Préface et avertissements

Depuis plus de huit années, la **taverne de l'Irlandais** poursuit son oeuvre de corruption de la jeunesse francophone, la soumettant à sa vision subversive des mathématiques.
La **taverne de l'Irlandais** vous proposait déjà un ensemble de cours pédagogiquement incorrects qui font l'horreur de tous les inspecteurs de France et l'Eglise de Iufmologie.
Pour répondre à l'attente de nos victimes, nous avions publié le **journal de marche d'une première scientifique** qui récapitulait une année de devoirs surveillés de mathématiques donnés dans cette classe.
Poursuivant sur notre lancée, nous vous proposons de suivre une année de devoirs surveillés de mathématiques en classe de seconde avec leurs corrigés complets.
Ces derniers qui vont parfois bien au-delà de ce que les programmes officiels requièrent.
Ils ont été testés avec plus ou moins de bonheur sur une classe comportant beaucoup de bons élèves, peu de moyens et beaucoup de faibles.
A la lecture des pages, chacun découvrira que parfois sont abordées des techniques qui outrepassent grandement le programme officiel de mathématiques en seconde. Nous tenons à préciser que les sujets et notions abordés dans ces pages n'engagent que leur auteur.
Bien souvent, plus de 20 points étaient distribués sur un devoir à cause de sa longueur ou de sa difficulté.
Voici donc Rêves secrets et devoirs interdits de seconde : une saison 2004-2005 de devoirs surveillés de mathématiques.

Jérôme ONILLON, professeur (dés)agrégé de Maths.

Au sommaire :

Devoir Surveillé No.1 2
Devoir Surveillé No.2 7
Devoir Surveillé No.3 11
Devoir Surveillé No.4 16
Devoir Surveillé No.5 20
Devoir Surveillé No.6 24
Devoir Surveillé No.7 27
Devoir Surveillé No.8 33
Devoir Surveillé No.9 37
Annexes.......... 43

Dans la Collection Inquiétantes Confessions,
la taverne de l'Irlandais vous présente

Rêves secrets et devoirs interdits de seconde

une saison 2004-2005 de devoirs surveillés de maths

Edition du jeudi 8 septembre 2005
Quoiqu'il arrive, patience . . .

Devoir Surveillé No.1

Le contexte

Ce premier devoir dura une heure, intervint vers la fin septembre 2004 après trois semaines de cours et portait sur :

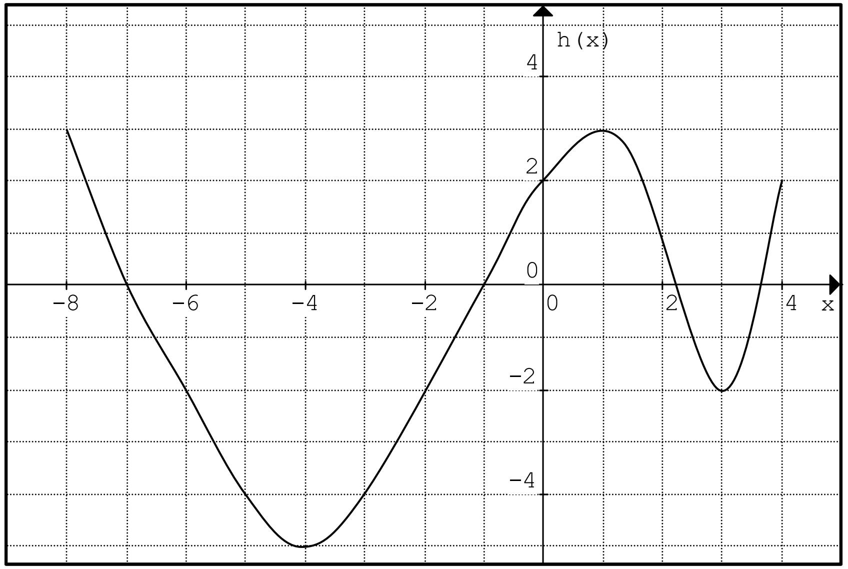
- Les fonctions sous leur aspect graphique : déterminer des images ou des antécédents, des variations et des extrema.
- La décomposition d'entiers en produits de facteurs premiers.
- Des résolutions d'équations ou d'inéquations du premier degré ou faisant intervenir la valeur absolue.

Il fut bien réussi dans l'ensemble. Ce jour là, la calculatrice était autorisée.

L'énoncé

Première partie : la fonction qui était définie par sa courbe

La courbe suivante est celle de la fonction h.



A partir de celle-ci et par lecture graphique, répondre aux questions suivantes. Le cas échéant, les réponses fournies seront arrondies au dixième près.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

b) Recopier et compléter les égalités suivantes :

$h(-5) = ...$ $h(0) = ...$ $h(5) = ...$ $h(.....) = -5$

c) Déterminer les antécédents par la fonction h de 2, puis de 4.
Déterminer les images par la fonction h de -3, puis de 3.

d) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes. On conclura chacune d'elles en donnant l'ensemble des solutions.

$h(x) \geq 0$ $h(x) < -4$ $h(x) \geq 3$

e) Dresser le tableau de variations de la fonction h.

f) Déterminer les extrema (minimum et maximum) de la fonction h. On précisera les valeurs de x où ils sont atteints.

g) En utilisant le graphique ci-contre, calculer $A = |h(-3)| - 2 \times |5-9| + 3 \times |12-7|$

Seconde partie : décomposition et conséquences

a) Décomposer en un produit de facteurs premiers l'entier naturel 1617.
Décomposer en un produit de facteurs premiers l'entier naturel 2618.

b) Déduire de ce qui précède la forme irréductible de $\frac{1617}{2618}$. On indiquera les simplifications opérées.

Dernière partie : pour quelques équations de plus

Résoudre dans ℝ les équations et inéquations suivantes. Chaque résolution sera conclue en donnant l'ensemble des solutions de l'équation ou de l'inéquation.

$|3.x + 7| > 8$ $|4.x^2 - 1| = 7$

$|5 - 4.(2.x + 1) + 6.x| \leq 12$ $2 - \frac{3.x + 1}{3} \geq 4.x - \frac{2 - x}{5}$

Le corrigé

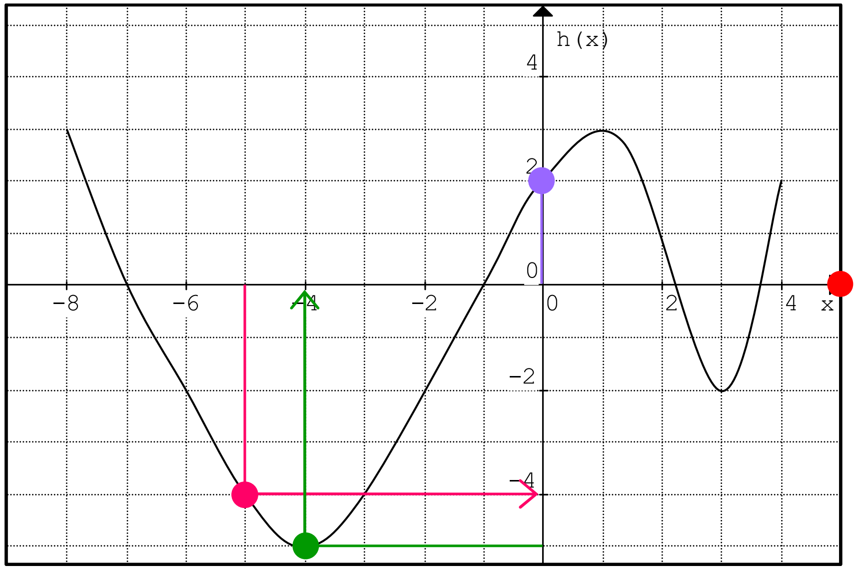
Première partie : la fonction qui était définie par sa courbe

La lecture d'un graphique dépend d'abord de sa qualité et de sa précision.
Par défaut, l'axe des abscisses est l'axe horizontal, celui des ordonnées est le vertical.

a) D'après le graphique, les réels ayant une image x par la fonction h sont ceux compris entre -8 et 4. Donc, l'ensemble de définition de la fonction h est l'intervalle $[-8;4]$. Implicitement, nous supposons donc que h est définie en -8 et 4.

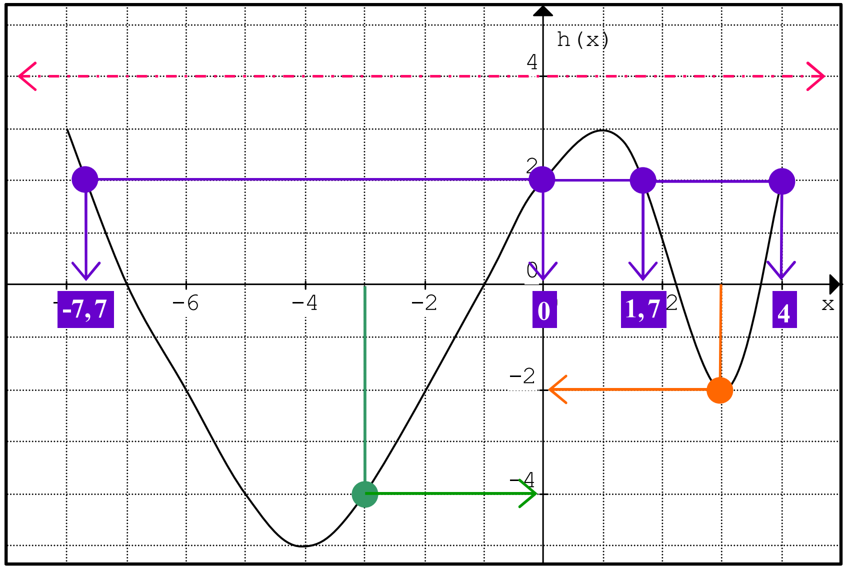
b) Tous les points de la courbe de la fonction h ont des coordonnées de la forme $\left(\underbrace{\text{un nombre } x}_{\text{Abscisse}};\ \underbrace{\text{son image } h(x)}_{\text{Ordonnée}}\right)$. Les images se lisent sur l'axe des ordonnées.

- Pour déterminer $h(-5)$, c'est-à-dire l'image de -5 par la fonction h, on part de la graduation -5 sur l'axe des abscisses, on se projette sur la courbe de h. $h(-5)$ est l'ordonnée du point obtenu. Nous trouvons $h(-5)=-4$.
- $h(0)$ est l'ordonnée du point de la courbe de h d'abscisse 0. Donc $h(0)=2$.
- 5 n'appartenant pas à l'ensemble de définition de h qu'est l'intervalle $[-8;4]$, il n'a pas d'image par cette fonction.



- Pour connaître le réel dont l'image par la fonction h est égale à -5, on part de la graduation -5 sur l'axe des ordonnées, on se projette horizontalement sur la courbe. Le réel recherché est l'abscisse du point obtenu. On trouve $h(-4)=-5$

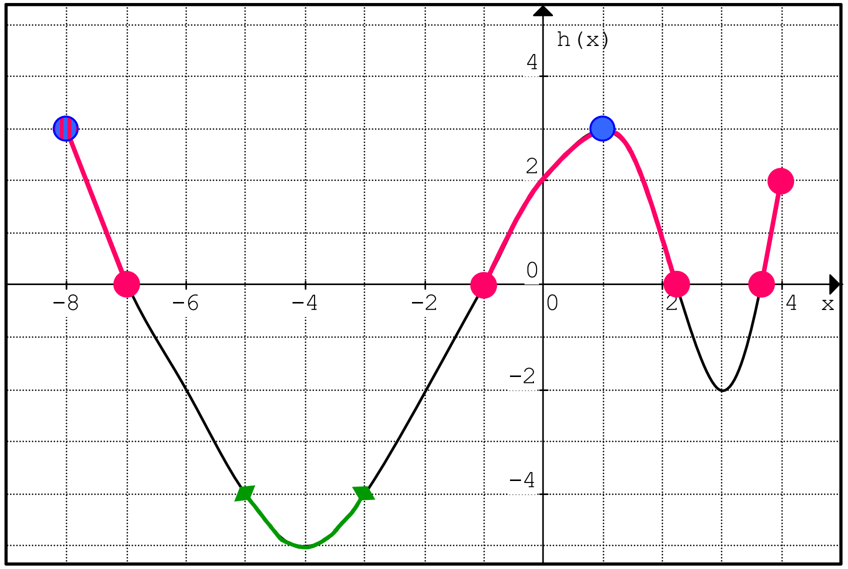
c) Déterminer les antécédents du réel 2 par la fonction h, c'est chercher tous les réels x dont l'image par h est égale à 2, c'est-à-dire les réels x tels que $h(x)=2$.
Pour y parvenir graphiquement, nous devons considérer tous les points de la courbe de h dont l'ordonnée est égale à 2. Si l'on part de la graduation 2 sur l'axe des ordonnées et que l'on se projette horizontalement sur la courbe, on rencontre celle-ci à quatre reprises. Les quatre points d'intersection ont pour abscisse $-7,7$; 0 ; 1,7 et 4.
Conclusion : 2 a quatre antécédents par la fonction h qui sont : $-7,7$; 0 ; 1,7 et 4.



➲ Pour déterminer les antécédents de 4 par la fonction h, on réitère la même démarche. Sauf qu'on ne rencontre jamais la courbe de h. Aucun point de celle-ci n'a pour ordonnée 4.
Conclusion : 4 n'a pas d'antécédent par la fonction h.

➲ Déterminer l'image de -3 par h, c'est chercher $h(-3)$. Une démarche similaire a déjà été effectuée à la question précédente. L'ordonnée du point de la courbe qui a pour abscisse -3 est égale à -4. Donc l'image de -3 par la fonction h est -4.
De la même manière, on trouve que l'image de 3 par la fonction h est -2.

d) Résoudre graphiquement l'équation $h(x) \geq 0$, c'est déterminer tous les réels x dont l'image par h est supérieure ou égale à 0. Concrètement, nous devons considérer toutes les portions de la courbe de h où l'ordonnée h(x) est sur ou au-dessus du niveau 0. Ce sont celles en fuchsia sur le graphique ci-dessous.



La courbe de h est sur ou au-dessus du niveau 0 lorsque x appartient aux intervalles $[-8;-7]$; $[-1;2,2]$ et $[3,6;4]$.
On inclut les bornes car les images de celles-ci par la fonction h sont égales à 0.
Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) \geq 0$ est la réunion d'intervalles $[-8;-7]\cup[-1;2,2]\cup[3,6;4]$.

➲ Pour résoudre l'inéquation $h(x) < -4$, nous devons nous intéresser aux portions de courbe se trouvant strictement au-dessous du niveau -4. Ce sont celles reprises en vert sur le graphique ci-dessus.
D'après ce dernier, h(x) est strictement inférieur à -4 lorsque et seulement lorsque x appartient à l'intervalle $]-5;-3[$.
Les bornes -5 et -3 sont exclues car les images de ces dernières par la fonction h sont égales à -4.
Conclusion : l'ensemble des solutions de $h(x) < -4$ est l'intervalle $]-5;-3[$.

➲ Seuls deux points (en bleu) de la courbe représentant la fonction h ont une ordonnée supérieure ou égale à 3. Ils ont pour abscisse -8 et 3.
Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) \geq 3$ est $\underbrace{\{-8;3\}}_{\text{Deux solutions}}$.

e) Lorsque sa courbe représentative monte, la fonction h est croissante. Lorsqu'elle descend, h est décroissante. D'après le graphique, nous pouvons dresser le tableau de variation de la fonction h.

x	-8		-4		1		3		4
h	3	↘	-5	↗	3	↘	-2	↗	2

f) D'après son tableau de variation, nous pouvons dire :

- Le minimum de la fonction h sur son intervalle de définition $[-8;4]$ est -5. Il est atteint lorsque x vaut -4.
- Le maximum de h sur $[-8;4]$ est 3. Il est atteint lorsque x vaut -8 et 1.

g) La valeur absolue d'un nombre réel x est lui-même s'il est positif ou son opposé s'il est négatif. La valeur absolue est une machine à positiver.
Calculons le nombre A.

$$A = |h(-3)| - 2\times|5-9| + 3\times|12-7| = |-4| - 2\times|-4| + 3\times|5| = 4 - 2\times4 + 3\times5 = 11$$

Seconde partie : décomposition et conséquences

a) Décomposons l'entier naturel 1617.

$$1617 = \underbrace{3\times539}_{\text{Car la somme de ses chiffres est divisible par 3}} = 3\times\underbrace{7\times77}_{\text{539 est divisible par 7}} = 3\times7\times7\times11 = 3\times7^2\times11$$

➲ Décomposons l'entier naturel 2618.

$$2618 = 2\times1309 = 2\times\underbrace{7\times187}_{\text{1309 est divisible par 7}} = 2\times7\times11\times17$$

b) Pour simplifier la fraction proposée, nous allons utiliser les décompositions en facteurs premiers trouvées précédemment à la question 2.a.

$$\frac{1617}{2618}=\frac{3\times\cancel{7}\times 7\times\cancel{11}}{2\times\cancel{7}\times\cancel{11}\times 17}=\frac{3\times 7}{2\times 17}=\frac{21}{34}$$

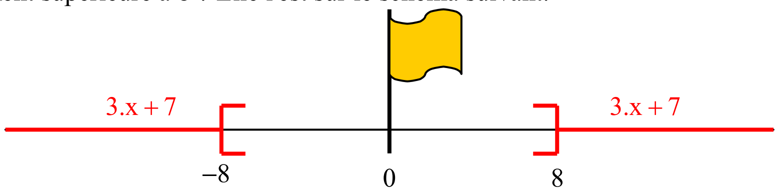
Conclusion : les entiers 21 et 34 étant premiers entre eux (plus aucun facteur en commun), la forme irréductible de la fraction $\frac{1617}{2618}$ est $\frac{21}{34}$.

Dernière partie : pour quelques équations de plus

La valeur absolue d'un nombre est la distance qui le sépare de zéro.

➲ Résolvons dans ℝ l'inéquation $|3.x+7|>8$.

Cette inéquation peut aussi se lire : quand la distance entre $3.x+7$ et 0 est-elle strictement supérieure à 8 ? Elle l'est sur le schéma suivant.



La distance entre $3.x+7$ et 0 est strictement supérieure à 8 lorsque $3.x+7$ est strictement avant à -8 ***ou*** lorsqu'il est strictement après à 8.
Entre -8 et 8, la distance par rapport à 0 est inférieure ou égale à 8.
Par suite :

$$\begin{aligned}|3.x+7|>8 &\Leftrightarrow 3.x+7<-8 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad 3.x+7>8\\ &\Leftrightarrow 3.x<-15 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad 3.x>1\\ &\Leftrightarrow x<\frac{-15}{3}=-5 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad x>\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $|3.x+7|>8$ est la réunion d'intervalles $\left]-\infty;-5\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

➲ Résolvons dans ℝ l'inéquation $|4.x^2-1|=7$.

Seuls deux réels ont une valeur absolue égale à 7 : il s'agit de 7 et de son opposé -7.

Si la valeur absolue du nombre $4.x^2-1$ est égale à 7, c'est que soit celui-ci est égal à -7, soit il est égal à 7.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}|4.x^2-1|=7 &\Leftrightarrow 4.x^2-1=-7 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad 4.x^2-1=7\\ &\Leftrightarrow 4.x^2=-6 \quad \textbf{\textit{ou}} \quad 4.x^2=8\\ &\Leftrightarrow x^2=-\frac{2}{3} \quad \textbf{\textit{ou}} \quad x^2=2\\ &\Leftrightarrow \underbrace{\text{Pas de solution}}_{\text{Un carré n'est jamais négatif}} \quad \textbf{\textit{ou}} \quad \underbrace{x=-\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x=\sqrt{2}}_{\text{Deux nombres ont pour carré 2}}\end{aligned}$$

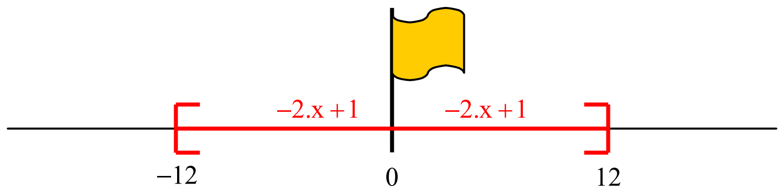
Conclusion : l'équation $|4.x^2-1|=7$ a deux solutions : $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

➲ Résolvons dans ℝ l'inéquation $|5-4.(2.x+1)+6.x|\leq 12$.

La première chose à faire est de réduire le plus possible ce qui est mis en valeur absolue.

$$\underbrace{|5-4.(2.x+1)+6.x|\leq 12 \Leftrightarrow |5-8.x-4+6.x|\leq 12 \Leftrightarrow |-2.x+1|\leq 12}_{\text{On travaille à l'intérieur des barres de valeur absolue. On ne touche à rien d'autres !}}$$

Cette dernière inéquation peut se lire : quand la distance entre le réel $-2.x+1$ et 0 est-elle inférieure ou égale à 12 ? Faisons un dessin pour bien visualiser la situation.



La réponse à cette dernière question est : lorsque $-2.x+1$ est compris (ou égal) entre -12 et 12.
Au-delà de ses bornes, la distance vis-à-vis de 0 est supérieure à 12. Ainsi :

$$\begin{aligned}|5-4.(2.x+1)+6.x|\leq 12 &\Leftrightarrow |-2.x+1|\leq 12 \Leftrightarrow -12\leq -2.x+1\leq 12\\ &\Leftrightarrow \underbrace{-13\leq -2.x\leq 11}_{\text{On a enlevé 1}} \Leftrightarrow \underbrace{6,5\geq x\geq -5,5}_{\substack{\text{On a divisé par } -2.\\ \text{L'ordre a changé !}}}\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $[-5,5;6,5]$.

➲ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2-\dfrac{3.x+1}{3}\geq 4.x-\dfrac{2-x}{5}$.

$$2-\frac{3.x+1}{3}\geq 4.x-\frac{2-x}{5} \Leftrightarrow \underbrace{15\times\left[2-\frac{1}{3}.(3.x+1)\right]\geq 15\times\left[4.x-\frac{1}{5}.(2-x)\right]}_{\text{On multiplie les deux membres par 15 pour éliminer les dénominateurs}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{30-15\times\frac{1}{3}\times(3.x+1)\geq 60.x-15\times\frac{1}{5}\times(2-x)}_{\text{On distribue...}}$$

$$\Leftrightarrow 30-5\times(3.x+1)\geq 60.x-3\times(2-x)$$

$$\Leftrightarrow 30-15.x-5\geq 60.x-6+3.x \Leftrightarrow -15.x+25\geq 63.x-6$$

$$\Leftrightarrow -78.x\geq -31 \Leftrightarrow x\leq\frac{-31}{-78}=\frac{31}{78}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $2-\dfrac{3.x+1}{3}\geq 4.x-\dfrac{2-x}{5}$ est l'intervalle $\left]-\infty;\dfrac{31}{78}\right]$.

Devoir Surveillé No.2

Le contexte

Ce second devoir d'une durée d'une heure eut lieu à la mi-octobre 2004 et portait sur :

- Les fonctions sous leur aspect graphique.
- Calcul littéral appliqué aux fonctions : développement et factorisation pour le calcul d'images et la détermination d'antécédents. Forme canonique.

Ce devoir fut assez bien réussi. La forme canonique et son utilisation ne font pas partie des exigibles de seconde. Elle est cependant très précieuse car elle permet de factoriser efficacement n'importe quelle fonction du second degré. La technique avait été introduite après qu'un élève eut développé une forme du second degré au lieu de la factoriser lors de la correction d'une équation au tableau. Ce fut la première entorse..

L'énoncé

Première partie : ainsi va la fonction h

La fonction h est définie sur l'intervalle $[-4;+\infty[$. On sait de celle-ci :

- L'image de -4 par la fonction h est égale à -3. Celle de 4 est égale à -1
- $h(-3)=-1 \qquad h(7)=-2$
- 0 a exactement deux antécédents par la fonction h que sont -2 et 3.
- h est croissante sur les intervalles $[-4;1]$ et $[5;+\infty[$.

  h est décroissante sur l'intervalle $[1;5]$.
- Le maximum de h sur l'intervalle $[-4;+\infty[$ vaut 5.

  Son minimum vaut -4.
- Pour tout réel x de l'intervalle $[5;+\infty[$, $h(x)<-1$.

  Pour être plus précis, plus x s'en va vers $+\infty$, plus h(x) se rapproche de -1 mais en y restant inférieur et sans jamais l'atteindre...

En utilisant les renseignements précédents, répondre aux questions suivantes :

a) Dresser le tableau de variation de la fonction h.
Pour quelles valeurs de x, h atteint-elle ses maximum et minimum ?

b) Tracer une courbe pouvant être celle de la fonction h.

c) Dresser le tableau de signe de h(x).

d) Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. L'image de -1 par la fonction h peut être égale à 8.
2. L'image de 2 par la fonction h peut être égale à 4.
3. L'image de 10 par la fonction h peut être égale à -3.

e) a et b sont deux réels de l'intervalle $[2;4]$ tels que $a<b$.
Laquelle de leurs deux images $h(a)$ et $h(b)$ est la plus grande ? On justifiera sa réponse.

f) Dans la présente question, on ne demande pas de déterminer les antécédents d'une valeur mais de donner leur nombre.

1. Combien -4 a-t-il d'antécédents par la fonction h ?
2. Combien -2 a-t-il d'antécédents par la fonction h ?
3. Combien $-0,5$ a-t-il d'antécédents par la fonction h ?
4. Combien 7 a-t-il d'antécédents par la fonction h ?

g) Résoudre les inéquations suivantes :

$h(x)\geq 0 \qquad h(x)<-1 \qquad h(x)<5$

Seconde partie : la fonction aux quatre visages

La fonction j est définie pour tout réel x par :

$$j(x)=(3.x+7)^2-(2.x+3)^2$$

a) Factoriser j(x).
Démontrer que pour tout réel x, $j(x)=5.x^2+30.x+40$.

b) Déterminer les images par la fonction j de -5 ; $\frac{2}{3}$ et $1-\sqrt{2}$.

c) Déterminer les antécédents par la fonction j de 40.
Déterminer les antécédents par la fonction j de 0.

d) En partant de sa forme développée, écrire j(x) sous sa forme canonique, c'est-à-dire sous la forme :

$$j(x)=\ldots\times\left[(x+\ldots)^2-\ldots\right]$$

e) Déterminer les antécédents par la fonction j de 75.

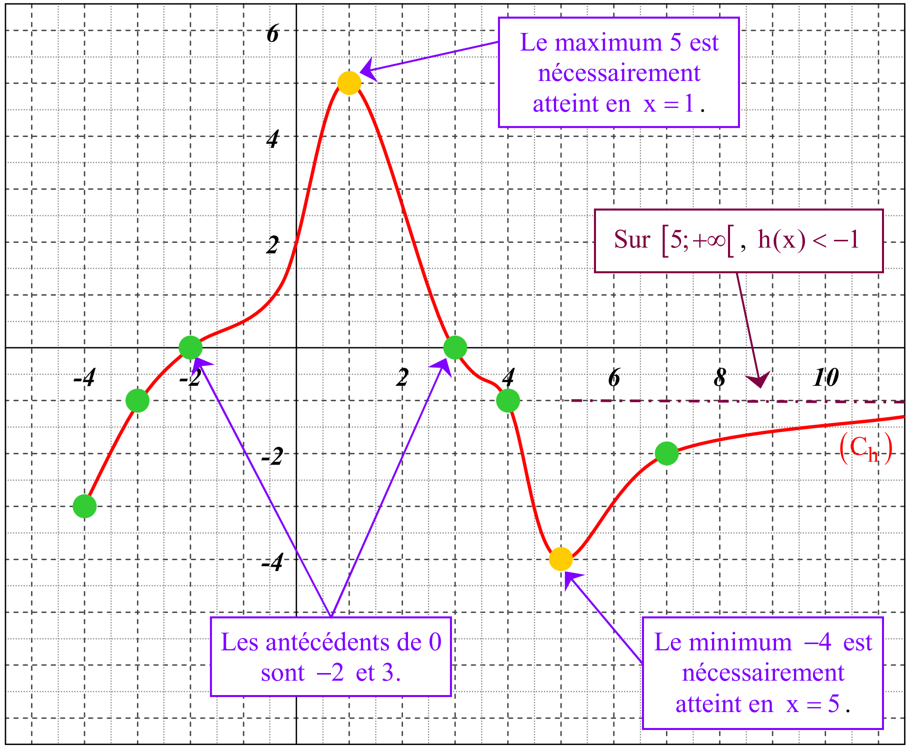
Le corrigé

Première partie : ainsi va la fonction h

a) Le tableau de variation de la fonction h est le suivant :

x	-4		1		5		$+\infty$
h	-3	↗	5	↘	-4	↗	-1

b) La première chose à faire pour tracer une courbe représentant h est de positionner les points (en vert) donnés par l'énoncé. Puis on esquisse par ceux-ci une courbe qui respecte les autres conditions fixées



c) La courbe de h que nous venons de tracer, donne le tableau de signe de h(x) :

x	-4		-2		3		$+\infty$
h(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Pour répondre aux affirmations proposées, nous allons nous appuyer sur le tableau de variation de h et sur la courbe que nous avons tracée :

1. L'image de -1 par la fonction h ne peut pas être égale à 8.
En effet, sur l'intervalle $[-4;1]$ dont -1 fait partie, la fonction h croît de -3 à 5. Par conséquent, 8 n'a aucun antécédent dans cet intervalle.

2. Sur l'intervalle $[1;3]$, la fonction h décroît de 5 à 0. Par conséquent, l'image de 2 peut être égale à 4.
Précisons que c'est une possibilité, pas une obligation !

3. Sur l'intervalle $[7;+\infty[$ dont 10 fait partie, la fonction h croît à partir de $h(7) = -2$. Par conséquent, l'image de 10 par h est supérieure à -2.
Donc l'image de 10 par la fonction h ne peut pas être égale à -3

e) D'après son tableau de variation, la fonction h est décroissante sur l'intervalle $[2;4]$. Donc elle y change l'ordre. Ainsi, si $2 \leq a < b \leq 4$ alors $\underbrace{h(2) \geq h(a) > h(b) \geq h(4)}_{\text{L'ordre change...}}$.

f) Le tableau de variation de h et sa courbe vont nous permettre de répondre aux questions posées.

1. -4 a un seul antécédent par la fonction h. Il s'agit de 5.

2. -2 a trois antécédents par la fonction h : le premier se trouve dans l'intervalle $[-4;-3]$, le second dans $[4;5]$ et le troisième est 7.

3. $-0,5$ a deux antécédents par la fonction h : le premier se trouve dans l'intervalle $[-3;-2]$ et le second dans $[3;4]$. Comme la fonction h ne dépasse pas -1 sur l'intervalle $[5;+\infty[$, il n'y a pas d'autres antécédents pour $-0,5$.

4. Comme le maximum de la fonction h sur son ensemble de définition est 5, cette dernière ne grimpe pas jusqu'en 7. Ce dernier n'a donc aucun antécédent.

g) La courbe tracée à la question 1.b nous permet de résoudre (graphiquement) les inéquations proposées.

- L'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) \geq 0$ est l'intervalle $[-2;3]$.
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) < -1$ est $[-4;-3[\cup]4;+\infty[$.
  On exclut les bornes -3 et 4 car leurs images par h sont égales à -1. On inclut la borne -4 car $h(-4) = -3 < -1$.
- A l'exception de celle de 1 qui est égale à 5, toutes les images par h sont strictement inférieures à 5. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x) < 5$ est $\underbrace{[-4;+\infty[\setminus\{1\} = [-4;1[\cup]1;+\infty[}_{\text{Tous les réels de } D_h \text{ sauf 1.}}$.

***Note :** dans l'exercice que nous venons de corrigé, tout repose sur les deux premières questions c'est-à-dire sur le tableau de variation de h et sur sa courbe. Si le travail d'analyse est correctement effectué, le reste est une promenade de santé.*

Seconde partie : la fonction aux quatre visages

a) Au sortir de la troisième, il existe deux manières de factoriser une forme du second degré : le facteur commun ou l'une des trois identités remarquables. Avec l'écriture de j(x) qui nous est proposée, nous sommes assez clairement dans le second cas.

$$j(x) = \underbrace{(3.x+7)^2}_{a^2} - \underbrace{(2.x+3)^2}_{b^2} = \underbrace{\left[(3.x+7)+(2.x+3)\right]}_{(a+b)} \times \underbrace{\left[(3.x+7)-(2.x+3)\right]}_{(a-b)}$$

$$= \underbrace{[3.x+7+2.x+3]}_{\text{On réduit...}} \times \underbrace{[3.x+7-2.x-3]}_{\text{...chaque crochet.}} = \underbrace{(5.x+10).(x+4)}_{\text{Forme factorisée de j(x)}}$$

$$= \underbrace{5.x^2+20.x+10.x+40}_{\text{On la développe...}} = \underbrace{5.x^2+30.x+40}_{\text{Forme développée de j(x)}}$$

Conclusion : à l'issue de cette question, nous disposons de trois écritures de j(x) :

$$j(x) = \underbrace{(3.x+7)^2-(2.x+3)^2}_{\text{L'initiale}} = \underbrace{(5.x+10).(x+4)}_{\text{La factorisée}} = \underbrace{5.x^2+30.x+40}_{\text{La développée}}$$

***Note :** suivant les situations auxquelles nous allons être confrontée, l'une sera plus indiquée que les autres.*

b) Calculons les images demandées avec la forme développées de j. Dans les calculs que nous allons effectuer les parenthèses sont très importantes. Spécialement avec le carré !

$$j(-5) = 5\times(-5)^2+30\times(-5)+40 = 5\times 25-150+40 = 125-150+40 = 165-150 = 15$$

$$j\left(\frac{2}{3}\right) = 5\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+30\times\left(\frac{2}{3}\right)+40 = 5\times\frac{4}{9}+20+40 = \frac{20}{9}+60 = \frac{20}{9}+\frac{540}{9} = \frac{560}{9}$$

$$j(1-\sqrt{2}) = 5\times\underbrace{(1-\sqrt{2})^2}_{(a-b)^2}+30\times(1-\sqrt{2})+40 = 5\times\underbrace{(1-2.\sqrt{2}+2)}_{a^2-2.a.b+b^2}+30-30.\sqrt{2}+40$$

$$= 5-10.\sqrt{2}+10+30-30.\sqrt{2}+40 = -40.\sqrt{2}+85$$

Conclusion : les images de -5 ; $\frac{2}{3}$ et $1-\sqrt{2}$ par la fonction j sont respectivement égales à 15 ; $\frac{560}{9}$ et $-40.\sqrt{2}+85$

***Note :** les calculs ne sont pas plus compliquées avec la forme factorisée de j.*

c) Déterminer les antécédents de 40 par la fonction j, c'est rechercher tous les réels x dont l'image par j est égal à 40, c'est-à-dire tous les réels x tels que $j(x) = 40$. Pour ce faire, nous allons résoudre l'équation $j(x) = 40$.
La seule chance que nous ayons de résoudre cette équation du second degré c'est-à-dire où apparaissent des x^2, est de chercher à aboutir à un produit nul. Chose qui n'est possible que si l'un de ses facteurs l'est...
Un peu d'expérience nous conduit à dire que la forme développée de j(x) semble la plus indiquée pour parvenir à notre objectif.

$$j(x) = 40 \iff 5.x^2+30.x+40 = 40 \iff 5.x^2+30.x = 0$$

$$\iff 5.\underbrace{x}_{\text{Facteur...}}.x+30.\underbrace{x}_{\text{...commun}} = 0 \iff x.[5.x+30] = 0$$

Or un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est !

$$j(x) = 40 \iff \underbrace{x.(5.x+30) = 0}_{\text{Produit nul}} \iff \underbrace{x = 0}_{\text{Premier facteur nul}} \ \underline{\textit{ou}} \ \underbrace{5.x+30 = 0}_{\text{Second facteur nul}}$$

$$\iff x = 0 \ \underline{\textit{ou}} \ 5.x = -30$$

$$\iff x = 0 \ \underline{\textit{ou}} \ x = \frac{-30}{5} = -6$$

Conclusion : 40 a deux antécédents par la fonction j que sont -6 et 0.

➲ Pour déterminer les antécédents de 0 par j, résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $j(x) = 0$.
Pour solutionner cette équation du second degré, nous allons rechercher le produit nul. C'est pour cela que nous allons remplacer j(x) par son écriture factorisée.

$$j(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{(5.x+10).(x+4)=0}_{\text{Produit nul}} \Leftrightarrow \underbrace{5.x+10=0}_{\text{Premier facteur nul}} \ \underline{\textbf{\textit{ou}}}\ \underbrace{x+4=0}_{\text{Second facteur nul}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-10}{5}=-2 \ \underline{\textbf{\textit{ou}}}\ x=-4$$

Conclusion : 0 a deux antécédents par la fonction j que sont -4 et -2.

d) La forme canonique est une forme intermédiaire entre la développée et la factorisée. Son grand intérêt est qu'elle permet de passer assez rapidement de la première à la seconde. Chose peu évidente autrement.
Partons de l'écriture développée de j(x). Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$j(x)=\underbrace{5.x^2+30.x+40}_{\substack{\text{On commence par factoriser par 5}\\ \text{pour se retrouver seul avec } x^2}}$$

$$=5\times\left[\underbrace{x^2+6.x}_{\substack{\text{Début de l'identité}\\ \text{remarquable } (x+3)^2}}+8\right]=5\times\left[\underbrace{(x+3)^2-9}_{\substack{x^2+6.x\\ \text{On enlève 9 car}\\ (x+3)^2=x^2+6.x+9}}+8\right]=\underbrace{5\times\left[(x+3)^2-1\right]}_{\substack{\text{Une forme canonique}\\ \text{de } j(x)}}$$

e) Pour déterminer les antécédents de 75 par la fonction j, résolvons l'équation du second degré $j(x)=75$.
Pour solutionner cette dernière, nous remplaçons j(x) par sa forme canonique. Si elle a été introduite dans la question précédente, c'est sans doute pour qu'elle serve !

$$j(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{5\times\left[(x+3)^2-1\right]=75}_{\substack{\text{On divise les deux membres de}\\ \text{l'équation par 5}}}$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2-1=15$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+3)^2}_{a^2}-\underbrace{16}_{b^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[(x+3)+4\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(x+3)-4\right]}_{(a-b)}=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+7).(x-1)=0}_{\text{Produit nul}} \quad \Leftrightarrow \underbrace{x+7=0}_{\text{Premier facteur nul}} \ \underline{\textbf{\textit{ou}}}\ \underbrace{x-1=0}_{\text{Second facteur nul}}$$

$$\Leftrightarrow x=-7 \ \underline{\textbf{\textit{ou}}}\ x=1$$

Conclusion : 75 a deux antécédents par la fonction j que sont -7 et 1.

Devoir Surveillé No.3

Le contexte

Ce troisième devoir d'une heure eut lieu à la mi-novembre 2004. Il marqua la scission de la classe en deux. La sélection de l'automne s'opérait. Il abordait les thèmes suivants :

- Les fonctions affines.
- Le signe du binôme $a.x+b$, la résolution d'inéquations du second degré, produits ou quotients au travers d'un tableau de signe.

Pour la seconde fois, était utilisée la technique conduisant à la forme canonique.
L'entorse à la pensée officielle se poursuivait !

L'énoncé

Première partie : le monde merveilleux des fonctions affines

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=1-3.x$$

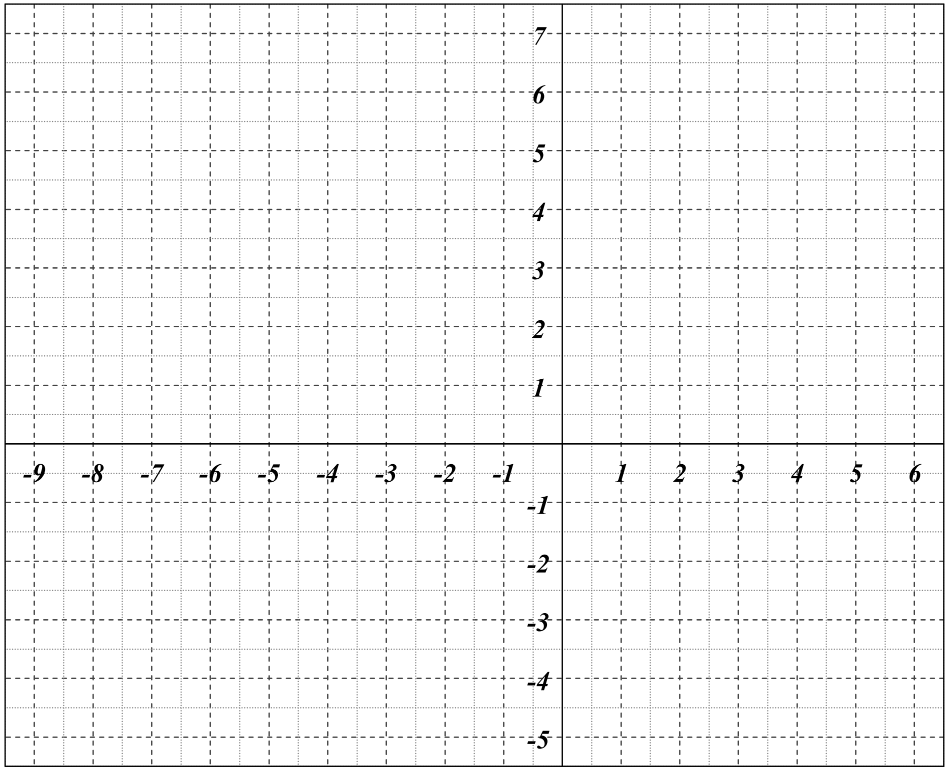
a) Déterminer les images par la fonction f de -2 et $\frac{3}{7}$.
Déterminer le ou les antécédents par la fonction f de -5.
Dresser le tableau de variation de cette fonction f. On justifiera celui-ci d'une phrase.
Tracer sur le graphique ci-contre la courbe (C) représentant la fonction f.

On sait que les images respectives de -4 et 2 par la fonction affine h sont -3 et 1.

b) Tracer sur le graphique ci-contre la courbe (C') représentant la fonction affine h.
Déterminer par un raisonnement l'expression de cette fonction affine h.
Note : *une grande attention sera portée à la rédaction du raisonnement.*

On sait de la fonction affine j que son ordonnée à l'origine est égale à -3. De plus, l'unique antécédent de -1 par cette fonction j est 6.

c) Déterminer par un raisonnement l'expression de cette fonction affine j.
Note : *une grande attention sera portée à la rédaction du raisonnement.*



Seconde partie : le champ des signes

a) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$16-(4.x-7)^2\geq 0$$

b) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{3.x-7}{x+5}\leq -4$$

c) En utilisant sa forme canonique, factoriser l'expression $C(x)=9.x^2+12.x-5$.
En utilisant ce qui précède, résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{9.x^2+12.x-5}{9-x}\leq 0$$

d) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{x}{x+4}+\frac{2}{x-3}\geq 1$$

Le corrigé

Première partie : le monde merveilleux des fonctions affines

Avant d'entamer les hostilités, rappelons qu'une fonction est dite affine si elle peut s'écrire sous la forme $f(x)=a.x+b$ où nous dirons que a est le coefficient directeur de f et b est son ordonnée à l'origine.
Par défaut, une fonction affine est définie sur ℝ.

a) Calculons les deux images demandées :

$$f(-2)=1-3\times(-2)=1+6=7 \qquad f\left(\frac{3}{7}\right)=1-3\times\frac{3}{7}=\frac{7}{7}-\frac{9}{7}=-\frac{2}{7}$$

Conclusion : les images de -2 et $\frac{3}{7}$ par la fonction f sont respectivement 7 et $-\frac{2}{7}$.

➲ Déterminer les antécédents de -5 par la fonction f, c'est chercher les réels x dont l'image par f est égale à -5. C'est résoudre dans ℝ l'équation $f(x)=-5$.

$$f(x)=-5 \iff 1-3.x=-5 \iff -3.x=-6 \iff x=\frac{-6}{-3}=2$$

Conclusion : l'antécédent de -5 par la fonction f est 2.

➲ Le coefficient directeur -3 de la fonction affine f étant négatif, celle-ci est décroissante sur $]-\infty;+\infty[$. C'est un résultat du cours.

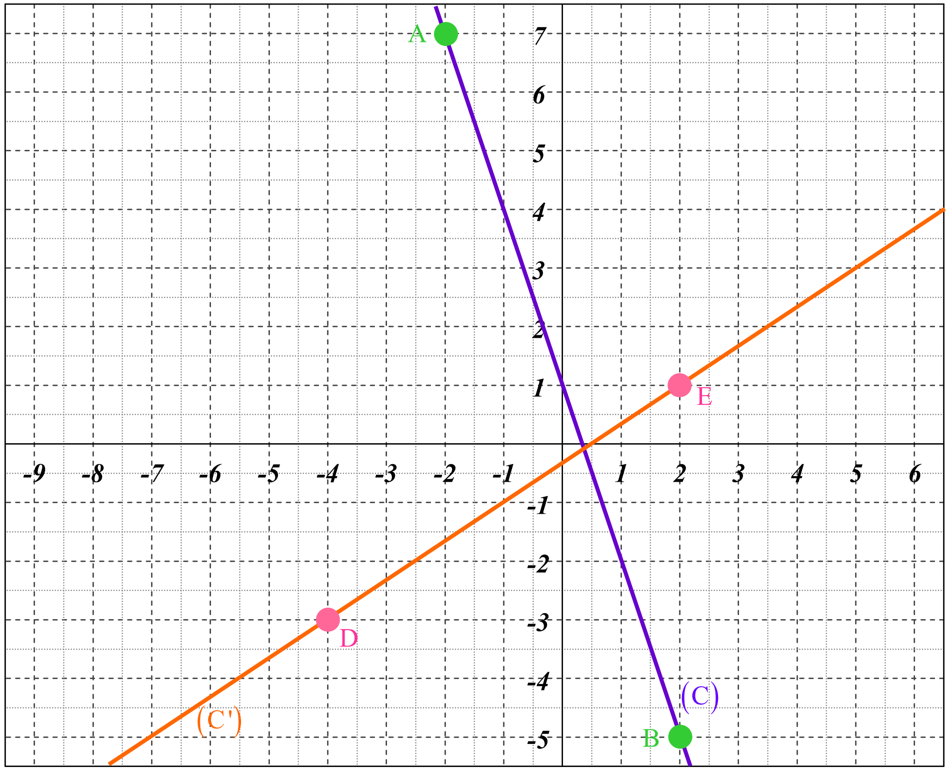
➲ La courbe (C) représentant la fonction affine f est une droite qui a pour équation réduite $y=-3.x+1$. On peut tracer celle-ci via son coefficient directeur -3 et son ordonnée à l'origine 1 ou, en déterminant deux de ses points. Nous optons pour cette seconde solution.

- L'image de -2 par f étant 7, la droite (C) passe par le point $A(-2;7)$.
- Pour déterminer un autre point, on calcule (par exemple) l'image de 2 par f.

$$f(2)=1-3\times 2=1-6=-5$$

Donc la droite (C) passe par le point $B(2;-5)$.

La courbe représentant f est donc la droite (AB).



b) Comme les images de -4 et 2 par la fonction affine h sont respectivement -3 et 1, la courbe (C') représentant h est la droite passant par les points $D(-4;-3)$ et $E(2;1)$.

➲ La fonction h étant affine, elle peut s'écrire sous la forme $h(x)=a.x+b$.
La connaissance des coefficients a et b entraîne celle de la fonction h. Déterminons-les !
D'après l'énoncé :

- $h(-4)=-3 \iff a\times(-4)+b=-3 \iff -4.a+b=-3$ ***(1)***
- $h(2)=1 \iff a\times 2+b=1 \iff 2.a+b=1$ ***(2)***

Les deux coefficients a et b sont solutions du système linéaire $\begin{cases}-4.a+b=-3 & \textit{(1)}\\ 2.a+b=1 & \textit{(2)}\end{cases}$.

Nous décidons de le résoudre par substitution.
A partir de l'équation ***(1)***, on exprime b en fonction a.

$$-4.a+b=-3 \iff b=-3+4.a$$

Puis, dans l'équation ***(2)***, on remplace b par ce qu'il vaut en a.

$$2.a+\underbrace{\left(-3+4.a\right)}_{b}=1 \quad\Leftrightarrow\quad 6.a=4 \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Et par conséquent :

$$b=-3+4\times\underbrace{\frac{2}{3}}_{a}=-\frac{9}{3}+\frac{8}{3}=-\frac{1}{3}$$

Conclusion : pour tout réel x, $h(x)=\frac{2}{3}.x-\frac{1}{3}$.

c) La fonction affine j peut s'écrire sous la forme $j(x)=a.x+b$.
D'après l'énoncé, l'ordonnée à l'origine b de j est égale à -3. Donc une écriture de j est :

$$j(x)=a.x-3.$$

De plus, nous savons que l'antécédent de -1 par j est égal 6.
Disons dans l'autre sens : l'image de 6 par j est égale à -1.

$$j(6)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad a\times 6-3=-1 \quad\Leftrightarrow\quad 6.a=2 \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Conclusion : pour tout réel x, $j(x)=\frac{1}{3}.x-3$.

Seconde partie : le champ des signes

Si l'on connaît les signes de tous ses facteurs alors l'on connaît de facto celui d'un produit ou d'un quotient. Tout ce petit monde obéit aux règles de signe suivantes :

a × b	**a ⊖**	**a = 0**	**a ⊕**
b ⊖	⊕	0	⊖
b = 0	0	0	0
b ⊕	⊖	0	⊕

Signe du produit $a\times b$

a / b	**a ⊖**	**a = 0**	**a ⊕**
b ⊖	⊕	0	⊖
b = 0	Quotient non défini		
b ⊕	⊖	0	⊕

Signe du quotient a/b

De plus, le tableau de signe d'un facteur affine de la forme $a.x+b$ est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$a.x+b$		Signe contraire de a	0	Signe de a	

Les quatre inéquations proposées se résolvent au moyen d'un tableau de signe. Pour chacune d'entre elles, nous allons manoeuvrer de façon à ramener le problème à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient totalement factorisé.

a) Pour résoudre dans ℝ l'inéquation $16-(4.x-7)^2\geq 0$, nous allons chercher à factoriser son premier membre de façon à pouvoir étudier le signe d'un produit.

$$\underbrace{16}_{a^2}-\underbrace{\left(4.x-7\right)^2}_{b^2}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{\left[4+\left(4.x-7\right)\right]}_{a+b}\times\underbrace{\left[4-\left(4.x-7\right)\right]}_{a-b}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\quad (4.x-3).(-4.x+11)\geq 0$$

Savoir quand $16-(4.x-7)^2\geq 0$, c'est savoir quand le produit $(4.x-3).(-4.x+11)$ est supérieur ou égal à 0, c'est-à-dire quand il est positif ou nul.
Celui-ci est constitué des deux facteurs affines $4.x+3$ et $-4.x+11$ qui s'annulent respectivement en $-\frac{3}{4}$ et $\frac{11}{4}$. Dressons le tableau de signe de leur produit.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$\frac{11}{4}$		$+\infty$
$4.x-3$		–	0	+		+	
$-4.x+11$		+		+	0	–	
$(4.x-3).(-4.x+11)$		–	0	+	0	–	

Positif ou nul

Le produit $(4.x-3).(-4.x+11)$ est positif ou nul lorsque x est compris entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{11}{4}$.

Conclusion : l'ensemble de solutions de $16-(4.x-7)^2\geq 0$ est l'intervalle $\left[\frac{3}{4};\frac{11}{4}\right]$.

b) Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{3.x-7}{x+5} \leq -4$, nous allons tout ramener dans le premier membre et additionner. Nous aboutirons alors à un quotient factorisé qui sera quelque chose par rapport à 0.

$$\frac{3.x-7}{x+5} \leq -4 \Leftrightarrow \frac{3.x-7}{x+5}+4 \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3.x-7}{x+5}+\frac{4.(x+5)}{(x+5)}}_{\text{On met tout au même dénominateur}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3.x-7)+(4.x+20)}{x+5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{7.x+13}{x+5} \leq 0$$

Ainsi, résoudre l'inéquation $\frac{3.x-7}{x+5} \leq -4$ revient-il à savoir quand le quotient $\frac{7.x+13}{x+5}$ est inférieur ou égal à 0, c'est-à-dire est négatif ou nul.

Cette dernière fraction est le quotient des facteurs affines $7.x+13$ et $x+5$ qui s'annulent respectivement en $-\frac{13}{7}$ et -5. Dressons son tableau de signe !

x	$-\infty$		-5		$-\frac{13}{7}$		$+\infty$
$7.x+13$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{7.x+13}{x+5}$		$+$	||	$-$	0	$+$	
				Négatif ou nul			

Le quotient $\frac{7.x+13}{x+5}$ est négatif entre -5 et $-\frac{13}{7}$. Mais il n'est pas défini en -5. Par contre, il est nul sur cette seule deuxième borne.

Conclusion : l'ensemble des solutions de $\frac{3.x-7}{x+5} \leq -4$ est l'intervalle $\left]-5;-\frac{13}{7}\right]$.

c) $9.x^2$ est le carré de $3.x$. Fort de cette remarque, lançons-nous dans la factorisation de $C(x)$. Première étape : sa forme canonique !

$$C(x)=9.x^2+12.x-5=\underbrace{(3.x)^2+2\times 3.x\times 2}_{\text{Début de l'identité }(3.x+2)^2}-5=\underbrace{(3.x+2)^2-4}_{9.x^2+12.x}-5=\underbrace{(3.x+2)^2-9}_{\text{Forme canonique}}$$

$$=\underbrace{(3.x+2)^2}_{a^2}-\underbrace{(3)^2}_{b^2}=\underbrace{\left[(3.x+2)+3\right]}_{(a+b)}\times\underbrace{\left[(3.x+2)-3\right]}_{(a-b)}=\underbrace{(3.x+5).(3.x-1)}_{\text{Forme factorisée}}$$

Par suite, l'inéquation proposée devient :

$$\underbrace{\frac{9.x^2+12.x-5}{9-x}}_{\text{Pas facile pour le signe !}} \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{(3.x+5).(3.x-1)}{9-x}}_{\text{Que des facteurs affines...}} \leq 0$$

Les trois facteurs affines $3.x+5$; $3.x-1$ et $-x+9$ s'annulent respectivement en $-\frac{5}{3}$; $\frac{1}{3}$ et 9. Par conséquent, le tableau de signe de leur quotient est :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		$\frac{1}{3}$		9		$+\infty$
$3.x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3.x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+9$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\frac{9.x^2+12.x-5}{9-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	
				Négatif...				...ou nul	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{9.x^2+12.x-5}{9-x} \leq 0$ est la réunion d'intervalles $\left[-\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right] \cup \left]9;+\infty\right[$.

d) Nous allons résoudre l'inéquation $\frac{x}{x+4}+\frac{2}{x-3}\geq 1$ comme nous avons résolu la seconde : dans un premier temps nous allons tout ramener dans le premier membre et nous additionnerons ce qui doit l'être. Nous aurons alors à nous prononcer sur le signe d'une fraction. Il faudra donc faire en sorte qu'elle soit le plus factorisée possible.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+4}+\frac{2}{x-3}\geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+4}+\frac{2}{x-3}-1\geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{x\times(x-3)}{(x-3)\times(x+4)}+\frac{2\times(x+4)}{(x-3)\times(x+4)}-\frac{1\times(x-3)\times(x+4)}{(x-3)\times(x+4)}}_{\text{Afin de tout additionner, on met tout au même dénominateur}}\geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\overbrace{x\times(x-3)+2\times(x+4)-1\times(x-3)\times(x+4)}^{\text{On développe le numérateur...}}}{\underbrace{(x-3)\times(x+4)}_{\text{...mais pas le dénominteur qui est déjà factorisé...}}}\geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-3.x+2.x+8-x^2-4.x+3.x+12}{(x-3).(x+4)}\geq 0\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-2.x+20}{(x-3).(x+4)}\geq 0
\end{aligned}$$

Les facteurs affines $-2.x+20$; $x-3$ et $x+4$ s'annulent en 10 ; 3 et -4. Dressons le tableau de signe de la fraction qu'ils constituent :

x	$-\infty$		-4		3		10		$+\infty$
$-2.x+20$		+		+		+	0	−	
$x-3$		−		−	0	+		+	
$x+4$		−	0	+		+		+	
$\frac{-2.x+20}{(x-3).(x+4)}$		+	‖	−	‖	+	0	−	
		Positif...				...ou nul			

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{x}{x+4}+\frac{2}{x-3}\geq 1$ est la réunion d'intervalles $]-\infty;-4[\cup]3;10]$.

Devoir Surveillé No.4

Le contexte

Ce quatrième devoir surveillé d'une durée d'une heure eut lieu début décembre 2004. Il portait sur :

- La résolution d'équations produits et quotients au moyen de tableaux de signes. C'était la répétition d'un exercice fait au devoir précédent.
- Les vecteurs : calcul vectoriel et utilisation pour démontrer un alignement via une colinéarité.

Ce devoir s'adressait principalement aux élèves visant une première scientifique. Le calcul vectoriel ne fait pas explicitement partie du programme officiel de seconde. Mais s'il n'est pas abordé en seconde, il devra l'être en 1ère S où te temps manque.
Ce quatrième devoir fut plutôt bien réussi. Il confirma la scission observée à l'automne.

L'énoncé

Première partie : les signes des temps

a) Résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$(4.x-1).(2.x+3)\leq(2.x+3).(7.x-5)$$

b) x étant un réel quelconque, quel est le signe de la somme x^2+1 ? On justifiera sa réponse.
En utilisant la question précédente, résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$x+\frac{10}{x+3}\geq 3$$

c) En utilisant sa forme canonique, factoriser $C(x)=9.x^2+6.x-8$.
En utilisant ce qui précède, résoudre dans ℝ l'inéquation :

$$\frac{20}{2-x}\geq\frac{4}{x}+9$$

Seconde partie : le monde merveilleux des vecteurs

ABC est un triangle tel que :

AB = 6cm AC = 5cm BC = 7cm

Les points I, J et K sont définis par les relations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB} \qquad 9.\overrightarrow{AJ}+3.\overrightarrow{CJ}=\vec{o} \qquad 6.\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CK}$$

a) En cherchant à exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$, démontrer que le point J se trouve au quart du segment [AC] à partir de l'extrémité A.

b) En cherchant à exprimer le vecteur $\overrightarrow{BK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$, démontrer que $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{5}.\overrightarrow{CB}$.

c) Faire une figure correspondant à la situation décrite ci-dessus.

d) Démontrer que $\overrightarrow{IK}=\frac{8}{15}.\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}.\overrightarrow{AC}$
Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

On appelle L le point d'intersection de la droite (AC) et de la parallèle à la droite (JI) passant par B.

e) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CL}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{CA}$.

Le corrigé

Première partie : les signes des temps

a) Pour résoudre l'inéquation du second degré $(4.x-1).(2.x+3)\leq(2.x+3).(7.x-5)$, nous allons chercher à nous prononcer sur le signe d'un produit dont on connaît les signes des facteurs. Pour cela, nous allons tout ramener dans le premier membre, puis rechercher une factorisation.

$$(4.x-1).\underbrace{(2.x+3)}_{\text{facteur...}}-\underbrace{(2.x+3)}_{\text{...commun}}.(7.x-5)\leq 0 \iff (2.x+3).\left[(4.x-1)-(7.x-5)\right]\leq 0$$

$$\iff (2.x+3).\left[4.x-1-7.x+5\right]\leq 0$$

$$\iff (2.x+3).(-3.x+4)\leq 0$$

Ainsi résoudre l'inéquation $(4.x-1).(2.x+3) \le (2.x+3).(7.x-5)$ revient-il à se demander quand le produit $(2.x+3).(-3.x+4)$ est-il négatif ou nul ?

Les premières choses à déterminer sont les valeurs de x pour lesquelles les facteurs affines $2.x+3$ et $-3.x+4$ s'annulent. Bref, nous cherchons leurs racines.

$2.x+3=0 \Leftrightarrow 2.x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ | $-3.x+4=0 \Leftrightarrow -3.x=-4 \Leftrightarrow x=\frac{-4}{-3}$

Connaissant les signes des facteurs affines $2.x+3$ et $-3.x+4$ ainsi que les endroits où ils d'annulent, nous pouvons dresser le tableau de signe de leur produit.

x	$-\infty$		$-1,5$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$2.x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3.x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2.x+3).(-3.x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit $(2.x+3).(-3.x+4)$ est négatif ou nul avant $-1,5$ et après $\frac{4}{3}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-\infty;-1,5\right] \cup \left[\frac{4}{3};+\infty\right[$.

b) x^2+1 est la somme du carré qui est toujours positif ou nul, et du nombre positif 1. Par conséquent, la somme x^2+1 est elle-même positive. En fait, nous avons $x^2+1 \ge 1$

➲ Pour résoudre l'inéquation quotient $x+\frac{10}{x+3} \ge 3$, nous allons chercher à pouvoir nous prononcer sur le signe d'un quotient. Pour y parvenir, nous allons tout ramener dans le premier membre et additionner les diverses fractions.

$$x+\frac{10}{x+3}-3 \ge 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x.(x+3)}{(x+3)}+\frac{10}{x+3}+\frac{(-3).(x+3)}{(x+3)}}_{\text{Pour additionner ces trois fractions, on les met au même dénominateur x+3}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3.x+10-3.x-9}{x+3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+3} \ge 0$$

Résoudre l'inéquation originelle, c'est savoir quand le quotient $\frac{x^2+1}{x+3}$ est positif ou nul.

Nous savons que le numérateur x^2+1 est toujours positif.
Le facteur affine $x+3$ s'annule en -3, est négatif avant et positif après.
Par suite, le tableau de signe du quotient est le suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
x^2+1		$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2+1}{x+3}$		$-$	‖	$+$	

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-3;+\infty\right[$.

c) $9.x^2+6.x$ est le début de l'égalité remarquable $(3.x+1)^2=\underbrace{(3.x)^2}_{9.x^2}+\underbrace{2\times 3.x\times 1}_{6.x}+\underbrace{1^2}_{1}$.

Nous appuyant sur cette identité, nous pouvons écrire :

$$C(x)=\underbrace{9.x^2+6.x}-8=\underbrace{(3.x+1)^2-1}-8=\underbrace{(3.x+1)^2-9}_{\text{Forme canonique ou presque}}$$

$$=\underbrace{(3.x+1)^2-3^2}_{\text{Différence de deux carrés } a^2-b^2}=\underbrace{\left[(3.x+1)-3\right]}_{(a-b)}.\underbrace{\left[(3.x+1)+3\right]}_{(a+b)}=\underbrace{(3.x-2).(3.x+4)}_{\text{Forme factorisée}}$$

➲ La stratégie pour résoudre cette inéquation est la même que celle utilisée à la question précédente 1.b : faire en sorte de pouvoir se prononcer sur le signe d'un quotient.

$$\frac{20}{2-x}+\frac{-4}{x}+(-9) \ge 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{20.x}{(2-x).x}+\frac{(-4).(2-x)}{x.(2-x)}+\frac{(-9).(2-x).x}{(2-x).x}}_{\text{Pour additionner, on met tout au même dénominateur : x.(2-x)}} \ge 0$$

$$\frac{20.x-8+4.x-18.x+9.x^2}{x.(2-x)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\overbrace{9.x^2+6.x-8}^{C(x)}}{x.(2-x)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\overbrace{(3.x-2).(3.x+4)}^{\text{Forme factorisée de C(x)}}}{x.(-x+2)} \ge 0$$

Tout le problème est de savoir quand cette dernière fraction est positive ou nulle.

Les facteurs affines $3.x-2$; $3.x+4$; x et $-x+2$ s'annulent en $\frac{2}{3}$; $-\frac{4}{3}$; 0 et 2.

A présent, nous pouvons dresser le tableau de signe de la fraction qu'ils forment.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$3.x-2$		–		–		–	0	+		+	
$3.x+4$		–	0	+		+		+		+	
x		–		–	0	+		+		+	
$-x+2$		+		+		+		+	0	–	
La fraction		–	0	+	‖	–	0	+	‖	–	

Conclusion : l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{4}{3};0\right[\cup\left[\frac{2}{3};2\right[$.

Seconde partie : le monde merveilleux des vecteurs

a) Pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$, nous allons partir de la seule chose que nous sachions sur ces trois points : la relation vectorielle $9.\overrightarrow{AJ}+3.\overrightarrow{CJ}=\vec{o}$.

$$9.\overrightarrow{AJ}+\underbrace{3.\overrightarrow{CA}+3.\overrightarrow{AJ}}_{3.\overrightarrow{CJ}}=\vec{o} \Leftrightarrow 12.\overrightarrow{AJ}=3.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{3}{12}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}.\overrightarrow{AC}$$

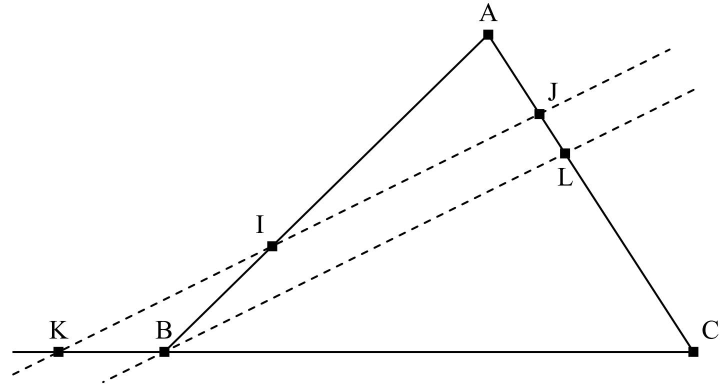
Conclusion : le Point J est situé au quart du segment [AC] à partir de l'extrémité A.

b) Pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{BK}$ en fonction $\overrightarrow{CB}$, nous allons partir de la relation vectorielle définissant le point K qu'est $6.\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CK}$.

$$6.\overrightarrow{BK}=\underbrace{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BK}}_{\overrightarrow{CK}} \Leftrightarrow 6.\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 5.\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BK}=\frac{1}{5}.\overrightarrow{CB}$$

Conclusion : le point K est situé en dehors du segment [CB], au-delà du point B à $\frac{7}{5}=1,4\text{cm}$ de ce dernier.

c) Les questions a et b permettent de placer les points J et K. La figure est la suivante :



d) Pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, nous allons passer par le point B. En effet, le point I est défini à partir A et B, et le point K à partir de C et B.

$$\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}+\underbrace{\frac{1}{5}.\overrightarrow{CB}}_{\text{De C à B....}}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}+\underbrace{\frac{1}{5}.\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}.\overrightarrow{AB}}_{\text{...en passant par A.}}$$

$$=\underbrace{\frac{3}{15}.\overrightarrow{AB}+\frac{5}{15}.\overrightarrow{AB}}_{\text{On compte les }\overrightarrow{AB}}-\frac{1}{5}.\overrightarrow{AC}=\frac{8}{15}.\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}.\overrightarrow{AC}$$

➲ Pour établir l'alignement, nous allons chercher à prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires. Pour pouvoir les comparer, exprimons $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{IJ}=\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}}_{\text{On passe par A car I et J sont définis avec ce point}}=-\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{AC}$$

On remarque que l'on passe de $\frac{-2}{3}$ à $\frac{8}{15}$, et de $\frac{1}{4}$ à $\frac{-1}{5}$ en multipliant par $\frac{-4}{5}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{IK}=\frac{8}{15}.\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}.\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{-4}{5}\times\frac{-2}{3}.\overrightarrow{AB}-\frac{-4}{5}\times\frac{1}{4}.\overrightarrow{AC}=\frac{-4}{5}.\left[-\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}.\overrightarrow{AC}\right]=-\frac{4}{5}.\overrightarrow{IJ}$$

Conclusion : les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ étant colinéaires, les points I, J et K sont alignés.

e) Dans le triangle CKJ où B et L sont deux points des côtés [CK] et [CJ], nous avons :

- La droite (BL) est parallèle au côté (JK).
- $\overrightarrow{CB} = \frac{5}{6}.\overrightarrow{CK}$

Le théorème de Thalès (version vectorielle) est applicable à cette situation. Il vient :

$$\underbrace{\overrightarrow{CL} = \frac{5}{6}.\overrightarrow{CJ}}_{\text{Le parallélisme conserve les rapports de colinéarité}} = \frac{5}{6} \times \underbrace{\frac{3}{4}.\overrightarrow{CA}}_{\overrightarrow{CJ}} = \frac{15}{24}.\overrightarrow{CA} = \frac{5}{8}.\overrightarrow{CA}$$

Conclusion : le point L se trouve aux cinq huitièmes du segment [CA] à partir de C.

Devoir Surveillé No.5

Le contexte

Ce cinquième devoir surveillé qui se déroula à la mi-janvier 2005 dura une heure. Il portait sur :

- Les isométries, les triangles isométriques et semblables.
- Les vecteurs : démontrer un alignement via une colinéarité avec le choix d'une base.

Ce devoir assez costaud fut un splendide désastre. Il illustre aussi le fait qu'on se contente depuis plusieurs années au collège de démonstrations-recettes où l'analyse, l'initiative et la manoeuvre n'ont aucune place.

L'énoncé

Première partie : isométries et compagnie

Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle inscrit dans le cercle de centre O passant par le point I.
La droite (IK) est la médiatrice des côtés [AD] et [BC] alors que (JL) est celle des côtés [AB] et [CD]. Les droites (IK) et (JL) sont sécantes en O.
De plus, on sait que l'angle $\widehat{IOA}$ mesure 40°.
A partir de la figure ci-contre, répondre aux questions suivantes :

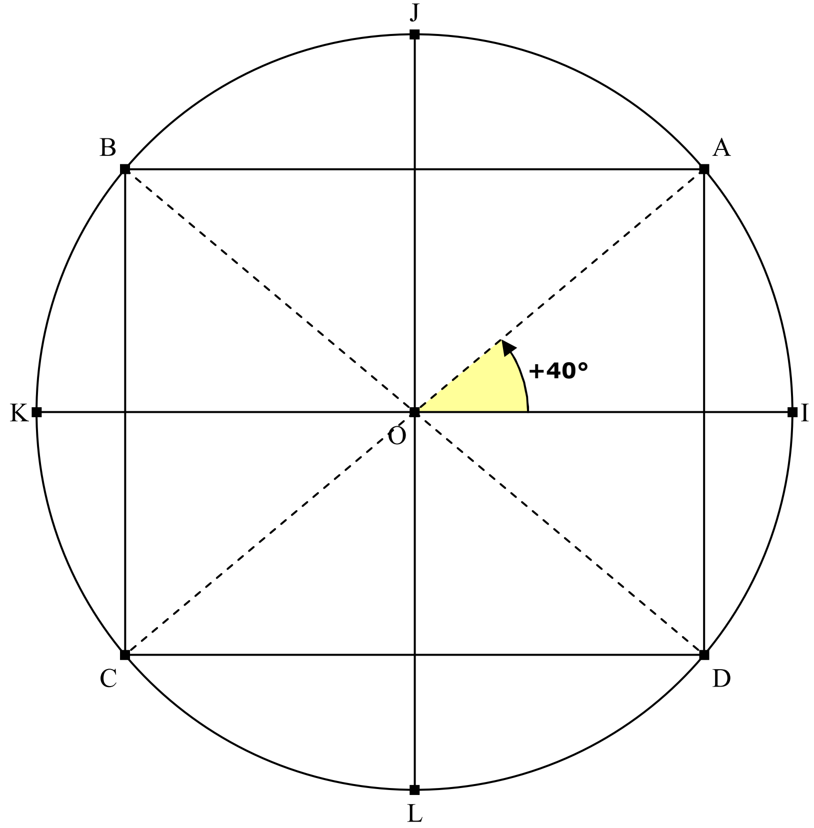
a) Déterminer l'image du point O par la symétrie axiale d'axe (JL).
Déterminer l'image du segment [AK] par la symétrie axiale d'axe (JL).

b) Quelle est l'image du point J par la rotation de centre O et d'angle 130°.
Quel est l'antécédent du point L par la rotation de centre O et d'angle 130° ?

c) Déterminer l'image de la droite (AK) par la rotation de centre O et d'angle $-40°$.

d) Par quelle rotation de centre O, le point A a-t-il pour image le point K ?
Quel est l'antécédent de I par cette rotation ?

e) On appelle Δ l'axe de la réflexion (ou symétrie axiale) par laquelle J a pour image A. Déterminer les images des points O et L par cette réflexion d'axe Δ. On justifiera ses réponses.



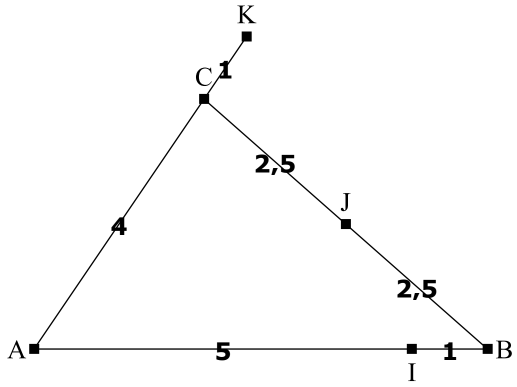
f) Pourquoi les distances IB et IC sont-elles égales ?
Par quelle rotation de centre I, le point C a-t-il pour image le point B ? On justifiera la valeur donnée pour l'angle de rotation.

g) Démontrer que les triangles CIA, BID et ICK sont isométriques.

h) Démontrer que les triangles OAJ et CDJ sont semblables.

Seconde partie : choisissez l'efficacité, optez pour les vecteurs !

Dans la situation ci-dessous, les points I, J et K appartiennent aux droites (AB), (BC) et (AC). Les distances indiquées sont celles existant entre deux points consécutifs.



Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

Le corrigé

Première partie : isométries et compagnie

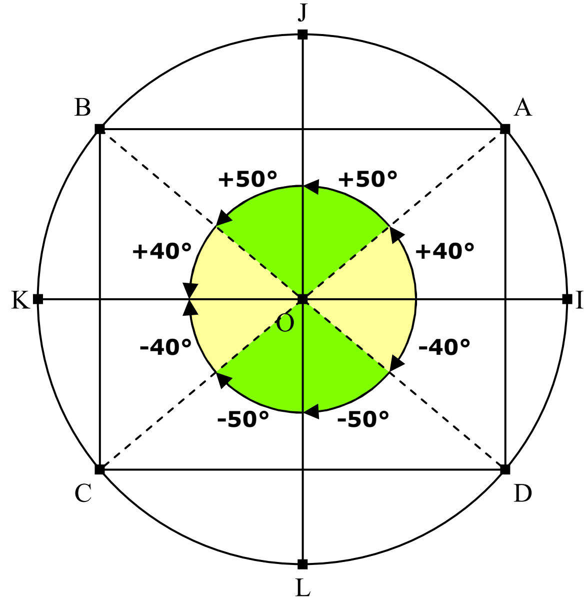
La figure fournie est incomplète. Avant d'entamer le problème, la première chose à faire est de la compléter en utilisant les autres renseignements donnés. Notamment pour ce qui concerne les angles au centre du cercle. Cela donne la chose ci-contre.

a) Le point O appartenant à l'axe de symétrie (JL), il est donc sa propre image par la symétrie d'axe (JL).

➲ Comme (JL) est la médiatrice des segments [AB] et [KI] alors les images des points A et I par la réflexion d'axe (JL) sont respectivement B et K. Par suite, l'image du segment [AK] par cette symétrie axiale est le segment [BI].

b) L'image du point J par la rotation de centre O et d'angle 130° est le point C. En effet, ce dernier appartient au cercle de centre O passant par J et de plus $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OC}\right)=+130°$.

➲ L'antécédent de I par cette rotation, c'est-à-dire le point dont I est l'image, est le point B. En effet, I appartient au cercle de centre O passant par B et $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI}\right)=+130°$.



c) Les images des points A et K par la rotation de centre O et d'angle $-40°$ sont respectivement I et B. En effet, ces quatre points appartiennent au même cercle de centre O et de plus, les angles orientés $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OB}\right)$ mesurent $-40°$.

Donc l'image de la droite (AK) par cette rotation est la droite (IB).

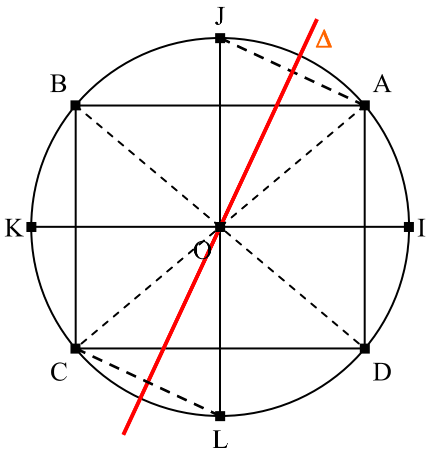
d) Remarquons d'abord que le point K appartient au cercle de centre O passant par A. Ensuite, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}\right)$ mesure 140°. Donc K est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $140°$.

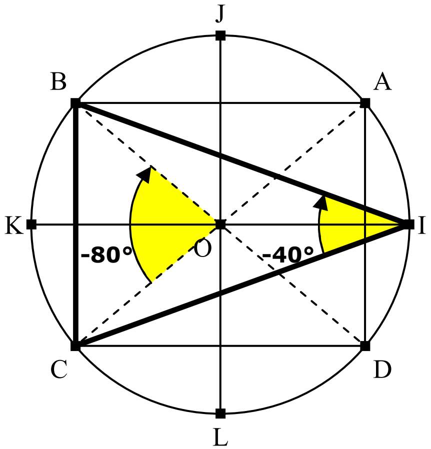
➲ Comme I appartient au cercle de centre O passant par C et que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OI}\right)$ mesure aussi 140° alors C est l'antécédent de I par cette même rotation.

e) Dire que A est le symétrique de J par rapport à l'axe Δ signifie que Δ est la médiatrice du segment [AJ].

➲ Comme O est le centre du cercle auquel appartiennent A et J, il est donc équidistant de ces deux points. Par conséquent, il appartient à leur médiatrice Δ.
Donc le point O est sa propre image par la réflexion d'axe Δ.

➲ De plus, comme la droite Δ est aussi la médiatrice du segment [LC] alors l'image du point L par cette réflexion d'axe Δ est le point C.





f) Comme le point I est sur la médiatrice du segment [BC], il est équidistant de ces deux points. Donc nous avons bien $IB = IC$.

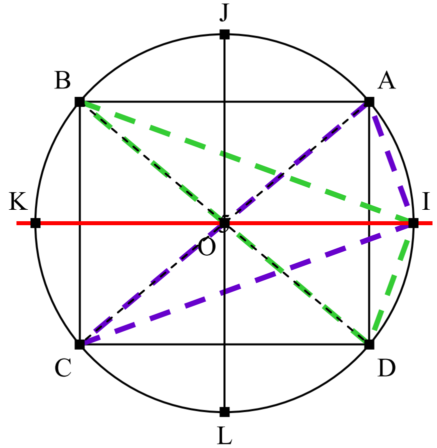
➲ L'angle inscrit $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IB}\right)$ intercepte le même arc de cercle $\overset{\frown}{CB}$ que l'angle au centre $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)$.

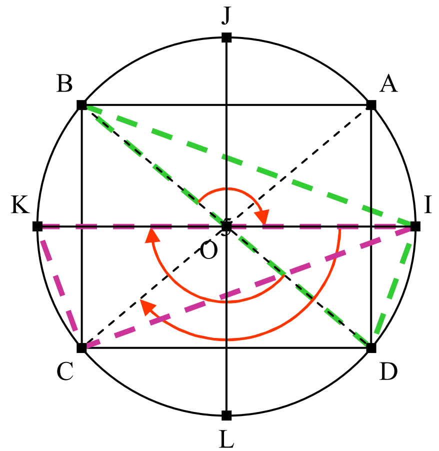
En application du théorème de l'angle inscrit/angle au centre, le premier mesure donc la moitié du second. Ainsi :

$$\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IB}\right)=\frac{1}{2}.\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\times(-80°)=-40°$$

Conclusion : le point B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $-40°$.

g) Comme la droite (IK) est la médiatrice des segments [AD] et [CB] alors les images des points C, I et A par la réflexion d'axe (IK) sont respectivement les points B ; I et D.
Or la symétrie axiale est une isométrie : elle conserve les longueurs et les distances.
Donc les triangles CIA et BID sont isométriques.



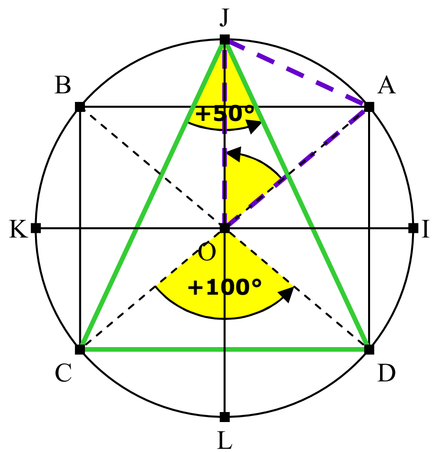


Les images des points B, I et D par la rotation de centre O et d'angle $-140°$ sont respectivement les points I, C et K.
Or la rotation est aussi une isométrie : elle conserve les longueurs et les distances.
Donc les triangles BID et ICK sont eux aussi isométriques.

Conclusion : les triangles CIA, BID et ICK sont isométriques

h) Comme les points A et J appartiennent au même cercle de centre O alors le triangle OAJ est isocèle en O.
De plus l'angle au sommet O mesure 50°.

Comme J appartient à la médiatrice du segment [CD] alors il est équidistant de C et D. Donc le triangle JCD est isocèle en J.



De plus, l'angle inscrit $\left(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JD}\right)$ intercepte le même arc de cercle $\overset{\frown}{CD}^{+}$ que l'angle au centre $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$. Donc l'angle $\left(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JD}\right)$ mesure la moitié de l'angle $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$ c'est-à-dire 50°.

Conclusion : comme les angles $\widehat{AOJ}$ et $\widehat{CJD}$ sont égaux et que <u>leurs côtés adjacents</u> sont proportionnels car $\dfrac{OJ}{JC}=\dfrac{OA}{JD}$ alors les triangles OAJ et JDC sont semblables.

Seconde partie : choisissez l'efficacité, optez pour les vecteurs !

Pour établir l'alignement des points I, J et K, nous allons essayer de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires. Pour y parvenir, nous allons les exprimer en fonction des vecteurs de base $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ afin de pouvoir les comparer.

Une base est un couple de deux vecteurs non colinéaires. On peut exprimer tous les autres vecteurs du plan à partir de ceux-ci.

Nous aurions pu choisir deux autres vecteurs de base comme $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$. Toutefois, ceux-ci semblaient les plus évidents.

Avant toute chose, exploitons les divers renseignements dont nous disposons. D'après la figure, nous pouvons dire :

- Le point I est tel que $\overrightarrow{AI}=\dfrac{5}{6}.\overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{6}.\overrightarrow{BA}$.
- Le point J est le milieu du segment [BC] donc $\overrightarrow{BJ}=\dfrac{1}{2}.\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{CJ}=\dfrac{1}{2}.\overrightarrow{CB}$.
- Le point K est tel que $\overrightarrow{AK}=\dfrac{5}{4}.\overrightarrow{AC}$ ou encore $\overrightarrow{CK}=-\dfrac{1}{4}.\overrightarrow{CA}$.

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de nos deux vecteurs de base $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BJ}$$

$$=\frac{1}{6}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{6}.\overrightarrow{AB}+\underbrace{\frac{1}{2}.\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}}_{1/2.\overrightarrow{BC}}=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right).\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Faisons de même avec l'autre vecteur $\overrightarrow{IK}$. Nous avons :

$$\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK}=-\frac{5}{6}.\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}.\overrightarrow{AC}$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{5}{6};\dfrac{5}{4}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Or on passe de $-\dfrac{1}{3}$ à $-\dfrac{5}{6}$ et de $\dfrac{1}{2}$ à $\dfrac{5}{4}$ en multipliant à chaque fois par $\dfrac{5}{2}$.

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{IK}=-\frac{5}{6}.\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}.\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}.\overrightarrow{AC}=\frac{5}{2}.\left[-\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}\right]=\frac{5}{2}.\overrightarrow{IJ}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

Conclusion : les points I, J et K sont alignés.

Devoir Surveillé No.6

Le contexte

Ce sixième devoir surveillé qui eut lieu début février 2005 dura une heure comme tous ceux qui l'avaient précédé. Il portait sur :

- Les fonctions de référence et l'utilisation de leurs variations pour établir celles d'autres fonctions.
  Savoir établir la variation d'une fonction par un enchaînement d'inégalités en s'appuyant sur les fonctions de référence.
  Savoir établir la variation d'une fonction en étudiant le signe de la différence de deux images.
- Les fonctions homographiques.

Ce devoir fut bien réussi par ceux qui espéraient une première ES ou S.
Même si elles ne sont explicitement au programme de seconde, les fonctions homographiques permettent de mettre en oeuvre les variations de la fonction inverse.
A la question 2.d, il était demandé de savoir décomposer une fonction homographique. Ce n'est pas un exigible du programme de seconde. La technique avait été vue et répétée en module.

L'énoncé

Première partie : la racine de la différence d'un carré

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-4;-1]$ par :

$$f(x)=\sqrt{18-2.(x+1)^2}$$

a) Déterminer les images de -4 et -1 par la fonction f. On écrira l'image de -1 sous la forme $a.\sqrt{2}$ où a est un entier relatif.

b) Etablir par un enchaînement d'inégalités le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-4;-1[$.

Note : *on indiquera ce que a été fait à chaque étape et le cas échéant, on justifiera celles-ci.*

Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction f.

Seconde partie : fonctions homographiques, le jour du jugement

La fonction h est définie par :

$$h(x)=\frac{-4.x+11}{2.x-3}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h que nous noterons D_h.

Note : *une grande attention sera portée à la justification de celui-ci.*

b) Dresser le tableau de signe de la fonction h.

c) Démontrer que pour tous réels x et y appartenant à D_h on a :

$$h(x)-h(y)=\frac{10.(y-x)}{(2.x-3).(2.y-3)}$$

En utilisant l'égalité précédente, établir le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;1,5[$.

d) Décomposer la fonction homographique h, c'est-à-dire déterminer deux entiers relatifs a et b tels que pour tout réel $x\in D_h$:

$$h(x)=a+\frac{b}{2.x-3}$$

Par un enchaînement d'inégalités, établir le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]1,5;+\infty[$.

Note : *on indiquera ce que a été fait à chaque étape et le cas échéant, on justifiera celles-ci.*

e) Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction h.

Le corrigé

Première partie : la racine de la différence d'un carré

a) Avant de calculer les images demandées, rappelons que les priorités opératoires s'établissent comme suit : d'abord doit être calculé ce qui est entre parenthèses, puis les puissances, ensuite les produits et les quotients, et enfin les sommes et les différences.

➲ $f(-4)=\sqrt{18-2.(-4+1)^2}=\sqrt{18-2\times(-3)^2}=\sqrt{18-2\times 9}=\sqrt{18-18}=\sqrt{0}=0$

➲ $f(-1)=\sqrt{18-2.(-1+1)^2}=\sqrt{18-2\times(0)^2}=\sqrt{18-2\times 0}=\sqrt{18}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3.\sqrt{2}$

Conclusion : les images de -4 et -1 par la fonction f sont respectivement 0 et $3.\sqrt{2}$.

b) Pour déterminer le sens de variation de f sur $]-4;-1[$, nous allons remonter f(x) en utilisant l'écriture donnée par l'énoncé où la variable x n'apparaît qu'une seule fois.
Soient x et y deux réels quelconques de l'intervalle $]-4;-1[$ tels que $x < y$.
Comment leurs images $f(x)$ et $f(y)$ sont-elles rangées ? La situation est la suivante :

	-4	$<$	x	$<$	y	$<$	-1
			$\downarrow$	**+1**	$\downarrow$		
Ces nombres sont négatifs ou nuls. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$.	-3	$<$	$x+1$	$<$	$y+1$	$<$	0
			$\downarrow$	**Carré**	$\downarrow$		
	9	$>$	$(x+1)^2$	$>$	$(y+1)^2$	$>$	0
			$\downarrow$	**×(-2)**	$\downarrow$		
	-18	$<$	$-2.(x+1)^2$	$<$	$-2.(y+1)^2$	$<$	0
			$\downarrow$	**+18**	$\downarrow$		
Ces nombres sont positifs ou nuls. La fonction racine est croissante sur $[0;+\infty[$	0	$<$	$18-2.(x+1)^2$	$<$	$18-2.(y+1)^2$	$<$	18
			$\downarrow$	**Racine**	$\downarrow$		
	0	$<$	$f(x)$	$<$	$f(y)$	$<$	$3.\sqrt{2}$

Conclusion : sur l'intervalle $]-4;-1[$, si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$.
La fonction f conservant l'ordre sur l'intervalle $]-4;-1[$, elle y est donc croissante.

Un autre regard : f est aussi la composée ou le montage des fonctions suivantes :

$$x \xrightarrow[\substack{\text{affine}\\ \text{croissant}\\ \text{sur}\\ ]-\infty;+\infty[}]{u(t)=t+1} x+1 \xrightarrow[\substack{\text{décroissant}\\ \text{sur}\\ ]-\infty;0]}]{\text{carré}} (x+1)^2 \xrightarrow[\substack{\text{affine}\\ \text{décroissant}\\ \text{sur}\\ ]-\infty;+\infty[}]{v(t)=-2.t+18} 18-2.(x+1)^2 \xrightarrow[\substack{\text{croissant}\\ \text{sur}\\ [0;+\infty[}]{\text{racine}} f(x)$$

Dans le montage ci-dessus, l'ordre change a deux reprises. Au final, f conserve l'ordre.

En conclusion, le tableau de variation de la fonction f est :

x	-4		-1
f	0	$\nearrow$	$3.\sqrt{2}$

Seconde partie : fonctions homographiques, le jour du jugement

a) Fondamentalement, la fonction homographique h est un quotient qui ne peut exister que lorsque et seulement lorsque son dénominateur est non nul. Ainsi :

$$\text{Le quotient } h(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \text{Son dénominateur } 2.x-3 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow 2.x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2} = 1,5$$

Conclusion : tous les réels x à l'exception de $1,5$ ont une image par la fonction h.

Donc l'ensemble de définition de cette dernière est $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\} = \left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

b) h(x) est le quotient des facteurs affines $-4.x+11$ et $2.x-3$ qui s'annulent respectivement en $\frac{11}{4}$ et $\frac{3}{2}$. Son tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{11}{4}$		$+\infty$
$-4.x+11$		$+$		$+$	0	$-$	
$2.x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

c) Pour établir l'égalité demandée, nous allons effectuer la différence des deux fractions $h(x)-h(y)$. Pour ce faire, nous allons devoir préalablement les mettre au même dénominateur qui est ici $(2.x-3).(2.y-3)$.

Pour tous réels x et y appartenant à D_h nous pouvons écrire :

$$h(x)-h(y)=\frac{-4.x+11}{2.x-3}-\frac{-4.y+11}{2.y-3}=\overbrace{\frac{(-4.x+11).(2.y-3)}{(2.x-3).(2.y-3)}-\frac{(-4.y+11).(2.x-3)}{(2.y-3).(2.x-3)}}^{\text{On met les deux fractions au même dénominateur}}$$

$$=\frac{\overbrace{[-8.x.y+12.x+22.y-33]-[-8.y.x+12.y+22.x-33]}^{\text{Une fraction moins l'autre...}}}{(2.x-3).(2.y-3)}$$

$$=\frac{\overbrace{-8.x.y+12.x+22.y-33+8.y.x-12.y-22.x+33}^{\text{On réduit la somme qu'est le numérateur}}}{(2.x-3).(2.y-3)}$$

$$=\frac{-10.x+10.y}{(2.x-3).(2.y-3)}=\frac{10.y-10.x}{(2.x-3).(2.y-3)}=\frac{10.(y-x)}{(2.x-3).(2.y-3)}$$

➲ Pour établir le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-\infty;1,5[$, nous considérons deux réels quelconques de cet intervalle x et y tels que $x<y$.
La question est de savoir comment sont rangées leurs images h(x) et h(y) ?
Pour le savoir, intéressons-nous au signe de leur différence. Pour ce faire, examinons d'abord les signes de chacun des facteurs intervenant dans sa dernière expression :

- Comme $x<y$ alors $0<y-x$ donc le facteur $y-x$ est positif.
- Comme x et y appartiennent à l'intervalle $]-\infty;1,5[$ alors d'après le tableau de signe de h(x) fait à la question 2.b (où apparaît le facteur $2.x-3$), nous pouvons affirmer que les facteurs $2.x-3$ et $2.y-3$ sont négatifs.
  Autre voie : comme $x<1,5$ alors $2.x<3$ donc $2.x-3<0$. Idem pour y.

Donc la différence $h(x)-h(y)=\dfrac{\overbrace{10}^{\text{Positif}}.\overbrace{(y-x)}^{\text{Positif}}}{\underbrace{(2.x-3)}_{\text{Négatif}}.\underbrace{(2.y-3)}_{\text{Négatif}}}$ est positive.

C'est-à-dire que $h(x)-h(y)>0$ donc $h(x)>h(y)$.

Conclusion : sur l'intervalle $]-\infty;1,5[$, si $x<y$ alors $h(x)>h(y)$.
La fonction h change l'ordre sur cet intervalle. Donc h est décroissante sur $]-\infty;3/2[$.

d) Pour établir le sens de variation h sur l'intervalle $]1,5;+\infty[$ par un enchaînement d'inégalités, il nous faut une écriture de h(x) où la variable x n'apparaît qu'une seule fois.

Pour tout réel $x\in D_h$, nous pouvons écrire :

$$h(x)=\frac{\overbrace{\overbrace{-4.x}^{}}^{\text{Combien de fois le dénominateur } 2.x-3\text{ ?}}+11}{2.x-3}=\frac{\overbrace{-2.(2.x-3)-6}^{-4.x}+11}{2.x-3}$$

$$=\frac{-2.(2.x-3)+5}{2.x-3}=\overbrace{\frac{-2.(2.x-3)}{2.x-3}}^{\text{On simplifie par } 2.x-3}+\frac{5}{2.x-3}=\overbrace{-2+\frac{5}{2.x-3}}^{\text{Forme décomposée}}$$

➲ Soient x et y deux réels quelconques de l'intervalle $]1,5;+\infty[$ tels que $x<y$.
Regardons comment leurs images h(x) et h(y) sont rangées.

Comme $1,5<x<y$ alors $\underbrace{3<2.x<2.y}_{\text{On multiplie par 2.}}$ alors $\underbrace{0<2.x-3<2.y-3}_{\text{On retranche 3. } 2.x-3 \text{ et } 2.y-3 \text{ sont positifs}}$

alors $\underbrace{\dfrac{1}{2.x-3}>\dfrac{1}{2.y-3}}_{\text{La fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[.}$

alors $\underbrace{\dfrac{5}{2.x-3}>\dfrac{5}{2.y-3}}_{\text{On multiplie par 5.}}$ alors $\underbrace{\dfrac{5}{2.x-3}-2>\dfrac{5}{2.y-3}-2}_{\text{On ajoute }-2.}$

Conclusion : sur l'intervalle $]1,5;+\infty[$, si $x<y$ alors $h(x)>h(y)$.
Comme h change l'ordre sur cet intervalle alors h est décroissante sur $]1,5;+\infty[$.

Un autre regard : h est aussi la composée ou le montage des fonctions suivantes :

$$\underset{]1,5;+\infty[}{\overset{x}{\in}}\xrightarrow[\text{Fonction affine croissante sur } \mathbb{R}]{u(t)=2.t-3}\underset{]0;+\infty[}{\overset{2.x-3}{\in}}\xrightarrow[\text{Fonction décroissante sur }]0;+\infty[.]{\text{inverse}}\underset{]0;9[}{\overset{\frac{1}{2.x-3}}{\in}}\xrightarrow[\text{Fonction affine croissante sur } \mathbb{R}]{v(t)=5.t-2}\underbrace{\frac{5}{2.x-3}-2}_{h(x)}$$

L'ordre ne change qu'une seule fois. Finalement h change l'ordre et est décroissante.

e) En conclusion, le tableau de variation de la fonction h est le suivant :

x	$-\infty$		3/2		$+\infty$
h	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2

Devoir Surveillé No.7

Le contexte

Le septième devoir surveillé dura deux heures et eut lieu à la mi-mars 2005. Il s'agissait d'un grand problème de géométrie analytique s'articulant en quatre parties relativement indépendantes les unes des autres . Il visait à démontrer sur un cas particulier que le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit d'un triangle sont alignés sur la droite d'Euler. Le devoir requérait les compétences suivantes :

- Savoir placer des points dans un repère à partir de leurs coordonnées.
- Savoir établir une équation cartésienne de droite. Savoir manipuler cette dernière et obtenir un vecteur directeur.
- Savoir démontrer un parallélisme ou une orthogonalité. Pour ceux-ci, deux tests avaient été introduits : le déterminant de deux vecteurs et leur produit scalaire défini par sa seule expression en repère orthonormé.

Le présent devoir fut bien réussi par les élèves à profil scientifique (un gros tiers de la classe). La motivation des autres était déjà bien basse...

L'énoncé du problème

Sur la figure ci-contre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Les deux vecteurs de base ont pour norme un centimètre. On fera attention à leurs orientations.
Dans ce repère, on considère les points :

$A\left(4;-2\right)$ $B\left(1;4\right)$ $C\left(-2;-3\right)$ $E\left(4;0\right)$

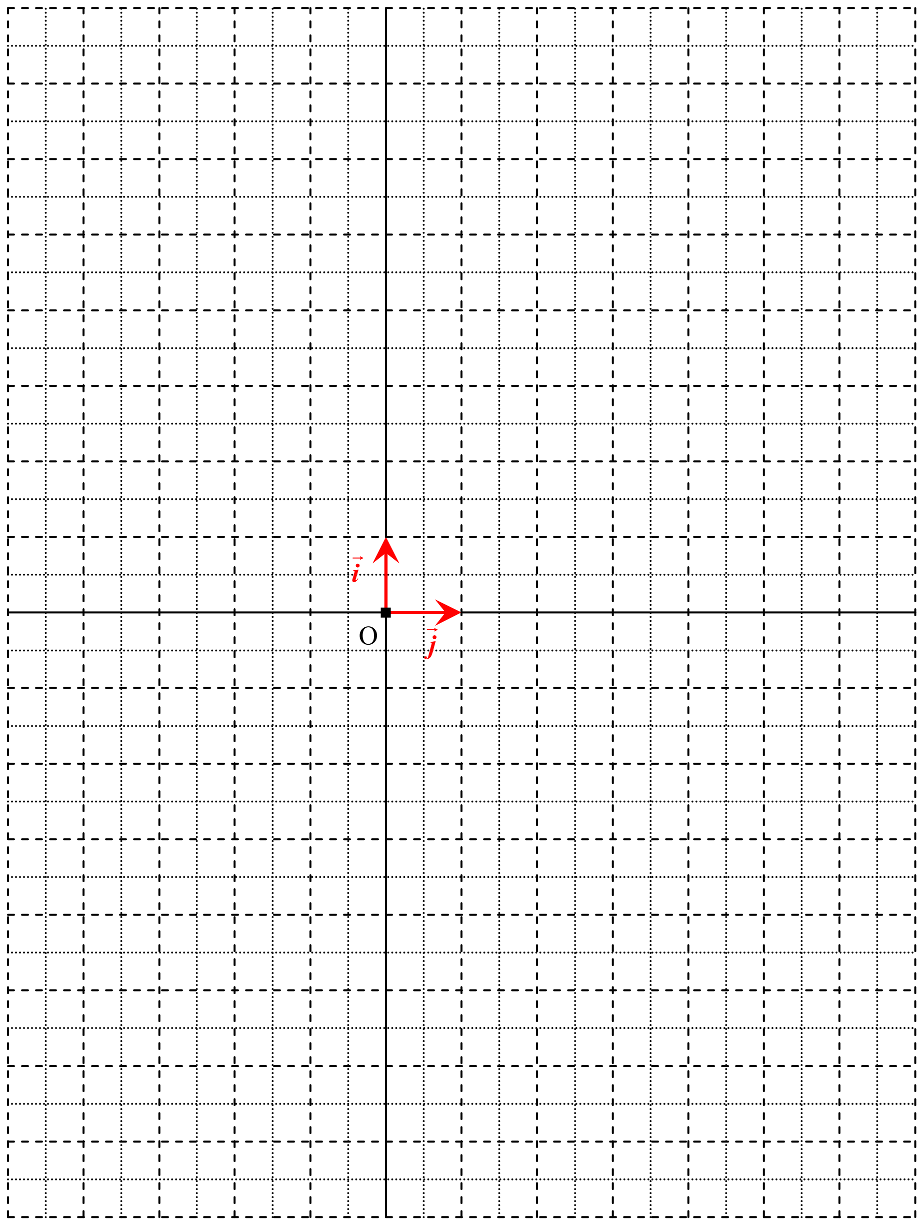
On appelle I le milieu du segment [AC] et J celui du segment [BC].
On appelle $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne est $6.x+y-10=0$.

Première partie : le secret du point H

a) Placer sur la figure les quatre points A, B, C et E. On tracera également le triangle ABC.
Par la suite, on rajoutera sur la figure les divers points et droites rencontrés.

b) Déterminer par le calcul les coordonnées des points I et J.
Placer ces deux points sur la figure.

c) Le point B appartient-il à la droite $\mathcal{D}$? On justifiera sa réponse.
Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur la figure. On indiquera comment celle-ci a été construite.



d) Déterminer par le calcul une équation cartésienne de la droite (CE).

e) Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
Démontrer que les droites $\mathcal{D}$ et (CE) ne sont pas parallèles.
Déterminer par le calcul les coordonnées $(x_H ; y_H)$ du point d'intersection H des droites $\mathcal{D}$ et (CE).

f) Les droites (CE) et (AB) sont-elles perpendiculaires ? On justifiera sa réponse.
Les droites (AC) et $\mathcal{D}$ sont-elles perpendiculaires ? On justifiera sa réponse.
Que peut-on en déduire quant aux droites $\mathcal{D}$ et (CE), et à leur point d'intersection H ?

Seconde partie : la ruée vers le point G

Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$2.\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$$

a) Déterminer les coordonnées $(x_G ; y_G)$ du point G.
Placer ce point G sur la figure.

b) Les points B, I et G sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.
Les points A, J et G sont-ils alignés ? On justifiera sa réponse.
Que peut-on en conclure quant aux droites (BI) et (AJ), et à leur point d'intersection G ?

Troisième partie : sur les traces du point K

a) Déterminer par le calcul une équation de $\mathcal{D}'$ qui est la parallèle à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point I.

b) Déterminer par le calcul une équation de la droite Δ qui est la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point J.

c) On admet que les droites $\mathcal{D}'$ et Δ ne sont pas parallèles.
Déterminer par le calcul les coordonnées $(x_K ; y_K)$ de leur point d'intersection K.

d) Que représentent les droites Δ et $\mathcal{D}'$ pour le triangle ABC ?
Que peut-on en conclure pour le point K ?

Dernière partie : la dernière carte

a) Démontrer que les points H, G et K sont alignés.

b) Que vient-on de prouver au travers de ce problème ?

Le corrigé du problème

Première partie : le secret du point H

a) Les points $A(4;-2)$, $B(1;4)$, $C(-2;-3)$ et $E(4;0)$ sont définis par leurs coordonnées dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Ils vérifient donc les relations vectorielles :

$$\overrightarrow{OA} = 4.\vec{i} - 2.\vec{j} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4.\vec{j} \quad \overrightarrow{OC} = -2.\vec{i} - 3.\vec{j} \quad \overrightarrow{OE} = 4.\vec{i}$$

Ces dernières permettent de placer aisément ces quatre points.

b) Deux voies permettent de calculer les coordonnées des deux milieux : la formule adéquate ou la traduction sous forme de coordonnées d'une relation vectorielle.

➲ Déterminons avec la formule les coordonnées du point I qui est le milieu de [AC].
Schématiquement, nous devons calculer les moyennes dans chaque coordonnée.

$$I\left(\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1 ; \frac{y_A + x_C}{2} = \frac{(-2)+(-3)}{2} = -\frac{5}{2} = -2,5\right)$$

➲ Déterminons par la voie analytique les coordonnées du point J qui le milieu de [BC].
On appelle $(x_J ; y_J)$ les coordonnées du point J. Celui-ci vérifie la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{BC}.$$

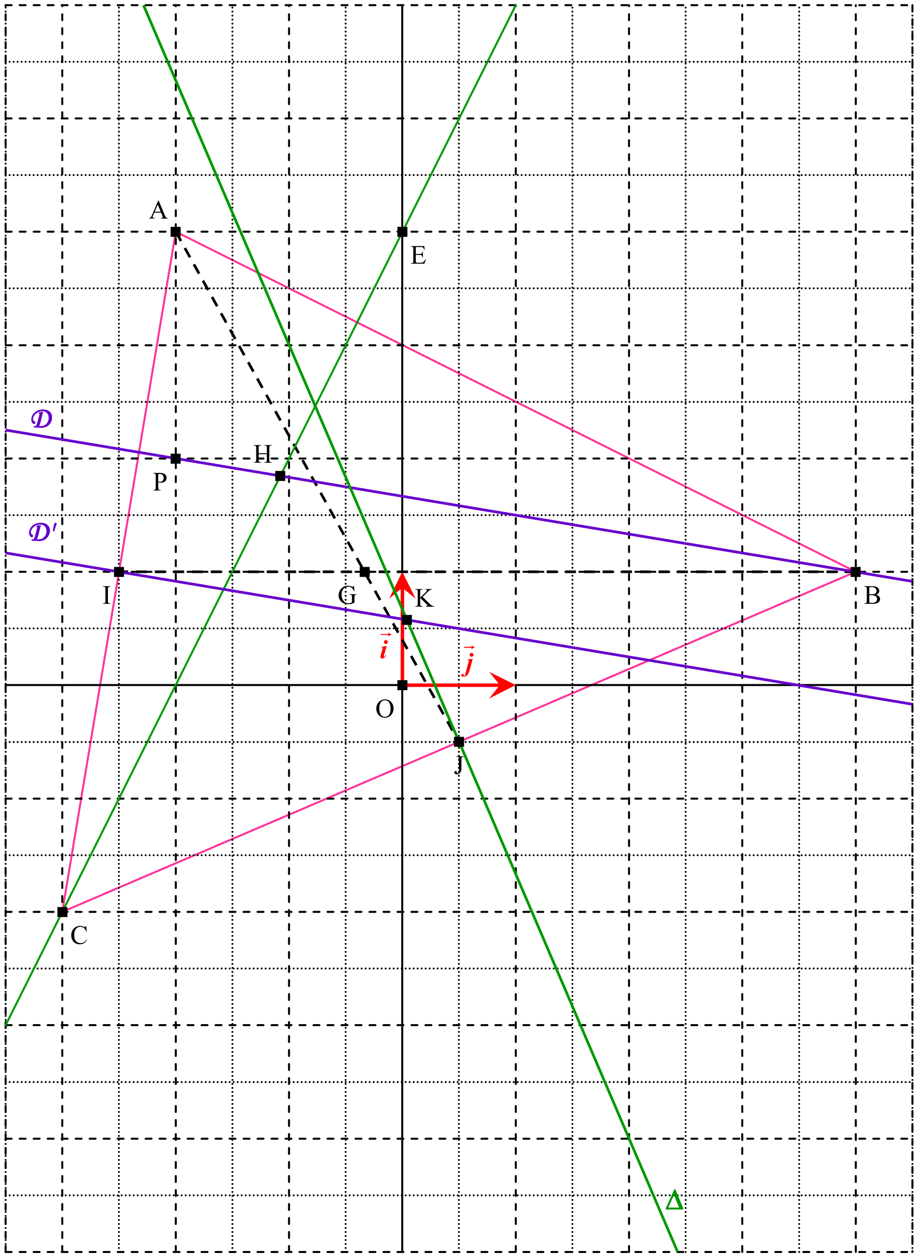
Traduisons cette relation vectorielle sous forme de coordonnées.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_J - 1 \\ y_J - 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{BJ}} = \frac{1}{2}.\underbrace{\begin{pmatrix} -2-1 \\ -3-4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{BC}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_J - 1 \\ y_J - 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_J - 1 \\ y_J - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

Or deux vecteurs égaux ont des coordonnées égales. Donc ils ont :

$$\underbrace{x_J - 1 = -1,5 \Leftrightarrow x_J = -1,5+1 = -0,5}_{\text{Mêmes abscisses}} \quad \text{et} \quad \underbrace{y_J - 4 = -3,5 \Leftrightarrow x_J = -3,5+4 = 0,5}_{\text{Mêmes ordonnées}}$$

Conclusion : les coordonnées du point J sont $(-0,5;0,5)$.



c) Pour savoir si le point B est élément à la droite $\mathcal{D}$, utilisons le test d'appartenance à celle-ci que constitue son équation cartésienne $6.x + y - 10 = 0$.

$$6.x_B + y_B - 10 = 6\times 1 + 4 - 10 = 6 + 4 - 10 = 0$$

Comme les coordonnées du point B vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ alors le point appartient à la droite.

➲ Nous devons trouver un deuxième point de $\mathcal{D}$ si nous voulons tracer la droite. Après quelques tâtonnements, on remarque que $P(2;-2)$ appartient à celle-ci. En effet ses coordonnées en vérifient l'équation : $6.x_P + y_P - 10 = 6\times 2 + (-2) - 10 = 12 - 2 - 10 = 0$

La droite $\mathcal{D}$ est également la droite (PB).

d) Déterminer une équation cartésienne de la droite (CE), c'est trouver à quelle condition sur ses coordonnées un point M appartient à cette droite.

L'appartenance d'un point M à la droite (CE) se traduit par le fait que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires. Exploitons ce filon !

$$\begin{aligned}
M(x;y)\in(CE) &\Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y+3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CE}\begin{pmatrix} 4-(-2)=6 \\ 0-(-3)=3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CE}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 6 \\ y+3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{(x+2).3-(y+3).6}_{\text{Différence des produits de chaque diagonale}} = 0 \Leftrightarrow 3.x+6-6.y-18=0 \\
&\Leftrightarrow 3.x-6.y-12=0 \Leftrightarrow \underbrace{x-2.y-4=0}_{\text{On divise les deux membres de l'équation par 3.}}
\end{aligned}$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite (CE) est $x - 2.y - 4 = 0$.

***Note :** pour vérifier que l'équation trouvée est juste, on peut tester l'appartenance des points C et E : leurs coordonnées vérifient-elles l'équation ? Normalement oui !*

e) Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\underbrace{6}_{a}.x + \underbrace{1}_{b}.y + \underbrace{(-10)}_{c} = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b=-1 \\ a=6 \end{pmatrix}$.

Certains remarqueront que $\vec{u}$ est aussi le vecteur $\overrightarrow{BP}\begin{pmatrix} 1-2=-1 \\ 4-(-2)=6 \end{pmatrix}$.

➲ Pour prouver que les droites $\mathcal{D}$ et (CE) ne sont pas parallèles, nous allons établir que deux de leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Nous venons de voir qu'un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ était $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de la droite (CE) est $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.

Pour tester la colinéarité de ces deux vecteurs, calculons leur déterminant.

$$\det\left(\vec{u},\overrightarrow{CE}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 6\\6 & 3\end{vmatrix}=(-1)\times 3-6\times 6=-3-36=-39\neq 0$$

Leur déterminant étant non nul, les deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas colinéaires. Donc leurs droites respectives $\mathcal{D}$ et (CE) ne sont pas parallèles.

➲ Les droites $\mathcal{D}$ et (CE) n'étant pas parallèles, elles sont sécantes en un point H. Comme ce point d'intersection H appartient à ces deux droites $\mathcal{D}$ et (CE) alors ses coordonnées $(x_H;y_H)$ en vérifient les deux équations. Ainsi nous avons :

$$\begin{cases}6.x_H+y_H-10=0 & \textit{(1)} \quad \leftarrow H\in\mathcal{D}\\ x_H-2.y_H-4=0 & \textit{(2)} \quad \leftarrow H\in(CE)\end{cases}$$

Pour obtenir les coordonnées du point H, nous devons résoudre ce système 2×2. Pour cela, nous optons pour un double coup de combinaisons linéaires.

Pour trouver x_H, nous supprimons y_H.

$$\oplus\begin{array}{lcr}\textit{(1)} & \xrightarrow{\times 2} & 12.x_H+2.y_H-20=0\\ \textit{(2)} & \longrightarrow & x_H+2.y_H-4=0\\ \hline & & 13.x_H-24=0\\ & & x_H=\dfrac{24}{13}\end{array}$$

Pour déterminer y_H, éliminons x_H.

$$\oplus\begin{array}{lcr}\textit{(1)} & \longrightarrow & 6.x_H+y_H-10=0\\ \textit{(2)} & \xrightarrow{\times(-6)} & -6.x_H+12.y_H+24=0\\ \hline & & 13.y_H+14=0\\ & & y_H=-\dfrac{14}{13}\end{array}$$

Conclusion : les coordonnées du point H sont $\left(\dfrac{24}{13};-\dfrac{14}{13}\right)$.

f) Pour savoir si les droites (CE) et (AB) sont perpendiculaires, nous allons regarder si deux de leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux en calculant leur produit scalaire.

Un vecteur directeur de la droite (CE) est $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et un de (AB) est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-4=-3\\4-(-2)=6\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{AB}}_{\text{Test d'orthogonalité}}=x_{\overrightarrow{CE}}.x_{\overrightarrow{AB}}+y_{\overrightarrow{CE}}.y_{\overrightarrow{AB}}=6\times(-3)+3\times 6=-18+18=0$$

Comme leur produit scalaire est nul alors les vecteurs directeurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. Donc leurs droites respectives (CE) et (AB) sont perpendiculaires.
Conséquence : la droite (CE) passe par le sommet C et qu'elle est perpendiculaire au côté opposé (AB). C'est donc une hauteur du triangle ABC.

➲ Etudier la perpendicularité des droites (AC) et $\mathcal{D}$, c'est chercher si leurs vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-4=-6\\-3-(-2)=-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$ sont orthogonaux. On calcule :

$$\underbrace{\overrightarrow{AC}.\vec{u}}_{\text{Test d'orthogonalité}}=x_{\overrightarrow{AC}}.x_{\vec{u}}+y_{\overrightarrow{AC}}.y_{\vec{u}}=(-6)\times(-1)+(-1)\times 6=6-6=0$$

Leur produit scalaire étant nul, les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}$ sont donc orthogonaux. Par conséquent, les droites (AC) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires.
Conséquence : la droite $\mathcal{D}$ passe par le sommet B et est perpendiculaire au côté opposé (AC). C'est également une hauteur du triangle ABC.

➲ Le point d'intersection H des hauteurs (CE) et $\mathcal{D}$ est l'orthocentre du triangle ABC.

Seconde partie : la ruée vers le point G

a) Le point G est défini par la relation vectorielle :

$$2.\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}$$

Remplaçons chacun de ses vecteurs par ses coordonnées.

$$2.\underbrace{\begin{pmatrix}x_G-4\\y_G+2\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AG}}+\underbrace{\begin{pmatrix}x_G+2\\y_G+3\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{CG}}=\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AB}}\Leftrightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}2.x_G-8\\2.y_G+4\end{pmatrix}}_{\text{On distribue 2}}+\begin{pmatrix}x_G+2\\y_G+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}3.x_G-6\\3.y_G+7\end{pmatrix}}_{\text{On additionne}}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\underbrace{3.x_G-6=-3}_{\text{Egalité des abscisses}}\Leftrightarrow 3.x_G=3\Leftrightarrow x_G=1\\ \underbrace{3.y_G+7=6}_{\text{Egalité des ordonnées}}\Leftrightarrow 3.y_G=-1\Leftrightarrow y_G=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Conclusion : les coordonnées du point G dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ sont $(1;-1/3)$.

D'après ses coordonnées, le point G vérifie la relation vectorielle $\overrightarrow{OG}=\vec{i}-\frac{1}{3}.\vec{j}$. Cette dernière permet de le placer.

Une autre voie : le chemin vectoriel
Déterminer les coordonnées du point G dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, c'est rechercher une relation vectorielle de la forme $\overrightarrow{OG}=\ldots\vec{i}+\ldots\vec{j}$. Partons de la relation définissant G.

$$2.\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \underbrace{2.\overrightarrow{AO}+2.\overrightarrow{OG}}_{\text{On décompose...}}+\underbrace{\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OG}}_{\text{...avec...}}=\underbrace{\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}}_{\text{...Chasles}}$$

$$\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{OG}=\underbrace{4.\vec{i}-2.\vec{j}}_{\text{car } A(4;-2)}+\underbrace{\vec{i}+4.\vec{j}}_{\text{car } B(1;4)}+\underbrace{(-2).\vec{i}-3.\vec{j}}_{\text{car } C(-2;-3)}$$

$$\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{OG}=3.\vec{i}-\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{3.\vec{i}-\vec{j}}{3} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\vec{i}-\frac{1}{3}.\vec{j}$$

b) Pour savoir si les points B, I et G sont alignés, intéressons-nous à la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}1-1=0\\-2,5-4=-6,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}1-1=0\\-\frac{1}{3}-4=-\frac{13}{3}\end{pmatrix}$. Calculons leur déterminant.

$$\det\left(\overrightarrow{BI};\overrightarrow{BG}\right)=\begin{vmatrix}0 & 0\\-6,5 & -\frac{13}{3}\end{vmatrix}=0\times\left(-\frac{13}{3}\right)-(-6,5)\times 0=0-0$$

Leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires. Donc les points B, I et G sont alignés.
Conséquence : le point G appartient à la droite (BI) qui est la médiane du triangle ABC issue de B.

➲ Pour déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}-0,5-4=-4,5\\0,5-(-2)=2,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1-4=-3\\-\frac{1}{3}-(-2)=\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ sont colinéaires, calculons leur déterminant :

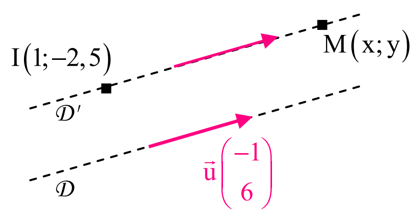
$$\det\left(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AG}\right)=\begin{vmatrix}-4,5 & -3\\2,5 & \frac{5}{3}\end{vmatrix}=(-4,5)\times\frac{5}{3}-2,5\times(-3)=-7,5+7,5=0$$

Leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires. Par conséquent, les points A, J et G sont alignés.
Conséquence : le point G appartient aussi à la droite (AJ) qui est la médiane issue du sommet A.

➲ **Conclusion :** G est le point d'intersection de deux des médianes du triangle ABC : il est le centre de gravité de ce triangle.

Troisième partie : sur les traces du point K

a) Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur de directeur de $\mathcal{D}$ alors il l'est aussi pour sa parallèle $\mathcal{D}'$.
La situation est celle ci-contre :



Déterminons une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$. Nous allons chercher à quelles conditions sur ses coordonnées un point M appartient à cette droite.

$$M(x;y)\in\mathcal{D}' \Leftrightarrow \text{Les vecteurs } \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2,5\end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

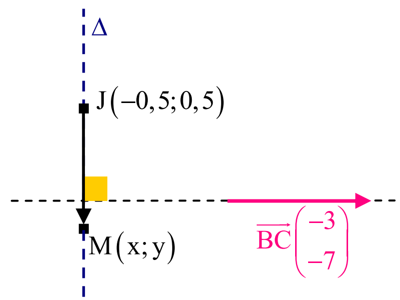
$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{IM},\vec{u}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-1 & -1\\y+2,5 & 6\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1).6-(-1).(y+2,5)=0 \Leftrightarrow 6.x-6+y+2,5=0$$

$$\Leftrightarrow 6.x+y-3,5=0$$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ est $6.x+y-3,5=0$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2-1=-3\\-3-4=-7\end{pmatrix}$ a une direction perpendiculaire à celle de la droite Δ. C'est donc l'un de ses vecteurs normaux.
Si un point M appartient à la droite Δ alors les vecteurs $\overrightarrow{JM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
Nous allons nous appuyer sur cette caractérisation pour déterminer une équation cartésienne de la droite Δ.



$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x+0,5 \\ y-0,5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{BC}=0}_{\text{Le test d'orthogonalité qu'est produit scalaire est nul}} \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{JM}}.x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{JM}}.y_{\overrightarrow{BC}} = 0$

$\Leftrightarrow (x+0,5).(-3)+(y-0,5).(-7)=0 \Leftrightarrow -3.x-1,5-7.y+3,5=0$

$\Leftrightarrow -3.x-7.y+2=0 \Leftrightarrow \underbrace{3.x+7.y-2=0}_{\text{On multiplie les deux membres par } -1.}$

Conclusion : une équation cartésienne de la droite Δ est $3.x+7.y-2=0$.

c) Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est $\vec{u}(-1;6)$. Comme une équation cartésienne de la droite Δ est $3.x+7.y-2=0$ alors l'un de ses vecteurs directeurs est $\vec{v}(-7;3)$.
Regardons si ces deux vecteurs sont colinéaires en calculant leur déterminant.

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\times 3 - 6\times(-7) = -3+42 = 39 \neq 0$$

Leur déterminant étant non nul, les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Par suite, les droites $\mathcal{D}'$ et Δ auxquels ils se rapportent ne sont pas parallèles. Celles-ci sont sécantes en un point que l'on appelle K.
Le point K appartenant aux deux droites $\mathcal{D}'$ et Δ, ses coordonnées $(x_K;y_K)$ vérifient leurs deux équations. Elles sont les solutions du système linéaire 2×2 :

$$\begin{cases} 6.x_K + y_K - 3,5 = 0 & \textit{(1)} \quad \leftarrow K \in \mathcal{D}' \\ 3.x_K + 7.y_K - 2 = 0 & \textit{(2)} \quad \leftarrow K \in \Delta \end{cases}$$

Résolvons ce système par substitution.
A partir de l'équation ***(1)***, on exprime y_K en fonction de x_K

$$6.x_K + y_K - 3,5 = 0 \Leftrightarrow y_K = 3,5 - 6.x_K$$

Puis on remplace y_K par ce qu'il vaut en x_K dans l'équation ***(2)***.

$$3.x_K + 7.\underbrace{(3,5-6.x_K)}_{y_K} - 2 = 0 \Leftrightarrow -39.x_K + 22,5 = 0 \Leftrightarrow x_K = \frac{-22,5}{-39} = \frac{45}{78} = \frac{15}{26}$$

Par suite, il vient : $y_K = 3,5 - 6.x_K = 3,5 - 6\times\frac{15}{26} = \frac{91}{26} - \frac{90}{26} = \frac{1}{26}$

Conclusion : les coordonnées du point K sont $\left(\frac{15}{26};\frac{1}{26}\right)$.

d) Les droites $\mathcal{D}'$ et Δ sont les médiatrices respectives des côtés [AC] et [BC] du triangle ABC. Leur point d'intersection K est donc le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Dernière partie : la dernière carte

Les vecteurs $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} \frac{24}{13}-1=\frac{11}{13} \\ -\frac{14}{13}+\frac{1}{3}=\frac{-42+13}{39}=-\frac{29}{13} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} \frac{15}{26}-\frac{24}{13}=-\frac{33}{26} \\ \frac{1}{26}+\frac{14}{13}=\frac{29}{26} \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Pour répondre à cette question, calculons leur déterminant.

$$\det(\overrightarrow{GH},\overrightarrow{HK}) = \begin{vmatrix} 11/13 & -33/26 \\ -29/39 & 29/26 \end{vmatrix} = \frac{11}{13}\times\frac{29}{26} - \frac{-29}{39}\times\frac{-33}{26}$$

$$= \frac{319}{338} - \frac{957}{1014} = \frac{319}{338} - \frac{\cancel{3}\times 319}{\cancel{3}\times 338} = \frac{319}{338} - \frac{319}{338} = 0$$

Leur déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont colinéaires.

Conclusion : le centre de gravité G, l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit K du triangle ABC sont alignés. Il en va ainsi pour tous les triangles. Les trois points G, H et K définissent une droite appelée <u>droite d'Euler</u>.

Devoir Surveillé No.8

Le contexte

Ce devoir d'une heure qui eut lieu à la fin mars 2005 fut le plus réussi de l'année. Il faut dire qu'il portait sur des sujets assez simples conceptuellement et techniquement :

- Les systèmes linéaires deux équations à deux inconnues et ceux de trois équations à trois inconnues. Mise en équation.
- Les statistiques : lecture et réalisation d'un histogramme. Calculs de moyennes et de médiane.

L'énoncé

Première partie : un message par delà les nuages

Il y a bien longtemps alors que l'Océan Atlantique constituait encore la frontière vers le couchant de l'Occident, s'était développé sur les hauteurs andines l'empire Inca. Pour communiquer avec les diverses cités qui lui avaient fait allégeance, le Grand Inca utilisait des messagers qui par des sentiers escarpés portaient à pied la parole de leur empereur.
L'un de ceux-ci s'appelait Quêtchope. Comme chacun de ses collègues, il marchait et courait à allure constante.
On sait ainsi que lorsqu'il marchait trois heures **et** qu'il courait deux heures, il parcourait 46 kilomètres.
On sait aussi que lorsqu'il marchait quatre heures **et** qu'il courait trois heures, il parcourait 66 kilomètres.
A quelle vitesse Quêtchope marchait-il ? A quelle vitesse courait-il ?

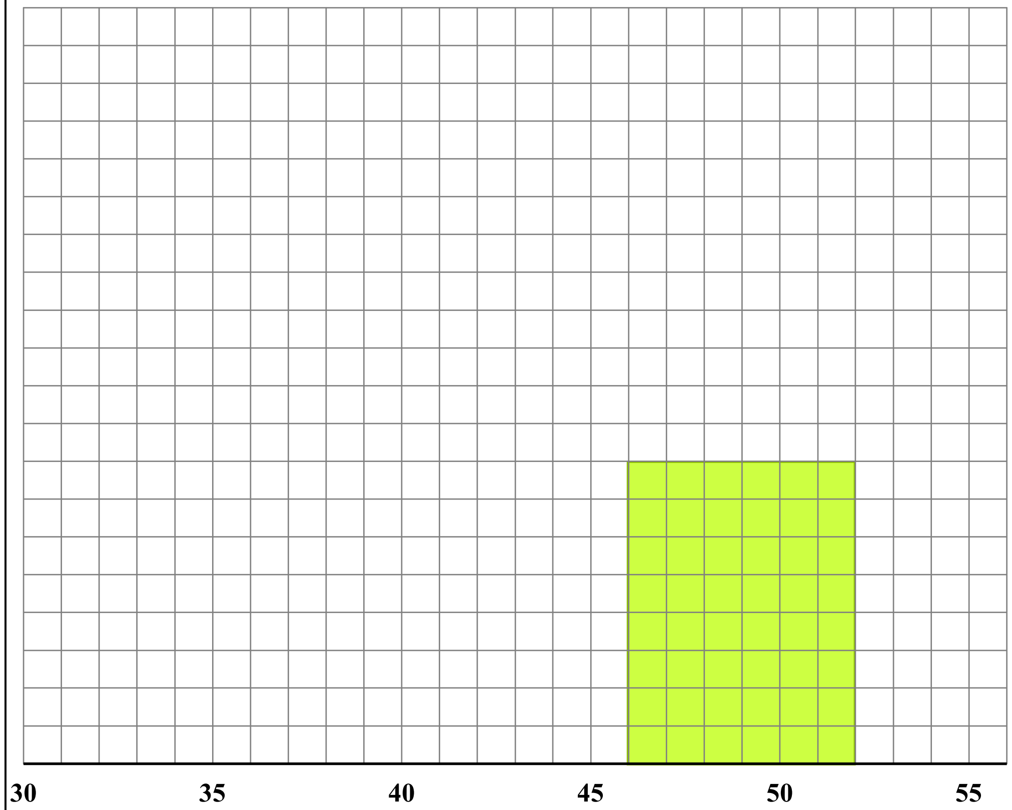
Note : *une grande attention sera portée à la rédaction de la solution et à la clarté des calculs. Les vitesses recherchées sont des entiers naturels. On les exprimera en kilomètres par heure.*

Seconde partie : statistique de mille pattes ou presque

Dimanche dernier, s'est couru l'épreuve des dix kilomètres des foulées du lycée Pasteur. L'épreuve qui était chronométrée a donné les résultats suivants :

Temps réalisé	Entre 32 et 39 minutes	Entre 39 et 42 minutes	Entre 42 et 46 minutes	Entre 46 et 52 minutes	Entre 52 et 56 minutes
Classe	$[32;39[$	$[39;42[$	$[42;46[$	$[46;52[$	$[52;56[$
Effectif	42	108	120		72

Sur l'histogramme ci-dessou gradué, un centimètre carré couvre quatre carreaux et représente 12 coureurs.



a) Quelle est la nature du caractère étudié ?

b) Quel est l'effectif de la classe $[46;52[$? On expliquera sa réponse.
Combien de coureurs ont participé aux foulées du lycée Pasteur ?

c) Sur le graphique ci-dessus, construire l'histogramme correspondant à la série statistique donnée par le tableau. Pour échelle, on prendra un centimètre carré pour 12 coureurs.

d) Quelle est la médiane de la série statistique ci-contre ?

e) Calculer le temps moyen mis par l'ensemble des coureurs. On donnera celui-ci à la seconde près.

f) On sait que 140 féminines ont participé à la course. Leur temps moyen a été de 48 minutes.
Calculer le temps moyen mis par les hommes. On donnera celui-ci à la seconde près.

Dernière partie : un air d'antan

A la fin des années 40, la compagnie aérienne Le Blanc Airlines exploitait trois types d'avions de transport hérités des surplus de la seconde guerre mondiale : des Douglas DC-3 Dakota, des Junkers Ju-52 et des Antonov An-2. On sait de ceux-ci :

- Un Douglas DC-3 Dakota emportait 21 passagers. Son équipage était de quatre hommes. En moyenne, chaque avion volait quatre heures par jour.
- Un Junkers Ju-52 emportait 12 passagers. Son équipage était de trois hommes. En moyenne, chaque avion volait deux heures par jour.
- Un Antonov An-2 emportait 9 passagers. Son équipage était de deux hommes. En moyenne, chaque avion volait une heure par jour.

Pour des raisons de sécurité, tous les appareils et les membres d'équipage employés par la compagnie n'effectuaient qu'un seul vol chaque jour.
Le 31 mars 1947 fut un jour faste pour la compagnie car tous ses avions volèrent et ils étaient pleins. Ce jour là, 41 membres d'équipage volèrent et 186 passagers furent transportés. Le total des heures de vol effectuées par tous les avions de la compagnie fut de 32 heures.
Combien d'avions de chaque type la compagnie possédait-elle ce 31 mars 1947 ?

***Note :** une grande attention sera portée à la rédaction de la solution et à la clarté des calculs.*

Le corrigé

Première partie : un message par delà les nuages

On appelle :

- x la vitesse exprimée en kilomètres par heure à laquelle marche Quêtchope.
- y la vitesse exprimée en kilomètres par heure à laquelle court le messager du Grand Inca.

La vitesse moyenne est le quotient de la distance parcourue par le temps écoulé. Donc :

$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} \Leftrightarrow \text{distance} = \text{temps} \times \text{vitesse}$$

A l'aune de cette formule, exploitons les renseignements fournis par l'énoncé.

- ➥ En trois heures de marche, Quêtchope parcourait $3.x$ kilomètres. En deux heures, il courait $2.y$ kilomètres. Au total, il parcourait alors 46 kilomètres. Cela nous conduit à l'équation : $\underbrace{3.x}_{\text{Marche}} + \underbrace{2.y}_{\text{Course}} = 46$
- ➥ Quatre heures de marche correspondent à $4.x$ kilomètres. Si Quêtchope court pendant trois heures, il effectue $3.y$ kilomètres. Au total, il parcourait alors 66 kilomètres. Cela nus amène à l'équation : $\underbrace{4.x}_{\text{Marche}} + \underbrace{3.y}_{\text{Course}} = 66$.

Ainsi, les réels x et y sont-ils les solutions du système linéaires de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 3.x + 2.y = 46 & \textbf{\textit{(1)}} \\ 4.x + 3.y = 66 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

La première inconnue que nous allons déterminer est x. Pour ce faire, nous allons chercher à éliminer y en combinant les deux équations du système.

$$\begin{array}{lcr} \ominus \; \textbf{(1)} & \xrightarrow{\times 3} & 9.x + 6.y = 138 \\ \quad\;\; \textbf{(2)} & \xrightarrow{\times 2} & 8.x + 6.y = 132 \\ \hline & & x = 6 \end{array}$$

Pour obtenir y, on remplace x par sa valeur 6 dans l'équation ***(1)***.

$$3 \times \underbrace{6}_{x} + 2.y = 46 \Leftrightarrow 18 + 2.y = 46 \Leftrightarrow 2.y = 46 - 18 \Leftrightarrow 2.y = 28 \Leftrightarrow y = 14$$

La solution du système est le couple $(6;14)$. Mais ce n'est pas la question qui était posée...

Conclusion : L'inca Quêtchope marchait à la vitesse moyenne de 6 kilomètres par heure et il courait à la vitesse de 14 kilomètres par heure.

Seconde partie : statistique de mille pattes ou presque

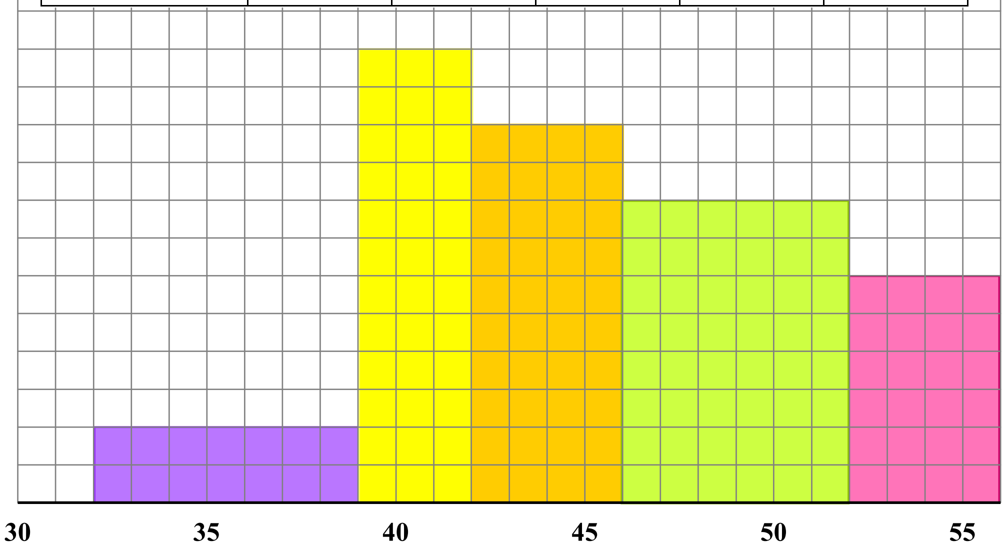
a) Le caractère étudié est le temps mis par un individu-concurrent pour parcourir les dix kilomètres. Ces temps sont comptabilisés en plages horaires. Les modalités sont des intervalles de temps. Le caractère étudié est donc du type quantitatif continu.

b) Dans un histogramme, c'est l'aire qui représente l'effectif. L'aire du rectangle correspondant à la classe $[46;52[$ est de 12 centimètres carrés. Comme un centimètre carré représente 12 individus alors la classe $[46;52[$ compte $12\times 12=144$ individus.

➲ L'effectif total est de $42+108+120+144+72=486$ individus-concurrents.

c) Chacune des quatre classes dont l'effectif est manquant doit être représentée par un rectangle d'aire proportionnelle à son effectif et dont la base est fixée par l'amplitude de la classe. Un centimètre carré représente quatre carreaux et 12 individus. Un carreau représente donc trois individus. L'histogramme de la série statistique est le suivant :

Classe	$[32;39[$	$[39;42[$	$[42;46[$	$[46;52[$	$[52;56[$
Effectif	42	108	120	144	72
Aire	$3,5\text{ cm}^2$	9 cm^2	10 cm^2	12 cm^2	6 cm^2
Dimensions Base × Hauteur	$3,5\times 1\text{ cm}$	$1,5\times 6\text{ cm}$	$2\times 5\text{ cm}$	$3\times 4\text{ cm}$	$2\times 3\text{ cm}$



d) La médiane d'une série statistique est la plus petite valeur telle qu'au moins la moitié des individus (ici au moins 243) aient une modalité inférieure à cette valeur.
Le caractère étant quantitatif continu, on peut répondre que la médiane est 46 ou qu'elle se trouve dans la classe $[42;46[$.
Si l'on admet que les 120 individus de cette classe sont répartis de manière homogène alors <u>la médiane réelle ou exacte</u> se trouve aux $\dfrac{246-108-42}{120}=\dfrac{96}{120}=\dfrac{4}{5}$ de l'intervalle $[42;46[$. Elle est alors égale à $42+\dfrac{4}{5}\times(46-42)=45,2'=45'12''$.

e) Même si cela n'est pas précisé, on suppose qu'à l'intérieur de chaque classe, les individus sont répartis de manière homogène. Le calcul de la moyenne est le suivant :

$$\text{Moyenne}=\frac{\overbrace{42\times 3,5+108\times 40,5+120\times 44+144\times 49+72\times 54}^{\text{Somme des produits effectif}\times\text{milieu de chaque classe}}}{\underbrace{486}_{\text{Effectif total}}}=\frac{22089}{486}=45,45\text{ min}$$

Le temps moyen mis par l'ensemble des coureurs est de 45 minutes et 27 secondes.

f) Le total des temps mis par toutes les féminines est $140\times 48=6720$ minutes.
Donc le temps total mis par les 346 hommes est de $22089-6720=15369$ minutes.
Ainsi, le temps moyen réalisé par un coureur homme est $\dfrac{15349}{346}\approx 44,41'\approx 44'24''$.

Dernière partie : un air d'antan

On appelle x le nombre de Douglas DC-3 Dakota, y celui de Junkers Ju-52 et z celui d'Antonov An-2 que possède la compagnie.
Exploitons les renseignements qui nous sont fournis par l'énoncé :

- Sur les 186 passagers qui ont été transportés ce 31 mars 1947, $21.x$ l'ont été par les x DC-3, $12.y$ par les y Ju-52 et $9.z$ par les z An-2. Cela nous conduit à l'équation : $21.x+12.y+9.z=186 \Leftrightarrow \underbrace{7.x+4.y+3.z=62}_{\text{On divise tout par 3}}$.
- Sur les 41 membres d'équipage qui ont volé, $4.x$ l'ont fait sur les x DC-3, $3.y$ sur les y Ju-52 et $2.z$ sur les z An-2. D'où l'équation $4.x+3.y+2.z=41$.
- Sur les 32 heures de vol effectuées, $4.x$ l'ont été par les x DC-3, $2.y$ par les y Ju-52 et z par les z An-2. D'où l'équation $4.x+2.y+z=32$.

Ainsi les inconnues x, y et z sont-elles les solutions du système linéaire 3×3 :

$$(S)\begin{cases} 7.x+4.y+3.z=62 & \textit{(1)} \\ 4.x+3.y+2.z=41 & \textit{(2)} \\ 4.x+2.y+z=32 & \textit{(3)} \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous allons constituer un système linéaire 2×2 à partir de ses trois équations. Nous décidons de conserver les deux inconnues x et y. Nous devons donc éliminer l'inconnue z. Pour ce faire, nous allons combiner les équations ***(1)***, ***(2)*** et ***(3)*** de manière adéquate.

A partir des équations ***(1)*** et ***(3)*** :

$$\begin{array}{lll} \ominus\textit{(3)} & \xrightarrow{\times 3} & 12.x+6.y+3.z=96 \\ \textit{(1)} & \longrightarrow & 7.x+4.y+3.z=62 \\ \hline & \textit{(31)} & 5.x+2.y=34 \end{array}$$

A partir des équations ***(2)*** et ***(3)*** :

$$\begin{array}{lll} \ominus\textit{(3)} & \xrightarrow{\times 2} & 8.x+4.y+2.z=64 \\ \textit{(2)} & \longrightarrow & 4.x+3.y+2.z=41 \\ \hline & \textit{(32)} & 4.x+y=23 \end{array}$$

Autrement dit, les inconnues x et y sont également solutions du système linéaire 2×2 :

$$\begin{cases} 5.x+2.y=34 & \textit{(31)} \\ 4.x+y=23 & \textit{(32)} \end{cases}$$

Ce système linéaire 2×2 peut être résolu par combinaisons linéaires ou par substitution. Nous optons pour cette dernière voie.
D'abord, nous allons chercher à déterminer x. A partir de l'équation ***(32)***, on exprime l'inconnue y en fonction de x.

$$4.x+y=23 \quad\Leftrightarrow\quad y=23-4.x$$

Puis on remplace y par ce qu'il vaut en x dans l'équation ***(31)***.

$$5.x+2.\underbrace{[23-4.x]}_{y}=34 \quad\Leftrightarrow\quad 5.x+46-8.x=34 \quad\Leftrightarrow\quad -3.x=-12 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-12}{-3}=4$$

Nous sommes désormais en mesure de déterminer la valeur de l'inconnue y. En effet :

$$y=23-4\times 4=23-16=7$$

Pour obtenir l'inconnue z, il nous suffit de remplacer x et y par leurs valeurs respectives 4 et 7 dans l'une des trois équations du système (S). Nous optons pour la ***(3)***.

$$4\times\underbrace{4}_{x}+2\times\underbrace{7}_{y}+z=32 \quad\Leftrightarrow\quad 16+14+z=32 \quad\Leftrightarrow\quad z=32-16-14=2$$

La solution du système 3×3 est le triplet $(4;7;2)$. Sauf que ce n'est pas la question qui était posée. Il nous faut conclure !

Conclusion : la compagnie LeBlanc Airlines exploitait le 31 mars 1947 quatre Douglas DC-3, sept Junkers Ju-52 et deux Antonov An-2.

Devoir Surveillé No.9

Le contexte

Cet ultime devoir de deux heures eut lieu à la fin mai 2005, à la toute fin de la saison. Il abordait les thèmes suivants :

- Angles orientés et leurs mesures en radians
  Certains diront que c'est hors programme mais on en parle de facto avec les rotations...
- La géométrie dans l'espace : positions relatives de droites et de plans, construction de l'intersection de deux plans.
- Etude d'une fonction rationnelle : son ensemble de définition, factorisation d'une expression du second degré connaissant l'une de ses racine, sa décomposition et ses variations.
  Là, on est très clairement hors programme même si cela avait été vu.
- Etude des variations d'une fonction découlant de la fonction cosinus au moyen d'un enchaînement d'inégalités.

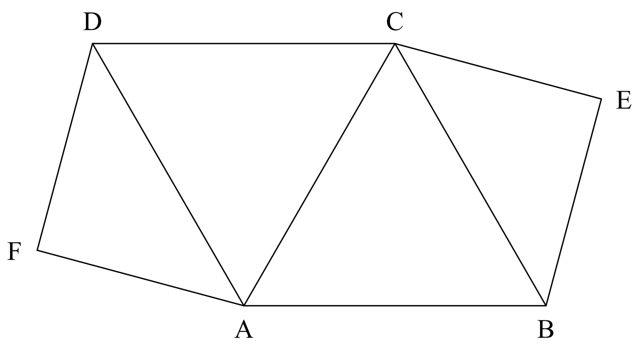
Pour ceux qui réussirent, la majorité des points fut apportée par les exercices d'analyse. Ce devoir permit de voir ou de confirmer les élèves qui avaient un profil scientifique.

L'énoncé

Première partie : le retour des angles orientés

Sur la figure ci-dessous :

- Les triangles ABC et ACD sont équilatéraux.
- Le triangle ADF est isocèle et rectangle en F
- Le triangle BCE est isocèle et rectangle en E.



Après avoir codé complètement la figure ci-dessus, donner une mesure exacte en radians pour chacun des angles orientés suivants. Aucune justification n'est demandée.

$\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)=$ $\qquad$ $\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EB}\right)=$

$\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=$ $\qquad$ $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=$

$\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)=$ $\qquad$ $\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{AD}\right)=$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=$

Seconde partie : il était une fois...dans le cube

Dans le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous, les points I, J et K sont définis par :

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BJ}=\frac{3}{5}.\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{HK}=\frac{3}{4}.\overrightarrow{HG}$$

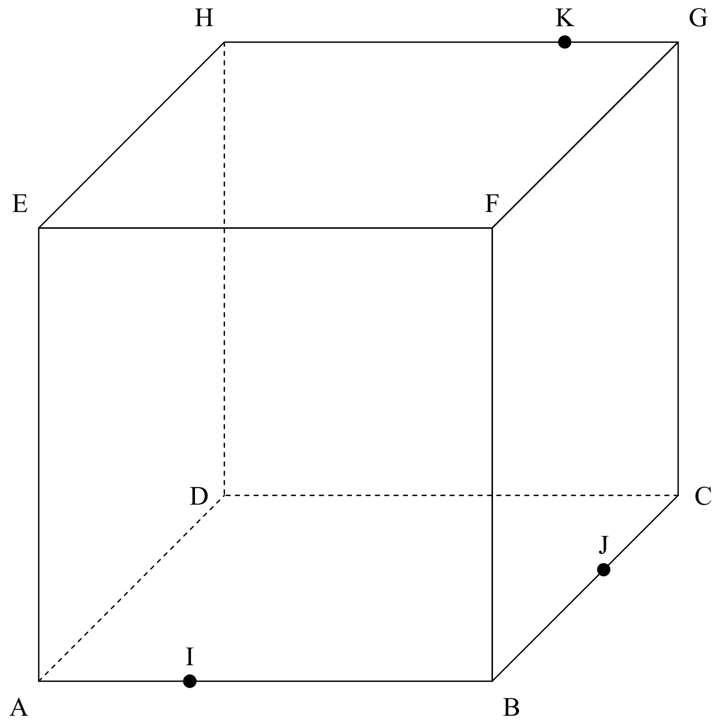
On construira les divers objets demandés sur la figure se trouvant sur la page suivante :

a) Compléter les phrases suivantes en indiquant les positions relatives des objets en question. Les éventuels points ou droites d'intersection ne sont pas demandés. De plus, aucune justification n'est demandée.

1. Les droites (JF) et (CG) sont ....
2. La droite (KJ) et le plan (ACD) sont ....
3. Les droites (KD) et (EF) sont ....
4. La droite (IJ) et le plan (EFG) sont ....

b) Construire l'intersection Δ des plans (ACK) et (GDI). On justifiera sa construction.

c) Construire l'intersection Δ' des plans (EGH) et (IJK). On justifiera sa construction.



Troisième partie : le mystère de la fonction rationnelle h

La fonction rationnelle h est définie par :

$$h(x) = \frac{-3.x^2 + 8.x - 4}{x+1}$$

L'objet de cette partie est l'étude quasi-complète de la fonction rationnelle h.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h. On justifiera sa réponse.

On appelle $f(x) = -3.x^2 + 8.x - 4$ le numérateur de la fonction rationnelle h.

b) Calculer les images par la fonction f de -3 et 2.
Factoriser entièrement f(x). On utilisera la méthode de son choix. Une grande attention sera portée à la clarté du raisonnement ou des calculs.
Dresser le tableau de signe de la fonction h.

c) Décomposer la fonction rationnelle h, c'est-à-dire déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$h(x) = a.x + b + \frac{c}{x+1}$$

On appelle $\underbrace{u(x) = a.x + b}_{\text{Remplacer a et b par leurs valeurs.}}$ la partie affine de la fonction rationnelle h et $\underbrace{v(x) = \frac{c}{x+1}}_{\text{Remplacer c par sa valeur}}$ sa partie inverse.

d) Quel est le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]-\infty; -1[$? On justifiera sa réponse.
Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $]-\infty; -1[$. On établira sa réponse. Une grande attention sera porté aux justifications apportées.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la fonction rationnelle h sur l'intervalle $]-\infty; -1[$?

Dernière partie : dans les griffes du cosinus

La fonction j est définie pour tout réel x par :

$$j(x) = 4 - 2.\cos(3.x)$$

La fonction j étant $\frac{2\pi}{3}$-périodique, nous allons l'étudier sur l'intervalle $\left[0; \frac{2.\pi}{3}\right]$.

a) Déterminer par le calcul les <u>valeurs exactes</u> des images suivantes :

$j(0) =$ $\quad$ $j\left(\frac{\pi}{18}\right) =$ $\quad$ $j\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

$j\left(\frac{\pi}{3}\right) =$ $\quad$ $j\left(\frac{2.\pi}{3}\right) =$

b) Etablir le sens de variation de la fonction j sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ au moyen d'un enchaînement d'inégalités. On prendra soin de bien justifier chaque étape.
Déterminer le sens de variation de la fonction j sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{2.\pi}{3}\right]$. On justifiera sa réponse. On pourra s'appuyer sur ce qui a été fait précédemment.

Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction j sur l'intervalle $\left[0;\frac{2.\pi}{3}\right]$.

En déduire le tableau de variation de la fonction j sur l'intervalle $\left[\frac{4.\pi}{3};2.\pi\right]$.

Le corrigé

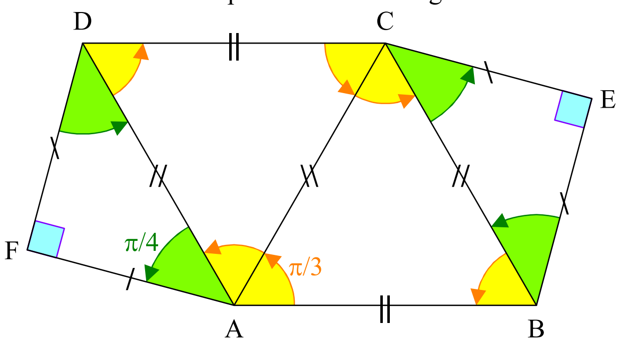
Première partie : le retour des angles orientés

Dans un triangle équilatéral, chacun des angles géométriques mesure 60° ou $\frac{\pi}{3}$ radians.

Rappelons l'équivalence : $180° = \pi$ radians . Ainsi un angle droit fait $\frac{\pi}{2}$ radians.

L'unité de mesure angulaire par défaut est le radian. Lorsque aucune unité n'est spécifiée, il s'agit de radian.
La mesure d'un angle orienté est positive si pour amener le premier vecteur sur le second, on part dans le sens trigonométrique c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Un angle orienté à une infinité de mesures : deux mesures d'un même angle diffèrent d'un certain nombre de tours, c'est-à-dire d'un certain nombre de fois $2.\pi$.

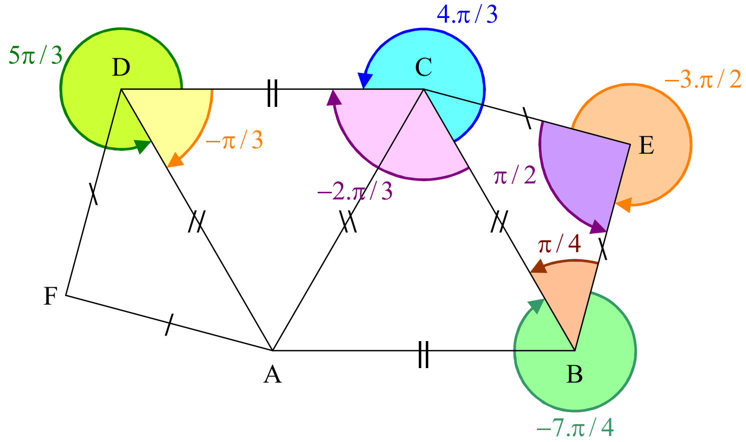
La première chose à faire est de compléter les divers angles élémentaires de la figure.



En nous appuyant sur cette figure, nous allons répondre aux questions posées :

- Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)$ (en jaune clair) est $-\frac{\pi}{3}$ radians.

  Une autre de ses mesures (en vert olive) est $\frac{5.\pi}{3}$ ou encore $\frac{11.\pi}{3}=\frac{5.\pi}{3}+\underbrace{\frac{2.\pi}{}}_{1\text{ tour}}$.



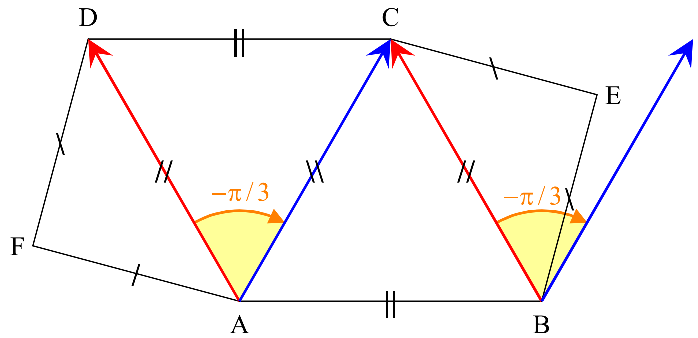
- Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EB}\right)$ (en violet clair) est $\frac{\pi}{2}$.

  Une autre mesure (en orange) de $\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EB}\right)$ est $-\frac{3.\pi}{2}$.

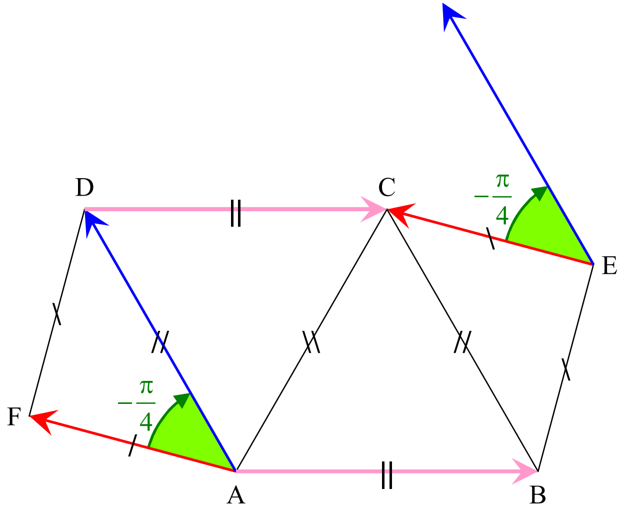
- Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$ (en rose) est $-\frac{2.\pi}{3}$. Si l'on part dans l'autre sens, une mesure de ce même angle (en bleu turquoise) est $\frac{4.\pi}{3}$.

- Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)$ (en marron clair) est $\frac{\pi}{4}$. Dans le sens indirect, une mesure de ce même angle (en vert clair) est $-\frac{7.\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\underbrace{2.\pi}_{1\text{ tour}}$.

Un angle orienté est défini par deux vecteurs qui indiquent deux demi-directions. Ceux-ci ne dépendent pas des points avec lesquels on les exprime. Ainsi :



- L'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)$ est aussi l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)$ car $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.
  Par conséquent :
  $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{3}$



• Les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ étant égaux, nous avons :

$$\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{\pi}{4}$$

• Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ (en rose) étant égaux, ils ont la même direction et le même sens. Par conséquent, une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)$ est 0.

Une autre mesure est $2.\pi = 1$ tour.

Voire $-2.\pi = -1$ tour.

Seconde partie : il était une fois...dans le cube

a) Complétons les phrases proposées :

1. Les droites (JF) et (CG) sont sécantes dans le plan (BCGF) qui contient la face arrière du cube.
2. La droite (KJ) et le plan (ACD) sont sécants en J.
3. Les droites (KD) et (EF) ne sont ni sécantes, ni parallèles. Elles sont non coplanaires.
4. La droite (IJ) et le plan (EFG) sont parallèles.

b) L'intersection Δ des plans sécants (ACK) et (GDI) est une droite. Nous allons la tracer en construisant deux de ses points.

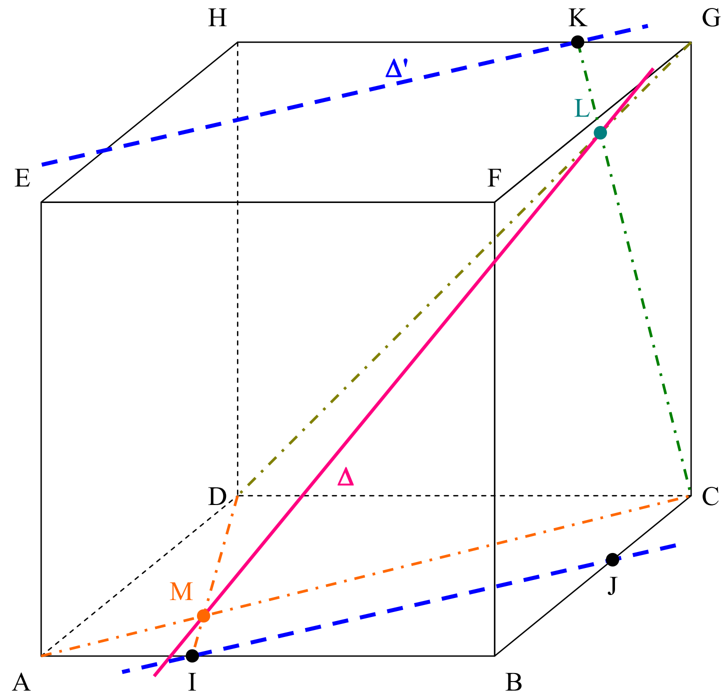
- Les droites (CK) et (GD) sont sécantes dans le plan (CGHD) en un point que nous appelons L. Par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} L \in \text{droite }(CK) \subset \text{plan }(ACK) \\ L \in \text{droite }(AG) \subset \text{plan }(GDI) \end{array}\right\} \text{donc } L \in \Delta = (ACK)\cap(GDI)$$

- Les droites (DI) et (AC) sont sécantes dans le plan (ABCD) en un point que nous appelons M. Par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} L \in \text{droite }(DI) \subset \text{plan }(GDI) \\ L \in \text{droite }(AC) \subset \text{plan }(ACK) \end{array}\right\} \text{donc } L \in \Delta = (GDI)\cap(ACK)$$

Conclusion : l'intersection Δ des plans (ACK) et (GDI) est la droite (ML).



c) L'intersection Δ' des plans (EGH) et (IJK) est une droite.
Comme le point K appartient à la droite (GH) alors il fait aussi partie du plan (EGH).
K appartient aussi au plan (IJK). Donc, il fait partie de l'intersection Δ' des deux plans.
Ensuite, en application du théorème d'incidence, nous pouvons dire que le plan (IJK) coupe les deux plans parallèles (ABC) (face du dessous) et (EGH) (face du dessus) suivant deux droites parallèles.
L'intersection des plans (ABC) et (IJK) est la droite (IJ) car les points I et J appartiennent à ces deux plans.
L'intersection des plans (EGH) et (IJK) est la droite Δ'.
Conclusion : l'intersection Δ' est la parallèle à la droite (IJ) passant par le point K.

Troisième partie : le mystère de la fonction rationnelle h

a) Les fonctions du second degré $f(x)=-3.x^2+8.x-4$ et affine $g(x)=x+1$ existent pour tout réel x. Leur quotient h(x) n'a de sens que si le dénominateur g(x) est non nul.

$$\text{Le quotient } h(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Son dénominateur } x+1\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -1$$

Conclusion : tous les réels sauf -1 ont une image par h. $D_h = \left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$.

b) Calculons les images de -3 et 2 par le numérateur f de la fonction rationnelle h.

➥ $f(-3)=-3\times(-3)^2+8\times(-3)-4=-3\times9-24-4=-27-24-4=-55$

➥ $f(2)=-3\times(2)^2+8\times(2)-4=-3\times4+16-4=-12+12=0$

Comme 2 est une racine de f alors il y a un facteur $x-2$ dans la forme factorisée de f.

➲ Deux méthodes permettent de factoriser la fonction du second degré f.

➥ On peut essayer de faire apparaître le facteur $x-2$ dans les termes de f(x).

$$f(x)=\overbrace{-3.x^2}^{\text{Combien de fois }x-2\text{ ?}}+8.x-4=\overbrace{-3.x.(x-2)-6.x}^{\text{On compense le }+6.x\text{ par }-6.x}+8.x-4$$

$$=-3.x.(x-2)+2x-4=-3.x.\underbrace{(x-2)}_{\text{Facteur...}}+2.\underbrace{(x-2)}_{\text{...commun}}=(x-2).(-3.x+2).$$

➥ On peut aussi passer par la forme canonique de f(x).

$$f(x)=-3.x^2+8.x-4=-3.\left[\underbrace{x^2-\frac{8}{3}.x}_{a^2-2.a.b}+\frac{4}{3}\right]=-3.\left[\underbrace{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2}_{(a+b)^2-b^2}+\frac{4}{3}\right]$$

$$=-3.\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}+\frac{12}{9}\right]=\underbrace{-3.\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right]}_{\text{Forme canonique}}=-3.\underbrace{\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]}_{a^2-b^2}$$

$$=(-3).\underbrace{\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)+\frac{2}{3}\right]}_{(a+b)}.\underbrace{\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)-\frac{2}{3}\right]}_{(a-b)}=\underbrace{(-3).\left(x-\frac{2}{3}\right)}_{-3.x+2}.(x-2)$$

Connaissant les signes de trois facteurs affines du quotient $h(x)=\dfrac{(-3.x+2).(x-2)}{x+1}$, nous pouvons dresser le tableau de signe de celui-ci.

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$-3.x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$h(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) Décomposons h(x). Pour tout réel $x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$, nous avons :

$$h(x)=\frac{\overbrace{-3.x^2}^{\text{Combien de fois }x+1\text{ ?}}+8.x-4}{x+1}=\frac{\overbrace{-3.x.(x+1)+3.x}^{\text{On compense }-3.x\text{ par }+3.x\text{. Le total fait }-3.x^2}+8.x-4}{x+1}=\overbrace{\underbrace{\frac{-3.x.(x+1)}{x+1}}_{\text{...et on simplifie par }x+1}+\frac{11.x-4}{x+1}}^{\text{On fractionne la fraction...}}$$

$$=-3.x+\frac{\overbrace{11.x}^{\text{Et on recommence ! Combien de fois }x+1\text{ ?}}-4}{x+1}=-3.x+\frac{\overbrace{11.(x+1)-11}^{\text{On compense }+11\text{ par }-11\text{. Le tout vaut }11.x}-4}{x+1}$$

$$=-3+\underbrace{\frac{11.(x+1)}{x+1}}_{\text{On simplifie...}}+\frac{-11-4}{x+1}=\underbrace{-3.x+11}_{\text{Partie affine }u(x)}+\underbrace{\frac{-15}{x+1}}_{\text{Partie inverse }v(x)}$$

d) La fonction affine $u(x)=-3.x+11$ est décroissante sur ℝ donc en particulier sur l'intervalle $\left]-\infty;-1\right[$ car son coefficient directeur -3 est négatif.

➲ Etablissons le sens de variation de la partie inverse $v(x)=\dfrac{-15}{x+1}$ sur $\left]-\infty;-1\right[$.

Soient a et b deux réels de cet intervalle tels que $a<b$. Nous allons chercher à savoir comment leurs images v(a) et v(b) sont rangées au moyen d'un enchaînement d'inégalités en nous appuyant sur les fonctions de référence. La situation est la suivante :

$a<b<-1$

$+1$ $\quad\underbrace{a+1<b+1}_{\text{Ces deux réels sont négatifs}}<0$

La fonction inverse est décroissante sur $\left]-\infty;0\right[$.

$\dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{b+1}$

$\times(-15)$ $\quad\dfrac{-15}{a+1}<\dfrac{-15}{b+1}$

$v(a)<v(b)$

Conclusion : v conserve l'ordre. Donc elle est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-1\right[$.

➲ Sur l'intervalle $\left]-\infty;-1\right[$, la fonction rationnelle h est la somme d'une fonction affine décroissante u et d'une autre inverse décroissante v. On ne peut donc rien en conclure pour h. Il faut effectuer d'autres investigations !

Dernière partie : dans les griffes du cosinus

Avant d'entamer l'exercice, nous allons dire pourquoi la fonction j est $\frac{2.\pi}{3}$ -périodique.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$j\left(x+\frac{2.\pi}{3}\right)=4-2.\cos\left(3.\left[x+\frac{2.\pi}{3}\right]\right)=4-\underbrace{2.\cos\left(3.x+2.\pi\right)}_{\text{Car cos est...}}=4-2.\underbrace{\cos\left(3.x\right)}_{\text{..}2\pi-\text{périodique}}=j(x)$$

a) Calculons les images demandées. Les divers cosinus nous seront donnés par le cercle trigonométrique.

- $j(0)=4-2.\cos(3\times 0)=4-2.\cos(0)=4-2\times 1=4-2=2$
- $j\left(\frac{\pi}{18}\right)=4-2.\cos\left(3\times\frac{\pi}{18}\right)=4-2.\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=4-2.\frac{\sqrt{3}}{2}=4-\sqrt{3}$
- $j\left(\frac{\pi}{4}\right)=4-2.\cos\left(3\times\frac{\pi}{4}\right)=4-2.\cos\left(\frac{3.\pi}{4}\right)=4-2.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4+\sqrt{2}$
- $j\left(\frac{\pi}{3}\right)=4-2.\cos\left(3\times\frac{\pi}{3}\right)=4-2.\cos(\pi)=4-2\times(-1)=4+2=6$
- $j\left(\frac{2.\pi}{3}\right)=\underbrace{j\left(0+\frac{2.\pi}{3}\right)=j(0)}_{\text{car j est }\frac{2.\pi}{3}-\text{périodique}}=2$

b) Etablissons le sens de variation de j sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$. Pour y parvenir, nous allons considérer deux réels de cet intervalle x et y tels que $x<y$ et chercher comment leurs images $j(x)$ et $j(y)$ sont rangées. La situation est la suivante :

$$0\le x<y\le\frac{\pi}{3}$$

×3

$$0\le 3.x<3.y\le\pi$$

$$\underbrace{\cos(0)}_{1}\ge\cos(3.x)>\cos(3.y)\ge\cos(\pi)$$

Cosinus est décroissante sur $[0;\pi]$.

×(−2)

$$-2\le -2.\cos(3.x)<-2.\cos(3.y)\le 2$$

+4

$$2\le\underbrace{4-2.\cos(3.x)}_{j(x)}<\underbrace{4-2.\cos(3.y)}_{j(y)}\le 6$$

Conclusion : la fonction j conservant l'ordre, elle est croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

➲ Pour déterminer le sens de variation de j sur l'autre intervalle sur $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2.\pi}{3}\right]$, nous allons refaire le même enchaînement que précédemment. Soient x et y deux de cet intervalle tels que $x<y$. Comment leurs images par j sont-elles rangées ? D'entrée, la situation est la suivante :

$$\frac{\pi}{3}\le x<y\le\frac{2.\pi}{3}$$

×3

$$\pi\le 3.x<3.y\le 2.\pi$$

$$\underbrace{\cos(\pi)}_{-1}\le\cos(3.x)<\cos(3.y)\le\underbrace{\cos(2.\pi)}_{1}$$

Cosinus est croissante sur $[\pi;2.\pi]$.

×(−2)

$$2\ge -2.\cos(3.x)>-2.\cos(3.y)\ge -2$$

+4

$$6\ge\underbrace{4-2.\cos(3.x)}_{j(x)}>\underbrace{4-2.\cos(3.y)}_{j(y)}\ge 4$$

Conclusion : la fonction j change l'ordre sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3};\frac{2.\pi}{3}\right]$. Donc elle y est décroissante.

➲ La fonction j étant $\frac{2.\pi}{3}$ -périodique, elle se répète avec une période de $\frac{2.\pi}{3}$. Par conséquent, son tableau de variation sur l'intervalle $[0;2.\pi]$ est :

	Période					***Période***					***Période***		
x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2.\pi}{3}$		π		$\frac{4.\pi}{3}$		$\frac{5.\pi}{3}$		$2.\pi$
j			6				6				6		
		↗		↘		↗		↘		↗		↘	
	2				2				2				2

Annexes

Le pourquoi

Pour compléter ce récapitulatif des devoirs surveillés de mathématiques donnés en seconde durant la saison 2004-2005, voici quelques documents qui éclaireront le lecteur sur comment diverses notions hors programme ont été abordées et traitées.

Module : la vie rêvée des fonctions homographiques

Les fonctions homographiques sont celles qui peuvent s'écrire comme étant le quotient de deux fonctions affines. Ce sont des fonctions assez simples dont on peut étudier les variations en s'appuyant sur celles des fonctions affines et de la fonction inverse. Ce module fut donné courant février 2005.

Première partie : étude de la fonction homographique h

La fonction h est définie par :

$$h(x)=\frac{3.x+4}{x+7}$$

a) A quelle(s) condition(s) h(x) existe-t-il ?
En déduire l'ensemble de définition de la fonction h que l'on notera D_h .

b) Dresser le tableau de signe de la fonction h.

c) Démontrer que pour tous réels x et y de D_h , on a :

$$h(x)-h(y)=\frac{17.(y-x)}{(x+7).(y+7)}$$

En utilisant l'égalité ci-dessus, établir le sens de variation de la fonction sur l'intervalle $]-\infty;-7[$.

d) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel $x \in D_h$, on ait :

$$h(x)=a+\frac{b}{x+7}$$

En utilisant l'égalité ci-dessus, établir le sens de variation de la fonction sur l'intervalle $]-7;+\infty[$.

e) Conclure l'exercice en dressant le tableau de variation de la fonction h.

Seconde partie : la même chose garçon !

Reprendre l'exercice précédent avec la fonction homographique

$$j(x)=\frac{5-3.x}{x-2}$$

Attention : *les intervalles sur lesquels il faut étudier les variations ont changé !*

Module : l'échappée belle au pays des fonctions rationnelles

Ce module montre comment il est possible d'établir les variations de certaines fonctions rationnelles en s'appuyant sur celles des fonctions affines et inverses. Il introduit aussi une technique de décomposition des fonctions rationnelles.
La première partie fut traitée une heure en module et une heure en cours. Les deux semaines suivantes, les élèves eurent à faire chez eux les seconde et dernière parties qui techniquement sont la répétition de la première.

Une fonction est dite rationnelle lorsqu'elle peut s'écrire comme étant le quotient de deux polynômes, c'est-à-dire de deux sommes de puissances de la variable x.

Les fonctions homographiques qui sont des quotients de deux fonctions affines, sont des cas simples de fonctions rationnelles. En voici d'autres...

Première partie : à la rencontre de la fonction rationnelle h

La fonction rationnelle h est définie par :

$$h(x)=\frac{2.x^2-18.x+28}{x-6}$$

Le but de ce paragraphe est l'étude complète de la fonction h : son ensemble de définition, son signe, ses variations et le comportement de sa courbe.

a) A quelle(s) condition(s) h(x) existe-t-il ? En déduire l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

b) L'objet de cette question est l'étude du signe de la fonction rationnelle h.

Factoriser le numérateur $N(x) = 2.x^2 - 18.x + 28$.

On pourra d'abord chercher à écrire $N(x)$ sous sa forme canonique puis remarquer qu'alors, il est une différence de deux carrés. Autrement dit :

$$N(x) = 2 \times \Big[\underbrace{x^2 + \ldots x}_{\text{Oh mais c'est le début de ...}} + \ldots \Big] = \ldots = 2 \times \underbrace{\Big[(x+\ldots)^2 + \ldots \Big]}_{\text{Forme canonique}} = 2 \times \underbrace{\Big[(x+\ldots)^2 - (\ldots)^2 \Big]}_{\text{Tiens, mais c'est une chose qu'on sait factoriser...}}$$

En déduire l'écriture factorisée de la fonction rationnelle h(x).
Dresser le tableau de signe de la fonction rationnelle h.

c) Dans cette question, nous allons nous intéresser aux variations de la fonction rationnelle h sur les deux intervalles constituant son ensemble de définition.
Décomposer la fonction rationnelle h. Autrement dit, déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \in D_h$, on ait :

$$h(x) = a.x + b + \frac{c}{x-6}$$

Ce genre de technique a déjà été employée avec les fonctions homographiques. Avec la fonction h, les choses commenceront comme suit :

$$h(x) = \frac{\overbrace{2.x^2}^{\text{Combien de fois } x-6 \text{ ?}} - 18.x + 28}{x-6} = \frac{\overbrace{\ldots(x-6)+\ldots}^{2.x^2} - 18.x + 28}{x-6} = \overbrace{\underbrace{\frac{\ldots(x-6)}{x-6}}_{\text{et on simplifie.}} + \frac{\ldots}{x-6}}^{\text{On fractionne...}}$$

Sous sa forme décomposée, la fonction rationnelle h est la somme de la <u>fonction affine</u> $f(x) = \ldots$ et de la <u>fonction inverse</u> $g(x) = \ldots$.

On s'intéresse au sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $]6;+\infty[$.

Quel est le sens de variation de la fonction affine $f(x) = \ldots$ sur cet intervalle ?

Quel est le sens de variation de la fonction inverse $g(x) = \ldots$ sur $]6;+\infty[$? On pourra justifier sa réponse par un enchaînement d'inégalités...

Que peut-on en déduire pour le sens de variation de h sur $]6;+\infty[$? On justifiera sa réponse.

Etablir le sens de variation de la fonction h sur l'autre intervalle $]-\infty;6[$.

d) Dans le repère orthonormé ci-après, tracer les courbes représentant la fonction affine f et la fonction rationnelle h.
Que remarque-t-on lorsque x devient grand négativement ou positivement c'est-à-dire lorsqu'il s'en va vers $-\infty$ ou vers $+\infty$?

Seconde partie : à propos de la fonction rationnelle j

La fonction rationnelle j est définie par :

$$j(x) = \frac{-4.x^2 + 4.x + 15}{2.x + 1}$$

Le but de cette partie est l'étude complète de la fonction rationnelle j.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_j de la fonction j.

b) Cette question va nous permettre de dresser le tableau de signe de j(x).

Ecrire le numérateur $N(x) = -4.x^2 + 4.x + 15$ sous sa forme canonique.

Sous cette écriture, peut-on le factoriser ? Si oui, le faire.
En déduire le signe du numérateur $N(x)$, puis dresser le tableau de signe de la fonction rationnelle j.

c) Décomposer la fonction rationnelle j, c'est-à-dire déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \in D_j$, on ait :

$$j(x) = a.x + b + \frac{c}{2.x + 1}$$

En s'inspirant de ce qui a été fait avec la fonction h lors la question 1.c, établir les sens de variation de la fonction j sur les deux intervalles constituant son ensemble de définition.

d) Dans le repère orthonormé ci-contre, tracer la courbe de la fonction rationnelle j. On pourra également tracer celle de la fonction affine apparaissant dans l'écriture décomposée de j.

Dernière partie : aux frontières de la simplicité

La technique que nous avons employée dans les questions 1.c et 2.c ne peut pas être utilisée pour toutes les fonctions rationnelles de la forme $\dfrac{\text{une chose du second dégré 2}}{\text{une fonction affine (degré 1)}}$.

La fonction rationnelle k est définie par :

$$k(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction k.

b) Dresser le tableau de signe de k(x).

c) Décomposer la fonction rationnelle k c'est-à-dire déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \in D_k$, on ait :

$$k(x) = a.x + b + \frac{c}{x-3}$$

Sous sa forme décomposée, la fonction rationnelle k est la somme de la <u>fonction affine</u> $f(x) = \ldots$ et de la <u>fonction inverse</u> $g(x) = \ldots$.

On souhaite établir le sens de variation de la fonction k sur l'intervalle $]3;+\infty[$.

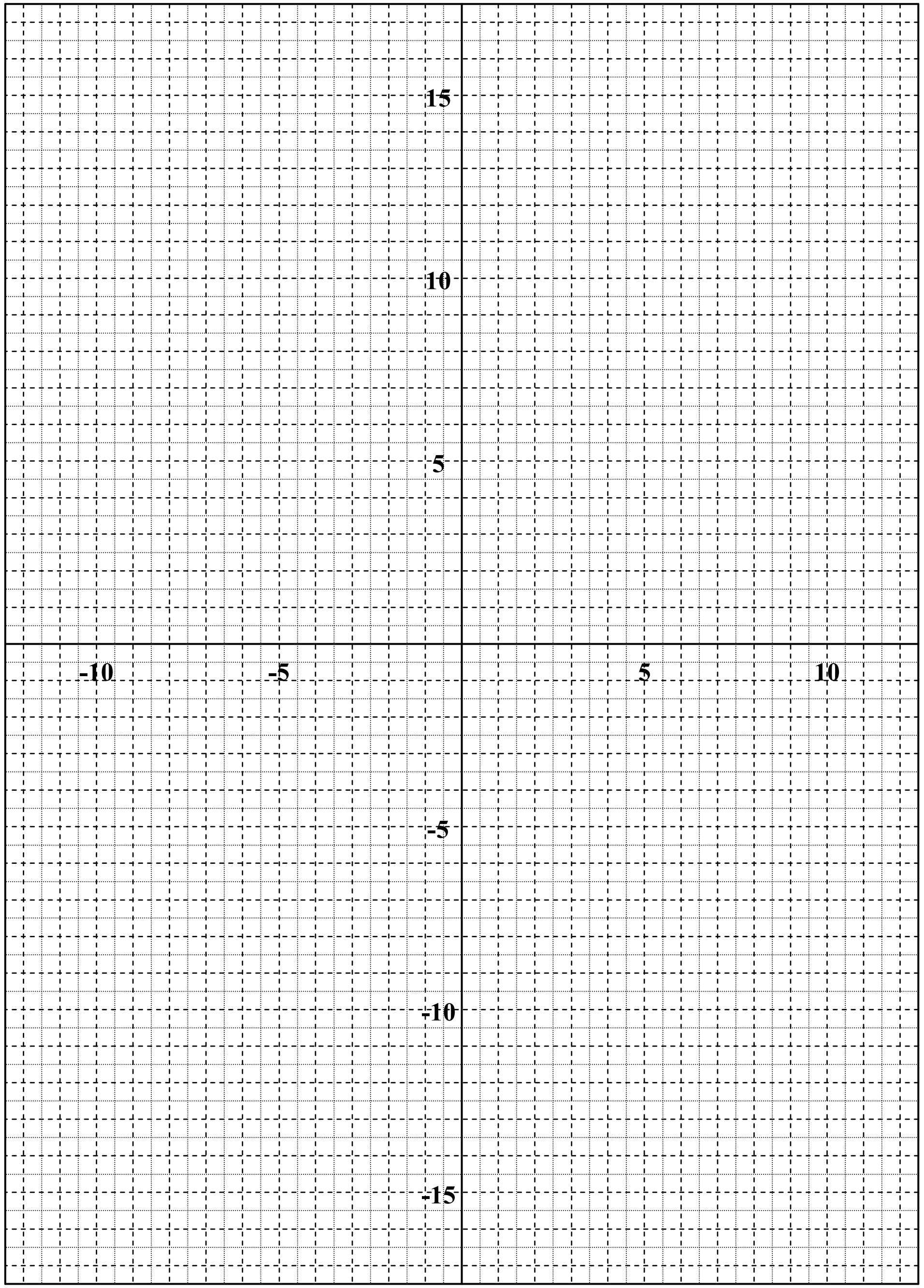
Quel est le sens de variation de la fonction affine $f(x) = \ldots$ sur cet intervalle ?

Quel est le sens de variation de la fonction inverse $g(x) = \ldots$ sur $]3;+\infty[$?

Que peut-on en déduire pour le sens de variation de k sur $]3;+\infty[$?

Etudier le sens de variation de la fonction k sur l'autre intervalle $]-\infty;3[$.

d) Tracer dans le repère ci-contre, la courbe représentant k. Que remarque-t-on ?



Module : la factorisation par la racine

Le module suivant introduisit une technique de factorisation des fonctions du second degré connaissant une racine. Parfois l'usage de la forme canonique est assez ardue. La première partie fut traitée en module. Durant la semaine suivante, les élèves eurent à reproduire et à assimiler chez eux la technique apprise avec la seconde partie. La dernière partie fut laissée aux meilleurs. Les choses furent bien comprises par les scientifiques et quelques autres...

> Etre un antécédent de 0 par une fonction f, c'est être solution de l'équation $f(x)=0$.
> Cela signifie aussi que votre image par f est égale à 0.On parle alors de <u>racine</u> de la fonction f.

Première partie : de l'utilité des racines

La fonction du second degré f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=2.x^2-4.x-16$$

a) Calculer l'image de 4 par la fonction f. Que peut-on en déduire ?

b) En passant par sa forme canonique, factoriser f(x).
En déduire toutes les solutions de l'équation $f(x)=0$.
Compléter la phrase suivante :
On remarque que .... est une racine de f et que le facteur .... apparaît dans la forme factorisée de la fonction du second degré $f(x)=2.x^2-4.x-16$.

Nous venons de mettre en évidence la propriété suivante :

> Lorsqu'un nombre α est une racine d'une fonction du second degré f alors on retrouve un facteur $x-\alpha$ dans la forme factorisée de f(x).
> Autrement dit, la fonction du second degré f peut s'écrire sous la forme :
> $f(x)=(x-\alpha)\times\ldots$

Cette propriété peut servir à factoriser certaines fonctions du second degré sur lesquelles la forme canonique est difficilement applicable.

Seconde partie : la factorisation par une racine

La fonction du second degré g est définie pour tout réel x par :

$$g(x)=3.x^2-20.x-7$$

a) Essayer de factoriser g(x) en passant par sa forme canonique. Si le travail s'avère trop ardu, laisser tomber ! On va rebondir !

b) Calculer les images par la fonction g de -3 et 7.
Quel(s) facteur(s) retrouve-t-on dans la forme factorisée de g(x) ?

c) Dans cette question, nous allons voir comment il est possible factoriser g(x) en faisant apparaître ce facteur $x-7$ dont on vient de déceler la présence dans la forme factorisée de g(x).
Compléter et continuer les calculs suivants :

$$g(x)=\overbrace{3.x^2}^{\text{Combien de fois } x-7\text{ ?}}-20.x-7=\overbrace{\ldots\times(x-7)-\ldots}^{\text{N'oublions pas de compenser ! } 3.x^2}-20.x-7$$

$$=\ldots\times(x-7)+\overbrace{\ldots.x}^{\text{Combien de fois } x-7\text{ ?}}-7=\ldots=\ldots\times\underbrace{(x-7)}_{\text{Facteur...}}+\ldots\times\underbrace{(x-7)}_{\text{...commun}}=(x-7)\times\ldots$$

En déduire le tableau de signe de la fonction du second degré g.

d) En utilisant ce qui vient d'être fait, résoudre dans $\mathbb{R}$:
l'équation $7.x^2+9.x-10=0$ dont l'une des deux solutions est -2.
l'inéquation $11.x^2-26.x-21\geq 0$. Pour cette dernière, on pourra calculer les images de 2 et 3 par la fonction du second degré $f(x)=11.x^2-26.x-21$.

La propriété mise en évidence pour les fonctions du second degré s'applique en fait à tous les polynômes (les sommes de puissances de x). Elle permet de casser ou de factoriser ces derniers.

Dernière partie : le troisième degré et au-delà...

La fonction du troisième degré h est définie pour tout réel x par :

$$h(x) = 3.x^3 - 26.x^2 + 33.x + 14$$

a) Calculer les images par la fonction h de -1 et 2.
Quel(s) facteur(s) retrouve-t-on dans la forme factorisée de h(x) ?
En procédant comme à la question 2.c, factoriser entièrement h(x). Il s'agit d'écrire h(x) sous la forme d'un produit de facteurs affines.
En déduire le tableau de signe de la fonction h.
La fonction du quatrième degré j est définie pour tout réel x par

$$j(x) = 3.x^4 - 5.x^3 - 17.x^2 + 13.x + 6$$

c) Calculer les images par la fonction j de -2 ; 1 et 3.
Quel(s) facteur(s) retrouve-t-on dans la forme factorisée de j(x) ?
Factoriser entièrement j(x).

Quelques idées sur la géométrie analytique

La géométrie analytique a constitué cette année un gros chapitre qui s'est appuyé sur le calcul vectoriel. A l'issue de celui-ci, une sorte de mémento a été rédigé reprenant les divers notions, techniques et outils vus en cours.
Le produit scalaire de deux vecteurs a été introduit comme un test d'orthogonalité de deux vecteurs. Un peu comme le déterminant est un test de colinéarité. Son expression en repère orthonormé a été établie en s'appuyant sur la norme d'un vecteur et Pythagore.
Toutes les notions reprises dans l'aide-mémoire suivant ont été établies ou démontrées.

Quelques idées essentielles

➲ Une **base** $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est constituée de deux vecteurs non colinéaires.

➲ Un **repère** $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ est constitué d'un point O qui en est l'origine et d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

➲ Le point M a pour **coordonnées** $(x;y)$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$

➲ Le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** $(x;y)$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right) \Leftrightarrow \vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.

➲ Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par $\underbrace{\left(x_B - x_A ; y_B - y_A\right)}_{\text{Arrivée−départ}}$.

➲ Si le repère est orthonormé alors la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est : $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

Quelques idées pour les vecteurs

➲ Pour prouver que deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **colinéaires** :

- On peut regarder si leurs **coordonnées** sont **proportionnelles**. A ce moment-là, on donne le rapport de proportionnalité ou de colinéarité.
- On peut **calculer leur déterminant**. S'il est nul alors les deux vecteurs le sont.

  Pour rappel : $\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \underbrace{x.y' - yx'}_{\text{Différence des produits de chaque diagonale}}$

➲ Pour prouver que deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont **orthogonaux** :

- On peut **calculer leur produit scalaire**. S'il est nul alors ils le sont.

  Pour rappel : $\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{x.x' + y.y'}_{\text{Produit abscisses + Produit ordonnées}}$

Quelques idées pour les équations de droites

➲ **L'équation cartésienne** $a.x + b.y + c = 0$ de la droite $\mathcal{D}$ est un **test d'appartenance** à celle-ci. Un point $A\left(x_A ; y_A\right)$ appartient à la droite $\mathcal{D} \Leftrightarrow a.x_A + b.y_A + c = 0$.
Les coordonnées du point vérifient l'équation cartésienne de la droite.

➲ Une droite peut être définie par deux points ou bien, un point et un vecteur directeur.
Un **vecteur directeur** a **même direction** que **la droite** à laquelle il se rapporte.
Deux vecteurs directeurs d'une **même droite** ont même direction : ils sont **colinéaires**.
Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

➲ Pour établir une **équation cartésienne** d'une droite $\mathcal{D}$, il suffit de connaître l'un de ses **points** A et l'un de ses **vecteurs directeurs** $\vec{u}$. On cherche alors à quelle condition un point M appartient à cette droite $\mathcal{D}$.

$$M(x;y) \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots$$

➲ Le problème est souvent l'obtention d'un vecteur directeur :

- **Deux droites parallèles** partagent les **mêmes vecteurs directeurs**.
- Un vecteur est **normal** à une droite si leurs **directions** sont **perpendiculaires**.
  Un **vecteur normal** $\vec{u}$ et un **vecteur directeur** $\vec{n}$ d'une même droite $\mathcal{D}$ sont **orthogonaux**. Leurs coordonnées vérifient le test : $\vec{u}.\vec{n} = x_{\vec{u}}.x_{\vec{n}} + y_{\vec{u}}.y_{\vec{n}} = 0$.
  Avec cette égalité, connaissant un vecteur directeur, on peut déterminer un vecteur normal en tâtonnant. Et réciproquement !
- Si **deux droites** sont **perpendiculaires** alors les **vecteurs normaux de l'une** sont les **vecteurs directeurs de l'autre**.

Quelques idées pour les points

➲ Pour démontrer que trois points A, B et C sont **alignés** :

- On peut prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires** en calculant leur **déterminant**.
- On peut établir une **équation cartésienne** de la droite (AB) et vérifier que les coordonnées du point C vérifient l'équation trouvée.

➲ Pour démontrer qu'un triangle ABC est rectangle en A :

- On peut prouver que les **vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **orthogonaux** en calculant leur **produit scalaire** qui l'on doit trouvé **nul**.

Quelques idées pour les droites

➲ Si une droite D a pour **équation cartésienne** $a.x+b.y+c=0$ alors :

- L'un de ses **vecteurs directeurs** est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
- Si le repère est orthonormé, l'un de ses **vecteurs normaux** est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

➲ Pour démontrer que deux droites sont parallèles :

- On peut prouver qu'un **vecteur directeur de l'une** est **colinéaire** à un **vecteur directeur de l'autre**.

➲ Pour démontrer que deux droites sont **perpendiculaires** :

- On peut prouver qu'un **vecteur directeur de l'une** est **orthogonal** à un **vecteur directeur** de l'autre. Pour ce, on utilise le test du **produit scalaire**.
- On peut prouver qu'un **vecteur normal de l'une** est **colinéaire** à un **vecteur directeur de l'autre**. Pour ce, on utilise le test de colinéarité du **déterminant**.