Préface et avertissements

Rarement, je n'avais eu aussi peu confiance en la réussite d'une classe. Vu le travail fourni, les efforts déployés, l'attention portée, les lacunes déjà anciennes et les résultats obtenus, je prédisais un splendide désastre à l'épreuve de mathématiques du bac série ES. Mais il arrive parfois que même les cancres aient de la chance. Ce fut le cas avec le sujet de cette session de juin 2005. Et il arrive aussi parfois que le travail que vous avez fait durant l'année, que les recommandations que vous avez plus ou moins méchamment prodiguées aboutissent au-delà de tout espoir raisonnable et portent leurs fruits.

Comment se fait-il qu'une classe de terminale ES assez faible dont on attendait assez peu s'en sorte pas trop mal ? Voilà une bonne question dont je doute de connaître la réponse un jour.

Les ayant eu déjà en première, j'ai abandonné très tôt l'idée de les réconcilier avec les mathématiques. Je ne suis certainement pas le bon médiateur. A la place, j'ai plutôt cherché à les préparer à l'épreuve et aux exercices qu'ils pouvaient rencontrer le jour du jugement dernier. Et puis parce que la sueur épargne le sang, j'ai toujours fait en sorte d'être désagréable avec eux quand ils relâchaient leurs efforts. Cela a-t-il marché ? Ou peut-être, les avais-je sous-estimés ? Dans ce cas, ils cachaient bien leur jeu !

Voici donc les énoncés des neuf devoirs surveillés qui jalonnèrent la saison 2004-2005 de cette terminale ES. Je précise que ceux-ci n'abordent pas le programme de la spécialité maths car je ne les avais qu'en enseignement obligatoire.

Jérôme ONILLON, professeur (dés)agrégé de maths finalement très content.

Au sommaire :

Dans la Collection Inquiétantes Confessions,
la taverne de l'Irlandais vous présente

Les chemins d'un miracle

une saison 2004-2005 de devoirs surveillés de maths en terminale ES

Tous les exercices sont originaux et ont été conçus dans l'esprit du bac.

Les devoirs ne sont pas corrigés !

Edition du samedi 16 juillet 2005
Pour que les autres puissent vivre . . .

Devoir Surveillé No.1

Le contexte

Ce premier devoir de deux heures où la calculatrice était autorisée, eut lieu début octobre 2004. Il abordait les limites, les asymptotes et la dérivation au travers de l'étude d'une fonction rationnelle. La seconde partie permettait de parler de primitive.
Tout le mois de septembre 2004 avait été passé à consolider ce qui avait été vu en première. On avait également abordé le théorème des valeurs intermédiaires et les primitives des fonctions usuelles et celles des formes remarquables.
Le problème du début de l'année de Terminale est qu'on ne dispose pas d'assez de matière pour faire un exercice dans l'esprit du bac. Néanmoins ce devoir fut le dernier dans son genre. Par la suite, je devais changer d'optique pour la conception de mes exos.

L'énoncé

Première partie : la revanche du retour des fonctions rationnelles

La fonction f est définie par :

$$f(x)=\frac{4.x^2+14.x+81}{2.x+7}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) A quelle(s) condition(s), f(x) existe-t-il ? En déduire l'ensemble de définition de la fonction f que l'on notera D_f .

b) Dresser le tableau de signe de f(x).

c) Déterminer les limites de f à gauche de $-3,5$, puis à sa droite.
Quelle(s) conséquence(s) graphique(s) cela a-t-il ?

d) Déterminer les limites de f(x) lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.

e) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \in D_f$, on ait :

$$f(x)=a.x+b+\frac{c}{2.x+7}$$

Démontrer que la courbe (C) admet aux voisinages de $+\infty$, puis de $-\infty$ une asymptote Δ dont on déterminera l'équation réduite.
Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ.

f) En dérivant la fonction f, démontrer que pour tout $x \in D_f$, on a :

$$f'(x)=\frac{8.x^2+56.x-64}{(2.x+7)^2}$$

En déduire le tableau de variation de la fonction f.

g) Déterminer une équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_{-5}$ à la courbe (C) au point d'abscisse $x=-5$

h) Dans un repère orthogonal, tracer la courbe (C), toutes ses asymptotes ainsi que sa tangente $\mathcal{T}_{-5}$.
Pour échelle, on prendra en abscisse un carreau ou un centimètre pour une unité. En ordonnée, un carreau ou une unité vaudra dix unités.

Seconde partie : la dérivée d'une de ses primitives

La fonction g est définie pour tout réel x par :

$$g(x)=4.x^3-8$$

a) Déterminer les limites en $-\infty$, puis en $+\infty$ de la fonction g.
Calculer la dérivée $g'(x)$ de la fonction g.
En déduire le tableau de variation de la fonction g.

b) Calculer les images par la fonction g de 0 et 3.
Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α dont on déterminera à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième près.
En déduire le tableau de signe de g(x). On justifiera celui-ci d'une phrase.

La fonction h est définie pour tout réel x par :

$$h(x)=\frac{4.x^3-8}{\sqrt{x^4-8.x+9}}$$

On appelle H une primitive (disons celle sans constante) de h sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

c) Déterminer une expression de $H(x)$.
Que peut-on dire de la fonction h par rapport à la fonction H ?
En déduire le tableau de variation de la fonction H.

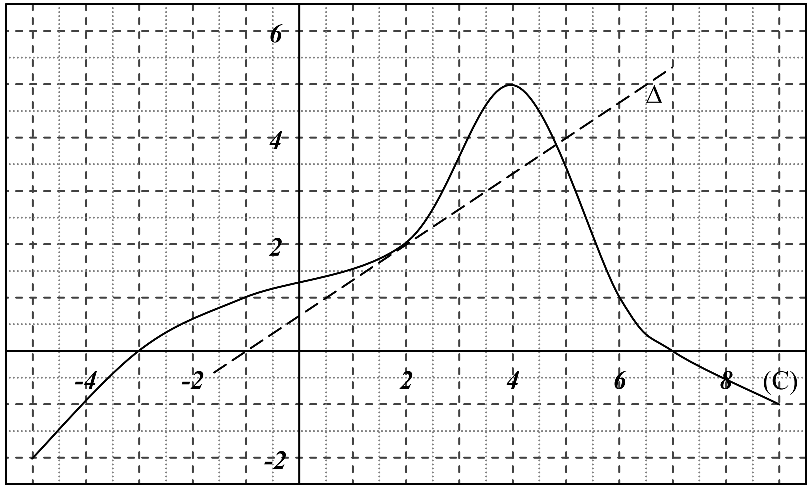
Devoir Surveillé No.2

Le contexte

Ce devoir d'une heure sans calculatrice eut lieu début novembre 2004. Il fut le premier réalisé dans l'optique du bac où les exercices reposant sur la lecture d'un graphique sont légions. Ils se terminent généralement par l'étude d'une composée de la fonction représentée avec les fonctions inverse, logarithme ou exponentielle.

L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-5;9]$. Sa courbe représentative (C) est :



Sur la figure ci-dessus, la droite Δ est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2.
A partir du graphique ci-dessus, répondre sans justification aux questions suivantes :

a) Déterminer les antécédents par la fonction f de -1 .

....

b) Compléter les égalités suivantes :

$f(-1)=$ $f'(2)=$ $f'(4)=$ $f(7)=$

c) Déterminer une valeur approchée du nombre dérivé de la fonction f en $x=5$.

d) Résoudre les inéquations suivantes :

$f(x)<1$ | $f'(x)<0$

La fonction h est définie par :

$$h(x)=\ln[f(x)]$$

e) A quelle(s) condition(s), h(x) existe-t-il ?

....

En déduire l'intervalle de définition de la fonction h.

$D_h=$

f) Déterminer les limites de la fonction h aux bornes de son ensemble de définition. Pour ce faire, on complétera ce qui suit .

Quand x tend vers ....

donc $\lim\limits_{x\to\ldots} h(x)=\ldots$

Quand x tend vers ....

donc $\lim\limits_{x\to\ldots} h(x)=\ldots$

Quelle(s) conséquence(s) cela a-t-il ?

....

g) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h. On indiquera son raisonnement.

h) Déterminer des valeurs approchées au centième près de :

$h(2)\approx$ | $h(4)\approx$

i) A partir des données fournies par le graphique, calculer $h'(2)$.

j) Dresser le tableau de variation de la fonction h. On justifiera celui-ci.
Tracer sur le graphique une courbe pouvant être celle de la fonction h.

Devoir Surveillé No.3

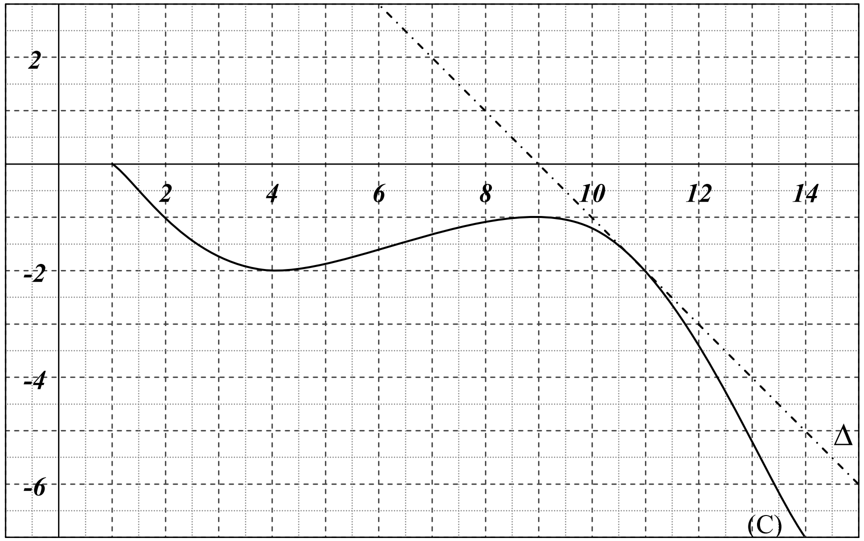
Le contexte

Ce troisième devoir de deux heures où la calculatrice était autorisée, eut lieu à la fin novembre 2004. Il était constitué d'un exercice "graphique" comme lors du précédent devoir et d'un autre traitant de l'étude d'une fonction à base de logarithme.
J'ose prétendre que ces deux exercices sont dans l'esprit du bac nouveau même si le second ressemble plus à un problème de l'ancien bac...

L'énoncé

Première partie : graphiquement et inversement

La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[1;+\infty[$. Sa courbe représentative (C) est la suivante :



De plus, on sait de la fonction f :

- L'image de 1 par la fonction f est 0.
- f est croissante sur l'intervalle $[4;9]$ et décroissante sur les intervalles $[1;4]$ et $[9;+\infty[$.
- Lorsque x tend vers $+\infty$, f(x) tend vers $-\infty$.
- La droite Δ est la tangente à la courbe (C) à son point d'abscisse 11.

a) Compléter sans justification les égalités suivantes :

$f'(4)=$ $\quad f(2)=$ $\quad f'(11)=$ $\quad f(11)=$

b) Déterminer graphiquement les antécédents de -1 par la fonction f.
On appelle g la fonction inverse de la fonction f. Ainsi pour tout x, avons-nous :

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

On note (C') la courbe représentative de cette fonction g.

c) A quelle(s) condition(s) $g(x)$ existe-t-il ?
En déduire l'ensemble de définition de la fonction g.

d) Compléter les égalités suivantes :

$g(4)=$ $\quad g(9)=$ $\quad g(11)=$

e) Dresser le tableau de signe de g(x) sur son ensemble de définition.

f) Déterminer la limite lorsque x tend vers 1 de g(x).
Quelle conséquence cela a-t-il ?

g) Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de g(x).
Quelle conséquence cela a-t-il ?

h) Déterminer les variations de la fonction g sur son ensemble de définition. On justifiera les réponses données.

i) Déterminer les valeurs de $g'(4)$ et $g'(11)$.

j) Sur le graphique ci-contre, tracer une courbe pouvant être la courbe (C'). On fera figurer sur le graphique ses diverses asymptotes et tangentes mises en évidence au cours de l'exercice.

Seconde partie : conflit en logarithmes mineurs

La fonction h est définie pour tout réel x de l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$h(x) = x + \ln(2.x+3) - \ln(x+1)$$

On appelle (C) la courbe représentative de cette fonction h.

a) Déterminer les images par la fonction h de $-\frac{1}{2}$ et 0.

Note : *les réponses seront données sous la forme* $a + b \times \ln(k)$ *où a et b sont deux réels pouvant éventuellement être nuls, et k est un entier naturel.*

b) Déterminer la limite de la fonction h lorsque x tend vers -1.
Quelle conséquence cela a-t-il ?

c) Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\ln(2.x+3) - \ln(x+1)$.
En déduire la limite de h en $+\infty$.

d) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + \ln(2)$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

e) Résoudre dans l'intervalle $]-1;+\infty[$ l'inéquation $\frac{2.x+3}{x+1} > 2$.
En déduire la position relative de la courbe (C) et de son asymptote Δ.

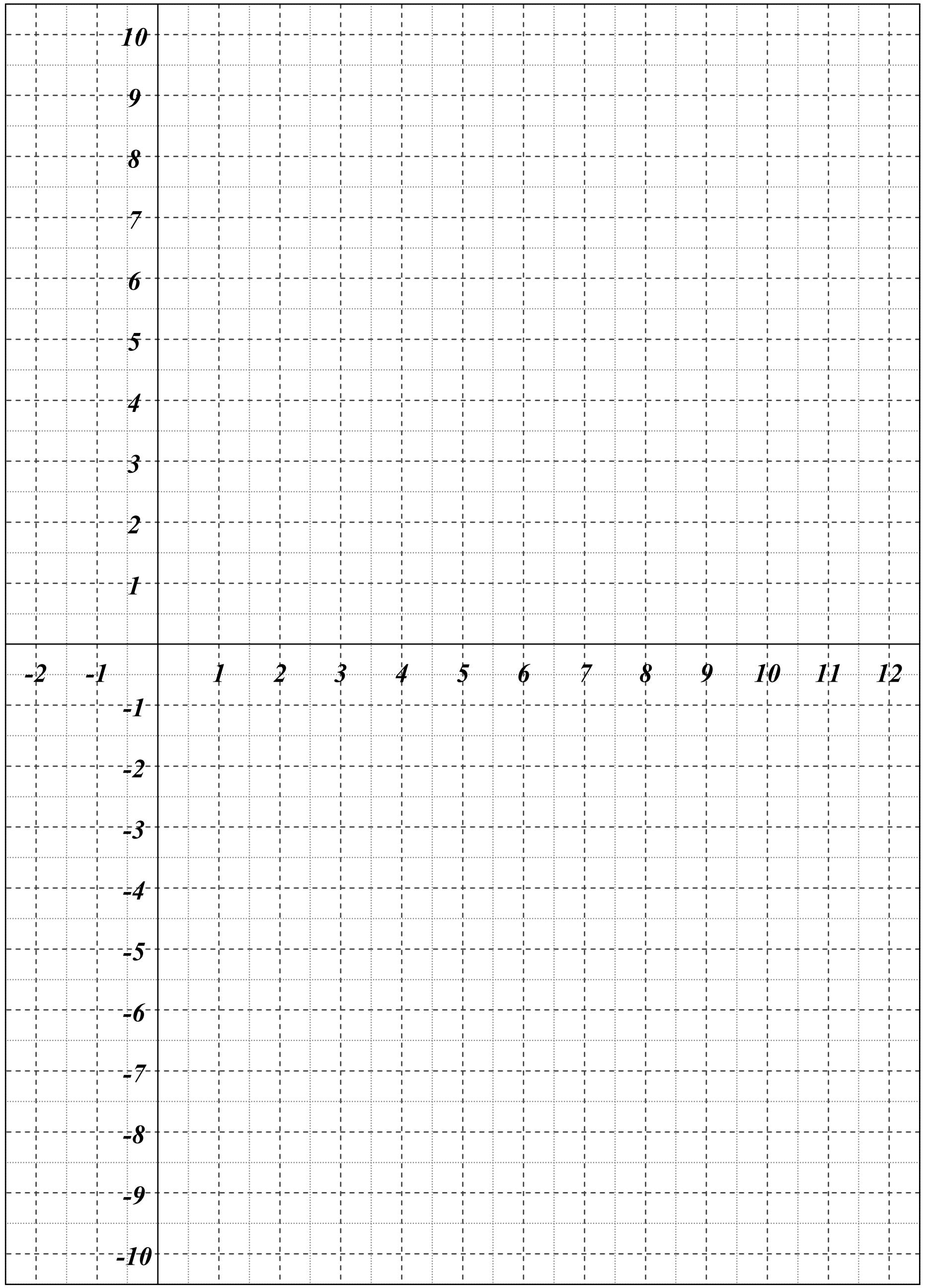
f) Pourquoi la fonction h est-elle dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$?
En dérivant la fonction h, démontrer que pour tout réel $x \in]-1;+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{2.x^2 + 5.x + 2}{(2.x+3).(x+1)}$$

En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

g) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à la courbe (C) à son point A d'abscisse 0.

h) Dans le repère ci-contre, tracer la courbe (C) avec ses diverses asymptotes rencontrées au cours de l'exercice et sa tangente T_0.



Devoir Surveillé No.4

Le contexte

Ce quatrième devoir de trois heures avec calculatrice fut le premier des deux bacs blancs. Il se déroula juste avant les vacances de Noël 2004.
Les statistiques et les probabilités n'ayant pas encore été vues, il fut purement analytique et peut-être trop mathématique, pas assez dans l'esprit du nouveau bac.
Il marqua néanmoins l'introduction du QCM. Beaucoup de personnes pensent qu'il est aisé de répondre à un Questionnaire à Choix Multiples. Le jeu *Qui veut gagner des millions ?* est là pour les démentir. Surtout si une mauvaise réponse entraîne ue perte de points. Dans un tel cas, il faut bien mesurer les risques que l'on prend. Dans un tel cas, rien ne remplace les connaissances, la réflexion et l'expérience.
C'est pour cela que les QCM devaient devenir un de mes axes de travail. A défaut d'en faire des bossus en maths, je les préparais aux exercices qu'ils pouvaient avoir.

L'énoncé

Premier exercice : différend de logarithmes

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln\left(x^2+2.x+2\right)-\ln(x+1)$$

a) Déterminer l'image de 0 par la fonction f.

b) En résolvant l'équation $f(x)=\ln(2,5)$, déterminer les antécédents de $\ln(2,5)$ par f.

c) Déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers -1 (par la droite).
Quelle conséquence cela a-t-il ?

d) Déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

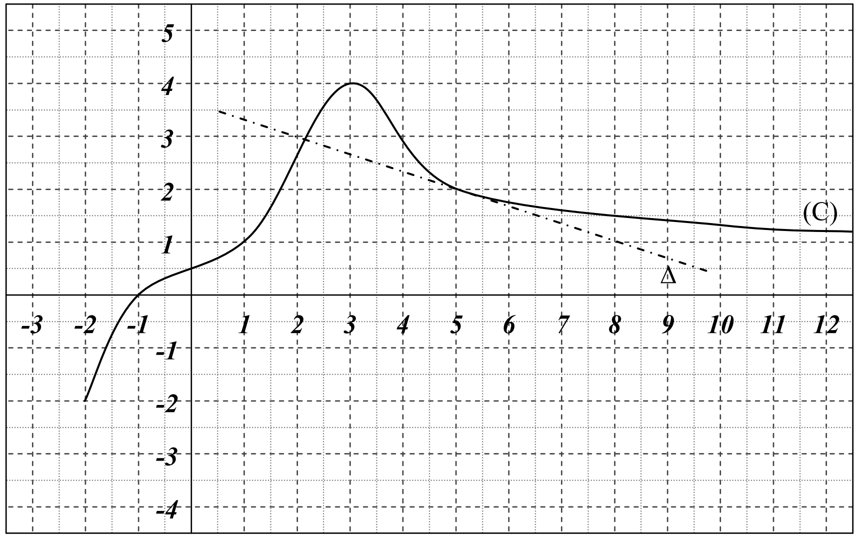
e) En dérivant la fonction f, démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{x.(x+2)}{(x+1).\left(x^2+2.x+2\right)}$$

Conclure en dressant le tableau de variation de la fonction f.

Second exercice : graphique en logarithme

La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;+\infty[$. Sa courbe représentative (C) est la suivante :



De plus, on sait :

- La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-2;3]$ et décroissante sur $[3;+\infty[$.
- Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers 1.
- La droite Δ est la tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse 5.

En utilisant le graphique et les renseignements ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

a) Compléter les égalités suivantes :

$f(-2)=$ $\quad$ $f'(3)=$

$f'(5)=$ $\quad$ $f(5)=$

On appelle g la fonction définie par $g(x)=\ln[f(x)]$. On note (C') la courbe représentative de cette fonction g.

b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g. On justifiera sa réponse.

c) Exprimer $g(0)$, $g(3)$ et $g(5)$ en fonction de ln(2).

d) Déterminer le ou les antécédents de 0 par la fonction g.

e) Déterminer la limite de g(x) lorsque x tend vers -1 par la droite.
Quelle conséquence cela a-t-il ?

f) Déterminer la limite de g(x) lorsque x tend vers $+\infty$.
Quelle conséquence cela a-t-il ?

g) Etablir les variations de la fonction g sur son ensemble de définition. On justifiera celles-ci.

h) Déterminer $g'(5)$.

i) En utilisant les questions précédentes, tracer sur le graphique une courbe pouvant être la courbe (C') ainsi que les diverses droites rencontrées au cours de l'exercice.

Troisième exercice : votre dernier mot...

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte un point et chaque mauvaise en enlève un. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, il est ramené à 0. Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $f(x) = 6.x + 1$ sur $\mathbb{R}$?

$3.x^2 + 1$ $\quad$ $3.x^2 + x + 1$ $\quad$ $6.x^2 + 1$ $\quad$ $6.x^2 + x + 1$

b) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $g(x) = \dfrac{1}{4.x - 8}$ sur l'intervalle $]-\infty; 2[$?

$\dfrac{1}{4}.\ln(4.x - 8)$ $\quad$ $4.\ln(4.x - 8)$ $\quad$ $\dfrac{1}{4}.\ln(8 - 4.x)$ $\quad$ $4.\ln(8 - 4.x)$

c) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $h(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ sur l'intervalle $]-3; +\infty[$?

$2.\sqrt{x+3}$ $\quad$ $-\dfrac{1}{x+3}$ $\quad$ $\dfrac{1}{x+3}$ $\quad$ $2.\ln(x+3)$

d) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $j(x) = \dfrac{3.x}{3.x^2 + 5}$ sur $\mathbb{R}$?

$\ln\left(\sqrt{3.x^2 + 5}\right)$ $\quad$ $\dfrac{1}{3}.\ln(3.x^2 + 5)$ $\quad$ $\ln(3.x^2 + 5)$ $\quad$ $2.\ln(3.x^2 + 5)$

Dernier exercice : primitive à la dérive

La fonction h est définie par :

$$h(x) = \frac{3.x^2 - 16.x + 5}{x - 3}$$

a) Dresser le tableau de signe de h(x).

b) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq 3$, on ait :

$$h(x) = a.x + b + \frac{c}{x - 3}$$

c) Déterminer la primitive H de la fonction h pour laquelle $H(4) = -20$.
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction H. On justifiera sa réponse.

d) Quelle est la dérivée de la fonction H ? On justifiera sa réponse.
En utilisant tout ce qui précède, dresser le tableau de variation de la fonction H.

Devoir Surveillé No.5

Le contexte

Ce cinquième devoir où la calculatrice était autorisée eut lieu début février 2005. Il fut entièrement consacré à l'analyse et à la fonction exponentielle avec une nouvelle fois un QCM conçu par mon cerveau volcanique mais dans l'esprit du bac !
Les idées des deux autres exercices furent prises sur dans les annales du bac ES de la session 2004. Je les mis ensuite à ma sauce. Très épicée et corsée à souhait !
Cette fois-ci, nous étions réellement dans l'esprit du bac... Sauf peut-être pour la fin de la dernière partie. Personne n'est parfait !

L'énoncé

Première partie : souvenirs d'exponentielles

La fonction h est définie et dérivable sur ℝ. On sait qu'elle est de la forme :

$$h(x)=\left(a.x^2+b\right).e^{c.x}$$

où a, b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer.
De plus, on sait de sa courbe représentative (C) :

- (C) passe par le point de coordonnées $(0;2)$.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse 0 est égal à -4.
- La tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse 2 est horizontale.

a) Calculer la dérivée $h'(x)$ en fonction des réels a, b et c.
Déterminer les réels a, b et c.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction h est définie sur ℝ par :

$$h(x)=\left(2-x^2\right).e^{-2.x}$$

b) Déterminer les limites de h(x) lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.
En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes à la courbe (C).

c) Dresser le tableau de la variation de la fonction h.

Seconde partie : le vrai à coups de faux

La fonction f est définie et dérivable sur ℝ. Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		4		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	2	↘	0

On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f.

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Aucune justification n'est demandée. Une affirmation ne peut être que vraie ou fausse.
Une bonne réponse rapporte 0,75 points alors qu'une mauvaise en enlève autant. Une absence de réponse n'enlève, ni ne rapporte aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.

0 a exactement quatre antécédents par la fonction f.	**Vrai**	**Faux**
$f'(-3)$ peut être égal à -1.	**Vrai**	**Faux**
La courbe (C) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.	**Vrai**	**Faux**
La fonction $g(x)=e^{f(x)}$ n'est pas définie sur l'intervalle $[-3;-1]$.	**Vrai**	**Faux**
La fonction $g(x)=e^{f(x)}$ est toujours du même signe sur son ensemble de définition.	**Vrai**	**Faux**
A l'instar de la fonction exponentielle, la fonction $g(x)=e^{f(x)}$ est toujours croissante sur son ensemble de définition.	**Vrai**	**Faux**

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{f(x)} = 0$ **Vrai** **Faux**

La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à la courbe représentant la fonction $g(x) = e^{f(x)}$. **Vrai** **Faux**

Dernière partie : de dérivée en primitive

La fonction j est définie par :

$$j(x) = \frac{2.e^x - 1}{e^x + 1}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Pourquoi l'ensemble de définition de la fonction j est-il $\mathbb{R}$?

b) Déterminer les limites de j(x) lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.
En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes à la courbe (C).

c) Pourquoi la fonction j est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
Démontrer que pour tout réel x :

$$j'(x) = \frac{3.e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$$

Dresser le tableau de variation de la fonction j.

d) Déterminer l'équation réduite de la droite T_0, tangente à la courbe (C) en son point d'abscisse 0.

e) Déterminer par le calcul le ou les antécédents de 0 par la fonction j. On demande les valeurs exactes de ceux-ci.
En déduire le tableau de signe de j(x). On justifiera celui-ci d'une phrase.

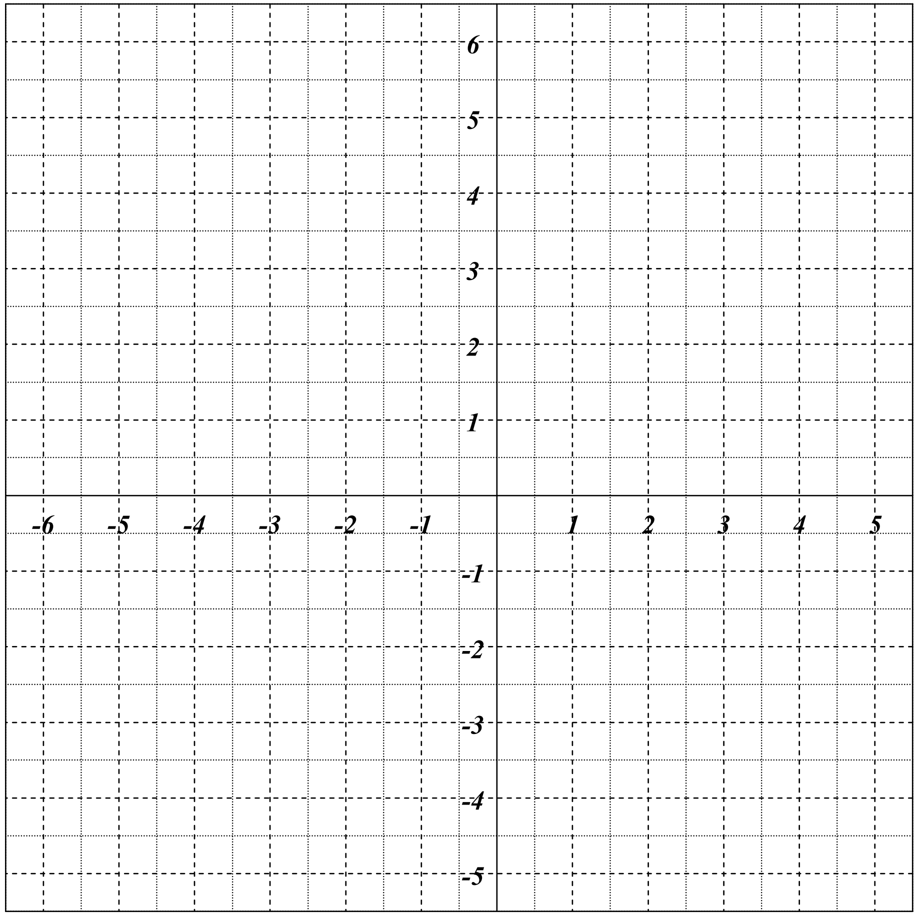
f) Dans le repère orthonormé ci-contre, tracer la courbe (C) ainsi que toutes ses asymptotes et la tangente T_0.

On appelle J la primitive de la fonction j sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ telle que $J(0) = 3$.

g) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel x, on ait :

$$j(x) = a + \frac{b.e^x}{e^x + 1}$$

Déterminer une expression de la fonction J.
Dresser le tableau de variation de la fonction J.



Devoir Surveillé No.6

Le contexte

Ce sixième devoir d'une heure eut lieu à la fin février 2005. Il portait sur toute la partie analyse à l'exception notable des intégrales qui n'avaient pas encore été vues. La calculatrice était interdite (ce sont de vraies encyclopédies).
Ce devoir reposait sur quatre QCM issus de mon volcanique cerveau mais conçus dans l'esprit du bac. Un vrai concept qui fut vite corrigé ! Il est à noter que globalement les résultats obtenus furent comparables à ceux des autres devoirs même si certains eurent des surprises bonnes ou mauvaises.

L'énoncé

Première partie : ces connaissances qui tournent cours

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Aucune justification n'est demandée. Une affirmation ne peut être que vraie ou fausse.
Une bonne réponse rapporte un point alors qu'une mauvaise en enlève autant. Une absence de réponse n'enlève, ni ne rapporte aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.

A l'instar de sa dérivée, la fonction logarithme népérien notée ln est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.	Vrai	Faux
La fonction exponentielle est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.	Vrai	Faux
Pour tout réel x positif, $\ln(x+2)=\ln(x).\ln(2)$	Vrai	Faux
La fonction logarithme népérien notée ln est sa propre dérivée.	Vrai	Faux
L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe de la fonction exponentielle au voisinage de $-\infty$.	Vrai	Faux
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{e^x}=+\infty$	Vrai	Faux

Seconde partie : trois questions en vrac

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1,5 points et chaque mauvaise en enlève autant. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) Parmi les propositions suivantes, laquelle est la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction $f(x)=-2.x+1+\dfrac{\ln(x)}{x}$?

$-\infty$	-1	0	$+\infty$

b) Parmi les propositions suivantes, laquelle est la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction $g(x)=\dfrac{e^{-x}+3}{2.x-1}$?

$-\infty$	-3	0	$+\infty$

c) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction $h(x)=\sqrt{4.x^2+1}$?

$\sqrt{8.x}$	$\dfrac{1}{2.\sqrt{8.x}}$	$\dfrac{1}{2.\sqrt{4.x^2+1}}$	$\dfrac{4.x}{\sqrt{4.x^2+1}}$

Troisième partie : souviens-toi des fonctions rationnelles

La fonction f est définie pour tout réel x de l'ensemble $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3.x^2-4.x-7}{2.x-4}$$

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1,5 points et chaque mauvaise en enlève autant. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la ou les réponse(s) choisie(s). Aucune justification n'est demandée.

a) Parmi les propositions suivantes, laquelle est la limite de la fonction f lorsque x tend vers 2 par la gauche ?

$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $\frac{3}{2}$ $\qquad$ $+\infty$

b) Parmi les propositions suivantes, laquelle est la limite de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$?

$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $\frac{3}{2}$ $\qquad$ $+\infty$

c) On sait que la dérivée de la fonction f est donnée par :

$$f'(x)=\frac{3.\left[x^2-4.x+5\right]}{2.(x-2)^2}$$

Parmi les affirmations suivantes, entourer les deux qui sont vraies ?

f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2[$ $\qquad$ f est croissante sur l'intervalle $]-\infty;2[$

f est décroissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$ $\qquad$ f est croissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$

Dernière partie : ainsi vont ces primitives

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte deux points et chaque mauvaise en enlève autant. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $f(x)=3.x^2-1$ sur $\mathbb{R}$?

$6.x$ $\qquad$ x^3-x+7 $\qquad$ $3.x^3-x$ $\qquad$ $9.x^3-x+1$

b) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $h(x)=e^{-2.x+3}$ sur $\mathbb{R}$?

$-2.e^{-2.x+3}$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}.e^{-2.x+3}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}.e^{-2.x+3}$ $\qquad$ $e^{-2.x+3}$

c) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $j(x)=\frac{e^{2.x}}{e^{2.x}+1}$ sur $\mathbb{R}$?

$e^{2.x}.\ln\left(e^{2.x}+1\right)$ $\qquad$ $\frac{e^{2.x}}{2}.\ln\left(e^{2.x}+1\right)$ $\qquad$ $\ln\left(e^{2.x}+1\right)$ $\qquad$ $\ln\left(\sqrt{e^{2.x}+1}\right)$

Devoir Surveillé No.7

Le contexte

Ce septième devoir d'une heure eut lieu à la mi-mars 2005. Il portait sur les probabilités. Il s'agissait en fait d'un gros exercice de type bac qui abordait à peuprès tous les points évoqués par le programme officiel dans ce domaine. La calculatrice était autorisée.

L'énoncé

La Blancoise des Jeux a décidé de lancer un nouveau de hasard : le jeu Kiranfoo.
Dans un premier temps, après avoir misé, le joueur lance une pièce pipée ou déséquilibrée. La probabilité qu'il obtienne face est de 0,7.
S'il obtient face, il tire une boule dans une première urne que nous appellerons **(1)**. Cette urne **(1)** contient trois boules vertes, deux blanches et cinq rouges.
S'il obtient pile, il tire une boule dans une seconde urne que nous appellerons **(2)**. Cette urne **(2)** contient trois boules vertes, quatre blanches et trois rouges.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher et ont la même probabilité d'être tirées.
Ce jeu donne lieu à un gain. Si le joueur tire une boule verte, il gagne alors deux euros. S'il tire une blanche, il gagne un euro. Par contre, une rouge ne lui rapporte rien.
On appelle :

- F l'événement "la pièce a donné face".
- V l'événement "la boule tirée est verte".
- B l'événement "la boule tirée est blanche".
- R l'événement "la boule tirée est rouge".

Sauf mention contraire, on pourra donner les probabilités sous la forme décimale.

a) Faire un arbre pondéré le plus complet possible représentant l'expérience aléatoire décrite ci-dessus. Une grande attention sera portée aux commentaires apportés.

b) Déterminer par le calcul les probabilités des événements V, B et R. Une grande attention sera portée aux justifications fournies.

c) Démontrer que les événements F et V sont indépendants.

d) La boule qui vient d'être tirée est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne **(1)** ? La probabilité sera donnée sous la forme d'une fraction irréductible.

e) Dans un excès de générosité, la Blancoise des Jeux a décidé que son jeu devait être équitable. A combien doit-elle fixer la mise ?

f) Un joueur joue cinq fois de suite au jeu Kiranfou. On considère qu'il gagne à une partie lorsqu'il tire une boule verte. Chaque partie est indépendante de l'autre.
Quelle est la probabilité qu'il ne perde qu'une seule fois ?
Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?
Une grande attention sera fournie à la rédaction et aux explications fournies.

Devoir Surveillé No.8

Le contexte

Ce huitième devoir de trois heures constitua le second bac blanc. Il eut lieu début avril 2005 et portait sur tout le programme à l'exception des statistiques à deux variables. Même s'ils l'ont été par mes soins, tous les exercices furent conçus avec l'esprit du bac. Les calculatrices étaient autorisées. Heureusement car tout était dessus !

L'énoncé

Premier exercice : le magot des fagots, un jeu très improbable

Soucieuse d'accroître les dividendes de ses actionnaires pour l'année fiscale 2005, la Blancoise de Jeux a décidé de lancer un nouveau jeu de grattage : le magot des fagots. Le joueur achète pour un euro un ticket sur lequel il y a trois cases à gratter. Les contenus de ces trois cases sont indépendants les uns des autres.
Une case contient soit le symbole ***G*** comme gagné, soit le symbole ***P*** comme perdu. La probabilité qu'une case contienne le symbole ***G*** est égale à $\frac{1}{3}$.

On appelle X le nombre de symboles ***G*** que contient un ticket acheté par un joueur. Dans le présent exercice, les probabilités seront données sous la forme de fractions irréductibles. Une grande attention sera portée à la rédaction des réponses.

a) Faire un arbre décrivant la situation d'un ticket. En déduire la loi de probabilité de X.

Dans un premier temps, la Blancoise de Jeux décide qu'un ticket rapportera au joueur autant d'euros qu'il y aura de symboles ***G*** sur celui-ci.

b) Sous ces conditions, le jeu est-il rentable pour la Blancoise des Jeux ?

La direction de cette entreprise d'extraction de richesses veut dégager un bénéfice d'au moins 0,20€ par ticket vendu. Elle décide que les tickets comportant aucun ou un symbole ***G*** ne rapporteront désormais plus rien aux joueurs. Par contre, un ticket comportant trois ***G*** rapportera le double de ce que rapportera un ticket en ayant deux.

c) Sous ces conditions, déterminer le gain maximal que pourra rapporter à son acheteur un ticket ayant trois symboles ***G***. Le ticket de jeu est toujours vendu un euro.

d) Quatre personnes ne se connaissant pas achètent chacune un ticket de manière totalement indépendante. On considère qu'un ticket est gagnant lorsqu'il contient deux ou trois ***G***. Dans la présente question, les probabilités pourront être données sous la forme de nombres décimaux arrondis au millième près.
Quelle est la probabilité qu'exactement deux personnes achètent un ticket gagnant ?
Quelle est la probabilité qu'au moins une des quatre personnes achète un ticket perdant ?

Second exercice pour les non-spécialité : divine concurrence !

Il en va des religions comme des entreprises : elles perdent ou gagnent des adeptes ou des clients. Seules les plus performantes survivent !
L'Eglise euclidienne comptait en l'an 2000 cinq millions de croyants. Mais ce mouvement religieux perd chaque année 5% de ses effectifs par rapport à l'année précédente.
On appelle E_n le nombre de fidèles de cette église en l'an $2000+n$.
La congrégation de la géométrique analytique comptait en l'an 2000 un million de membres. Par une vigoureuse campagne de promotion, cette entreprise augmente ses effectifs de 5% d'une année sur la suivante.
On appelle G_n le nombre de fidèles de ce mouvement en l'an $2000+n$.
Les suites (E_n) et (G_n) ont donc pour premiers termes respectifs :

$$E_0 = 5000000 \qquad G_0 = 1000000$$

a) Calculer E_1 et E_2.
En déduire pour tout entier naturel n l'expression de E_{n+1} en fonction de E_n.
Quelle est la nature de la suite (E_n) ? On précisera sa raison.
En déduire l'expression de E_n en fonction de n.
Combien l'Eglise euclidienne comptera-t-elle de fidèles en 2007 ?

b) Calculer G_1 et G_2
En déduire pour tout entier naturel n l'expression de G_{n+1} en fonction de G_n.
Quelle est la nature de la suite (G_n) ? On précisera sa raison.
En déduire l'expression de G_n en fonction de n.
Combien la congrégation de la géométrie analytique comptera-t-elle d'adeptes en 2007 ?

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$5\times 0,95^x < 1,05^x$$

Indication : *on pourra utiliser la fonction logarithme qui est croissante sur* $]0;+\infty[$.

En déduire l'année à partir de laquelle la congrégation de la géométrique analytique dépassera l'Eglise euclidienne en nombre de fidèles.

Troisième exercice : exponentielle et affine

La fonction h est définie pour tout réel x par :

$$h(x) = e^{-3.x} + 3.x - 2$$

a) Calculer l'image de 0 par la fonction h.

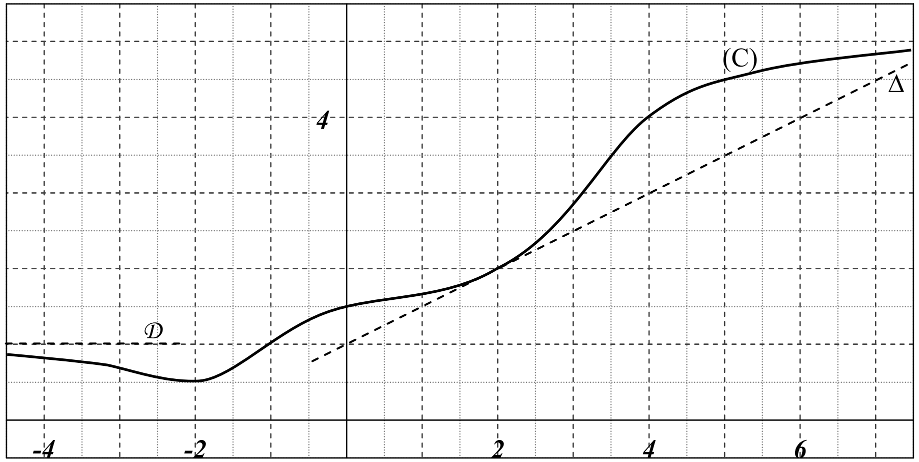
b) Déterminer les limites de la fonction h lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-3.x} - 1 > 0$
Calculer la dérivée $h'(x)$ de la fonction h.
Dresser le tableau de variation de la fonction h. On justifiera celui-ci.

d) Calculer la valeur moyenne de la fonction h sur l'intervalle $[0;2]$. On en donnera d'abord la valeur exacte, puis une valeur approchée arrondie au centième.

Dernière exercice : graphiquement vôtre !

La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$. Sa courbe représentative (C) est la suivante :



De plus, on sait de cette fonction f :

- f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$ et croissante sur $]-2;+\infty[$.
- La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
- La droite Δ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. C'est aussi la tangente à cette courbe (C) en son point d'abscisse 2.

On note g la fonction définie par :

$$g(x) = \ln[f(x)]$$

On appelle (C') sa courbe représentative.

a) Par lecture graphique, déterminer :

$f'(-2)$ $\qquad$ $f(0)$ $\qquad$ $f'(2)$

b) Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$. On justifiera sa réponse.
Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$. On justifiera sa réponse.

c) Pourquoi la fonction g est-elle également définie sur $]-\infty;+\infty[$?

d) En utilisant le graphique, exprimer en fonction de ln(2) :

$g(-2)$ $\qquad$ $g(2)$ $\qquad$ $g(4)$

e) Déterminer les limites de la fonction g lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.
Quelle(s) conséquence(s) graphique(s) cela a-t-il sur la courbe (C') ?

f) Dresser son tableau de variation de la fonction g. On justifiera celui-ci.

g) En utilisant le graphique précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$g(x) = 0$$

En déduire le tableau de signe de g(x).

h) Déterminer $g'(-2)$ et $g'(2)$.

i) A l'aide du graphique, déterminer un encadrement de l'intégrale $\int_0^2 f(x).dx$ par deux entiers consécutifs.

Devoir Surveillé No.9

Le contexte

Ce neuvième et dernier devoir de deux heures eut lieu à la fin mai 2005. Il était constitué d'un gros exercice de statistiques à deux variables traitant de problèmes d'ajustement (c'est la machine qui fait tout le boulot), ainsi que d'un gigantesque QCM. Là encore, j'ose prétendre que ces deux exercices ont été conçus dans l'esprit du bac. Même s'ils l'ont été par mes soins.
La calculatrice était bien entendu autorisée.

L'énoncé

Première partie : à bout de souffle ?

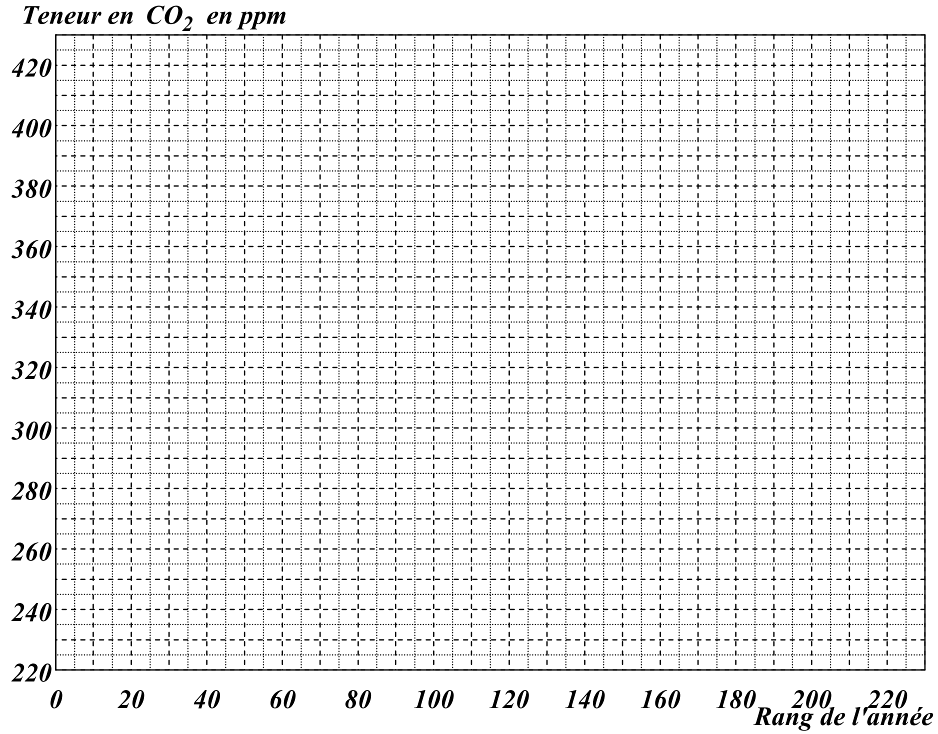
L'un des problèmes majeurs des temps à venir sera le réchauffement climatique causé en partie par l'augmentation de la teneur en dioxyde de carbone ou CO_2 de l'atmosphère terrestre. Aussi est-il important de pouvoir modéliser ce phénomène.
Le tableau ci-dessous indique la teneur en CO_2 observée depuis le début de l'ère industrielle fixé en 1850. Dans ce dernier :

- x_i désigne le rang de l'année à partir de 1850.
- y_i désigne la teneur en CO_2 exprimée en parties par million ou ppm.

Année	1850	1900	1950	1990
Rang de l'année x_i	0	50	100	140
Teneur en CO_2 y_i	275	290	315	350

a) Représenter dans le repère orthogonal ci-contre le nuage de points $(x_i ; y_i)$.

On veut modéliser l'évolution de la teneur de CO_2 par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points afin de faire des prévisions. Plusieurs types de fonctions sont envisageables. Parmi elles, les fonctions affines.



b) Pourquoi un ajustement affine semble-t-il justifié ?
A l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = a.x + b$. Le coefficient a sera arrondi au centième près et b à l'unité près.
Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique ci-contre.

c) En utilisant le modèle fourni par la droite de régression $\mathcal{D}$:

- Déterminer par le calcul la teneur en CO_2 prévue en l'an 2010.
- Déterminer par le calcul l'année durant laquelle la teneur en CO_2 dépassera les 400 ppm.

On souhaite modéliser l'évolution de la teneur en CO_2 y par une fonction exponentielle f de la forme :

$$y = f(x) = 250 + B \times e^{A.x}$$

où A et B sont deux coefficients à déterminer.

c) On pose $z_i = \ln(y_i - 250)$. Compléter le tableau suivant :

Rang de l'année x_i	0	50	100	140
$\mathbf{z_i = \ln(y_i - 250)}$				

A l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrées, sous la forme $z = c.x + d$. Le coefficient c sera arrondi au centième près et d au dixième près.
En déduire l'expression de la fonction f. On arrondira le coefficient B au dixième près.
Tracer la courbe (C) représentant la fonction f sur le graphique précédent.

d) En utilisant le modèle fourni par la fonction f :

- Déterminer par le calcul la teneur en CO_2 prévue en l'an 2010.
- Déterminer par le calcul l'année durant laquelle la teneur en CO_2 dépassera les 400 ppm.

e) Lequel des deux modèles affine $\mathcal{D}$ ou exponentielle f vous semble le plus pertinent ? On expliquera sa réponse.

f) Calculer le taux d'augmentation décennal (sur dix ans) de la teneur en CO_2 entre 1950 et 1990.
Quelle sera la teneur en CO_2 en 2010 si les conditions restent les mêmes ?

Seconde partie : votre dernier mot

La fonction f est définie et dérivable sur son ensemble de définition $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$. Son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	4	↘	$-\infty$

On appelle (C) sa courbe représentative.

Dans chacune des huit questions suivantes, cochez la seule des trois ou quatre propositions qui est vraie. Une bonne réponse rapporte un point, une mauvaise en enlève 0,5. Une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à l'exercice est négatif, il est remis à zéro. Aucune justification n'est demandée.

a) Combien l'équation $f(x) = 1$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

Aucune Une Deux Trois

b) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est nécessairement vraie ?

f' négative sur $[0;2]$ f' est positive sur $[0;2]$

f' est décroissante sur $[0;2]$ f' est croissante sur $[0;2]$

c) Parmi les équations de droites suivantes, laquelle est celle d'une asymptote de la courbe (C) ?

$y = -1$ $x = 1$ $y = 2.x - 3$ $y = -x + 5$

d) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln[f(x)] = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln[f(x)] = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln[f(x)] = +\infty$

e) Parmi les affirmations suivantes, laquelle est vraie ?

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{f(x)} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{f(x)} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{f(x)} = +\infty$

f) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$?

$\sqrt{f(x)}$ $\dfrac{1}{f(x)}$ $\ln[f(x)]$ $e^{f(x)}$

g) Parmi les inégalités suivantes, laquelle est vraie ?

$\int_3^5 f(x).dx < 2$ $\qquad 2 \leq \int_3^5 f(x).dx \leq 4$ $\qquad 4 < \int_3^5 f(x).dx$

h) F est une primitive de f sur l'intervalle $[0;2]$. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est nécessairement vraie ?

F négative sur $[0;2]$ F est positive sur $[0;2]$

F est décroissante sur $[0;2]$ F est croissante sur $[0;2]$