 0^+ = +\infty$.

b) Lorsque n tend vers $+\infty$, les suites $3.n - 5$ et $\sqrt{4.n^2+1}$ s'envolent aussi vers $+\infty$.
Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Forme indeterminée}.$$

Pour lever celle-ci, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur du quotient v_n par leurs termes les plus forts. Pour tout entier naturel non nul n, nous avons :

$$v_n = \frac{3.n-5}{\sqrt{4.n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2}} \times \frac{3-\frac{5}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} = \frac{n}{|n|} \times \frac{3-\frac{5}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} = \frac{n}{\underbrace{n}_{\text{car n est }\oplus}} \times \frac{3-\frac{5}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} = \frac{3-\frac{5}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}$$

Or quand n s'en va vers $+\infty$, $3 - \frac{5}{n}$ tend vers $3 - 0^+ = 3$ et $4 + \frac{1}{n^2}$ vers $4 + 0^+ = 4$.

Donc v_n se rapproche de $\frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1,5$

c) Quand n tend vers $+\infty$, 9^n s'envole vers $+\infty$. Par contre la suite $(-6)^n$ n'a pas de limite : ses termes pairs $(-6)^{2.n}$ tendent vers $+\infty$ et ses impairs $(-6)^{2.n+1}$ vers $-\infty$.
Mais cela ne préjuge pas d'une absence de limite pour la suite (w_n).
Pour lever l'ambiguïté, nous allons factoriser la somme w_n par le terme qui nous semble plus fort 9^n. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$w_n = 9^n + (-6)^n = 9^n.\left[1 + \frac{(-6)^n}{9^n}\right] = 9^n.\left[1 + \left(\frac{-6}{9}\right)^n\right] = 9^n.\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

Quand n tend vers $+\infty$, la puissance $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ tend vers 0 car $-\frac{2}{3} \in \left]-1;0\right[$.

Donc w_n tend vers $(+\infty)\times[1+0]=(+\infty)\times 1=+\infty$.

d) Sous la forme qui nous est proposée, il serait hasardeux de se prononcer sur la limite de la suite (s_n). Ce sont les exposants $n+1$ et $2.n$ qui nous posent problème.
Essayons de transformer ceux-ci en "puissances n". Pour tout entier naturel n :

$$s_n = \frac{\overbrace{5^{n+1}}^{n+1 \text{ facteurs } 5} - 2^n}{5^n + 2^{2.n}} = \frac{5\times 5^n - 2^n}{5^n + \left(2^2\right)^n} = \frac{5\times 5^n - 2^n}{5^n + (4)^n} = \frac{5\times 5^n - 2^n}{5^n + 4^n}$$

Sous cette écriture, le numérateur de s_n est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.
Quant au dénominateur 5^n+4^n, il s'envole vers $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$.
Pour lever les diverses indéterminations détectées ou dormantes, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur de la fraction s_n par leurs termes les plus forts : 5^n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire :

$$s_n = \frac{5\times 5^n - 2^n}{5^n + 4^n} = \frac{5^n}{5^n}\times\frac{5-\frac{2^n}{5^n}}{1+\frac{4^n}{5^n}} = \frac{5-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

Or quand n tend vers $+\infty$, les puissances $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ s'en vont toutes deux vers 0.

Donc s_n tend vers $\frac{5-0}{1+0}=5$.

e) Quand n tend vers $+\infty$, les puissances $0,4^n$ et $0,5^n$ tendent vers 0^+ car leurs exposés sont compris strictement entre 0 et 1.
Donc la suite (t_n) est une forme indéterminée du type $\frac{0-0}{0+0}=\frac{0}{0}=\frac{\text{Petit}}{\text{Petit}}$.
Pour lever l'indétermination existante, nous allons une fois encore factoriser les numérateur et dénominateur par leurs termes nous semblant les plus forts : $0,5^n$.

Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$t_n = \frac{0,5^n - 0,4^n}{0,5^n + 0,4^n} = \frac{0,5^n}{0,5^n}\times\frac{1-\frac{0,4^n}{0,5^n}}{1+\frac{0,4^n}{0,5^n}} = \frac{1-\left(\frac{0,4}{0,5}\right)^n}{1+\left(\frac{0,4}{0,5}\right)^n} = \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{1-0,8^n}{1+0,8^n}$$

Quand n tend vers $+\infty$, la puissance $0,8^n$ tend vers 0^+. Donc t_n tend vers $\frac{1-0^+}{1+0^+}=1$.

Seconde partie : les poussières de la colère

a) Du jour n sur le suivant $n+1$, la masse de rochers réduits en poussière par Héraclès H_n augmente de 300 kilogrammes. Ainsi :

$$\underbrace{H_2}_{\text{Masse réduite en poussière le jour 2}} = \underbrace{H_1}_{\text{Jour précédent 1}} + \underbrace{300}_{\text{Augmentation}} = 2000+300=2300$$

Donc Héraclès réduit 2300 kg de rocaille en poussière le second jour. De même :

$$\underbrace{H_3}_{\text{Masse du jour 3}} = \underbrace{H_2}_{\text{Jour précédent 2}} + \underbrace{300}_{\text{Augmentation}} = 2300+300=2600$$

Le troisième jour, il réduit 2600 kg.
De manière générale, pour tout entier naturel non nul, nous avons :

$$\underbrace{H_{n+1}}_{\text{Masse réduite le jour n+1}} = \underbrace{H_n}_{\text{Masse réduite le jour précédent n}} + \underbrace{300}_{\text{Augmentation}}$$

Comme pour passer du terme H_n au suivant H_{n+1}, on ajoute toujours le même nombre 300 alors la suite (H_n) est arithmétique de raison 300 et de premier terme $H_1=2000$.
Donc pour tout entier naturel non nul n, il vient :

$$H_n = H_1+(n-1)\times\text{raison} = 2000+(n-1)\times 300 = 2000+300.n-300 = 300.n+1700$$

➲ La masse de rochers que Héraclès réduit en poussière durant les deux premières semaines est la somme de celles des quatorze premiers jours $H_1, H_2, \ldots, H_{14}$.

$$\text{Masse de Héracles en deux semaines} = \underbrace{H_1+H_2+\ldots+H_{14}}_{\text{Somme des 14 premiers termes de la suite arithmétique } (H_n)}$$

$$= \underbrace{14}_{\text{Nombre de termes}} \times \underbrace{\frac{H_1+H_{14}}{2}}_{\text{Moyenne de deux termes extrêmes}}$$

$$= 14\times\frac{2000+(300\times 14+1700)}{2} = 55300$$

En deux semaines, le vainqueur des douze travaux aura réduit 55300 kg de rochers en poussière.

b) D'un jour n sur le suivant $n+1$, la masse de rochers réduits en poussière par Sisyphe notée S_n diminue de 4%. Autrement dit :

$$\underbrace{S_2}_{\text{Masse réduite le jour 2}} = \underbrace{S_1}_{\text{Jour précédent 1}} \underbrace{-4\% \text{ de } S_1}_{\text{La fatigue...}} = S_1 - 0{,}04 \times S_1 = 0{,}96 \times S_1 = 7680$$

Le second jour, 7680 kilogrammes de rochers sont réduits en poussière par Sisyphe.
Les mêmes causes produisant les mêmes effets, il vient :

$$\underbrace{S_3}_{\text{Masse réduite le jour 3}} = \underbrace{S_2}_{\text{Jour précédent 2}} \underbrace{-4\% \text{ de } S_2}_{\text{La fatigue...}} = S_2 - 0{,}04 \times S_2 = 0{,}96 \times S_2 = 7372{,}8$$

Le troisième jour, Sisyphe réduit 7372,8 kilogrammes de pierres en poussière.
Le mécanisme se propageant jour après jour, nous pouvons écrire que pour tout entier naturel non nul n :

$$\underbrace{S_{n+1}}_{\text{Masse réduite le jour n+1}} = \underbrace{S_n}_{\text{Jour précédent n}} \underbrace{-4\% \text{ de } S_n}_{\text{La fatigue...}} = S_n - 0{,}04 \times S_n = 0{,}96 \times S_n$$

Comme pour passer du terme S_n au suivant S_{n+1}, on multiplie à chaque fois par le même nombre $0{,}96$ alors la suite (S_n) est géométrique de raison $0{,}96$ et de premier terme $S_1 = 8000$. Par suite, pour tout entier naturel non nul n, il vient :

$$S_n = S_1 \times \text{raison}^{n-1} = 8000 \times 0{,}96^{n-1} = \frac{8000}{0{,}96} \times 0{,}96^n = \frac{25000}{3} \times 0{,}96^n$$

➲ La masse de rocaille réduite en poussière par Sisyphe les deux premières semaines est la somme de celles des quatorze premiers jours $S_1, S_2, \ldots, S_{14}$. Ainsi :

$$\text{Masse de Sisyphe en deux semaines} = \underbrace{S_1 + S_2 + \ldots + S_{14}}_{\text{Somme des 14 premiers termes de la suite géométrique } (S_n)}$$

$$= \underbrace{S_1}_{\text{Premier terme}} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$= 8000 \times \frac{1 - 0{,}96^{14}}{1 - 0{,}96} \approx 87065{,}3$$

Durant les deux premières semaines, Sisyphe réduit 87065,3 kilogrammes de pierres en poussière.

c) Pour savoir qui de Héraclès ou de Sisyphe aura le privilège de couler des jours heureux au royaume des morts, nous allons déterminer les expressions en fonction de n des masses totales de pierres qu'ils réduisent en poussière les n premiers jours.

En s'inspirant de ce qui a été fait à la question 2.a pour ses deux premières semaines, nous pouvons écrire que la masse de rochers réduits en poussière par Héraclès les n premiers jours est donnée par :

$$\text{Masse de Héraclès en n jours} = \underbrace{H_1 + H_2 + \ldots + H_n}_{\text{Somme des n premiers termes de la suite arithmétique } (H_n)}$$

$$= \underbrace{n}_{\text{Nombre de termes}} \times \underbrace{\frac{H_1 + H_n}{2}}_{\text{Moyenne de deux termes extrêmes}}$$

$$= n \times \frac{2000 + (300 \times n + 1700)}{2}$$

$$= n \times (1850 + 150 \times n) = 150 \times n^2 + 1850 \times n$$

De plus, la masse de rochers réduits en poussière par le pauvre Sisyphe les n premiers jours de son supplice est donnée est par :

$$\text{Masse de Sisyphe en n jours} = \underbrace{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}_{\text{Somme des n premiers termes de la suite géométrique } (S_n)}$$

$$= \underbrace{S_1}_{\text{Premier terme}} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

$$= 8000 \times \frac{1 - 0{,}96^n}{1 - 0{,}96}$$

$$= 8000 \times \frac{1 - 0{,}96^n}{0{,}04} = 200000 \times \left(1 - 0{,}96^n\right)$$

Les tableaux de valeurs fournis par la calculatrice des fonctions $Y1 = 150 \times X \wedge 2 + 1850$ et $Y2 = 200000 \times (1 - 0{,}96 \wedge X)$ nous permet de conclure que le premier à atteindre et à dépasser les 150000 kilogrammes est Héraclès au vingt-septième jour. A cette date, la masse totale réduite en poussière par ce demi-Dieu est théoriquement de 159300 kilogrammes. Il faut 34 jours à Sisyphe pour achever sa montagne.

Note : il y en a un qui n'a pas fini de rouler des pierres ! Cela dit, c'est sûrement mieux que le royaume d'Hadès ! La vie n'y semble pas géniale pour les morts !

Dernière partie : la dernière marche des survivants de Banda

a) D'une année n sur la suivante $n+1$, la population des Hommes de Banda P_n augmente de 7% mais est diminuée de 42 individus.

Appliquons ce principe de récurrence pour calculer les termes P_1 et P_2.

$$P_1 = \underbrace{P_0}_{\substack{\text{Population année}\\ \text{précédente 0}}} + \underbrace{7\%\text{ de }P_0}_{\substack{\text{Augmentation par rapport}\\ \text{à l'année précédente 0}}} - \underbrace{42}_{\substack{\text{Les victimes}\\ \text{de cette année 1}}}$$

$$= P_0 + 0,07\times P_0 - 42$$

$$= 1,07\times P_0 - 42 = 1,07\times 500 - 42 = 535 - 42 = 493$$

La population théorique la première année est de 493 individus.

$$P_2 = \underbrace{P_1}_{\substack{\text{Population année}\\ \text{précédente 1}}} + \underbrace{7\%\text{ de }P_1}_{\substack{\text{Augmentation par rapport}\\ \text{à l'année précédente 1}}} - \underbrace{42}_{\substack{\text{Les victimes}\\ \text{de l'année 2}}}$$

$$= P_1 + 0,07\times P_1 - 42$$

$$= 1,07\times P_1 - 42 = 1,07\times 493 - 42 = 485,51$$

La population théorique la seconde année est d'environ 486 individus.

Le même processus se reproduisant les années suivantes, nous pouvons écrire que pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} = \text{Population de l'année } n+1$$

$$= \underbrace{P_n}_{\substack{\text{Population année}\\ \text{précédente n}}} + \underbrace{7\%\text{ de }P_n}_{\substack{\text{Augmentation par rapport}\\ \text{à l'année précédente n}}} - \underbrace{42}_{\substack{\text{Les victimes}\\ \text{de l'année n+1}}} = 1,07\times P_n - 42$$

b) Pour prouver que la suite (u_n) est géométrique, essayons d'exprimer le terme u_{n+1} en fonction du terme u_n.

Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_{n+1} = P_{n+1} - 600$$

$$= \underbrace{1,07\times P_n - 42}_{P_{n+1}\text{ d'après 3.a}} - 600 = 1,07\times\underbrace{\left[u_n + 600\right]}_{P_n} - 642 = 1,07\times u_n + 642 - 642 = 1,07\times u_n$$

Ainsi pour passer du terme u_n au suivant u_{n+1}, multiplie-t-on à chaque fois par $1,07$.

Par conséquent, la suite (u_n) est géométrique de raison $1,07$ et de premier terme

$$u_0 = P_0 - 600 = 500 - 600 = -100$$

Donc pour tout entier naturel n, nous avons :

$$u_n = u_0\times \text{raison}^n = -100\times 1,07^n$$

On en déduit alors l'expression du terme général de la suite (P_n). Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$P_n = u_n + 600 = 600 - 100\times 1,07^n$$

c) Pour établir que la suite (P_n) est décroissante, nous allons nous intéresser au signe de la différence de deux termes consécutifs.

Pour tout entier naturel n, nous avons :

$$P_{n+1} - P_n = \left[600 - 100\times 1,07^{n+1}\right] - \left[600 - 100\times 1,07^n\right]$$

$$= 600 - 100\times 1,07^{n+1} - 600 + 100\times 1,07^n = 100\times 1,07^n - 100\times \overbrace{1,07^{n+1}}^{n+1\text{ facteurs}}$$

$$= \underbrace{100\times 1,07^n}_{\text{Facteur...}}\times 1 - \underbrace{100\times 1,07^n}_{\text{...commun.}}\times 1,07 = 100\times 1,07^n\times\left[1 - 1,07\right]$$

$$= \underbrace{100}_{\text{Positif}}\times\underbrace{1,07^n}_{\text{Positif}}\times\underbrace{(-0,7)}_{\text{Négatif}}$$

Ainsi la différence de deux termes consécutifs $P_{n+1} - P_n$ est-elle toujours négative.

Comme $P_{n+1} - P_n < 0$ alors le terme P_n est toujours supérieur à son suivant P_{n+1}.

Conclusion : la suite (P_n) est décroissante.

➲ Quand n tend vers $+\infty$, la puissance $1,07^n$ s'envole aussi vers $+\infty$.

Donc P_n s'en va vers $600 - 100\times(+\infty) = 600 - (+\infty) = -\infty$.

d) Les Hommes de Banda disparaissent définitivement lorsque leur population théorique P_n devient nulle voire négative.

La suite (P_n) étant décroissante, ayant pour premier terme $P_0 = 500$ et pour limite $-\infty$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes P_n sont négatifs ou nuls.

Pour répondre à la question posée, nous devons déterminer ce rang n_0 à partir duquel les termes de la suite sont nuls ou négatifs. Pour y parvenir deux voies sont possibles :

- On peut utiliser le tableau de valeurs de la fonction $Y1 = 600 - 100\times 1,07\,\hat{}\,X$ fourni par la calculatrice.
  Celui-ci indique que P_n devient négatif ou nul à partir du rang $n_0 = 27$.

- On peut aussi chercher à résoudre l'inéquation $P_n \le 0$ en utilisant la fonction logarithme népérien qui transforme les produits en sommes, les puissances en produits.

$$P_n \leq 0 \Leftrightarrow 600-100\times 1,07^n \leq 0 \Leftrightarrow -100\times 1,07^n \leq -600$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1,07^n \geq 6}_{\text{On a divisé par } -100} \Leftrightarrow \underbrace{\ln\left(1,07^n\right) \geq \ln(6)}_{\text{Passage au logarithme népérien}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n.\ln(1,07) \geq \ln(6)}_{\text{Propriété du logarithme}} \Leftrightarrow \underbrace{n \geq \frac{\ln(6)}{\ln(1,07)} \approx 26,48}_{\text{L'ordre est conservé car on a divisé par } \ln(1,07) \text{ qui est positif.}}$$

Par conséquent, P_n est négatif ou nul à partir du rang 27.

Conclusion : les Hommes de Banda disparurent définitivement en $1789+27=1816$.
Dans la longue histoire de l'évolution, disparaître est la règle, survivre est l'exception.

A propos de la fonction logarithme népérien notée ln

La fonction ln est définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Elle présente les propriétés et particularités suivantes :

- Sa dérivée est la fonction inverse $\frac{1}{x}$. Donc, ln est croissante sur $]0;+\infty[$.
- Comme $\ln(1)=0$ alors ln(x) est négatif sur $]0;1[$ et positif sur $]1;+\infty[$.
- Elle transforme les produits en sommes : $\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$
- Elle convertit les quotients en différences : $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
- Elle métamorphose les puissances en produits : $\ln\left(a^n\right)=n\times\ln(a)$

Devoir Surveillé No.8

Le contexte

Ce huitième et dernier devoir eut début juin 2005, c'est-à-dire durant la dernière semaine de cours. Il se déroula sans calcultrice. Il portait sur :

- Les probabilités : variable aléatoire, espérance mathématique, probabilité conditionnelle (hors programme).
- La géométrie analytique dans l'espace. Théoriquement les équations de plan sont hors programme.
- Trigonométrie.

Ce devoir ne fut convenablement réussi que parce qu'il devait être corrigé assez rapidement et parce que le correcteur eut une crise de gentillesse.
Depuis la session 2004, l'un des quatre ou cinq exercices des épreuves de maths des séries ES ou S peut être un Questionnaire à Choix Multiples. La troisième partie de ce devoir a été conçue dans cet esprit là.

L'énoncé

Première partie : grosse arnaque ?

La Blancoise des Jeux a décidé de lancer un nouveau jeu : le Grossanark. La règle en est la suivante : d'abord le joueur lance une pièce pipée (ou mal équilibrée). La pièce donne soit Pile, soit Face. La probabilité qu'il obtienne Pile est $\frac{1}{3}$.

S'il obtient Pile, il tire une seule boule dans une première urne nommée ***(1)*** qui contient trois boules vertes, une rouge et une noire.
S'il obtient Face, il tire une seule boule dans une seconde urne nommée ***(2)*** qui contient une boule verte, une rouge et trois noires.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher et ont la même probabilité d'être tirées.
Le présent jeu donne lieu à un gain. Si le joueur tire une boule verte, il gagne 12€. S'il tire une boule rouge, sa mise lui est remboursée. Par contre, il ne gagne rien s'il tire une boule noire
On appelle :

- V l'événement "une boule verte a été tirée".
- R l'événement "une boule rouge a été tirée".
- N l'événement "une boule noire a été tirée".

Dans tout l'exercice, les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

a) Faire un arbre pondéré le plus complet possible représentant l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.
En déduire les probabilités des événements V, R et N. Une grande attention sera portée aux justifications fournies.

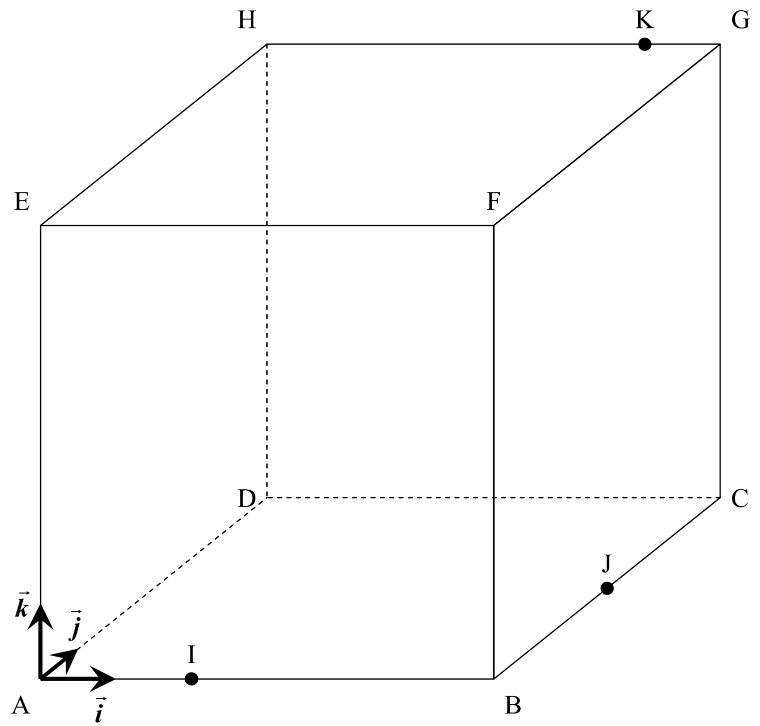
b) S'il veut jouer, le joueur doit miser. Dans un excès de générosité, la Blancoise des Jeux a décidé que son jeu devait être équitable. A combien doit-elle fixer la mise ?

c) On sait qu'une boule noire vient d'être tirée. Quelle est la probabilité que la pièce ait donné Face ?

d) La mise est fixée à 7€. Un joueur décide de jouer à trois reprises au Grossarnak. Les trois parties sont indépendantes les unes des autres. Quelle est la probabilité qu'à l'issue de ces trois parties, le joueur ait gagné exactement 24€ brut ?

Seconde partie : jeu de cube

ABCDEFGH est un cube dont chaque arête mesure 6 centimètres.



On appelle J le milieu du segment [BC]. Les points I et K sont définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{HK} = \frac{5}{6}.\overrightarrow{HG}$$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont définis par :

$$\vec{i} = \frac{1}{6}.\overrightarrow{AB} \qquad \vec{j} = \frac{1}{6}.\overrightarrow{AD} \qquad \vec{k} = \frac{1}{6}.\overrightarrow{AE}$$

Dans le présent exercice, nous travaillerons dans le repère orthonormé $\left(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

a) Déterminer les coordonnées de tous les points dans le repère orthonormé $\left(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

b) Prouver que les points I, J et K définissent un plan.
Démontrer que le vecteur $\vec{u}\left(6;-8;5\right)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
On appelle L le point d'intersection de la droite (AE) et du plan (IJK). P est le point d'intersection de la droite (EH) et du plan (IJK). Q est le point d'intersection de la droite (CG) et du plan (IJK).

c) Déterminer par le calcul les coordonnées des points L, P et Q.
Placer ces points sur la figure et tracer sur la figure de la présente feuille l'intersection du plan (IJK) et les faces du cube ABCDEFGH.

d) Déterminer une équation cartésienne du cylindre de révolution $\mathcal{C}$ d'axe (BF) passant par le point J.

Dernière partie : le côté obscur de la trigonométrie

Dans chacune des sept questions suivantes, cochez la ou les propositions qui sont vraies. Une bonne réponse rapporte un point, une mauvaise en enlève 0,5. Une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à l'exercice est négatif, il est remis à zéro. Aucune justification n'est demandée.

a) Combien l'équation $\cos\left(t\right) = \frac{3}{2}$ d'inconnue t admet-elle de solutions dans l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$?

Aucune | Une | Deux | Trois

b) α étant un réel strictement positif, parmi les égalités suivantes, laquelle est vraie ?

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\left(\alpha\right) - \frac{1}{2}.\sin\left(\alpha\right)$ | $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\left(\alpha\right) + \frac{1}{2}.\sin\left(\alpha\right)$

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.\cos\left(\alpha\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin\left(\alpha\right)$ | $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.\cos\left(\alpha\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin\left(\alpha\right)$

c) Combien l'équation $\sin\left(t\right) = -\frac{2}{5}$ d'inconnue t admet-elle de solutions dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$?

Aucune | Une | Deux | Trois

d) α est un réel de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ tel que $\sin\left(\alpha\right) = \frac{3}{4}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est égale à $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$?

$-\frac{3}{4}$ | $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ | $\frac{\sqrt{7}}{4}$ | $\frac{3}{4}$

e) Parmi les propositions suivantes, laquelle est un argument du point A dont les coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé direct sont $\left(-6;-2.\sqrt{3}\right)$?

$-\frac{5.\pi}{6}$ | $-\frac{2.\pi}{3}$ | $\frac{2.\pi}{3}$ | $\frac{5.\pi}{3}$

f) α est un réel de l'intervalle $\left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[$. Parmi les affirmations suivantes, cochez les deux qui sont vraies ?

$\cos\left(\alpha-\pi\right)$ est négatif | $\cos\left(\alpha-\pi\right)$ est positif

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ est négatif | $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ est positif

g) β est le réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ tel que $\cos(\beta)=\frac{1}{3}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est égale à $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$?

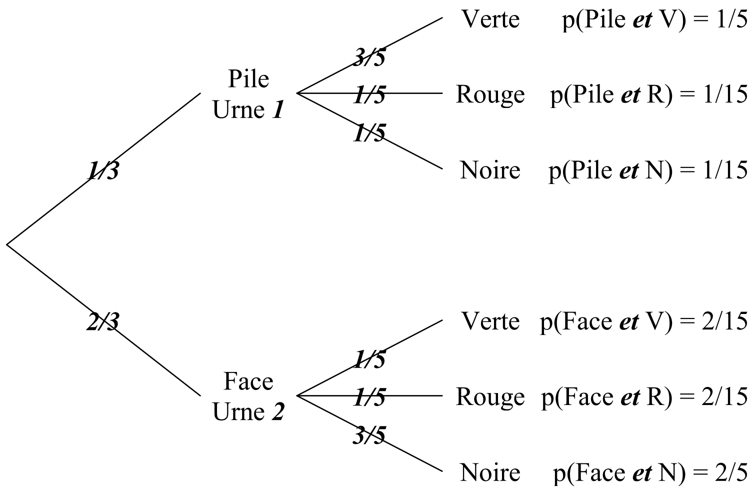
$\frac{-\sqrt{2}-4}{6}$ $\qquad$ $\frac{-\sqrt{2}+4}{6}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{2}-4}{6}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{2}+4}{6}$

Le corrigé

Première partie : grosse arnaque ?

a) L'arbre pondéré représentant l'expérience aléatoire du jeu Grossanark est :

<u>**On lance la pièce**</u> <u>**On tire une boule**</u> <u>**Le bilan**</u>



Les événements Pile et Face forment une partition de l'univers des probabilités. Par suite, en application de la formule des probabilités totales, nous pouvons écrire :

- $p(V)=p(\text{Pile}\cap V)+p(\text{Face}\cap V)=\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{3}{15}+\frac{2}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$
- $p(R)=p(\text{Pile}\cap R)+p(\text{Face}\cap R)=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$
- $p(N)=p(\text{Pile}\cap N)+p(\text{Face}\cap N)=\frac{1}{15}+\frac{6}{15}=\frac{7}{15}$

Conclusion : dans le jeu Grossarnak, on a une chance sur trois de tirer une boule verte, une sur cinq d'obtenir une rouge et sept sur quinze de choisir une boule noire.
On remarque que la somme des probabilités de ces trois événements fait 1.

b) On appelle X le gain brut que rapporte une partie du jeu Grossarnak. Cette variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0 lorsqu'une boule noire est tirée, la mise du joueur lorsque celui-ci obtient une rouge ou 12 s'il tire une boule verte.
Par conséquent, la loi de probabilité de cette variable aléatoire X est :

X	0	Mise du joueur	12
p(X)	$p(N)=\frac{7}{15}$	$p(R)=\frac{1}{5}$	$p(V)=\frac{1}{3}$

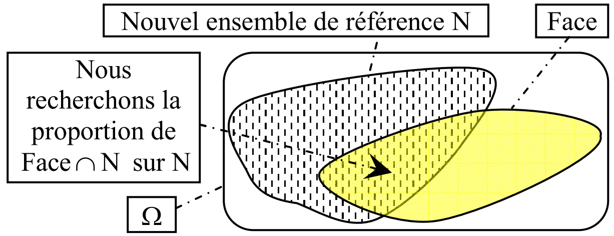
Le jeu est équitable lorsque l'espérance (mathématique) de gain $E(X)$ est égale à la mise du joueur.

$$\text{Le jeu est équitable} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{7}{15}\times 0+\frac{1}{5}\times \text{mise}+\frac{1}{3}\times 12}_{E(X)}=\text{mise}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}\times\text{mise}=4 \Leftrightarrow \text{mise}=4\times\frac{5}{4}=5$$

Conclusion : le jeu est équitable lorsque la mise est de 5€.

c) On sait que l'événement N est réalisé. L'ensemble de référence a donc changé.



La probabilité que la pièce retourne Face est donnée par :

$$p(\text{Face } \textbf{\textit{sachant}}\ N)=\frac{p(\text{Face } \textbf{\textit{et}}\ N)}{p(N)}=\frac{6/15}{7/15}=\frac{6}{15}\times\frac{15}{7}=\frac{6}{7}.$$

Conclusion : lorsque l'on tire une boule noire, on a six chances sur sept de faire face.

d) Obtenir 24€ en trois parties, cela signifie tirer deux boules vertes (12€ chacune) et une boule noire (0€).

La probabilité de tirer une boule verte à une partie est $\frac{1}{3}$, celle de tirer une noire $\frac{7}{15}$. La boule noire peut être obtenue à la première partie, ou bien à la seconde ou bien encore à la troisième. Tout cela pour dire qu'il existe plusieurs tirages conduisant à la combinaison "deux boules vertes et une noire". Ils se différencient par la position de la boule noire. Enumérons-les !

	Partie 1	Partie 2	Partie 3	Probabilité
Tirage	Noire	Verte	Verte	$p(NVV)=\frac{7}{15}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{135}$
Tirage	Verte	Noire	Verte	$p(VNV)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{135}$
Tirage	Verte	Verte	Noire	$p(VVN)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}=\frac{7}{135}$

Par conséquent :

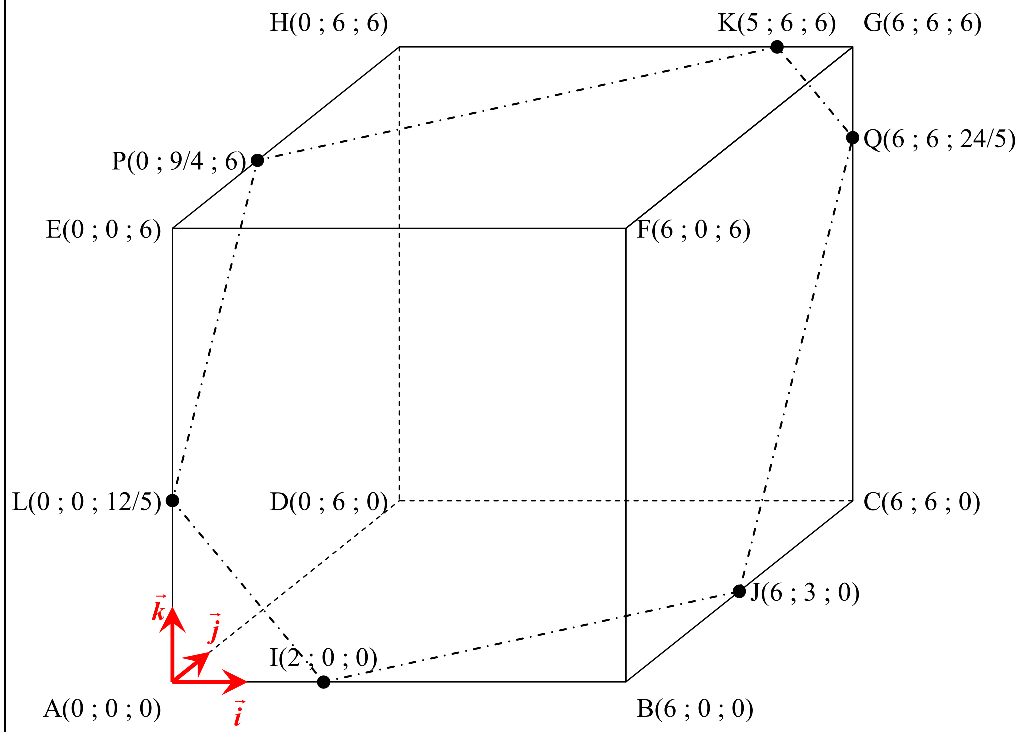
$$p(\text{"Gagné 24€"})=p(NVV)+p(VNV)+p(VVN)=\frac{7}{135}+\frac{7}{135}+\frac{7}{135}=\frac{21}{135}=\frac{7}{45}$$

Conclusion : le joueur a sept chances sur 45 de gagner 24€ sur trois parties.
L'arbre représentant l'expérience aléatoire de ces trois parties consécutives est :

Seconde partie : jeu de cube

a) Déterminons les coordonnées des onze points apparaissant sur la figure. Rappelons que dire qu'un point M de l'espace a pour coordonnées $(x_M;y_M;z_M)$ dans le repère $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ signifie que $\overrightarrow{AM}=x_M.\vec{i}+y_M.\vec{j}+z_M.\vec{k}$. Ainsi :

- Comme $\overrightarrow{AA}=\vec{o}=0.\vec{i}+0.\vec{j}+0.\vec{k}$ alors les coordonnées de A sont $(0;0;0)$.
- Attendu que $\overrightarrow{AB}=6.\vec{i}+0.\vec{j}+0.\vec{k}$ alors les coordonnées de B sont $(6;0;0)$.
- Vu que $\overrightarrow{AD}=0.\vec{i}+6.\vec{j}+0.\vec{k}$ alors les coordonnées de D sont $(0;6;0)$.
- Comme $\overrightarrow{AE}=0.\vec{i}+0.\vec{j}+6.\vec{k}$ alors les coordonnées de E sont $(0;0;6)$.
- ABCD étant un parallélogramme alors $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=6.\vec{i}+6.\vec{j}+0.\vec{k}$.
  Donc le point C a pour coordonnées $(6;6;0)$.
- De même, le quadrilatère ABEF étant un autre parallélogramme, nous avons : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=6.\vec{i}+6.\vec{k}+0.\vec{j}$ donc $F(6;0;6)$.
- On a $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=6.\vec{i}+6.\vec{j}+6.\vec{k}$. Donc $G(6;6;6)$.
- De même, $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=0.\vec{i}+6.\vec{j}+6.\vec{k}$. Ainsi $H(0;6;6)$.
- Comme $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\times 6.\vec{i}=2.\vec{i}+0.\vec{j}+0.\vec{k}$ alors $I(2;0;0)$.
- J étant le milieu du segment [BC] alors ses coordonnées sont les moyennes de celles de B et C. Autrement dit $J\left(\frac{x_B+x_C}{2}=6;\frac{y_B+y_C}{2}=3;\frac{z_B+z_C}{2}=0\right)$.
- Enfin $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AH}+\frac{5}{6}.\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AH}+\frac{5}{6}.\overrightarrow{AB}=6.\vec{j}+6.\vec{k}+\frac{5}{6}\times 6.\vec{i}=5.\vec{i}+6.\vec{j}+6.\vec{k}$
  Donc les coordonnées du point K dans le repère $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont $(5;6;6)$.



b) Leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points I, J et K ne sont pas alignés : ils définissent un plan.

➲ Pour établir que le vecteur $\vec{u}(6;-8;5)$ est normal au plan (IJK), nous allons prouver avec le test du produit scalaire qu'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs de ce plan non colinéaires. Pour ces derniers, nous prendrons $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

- Calculons le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

$$\vec{u}.\overrightarrow{IJ} = \underbrace{\begin{pmatrix}6\\-8\\5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix} = 6\times4+(-8)\times3+5\times0}_{\text{Nous travaillons dans le repère orthonormé } (A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = 24-24+0=0$$

  Leur produit scalaire étant nul, les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.

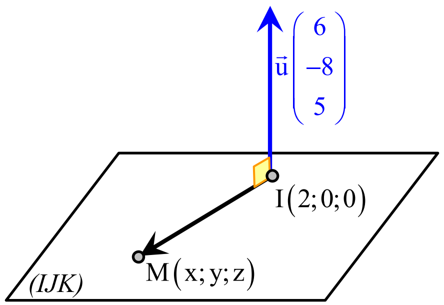
- Calculons le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{IK}$.

$$\vec{u}.\overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix}6\\-8\\5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix} = 6\times3+(-8)\times6+5\times6 = 18-48+30=0$$

  Là encore, la nullité de leur produit scalaire entraîne que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont orthogonaux.

Conclusion : étant orthogonal aux deux vecteurs directeurs du plan (IJK) non colinéaires que sont $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, le vecteur $\vec{u}$ est normal à ce plan.

➲ Le plan (IJK) est parfaitement défini par son vecteur normal $\vec{u}$ et son point I. Déterminer une équation du plan (IJK), c'est chercher à quelles conditions sur ses coordonnées un point M y appartient.



$$M(x;y;z)\in \text{plan}(IJK) \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}6\\-8\\5\end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}6\\-8\\5\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\times6+y\times(-8)+z\times5=0$$

$$\Leftrightarrow 6.x-8.y+5.z-12=0$$

Conclusion : une équations cartésienne du plan (IJK) est $6.x-8.y+5.z-12=0$.

c) Déterminons les coordonnées $(x_L;y_L;z_L)$ du point L, intersection de la droite (AE) et du plan (IJK).
Tous les points de la droite (AE) c'est-à-dire de l'axe $(O;\vec{k})$ ont leurs abscisse et ordonnée nulles. Donc les coordonnées de L sont de la forme $(0;0;z_L)$.
Ensuite, comme L appartient au plan (IJK) alors ses coordonnées en vérifient l'équation.

Donc : $6\times0-8\times0+5.z_L-12=0 \Leftrightarrow 5.z_L=12 \Leftrightarrow z_L=\frac{12}{5}=2,4$

Conclusion : les coordonnées du point L sont $(0;0;2,4)$

➲ Déterminons les coordonnées du point $P(x_P;y_P;z_P)$, intersection de (EH) et (IJK).
Comme P fait partie de la droite (EH) alors à l'instar des points E et H, son abscisse est nulle et sa cote égale à 6 . Donc $P(0;y_P;6)$.
Ensuite, comme P appartient au plan (IJK) alors ses coordonnées en vérifient l'équation.

Ainsi : $6\times0-8.y_P+5\times6-12=0 \Leftrightarrow -8.y_P=-18 \Leftrightarrow y_P=\frac{-18}{-8}=\frac{9}{4}=2,25$

Conclusion : les coordonnées du point P sont $(0;2,25;6)$.

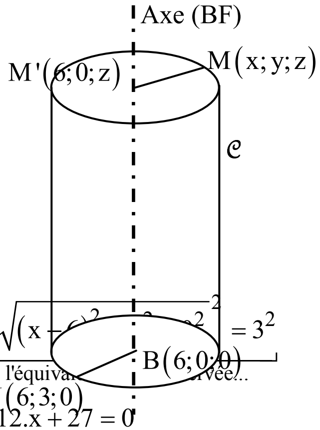
➲ Déterminons les coordonnées du point $Q(x_Q;y_Q;z_Q)$, intersection de (CG) et (IJK).
A l'instar des points C et G, tous les points de la droite (CG) ont leurs abscisse et ordonnée égales à 6. Donc les coordonnées de Q sont de la forme $(6;6;z_Q)$.
Q faisant partie du plan (IJK), ses coordonnées en vérifient l'équation. Par conséquent :

$$6\times6-8\times6+5.z_Q-12=0 \Leftrightarrow 5.z_Q=24 \Leftrightarrow z_Q=\frac{24}{5}=4,8$$

Conclusion : les coordonnées du point Q sont $(6;6;4,8)$.

➲ L'intersection du plan (IJK) et de la surface du cube ABCDEFGH est l'hexagone IJQKPL.

d) Sur le schéma ci-contre, les points B et M' sont les projetés orthogonaux respectifs des points J et M sur l'axe (BF).
Tous les points de la droite (BF) ont leur abscisse égale à 6 et leur ordonnée nulle.
La question qui se pose est : à quelle condition sur ses coordonnées, un point M appartient-il au cylindre $\mathscr{C}$.?
Un point M appartient au cylindre $\mathscr{C}$ si et seulement si la distance entre lui et son projeté orthogonal M' sur l'axe (BF) est égal au rayon JB du cylindre. Autrement dit :



$$M(x;y;z)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \underbrace{M'M = J'J \Leftrightarrow M'M^2 = J'J^2}_{\text{Comme on travaille avec des nombres positifs, l'équivalence est conservée...}} \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2+y^2}^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-12.x+36+y^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2-12.x+27=0$$

Conclusion : une équation cartésienne du cylindre $\mathscr{C}$ est $x^2+y^2-12.x+27=0$.
Pour vérifier la justesse de l'équation, on peut tester l'appartenance de J au cylindre $\mathscr{C}$

Dernière partie : le côté obscur de la trigonométrie

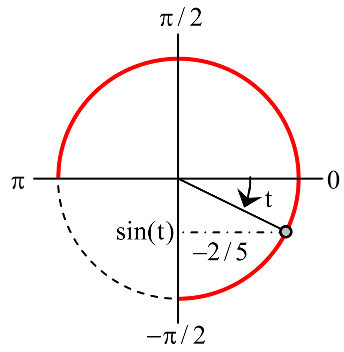
Trop de propositions crédibles conduisent à douter. C'est pourquoi au lieu de nous demander si telle affirmation est vraie ou fausse, nous allons rechercher la vérité.

a) Le cosinus d'un nombre t est l'abscisse du point qui lui est associé sur le cercle trigonométrique. C'est pour cela que celui-ci est toujours compris entre -1 et 1.
C'est pour cela que l'équation $\cos(t)=1,5$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

b) Utilisons la formule de sinus d'une somme. Pour tout réel α, nous avons :

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin(\alpha).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos(\alpha).\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.\sin(\alpha)+\frac{1}{2}.\cos(\alpha)$$

Le fait que α soit un réel strictement positif n'a strictement aucune influence !



c) Lorsque t appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$, il existe un seul point du cercle trigonométrique associé à t dont l'ordonnée $\sin(t)$ est égale à $-\frac{2}{5}$.

Donc l'équation $\sin(t)=-\frac{2}{5}$ a une seule solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

d) D'entrée, nous avons : $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$. Ensuite, α appartenant à $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, son cosinus qui est l'abscisse du point qui lui est associé sur le cercle trigonométrique est négatif.
Enfin, nous allons déterminer la valeur exacte de $\cos(\alpha)$.

$$\underbrace{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1}_{\text{Vrai pour tout réel...}} \Leftrightarrow \cos^2(\alpha)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16} \Leftrightarrow \underbrace{\cos(\alpha)=-\sqrt{\frac{7}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}}_{\text{Car } \cos(\alpha) \text{ est négatif...}}$$

e) Déterminons les coordonnées polaires du point A dont les coordonnées cartésiennes sont $(-6;-2.\sqrt{3})$. Commençons par le module ρ_A.

$$\rho_A=\sqrt{(-6)^2+(-2.\sqrt{3})^2}=\sqrt{36+4\times3}=\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=4.\sqrt{3}$$

Par conséquent, un argument θ_A du point A doit vérifier les deux équations :

➥ $\cos(\theta_A)=\dfrac{x_A}{\rho_A}=\dfrac{-6}{4.\sqrt{3}}=\dfrac{-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\times2\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

➥ $\sin(\theta_A)=\dfrac{y_A}{\rho_A}=\dfrac{-2.\sqrt{3}}{4.\sqrt{3}}=\dfrac{-2\times\sqrt{3}}{2\times2\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$

Parmi les propositions, seul $-\frac{5.\pi}{6}$ a un cosinus égal à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et un sinus égal à $-\frac{1}{2}$.

f) Les formules vues pour les sinus et cosinus nous permettent de dire :

$$\underbrace{\cos(\alpha-\pi)=\cos(-[\pi-\alpha])=\cos(\pi-\alpha)}_{\text{car cosinus est pair}}=-\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha)$$

Or α appartient à l'intervalle $]-\pi;-\pi/2[$. Donc son cosinus est négatif.

Par conséquent, $\cos(\alpha-\pi)$ est positif et $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ est négatif.

g) β appartenant l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$, son sinus est négatif. Déterminons le !

$$\underbrace{\cos^2(\beta)+\sin^2(\beta)=1}_{\text{Vrai pour tout réel...}} \Leftrightarrow \sin^2(\beta)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9} \Leftrightarrow \underbrace{\sin(\beta)=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2.\sqrt{2}}{3}}_{\text{Car }\sin(\beta)\text{ est négatif...}}$$

Pour calculer $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)$, nous allons utiliser la formule du cosinus d'une différence.

$$\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\cos(\beta).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin(\beta).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{-2.\sqrt{2}}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-4}{6}$$