Quelques mots d'introduction...

Durant cette année difficile et très pénible, j'ai exercé mon peu de compétences dans une seconde et une terminale S. Le présent document reprend l'intégralité de tous les devoirs surveillés accompagnés de leurs corrigés qui ont été donnés dans cette dernière classe.
Nous avertissons notre aimable lecteur qu'il entreprend la lecture de ce recueil à ses propres risques et périls. Les propos tenus et les exercices proposés dans le présent document sont pédagogiquement très incorrects et n'engagent que leur auteur.
Les devoirs donnés peuvent paraître trop longs vu le temps donné. Il doit être précisé que le barême a souvent compté plus des 20 points normaux. Plus il y a de questions, plus les élèves peuvent montrer leurs compétences.
Durant cette année de terminale, j'ai donné trois formats de devoir : des devoirs dits express d'une durée d'une heure, des devoirs surveillés de deux heures et deux bac blancs de quatre heures. Le format court d'une heure m'a paru idéal pour imposer à cette désespérante TS un rythme de travail qu'elle rechignait à adopter.
Tout au long de l'année, mon intention a été de préparer les élèves aux exercices qu'ils pourraient avoir le jour fatidique. Car malgré ce que beaucoup en disent, ce qui motive les élèves de terminale est leur bac en fin d'année.
Beaucoup des exercices donnés sont des adaptations plus ou moins fidèles d'exercices donnés au bac. D'autres sont des créations. A chacun d'en faire l'usage qui lui plaira...

Jérôme ONILLON

Au sommaire :

Devoir Express No.1 2
Devoir Express No.2 6
Devoir Surveillé No.1 10
Devoir Express No.3 16
Devoir Express No.4 19
Devoir Surveillé No.2 22
Devoir Express No.5 28
Le premier bac blanc 32
Devoir Express No.6 40
Devoir Surveillé No.3 43
Devoir Express No.7 49
Devoir Express No.7 49
Le deuxième bac blanc 53
Devoir Surveillé No.4 62
Devoir Surveillé No.4 62

Dans la collection Inquiétantes confessions,
la Taverne de l'Irlandais vous présente

Vestiges mathématiques d'une terminale scientifique

L'intégralité des devoirs de maths d'une saison 2005-2006

Tous les exercices de ce recueil sont soient des adaptations d'exercices du bac S, soient des créations pures conçues et imaginées par Jérôme ONILLON, professeur de maths de plus en plus désagrégé.

100%

La taverne de l'Irlandais
http://www.tanopah.com

Edition du mercredi 21 juin 2006
Le pire n'est jamais sûr...
Et pourtant le voilà !

Devoir Express No.1

Le contexte

Un devoir express est un format court, une évaluation d'une heure dont le but est de tester les élèves sur des points précis du cours ou certaines compétences directes. C'est un format intermédiaire entre les gros DS de deux heures et les interros de vingt minutes.
Un de leurs objectifs était de donner un rythme de travail à une classe qui n'en avait plus. Mais ça, faut pas le dire !
Ce DE-1 fut fait sans calculatrice et portait sur tout ce que l'on peut attendre en début d'année de TS : dérivation, limites et asymptotes, continuité. Il eut lieu à la mi-septembre 2005.
Il constitua le premier contact des élèves avec les QCM que l'on retrouve régulièrement dans les sujets de bac. Différence avec les miens, ils sont beaucoup moins difficiles.

L'énoncé

Première partie : des questions à la dérive (7,5 points)

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1,5 points et chaque mauvaise en enlève 0,75. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est la dérivée de $f(x) = 2.x^2 - 4.x + 4$?

$2.x - 4$ $\quad$ $2.x + 4$ $\quad$ $4.x - 4$ $\quad$ $4.x + 4$

b) Parmi les intervalles suivants, lequel est l'ensemble de dérivabilité de la fonction $f(x) = \sqrt{4 - 2.x}$?

$]-\infty; 2[$ $\quad$ $]-\infty; 2]$ $\quad$ $]2; +\infty[$ $\quad$ $[2; +\infty[$

c) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction $f(x) = 2.x.\sqrt{x}$?

$\dfrac{1}{3.\sqrt{x}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $\sqrt{x}$ $\quad$ $3.\sqrt{x}$

d) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{2.x + 1}$?

$\dfrac{1}{2.\sqrt{2.x+1}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{\sqrt{2.x+1}}$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{2.x+1}}{2}$ $\quad$ $2.\sqrt{2.x+1}$

e) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est la dérivée de $f(x) = \dfrac{3.x+1}{2.x-1}$?

$-\dfrac{5}{(2.x-1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{5}{(2.x-1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{12.x-1}{(2.x-1)^2}$ $\quad$ $\dfrac{-12.x+1}{(2.x-1)^2}$

Seconde partie : des questions à la limite (4,5 points)

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1,5 points et chaque mauvaise en enlève 0,75. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) Quelle est la limite de la fonction $f(x) = \dfrac{4.x-1}{2.x^2+2}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$

b) Quelle est la limite de la fonction $f(x) = \dfrac{2.x-7}{x^2-4}$ lorsque x tend vers 2 par la gauche?

$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$

c) Quelle est la limite de la fonction $f(x) = \dfrac{6.x^2+x-1}{3.x^2+2}$ lorsque x tend vers $-\infty$?

$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$

Dernière partie : un petit problème (9 points)

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1,5 points et chaque mauvaise en enlève 0,75. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse ou les réponses choisies. A l'exception de la question f, aucune justification n'est demandée.

La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble $\left]-\infty;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.
On appelle (C) la courbe représentant cette fonction f.
Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f			3		‖ $+\infty$		
		↗		↘	‖	↘	
	$-\infty$				$-\infty$ ‖		0

a) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions dans $\left]-\infty;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$?

Aucune | Une | Deux | Trois

b) Parmi les égalités suivantes, la ou lesquelles sont assurément fausses ?

$f'(-7)=-1$ | $f'(-1)=3$ | $f'(0)=-2$

c) Parmi les équations de droites suivantes, une seule est celle d'une asymptote à la courbe (C). Laquelle est-ce ?

$x=-1$ | $y=2$ | $y=-x+2$ | $y=x+2$

La fonction h est définie sur ℝ par :

$$\begin{cases} \text{Si } x\neq 2 \text{ alors } h(x)=1+\dfrac{1}{f(x)} \\ h(2)=2 \end{cases}$$

d) Quelle la limite de la fonction h lorsque x tend vers $-\infty$?

$-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$

e) Quelle la limite de la fonction h lorsque x tend vers $+\infty$?

$-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$

f) La fonction h est-elle continue en 2 ? On justifiera sa réponse. Une bonne réponse non justifiée sera considérée comme nulle.

Non | Oui

....
....
....
....
....
....
....

Le corrigé

Première partie : des questions à la dérive

a) La fonction $f(x)=2.x^2-4.x+4$ est une somme de fonctions dérivables sur ℝ.

$$f'(x)=\left(2.x^2-4.x+4\right)'=\left(2.x^2\right)'+\left(-4.x\right)'+\left(4\right)'=4.x-4+0=4.x-4$$

b) Pour que la racine d'une fonction u soit dérivable, il faut et il suffit que u soit dérivable et également qu'elle soit strictement positive.
La fonction $u(x)=4-2.x$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, seule sa positivité pose question.

$$u(x) \text{ est positif} \Leftrightarrow 4-2.x>0 \Leftrightarrow 4>2.x \Leftrightarrow 2>x \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;2\right[$$

c) La fonction $f(x)=2.x.\sqrt{x}$ est le produit des fonctions $u(x)=2.x$ et $v(x)=\sqrt{x}$ dérivables sur $\left]0;+\infty\right[$. Leurs dérivées respectives sont $u'(x)=2$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$.

Donc : $f'(x)=u'.v+v'.u=2\times\sqrt{x}+\dfrac{1}{2.\sqrt{x}}\times 2.x=2.\sqrt{x}+\dfrac{2.x}{2.\sqrt{x}}=2.\sqrt{x}+\sqrt{x}=3.\sqrt{x}$

d) Comme la fonction $u(x)=2.x+1$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $\left]-0,5;+\infty\right[$ alors il en va de même pour sa racine $f(x)=\sqrt{u(x)}$. De plus :

$$f'(x)=\frac{u'}{2.\sqrt{u}}=\frac{2}{2.\sqrt{2.x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2.x+1}}$$

e) Les fonctions $u(x)=3.x+1$ et $v(x)=2.x-1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-0,5\}$. Leurs dérivées respectives sont $u'(x)=3$ et $v'(x)=2$.

Comme le dénominateur v ne s'annule pas sur cet ensemble alors leur quotient $f=\dfrac{u}{v}$ y est aussi dérivable. Par suite :

$$f'(x)=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}=\frac{3\times(2.x-1)-2\times(3.x+1)}{(2.x-1)^2}=\frac{6.x-3-6.x-2}{(2.x-1)^2}=\frac{-5}{(2.x-1)^2}$$

Seconde partie : des questions à la limite

a) Le quotient $f(x)=\dfrac{4.x-1}{2.x^2+2}$ est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$ sous l'écriture qui nous est proposée.
Pour lever cette indétermination, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur du quotient f par leurs termes les plus forts.
Pour tout réel x non nul, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{x.\left[4-\frac{1}{x}\right]}{x^2.\left[2+\frac{2}{x^2}\right]}=\frac{x}{x^2}\times\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{x}\times\frac{4-\frac{1}{x}}{2+\frac{2}{x^2}}\xrightarrow{x\to+\infty}0^+\times\frac{4-0^+}{2+0^+}=0$$

<u>Conclusion :</u> la limite en $+\infty$ de la fonction f est 0. Donc l'axe des abscisses (qui a pour équation $y=0$) est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

b) Lorsque x tend vers 2 par la gauche :

- Le numérateur $2.x-7$ tend vers $2\times2-7=-3$.
- Le dénominateur x^2-4 tend vers 0^- car il est négatif à gauche de 2.
  En effet, le tableau de signe de $x^2-4=(x+2).(x-2)$ est :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc le quotient f(x) tend vers $\dfrac{-3}{0^-}=+\infty$.
<u>Conséquence :</u> la droite verticale d'équation $x=2$ est une asymptote à la courbe de f.

c) A première vue, la fonction rationnelle $f(x)=\dfrac{6.x^2+x-1}{3.x^2+2}$ est en $-\infty$ une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Pour lever cette incertitude, factorisons les numérateur et dénominateur de f par leurs termes les plus forts. Pour tout réel non nul x, nous avons :

$$f(x)=\frac{6.x^2+x-1}{3.x^2+2}=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{6+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{6+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}\xrightarrow{x\to-\infty}\frac{6+0^--0^+}{3+0^+}=2$$

<u>Conclusion :</u> la limite en $-\infty$ de la fonction f est 2. Donc la droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

Dernière partie : un petit problème

a) La fonction f est dérivable donc continue sur l'ensemble $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

➲ Sur $]-\infty;-1[$, elle croît strictement de $-\infty$ à 3. Donc l'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans cet intervalle.

➲ De même, sur l'intervalle $[-1;2[$, f décroît strictement de 3 à $-\infty$. Par conséquent, l'équation $f(x)=0$ a une deuxième solution dans cet intervalle.

➲ Sur l'intervalle $]2+\infty[$, f décroît strictement de $+\infty$ à 0. Mais cette dernière limite n'est jamais atteinte car la décroissance est stricte ! L'équation $f(x)=0$ n'a donc aucune solution dans cet intervalle.

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ a exactement deux solutions dans $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

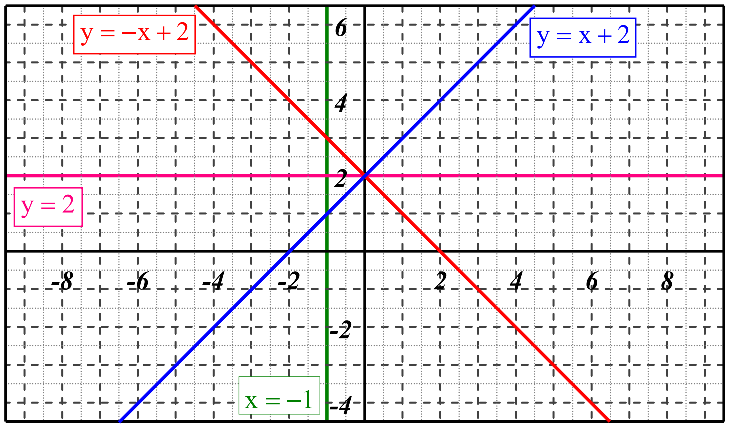
b) Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction. Et réciproquement !

➲ Sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, la fonction f étant croissante, sa dérivée f' est positive ou nulle. Il est assurément faux de dire que $f'(-7)$ puisse être égal à -1.

➲ Comme la fonction f admet un maximum en $x=-1$ alors la tangente à sa courbe en ce point est horizontale. Donc le coefficient directeur de celle-ci qui est aussi le nombre dérivé $f'(-1)$ nécessairement nul. Donc affirmer que $f'(-1)=3$ est assurément faux.

➲ Enfin, la fonction f étant décroissante sur l'intervalle $]-1;2[$, sa dérivée est négative ou nulle. Donc $f'(0)$ peut être égal à -2.

c) Examinons les cas des quatre candidates asymptotiques !



➲ Si la droite verticale d'équation $x=-1$ était une asymptote à (C), cela signifierait qu'une limite de f à gauche ou à droite de -1 serait un infini. Ce qui n'est pas le cas !

➲ Si la droite horizontale d'équation $y=2$ était une asymptote à (C), cela ne pourrait être qu'au voisinage d'un des deux infinis. Cela signifierait qu'en cet infini, la limite de la fonction f serait 2. Or les limites de f aux infinis sont $-\infty$ et 0.

➲ La droite oblique d'équation $y=-x+2$ ne peut être une asymptote à la courbe (C) qu'au voisinage de l'un des deux infinis.
Si elle l'est au voisinage de $-\infty$, cela signifie que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$. Ce qui n'est pas possible car d'après son tableau de variation : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Si elle l'est au voisinage de $+\infty$, cela signifie que la limite de f en $+\infty$ est $-\infty$. Là encore, ça ne colle pas avec son tableau de variation car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

➲ Reste la droite oblique d'équation $y=x+2$ qui peut être une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$. C'est d'elle dont parle l'énoncé de la question.

d) Lorsque x tend vers $-\infty$, f(x) tend vers $-\infty$.

Donc son inverse $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers 0^-.

Donc h(x) tend vers $1+0^-=1$.
Conséquence : la droite horizontale d'équation $y=1$ est une asymptote à la courbe représentative de h au voisinage de $-\infty$.

e) Lorsque x s'en va vers $+\infty$, f(x) tend vers 0 mais en étant positif.

Donc son inverse $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $\dfrac{1}{0^+}=+\infty$.

Donc h(x) tend vers $(+\infty)+1=+\infty$.

f) Savoir si le fonction h est continue en 2, c'est chercher si les limites à gauche et à droite de 2 de la fonction h sont égales à $h(2)$.
Intéressons-nous d'abord à la limite à gauche de 2 :
Quand x tend vers 2 par la gauche, f(x) tend vers $-\infty$.

Donc son inverse $\dfrac{1}{f(x)}$ tend vers $\dfrac{1}{-\infty}=0^-$.

Donc h(x) tend vers 1...qui est différent de $h(2)$.
Conclusion : la limite à gauche de 2 de la fonction h étant différente de la valeur de h(2), la fonction h n'est pas continue en 2.

Pour le plaisir, on peut s'intéresser à la limite de h à droite de 2. Nous avons :

$$\lim_{\substack{x\to2^+\\x\neq2}} h(x)=\lim_{\substack{x\to2^+\\x\neq2}}\frac{1}{f(x)}+1=\frac{1}{+\infty}+1=0^++1=1\neq2=h(2)$$

Conclusion : la fonction h n'est pas non plus continue à droite de 2.

Devoir Express No.2

Le contexte

Ce second devoir express eut lieu une semaine après le premier. Il abordait la continuité, la dérivation ainsi que la détermination de primitives.
Là encore, il s'appuyait principalement sur deux exercices de QCM. Le but était d'habituer les élèves à ce genre d'exercice nouveau pour eux et qu'ils risquaient de rencontrer le jour de l'épreuve. Répondre à un QCM requiert de savoir évaluer ses certitudes. Il faut éviter de perdre bêtement des points sûrement acquis.
Une nouvelle fois, les calculatrices étaient interdites.

L'énoncé

Première partie : questions express de cours (6 points)

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise en enlève 0,5. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une fonction continue sur un intervalle y est nécessairement dérivable. — Vrai Faux

Si la droite d'équation $y=-2.x+1$ est une asymptote à la courbe d'une fonction f au voisinage de $-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ — Vrai Faux

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ alors la courbe (C) représentant la fonction f admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$. — Vrai Faux

La fonction $f(x)=\sqrt{2.x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. — Vrai Faux

La fonction $f(x)=\sqrt{2.x^2+1}$ a pour dérivée $f'(x)=\dfrac{2.x}{\sqrt{2.x^2+1}}$. — Vrai Faux

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2;5]$ telle que :

$$f(-2)=1 \quad \text{et} \quad f(5)=7$$

Si la fonction f est strictement croissante sur $[-2;5]$ alors l'équation $f(x)=3$ admet exactement une solution dans cet intervalle. — Vrai Faux

Seconde partie : l'offensive des primitives (10,5 points)

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1,5 points et chaque mauvaise en enlève 0,75. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $f(x)=4.x-2$ sur $\mathbb{R}$?

$F(x)=4$ $\qquad F(x)=2.x^2-2.x+1$ $\qquad F(x)=4.x^2-1$ $\qquad F(x)=4.x^2-x$

b) La fonction $f(x)=9.x^2+4.x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(2)=3$.
Parmi les fonctions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction F ?

$g(x)=18$ $\qquad g(x)=18.x+4$ $\qquad g(x)=9.x^2+4.x$ $\qquad g(x)=3.x^3+2.x^2$

c) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $f(x)=\cos(x)-\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$?

$F(x)=-\cos(x)-\sin(x)$ $\qquad F(x)=-\cos(x)+\sin(x)$

$F(x)=\cos(x)-\sin(x)$ $\qquad F(x)=\cos(x)+\sin(x)$

d) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive sur ℝ de la fonction $f(x)=(x+1).(x^2+2.x+1)^3$?

$F(x)=\frac{1}{8}.(x^2+2.x+1)^4$ $F(x)=\frac{1}{4}.(x^2+2.x+1)^4$

$F(x)=\frac{1}{2}.(x^2+2.x+1)^4$ $F(x)=(x^2+2.x+1)^4$

e) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $f(x)=\frac{1}{4.x^2+4.x+1}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$?

$F(x)=-\frac{1}{4.x+2}$ $F(x)=-\frac{2}{2.x+1}$ $F(x)=-\frac{1}{2.x+1}$ $F(x)=\frac{1}{2.x+1}$

f) Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4.x^2+1}}$ sur ℝ ?

$F(x)=\frac{1}{4}.\sqrt{4.x^2+1}$ $F(x)=\frac{1}{2}.\sqrt{4.x^2+1}$ $F(x)=\sqrt{4.x^2+1}$ $F(x)=2.\sqrt{4.x^2+1}$

g) La fonction F est une primitive de la fonction f sur ℝ.
Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
f			-2				-1
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-4		

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est assurément vraie ?

La fonction F est négative sur l'intervalle $]-4;3[$ La fonction F est positive sur l'intervalle $]3;+\infty[$

La fonction F est décroissante sur ℝ La fonction F est croissante sur ℝ

Dernière partie : continuité primitive (3,5 points)

F est une fonction continue sur ℝ. Elle est définie par morceaux sur cet ensemble par :

- Sur l'intervalle $]-\infty;1]$, on a : $F(x)=x^2-3.x+5$.
- Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, F est une primitive de la fonction $f(x)=6.x-2+\frac{2}{x^2}$.

Déterminer l'expression de la fonction F sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

Indication : pour qu'une fonction soit continue sur ℝ, il faut qu'elle le soit en particulier en 1.
Une grande attention sera portée à la rédaction de la réponse.

Le corrigé

Première partie : questions express de cours

a) Une fonction dérivable sur un intervalle y est continue. Mais la réciproque est fausse.
La fonction valeur absolue est continue en 0 mais elle n'y est pas dérivable.
La fonction racine carrée $f(x)=\sqrt{x}$ est définie et continue sur $[0;+\infty[$ mais elle est seulement dérivable sur $]0;+\infty[$. En effet :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Donc la fonction racine n'est pas dérivable en 0 alors qu'elle y est continue.

b) Dire que la droite d'équation $y=-2.x+1$ est une asymptote à la courbe représentant f au voisinage de $-\infty$ signifie qu'au voisinage de $-\infty$, la fonction f peut s'écrire :

$$f(x)=\underbrace{-2.x+1}_{\text{Asymptote}}+\underbrace{\text{Un truc qui tend vers 0 en }-\infty}_{\text{Souvent noté }\varepsilon(x)}$$

La fonction f et la fonction affine $g(x)=-2.x+1$ ont la même limite en $-\infty$.
Donc $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-2.x+1=+\infty$.

c) Une asymptote horizontale au voisinage d'un infini est la conséquence graphique d'une limite finie. Comme la limite en $+\infty$ de la fonction f est infinie, la courbe de celle-ci ne peut pas admettre d'asymptote horizontale.

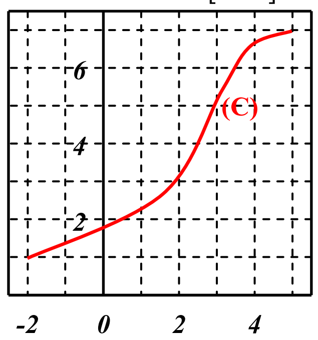
d et e) Pour que la racine de la fonction $u(x) = 2.x^2 + 1$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que:

- la fonction $u(x) = 2.x^2 + 1$ soit elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$. Ce qui est le cas. Sa dérivée est $u'(x) = 4.x$
- la fonction $u(x) = 2.x^2 + 1$ soit strictement positive. Ce qui est encore le cas car c'est la somme d'un carré multiplié par 2 et du nombre positif 1.

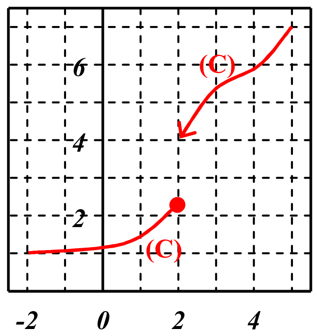
Donc la fonction $f(x) = \sqrt{2.x^2 + 1} = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{u'}{2.\sqrt{u}} = \frac{4.x}{2.\sqrt{2.x^2 + 1}} = \frac{2.x}{\sqrt{2.x^2 + 1}}$$

f) Même si la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2;5]$ passant de 1 à 7, rien n'indique qu'elle prenne pour valeur 3. Il n'est pas dit si elle est continue ou pas. La seule chose que l'on puisse affirmer est que l'équation $f(x) = 3$ a au plus une solution dans l'intervalle $[-2;5]$. C'est-à-dire aucune ou une seule.



Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[-2;5]$ alors l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans cet intervalle.



Mais si elle n'est pas continue, l'équation $f(x) = 3$ peut ne pas avoir de solution.

Seconde partie : l'offensive des primitives

a) Toutes les primitives de la fonction $f(x) = 4.x - 2$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$F(x) = 4 \times \frac{1}{2}.x^2 - 2 \times x + \text{Constante} = 2.x^2 - 2.x + \text{Constante}$$

Parmi les quatre propositions, seule la fonction $F(x) = 2.x^2 - 2.x + 1$ est une primitive de f.

b) Si F est une primitive de la fonction $f(x) = 9.x^2 + 4.x$ sur $\mathbb{R}$ alors f est la dérivée de F sur $\mathbb{R}$.

Parmi les quatre propositions, la dérivée de F est la fonction $g(x) = 9.x^2 + 4.x$.

c) Une primitive de cosinus sur $\mathbb{R}$ est sinus. Une primitive de sinus est $-\text{cosinus}$.

Par conséquent, une primitive de la fonction $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$F(x) = \sin(x) - (-\cos(x)) = \sin(x) + \cos(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

d) La dérivée de la fonction $u(x) = x^2 + 2.x + 1$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, est $u'(x) = 2.x + 2$.

Pour tout réel x, nous avons :

$$f(x) = (x+1).(x^2 + 2.x + 1)^3 = \frac{1}{2}.(2.x+2).(x^2 + 2.x + 1)^3 = \frac{1}{2}.u'.u^3$$

Donc toutes les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}.u^4 + \text{Constante} = \frac{1}{8}.(x^2 + 2.x + 1)^4 + \text{Constante}$$

Parmi les quatre propositions, seule la fonction $F(x) = \frac{1}{8}.(x^2 + 2.x + 1)^4$ est une primitive de $f(x) = (x+1).(x^2 + 2.x + 1)^3$ sur $\mathbb{R}$.

e) Sous la forme qui nous est proposée, il est difficile de déterminer une primitive de la fonction f.

Or $4.x^2 + 4.x + 1$ est la forme développée de l'identité remarquable $(2.x+1)^2$.

Par conséquent, en posant $u(x) = 2.x + 1$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{1}{4.x^2 + 4.x + 1} = \frac{1}{(2.x+1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(2.x+1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2}$$

Donc toutes les primitives F de f sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ sont de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{u}\right)+\text{Constante}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2.x+1}+\text{Constante}=-\frac{1}{4.x+2}+\text{Constante}$$

Parmi les quatre propositions, seule la fonction $F(x)=-\frac{1}{4.x+2}$ est une primitive de f.

f) La dérivée de la fonction $u(x)=4.x^2+1$ qui est dérivable et strictement positive sur $]-\infty;+\infty[$, est $u'(x)=8.x$.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{4.x^2+1}}=\frac{1}{8}\times\frac{8.x}{\sqrt{4.x^2+1}}=\frac{1}{8}\times\frac{u'}{\sqrt{u}}$$

Donc toutes les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{8}\times 2.\sqrt{u}+\text{Constante}=\frac{1}{4}\times\sqrt{4.x^2+1}+\text{Constante}$$

Parmi les quatre propositions, seule la fonction $F(x)=\frac{1}{4}.\sqrt{4.x^2+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

g) La fonction F étant une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$, cette dernière est la dérivée de cette première.
Or le signe de la dérivée f donne le sens de variation de la fonction F.
D'après son tableau de variation, la fonction f est négative sur $\mathbb{R}$. Elle ne dépasse jamais -1.
Donc sa primitive F est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Dernière partie : continuité primitive

Des primitives des fonctions x ; -2 et $\frac{1}{x^2}$ sont respectivement $\frac{1}{2}.x^2$; $-2.x$ et $-\frac{1}{x}$.

Donc la primitive F de la fonction $f(x)=6.x-2+\frac{2}{x^2}$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$ est de la forme :

$$F(x)=6\times\frac{1}{2}.x^2-2.x+2\times\frac{-1}{x}+\text{Constante}=3.x^2-2.x-\frac{2}{x}+\text{Constante}$$

Reste à déterminer la valeur de cette constante.
La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$. Il l'est donc en particulier en 1.

La limite de F à droite de 1 doit être égale à $F(1)$.
Comme 1 appartient à l'intervalle $]-\infty;1]$, son image par F est donnée par :

$$F(1)=1^2-3\times1+5=1-3+5=3$$

Donc la limite de F à droite de 1 doit être égale à 3.

Or quand x tend vers 1, $3.x^2-2.x-\frac{2}{x}$ tend vers $3\times1^2-2\times1-\frac{2}{1}=3-2-2=-1$.

Pour que F(x) tende vers 3, il faut et il suffit que la constante soit égale à 4.
En effet nous avons alors :

$$\lim_{x\to1^+}F(x)=\lim_{x\to1^+}3.x^2-2.x-\frac{2}{x}+4=3-2-2+4=1=F(1)$$

<u>Conclusion :</u> sur l'intervalle $]1;+\infty[$, $F(x)=3.x^2-2.x-\frac{2}{x}+4$.

Devoir Surveillé No.1

Le contexte

Ce premier devoir de deux heures où la calculatrice était autorisée, eut lieu au début du mois d'octobre 2005. Il abordait tous les points classiques de la dérivation et des limites. Nous revenions à un format classique avec un petit exercice et un autre qui tenait assez d'un problème comme il y en avait avant la réforme des sujets de bac introduite en 2004. Il traitait aussi de la fonction exponentielle au travers d'une fonction pseudo-rationnelle.

L'énoncé

Première partie : aux racines du problème

La fonction H est définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par :

$$H(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$$

a) Déterminer la limite de H(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Démontrer que la différence $\sqrt{x^2-4} - x$ est négative sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

c) Pourquoi la fonction H est-elle seulement dérivable sur l'intervalle $]2;+\infty[$?
En utilisant la question 1.b, étudier les variations de la fonction H sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

d) On décide de prolonger la fonction H sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Sur l'intervalle $]-\infty;2[$, la fonction H est une primitive de la fonction h définie par :

$$h(x) = 1 + \frac{3.x}{\left(2.x^2+1\right)^2}$$

Déterminer l'expression de la fonction H sur l'intervalle $]-\infty;2[$ pour que la fonction H soit continue sur $\mathbb{R}$.

Seconde partie : une exponentielle parmi les rationnelles

La fonction j est définie par :

$$j(x) = \frac{e^x + x^2}{x-1}$$

On appelle (C) la courbe de la fonction j.
L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction j sur son ensemble de définition. Pour cela, nous utiliserons la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x + x$$

Dans tout l'exercice, une grande attention sera portée à la qualité de la rédaction ainsi qu'aux justifications apportées.

a) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
Etudier les variations de la fonction f sur $]-\infty;+\infty[$.
Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ une unique solution que l'on notera α.
A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au centième près de α.
En déduire le signe de f(x) en fonction de x.

b) Déterminer l'ensemble de définition D_j de la fonction j.

c) Etudier le signe de la fonction j sur son ensemble de définition D_j.

d) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in D_j$, on ait :

$$j(x) = a.x + b + \frac{c + e^x}{x-1}$$

Note : *on pourra chercher à décomposer j sans tenir compte de l'exponentielle, comme s'il s'agissait d'une fonction rationnelle.*

e) Déterminer les limites de la fonction j à gauche, puis à droite de 1.
Quelle conséquence cela a-t-il pour la courbe (C) ?

f) Déterminer la limite de j(x) lorsque x tend vers $+\infty$.

g) Démontrer que la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique Δ dont on donnera l'équation réduite.
En déduire la limite de j en $-\infty$.
Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ.

h) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction j.
En dérivant la fonction j, démontrer que pour tout réel $x \in D_j$ on a :

$$j'(x) = \frac{(x-2).(e^x + x)}{(x-1)^2}$$

En utilisant le résultat de la question 2.a, dresser le tableau de variation de la fonction j.

i) Dans le repère se trouvant au verso, tracer une esquisse de la courbe (C) ainsi que les divers asymptotes rencontrées au cours de l'exercice.

Le corrigé

Première partie : aux racines du problème

a) Lorsque x tend vers $+\infty$, x^2-4 et sa racine $\sqrt{x^2-4}$ tendent aussi vers $+\infty$.

Sous l'écriture qui nous est proposée, la fonction $H(x) = x - \sqrt{x^2-4}$ est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

Pour lever celle-ci, nous allons modifier H(x) en multipliant la différence $x - \sqrt{x^2-4}$ par sa quantité conjuguée $x + \sqrt{x^2-4}$.
Pour tout réel $x \in [2;+\infty[$, nous avons :

$$H(x) = \frac{\left(x-\sqrt{x^2-4}\right).\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)} = \frac{(x)^2 - \left(\sqrt{x^2-4}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{x^2-(x^2-4)}{x+\sqrt{x^2-4}} = \frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}}$$

Voyons si cette dernière écriture nous permet de conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} H(x) = \frac{4}{(+\infty)+(+\infty)} = \frac{4}{+\infty} = 0^+$$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe de H au voisinage de $+\infty$.

b) Pour tout réel x, il est clair que $x^2 - 4 < x^2$.
Sur l'intervalle $]2;+\infty[$, x^2-4 et x^2 sont deux quantités positives. Donc elles ont des racines et celles-ci sont rangées dans le même ordre qu'elles. Pour tout réel $x \in]2;+\infty[$:

$$x^2-4<x^2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2-4}<\sqrt{x^2}}_{\substack{\text{La fonction racine est}\\ \text{croissante sur } [0;+\infty[.\\ \text{Elle y conserve l'ordre.}}} \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2-4}<|x|}_{\substack{\text{Comme x est positif,}\\ \text{il est sa propre}\\ \text{valeur abolsue}}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}-x<0$$

<u>Conclusion :</u> sur l'intervalle $]2;+\infty[$, la différence $\sqrt{x^2-4}-x$ est négative.

On peut aussi multiplier $\sqrt{x^2-4}-x$ par sa quantité conjuguée $\sqrt{x^2-4}+x$.
Pour tout $x \in]2;+\infty[$, il vient alors :

$$\sqrt{x^2-4}-x = \frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right).\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\sqrt{x^2-4}+x} = \frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x} = \frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}$$

Les termes $\sqrt{x^2-4}$ et x étant strictement positifs, leur somme $\sqrt{x^2-4}+x$ l'est aussi.
Donc la différence $\sqrt{x^2-4}-x$ est de facto négative.

c) La fonction x est dérivable sur ℝ. La dérivabilité de H dépend de celle de $\sqrt{x^2-4}$.
Comme la fonction $u(x) = x^2-4$ est dérivable sur ℝ et est strictement positive sur l'intervalle $]2;+\infty[$ alors sa racine $\sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2-4}$ est dérivable sur cet intervalle.

Pour savoir si cette fonction est dérivable en 2, étudions la limite en 0^+ du quotient :

$$\underbrace{\frac{\sqrt{u(2+h)}-\sqrt{u(2)}}{h}}_{\sqrt{u}\text{ dérivable à droite de 2 ?}} = \frac{\sqrt{h^2+4.h}-0}{h} = \underbrace{\frac{\sqrt{h^2}}{h}\times\sqrt{1+\frac{4}{h}} = \frac{h}{h}\times\sqrt{1+\frac{4}{h}}}_{\text{Comme } h>0,\ \sqrt{h^2}=|h|=h} = \sqrt{1+\frac{4}{h}}$$

Or quand h tend vers 0^+, $\frac{4}{h}$ et par conséquent $\sqrt{1+\frac{4}{h}}$ tendent vers $+\infty$.

<u>Conclusion :</u> comme $\lim_{h\to0^+} \frac{\sqrt{u(2+h)}-\sqrt{u(2)}}{h} = +\infty$ alors la fonction $\sqrt{u}$ n'est pas dérivable à droite de 2 et donc en 2. Il en va de même pour la fonction H.

➲ Pour déterminer les variations de la fonction H sur $]2;+\infty[$, calculons sa dérivée :

$$H'(x) = (x)' - \left(\sqrt{x^2-4}\right)' = 1 - \frac{2.x}{2.\sqrt{x^2-4}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}-x}{\sqrt{x^2-4}}$$

D'après la question 1.b, le numérateur est négatif sur $]2;+\infty[$. Le dénominateur qui est une racine non nulle est positif. Par suite, le tableau de variation de la fonction H est :

x	2	$+\infty$
$\sqrt{x^2-4}-x$	$-$	
$\sqrt{x^2-4}$	$+$	
$H'(x)$	$-$	
H	2 ↘	0

c) Pour tout réel x , nous avons :

$$\frac{3.x}{\left(2.x^2+1\right)^2}=3\times\frac{1}{4}\times\frac{4.x}{\left(2.x^2+1\right)^2}=\frac{3}{4}\times\frac{u'}{u^2} \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(x)=2.x^2+1 \\ u'(x)=4.x \end{cases}$$

Donc une primitive de la fonction $\frac{3.x}{\left(2.x^2+1\right)^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $\frac{3}{4}\times\frac{-1}{u}=-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2.x^2+1}$.

Par conséquent sur l'intervalle $]-\infty;2[$, la fonction H est de la forme :

$$H(x)=x-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2.x^2+1}+\text{Constante}$$

Or la fonction H est continue sur $\mathbb{R}$. Elle l'est donc en particulier en 2 où $H(2)=2$.

Ainsi la limite à gauche de 2 de la fonction $H(x)=x-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2.x^2+1}+\text{Constante}$ doit être égale à 2.

Comme $\lim\limits_{x\to 2^-} x-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2.x^2+1}=2-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2\times 2^2+1}=2-\frac{1}{12}$, alors la constante soit égale à $\frac{1}{12}$ pour que H soit continue en 2.

<u>Conclusion :</u> sur l'intervalle $]-\infty;2[$, nous avons : $H(x)=x-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2.x^2+1}+\frac{1}{12}$.

Seconde partie : une exponentielle parmi les rationnelles

a) La fonction $f(x)=e^x+x$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme les fonctions exponentielles et x.

➲ Déterminons ses limites aux infinis.

$$\lim_{x\to-\infty}\underbrace{e^x+x}_{f(x)}=0+(-\infty)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\underbrace{e^x+x}_{f(x)}=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$$

➲ Pour étudier les variations de la fonction f, étudions le signe de sa dérivée.
Les fonctions exponentielle et identité étant dérivables sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour leur somme f. Calculons sa dérivée.
Pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)=\left(e^x\right)'+(x)'=e^x+1.$$

L'exponentielle e^x est toujours positive. Par conséquent, il en va de même pour sa somme avec 1 qu'est $f'(x)$.

Comme la dérivée $f'(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$ alors la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$.

🗣 Pour établir les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on peut aussi dire qu'elle est la somme des fonctions exponentielle e^x et identité qui sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Il en va alors de même pour f.

➲ Comme :

- la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ alors elle y est <u>continue</u>.
- f est <u>strictement croissante</u> sur $]-\infty;+\infty[$ passant de $-\infty$ à $+\infty$.

alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on détermine que α est compris entre $-0,57$ et $-0,56$.

➲ Comme la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle s'annule seulement en α alors son tableau de signe est :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	

b) Les trois fonctions e^x, x^2 et $x-1$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
La seule chose qui puisse faire que j(x) n'existe pas est le fait que ce soit un quotient.

Le quotient j(x) n'existe pas $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $x-1=0$ $\Leftrightarrow$ $x=1$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition de la fonction j est $\mathbb{R}\backslash\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

c) Une exponentielle est toujours positive. Un carré est toujours positif ou nul. Donc leur somme e^x+x^2 est toujours positive. Par conséquent, le tableau de signe de j est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
e^x+x^2	+	|	+
$x-1$	$-$	0	+
j(x)	$-$	||	+

d) Décomposons la pseudo fonction rationnelle j.

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$, nous pouvons écrire :

$$j(x)=\frac{\overbrace{x^2}+e^x}{x-1}=\frac{\overbrace{x.(x-1)+x}^{x^2}+e^x}{x-1}=x+\frac{\overbrace{1\times(x-1)+1}^{x}+e^x}{x-1}=x+1+\frac{1+e^x}{x-1}$$

<u>Conclusion :</u> Pour tout réel $x\neq1$, nous avons $j(x)=\underbrace{\frac{e^x+x^2}{x-1}}_{\text{Forme initiale}}=\underbrace{x+1+\frac{1+e^x}{x-1}}_{\text{Forme décomposée}}$

e) Pour déterminer les limites de la fonction j à gauche et à droite de 1, utilisons son écriture initiale.

$$\lim_{x\to1^-}\underbrace{\frac{e^x+x^2}{x-1}}_{j(x)}=\frac{\overbrace{e+1}^{\text{Positif}}}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to1^+}\underbrace{\frac{e^x+x^2}{x-1}}_{j(x)}=\frac{\overbrace{e+1}^{\text{Positif}}}{0^+}=+\infty$$

Car d'après le tableau de signe de j(x) dressé à la question précédente, le dénominateur $x-1$ est négatif à gauche de 1 et il est positif à droite.

De plus, lorsque x tend vers 1, e^x tend vers $e^1=e$ qui est un nombre positif.

<u>Conséquence :</u> la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

f) Déterminons la limite de j en $+\infty$ en utilisant son écriture initiale $j(x)=\frac{e^x+x^2}{x-1}$.

De prime abord :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x^2}{x-1}=\frac{(+\infty)+(+\infty)}{+\infty}=\frac{+\infty}{+\infty}=\text{Forme indéterminée}$$

Pour lever l'indétermination pesant sur j, factorisons ses numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts à savoir e^x et x.

Pour tout réel $x>1$, nous pouvons écrire :

$$j(x)=\frac{e^x+x^2}{x-1}=\frac{e^x}{x}\times\frac{1+\frac{x^2}{e^x}}{1-\frac{1}{x}}$$

Or lorsque x tend vers $+\infty$, les quotients $\frac{e^x}{x}$ et $\frac{e^x}{x^2}$ tendent vers $+\infty$. Donc l'inverse de ce dernier $\frac{x^2}{e^x}$ tend vers $\frac{1}{+\infty}=0^+$.

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{e^x}{x}\times\frac{1+\frac{x^2}{e^x}}{1-\frac{1}{x}}}_{j(x)}=(+\infty)\times\frac{1+0^+}{1-0^+}=(+\infty)\times\frac{1}{1}=+\infty$$

🗣 La limite de j en $+\infty$ peut aussi être obtenue à partir de sa forme décomposée.

Le problème vient alors du quotient $\frac{e^x+1}{x-1}$ qui est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

On lève celle-ci en factorisant numérateur et dénominateur par leurs termes dominants.

Pour tout réel $x>1$, on a : $\frac{e^x+1}{x-1}=\frac{e^x}{x}\times\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{x}}\xrightarrow{x\to+\infty}(+\infty)\times\frac{1+0^+}{1-0^+}=+\infty$

On en déduit alors : $\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x+1+\frac{1+e^x}{x-1}}_{j(x)}=(+\infty)+1+(+\infty)=+\infty$.

g) Pour résoudre cette question, nous allons utiliser la forme décomposée de la fonction j qui n'est pas rationnelle à cause de la présence de l'exponentielle.

➲ Quand x tend vers $-\infty$, le numérateur e^x+1 tend vers $0+1=1$.

Donc la fraction $\dfrac{e^x+1}{x-1}$ tend vers $\dfrac{1}{-\infty}=0^-$.

Fort de cette découverte, nous pouvons affirmer que la droite Δ d'équation $y=x+1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

En effet, car pour tout $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, nous avons :

$$(C)-\Delta=j(x)-y=\left[x+1+\frac{e^x+1}{x-1}\right]-\left[x+1\right]=\frac{e^x+1}{x-1}$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{f(x)-y}_{(C)-\Delta}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{x-1}=0$

➲ Comme la droite Δ d'équation $y=x+1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$ alors la fonction j se comporte comme la fonction affine $g(x)=x+1$ au voisinage de $-\infty$. Elles ont la même limite. Par suite : $\lim\limits_{x\to-\infty}j(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x+1=-\infty$.

➲ Pour étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ, déterminons le signe de la différence d'ordonnées $(C)-\Delta=j(x)-y=\dfrac{e^x+1}{x-1}$.

Le numérateur est la somme de la positive exponentielle et de 1 : il est donc positif.

Par conséquent, le tableau de signe de la différence d'ordonnées $(C)-\Delta=\dfrac{e^x+1}{x-1}$ est :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
e^x+1	$+$		$+$
$x-1$	$-$	0	$+$
$(C)-\Delta$	$-$	‖	$+$
Position relative	La courbe (C) est au-dessous de Δ	‖	La courbe (C) est au-dessus de Δ

h) La fonction $j(x)=\dfrac{e^x+x^2}{x-1}$ est un quotient de la forme $\dfrac{u}{v}$ où :

- La fonction $u(x)=e^x+x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme les fonctions exponentielle et carré. Sa dérivée est $u'(x)=e^x+2.x$.
- La fonction $v(x)=x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $v'(x)=1$.

Comme de plus v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ alors la fonction j est dérivable sur cet ensemble.

Pour tout $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, nous pouvons écrire :

$$j'(x)=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}=\frac{\left(e^x+2.x\right)\times\left(x-1\right)-1\times\left(e^x+x^2\right)}{\left(x-1\right)^2}$$

$$=\frac{e^x.x-e^x+2.x^2-2.x-e^x-x^2}{\left(x-1\right)^2}=\frac{\overbrace{x.e^x-2.e^x}+\overbrace{x^2-2.x}}{\left(x-1\right)^2}$$

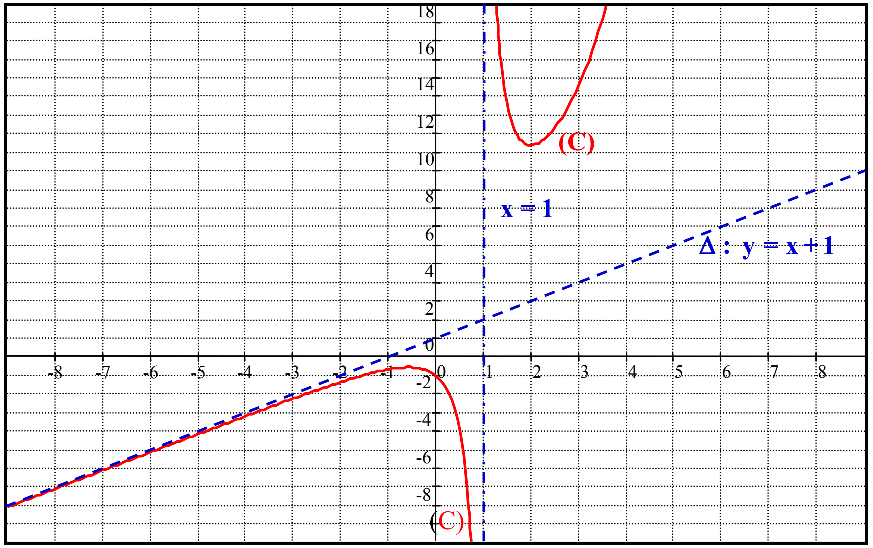
$$=\frac{e^x.\left(x-2\right)+x.\left(x-2\right)}{\left(x-1\right)^2}=\frac{\left(x-2\right).\left(e^x+x\right)}{\left(x-1\right)^2}$$

Le signe du facteur $f(x)=e^x+x$ a été déterminé à la question 2.a.

Nous pouvons dresser le tableau de signe de la dérivée $j'(x)$ qui nous donnera les variations de la fonction j.

x	$-\infty$	α		1		2	$+\infty$
x - 2	$-$		$-$		$-$	0	$+$
e^x+x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\left(x-1\right)^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$j'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
j	$-\infty$ ↗	$j(\alpha)$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	e^2+4	↗ $+\infty$

i) Ci-dessous, sont tracées la courbe (C) et ses deux asymptotes.



Devoir Express No.3

Le contexte

Ce troisième devoir express d'une heure eut lieu à la mi-octobre 2005. Il portait essentiellement sur la fonction exponentielle ses limites et ses propriétés, et dérapait un petit peu sur les limites de la fonction ln.
Une fois encore, la calculatrice était interdite car il semblerait que certains l'utiliseraient pour stocker toutes leurs formules. Il paraît...mais ça faut pas le dire !

L'énoncé

Première partie : une fonction affine et exponentielle

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1-2.x).e^{3.x}$$

L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction f.

a) Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Compléter l'égalité suivante : pour tout réel x, $e^{3.x} = e^{x} \times \ldots$.
En utilisant la relation précédente, déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
***Note :** une grande attention sera portée aux justifications fournies.*

c) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
Démontrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = e^{3.x}.(1-6.x)$$

En déduire les variations de la fonction f.
Calculer la ou les valeurs particulières de f apparaissant dans son tableau de variation.

Seconde partie : problème de primitive exponentiel(le)

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{2.\left(e^{x}\right)^{4} - e^{x} + 1}{\sqrt{e^{6.x}}}$$

Après avoir simplifié l'écriture de la fonction g, déterminer la primitive G définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction g telle que $G(0) = 3$.

Troisième partie : l'exponentielle, seule contre toutes

La fonction h est définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{e^{x} - x^{2}}{\ln(x) + x^{2}}$$

Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

Dernière partie : apparences inverses

On sait que la fonction $u(x) = e^{x} - x$ est définie et positive sur $\mathbb{R}$.
La fonction j est définie par :

$$j(x) = \frac{e^{x} - 1}{2.e^{x} - 2.x}$$

Déterminer la primitive J définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction j telle que $J(0) = 4$.

Le corrigé

Première partie : affine et exponentielle

a) Lorsque x tend vers $+\infty$, $3.x$ tend vers $+\infty$. Donc son exponentielle $e^{3.x}$ aussi.
Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(-2.x+1).e^{3.x}}_{f(x)} = (-\infty)\times(+\infty) = -\infty$$

b) Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$e^{3.x} = e^{x+2.x} = e^{x} \times e^{2.x}$$

➲ Lorsque x tend vers $-\infty$, $3.x$ tend aussi vers $-\infty$. Donc son exponentielle $e^{3.x}$ tend vers 0.
Comme $-2.x+1$ s'en va alors vers $+\infty$, $f(x)$ est en $-\infty$ une forme indéterminée du type $\infty\times 0$.
Modifions l'écriture de la fonction f pour lever celle-ci.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\underbrace{(1-2.x).e^{3.x}}_{\text{Distribuons !}}=e^{3.x}-2.x.e^{3.x}=e^{3.x}-2.x.e^{x}\times e^{2.x}$$

Voyons si nous pouvons nous prononcer :
Quand x tend vers $-\infty$, les exponentielles $e^{3.x}$ et $e^{2.x}$ tendent vers 0.
Le produit $x.e^{x}$ tend aussi vers 0 d'après un résultat du cours.
Par conséquent :

$$\lim_{x\to-\infty}\underbrace{e^{3.x}-2.x.e^{x}\times e^{2.x}}_{f(x)}=\underbrace{0}_{e^{3.x}}-2\times\underbrace{0}_{x.e^{x}}\times\underbrace{0}_{e^{2.x}}=0-0=0$$

c) Comme les fonctions $u(x)=-2.x+1$ et $v(x)=e^{3.x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors il en va de même pour leur produit f. Leurs dérivées respectives sont :

$$u'(x)=-2 \qquad\qquad v'(x)=(3.x)'.e^{3.x}=3.e^{3.x}$$

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} f'(x)&=u'.v+v'.u\\ &=(-2)\times e^{3.x}+3.e^{3.x}\times(-2.x+1)=-2.e^{3.x}-6.x.e^{3.x}+3.e^{3.x}\\ &=-6.x\times\underbrace{e^{3.x}}_{\text{Facteur...}}+1\times\underbrace{e^{3.x}}_{\text{...commun}}=e^{3.x}\times(-6.x+1)\end{aligned}$$

L'exponentielle $e^{3.x}$ est toujours positive car c'est une exponentielle.
Le signe du facteur affine $-6.x+1$ nous est connu. Il s'annule en $\frac{1}{6}$.
Par conséquent, les tableaux de signe de la dérivée f' et de variation de f sont :

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$e^{3.x}$		+	|	+	
$-6.x+1$		+	0	–	
$f'(x)$		+	0	–	
f	0	↗	$\frac{2.\sqrt{e}}{3}$	↘	$-\infty$

Pour que le tableau soit complet, calculons l'image de $\frac{1}{6}$ par la fonction f.

$$f\left(\frac{1}{6}\right)=\left(1-2\times\frac{1}{6}\right)\times\exp\left(3\times\frac{1}{6}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\exp\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\times\exp\left(\frac{1}{2}\times 1\right)=\frac{2}{3}\times\sqrt{\exp(1)}=\frac{2}{3}\times\sqrt{e}$$

Seconde partie : primitive story

Avant toute chose, rappelons les propriétés opératoires de l'exponentielle :

- ☞ Le produit des exponentielles est l'exponentielle de la somme : $e^{a}.e^{b}=e^{a+b}$.
- ☞ Le quotient des exponentielles est l'exponentielle de la différence : $\frac{e^{a}}{e^{b}}=e^{a-b}$
- ☞ L'inverse de l'exponentielle est l'exponentielle de l'opposé : $\frac{1}{e^{a}}=e^{-a}$
- ☞ La racine de l'exponentielle est l'exponentielle de la moitié : $\sqrt{e^{a}}=e^{\frac{a}{2}}$.
- ☞ La puissance de l'exponentielle est l'exponentielle du produit : $\left(e^{a}\right)^{n}=e^{n.a}$

Appliquons ces propriétés à la fonction g. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$g(x)=\frac{2.\left(e^{x}\right)^{4}-e^{x}+1}{\sqrt{e^{6.x}}}=\frac{2.e^{4.x}-e^{x}+1}{e^{\frac{6.x}{2}}}=\frac{2.e^{4.x}-e^{x}+1}{e^{3.x}}$$

$$=2.\frac{e^{4.x}}{e^{3.x}}-\frac{e^{x}}{e^{3.x}}+\frac{1}{e^{3.x}}=2.e^{4.x-3.x}-e^{x-3.x}+e^{-3.x}=2.e^{x}-e^{-2.x}+e^{-3.x}$$

Or :

- Une primitive de e^{x} sur $\mathbb{R}$ est e^{x}.
- Pour tout réel x, nous avons : $e^{-2.x}=-\frac{1}{2}\times(-2)\times e^{-2.x}=\frac{1}{2}\times u'\times e^{u}$

  où la fonction $u(x)=-2.x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $u'(x)=-2$.

  Donc une primitive de $e^{-2.x}$ sur $\mathbb{R}$ est $-\frac{1}{2}.e^{u}=-\frac{1}{2}.e^{-2.x}$.
- Pour tout réel x, nous avons : $e^{-3.x}=-\frac{1}{3}\times(-3)\times e^{-3.x}=\frac{1}{2}\times u'\times e^{u}$

  où la fonction $u(x)=-3.x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $u'(x)=-3$.

  Donc une primitive de $e^{-3.x}$ sur $\mathbb{R}$ est $-\frac{1}{3}.e^{u}=-\frac{1}{3}.e^{-3.x}$.

Par conséquent, la primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$G(x)=2.e^{x}-\left(-\frac{1}{2}\right).e^{-2.x}+\left(-\frac{1}{3}\right).e^{-3.x}+\text{Constante}=2.e^{x}+\frac{e^{-2.x}}{2}-\frac{e^{-3.x}}{3}+\text{Constante}$$

Reste à déterminer la constante. Nous savons que $G(0)=3$. Exploitons cette donnée.

$$\underbrace{2.e^{0}+\frac{e^{-2\times 0}}{2}-\frac{e^{-3\times 0}}{3}}_{G(0)}+\text{Constante}=3\iff\underbrace{2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{13/6}+\text{Constante}=3\iff\text{Constante}=\frac{5}{6}$$

Conclusion : pour tout réel x, $G(x)=2.e^{x}+\frac{e^{-2.x}}{2}-\frac{e^{-3.x}}{3}+\frac{5}{6}$

Troisième partie : l'exponentielle, seule contre toutes

Quand x tend vers $+\infty$, les fonctions ln(x), x^2 et e^{x} tendent toutes trois vers $+\infty$.
Le numérateur $e^{x}-x^{2}$ est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$ alors que le dénominateur $\ln(x)+x^{2}$ tend vers $+\infty$.

Levons les incertitudes pesant sur h en factorisant ses numérateur et dénominateur par leurs termes à priori les plus forts : e^{x} et x^{2}. Pour tout $x\geq 1$, nous pouvons écrire :

$$h(x)=\frac{e^{x}-x^{2}}{\ln(x)+x^{2}}=\frac{e^{x}}{x^{2}}\times\frac{1-\frac{x^{2}}{e^{x}}}{\frac{\ln(x)}{x^{2}}+1}$$

Or lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{e^{x}}{x^{2}}$ tend vers $+\infty$. Donc son inverse $\frac{x^{2}}{e^{x}}$ tend vers 0^{+}.

Quant au quotient $\frac{\ln(x)}{x^{2}}$, il tend vers 0^{+}. Par suite, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=(+\infty)\times\frac{1-0^{+}}{0^{+}+1}=(+\infty)\times\frac{1}{1}=+\infty$$

Les numérateur et dénominateur de h(x) peuvent aussi être factorisés par x^{2}.

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}.\left(\frac{e^{x}}{x^{2}}-1\right)}{x^{2}.\left(\frac{\ln(x)}{x^{2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\frac{e^{x}}{x^{2}}-1}{\frac{\ln(x)}{x^{2}}+1}}_{h(x)}=\frac{(+\infty)-1}{0^{+}+1}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

Dernière partie : primitive d'inverse

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$j(x)=\frac{e^{x}-1}{2.e^{x}-2.x}=\frac{1}{2}\times\frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}=\frac{1}{2}\times\frac{u'}{u}$$

où $u(x)=e^{x}-x$ est une fonction positive et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u'(x)=e^{x}-1$.
Donc la primitive J de la fonction j est de la forme :

$$J(x)=\frac{1}{2}\times\ln(u)+\text{Constante}=\frac{1}{2}.\ln\left(e^{x}-x\right)+\text{Constante}$$

Déterminons la constante. Comme $J(0)=4$ alors nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\frac{1}{2}.\ln\left(e^{0}-0\right)}_{J(0)}+\text{Constante}=4\iff\frac{1}{2}\times\underbrace{\ln(1)}_{=0}+\text{Constante}=4\iff\text{Constante}=4$$

Conclusion : pour tout réel x, $J(x)=\frac{1}{2}.\ln\left(e^{x}-x\right)+4$

Devoir Express No.4

Le contexte

Ce quatrième devoir express d'une heure eut lieu à la fin octobre 2005. Il abordait dans la profondeur la fonction logarithme aux travers de deux exercices. Une fois encore les calculatrices étaient interdites.

L'énoncé

Première partie : ln, elle s'appelle ln...au carré

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2.(1-2.\ln(x))+1$$

L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction f.

a) Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0.
***Note :** une grande attention sera portée aux justifications fournies.*

c) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur $]0;+\infty[$?
Démontrer que pour tout réel strictement positif x, on a :

$$f'(x)=-4.x.\ln(x)$$

En déduire les variations de la fonction f.
Calculer la ou les valeurs particulières de f apparaissant dans son tableau de variation.

d) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution que l'on notera α.
En déduire le tableau de signe de f.

Seconde partie : différend de logarithmes

La fonction h est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$h(x)=\ln(x)-\ln\left(x^2+4\right)$$

L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction h.

a) Déterminer la limite de la fonction h lorsque x tend vers 0.
b) Déterminer la limite de la fonction h lorsque x tend vers $+\infty$.
***Note :** une grande attention sera portée aux justifications fournies.*

c) Compléter l'égalité suivante : $\ln\left(2^3\right)=\ldots$

Exprimer $h(2)$ en fonction de $\ln(2)$.

d) Pourquoi la fonction h est-elle dérivable sur $]0;+\infty[$?
Démontrer que pour tout réel strictement positif x, on a :

$$h'(x)=\frac{4-x^2}{x.\left(x^2+4\right)}$$

En déduire les variations de la fonction h.

Le corrigé

Première partie : ln, elle s'appelle ln...au carré

a) Lorsque x s'en va vers $+\infty$, les fonctions x^2 et ln tendent toutes les deux vers $+\infty$.
Donc la différence $1-2.\ln(x)$ tend vers $-\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^2.(1-2.\ln(x))+1}_{f(x)}=(+\infty)\times(-\infty)+1=-\infty+1=-\infty$$

b) Lorsque x tend vers 0 (par la droite), x^2 tend vers 0 alors que ln(x) tend vers $-\infty$.
Donc la différence $1-2.\ln(x)$ s'en va vers $+\infty$. Il vient alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^2.(1-2.\ln(x))+1}_{f(x)}=0\times(+\infty)+1=\text{ Forme indéterminée}+1$$

Sous la forme proposée, la fonction f est en 0^+ une forme indéterminée du type $0\times\infty$.
Pour lever cette incertitude, nous allons développer l'expression de f(x) et chercher à nous appuyer sur des limites particulières vues dans le cours.
Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=x^2.(1-2.\ln(x))+1=x^2-2.x^2.\ln(x)+1=x^2-2.x\times x.\ln(x)+1$$

Or lorsque x tend vers 0^+, le produit $x.\ln(x)$ tend vers 0. Par conséquent :

$$\lim_{x\to0^+}\underbrace{x^2-2.x\times x.\ln(x)+1}_{f(x)}=0^+-0^+\times0^-+1=0-0+1=1$$

L'avenir de la fonction f en 0

La fonction f peut être prolongée par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.

Cependant, il n'est alors pas sûr que la fonction f soit pour autant dérivable en 0.

Pour le savoir, déterminons la limite lorsque x tend vers 0^+ du quotient $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2.(1-2.\ln(x))+1-1}{x}=\frac{x^2.(1-2.\ln(x))}{x}=x-2\times x.\ln(x)$$

<u>Conclusion :</u> Comme $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0-2\times 0=0$ alors la fonction prolongée f est dérivable en 0 et son nombre dérivé $f'(0)$ est égal à 0.

c) La fonction $u(x)=x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $u'(x)=2.x$.

La fonction ln est seulement dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$.

Donc la fonction $v(x)=1-2.\ln(x)$ de dérivée $v'(x)=-\dfrac{2}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Par conséquent, le produit $u\times v$ n'est dérivable que sur l'intervalle $]0;+\infty[$ tout comme la fonction $f=u\times v+1$. Calculons sa dérivée. Pour tout $x\in]0;+\infty[$, nous avons :

$$\begin{aligned}f'(x)&=u'\times v+v'\times u+(1)'\\&=2.x\times(1-2.\ln(x))+\frac{-2}{x}\times x^2+0=2.x-4.x\ln(x)-2.x=-4.x.\ln(x)\end{aligned}$$

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, le facteur affine $-4.x$ est strictement négatif.

Par contre ln s'annule en 1, est négative avant et est positive après.

Nous allons pouvoir déterminer le signe de leur produit $f'(x)$ qui nous donnera les variations de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$-4.x$		$-$		$-$	
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
			2		
f		↗		↘	
	1				$-\infty$

Pour que le tableau soit complet, calculons l'image de 1 par la fonction f.

$$f(1)=(1)^2.(1-2.\ln(1))+1=1\times(1-2\times 0)+1=1\times 1+1=1+1=2$$

d) Comme la fonction f était dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ alors elle y est continue.

Concernant les variations de f, il y a ce qui se passe avant 1 et ce qui arrive après.

D'après son tableau de variation, la fonction f est strictement supérieure à 1 sur $]0;1[$.

Donc l'équation $f(x)=0$ n'a aucune solution dans cet intervalle.

Par contre, la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$, passant de 2 à $-\infty$. Par conséquent, f est une bijection de $[1;+\infty[$ dans $]-\infty;2]$.

Donc $0\in]-\infty;2]$ a un unique antécédent α dans $[1;+\infty[$ par la fonction f.

<u>Conclusion :</u> l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

➲ La fonction f est strictement positive sur l'intervalle $]0;1[$. Ensuite, après 1, elle décroît strictement, s'annulant en α. Elle est donc positive avant et négative après.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Seconde partie : différend de logarithmes

a) Lorsque x tend vers 0 par la droite, $\ln(x)$ tend vers $-\infty$.

Comme x^2+4 tend alors vers 4, son logarithme $\ln(x^2+4)$ tend vers $\ln(4)$. Ainsi :

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\ln(x)-\ln(x^2+4)}_{h(x)} = (-\infty)-\ln(4) = -\infty$$

<u>Conséquence :</u> l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe représentant h.

b) Quand x tend vers $+\infty$, $\ln(x)$, x^2+4 et son logarithme népérien $\ln(x^2+4)$ tendent tous trois vers $+\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\ln(x)-\ln(x^2+4)}_{h(x)} = (+\infty)-(+\infty) = \text{ Forme indéterminée}$$

Pour lever celle-ci, utilisons une propriété de ln : la différence des logarithmes est le logarithme du quotient. Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$h(x) = \ln(x)-\ln(x^2+4) = \ln\left(\frac{x}{x^2+4}\right) = \ln\left(\frac{x}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}\right)$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ et $\frac{4}{x^2}$ tendent vers 0. Donc $\frac{x}{x^2+4}$ tend vers $0\times\frac{1}{1+0}=0$.

Par conséquent, son logarithme népérien $h(x)$ tend vers $-\infty$.

> 🗣 Une autre voie : $h(x) = \ln(x)-\ln\left(x\times\left(x+\frac{4}{x}\right)\right) = \ln(x)-\left[\ln(x)+\ln\left(x+\frac{4}{x}\right)\right] = \ldots$

c) Le logarithme de la puissance est le produit de l'exposant par le logarithme. Par suite :

$$h(2) = \ln(2)-\ln(2^2+4) = \ln(2)-\ln(8) = \ln(2)-\ln(2^3) = \ln(2)-3.\ln(2) = -2.\ln(2)$$

d) La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et sa dérivée est $\frac{1}{x}$.

La fonction $u(x)=x^2+4$ est dérivable sur ℝ, sa dérivée est $u'(x)=2.x$ et surtout elle y est toujours strictement positive. Donc son logarithme $\ln(u)$ est aussi dérivable sur ℝ et sa dérivée est :

$$\left[\ln(x^2+4)\right]' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2.x}{x^2+4}$$

Par conséquent, la différence h de ces deux fonctions logarithmes est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et pour tout réel strictement positif x, nous avons :

$$h'(x) = \frac{1}{x}-\frac{2.x}{x^2+4} = \frac{1\times(x^2+4)-2.x^2}{x.(x^2+4)} = \frac{x^2+4-2.x^2}{x.(x^2+4)} = \frac{4-x^2}{x.(x^2+4)} = \frac{(2-x).(2+x)}{x.(x^2+4)}$$

Connaissant les signes des quatre facteurs, nous pouvons déterminer celui de la dérivée $h'(x)$ qui nous donnera les variations de la fonction h.

x	0		2		$+\infty$
$-x+2$		+	0	−	
$x+2$		+		+	
x		+		+	
x^2+4		+		+	
$h'(x)$		+	0	−	
h	$-\infty$	↗	$-2.\ln(2)$	↘	$-\infty$

Devoir Surveillé No.2

Le contexte

Ce second devoir de deux heures de l'année eut lieu à la fin novembre 2005. Il se constituait d'un problème portant sur l'étude d'une fonction en exponentielle et de quatre petits exercices sur les complexes où devaient être mises en oeuvre des compétences directes. Les calculatrices étaient autorisées.

L'énoncé

Première partie : la revanche de l'exponentielle

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.
La fonction auxiliaire g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

a) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
En déduire le signe de $g(x)$.

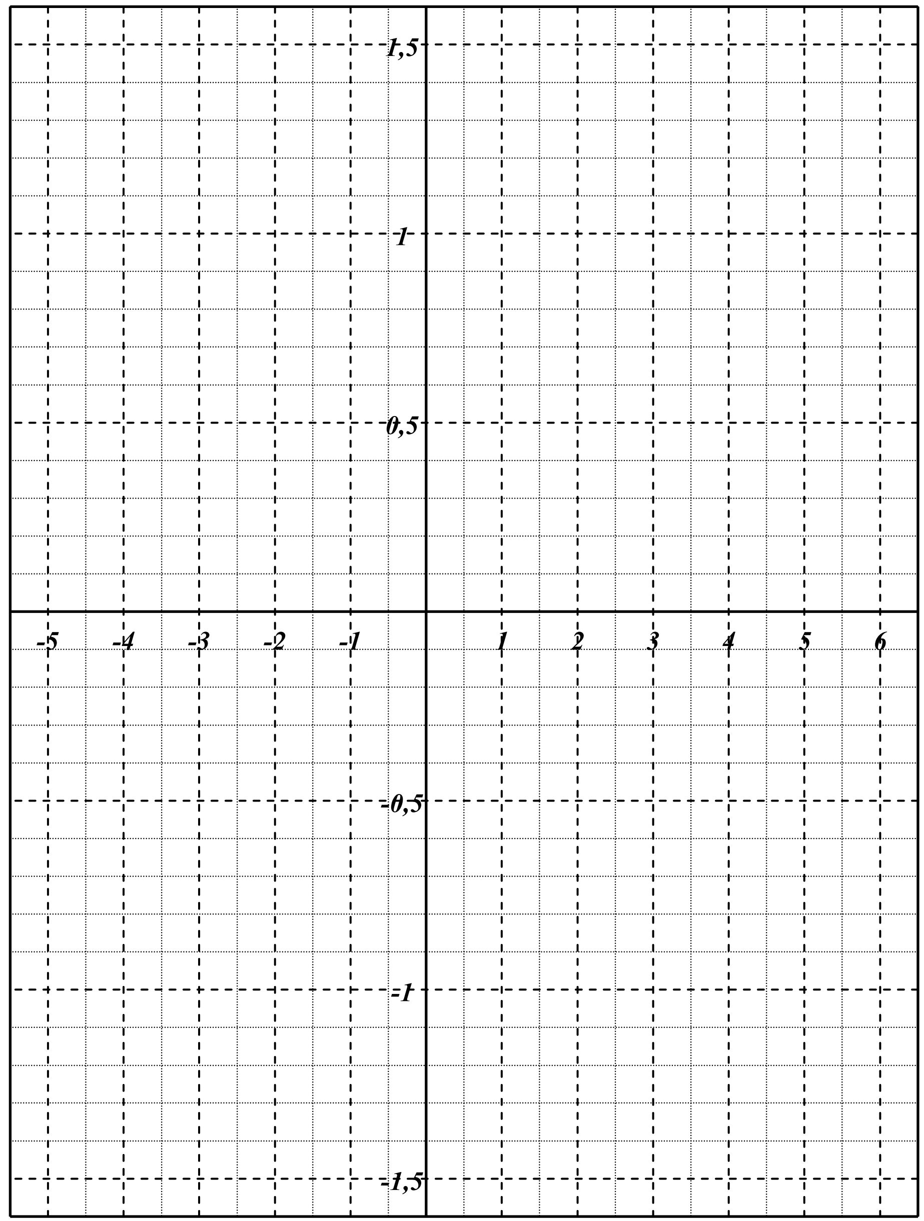
Démontrer que pour tout réel x, la différence $e^x - x$ est strictement positive.

b) Déterminer les limites de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$, puis vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement les résultats précédents.

c) Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f.
Etudier les variations de la fonction f.

d) Déterminer une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
En utilisant la question 1.a, étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite (T_0).

e) Dans le repère ci-contre, tracer la droite (T_0), les asymptotes rencontrées et la courbe (C).



Seconde partie : deux équations complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z :

$$(2+\boldsymbol{i}).z+6.\boldsymbol{i}=5.\boldsymbol{i}.z+2 \qquad\qquad (3+2.\boldsymbol{i}).z+6.\boldsymbol{i}=10-\boldsymbol{i}.\overline{z}$$

Note : *une grande attention sera portée à la rédaction et au détail des calculs.*

Troisième partie : la puissance de l'argument

Déterminer (par le calcul) le module et un argument du nombre complexe :

$$Z=\sqrt{6}-\sqrt{2}.\boldsymbol{i}$$

Démontrer que Z^{126} est un réel strictement négatif.

Note : *une grande attention sera portée à la rédaction et au détail des calculs.*

Quatrième partie : l'angle de l'argument

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Dans celui-ci, les points A, B et C ont pour affixes respectives $1-\boldsymbol{i}$; $3-2.\boldsymbol{i}$ et $2.\boldsymbol{i}$.

Déterminer par le calcul une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Note : *une grande attention sera portée à la rédaction et au détail des calculs.*

Dernière partie : on va tout casser !

Le polynôme P est défini par :

$$P(z)=2.z^4-4.z^3+8.z^2-4.z+6$$

a) Démontrer que les nombres $\boldsymbol{i}$ et $-\boldsymbol{i}$ sont deux racines du polynôme P.

b) Pourquoi le polynôme P est-il factorisable par z^2+1 ?

Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z)=(z^2+1).(a.z^2+b.z+c)$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Le corrigé

Première partie : la revanche de l'exponentielle

a) Comme la fonction exponentielle et la fonction affine $u(x)=-x-1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors il en va de même pour leur somme g.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$g'(x)=\left(e^x-x-1\right)'=e^x-1$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $e^0=1$ alors :

- Si $x<0$ alors $e^x<e^0=1$ donc $e^x-1<0$.
- Si $x=0$ alors $e^x-1=0$.
- Si $x>0$ alors $e^x>e^0=1$ donc $e^x-1>0$.

Connaissant le signe de sa dérivée $g'(x)$, nous pouvons en déduire les variations de g.

Le tableau de celles-ci est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)=e^x-1$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Pour que le tableau ci-dessus soit complet, calculons l'image de 0 par g :

$$g(0)=e^0-0-1=1-1=0$$

Quid des limites de g aux infinis ?
Les limites de g ne sont pas nécessaires à la résolution de l'exercice et ne sont d'ailleurs pas demandées. C'est pourquoi nous allons les déterminer.

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^x - x - 1}_{g(x)} = 0 - (-\infty) - 1 = +\infty$$

Sous l'écriture proposée, g est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. Une modification s'impose donc dans l'expression de g(x).

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^x - x - 1}_{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^x . \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = (+\infty) \times \left(1 - 0^+ - 0^+\right) = (+\infty) \times 1 = +\infty$$

➲ D'après le tableau de variation précédent, nous pouvons affirmer que le minimum de la fonction g sur ℝ est 0. Il est atteint en $x = 0$.
Donc le tableau de signe de $g(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

➲ Par conséquent, pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$g(x) \geq 0 \quad \text{donc} \quad e^x - x - 1 > 0 \quad \text{donc} \quad e^x - x \geq 1 \quad \text{donc} \quad e^x - x \text{ est positif}$$

Conclusion : pour tout réel x, la différence $e^x - x$ est strictement positive.

b) Quand x tend vers $-\infty$, $e^x - x$ tend vers $0 - (-\infty) = +\infty$.

Donc g est en $-\infty$ une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour lever cette dernière, factorisons les numérateur et dénominateur de $g(x)$ par leurs termes les plus forts.
Pour tout réel non nul x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x} = \frac{x}{x} \times \frac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1} = \frac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$$

Quand x tend vers $-\infty$, $\dfrac{e^x}{x}$ tend vers $\dfrac{0^+}{-\infty} = 0^+ \times \dfrac{1}{-\infty} = 0^+ \times 0^- = 0^-$. Par suite :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1} = \frac{1}{0^- - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Conclusion : la droite horizontale d'équation $y = -1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

➲ D'après un résultat du cours, nous savons que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1} = \frac{1}{(+\infty) - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Conclusion : l'axe des abscisses, c'est-à-dire la droite d'équation $y = 0$, est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c) La fonction f est le quotient des fonctions dérivables sur ℝ suivantes :

- $u(x) = x$ de dérivée $u'(x) = 1$.
- $v(x) = e^x - x$ qui ne s'annule jamais sur ℝ et de dérivée $v'(x) = e^x - 1$.

Donc la fonction f est dérivable sur ℝ et pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = \frac{u'.v - v'.u}{v^2} = \frac{1.\left(e^x - x\right) - \left(e^x - 1\right).x}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{e^x - x - x.e^x + x}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{e^x - x.e^x}{\left(e^x - x\right)^2} = \frac{e^x.(1 - x)}{\left(e^x - x\right)^2}$$

Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction. Le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
e^x		$+$	|	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$	
$\left(e^x - x\right)^2$		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	↗	$\dfrac{1}{e-1}$	↘	0

Pour que le tableau soit complet, calculons l'image de 1 par la fonction f :

$$f(1)=\frac{1}{e^1-1}=\frac{1}{e-1}\approx 0,58$$

d) L'équation réduite de la tangente (T_0) est de la forme : $y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$.
Calculons le nombre dérivé de f en 0 et l'image de 0 par f.

$$f'(0)=\frac{e^0\times(1-0)}{\left(e^0-0\right)^2}=\frac{1\times 1}{(1-0)^2}=1 \qquad f(0)=\frac{0}{e^0-0}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

<u>Conclusion :</u> l'équation réduite de la tangente (T_0) est : $y=1\times(x-0)+0=x$.

➲ Pour connaître la position relative de la courbe (C) par rapport à sa tangente (T_0), étudions la différence d'ordonnées entre ces deux objets. Pour tout réel x, nous avons :

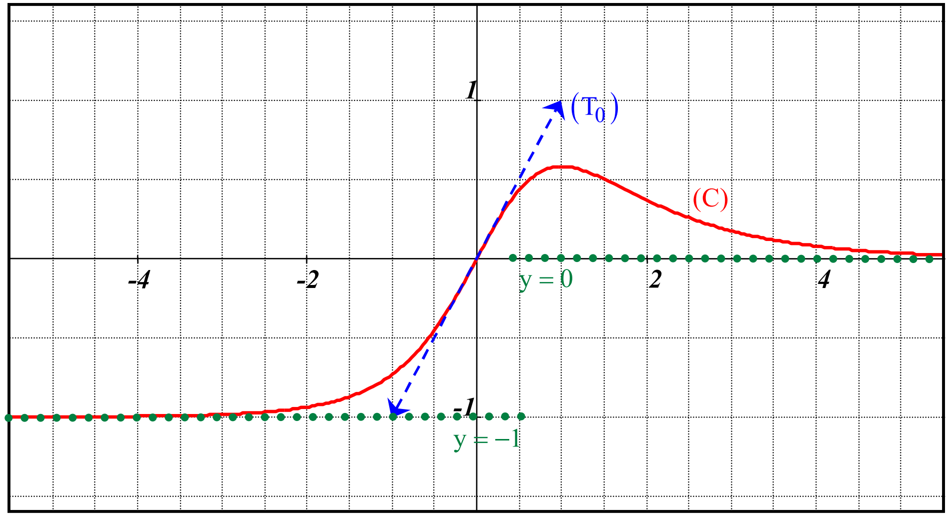
$$\underbrace{f(x)-y}_{(C)-(T_0)}=\frac{x}{e^x-x}-x=\frac{x-x.\left(e^x-x\right)}{e^x-x}=\frac{x+x^2-x.e^x}{e^x-x}=\frac{(-x).\left[1-x-e^x\right]}{e^x-x}=\frac{(-x).g(x)}{e^x-x}$$

Connaissant les signes des trois facteurs, nous pouvons connaître celui du quotient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	−	
g(x)		+	0	+	
e^x-x		+	|	+	
$(C)-(T_0)$		+	0	−	

<u>Conclusion :</u> la courbe (C) au-dessus de sa tangente (T_0) sur l'intervalle $]-\infty;0[$, la croise en 0, puis est au-dessous sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d) A part la courbe (C), il y a trois droites à tracer : les deux asymptotes et la tangente.



Seconde partie : deux équations complexes

➲ Résolvons dans ℂ l'équation $(2+i).z+6.i=5.i.z+2$.

$$(2+i).z+6.i=5.i.z+2 \iff (2+i).z-5.i.z+=2-6.i \iff (2-4.i).z=2-6.i$$

$$\iff z=\frac{2-6.i}{2-4.i}=\underbrace{\frac{(2-6.i).(2+4.i)}{(2-4.i).(2+4.i)}=\frac{4+8.i-12.i+24}{(2)^2+(-4)^2}}_{\text{Un nombre}\times\text{son conjugué=module}^2}$$

$$\iff z=\frac{28-4.i}{20}=\frac{28}{20}-\frac{4}{20}.i=\frac{7}{5}-\frac{1}{5}.i$$

<u>Conclusion :</u> la solution de l'équation est le nombre complexe $1,4-0,2.i$.

➲ Résolvons dans ℂ l'équation $(3+2.i).z+6.i=10-i.\overline{z}$.

On appelle x et y les parties réelle et imaginaire de l'inconnue complexe z. Nous avons :

$$z=x+i.y \qquad \overline{z}=x+i.y$$

L'équation devient :

$$(3+2.i).z+6.i=10-i.\overline{z} \iff (3+2.i).(x+i.y)+6.i=10-i.(x-i.y)$$

$$\iff 3.x+3.i.y+2.i.x-2.y+6.i=10-i.x-y$$

$$\iff \underbrace{(3.x-2.y)+i.(2.x+3.y+6)=(10-y)+i.(-x)}_{\text{Deux nombres complexes égaux}}$$

Deux nombres complexes sont égaux lorsque et seulement lorsque leurs parties réelles et imaginaires sont respectivement égales.

$$(3+2.\boldsymbol{i}).z+6.\boldsymbol{i}=10-\boldsymbol{i}.\bar{z} \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{3.x-2.y=10-y}_{\text{Mêmes parties réelles}} \quad \underline{\text{et}} \quad \underbrace{2.x+3.y+6=-x}_{\text{Mêmes parties imaginaires}}$$

Par conséquent, les réels x et y sont les solutions du système linéaire 2×2 :

$$\begin{cases} 3.x-y=10 & \Leftrightarrow & 3.x-y=10 & \textbf{\textit{(1)}} \\ 3.x+3.y=-6 & \Leftrightarrow & x+y=-2 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$$

Pour résoudre ce dernier, nous allons procéder par substitution.
A partir de l'équation ***(1)***, on exprime y en fonction de x.

$$3.x-y=10 \quad\Leftrightarrow\quad -y=10-3.x \quad\Leftrightarrow\quad y=-10+3.x$$

Dans l'équation **(2)**, on remplace y par ce qu'il vaut en x. Par suite :

$$\underbrace{(-10+3.x)}_{y}+x=-2 \quad\Leftrightarrow\quad -10+3.x+x=-2 \quad\Leftrightarrow\quad 4.x=8 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{8}{4}=2$$

Il vient alors pour y :

$$y=-10+3\times\underbrace{2}_{x}=-10+6=-4$$

<u>Conclusion :</u> la solution de l'équation $(3+2.\boldsymbol{i}).z+6.\boldsymbol{i}=10-\boldsymbol{i}.\bar{z}$ est le complexe $2-4.\boldsymbol{i}$.

Troisième partie : la puissance de l'argument

➲ Calculons le module du nombre complexe $Z=\sqrt{6}-\sqrt{2}.\boldsymbol{i}$.

$$|Z|=\left|\sqrt{6}-\sqrt{2}.\boldsymbol{i}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6+2}=\sqrt{8}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2.\sqrt{2}$$

<u>Conclusion :</u> le module du nombre complexe $Z=\sqrt{6}-\sqrt{2}.\boldsymbol{i}$ est $2.\sqrt{2}$.

➲ Déterminons un argument de Z.

$$\frac{Z}{|Z|}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}.\boldsymbol{i}}{2.\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2.\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2.\sqrt{2}}.\boldsymbol{i}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2.\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2.\sqrt{2}}.\boldsymbol{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}.\boldsymbol{i}$$

Les cosinus et sinus de $-\frac{\pi}{6}$ sont respectivement égaux à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Par suite :

$$\frac{Z}{|Z|}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}.\boldsymbol{i}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\boldsymbol{i}.\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{6}}$$

<u>Conclusion :</u> un argument de $Z=\sqrt{6}-\sqrt{2}.\boldsymbol{i}$ est $-\frac{\pi}{6}$.

➲ Intéressons-nous à l'argument de Z^{126} . Nous pouvons écrire :

$$\text{Arg}\left(Z^{126}\right)=126\times\text{Arg}(Z)=126\times\frac{-\pi}{6}=-21.\pi=\pi \text{ modulo } 2.\pi$$

Or les seuls complexes ayant un argument égal à π sont les réels négatifs comme -1 .
<u>Conclusion :</u> Z^{126} est un réel négatif.

Quatrième partie : l'angle de l'argument

Une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est un argument du complexe $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

Calculons ce dernier.

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2.\boldsymbol{i}-(1-\boldsymbol{i})}{(3-2.\boldsymbol{i})-(1-\boldsymbol{i})}=\underbrace{\frac{-1+3.\boldsymbol{i}}{2-\boldsymbol{i}}=\frac{(-1+3.\boldsymbol{i}).(2+\boldsymbol{i})}{(2-\boldsymbol{i}).(2+\boldsymbol{i})}}_{\text{On multiple par la quantité conjuguée}}=\frac{-2-\boldsymbol{i}+6.\boldsymbol{i}-3}{(2)^2-(\boldsymbol{i})^2}$$

$$=\frac{-5+5.\boldsymbol{i}}{5}=-1+\boldsymbol{i}$$

De façon à obtenir un argument de $-1+\boldsymbol{i}$, calculons le module de ce dernier.

$$|-1+\boldsymbol{i}|=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

Par suite, il vient que :

$$\frac{-1+\boldsymbol{i}}{|-1+\boldsymbol{i}|}=\frac{-1+\boldsymbol{i}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\text{i}.\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or les cosinus et sinus de $\frac{3.\pi}{4}$ sont respectivement égaux à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Par suite :

$$\frac{-1+\boldsymbol{i}}{|-1+\boldsymbol{i}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\frac{3.\pi}{4}\right)+\boldsymbol{i}.\sin\left(\frac{3.\pi}{4}\right)=e^{\boldsymbol{i}.\frac{3.\pi}{4}}$$

<u>Conclusion :</u> un argument du nombre complexe $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est $\frac{3.\pi}{4}$. C'est aussi une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Dernière partie : on va tout casser !

a) Avant toutes choses, rappelons les puissances deux, trois et quatre de i.

$$i^2 = 1 \quad i^3 = i^2 \times i = (-1) = \times i = -i \qquad i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

Et aussi celles de son opposé $-i = (-1)\times i$:

$$(-i)^2 = (-1)^2 \times i^2 = 1\times(-1) = -1 \qquad (-i)^3 = (-1)^3 \times i^3 = (-1)\times(-i) = i$$

$$(-i)^4 = (-1)^4 \times i^4 = 1\times 1 = 1$$

A présent, nous pouvons calculer les images de i et $-i$ par le polynôme P :

- $P(i) = 2\times i^4 - 4\times i^3 + 8\times i^2 - 4\times i + 6 = 2 + 4.i - 8 - 4.i + 6 = 0$
- $P(-i) = 2\times(-i)^4 - 4\times(-i)^3 + 8\times(-i)^2 - 4\times(-i) + 6 = 2 - 4.i - 8 + 4.i + 6 = 0$

<u>Conclusion :</u> leurs images par le polynôme P étant nulles, les nombres i et $-i$ sont deux racines du polynôme P.

b) Comme i et $-i$ sont deux racines du polynôme P alors on retrouve dans la forme factorisée de P les facteurs $z - i$ et $z - (-i) = z + i$.

Autrement dit, pour tout nombre complexe z, nous avons :

$$P(z) = \underbrace{(z-i).(z+i)}_{\text{Développons...}}\times\ldots = \left(z^2 - i^2\right)\times\ldots = \left(z^2 - (-1)\right)\times\ldots = \left(z^2+1\right)\times\ldots$$

<u>Conclusion :</u> le polynôme P est factorisable par $z^2 + 1$.

➲ Factorisons le polynôme P par la forme du second degré z^2+1.

Pour tout nombre complexe z, nous pouvons écrire :

$$P(z) = \underbrace{2.z^4}_{\substack{\text{Combien de}\\ \text{fois } z^2+1?}} - 4.z^3 + 8.z^2 - 4.z + 6 = \underbrace{2.z^2.\left(z^2+1\right) - 2.z^2}_{2.z^4} - 4.z^3 + 8.z^2 - 4.z + 6$$

$$= 2.z^2.\left(z^2+1\right) \underbrace{-4.z^3}_{\substack{\text{Combien}\\ \text{de } z^2+1?}} + 6.z^2 - 4.z + 6$$

$$= 2.z^2.\left(z^2+1\right) \underbrace{-4.z.\left(z^2+1\right) + 4.z}_{-4.z^3} + 6.z^2 - 4.z + 6$$

$$= 2.z^2.\left(z^2+1\right) - 4.z.\left(z^2+1\right) + \underbrace{6.z^2+6}_{\text{Par 6...}} = 2.z^2.\underbrace{\left(z^2+1\right)}_{\text{Voilà le...}} - 4.z.\underbrace{\left(z^2+1\right)}_{\text{...facteur...}} + 6.\underbrace{\left(z^2+1\right)}_{\text{...commun}}$$

$$= \left(z^2+1\right).\left(2.z^2 - 4.z + 5\right) \quad \leftarrow \text{ Voilà le résultat recherché mais continuons...}$$

$$P(z) = \underbrace{(z-i).(z+i)}_{\substack{z^2+1\\ \text{D'après 5.b}}}\times 2\times \underbrace{\left[z^2 - 2.z + 3\right]}_{\substack{z^2-2.z \text{ est le début de}\\ \text{l'identité } (z-1)^2}} = 2\times(z-i).(z+i)\times\left[(z-1)^2 - 1 + 3\right]$$

$$= 2\times(z-i).(z+i)\times\left[(z-1)^2 + 2\right] = 2\times(z-i).(z+i)\times\left[(z-1)^2 - (-2)\right]$$

$$= 2\times(z-i).(z+i)\times\underbrace{\left[(z-1)^2 - \left(i.\sqrt{2}\right)^2\right]}_{a^2-b^2}$$

$$= 2\times(z-i).(z+i)\times\underbrace{\left(z-1-i.\sqrt{2}\right)}_{(a-b)}.\underbrace{\left(z-1-i.\sqrt{2}\right)}_{(a+b)} \leftarrow \text{ P est entièrement factorisé}$$

c) Pour résoudre dans ℂ l'équation $P(z) = 0$, utilisons sa forme totalement factorisée.

$$P(z) = 0 \iff 2.(z-i).(z+i).\left(z-1-i.\sqrt{2}\right).\left(z-1+i.\sqrt{2}\right) = 0$$

Or dans ℂ comme dans ℝ, un produit est nul lorsque et seulement lorsque l'un de ses facteurs l'est. Par suite :

$$P(z) = 0 \iff z - i = 0 \ \underline{\text{ou}}\ z + i = 0 \ \underline{\text{ou}}\ z - 1 - i.\sqrt{2} = 0 \ \underline{\text{ou}}\ z - 1 - i.\sqrt{2} = 0$$

$$\iff z = -i \ \underline{\text{ou}}\ z = -i \ \underline{\text{ou}}\ z = 1 + i.\sqrt{2} \ \underline{\text{ou}}\ z = 1 - i.\sqrt{2}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $P(z)$ a quatre solutions dans ℂ : $-i$; i ; $1 - i.\sqrt{2}$ et $1 + i.\sqrt{2}$.

Par contre, elle n'en a aucune dans ℝ.

Devoir Express No.5

Le contexte

Ce cinquième devoir express d'une durée d'une heure abordait les nombres complexes sous leur application géométrique. Nous étions alors au début du mois de décembre 2005 et le bac blanc approchait à grands pas.
Les calculatrices étaient autorisées.

L'énoncé

Première partie : l'interprétation du quotient

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Les points A, B et C ont pour affixes respectives z_A ; z_B et z_C.

a) Exprimer en fonction des trois affixes z_A ; z_B et z_C :

$$\frac{AC}{AB} = \qquad \underbrace{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}_{\text{Angle orienté}} =$$

Dans la suite de l'exercice, chaque bonne réponse rapporte 1,5 points et chaque mauvaise en enlève 1. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cette partie de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

b) On sait que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 2.\boldsymbol{i}$. Parmi les quatre affirmations, laquelle est vraie ?

Les points A, B et C sont alignés.	Le triangle ABC est rectangle en A.
Le triangle ABC est isocèle en A mais pas équilatéral.	Le triangle ABC est équilatéral.

c) On sait que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -15$. Parmi les quatre affirmations, laquelle est vraie ?

Les points A, B et C sont alignés.	Le triangle ABC est rectangle en A.
Le triangle ABC est isocèle en A mais pas équilatéral.	Le triangle ABC est équilatéral.

d) On sait que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{2}$. Parmi les quatre affirmations, laquelle est vraie ?

Les points A, B et C sont alignés.	Le triangle ABC est rectangle en A.
Le triangle ABC est isocèle en A mais pas équilatéral.	Le triangle ABC est équilatéral.

Seconde partie : ensembles avec les complexes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

a) Déterminer la nature et les attributs de l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que :

$$\left|2.z + 6 - 2.\boldsymbol{i}\right| = 14$$

b) Déterminer la nature et les attributs de l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z tels que :

$$\left|\boldsymbol{i}.z - 4 + 3.\boldsymbol{i}\right| = \left|z + 5 - \boldsymbol{i}\right|$$

c) Déterminer la nature et les attributs de l'ensemble $\mathcal{G}$ des points M d'affixe z de la forme :

$$z = 4.e^{i.t} - 2 + 6.i \quad \text{où t est un réel quelconque.}$$

Dernière partie : silence, ça tourne !

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On appelle A le point d'affixe $-3-2.\boldsymbol{i}$

On note $\boldsymbol{r}$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Soit M un point quelconque d'affixe z.
On appelle M' son image par la rotation $\boldsymbol{r}$. L'affixe de M' est notée z'.
Déterminer l'écriture complexe de la rotation $\boldsymbol{r}$.

b) On note B le point d'affixe $b=7-5.\boldsymbol{i}$. On appelle B' l'image de B par la rotation $\boldsymbol{r}$.
Calculer l'affixe b' du point B'.

c) Le point C' d'affixe $c'=5+4.\boldsymbol{i}$ est l'image du point C par la rotation $\boldsymbol{r}$.
Déterminer l'affixe c du point C.

d) M est un point du plan d'affixe z. On appelle M' son image par la transformation T.
On note z' l'affixe du point M'.
L'écriture complexe de la transformation T est :

$$\underbrace{z'}_{T(z)}=7+3.\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}.z$$

Déterminer la nature et les attributs de la transformation T.

Le corrigé

Première partie : l'interprétation du quotient

a) D'après ce qui a été vu en cours, nous pouvons écrire :

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\left|z_C-z_A\right|}{\left|z_B-z_A\right|}=\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| \qquad \underbrace{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}_{\text{Angle orienté}}=\operatorname{Arg}\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$$

b) Dans le présent cas et en application ce qui vient d'être écrit, nous avons :

$$\frac{AC}{AB}=\left|2.\boldsymbol{i}\right|=2 \qquad \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\operatorname{Arg}\left(2.\boldsymbol{i}\right)=\frac{\pi}{2}\text{ modulo }2.\pi$$

<u>Conclusion :</u> l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ étant droit, le triangle ABC est rectangle en A.

Par contre, comme $AC=2\times AB$ alors il n'est pas isocèle en A.

c) Comme le rapport $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est un réel alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

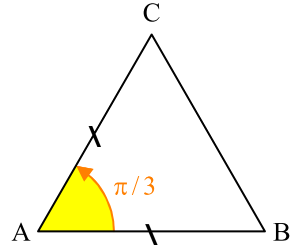
D'ailleurs, comme $z_C-z_A=-15\times\left(z_B-z_A\right)$ alors on a : $\overrightarrow{AC}=-15.\overrightarrow{AB}$. <u>Conclusion :</u> les points A, B et C sont alignés.

d) Dans le présent cas, nous pouvons écrire :

$$\frac{AC}{AB}=\left|\frac{1+\sqrt{3}.\boldsymbol{i}}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\boldsymbol{i}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=\sqrt{1}=1$$

Donc $AC=AB$.
Par conséquent, le triangle ABC est au moins isocèle en A. Voyons s'il ne serait pas équilatéral avec en déterminant la mesure de l'angle
au sommet $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)&=\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\boldsymbol{i}\right)\\&=\operatorname{Arg}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\boldsymbol{i}\right)\\&=\operatorname{Arg}\left(e^{i.\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{\pi}{3}\text{ modulo }2.\pi\end{aligned}$$



<u>Conclusion :</u> comme l'angle au sommet A mesure $\frac{\pi}{3}=60°$ alors le triangle ABC isocèle en A est aussi équilatéral.

Seconde partie : ensembles avec les complexes

a) Pour pouvoir nous prononcer sur l'ensemble $\mathcal{E}$, modifions l'égalité le caractérisant.

$$\begin{aligned}\text{M d'affixe z appartient à }\mathcal{E}&\Leftrightarrow\left|2.z+6-2.\boldsymbol{i}\right|=14\Leftrightarrow\left|2.\left(z+3-\boldsymbol{i}\right)\right|=14\\&\Leftrightarrow\underbrace{\left|2\right|}_{2}\times\left|z-\left(-3+\boldsymbol{i}\right)\right|=14\Leftrightarrow\underbrace{\left|z-\left(-3+\boldsymbol{i}\right)\right|}_{z-z_A}=7\\&\Leftrightarrow AM=7\quad\text{où le point A a pour affixe }-3+\boldsymbol{i}.\end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre A d'affixe $-3+\boldsymbol{i}$ et de rayon 7.

b) Pour connaître la nature de l'ensemble $\mathcal{F}$, modifions l'égalité le caractérisant.

$$\text{M d'affixe z appartient à } \mathcal{F} \Leftrightarrow |\boldsymbol{i}.z-4+3.\boldsymbol{i}|=|z+5-\boldsymbol{i}| \Leftrightarrow |\boldsymbol{i}.(z+4.\boldsymbol{i}+3)|=|z+5-\boldsymbol{i}|$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{|\boldsymbol{i}|}_{1}\times|z+4.\boldsymbol{i}+3|=|z+5-\boldsymbol{i}|$$
$$\Leftrightarrow |z-(-3-4.\boldsymbol{i})|=|z-(-5+\boldsymbol{i})|$$
$$\Leftrightarrow AM=BM \quad \begin{cases}\text{où les points A et B ont pour affixes}\\ \text{respectives } -3-4.\boldsymbol{i} \text{ et } -5+\boldsymbol{i}.\end{cases}$$

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{F}$ est l'ensemble des points M équidistants de A et B : c'est la médiatrice du segment [AB].

Le point sur…les propriétés du module

Le module du nombre complexe z est défini par : $|z|=\sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2}$

C'est un réel positif ou nul. Le module d'un nombre réel est sa valeur absolue.
A l'instar de celle-ci, il ne laisse passer que les opérations de la famille multiplication.

$$|z\times z'|=|z|\times|z'| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|} \qquad |z^n|=|z|^n$$

Par contre, le module n'est compatible ni avec l'addition, ni avec la soustraction.

$$\cancel{|z+z'|=|z|+|z'|} \qquad \cancel{|z-z'|=|z|-|z'|} \qquad \text{mais} \qquad \underbrace{|z+z'|\le|z|+|z'|}_{\text{Inégalité triangulaire}}$$

c) Pour ce qui concerne l'ensemble $\mathcal{G}$, nous pouvons écrire :

$$\text{M d'affixe z appartient à } \mathcal{G} \Leftrightarrow \text{Il existe un réel t tel que } z=\underbrace{4}_{\text{Rayon}}.e^{\boldsymbol{i}.t}+\underbrace{(-2+6.\boldsymbol{i})}_{\text{Centre}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{G}$ est le cercle de centre le point d'affixe $-2+6.\boldsymbol{i}$ et de rayon 4.

Egalement : si $M(z)\in\mathcal{G}$ alors $|z-(-2+6.\boldsymbol{i})|=|4.e^{\boldsymbol{i}.t}|=|4|\times|e^{\boldsymbol{i}.t}|=4\times1=1$

Dernière partie : silence, ça tourne !

a) Nous pouvons écrire :

$$M'(z') \text{ est l'image } M(z) \text{ par la rotation } \boldsymbol{r} \Leftrightarrow z'-(-3-2.\boldsymbol{i})=e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{2}}.[z-(-3-2.\boldsymbol{i})]$$
$$\Leftrightarrow z'=\boldsymbol{i}.[z+3+2.\boldsymbol{i}]-3-2.\boldsymbol{i}$$
$$\Leftrightarrow z'=\boldsymbol{i}.z+3.\boldsymbol{i}-2-3-2.\boldsymbol{i}$$
$$\Leftrightarrow z'=\boldsymbol{i}.z-5+\boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion :</u> la rotation $\boldsymbol{r}$ a pour expression complexe $\boldsymbol{r}(z)=z'=\boldsymbol{i}.z-5+\boldsymbol{i}$.

Le point sur…les valeurs particulières de l'exponentielle imaginaire

$$1=e^{\boldsymbol{i}.0}=e^{\boldsymbol{i}.2\pi} \qquad \boldsymbol{i}=e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{2}}=e^{-\boldsymbol{i}.\frac{3\pi}{2}} \qquad -1=e^{\boldsymbol{i}.\pi}=^{-\boldsymbol{i}.\pi} \qquad -\boldsymbol{i}=e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{2}}=e^{\boldsymbol{i}.\frac{3.\pi}{2}}$$

b) Comme le point B' est l'image de B par la rotation $\boldsymbol{r}$ alors nous pouvons écrire :

$$b'=\boldsymbol{r}(b)=\boldsymbol{i}.b-5+\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}.(7-5.\boldsymbol{i})-5+\boldsymbol{i}=7.\boldsymbol{i}+5-5+\boldsymbol{i}=8.\boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion :</u> le point B' a pour affixe $8.\boldsymbol{i}$.

c) Comme le point C' est l'image de C par la rotation $\boldsymbol{r}$ alors nous avons :

$$\text{C a pour image C' par la rotation } \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}(c)=c'$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{i}.c-5+\boldsymbol{i}=5+4.\boldsymbol{i} \Leftrightarrow \boldsymbol{i}.c=10+3.\boldsymbol{i}$$
$$\Leftrightarrow c=\frac{10+3.\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{i}}=(10+3.\boldsymbol{i})\times(-\boldsymbol{i})=3-10.\boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion :</u> le point C a pour affixe $3-10.\boldsymbol{i}$.

d) Vu son écriture complexe $T(z)=z'=-\boldsymbol{i}.z+7+3.\boldsymbol{i}$, T semble être une rotation.

Commençons par déterminer les affixes ω des points Ω invariants par T.

$$\text{Le point } \Omega \text{ d'affixe } \omega \text{ est invariant par T} \Leftrightarrow T(\Omega)=\Omega \Leftrightarrow 7+3.\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}.\omega=\omega$$
$$\Leftrightarrow 7+3.\boldsymbol{i}=\omega+\boldsymbol{i}.\omega \Leftrightarrow 7+3.\boldsymbol{i}=\omega.(1+\boldsymbol{i})$$
$$\Leftrightarrow \omega=\frac{7+3.\boldsymbol{i}}{1+\boldsymbol{i}}=\frac{(7+3.\boldsymbol{i}).\overline{(1+\boldsymbol{i})}}{(1+\boldsymbol{i}).\overline{(1+\boldsymbol{i})}}$$
$$\Leftrightarrow \omega=\frac{(7+3.\boldsymbol{i}).(1-\boldsymbol{i})}{|1+\boldsymbol{i}|^2}=\frac{7-7.\boldsymbol{i}+3.\boldsymbol{i}+3}{\left(\sqrt{(1)^2+(1)^2}\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow \omega=\frac{10-4.\boldsymbol{i}}{2}=5-2.\boldsymbol{i}$$

Donc la transformation T a un seul point invariant : Ω d'affixe $\omega=5-2.\boldsymbol{i}$.
Ce nombre complexe ω vérifie l'égalité $\omega=7+3.\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}.\omega$.
Désormais, nous pouvons mettre en évidence que l'écriture complexe de T est celle d'une rotation.

Pour tout nombre complexe z, nous pouvons écrire :

$$\ominus \begin{array}{l} z' = 7+3.\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}.z \\ \omega = 7+3.\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}.\omega \\ \hline \end{array}$$

$$z' - \omega = -\boldsymbol{i}.z - \left(-\boldsymbol{i}.\omega\right) \quad \Leftrightarrow \quad z' - \omega = -\boldsymbol{i}.\left(z - \omega\right)$$

Or $-\boldsymbol{i} = e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{2}}$. L'écriture complexe de la transformation T devient :

$$z' - \left(5 - 2.\boldsymbol{i}\right) = e^{-i.\frac{\pi}{2}}.\left(z - \left(5 - 2.\boldsymbol{i}\right)\right)$$

<u>Conclusion :</u> T est la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = 5 - 2.\boldsymbol{i}$ et d'anglé $-\frac{\pi}{2}$.

Le point sur…les fonctions affines de ℂ qui sont des transformations.

Les fonctions affines de ℂ sont des fonctions T de la forme :

$$T(z) = \boldsymbol{a}.z + \boldsymbol{b}$$

où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont deux coefficients complexes.

Suivant la valeur de $\boldsymbol{a}$, la fonction affine T est une certaine transformation du plan :

- Si $\boldsymbol{a} = 1$ <u>alors</u> $T(z) = z + \boldsymbol{b}$ est une <u>translation</u> de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $\boldsymbol{b}$.
- Si $\boldsymbol{a}$ est un réel $\boldsymbol{k}$ <u>alors</u> $T(z) = \boldsymbol{k}.z + b$ est une <u>homothétie</u> de rapport $\boldsymbol{k}$.

  Ainsi la fonction $T(z) = -4.z + 2 - \boldsymbol{i}$ est une homothétie de rapport -4.
- Si $\boldsymbol{a}$ est un nombre complexe de module 1 <u>alors</u> $\boldsymbol{a}$ est de la forme $\boldsymbol{a} = e^{\boldsymbol{i}.\theta}$.

  $T(z) = e^{\boldsymbol{i}.\theta}.z + \boldsymbol{b}$ est alors une <u>rotation</u> d'angle θ.

  Ainsi la fonction $T(z) = \underbrace{\frac{\sqrt{2} - \boldsymbol{i}.\sqrt{2}}{2}}_{e^{-\boldsymbol{i}.\pi/4}}.z + 5 + 3.\boldsymbol{i}$ est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
- Si $\boldsymbol{a} = -1$ alors la transformation T a pour expression complexe :

$$T(z) = \underbrace{(-1).z + \boldsymbol{b}}_{\text{Homothétie de rapport } -1} = \underbrace{e^{\boldsymbol{i}.\pi}.z + \boldsymbol{b}}_{\text{Rotation d'angle } \pi}$$

  T est alors est une symétrie centrale.

On détermine le centre d'une homothétie ou d'une rotation en cherchant les points invariants par la transformation T, c'est-à-dire les points M dont l'affixe est solution de l'équation $T(z) = z$. Autrement dit, on doit résoudre cette dernière équation !

Le premier bac blanc

Le contexte

Ce premier bac blanc intervint juste avant les vacances de Noël 2005. Il abordait tous les points vus depuis le début de l'année et même un peu avant : dérivabilité et limites, les fonctions exponentielle et logarithme népérien, nombres complexes. Il ne comportait aucune question de cours et était constitué d'exercices de bac plus ou moins adaptés. D'une durée de quatre heures, les calculatrices étaient bien entendu autorisées.

L'énoncé

Premier exercice : les racines ont le tournis

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Le polynôme P est défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z)=z^3-8.$$

a) Déterminer une racine réelle du polynôme P.
Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z)=(z-2).(a.z^2+b.z+c)$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3-8=0$.

A, B et C sont trois points du plan d'affixes respectives :

$$z_A=-1+\boldsymbol{i}.\sqrt{3} \qquad z_B=2 \qquad z_C=-1-\boldsymbol{i}.\sqrt{3}$$

b) Ecrire les nombres complexes z_A et z_C sous forme trigonométrique.
Déterminer la nature du triangle ABC.

On appelle F la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=\boldsymbol{i}.(4-z)+10$$

c) Déterminer la nature et les attributs de la transformation F.

d) Déterminer l'image de la droite (AC) par la transformation F.

Second exercice : une fonction assez complexe

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

La fonction f est définie pour tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}\setminus\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$ par :

$$f(z)=\frac{z}{z^2+1}$$

On appelle A et B les points d'affixes respectives $\boldsymbol{i}$ et $-\boldsymbol{i}$.

a) Calculer $f(2+\boldsymbol{i})$.

b) En la résolvant, déterminer les deux solutions complexes z_1 et z_2 de l'équation :

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On les écrira d'abord sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

c) On pose $z=x+\boldsymbol{i}.y$ où x et y sont les parties réelle et imaginaire du complexe z.
Etablir que :

$$f(z)=\frac{x.(x^2+y^2+1)}{(x^2-y^2+1)^2+4.x^2.y^2}+\boldsymbol{i}.\frac{(-y).(x^2+y^2-1)}{(x^2-y^2+1)^2+4.x^2.y^2}$$

d) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel.
Note : *on pourra s'intéresser à la partie imaginaire de f(z).*

e) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z tels que $\operatorname{Arg}[f(z)]=\frac{\pi}{2}$.

Troisième exercice : exponentielle vs logarithme

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=e^x-\ln(x)$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

En remarquant que $f(x)=x.\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln(x)}{x}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Le cas échéant, interpréter graphiquement les résultats précédents.

b) La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x.e^x - 1$$

Calculer les images de 0 et 1 par la fonction g.
Etudier les variations de la fonction g. (Ses limites ne sont pas demandées)
Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;1]$.
A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α au centième près.
En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$?

Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

Etablir le tableau de variation de la fonction f.

En remarquant que $\alpha.e^\alpha - 1 = 0$, démontrer que :

$$f(\alpha) = \frac{1+\alpha^2}{\alpha}$$

d) Tracer la courbe (C) ainsi que toutes les droites rencontrées au cours de l'exercice.

Dernier exercice : exponentielle vs exponentielle

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

On note (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Le cas échéant, interpréter graphiquement les résultats précédents.

b) Etudier les variations de la fonction f.
Note : *on n'omettra pas d'expliquer brièvement pourquoi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

On appelle A le point de la courbe (C) dont l'abscisse est 0.

c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A.

Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la tangente T. Pour cela, on pourra étudier le signe la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - f(x)$$

en prouvant que $\varphi'(x) = \dfrac{\left(e^x - 1\right)^2}{4.\left(1+e^x\right)^2}$.

d) Tracer la courbe (C) ainsi que toutes les droites rencontrées au cours de l'exercice.

Le corrigé

Premier exercice : les racines ont le tournis

Les racines complexes d'une forme du second degré à coefficients réels
Lorsque son discriminant $\Delta = b^2 - 4.a.c$ est négatif, l'équation du second degré $a.x^2 + b.x + c = 0$ admet a deux solutions dans $\mathbb{C}$ mais aucune dans $\mathbb{R}$.
Les deux solutions complexes sont $\dfrac{-b + \boldsymbol{i}.\sqrt{-\Delta}}{2.a}$ et $\dfrac{-b - \boldsymbol{i}.\sqrt{-\Delta}}{2.a}$.
Ces deux solutions complexes sont les conjuguées l'une de l'autre.
Note : Δ étant un réel négatif, son opposé $-\Delta$ est un réel positif.

a) Comme $P(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8 = 0$ alors 2 est une racine réelle du polynôme P.
Donc ce dernier est factorisable par $z-2$. Entamons la factorisation de P par $z-2$.

$$P(z) = z^3 - 8 = \underbrace{z^2.(z-2) + 2.z^2}_{z^3} - 8 = z^2.(z-2) + \underbrace{2.z.(z-2) + 4.z}_{2.z^2} - 8$$

$$= z^2.\underbrace{(z-2)}_{\text{Voilà un...}} + 2.z.\underbrace{(z-2)}_{\text{...facteur...}} + \overbrace{4.\underbrace{(z-2)}_{\text{...commun}}}^{4.z-8} = \underbrace{(z-2).\left[z^2 + 2.z + 4\right]}_{\substack{\text{Voilà le résultat recherché !}\\ \text{Mais poursuivons la factorisation.}}}$$

$$= (z-2).\left[\underbrace{(z+1)^2 - 1}_{z^2+2.z} + 4\right] = (z-2).\left[(z+1)^2 + 3\right] = (z-2).\left[(z+1)^2 - (-3)\right]$$

$$= (z-2).\overbrace{\left[(z+1)^2 - \left(\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right)^2\right]}^{a^2-b^2} = \underbrace{(z-2).\overbrace{\left(z+1-\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right)}^{a-b}.\overbrace{\left(z+1+\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right)}^{a+b}}_{\text{Le polynôme P est entièrement scindé dans } \mathbb{C}}$$

Ayant complètement factorisé le polynôme P, la résolution de l'équation $P(z)=0$ devient une promenade de santé.

$$\underbrace{\overbrace{(z-2).\left(z+1-i.\sqrt{3}\right).\left(z+1+i.\sqrt{3}\right)}^{P(z)}=0}_{\text{Un produit est nul si et seulement...}} \Leftrightarrow \underbrace{z-2=0 \;\underline{\text{ou}}\; z+1-i.\sqrt{3}=0 \;\underline{\text{ou}}\; z+1+i.\sqrt{3}=0}_{\text{...si l'un de ses facteurs l'est.}}$$

$$\Leftrightarrow \quad z=2 \;\underline{\text{ou}}\; z=-1+i.\sqrt{3} \;\underline{\text{ou}}\; z=-1-i.\sqrt{3}$$

Conclusion : l'équation $z^3-8=0$ a trois solutions dans $\mathbb{C}$: 2 ; $-1+i.\sqrt{3}$ et $-1-i.\sqrt{3}$.

b) Pour écrire z_A et z_C sous forme trigonométrique, calculons d'abord leurs modules.

$$|z_A|=\left|-1+i.\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$$

Il vient alors :

$$z_A=\underbrace{-1+i.\sqrt{3}}_{\text{Forme algébrique}}=\underbrace{2}_{|z_A|}\times\left[-\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$=\underbrace{2\times\left[\cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right)+i.\sin\left(\frac{2.\pi}{3}\right)\right]}_{\text{Forme trigonométrique}}=\underbrace{2.e^{\frac{2.i.\pi}{3}}}_{\text{Forme exponentielle}}$$

Comme z_C est le conjugué de z_A alors il a le même module mais ses arguments sont opposés à ceux de z_A. Ainsi :

$$|z_C|=2 \quad\text{et}\quad \operatorname{Arg}(z_C)=-\frac{2.\pi}{3}\;(2\pi)$$

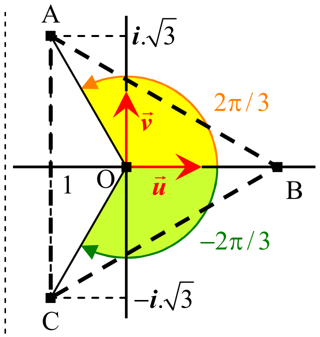
$$z_C=\underbrace{2\times\left[\cos\left(-\frac{2.\pi}{3}\right)+i.\sin\left(-\frac{2.\pi}{3}\right)\right]}_{\text{Forme trigonométrique}}$$

➲ Pour déterminer la nature du triangle ABC (qui semble au moins isocèle en B), calculons le rapport :

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{\left(-1+i.\sqrt{3}\right)-2}{\left(-1-i.\sqrt{3}\right)-2}=\frac{-3+i.\sqrt{3}}{-3-i.\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\left(-3+i.\sqrt{3}\right).\left(-3+i.\sqrt{3}\right)}{\left(-3+i.\sqrt{3}\right).\left(-3+i.\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(-3+i.\sqrt{3}\right)^2}{\left|-3+i.\sqrt{3}\right|^2}$$

$$=\frac{9-6.i.\sqrt{3}-3}{(-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{6-6.i.\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}-i.\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$



Par conséquent, nous avons :

$$\frac{BA}{BC}=\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=\left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right|=1 \quad\underline{\text{et}}\quad \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\operatorname{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\operatorname{Arg}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

Conclusion : ABC est un triangle isocèle en B dont l'angle au sommet B mesure $\frac{\pi}{3}$ radians $=60°$. Par conséquent, le triangle ABC est équilatéral.

c) Développons l'expression complexe de la transformation F. Pour tout complexe z :

$$F(z)=i.(4-z)+10=4.i-i.z+10=-i.z+10+4.i$$

F semble être une rotation. Commençons par déterminer ses points invariants.

M d'affixe z est invariant par F $\Leftrightarrow \underbrace{F(z)=z}_{F(M)=M} \Leftrightarrow -i.z+10+4.i=z$

$$\Leftrightarrow -i.z-z=-10-4.i \Leftrightarrow \underbrace{(1+i).z=10+4.i}_{\text{Je n'aime pas les signes moins}}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} z&=\frac{10+4.i}{1+i}=\frac{(10+4.i).(1-i)}{(1+i).(1-i)}=\frac{10-10.i+4.i-4.i^2}{1-i^2}\\ &=\frac{10-10.i+4.i+4}{1-(-1)}=\frac{14-6.i}{2}=7-3.i\end{aligned}\right.$$

La transformation F a donc un seul point invariant que nous appellons Ω et qui a pour affixe $\omega=7-3.i$. Ce complexe ω vérifie l'égalité $-i.\omega+10+4.i=\omega$.

Pour tout nombre complexe z, si on note $z'=F(z)$ alors il vient :

$$z'-\omega=(-i.z+10+4.i)-(-i.\omega+10+4.i)$$

$$=-i.z-(-i.\omega)=-i.(z-\omega)=e^{-i.\frac{\pi}{2}}.(z-\omega)$$

Conclusion : la transformation F est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω, point dont l'affixe est le nombre complexe $\omega=7-3.i$.

d) Si on appelle A' et C' les images des points A et C par la rotation F, l'image de la droite (AC) par cette transformation est la droite (A'C').

Calculons les affixes $z_{A'}$ et $z_{C'}$ des points A' et C' :

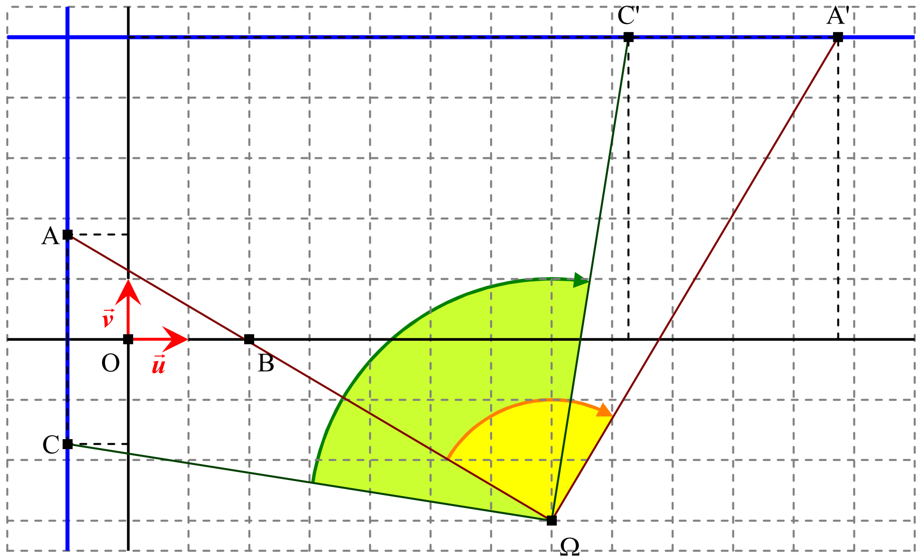
$$z_{A'}=F(z_A)=-i.z_A+10+4.i$$

$$=-i.\left(-1+i.\sqrt{3}\right)+10+4.i=i+\sqrt{3}+10+4.i=10+\sqrt{3}+5.i$$

$$z_{C'}=F(z_C)=-i.z_C+10+4.i$$

$$=-i.\left(-1-i.\sqrt{3}\right)+10+4.i=i-\sqrt{3}+10+4.i=10-\sqrt{3}+5.i$$

Graphiquement, la situation est la suivante :



Second exercice : une fonction assez complexe

a) Calculons l'image de $2+i$ par la fonction f.

$$f(2+i)=\frac{(2+i)}{(2+i)^2+1}=\frac{2+i}{4+4.i+i^2+1}=\frac{2+i}{4+4.i-1+1}=\frac{2+i}{4+4.i}$$

$$=\frac{(2+i).(4-4.i)}{(4+4.i).(4-4.i)}=\frac{8-8.i+4.i+4}{(4)^2-(4.i)^2}=\frac{12-4.i}{16-(-16)}=\frac{12-4.i}{32}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}.i$$

L'ensemble de définition de la fonction rationnelle complexe f

Pour que $f(z)$ existe, il faut et il suffit que son dénominateur z^2+1 soit non nul.

$f(z)$ n'existe pas $\Leftrightarrow \underbrace{z^2-i^2}_{z^2-(-1)}=0 \Leftrightarrow \underbrace{(z-i).(z+i)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{z=i \text{ ou } z=-i}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$

Conclusion : à l'exception de $-i$ et i, tous les complexes ont une image par f.

b) Résolvons dans $\mathbb{C}\backslash\{-i;i\}$ l'équation complexe $f(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Travaillant sur $\mathbb{C}\backslash\{-i;i\}$, le dénominateur de f est toujours non nul. Chouette !

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{z}{z^2+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\sqrt{3}.z-z^2-1}{\sqrt{3}.(z^2+1)}=0}_{\text{Un quotient qui existe est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{-z^2+\sqrt{3}.z-1=0}_{\text{...son numérateur l'est.}}$$

Sur $\mathbb{C}\backslash\{-i;i\}$, le dénominateur ne pose aucun problème.

$$\Leftrightarrow \underbrace{z^2-\sqrt{3}.z+1=0}_{\text{On multiplie tout par }-1} \Leftrightarrow \underbrace{\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}_{z^2-\sqrt{3}.z}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}+1=0 \Leftrightarrow \left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\underbrace{\left(\frac{i}{2}\right)^2}_{-1/4} \Leftrightarrow \underbrace{\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right).\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=0}_{\text{Un produit est nul...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}=0 \text{ ou } z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est.}} \Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{3}+i}{2} \text{ ou } z=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

Conclusion : l'équation $f(z)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ a deux solutions complexes conjuguées qui sont :

$$z_1=\underbrace{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}_{\text{Forme algébrique}}=\underbrace{1\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i.\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]}_{\text{Forme trigonométrique}} \qquad z_2=\underbrace{\frac{\sqrt{3}-i}{2}}_{\text{Forme algébrique}}=\underbrace{1\times\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i.\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}_{\text{Forme trigonométrique}}$$

c) Avant toute chose, écrivons le dénominateur sous forme algébrique.

Pour tout nombre complexe $z=\underbrace{x}_{\text{Partie réelle}}+i.\underbrace{y}_{\text{Partie imaginaire}}$, nous pouvons écrire :

$$z^2+1=(x+i.y)^2+1=x^2+2.i.x.y+(i.y)^2+1=\underbrace{x^2-y^2+1}_{\text{Partie réelle}}+i.\underbrace{2.x.y}_{\text{Partie imaginaire}}$$

Il vient alors que :

$$f(z)=\frac{x+\boldsymbol{i}.y}{\left(x^2-y^2+1\right)+\boldsymbol{i}.(2.x.y)}=\frac{[x+\boldsymbol{i}.y].\left[\left(x^2-y^2+1\right)-\boldsymbol{i}.(2.x.y)\right]}{\left[\left(x^2-y^2+1\right)+\boldsymbol{i}.(2.x.y)\right].\left[\left(x^2-y^2+1\right)-\boldsymbol{i}.(2.x.y)\right]}$$

$$=\frac{\overbrace{x^3-x.y^2+x-2.\boldsymbol{i}.x^2.y}^{\text{On distribue x}}+\overbrace{\boldsymbol{i}.y.x^2-\boldsymbol{i}.y^3+\boldsymbol{i}.y+2.x.y^2}^{\text{On distribue y}}}{\left(x^2-y^2+1\right)^2-(\boldsymbol{i}..2.x.y)^2}$$

$$=\frac{x^3+x.y^2+x-\boldsymbol{i}.x^2.y-\boldsymbol{i}.y^3+\boldsymbol{i}.y}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4.x^2.y^2}=\frac{\left[x^3+x.y^2+x\right]+\boldsymbol{i}.\left[x^2.(-y)+y^2.(-y)-(-y)\right]}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4.x^2.y^2}$$

$$=\underbrace{\frac{x.\left(x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4.x^2.y^2}}_{\text{Partie réelle de } f(z)}+\boldsymbol{i}.\underbrace{\frac{(-y).\left(x^2+y^2-1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4.x^2.y^2}}_{\text{Partie imaginaire de } f(z)}$$

d) Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. Ainsi :

M d'affixe z appartient à $\mathcal{E}$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im}\left[f(z)\right]=0$ $\underline{\text{et}}$ $\underbrace{z\neq\pm\boldsymbol{i}}_{\text{Ensemble de définition de f}}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{(-y).\left(x^2+y^2-1\right)}{\left(x^2-y^2+1\right)^2+4.x^2.y^2}=0}_{\text{Quand ce quotient réel est-il nul ?}} \quad \underline{\text{et}} \quad z\neq\pm\boldsymbol{i}$$

Lorsque z appartient à $\mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$, le dénominateur $\left|z^2+1\right|^2=\left(x^2-y^2+1\right)^2+4.x^2.y^2$

n'est jamais nul car z^2+1 ne l'est pas non plus. Il ne pose aucun problème. Ainsi :

M d'affixe z appartient à $\mathcal{E}$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{(-y).\left(x^2+y^2-1\right)=0}_{\text{Un produit est nul...}}$ $\underline{\text{et}}$ $z\neq\pm\boldsymbol{i}$

$$\Leftrightarrow -y=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad x^2+y^2-1=0 \quad \underline{\text{et}} \quad z\neq\pm\boldsymbol{i}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{y=0}_{\substack{\text{M appartient}\\ \text{à l'axe des}\\ \text{réels}}} \quad \underline{\text{ou}} \quad \underbrace{x^2+y^2=1}_{\substack{OM^2=1\ \Leftrightarrow\ OM=1\\ \text{M appartient au}\\ \text{cercle trigonométrique}}} \quad \underline{\text{et}} \quad z\neq\pm\boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ est l'union du cercle trigonométrique et de l'axe des réels à laquelle on retire les points A et B qui ont pour affixes respectives $\boldsymbol{i}$ et $-\boldsymbol{i}$.

e) Les complexes dont l'argument est égal à $\frac{\pi}{2}$ sont les imaginaires purs positifs. C'est-à-dire ceux dont la partie réelle est nulle et dont la partie imaginaire est positive. Par suite :

$M(z)\in\mathcal{F}$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re}\left[f(z)\right]=0$ $\underline{\text{et}}$ $\operatorname{Im}\left[f(z)\right]>0$ $\underline{\text{et}}$ $\underbrace{z\neq\pm\boldsymbol{i}}_{f(z)\text{ doit exister...}}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{x.\left(x^2+y^2+1\right)}{\left|z^2+1\right|^2}=0 \quad \underline{\text{et}} \quad \frac{(-y).\left(x^2+y^2-1\right)}{\left|z^2+1\right|^2}>0}_{} \quad \underline{\text{et}} \quad z\neq\pm\boldsymbol{i}$$

Comme on travaille sur $\mathbb{C}\backslash\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i}\}$, le dénominateur $\left|z^2+1\right|^2$ n'est jamais nul.
Et comme c'est le carré d'un module, il est toujours positif.
La nullité et la positivité des fractions reposent sur leurs seuls numérateurs.

$$\Leftrightarrow x.\left(x^2+y^2+1\right)=0 \quad \underline{\text{et}} \quad (-y).\left(x^2+y^2-1\right)>0 \quad \underline{\text{et}} \quad z\neq\pm\boldsymbol{i}$$

Or x^2+y^2+1 est un réel strictement positif. Donc le produit $x.\left(x^2+y^2+1\right)$ n'est nul que lorsque et seulement lorsque le seul facteur x l'est.

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0 \quad \underline{\text{et}} \quad (-y).\left(x^2+y^2-1\right)>0 \quad \underline{\text{et}} \quad z\neq\pm\boldsymbol{i}}_{\text{x est nul et cela a quelques conséquences...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=0 \quad \underline{\text{et}} \quad (-y).\left(y^2-1\right)>0 \quad \underline{\text{et}} \quad z\neq\pm\boldsymbol{i}}_{\text{Quand cela se réalise-t-il ?}}$$

Comme la partie réelle x est nulle, il est clair que $z=\boldsymbol{i}.y$ est un imaginaire pur.

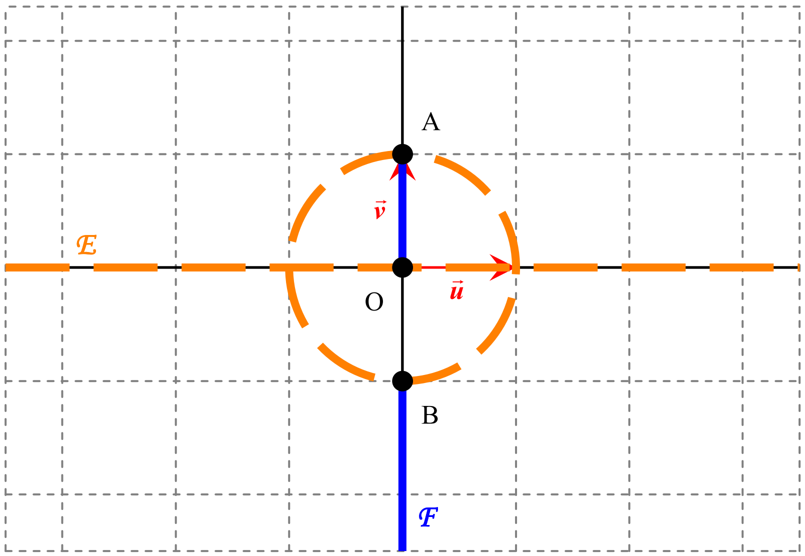
Maintenant $z=\boldsymbol{i}.y$ doit être différent de $\pm\boldsymbol{i}$ et être tel que $(-y).\left(y^2-1\right)>0$.

Pour résoudre cette inéquation, dressons le tableau de signe du produit $(-y).\left(y^2-1\right)$.

y	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$-y$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
y^2-1		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(-y).\left(y^2-1\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

<u>Conclusion :</u> $\mathcal{F}$ est l'ensemble des imaginaires purs de la forme $\boldsymbol{i}.y$ où y appartient à la réunion d'intervalles $]-\infty;-1[\cup]0;1[$.

Géométriquement, $\mathcal{F}$ est la demi droite $(BA]$ privée du point A et du segment [BO].



Les trois écritures d'un nombre complexe
Un nombre complexe z de parties réelle x et imaginaire y et, dont un argument est le réel θ peut être écrit sous trois formes :

$$z = \underbrace{x + \boldsymbol{i}.y}_{\text{Algébrique}} = \underbrace{|z| \times \left[\cos(\theta) + \boldsymbol{i}.\sin(\theta)\right]}_{\text{Trigonométrique}} = \underbrace{|z| \times e^{\boldsymbol{i}.\theta}}_{\text{Exponentielle}}$$

Troisième exercice : exponentielle vs logarithme

a) Lorsque x se rapproche de 0 par la droite, e^x tend vers $e^0 = 1$ et $\ln(x)$ vers $-\infty$.

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{e^x - \ln(x)}_{f(x)} = 1 - (-\infty) = +\infty$$

<u>Conséquence :</u> l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe (C).

➲ Lorsque x s'en va $+\infty$, e^x et $\ln(x)$ s'en vont tous deux vers $+\infty$. Donc f est alors une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. Or pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, nous avons :

$$f(x) = e^x - \ln(x) = x.\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Utilisant des limites établies dans le cours, il vient :

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x.\left[\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right]}_{f(x)} = (+\infty) \times \left[(+\infty) - 0\right] = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

b) Calculons les images de 0 et 1 par la fonction $g(x) = x.e^x - 1$.

$$g(0) = 0 \times e^0 - 1 = 0 \times 1 - 1 = -1 \qquad g(0) = 1 \times e^1 - 1 = e - 1$$

➲ Pour étudier les variations de la fonction sur $[0;+\infty[$, passons par sa dérivée.
Comme les fonctions x et exponentielle sont dérivables sur ℝ donc en particulier sur l'intervalle $[0;+\infty[$ alors il en va de même de leur produit $x.e^x$ et de la fonction g.

Pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, nous avons :

$$g'(x) = \big(\underbrace{x.e^x}_{u.v}\big)' - (1)' = \underbrace{1 \times e^x + x.e^x}_{u'.v+u.v'} - 0$$
$$= e^x.(1 + x)$$

L'exponentielle e^x est toujours positive.
Quand x appartient à $[0;+\infty[$, le facteur affine $x + 1$ est strictement positif.
Enfin :

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x.e^x - 1}_{g(x)} = (+\infty).(+\infty) - 1 = +\infty$$

Le signe de g' donne les variations de g...

x	0	$+\infty$
e^x	+	
$x + 1$	+	
$g'(x)$	+	
g	-1 ↗	$+\infty$

➲ Comme :
- la fonction g est continue sur l'intervalle $[0;1]$ car elle est dérivable sur $[0;+\infty[$.
- la fonction g est strictement croissante sur $[0;1]$ car elle l'est sur $[0;+\infty[$.

<u>alors</u> la fonction g est une bijection de $[0;1]$ sur $[\underbrace{-1}_{g(0)};\underbrace{e-1}_{g(1)}]$.

$e - 1$ étant un réel strictement positif, 0 appartient à l'intervalle $[-1;e-1]$.
Par conséquent, 0 a un unique antécédent par g dans l'intervalle $[0;1]$.
Autrement dit, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0;1]$.

On détermine qu'une valeur approchée au centième près de α est 0,57.

➲ La fonction g étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et s'annulant en α, son tableau de signe est celui ci-contre :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

f) Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0;+\infty[$, leur différence f n'est dérivable que sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x>0$, il vient :

$$f'(x)=\left(e^x\right)'-\left(\ln(x)\right)'$$
$$=e^x-\frac{1}{x}=\frac{e^x.x}{x}-\frac{1}{x}$$
$$=\frac{e^x.x-1}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

Connaissant les signes de g(x) et de x sur $]0;+\infty[$, nous pouvons déterminer celui de la dérivée $f'(x)$ qui nous donnera les variations de f...

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$\alpha+\frac{1}{\alpha}$	↗	$+\infty$

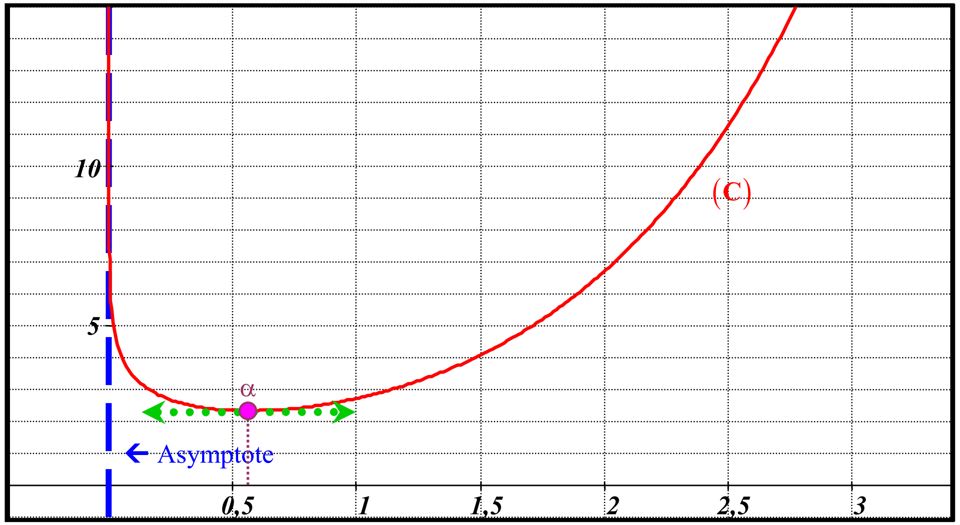
➲ α est la solution de l'équation $g(x)=0$ donc il vérifie les quatre égalités :

$$\alpha.e^{\alpha}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha.e^{\alpha}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\frac{1}{e^{\alpha}} \quad\Leftrightarrow\quad e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$$

Il vient alors :

$$f(\alpha)=e^{\alpha}-\ln(\alpha)=\frac{1}{\alpha}-\ln\left(\frac{1}{e^{\alpha}}\right)=\frac{1}{\alpha}-\left[-\ln\left(e^{\alpha}\right)\right]=\frac{1}{\alpha}+\ln\left(e^{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}+\alpha=\frac{1+\alpha^2}{\alpha}$$

d) La courbe (C) représentant la fonction $f(x)=e^x-\ln(x)$ n'est accompagnée que d'une seule asymptote verticale : l'axe des ordonnées qui est la droite d'équation $x=0$.



Dernier exercice : exponentielle vs exponentielle

a) Lorsque x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0. Par suite :

$$\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{e^x}{1+e^x}}_{f(x)}=\frac{0}{1+0}=0$$

<u>Conséquence :</u> l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

➲ Lorsque x s'en va vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$. Donc f est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. Levons celle-ci en expulsant du quotient ses termes les plus forts. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{e^x}{e^x}\times\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{e^x}$ tend vers $\frac{1}{+\infty}=0^+$. Donc $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{0^++1}=\frac{1}{1}=1$.

<u>Conséquence :</u> la droite d'équation $y=1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) La fonction exponentielle $u(x)=e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et y est strictement positive.

Il en va de même pour la fonction $v(x)=e^x+1$ qui ne s'annule donc jamais.

Donc leur quotient $f=\dfrac{u}{v}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, il vient :

$$f'(x)=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}=\frac{e^x.\left(1+e^x\right)-e^x.e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{e^x+e^{2.x}-e^{2.x}}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

Une exponentielle et un carré non nul sont deux quantités positives.
Par suite, le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et de variation de la fonction f est celui ci-contre.

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x		$+$	
$\left(e^x+1\right)^2$		$+$	
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

c) La tangente T a une équation réduite de la forme $y=f'(0)\times(x-0)+f(0)$.
Calculons l'image de 0 par la fonction f ainsi que le nombre dérivé de f en 0.

$$f(0)=\frac{e^0}{1+e^0}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2} \qquad f'(0)=\frac{e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation réduite de la tangente T est $y=\frac{1}{4}\times(x-0)+\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$.

➲ Pour connaître la position de la tangente T par rapport à la courbe (C), étudions sur $\mathbb{R}$ le signe de leur différence d'ordonnées :

$$\varphi(x)=T-(C)=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}-f(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{e^x}{1+e^x}$$

Remarquons d'entrée que :

$$\varphi(0)=\frac{0}{4}+\frac{1}{2}-f(0)=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \longleftarrow \text{ Normal ! Cela correspond au point A...}$$

Pour connaître le signe de la différence d'ordonnées φ, déterminons les variations de cette fonction. Pour ce faire, calculons la dérivée de φ.
Comme φ est la différence d'une fonction affine et de la fonction f qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors elle l'est aussi.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$\varphi'(x)=\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)'-f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{\left(1+e^x\right)^2-4.e^x}{4.\left(1+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{1+2.e^x+\left(e^x\right)^2-4.e^x}{4.\left(1+e^x\right)^2}=\frac{1-2.e^x+\left(e^x\right)^2}{4.\left(1+e^x\right)^2}=\frac{\left(1-e^x\right)^2}{4.\left(1+e^x\right)^2}$$

Une question : quand $1-e^x$ s'annule-t-il ?

$$1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$$

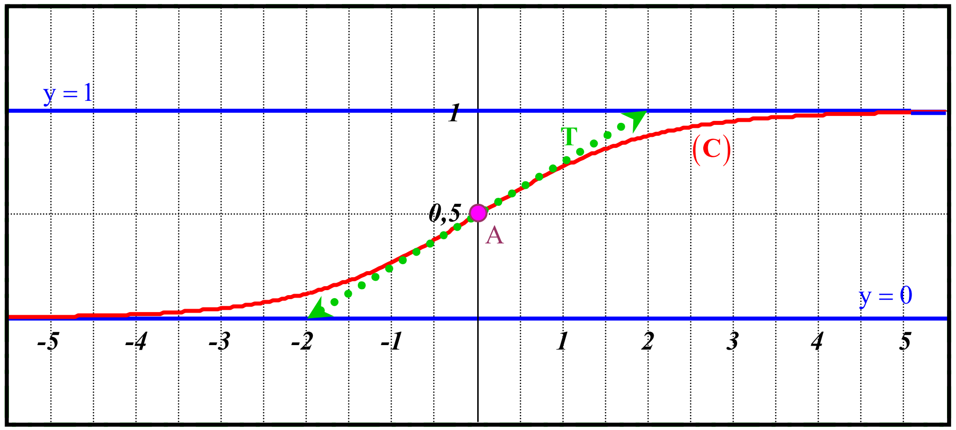
Par suite, le tableau de signe de φ' et de variation de φ est celui ci-contre...

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\left(1-e^x\right)^2$		$+$	0	$+$	
4		$+$		$+$	
$\left(e^x+1\right)^2$		$+$		$+$	
$\varphi'(x)$		$+$	0	$+$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Conclusion :</u> comme φ est strictement croissante et s'annule en 0 alors :

- Sur l'intervalle $]-\infty;0[$, φ est négative et la tangente T est au-dessous de la courbe (C).
- En 0, la tangente T et la courbe (C) se coupent au point A
- Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, φ est positive et la tangente T est au-dessus de la courbe (C).

d) La courbe (C) représentant la fonction f est accompagnée de la tangente T et de deux asymptotes horizontales : l'axe des abscisses ($y=0$) et la droite d'équation $y=1$.



Devoir Express No.6

Le contexte

Ce sixième devoir express toujours d'une heure eut lieu à la mi-janvier 2006. Il portait sur les équations différentielles. A priori, les exercices donnés sont des créations de mon volcanique cerveau. Les calculatrices étaient autorisées.

L'énoncé

Première partie : deux équations...différent ciel

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(\mathcal{E})\begin{cases}2.y'+14.y=5\\ y(0)=1\end{cases}\qquad (\mathcal{F})\begin{cases}y'=\dfrac{2}{x}-1+4.x\\ y(1)=-7\end{cases}$$

Seconde partie : le secret d'un second degré

L'objet de cet exercice est la résolution de l'équation différentielle $(\mathcal{D})$:

$$(\mathcal{D})\begin{cases}y'+2.y=x^2+x\\ y(0)=-4\end{cases}$$

On appelle $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{F})$ les équations différentielles suivantes :

$$y'+2.y=x^2+x \quad (\mathcal{E}) \qquad\qquad y'+2.y=0 \quad (\mathcal{F})$$

a) Démontrer que la fonction $u(x)=\dfrac{x^2}{2}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

b) Montrer qu'une fonction dérivable v est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ si et seulement si la fonction $v-u$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{F})$.

c) Résoudre l'équation différentielle $y'+2.y=0 \quad (\mathcal{F})$.

d) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{D})$.

Dernière partie : l'exponentielle à la rescousse...comme toujours

L'objet de cet exercice est la résolution de l'équation différentielle $(\mathcal{J})$:

$$(\mathcal{J})\begin{cases}y'-7.y=x^2.e^{7.x}\\ y(0)=4\end{cases}.$$

Soit f une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{J})$. On suppose que la fonction f est définie et dérivable sur un intervalle I contenant 0 (qui est éventuellement $\mathbb{R}$).

On appelle h la fonction définie par :

$$h(x)=\frac{f(x)}{e^{7.x}}$$

a) Pourquoi la fonction h est-elle définie et dérivable sur l'intervalle I ?

Exprimer $f(x)$ en fonction de $h(x)$.

b) Démontrer que pour tout $x\in I$, $h'(x)=x^2$.

En déduire l'expression de $h(x)$ en fonction de x, puis celle de $f(x)$.

c) Conclure cette résolution en donnant les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{J})$.

Le corrigé

Première partie : deux équations...différent ciel

➲ Modifions la première égalité de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$2.y'+14.y=5 \iff 2.y'=-14.y+5 \iff y'=-7.y+\frac{5}{2}$$

D'après un résultat du cours, l'équation différentielle $(\mathcal{E})\begin{cases}y'=\underbrace{-7}_{a}.y+\underbrace{5/2}_{b}\\ y(0)=1\end{cases}$ admet une unique solution φ. Cette fonction φ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$\varphi(x)=C\times e^{a.x}-\frac{b}{a}=C\times e^{-7.x}-\frac{5/2}{-7}=C\times e^{-7.x}-\frac{5}{2}\times\frac{1}{-7}=C\times e^{-7.x}+\frac{5}{14}$$

Déterminons la constante C. La solution φ vérifie la condition initiale $y(0)=1$.

$$\varphi(0)=1 \iff C\times e^{-7\times 0}+\frac{5}{14}=1 \iff C\times e^{0}=1-\frac{5}{14} \iff C=\frac{9}{14}$$

Conclusion : la solution de l'équation $(\mathcal{E})$ est la fonction $\varphi(x)=\frac{9}{14}.e^{-7.x}+\frac{5}{14}$.

Cette fonction φ est définie et dérivable sur ℝ à l'instar de l'exponentielle $e^{-7.x}$.

➲ Résoudre l'équation $(\mathcal{F})$, c'est déterminer la fonction dérivable F dont la dérivée est (autrement dit qui est une primitive de) $y'=\frac{2}{x}-1+4.x$, et telles que $y(1)=-7$.

Cette primitives F de $2\times\frac{1}{x}-1+2\times 2.x$ est de la forme $F(x)=2.\ln(x)-x+2.x^2+\text{Cste}$.

Déterminons la constante Cste. La solution F vérifie la condition initiale de $(\mathcal{F})$.

$$F(1)=-7 \Leftrightarrow 2.\ln(1)-1+2\times 1^2+\text{Cste}=-7 \Leftrightarrow 0-1+2+\text{Cste}=-7 \Leftrightarrow \text{Cste}=-8$$

Conclusion : la solution de l'équation $(\mathcal{F})$ est la fonction $F(x)=2.\ln(x)-x+2.x^2-8$.

Cette fonction f n'est définie et dérivable que sur $]0;+\infty[$ du fait de ln.

Seconde partie : le secret d'un second degré

a) Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$u'(x)+2.u(x)=\left(\frac{x^2}{2}\right)'+2\times\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}.\left(x^2\right)'+x^2=\frac{1}{2}\times 2.x+x^2=x+x^2=x^2+x$$

Conclusion : la fonction $u(x)=\frac{1}{2}.x^2$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

b) Prouver une équivalence, c'est établir une double implication.

$(\Rightarrow)$: Si v est une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ alors pour tout x :

$$v'(x)+2.v(x)=\underbrace{x^2+x=u'(x)+2.u(x)}_{\text{car u est solution de }(\mathcal{E})\text{ d'après 2.a}}$$

$$\text{d'où}\quad v'(x)-u'(x)+2.v(x)-2.u(x)=0 \quad\text{donc}\quad (v-u)'+2.(v-u)=0$$

Par conséquent la fonction $v-u$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{F})$.

$(\Leftarrow)$: Si $v-u$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{F})$ alors pour tout x :

$$\underbrace{v'(x)-u'(x)}_{(v-u)'}+\underbrace{2.v(x)-2.u(x)}_{2.(v-u)}=0 \quad\text{d'où}\quad v'(x)+2.v(x)=\underbrace{u'(x)+2.u(x)=x+x^2}_{\text{car u solution de }(\mathcal{E})\text{ d'après 2.a}}$$

Ainsi la fonction v est-elle solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

Conclusion : v est solution de $(\mathcal{E})$ $\Leftrightarrow$ $v-u$ est solution de $(\mathcal{F})$

On peut aussi procéder par équivalence...mais il faut faire très attention !

$$\overbrace{v'+2.v=x^2+x}^{\text{v solution de }(\mathcal{E})} \Leftrightarrow \overbrace{v'+2.v=u'+2.u}^{\text{car u solution de }(\mathcal{E})} \Leftrightarrow \overbrace{v'-u'+2.(v-u)=0}^{\text{v−u solution de }(\mathcal{F})}$$

Il faut toujours s'assurer que ce qui est dit est vrai dans un sens mais aussi dans l'autre.

c) Les solutions de l'équation différentielle $y'+2.y=0 \Leftrightarrow y'=-2.y$ sont toutes les fonctions de la forme $C\times e^{-2.x}$ où C est une constante à déterminer.

d) Assemblons les deux équivalences qui viennent d'être établies.

$$\text{v est solution de }(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \underbrace{v-u\text{ est solution de }(\mathcal{F})}_{\text{d'après 2.b}} \Leftrightarrow \underbrace{v(x)-u(x)=C\times e^{-2.x}}_{\text{Pour tout x, d'après 2.c}}$$

Autrement dit, les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ sont les fonctions v de la forme :

$$v(x)=u(x)+C\times e^{-2.x}=\frac{1}{2}.x^2+C\times e^{-2.x}$$

Par conséquent, les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{D})$ sont les fonctions v de la forme $v(x)=\frac{1}{2}.x^2+C\times e^{-2.x}$ vérifiant la condition initiale $v(0)=-4$.

$$v(0)=-4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\times 0^2+C\times e^{-2\times 0}=-4 \Leftrightarrow 0+C\times 1=-4 \Leftrightarrow C=1$$

Conclusion : la fonction $v(x)=\frac{1}{2}.x^2-4.e^{-2.x}$ est l'unique solution de l'équation $(\mathcal{D})$.

A l'instar des fonctions carré et exponentielle, v est définie et dérivable sur ℝ.

Dernière partie : l'exponentielle à la rescousse...comme toujours

a) Le numérateur f est une fonction dérivable sur l'intervalle I.

La fonction $u(x)=e^{7.x}$ est définie et dérivable sur ℝ donc elle l'est sur l'intervalle I.

Etant une exponentielle, le dénominateur u est toujours strictement positif donc ne s'annule jamais.

Conclusion : le quotient $h(x)=\frac{f(x)}{u(x)}$ est défini et dérivable sur I.

➲ Pour tout $x\in I$, nous avons : $h(x)=\frac{f(x)}{e^{7.x}} \Leftrightarrow f(x)=e^{7.x}.h(x)$.

b) La fonction f est le produit des fonctions h et $e^{7.x}$ dérivables sur l'intervalle I.
Pour tout $x \in I$, nous pouvons écrire :

$$f'(x) = \left[e^{7.x}.h(x)\right]' = \left(e^{7.x}\right)'.h(x) + e^{7.x}.h'(x) = 7.e^{7.x}.h(x) + e^{7.x}.h'(x)$$

Comme la fonction f est une solution de l'équation $(\mathcal{J})$ alors pour tout $x \in I$:

$$f'(x) - 7.f(x) = x^2.e^{7.x}$$

$$\underbrace{7.e^{7.x}.h(x) + e^{7.x}.h'(x)}_{f'(x)} - 7.\underbrace{e^{7.x}.h(x)}_{f(x)} = x^2.e^{7.x}$$

$$\cancel{7.e^{7.x}.h(x)} + e^{7.x}.h'(x) - \cancel{7.e^{7.x}.h(x)} = x^2.e^{7.x}$$

$$e^{7.x}.h'(x) = x^2.e^{7.x}$$

$$h'(x) = x^2 \leftarrow \boxed{\text{On a divisé par l'exponentielle } e^{7.x} \text{ qui est non nulle}}$$

Comme $h'(x) = x^2$ est la dérivée de h alors la fonction h est une primitive de x^2.

Donc la fonction h est de la forme $h(x) = \frac{x^3}{3} + \text{Constante}$. Par suite, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = e^{7.x}.h(x) = e^{7.x}.\left[\frac{x^3}{3} + \text{Constante}\right]$$

Déterminons la valeur de cette constante. f vérifie la condition initiale de l'équation $(\mathcal{J})$.

$$\underbrace{e^{7\times 0}.\left[\frac{0^3}{3} + \text{Constante}\right]}_{f(0)} = 4 \Leftrightarrow \underbrace{e^0}_{=1}.\left[0 + \text{Constante}\right] = 4 \Leftrightarrow \text{Constante} = 4$$

<u>Conclusion :</u> si f est une solution de l'équation $(\mathcal{J})$ alors $f(x) = e^{7.x}.\left[\frac{x^3}{3} + 4\right]$.

c) La question 3.b nous a appris que ***si*** (←c'est pas sûr !) l'équation $(\mathcal{J})$ a une solution

alors celle-ci est la fonction $f(x) = e^{7.x}.\left[\frac{x^3}{3} + 4\right]$ qui est définie et dérivable sur ℝ.

Autrement dit, $(\mathcal{J})$ admet ***au plus*** une solution. "***Au plus une***" signifie ***une*** ou ***aucune***.

Regardons si la fonction $f(x) = e^{7.x}.\left[\frac{x^3}{3} + 4\right]$ est solution de l'équation $(\mathcal{J})$.

Deux choses sont à vérifier :

- D'abord, pour tout x∈ℝ, nous avons :

$$f'(x) - 7.f(x) = \left[e^{7.x}.\left(\frac{x^3}{3} + 4\right)\right]' - 7.\underbrace{e^{7.x}.\left(\frac{x^3}{3} + 4\right)}_{f(x)}$$

$$= \underbrace{\left(e^{7.x}\right)'.\left(\frac{x^3}{3} + 4\right) + e^{7.x}.\left(\frac{x^3}{3} + 4\right)'}_{f'(x)} - 7.\underbrace{e^{7.x}.\left(\frac{x^3}{3} + 4\right)}_{f(x)}$$

$$= \cancel{7.e^{7.x}.\left(\frac{x^3}{3} + 4\right)} + e^{7.x}.x^2 - \cancel{7.e^{7.x}.\left(\frac{x^3}{3} + 4\right)} = e^{7.x}.x^2$$

Donc f vérifie la première égalité $y' - 7.y = x^2.e^{7.x}$.

- Ensuite : $f(0) = e^{7\times 0}.\left[\frac{0^3}{3} + 4\right] = e^0 \times [0 + 4] = 1 \times 4 = 4$.

Donc f vérifie la condition initiale de $(\mathcal{J})$.

Donc la fonction f est bien solution de l'équation différentielle $(\mathcal{J})$.

<u>Conclusion :</u> l'équation différentielle $(\mathcal{J})\begin{cases} y' - 7.y = x^2.e^{7.x} \\ y(0) = 4 \end{cases}$ admet une unique solution

qui est la fonction $f(x) = e^{7.x}.\left[\frac{x^3}{3} + 4\right]$. Cette fonction est définie et dérivable sur ℝ.

Devoir Surveillé No.3

Le contexte

Ce troisième devoir surveillé de deux heures eut lieu juste avant les vacances de février 2006. Il portait exclusivement sur les suites avec notamment deux exercices de questions de cours assez musclées "style bac". Les calculatrices étaient autorisées.

L'énoncé

Première partie : questions de cours...assises

Pour chacune des propositions ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse, et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple qui sera justifié. Une réponse non démontrée sera considérée comme nulle.

1. (u_n) est une suite dont les termes sont strictement positifs.
La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.
Si la suite (u_n) est géométrique, alors la suite (v_n) est arithmétique.

2. (u_n) est une suite quelconque.
La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = [u_n]^2$.
Si la suite (v_n) converge, alors la suite (u_n) converge aussi.

3. (u_n) est une suite quelconque.
Si la suite (u_n) tend vers $-\infty$, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.

Seconde partie : question de cours...suprême

a) Rappeler la définition d'une suite (u_n) convergeant vers un réel ℓ.

b) Les suites (u_n) et (v_n) sont telles que :

1. Pour tout entier naturel n, $1 \le u_n \le v_n$.

2. (v_n) converge vers le réel 1.

En utilisant seulement ces deux arguments et la définition donnée lors de la question 2.a, démontrer que la suite (u_n) converge vers 1.

Dernière partie : les suites américaines

La fonction f est définie sur $\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{5.x - 8}{x - 1}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Etudier les variations de la fonction f.
Démontrer que pour tout réel $x \in [3;5]$, on a :

$$3 \le f(x) \le 5$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

b) Sur le graphique page suivante, tracer avec le plus grand soin la courbe (C).
Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de constructions.
A partir du graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n).

c) Montrer à l'aide de raisonnements par récurrence que :

1. Pour tout entier naturel n, $3 \le u_n \le 5$.

2. Pour tout entier naturel n, $u_n \le u_{n+1}$.

3. Pour tout entier naturel n, $3 \le v_n \le 5$.

4. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \le v_n$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3.(v_n - u_n)}{(v_n - 1).(u_n - 1)}$$

En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

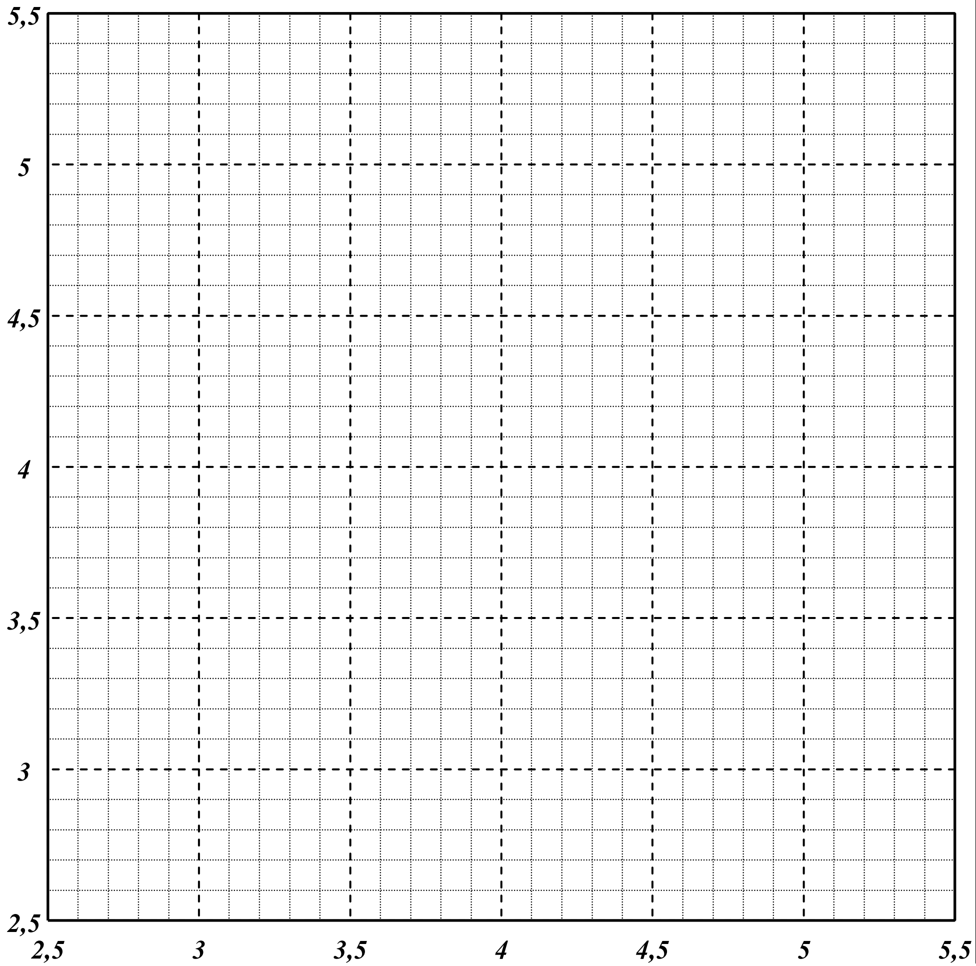
$$v_n - u_n \geq 0 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}.(v_n - u_n)$$

e) Prouver que pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \leq 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

f) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.

Déterminer la valeur exacte de α.



Le corrigé

Première partie : questions de cours...assises

1. Une suite est géométrique si pour passer de chacun de ses termes au suivant, on multiplie toujours la même quantité qui est sa raison.
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Il vient alors :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \underbrace{\ln(u_n \times q) = \ln(u_n) + \ln(q)}_{\text{Logarithme d'un produit...}} = v_n + \ln(q)$$

Pour passer du terme v_n au suivant v_{n+1}, on rajoute toujours la même quantité $\ln(q)$.
<u>Conclusion :</u> la suite (v_n) est arithmétique de raison $\ln(q)$. Donc la première proposition est vraie.

<u>Note :</u> si tous les termes de la suite géométrique (u_n) sont positifs, alors il en va de même pour sa raison q. Donc leurs logarithmes népériens existent.

2. Dans cette proposition, (u_n) est une suite quelconque. Cela signifie que ses termes peuvent être positifs ou négatifs. Et ce, indépendamment les uns des autres.
Même si pour tout entier n nous avons $v_n = [u_n]^2$, nous ne pouvons pas conclure pour autant que pour tout entier n, $u_n = \sqrt{v_n}$. Nous pouvons très bien avoir : $u_{17} = -\sqrt{v_{17}}$.

Intéressons-nous à la (classique) suite $u_n = (-1)^n \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 1 \text{ si n est pair} \\ u_n = -1 \text{ si n est impair} \end{cases}$.

Chacun sait qu'elle ne converge pas. Pourtant pour tout entier naturel n, nous avons :

$$v_n = [u_n]^2 = \left[(-1)^n\right]^2 = (-1)^{2.n} = \left[(-1)^2\right]^n = [1]^n = 1$$

<u>Conclusion :</u> la suite $v_n = [u_n]^2 = 1$ converge vers 1 et pourtant la suite $u_n = (-1)^n$ est divergente. Donc la seconde proposition est fausse.

3. Même les plus grands champions peuvent avoir des instants de faiblesse.
Intéressons-nous à la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = -n + (-1)^n$$

Déterminons la limite de cette suite (u_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$-1 \le (-1)^n \le 1 \quad \text{donc} \qquad \underbrace{-n-1 \le u_n \le -n+1}_{\text{On ajoute } -n \text{ à tous les membres}}$$

(u_n) est majorée par la suite $-n+1$ qui tend vers $-\infty$.

Par conséquent, (u_n) tend aussi vers $-\infty$.

A présent, intéressons-nous aux variations de (u_n). Pour ce faire, nous allons essayer de déterminer le signe de la différence de deux de ses termes consécutifs.
Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \left[-(n+1)+(-1)^{n+1}\right] - \left[-n+(-1)^n\right]$$

$$= -n-1+(-1)^n \times (-1) + n - (-1)^n = -1 + \underbrace{(-1)^n}_{\text{Facteur...}} \times (-1) - \underbrace{(-1)^n}_{\text{...commun}}$$

$$= -1 + (-1)^n \times \left[(-1)-1\right] = -1 - 2 \times (-1)^n$$

Là, deux cas sont à envisager :

⇒ Si n est pair alors $\underbrace{u_{n+1} - u_n = -1 - 2\times 1 = -3}_{\text{La différence est négative}}$. Donc $u_{n+1} \le u_n$.

⇒ Si n est impair alors $\underbrace{u_{n+1} - u_n = -1 - 2\times(-1) = -1+2 = 1}_{\text{La différence est positive}}$. Donc $u_{n+1} \ge u_n$.

Un coup ça croît, l'autre ça décroît. Donc la suite (u_n) n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang...

<u>Conclusion :</u> la suite $u_n = -n + (-1)^n$ tend vers $-\infty$ et pourtant elle n'est jamais décroissante à partir d'un certain rang. Donc la troisième proposition est fausse.

Seconde partie : question de cours...suprême

a) Dire que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ <u>signifie que</u> pour tout réel strictement positif ε, il existe un rang n_0 partir duquel

$$\underbrace{\ell - \varepsilon \le u_n \le \ell + \varepsilon}_{\text{Autrement dit, } u_n \in [\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon] \text{ ou la distance entre } u_n \text{ et } \ell \text{ est inférieure à } \varepsilon} \quad .$$

b) L'énoncé de cette question interdit expressément de faire appel au théorème des gendarmes ou à un théorème de comparaison quelconque.
Les seules choses que nous ayons le droit d'utiliser pour établir la convergence de la suite (u_n) vers 1 sont :

1. Le fait : pour tout entier naturel n, $1 \le u_n \le v_n$.

2. Le fait : la suite (v_n) converge vers 1.

3. La définition d'une suite convergente vers ℓ donnée à la question précédente.

Soit ε un réel strictement positif quelconque.
Comme la suite (v_n) converge vers 1, alors en application de la définition donnée lors de la question 2.a, il existe un rang n_0 à partir duquel

$$1 - \varepsilon \le v_n \le 1 + \varepsilon$$

Or pour tous les entiers naturels n et donc en particulier pour ceux situés après n_0, nous avons :

$$1 \le u_n \le v_n$$

En combinant les deux inégalités, il vient que pour tout entier $n \ge n_0$, on a :

$$\underbrace{1-\varepsilon \le 1}_{\text{car } \varepsilon>0} \le u_n \le \underbrace{v_n \le 1+\varepsilon}_{\text{Argument } \mathit{1}.}$$

Donc

$$1 - \varepsilon \le u_n \le 1 + \varepsilon$$

<u>Conclusion :</u> nous venons d'établir que pour tout réel strictement positif ε, il existe un rang n_0 à partir duquel

$$1 - \varepsilon \le u_n \le 1 + \varepsilon$$

C'est la définition énoncée lors de la question 2.a. Nous en concluons que la suite (u_n) converge vers 1.

Dernière partie : les suites américaines

a) L'étude de la fonction homographique $f(x) = \dfrac{5.x-8}{x-1}$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{2}\right]$ peut être faite de deux manières :

1. En utilisant sa dérivée

Les fonctions $u(x) = 5.x - 8$ et $v(x) = x - 1$ sont dérivables sur ℝ, donc en particulier sur l'intervalle $[2,5;5,5]$. Leurs dérivées respectives sont $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 1$.

Comme la fonction v ne s'annule pas sur cet intervalle, alors leur quotient $f = \dfrac{u}{v}$ est aussi dérivable sur cet intervalle. Il vient alors que pour tout $x \in [2,5;5,5]$

$$f'(x) = \frac{u'.v - v'.u}{v^2} = \frac{5\times(x-1) - 1\times(5.x-8)}{(x-1)^2} = \frac{5.x-5-5.x+8}{(x-1)^2} = \frac{3}{(x-1)^2}$$

Etant le quotient de deux quantités positives, la dérivée $f'(x)$ est toujours positive. Donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$.

2. En décomposant la fonction homographique f.

Pour tout réel $x \in [2,5;5,5]$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{5.x-8}{x-1} = \frac{\overbrace{5.(x-1)+5}^{5.x}-8}{x-1} = \frac{5.\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{-3}{x-1} = 5 + \frac{-3}{x-1}$$

Reconstituons l'action de cette fonction f sur deux réels de l'intervalle $\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$.

Si $\underbrace{2,5 \le x < y \le 5,5}_{\text{On travaille dans l'intervalle } [2,5;5,5]}$ $\underbrace{\text{alors}}_{-1}$ $\underbrace{1,5 \le x-1 < y-1 \le 4,5}_{\text{On ajoute } -1. \text{ Puis nous allons inverser des réels positifs}}$ $\underbrace{\text{donc}}_{\text{Inverse}}$ $\underbrace{\frac{2}{3} \ge \frac{1}{x-1} > \frac{1}{y-1} \ge \frac{2}{9}}_{\text{La fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[.}$

$\underbrace{\text{donc}}_{\times(-3)}$ $\underbrace{-2 \le \frac{-3}{x-1} < \frac{-3}{y-1} \le -\frac{2}{3}}_{\text{L'ordre change.}}$ $\underbrace{\text{donc}}_{+5}$ $\underbrace{3 \le f(x) < f(y) \le \frac{13}{3}}_{\text{f conserve l'ordre...}}$

<u>Conclusion :</u> f conservant l'ordre sur l'intervalle $\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$, elle y est croissante.

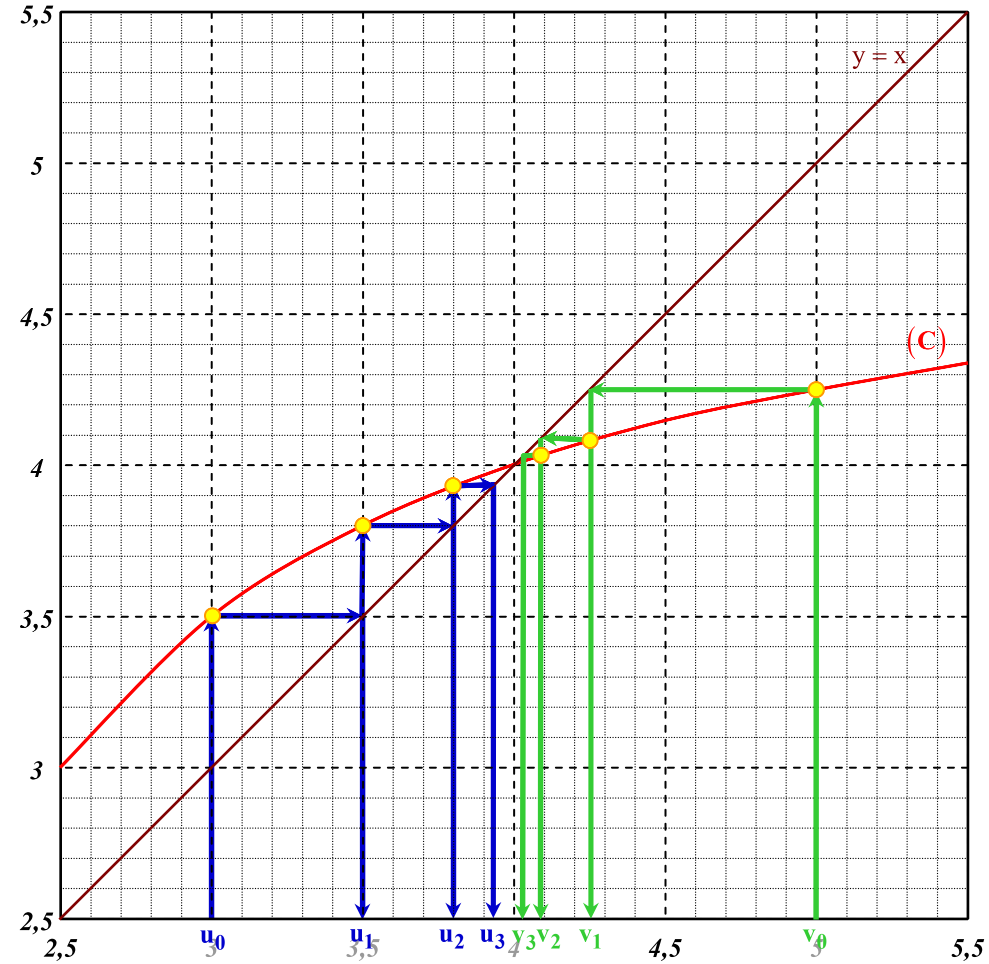
➲ Si $\underbrace{3 \le x \le 5}_{x\in[3;5]}$ alors $\underbrace{f(3) \le f(x) \le f(5)}_{\text{Car f est croissante sur } [2,5;5,5] \text{ donc elle y conserve l'ordre}}$ donc $\underbrace{3,5}_{\text{Supérieur à 3}} \le f(x) \le \underbrace{4,25}_{\text{Inférieur à 5}}$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel x de l'intervalle $[3;5]$, on a $3 \le f(x) \le 5$

b) La construction demandée est celle figurant en début de page 3. Elle requiert de tracer la première bissectrice du plan, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

D'après le graphique et en se basant sur les quatre premiers termes de chacune des suites, il <u>semble</u> que la suite (u_n) soit croissante, (v_n) soit décroissante et qu'elle tendent toutes deux vers 4.

<u>Note :</u> le très pédagogique mot conjecturer signifie "présumer", "supposer" ou "prévoir". Il ne donne pas lieu à une certitude mais seulement à une prévision ou une impression. Les quatre premiers termes d'une suite quelconque ne permettent pas d'affirmer si celle-ci est croissante ou décroissante. Ils ne donnent qu'une indication de la tendance. Celle-ci n'est en aucun cas une preuve.



c) Les quatre petites démonstrations par récurrence reposent sur le même fait : la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2,5;5,5]$ donc elle y conserve l'ordre.

1. Prouvons par récurrence que pour tout entier naturel n, $3 \le u_n \le 5$

- La propriété est-elle vraie au premier rang $n = 0$?
  $u_0 = 3$ est bien compris entre 3 et 5. Donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$.
- La propriété se propage-t-elle ? Est-elle transmissible d'un rang sur le suivant ?
  Supposons qu'au rang n nous ayons $3 \le u_n \le 5$.
  A-t-on alors au rang suivant $n+1$ que $3 \le u_{n+1} \le 5$?

Comme $\underbrace{3 \le u_n \le 5}_{\text{Hypothèse de récurrence}}$ alors $\underbrace{3 \le f(u_n) \le 5}_{\text{D'après question 3.a}}$ donc $3 \le u_{n+1} \le 5$

Donc l'inégalité est alors vraie au rang $n+1$.

<u>Conclusion :</u> si la propriété est vraie pour l'entier naturel n, alors elle est aussi vraie pour l'entier $n+1$. Comme elle est vraie pour l'entier 0 alors elle est vraie pour tous les entiers naturels n. nous venons d'établir que pour tout entier naturel n, $3 \le u_n \le 5$.

2. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \le u_{n+1}$.

- La propriété est-elle vraie au premier rang $n=0$?
  Comme $u_0 = 3$ et $u_1 = f(u_0) = 3,5$ alors nous avons bien que $u_0 \le u_{0+1}$.
- La propriété se transmet-elle d'un rang sur le suivant ?
  Supposons la propriété soit vraie au rang n, c'est-à-dire que $u_n \le u_{n+1}$.
  A-t-on alors la même chose au rang $n+1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} \le u_{n+2}$?

  Comme $\underbrace{u_n \le u_{n+1}}_{\substack{\text{Hypothèse de récurrence} \\ u_n \text{ et } u_{n+1} \text{ sont dans } [3;5].}}$ alors $\underbrace{f(u_n) \le f(u_{n+1})}_{\substack{\text{f est croissante sur} \\ \text{l'intervalle } [2,5;5,5]}}$ donc $u_{n+1} \le u_{n+2}$

  Donc la propriété est alors vraie au rang $n+1$

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, $u_n \le u_{n+1}$. La suite (u_n) est croissante.

3. Cette troisième démonstration par récurrence est la reprise de la première.
Etablissons que pour tout entier naturel n, $3 \le v_n \le 5$

- $v_0 = 5$ est compris entre 3 et 5. Donc l'inégalité est vraie pour $n=0$.
- La propriété se transmet- elle ? Supposons qu'au rang n nous ayons $3 \le v_n \le 5$.

  Comme $\underbrace{3 \le v_n \le 5}_{\text{Hypothèse de récurrence}}$ alors $\underbrace{3 \le f(v_n) \le 5}_{\text{D'après question 3.a}}$ donc $3 \le v_{n+1} \le 5$

  Donc si l'inégalité est vraie au rang n, alors elle l'est aussi au rang $n+1$.

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, $3 \le v_n \le 5$

4. Prouvons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \ge v_{n+1}$.

- Comme $v_0 = 5$ et $v_1 = f(v_0) = 4,25$ alors nous avons bien que $v_0 \ge v_{0+1}$.
- La propriété se transmet-elle de rang en rang ? Supposons-la vraie au rang n.

  Comme $\underbrace{v_n \ge v_{n+1}}_{\substack{\text{Hypothèse de récurrence} \\ v_n \text{ et } v_{n+1} \text{ sont dans } [3;5].}}$ alors $\underbrace{f(v_n) \ge f(v_{n+1})}_{\substack{\text{f conserve l'ordre sur} \\ \text{l'intervalle } [2,5;5,5]}}$ donc $v_{n+1} \ge v_{n+2}$

  Donc la propriété se transmet d'un rang n sur le suivant $n+1$.

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, $v_n \ge v_{n+1}$. La suite (v_n) est décroissante.

d) Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \underbrace{\frac{5.v_n - 8}{v_n - 1}}_{f(v_n)} - \underbrace{\frac{5.u_n - 8}{u_n - 1}}_{f(u_n)} = \underbrace{\frac{(5.v_n - 8).(u_n - 1) - (5.u_n - 8).(v_n - 1)}{(v_n - 1).(u_n - 1)}}_{\text{On met au même dénominateur.}}$$

$$= \frac{\left[\cancel{5.v_n.u_n} - 5.v_n - 8.u_n \cancel{+8}\right] - \left[\cancel{5.u_n.v_n} - 5.u_n - 8.v_n \cancel{+8}\right]}{(v_n - 1).(u_n - 1)}$$

$$= \frac{-5.v_n - 8.u_n + 5.u_n + 8.v_n}{(v_n - 1).(u_n - 1)} = \frac{3.v_n - 3.u_n}{(v_n - 1).(u_n - 1)} = \frac{3.(v_n - u_n)}{(v_n - 1).(u_n - 1)}$$

➲ Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \ge 0$.

- Comme $v_0 - u_0 = 5 - 3 = 2 \ge 0$ alors la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- La propriété se transmet d'un rang n sur le suivant $n+1$?
  Supposons qu'au rang n, la différence $v_n - u_n$ soit positive ou nulle.

  Nous venons d'établir que : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{3.(v_n - u_n)}{(v_n - 1).(u_n - 1)}$

  D'après l'hypothèse de récurrence, le facteur $v_n - u_n$ est positif ou nul.

  Les facteurs $v_n - 1$ et $u_n - 1$ sont positifs car les suites (u_n) et (v_n) sont minorées par 3.

  Donc, la différence $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{3.\overbrace{(v_n - u_n)}^{\text{Positif ou nul}}}{\underbrace{(v_n - 1)}_{\text{Positif}}.\underbrace{(u_n - 1)}_{\text{Positif}}}$ est positive ou nulle.

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, la différence $v_n - u_n$ est positive ou nulle.

➲ D'après la question 3.c, nous pouvons écrire que pour tout entier naturel n :

Comme $\begin{cases} 3 \le u_n \le 5 \\ 3 \le v_n \le 5 \end{cases}$ <u>alors</u> $\begin{cases} 2 \le u_n - 1 \le 4 \\ 2 \le v_n - 1 \le 4 \end{cases}$ <u>donc</u> $\dfrac{1}{2} \ge \dfrac{1}{u_n - 1} \ge \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{2} \ge \dfrac{1}{v_n - 1}$

Multiplions ces deux inégalités de nombres positifs membres à membres. Il vient alors :

$$\frac{1}{(v_n - 1)} \times \frac{1}{(u_n - 1)} \le \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \underbrace{\frac{3.(v_n - u_n)}{(v_n - 1).(u_n - 1)} \le \frac{3.(v_n - u_n)}{4}}_{\text{On multiplie par le réel positif ou nul } 3.(v_n - u_n)}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{3.(v_n - u_n)}{(v_n - 1).(u_n - 1)} \le \dfrac{3}{4}.(v_n - u_n)$.

e) Prouvons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leq 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

- Comme $v_0 - u_0 = 2$ et $2\times\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 2\times 1 = 2$, alors elle est vraie pour $n = 0$.

- La propriété se transmet-elle ? Supposons que $v_n - u_n \leq 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

  Multiplions cette inégalité par $\frac{3}{4}$. Il vient alors : $\frac{3}{4}\times(v_n - u_n) \leq \frac{3}{4}\times 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

  En application de la question 3.d, nous en déduisons :

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}.(v_n - u_n) \leq \frac{3}{4}\times 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n = 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leq 2\times(0,75)^n$.

f) Les questions précédentes nous ont permis d'établir les résultats suivants :

- La suite (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
- Pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n - u_n \leq 2\times(0,75)^n$.

  Comme la suite $2\times(0,75)^n$ tend vers 0, alors en application du théorème des gendarmes, la différence $v_n - u_n$ converge aussi vers cette limite.

Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent vers un même réel α.

Comme la suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur $[2,5;5,5]$, alors α est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff x - \frac{5.x-8}{x-1} = 0 \iff \frac{(x^2-x)-(5.x-8)}{x-1} = 0 \iff \frac{x^2-6.x+8}{x-1} = 0$$

$$\iff \frac{x^2 - 2\times 3\times x + 8}{x-1} = 0 \iff \frac{(x-3)^2 - 9 + 8}{x-1} = 0 \iff \frac{(x-3)^2 - 1^2}{x-1} = 0$$

$$\iff \underbrace{\frac{(x-2).(x-4)}{x-1} = 0}_{\text{Une fraction est nulle...}} \iff \underbrace{x = 2 \ \underline{\text{ou}}\ x = 4}_{\text{Son numérateur l'est}} \quad \underline{\text{et}} \quad \underbrace{\underline{x \neq 1}}_{\text{Son dénominateur ne l'est pas}}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $f(x) = x$ a pour solutions 2 et 4. Mais comme les suites (u_n) et (v_n) sont dans l'intervalle $[3;5]$, alors leur limite α ne peut être égale qu'à 4.

Devoir Express No.7

Le contexte

Ce septième devoir express qui eut lieu début mars 2006, fut le dernier avant que des bonnes âmes ne décident que leurs grandes idées étaient plus importantes que mon cours. Inévitablement, je n'allais pas être d'accord car j'ai horreur qu'on m'interdise de vivre. Ce faisant, elles pénalisèrent tout le monde et surtout elles-mêmes. Comme quoi la passion emporte souvent la raison.
Ce septième DE abordait l'intégration. L'intégration par parties n'était pas traitée.
Les calculatrices étaient autorisées.

L'énoncé

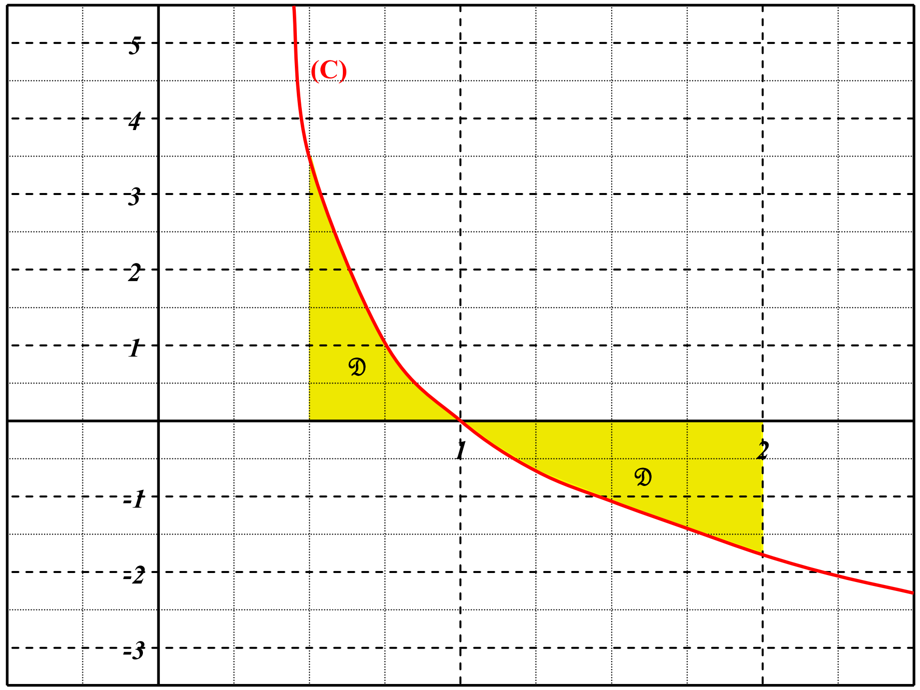
Première partie : la ruée vers l'aire

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-x$$

Sa courbe représentative (C) est tracée sur le graphique ci-contre où une unité d'abscisse vaut quatre centimètres et une unité d'ordonnée vaut un centimètre.
On appelle $\mathcal{D}$ le domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=\frac{1}{2}$ et $x=2$.

Calculer l'aire géométrique du domaine $\mathcal{D}$ en unités d'aires, puis en centimètres carrés.



Seconde partie : aux frontières du quart de pi

La fonction g est définie pour tout réel x par :

$$g(x)=e^x-2.x$$

a) Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et $+\infty$.
Calculer l'image de $\ln(2)$ par la fonction g.

En comparant les logarithmes népériens de 2 et du nombre e, prouver que $g(\ln(2))$ est un nombre positif.
Etudier les variations de la fonction g.
En déduire le signe de la fonction g.

La fonction f est définie pour tout réel positif ou nul x par :

$$f(x)=e^x-x^2-1$$

b) En s'aidant de la question précédente, étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) En utilisant le résultat de la question 2.b, établir que pour tout réel $x\in[0;+\infty[$, on a :

$$e^{-x}\leq\frac{1}{x^2+1}\leq 1$$

d) Démontrer l'inégalité :

$$\frac{e-1}{e} \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}.dx \leq 1$$

Dernière partie : décomposition rationnellement intégrale

La fonction h est définie sur l'intervalle $[0;4]$ par :

$$h(x) = \frac{9.x-7}{3.x^2-11.x-20}$$

a) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout réel $x \in [0;4]$ on ait :

$$h(x) = \frac{a}{x-5} + \frac{b}{3.x+4}$$

b) Déterminer une primitive H de la fonction h sur l'intervalle $[0;4]$.

En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^4 h(x).dx$. On donnera le résultat sous la forme $\ln(p)$ où p est un nombre rationnel.

Le corrigé

Première partie : la ruée vers l'aire

Une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2} - x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}$

Partageons le domaine $\mathcal{D}$. On appelle $\mathcal{D}^+$ la partie positive du domaine $\mathcal{D}$, c'est-à-dire celle située entre les droites verticales d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$. Calculons son aire.

$$\int_{1/2}^{1} f(x).dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}.x^2\right]_{1/2}^{1} = \left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1/2} - \frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{17}{8}\right) - \frac{12}{8} + \frac{17}{8} = \frac{5}{8}$$

Donc l'aire du domaine $\mathcal{D}^+$ vaut $\frac{5}{8} = 0,625$ unités d'aire.

On désigne par $\mathcal{D}^-$ la partie négative du domaine $\mathcal{D}$, c'est-à-dire celle située entre les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 2$. Calculons son aire.

$$\int_1^2 f(x).dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}.x^2\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} - 2\right) - \left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

Donc l'aire du domaine $\mathcal{D}^-$ est égale à 1 unités d'aire.

<u>Conclusion :</u> l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale $\frac{5}{8} + 1 = \frac{13}{8}$ unités d'aire $= 6,5 \text{ cm}^2$.

Seconde partie : aux frontières du quart de pi

a) Lorsque x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0 et $2.x$ vers $-\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{e^x - 2.x}_{g(x)} = 0 - (-\infty) = +\infty$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$ et $2.x$ vers $+\infty$. Donc $g(x)$ est alors une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. Pour lever celle-ci, factorisons par x :

$\underbrace{\text{Pour tout réel x non nul,}}_{\text{Pour pouvoir diviser par x...}}$ nous avons : $g(x) = e^x - 2.x = x.\left[\frac{e^x}{x} - 2\right]$

D'après un résultat du cours, le quotient $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x s'en va vers $+\infty$.

Donc : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x.\left[\frac{e^x}{x} - 2\right] = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

➲ Calculons l'image de $\ln(2)$ par la fonction g : $g(x) = e^{\ln(2)} - 2.\ln(2) = 2 - 2.\ln(2)$.

➲ Comme $2 < e$ alors $\underbrace{\ln(2) < \ln(e) = 1}_{\ln \text{ est croissante sur }]0;+\infty[}$ donc $\underbrace{-2.\ln(2) > -2}_{\text{On multiplie par } -2}$ donc $\underbrace{g(2) > 0}_{\text{On ajoute } -2}$.

<u>Conclusion :</u> $g(\ln(2)) = 2 - 2.\ln(2)$ est un réel strictement positif.

➲ Comme les fonctions exponentielle et $2.x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors il en va de même pour leur différence g. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$g'(x) = \left(e^x\right)' - (2.x)' = e^x - 2$$

Afin de connaître le signe de la dérivée $g'(x)$, regardons où elle s'annule.

$$\underbrace{e^x-2}_{g'(x)}=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln(2)$$

La fonction exponentielle e^x étant croissante sur ℝ, la dérivée $g'(x)$ est négative sur l'intervalle $\underbrace{]-\infty;\ln(2)[}_{\text{Avant } \ln(2)}$ et positive sur $\underbrace{]\ln(2);+\infty[}_{\text{Après } \ln(2)}$. Le tableau de variation de g est :

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	$2-2.\ln(2)$	↗	$+\infty$

➲ Le minimum de la fonction g sur ℝ étant le nombre positif $2-2.\ln(2)$, on en déduit que g est une fonction strictement positive sur ℝ.

b) Comme les fonctions exponentielle et carré sont dérivables sur ℝ alors leur différence f est dérivable sur son intervalle $[0;+\infty[$. Calculons sa dérivée.

$$f'(x)=\left(e^x\right)'-\left(x^2\right)'-(1)'=e^x-2.x-0=g(x)$$

Or la question 2.a nous a appris que la fonction g est strictement positive sur ℝ. Elle l'est en particulier sur $[0;+\infty[$. Donc la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

➲ Calculons l'image de 0 par la fonction f : $f(0)=e^0-0^2-1=1-0-1=0$

Comme f croît strictement sur $[0;+\infty[$ à partir de $f(0)=0$, son tableau de signe est :

x	0		$+\infty$
f(x)	0	+	

c) La question 2.b nous a appris que pour tout réel $x\in[0;+\infty[$:

$$\underbrace{e^x-x^2-1}_{f(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x\geq x^2+1}_{\text{Ces deux quantités sont positifs}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{e^x}=e^{-x}\leq\frac{1}{x^2+1}}_{\text{La fonction inverse est décroissante sur }]0;+\infty[}$$

De plus, un carré étant toujours positif ou nul, il vient que pour tout $x\in[0;+\infty[$:

$$x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2+1\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}\leq\frac{1}{1}=1$$

<u>Conclusion :</u> pour tout $x\in[0;+\infty[$, nous venons d'établir l'inégalité : $e^{-x}\leq\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1$.

d) La question précédente nous a appris que pour tout réel $x\in[0;1]$, $e^{-x}\leq\dfrac{1}{x^2+1}\leq 1$.

Intégrons cette inégalité sur l'intervalle $[0;1]$. Il vient alors :

$$\int_0^1 e^{-x}.dx\leq\int_0^1\frac{1}{x^2+1}.dx\leq\int_0^1 1\times dx$$

Calculons séparément les deux intégrales de gauche et de droite.

➥ $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}.dx=\left[-e^{-x}\right]_0^1=\left(-e^{-1}\right)-\left(-e^0\right)=-\frac{1}{e}+1=\frac{-1}{e}+\frac{e}{e}=\frac{e-1}{e}$.

➥ $\displaystyle\int_0^1 dx=[x]_0^1=1-0=1$

Nous concluons finalement : $\displaystyle\frac{e-1}{e}\leq\int_0^1\frac{1}{x^2+1}.dx\leq 1$. En vérité, cette intégrale vaut $\dfrac{\pi}{4}$.

Une primitive pour cette intégrale : arctan !

La fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$ définie sur ℝ a pour primitive la réciproque de la fonction tangente.

Arctangente est la fonction h telle que pour tout $t\in]-\pi/2;\pi/2[$, on ait $h(\tan(t))=t$.

$$\underbrace{\frac{1}{\cos^2(t)}.h'(\tan(t))=1}_{\text{On dérive l'égalité par rapport à t.}} \Leftrightarrow \underbrace{h'(x)=h'(\tan(t))}_{\text{De facto, } x=\tan(t)}=\cos^2(t)=\frac{1}{1+\tan^2(t)}=\frac{1}{1+x^2}$$

Dernière partie : décomposition rationnellement intégrale

a) Remarquons d'abord : $(x-5)\times(3.x+4)=3.x^2+4.x-15.x-20=3.x^2-11.x-20$

Les nombres a et b sont tels que pour tout réel $x \in [0;4]$:

$$\frac{9.x-7}{3.x^2-11.x-20} = \frac{a}{x-5} + \frac{b}{3.x+4} = \frac{a.(3.x+4)+b.(x-5)}{(x-5).(3.x+4)} = \frac{(3.a+b).x+(4.a-5.b)}{3.x^2-11.x-20}$$

Deux fractions égales ayant le même dénominateur ont le même numérateur. Il vient :

$$\underbrace{9.x-7=(3.a+b).x+(4.a-5.b)}_{\text{Deux polynômes égaux ont...}} \Leftrightarrow \underbrace{9=3.a+b \quad \underline{\text{et}} \quad -7=4.a-5.b}_{\text{...des coefficients égaux.}}$$

Les nombres a et b sont les solutions du système linéaire 2×2 $\begin{cases} 3.a+b=9 & \textbf{\textit{(1)}} \\ 4.a-5.b=-7 & \textbf{\textit{(2)}} \end{cases}$.

Résolvons-le par substitution. De l'équation ***(1)***, on déduit : $b=9-3.a$.
Dans l'équation ***(2)***, on remplace b par ce qu'il vaut en a. Il vient :

$$4.a-5.(9-3.a)=-7 \quad \Leftrightarrow \quad 19.a-45=-7 \quad \Leftrightarrow \quad 19.a=38 \quad \Leftrightarrow \quad a=2$$

Par conséquent : $b=9-3\times 2=9-6=3$.

<u>Conclusion :</u> pour tout réel $x\in[0;4]$, $h(x)=\dfrac{9.x-7}{3.x^2-11.x-20} = \underbrace{\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{3}{3.x+4}}_{\text{Forme décomposée de h}}$.

b) Lorsque u est une fonction <u>dérivable</u> et <u>positive</u>, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln(u)$.

La fonction $x-5$ étant négative sur $[0;4]$, son opposée $u(x)=5-x$ y est positive. Une primitive de $\dfrac{2}{x-5}=\dfrac{(-1)\times 2}{(-1).(x-5)}=2.\dfrac{-1}{-x+5}=2.\dfrac{u'}{u}$ sur $[0;4]$ est $2.\ln(u)=2.\ln(5-x)$

La fonction $u(x)=3.x+4$ est dérivable et positive sur l'intervalle $[0;4]$. Donc une primitive de $\dfrac{3}{3.x+4}=\dfrac{u'}{u}$ sur l'intervalle $[0;4]$ est $\ln(u)=\ln(3.x+4)$.

Donc une primitive de h sur $[0;4]$ est la fonction $H(x)=2.\ln(5-x)+\ln(3.x+4)$.
Par suite, le calcul de l'intégrale ne pose plus guère de problèmes.

$$\int_0^4 h(x).dx = [H(x)]_0^4$$

$$= \underbrace{(2.\ln(1)+\ln(16))}_{H(4)} - \underbrace{(2.\ln(5)+\ln(4))}_{H(0)}$$

$$= \ln(16)-\ln(25)-\ln(4) = \ln\left(\frac{16}{25\times 4}\right) = \ln\left(\frac{4}{25}\right)$$

Le deuxième bac blanc

Le contexte

Ce second bac blanc intervint juste avant les vacances de Pâques, une semaine après que le soviet du lycée eut autorisé la reprise des cours.
D'une durée de quatre heures, il était constitué de quatre exercices du bac plus ou moins adaptés. Il abordait les complexes, l'intégration, les suites et les équations différentielles.
Comme le précédent, il était commun aux deux terminales S.

L'énoncé

Première partie : les caprices du thermomètre

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=(20.x+10).e^{-\frac{1}{2}.x}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3) Montrer que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

4) Tracer la courbe (C).

5) En effectuant une intégration par parties, calculer l'intégrale $I=\int_0^3 f(x).dx$

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimée en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$ est $y(0)=10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, associe $y(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E): y'+\frac{1}{2}.y=20.e^{-t/2}$$

1) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle *(E)* sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2) On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle *(E)* sur l'intervalle $[0;+\infty[$ qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0;+\infty[$ telle que $g(0)=10$.
   Montrer que la fonction $g-f$ est solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle $(E'): y'+\frac{1}{2}.y=0$

b. Résoudre l'équation différentielle (E').

c. Conclure.

3) Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$.
Calculer la valeur exacte de θ, puis donner sa valeur approchée arrondie au degré.

Seconde partie : sans complexe face aux complexes

Première partie

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$(E) \quad z^3+2.z^2-16=0$$

1) Montrer que 2 est solution de (*E*), puis que (E) peut s'écrire sous la forme :

$$(z-2).(a.z^2+b.z+c)=0$$

où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

2) En déduire les solutions de (*E*) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Placer les points A, B et D d'affxes respectives :

$z_A = -2-2.\boldsymbol{i}$ $\qquad z_B = 2$ $\qquad z_D = -2+2.\boldsymbol{i}$

2) Calculer l'affxe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

3) Soient E l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et F l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Calculer les affixes des points E et F, notées respectivement z_E et z_F.

b. Placer les points E et F.

4) a. Vérifier que $\dfrac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \boldsymbol{i}$

b. En déduire la nature du triangle AEF.

5) Soit I le milieu de [EF]. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Troisième partie : des questions de cours qui y tournent

La fonction est définie sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{1}{2}.x^2.\left(3-2.\ln(x)\right) \quad \text{si } x>0 \end{cases}$$

1) Compléter les propriétés suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\ldots \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right)=\ldots$$

En utilisant les deux propriétés ci-dessus, prouver que $\lim\limits_{x\to0^+} x.\ln(x)=0$.

2) Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $f(x)$.

Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

3) Déterminer la limie lorsque x tend vers $+\infty$ de $f(x)$.

4) a. Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction en un réel a.

b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? On justifiera sa réponse.

Dernière partie : le peu d'une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales $\left(I_n\right)$ définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^{\pi/6} x^n.\sin(3.x).dx$$

1) a. Calculer $I_0 = \int_0^{\pi/6} \sin(3.x).dx$

b. Montrer que $I_1 = \int_0^{\pi/6} x.\sin(3.x).dx = \frac{1}{9}$

2) Sans calculer l'intégrale I_n :

a. Montrer que la suite $\left(I_n\right)$ est décroissante.

Prouver que pour tout entier naturel n, $I_n \geq 0$.

Que peut-on en déduire pour la suite $\left(I_n\right)$?

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a l'inégalité :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^{\pi/6} x^n.dx$$

c. En déduire la limite de la suite $\left(I_n\right)$.

3) a. En effectuant deux intégrations par parties successives, montrer que :

Pour tout entier naturel n, $\qquad I_{n+2} = \dfrac{n+2}{9}\times\left(\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{n+1} - (n+1)\times I_n\right)$

b. Calculer I_2 et I_3.

Le corrigé

Première partie : les caprices du thermomètre

Partie A

A.1) Quand x tend vers $+\infty$, $20.x+10$ s'en va vers $+\infty$ et $-\frac{1}{2}.x$ vers $-\infty$.

Donc $e^{-\frac{1}{2}.x}$ tend vers 0. Ainsi, f est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\infty\times 0$.
Modifions l'écriture de $f(x)$. Pour tout réel $x\in[0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=(20.x+10).e^{-\frac{1}{2}.x}=20.x.e^{-\frac{1}{2}.x}+10.e^{-\frac{1}{2}.x}=40.\frac{\frac{1}{2}.x}{e^{\frac{1}{2}.x}}+\frac{10}{e^{\frac{1}{2}.x}}=\underbrace{40.\frac{t}{e^{t}}+\frac{10}{e^{t}}}_{\text{En posant } t=x/2}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, la quantité $t=\frac{x}{2}$ tend aussi vers $+\infty$.

Or d'après un résultat du cours : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{t}}{t}=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{t}{e^{t}}=0^{+}$.

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=40\times 0+10\times 0=0$. Par conséquent, l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

<u>Une autre voie :</u> pour tout réel $x\in[0;+\infty[$ on peut écrire que $\frac{x}{e^{x/2}}=\frac{\sqrt{x^{2}}}{\sqrt{e^{x}}}=\sqrt{\frac{x^{2}}{e^{x}}}$.

Comme d'après un résultat du cours : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x/2}}=\sqrt{0}=0$.

A.2) Comme les fonctions $u(x)=20.x+10$ et $v(x)=e^{-\frac{1}{2}.x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors il en va de même pour leur produit. Donc f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
De plus, nous avons :

$$u'(x)=20$$

$$v'(x)=\left(e^{-\frac{1}{2}.x}\right)'=\left(-\frac{1}{2}.x\right)'.e^{-\frac{1}{2}.x}=-\frac{1}{2}.e^{-\frac{1}{2}.x}$$

Il vient alors pour tout réel $x\in[0;+\infty[$:

$$f'(x)=(u.v)'=u'.v+v'.u=20\times e^{-\frac{1}{2}.x}+\frac{-1}{2}.e^{-\frac{1}{2}.x}\times(20.x+10)$$

$$=e^{-\frac{1}{2}.x}.\left[20-\frac{1}{2}.(20.x+10)\right]=e^{-\frac{1}{2}.x}.[20-10.x-5]=e^{-\frac{1}{2}.x}.(-10.x+15)$$

L'exponentielle $e^{-\frac{1}{2}.x}$ est toujours strictement positive. Le facteur affine $-10.x+15$ s'annule en $x=1,5$. Par conséquent, le tableau de variation de f est le suivant :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-10.x+15$		$+$	0	$-$	
$e^{-x/2}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	10	$\nearrow$	$40.e^{-3/4}$	$\searrow$	10

Pour compléter le tableau précédent, on calcule les images de 0 et 1,5 par la fonction f.

- $f(0)=(20\times 0+10).e^{-\frac{1}{2}\times 0}=10\times e^{0}=10\times 1=10$
- $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(20\times\frac{3}{2}+10\right).e^{-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}=(30+10)\times e^{-\frac{3}{4}}=40\times e^{-\frac{3}{4}}$

Dans l'énoncé, il était indiqué que f était seulement définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$. En fait, elle l'est (au moins) aussi en 0.

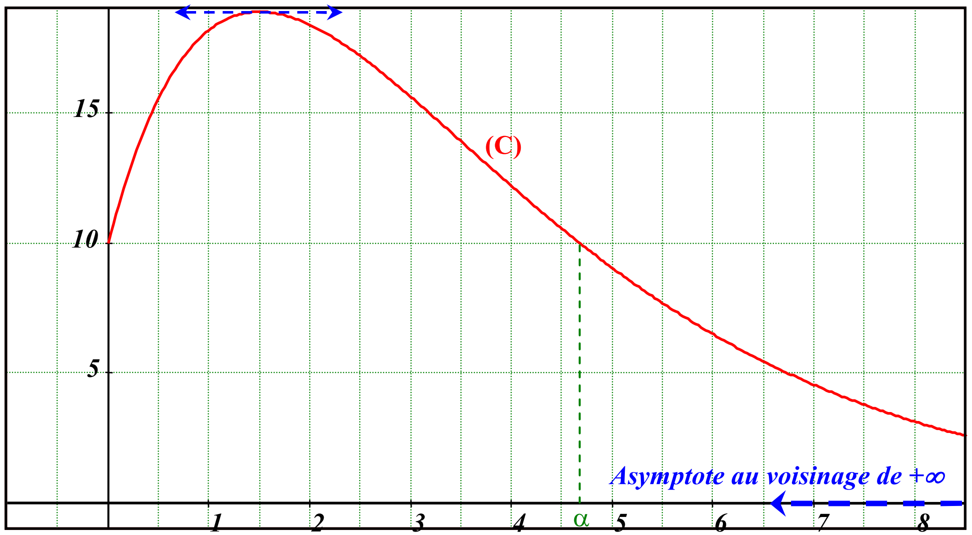
A.3) Comme la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ alors elle y est continue.

Comme f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;1,5[$ et qu'elle y passe de 10 à $40.e^{-0,75}$ qui est strictement supérieur à 18, alors l'équation $f(x)=10$ n'a aucune solution dans cet intervalle.

Comme f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1,5;+\infty[$ passant de $40.e^{-0,75}$ à 0, alors l'équation $f(x)=10$ a une unique solution α dans cet intervalle.

<u>Conclusion :</u> l'équation $f(x)=10$ a une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. A l'aide de la calculatrice, on trouve : $4,6733 \le \alpha \le 4,6734$. Donc $\alpha \approx 4,673$.

A.4) La courbe (C) représentant la fonction f est la suivante :



A.5) Si nous voulons intégrer par parties l'intégrale $I=\int_0^3 f(x).dx$, il nous faut diminuer le degré du polynôme $20.x+10$ en le dérivant. Pour ce faire, nous posons :

$u(x)=20.x+10$ $u'(x)=20$	$v'(x)=e^{-x/2}$ $v(x)=-2\times e^{-x/2}$	Les fonctions u et v sont clairement dérivables sur l'intervalle $[0;3]$.

Nous pouvons écrire :

$$I=\int_0^3 \underbrace{(20.x+10)}_{u}.\underbrace{e^{-x/2}}_{v'}.dx$$

$$=\left[\underbrace{(20.x+10)\times(-2).e^{-x/2}}_{u\times v}\right]_0^3-\int_0^3 \underbrace{20}_{u'}\times\underbrace{(-2).e^{-x/2}}_{v}.dx$$

$$=-140.e^{-3/2}+20.e^0+40.\int_0^3 e^{-x/2}.dx=-140.e^{-3/2}+20.e^0+40.\left[(-2).e^{-x/2}\right]_0^3$$

$$=-140.e^{-3/2}+20-80.e^{-3/2}+80=-220.e^{-3/2}+100$$

Partie B

B.1) Pour tout réel $t\in[0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f'(t)+\frac{1}{2}.f(t)=(-10.t+15).e^{-t/2}+\frac{1}{2}.(20.t+10).e^{-t/2}$$

$$=e^{-t/2}.\left[\cancel{-10.t}+15\cancel{+10.t}+5\right]=5.e^{-t/2}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction f est une des solutions de l'équation $(E): y'+\frac{1}{2}.y=20.e^{-t/2}$.

B.2.a) Si la fonction g définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est une solution de (E), alors pour tout réel $t\in[0;+\infty[$, on a : $g'(t)+\frac{1}{2}.g(t)=20.e^{-t/2}$.

Par conséquent, nous pouvons écrire que pour tout réel $t\in[0;+\infty[$:

$$(g-f)'(t)+\frac{1}{2}.(g-f)(t)=g'(t)-f'(t)+\frac{1}{2}.g(t)-\frac{1}{2}.f(t)$$

$$=g'(t)+\frac{1}{2}.g(t)-\underbrace{\left(f'(t)+\frac{1}{2}.f(t)\right)}_{\text{Car f est une solution...}}=e^{-t/2}-\underbrace{e^{-t/2}}_{\text{...de }(E)}=0$$

<u>Conclusion :</u> si g est une solution de (E), alors $g-f$ est une solution de (E').

B.2.b) Les solutions de l'équation différentielle $(E'): y'+\frac{1}{2}.y=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{1}{2}.y$ sont les fonctions de la forme $C\times e^{-\frac{1}{2}.t}$ où C est une constante à déterminer.

B.2.c) Soit g une solution de l'équation (*E*). En application des deux questions précédentes, nous pouvons écrire que pour tout réel $t \in [0;+\infty[$:

$$\underbrace{g(t)-f(t)=C.e^{-t/2}}_{g-f \text{ solution de } (E')} \quad \text{d'où} \quad g(t)=f(t)+C.e^{-t/2}$$

Or nous savons que $g(0)=f(0)=10$. Par suite : $\cancel{g(0)} = \cancel{f(0)} + C.e^0$ donc $C=0$.

Autrement écrit, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, on a : $g(t)=f(t)$

Conclusion : l'équation différentielle $\begin{cases} y'+\dfrac{1}{2}.y=20.e^{-t/2} \\ y(0)=10 \end{cases}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Il s'agit de la fonction f.

B.3) La température de la réaction redescend à la valeur initiale 10°C lorsque $f(t)=10$. D'après la question I.A.3, cette équation admet deux solutions : 0 et $\alpha \approx 4,673$.

Conclusion : la température redescend à la valeur initiale au bout de 4,673 heures c'est-à-dire 4 heures et 40 minutes environ.

B.4) La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;3]$ est donnée par :

$$\theta = \frac{1}{3-0}\times\int_0^3 f(x).dx = \underbrace{\frac{1}{3}\times I = \frac{100-220.e^{-1,5}}{3}\approx 16,97}_{\text{D'après I.A.5}}$$

Conclusion : la température moyenne sur les trois premières heures est de 17°C.

Seconde partie : sans complexe face aux complexes

Première partie

I.1) Comme $2^3+2\times 2^2-16=8+8-16=0$, alors 2 est une solution de l'équation (*E*).

Donc le polynôme $z^3+2.z^2-16$ est factorisable par $z-2$. Effectuons la factorisation !

$$z^3+2.z^2-16 = z^2.(z-2)+2.z^2+2.z^2-16 = z^2.(z-2)+4.z^2-16$$

$$= z^2.(z-2)+4.z.(z-2)+8.z-16 = z^2.(z-2)+4.z.(z-2)+8.z-16$$

$$= z^2.\underbrace{(z-2)}_{\text{Voilà le...}}+4.z.\underbrace{(z-2)}_{\text{...facteur...}}+8.\underbrace{(z-2)}_{\text{...commun.}} = (z-2).(z^2+4.z+8)$$

I.2) Après la factorisation précédente, l'équation (*E*) se résout sans problème.

$$\underbrace{(z-2).(z^2+4.z+8)=0}_{\text{Un produit est nul...}} \Leftrightarrow \underbrace{z-2=0 \ \text{ou}\ z^2+4.z+8=0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est}}$$

Pour résoudre l'équation du second degré $z^2+4.z+8=0$, calculons son discriminant.

$$\Delta_{z^2+4.z+8=0}=4^2-4\times1\times8=16-32=-16$$

Comme son discriminant est négatif, l'équation $z^2+4.z+8=0$ admet deux solutions complexes et conjuguées.

$$z_1=\frac{-4-\boldsymbol{i}.\sqrt{16}}{2}=\frac{-4-\boldsymbol{i}.4}{2}=-2-2.\boldsymbol{i} \qquad z_2=\frac{-4+\boldsymbol{i}.\sqrt{16}}{2}=\frac{-4+\boldsymbol{i}.4}{2}=-2+2.\boldsymbol{i}$$

Conclusion : l'équation du troisième degré (*E*) admet dans ℂ trois solutions : 2 ; $-2-2.\boldsymbol{i}$ et $-2+2.\boldsymbol{i}$. Mais une seule dans ℝ...

➲ Le module du réel 2 est 2 et l'un de ses arguments est 0. Donc : $2=\underbrace{2\times e^{\boldsymbol{i}.0}}_{\text{Forme exponentielle}}$

Pour trouver l'écriture exponentielle de la solution $-2-2.\boldsymbol{i}$, calculons son module.

$$|-2-2.\boldsymbol{i}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2.\sqrt{2}$$

Par conséquent :

$$-2-2.\boldsymbol{i}=2.\sqrt{2}\times\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-\boldsymbol{i}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=2.\sqrt{2}\times\left[\cos\left(-\frac{3.\pi}{4}\right)+\boldsymbol{i}.\sin\left(-\frac{3.\pi}{4}\right)\right]=\underbrace{2.\sqrt{2}.e^{-\frac{3\pi}{4}.\boldsymbol{i}}}_{\text{Forme exponentielle}}$$

Enfin, la solution $-2+2.\boldsymbol{i}$ étant le conjugué du nombre complexe $-2-2.\boldsymbol{i}$, elle a donc même module que celui-ci mais ses arguments sont opposés.

Donc $\dfrac{3.\pi}{4}$ est un argument de $-2+2.\boldsymbol{i}$. Finalement : $-2+2.\boldsymbol{i}=\underbrace{2.\sqrt{2}\times e^{-\frac{3.\boldsymbol{i}.\pi}{4}}}_{\text{Ecriture exponentielle}}$

Deuxième partie

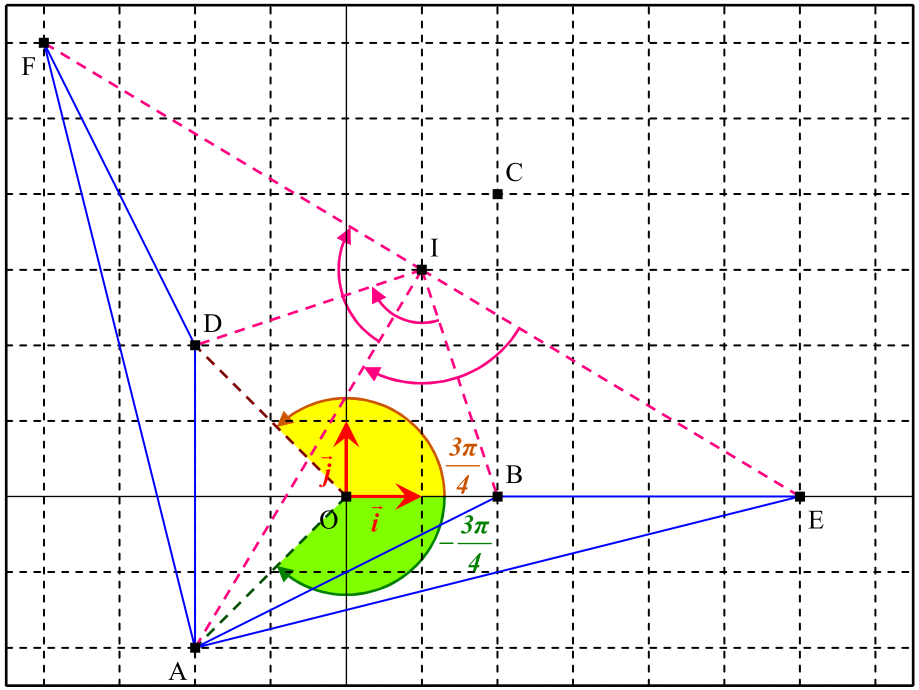
II.1) La figure demandée est celle se trouvant sur la page suivante.

II.2) L'appartenance à un parallélogramme peut se traduire par une égalité vectorielle.

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}}_{\text{Deux vecteurs égaux ont...}} \Leftrightarrow \underbrace{z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}}_{\text{...des affixes égales}}$

$\Leftrightarrow \underbrace{z_B-z_A=z_C-z_D}_{\text{Arrivée}-\text{Départ}} \Leftrightarrow z_C=z_B+z_D-z_A$

$\Leftrightarrow z_C=2+(-2+2.\boldsymbol{i})-(-2-2.\boldsymbol{i})=2+4.\boldsymbol{i}$



II.3) Si le point E est l'image de C par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre B, alors :

$$z_E - z_B = e^{-i.\frac{\pi}{2}}.(z_C - z_B) \text{ d'où } z_E - 2 = -i.(2+4.i-2) \text{ d'où } z_E - 2 = -i \times 4.i$$
$$\text{d'où } z_E - 2 = 4 \text{ d'où } z_E = 6$$

De même, si F est l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$, alors :

$$z_F - z_D = e^{i.\frac{\pi}{2}}.(z_C - z_D) \text{ d'où } z_F - (-2+2.i) = i.\left[(2+4.i)-(-2+2.i)\right]$$
$$\text{d'où } z_F - (-2+2.i) = \underbrace{i.(4+2.i)}$$
$$\text{d'où } z_F = \underbrace{4.i-2}+(-2+2.i) = -4+6.i$$

II.4.a) Calculons le quotient complexe demandé :

$$\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{(-4+6.i)-(-2-2.i)}{6-(-2-2.i)} = \frac{-4+6.i+2+2.i}{6+2+2.i} = \frac{-2+8.i}{8+2.i}$$

Comme $i \times (8+2.i) = 8.i + 2.i^2 = 8.i - 2$, alors le quotient $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}$ est bien égal à i.

II.4.b) Le quotient calculé à la question précédente permet d'affirmer :

- ☞ D'abord : $\underbrace{(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF})}_{\text{Angle orienté}} = \arg\left(\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ modulo $2.\pi$

  Donc les droites (AE) et (AF) sont perpendiculaires. Autrement dit, le triangle AEF est rectangle en A.
- ☞ Ensuite : $\frac{AF}{AE} = \frac{|z_F - z_A|}{|z_E - z_A|} = \left|\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A}\right| = |i| = 1$

  Donc les côtés [AF] et [AE] ont des longueurs égales. AEF est isocèle en A.

<u>Conclusion :</u> le triangle AEF est un triangle isocèle rectangle (direct) en A.

II.5) Commençons par calculer l'affixe du point I qui est l'isobarycentre des points E et F.

$$z_I = \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{6+(-4+6.i)}{2} = \frac{2+6.i}{2} = 1+3.i$$

A présent, déterminons l'expression complexe de la rotation r de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{M' d'affixe z' est l'image de M}\\ \text{d'affixe z par la rotation } r\end{array}\right\} \Leftrightarrow z' - z_I = e^{-i.\frac{\pi}{2}}.(z - z_I)$$
$$\Leftrightarrow z' = \underbrace{-i.\left[z-(1+3.i)\right]}+(1+3.i)$$
$$\Leftrightarrow z' = \underbrace{-i.z+i-3}+1+3.i = -i.z-2+4.i$$

Donc une expression complexe de la rotation r est : $r(z) = -i.z - 2 + 4.i$.

A présent, nous pouvons calculer les affixes des images des points E, B et A par la rotation r.

- ☞ $r(z_E) = -i \times z_E - 2 + 4.i = -6.i - 2 + 4.i = -2 - 2.i = z_A$

  Donc l'image du point E par la rotation r est le point A.
- ☞ $r(z_B) = -i \times z_B - 2 + 4.i = -2.i - 2 + 4.i = -2 + 2.i = z_D$

  Donc l'image du point B par la rotation r est le point D.

☞ $\boldsymbol{r}(z_A) = -\boldsymbol{i} \times \underbrace{(-2-2.\boldsymbol{i})}_{z_A} - 2 + 4.\boldsymbol{i} = 2.\boldsymbol{i} - 2 - 2 + 4.\boldsymbol{i} = -4 + 6.\boldsymbol{i} = z_F$

Donc l'image du point A par la rotation $\boldsymbol{r}$ est le point F.

<u>Conclusion :</u> l'image du triangle EBA par la rotation $\boldsymbol{r}$ est le triangle ADF.

Troisième partie : des questions de cours qui y tournent

1) Dans le cours, il a été établi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

➲ A première vue, lorsque x tend vers 0^+, le produit $x.\ln(x)$ est une forme indéterminée du type $0\times(-\infty)$. Nous allons lever celle-ci par une astuce.

Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on appelle t l'inverse de x. On a donc : $t = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{t}$.

Le produit précédent s'écrit donc :

$$x.\ln(x) = \frac{1}{t}\times\ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t}\times\ln(t) = -\frac{\ln(t)}{t}$$

Lorsque x tend vers 0^+, son inverse t tend vers $\frac{1}{0^+} = +\infty$. Alors $\frac{\ln(t)}{t}$ tend vers 0.

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to0^+} x.\ln(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{\ln(t)}{t} = -0 = 0$.

L'objet de cet exercice : la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur [0 ; +∞[

La fonction f est définie par morceaux sur l'intervalle $[0;+\infty[$:

☞ D'abord, on définit l'image de 0 : $f(0) = 1$.

☞ Ensuite sur le reste de l'intervalle : pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{2}.x^2.[3-2.\ln(x)]+1$

D'après son expression sur la partie $]0;+\infty[$, nous pouvons dire que la fonction f y est dérivable et donc continue.

Maintenant, on ignore ce qu'il advient de la continuité et de la dérivabilité de f en 0. (En fait, à droite de 0). C'est l'objet du reste de cet exercice.

2) Pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}.x^2.[3-2.\ln(x)]+1 = \frac{3}{2}.x^2 - x\times x.\ln(x)+1$$

Lorsque x tend vers 0^+, les quantités $\frac{3}{2}.x^2$ et $x.\ln(x)$ tendent aussi vers 0. Ainsi :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 - 0\times0 + 1 = 1 = f(0)$$

Comme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$, on en déduit que la fonction f est continue à droite de 0.

3) Quand x s'en va vers $+\infty$, les quantités $\frac{1}{2}.x^2$ et $\ln(x)$ tendent elles aussi vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\times[3-2\times(+\infty)]+1 = (+\infty)\times(-\infty)+1 = -\infty$$

4) Dire que la fonction f est dérivable en a <u>signifie que</u> la limite lorsque h tend vers 0 du quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.

➲ Afin de savoir si f est dérivable en 0, étudions la limite du quotient $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ lorsque h tend vers 0^+. N'oublions pas que la fonction f n'est définie qu'à droite de 0.

Pour tout réel $h > 0$, nous pouvons écrire :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{1}{2}.h^2.[3-2.\ln(h)]+1-1}{h} = \frac{\frac{1}{2}.h^{\cancel{2}}.[3-2.\ln(h)]}{\cancel{h}}$$

$$= \frac{1}{2}.h.[3-2.\ln(h)] = \frac{3}{2}.h - h.\ln(h)$$

Or lorsque h tend vers 0^+, la quantité $h.\ln(h)$ tend vers 0 d'après la question 3.1.

<u>Conclusion :</u> comme $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0 - 0 = 0$, alors la fonction f est dérivable à droite de 0 et le nombre dérivé de f à droite de 0 est égal à 0. Autrement dit : $f'(0) = 0$

Dernière partie : le peu d'une suite d'intégrales

Rappel de la primitive d'une composée

Si $\begin{cases} \text{f est une fonction dont une primitive sur un intervalle J est une fonction F} \\ u : I \to J \text{ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans J} \end{cases}$

<u>alors</u> une primitive de $u'\times f(u)$ sur l'intervalle I est la fonction $F(u)$.

1.a) Une primitive de la fonction $\sin(3.x)=\frac{1}{3}\times 3\times\sin(3.x)=\frac{1}{3}\times u'\times f(u)$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $\frac{1}{3}\times F(u)=\frac{1}{3}\times(-\cos(3.x))=-\frac{\cos(3.x)}{3}$. Par suite :

$$I_0=\int_0^{\pi/6}\sin(3.x).dx=\left[-\frac{\cos(3.x)}{3}\right]_0^{\pi/6}=\left(-\frac{\cos(\pi/2)}{3}\right)-\left(-\frac{\cos(0)}{3}\right)=-\frac{0}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

1.b) Pour calculer I_1, nous allons procéder à une intégration par parties en posant :

$u(x)=x$ donc $u'(x)=1$ | $v'(x)=\sin(3.x)$ donc $v(x)=-\frac{\cos(3.x)}{3}$

où u et v sont deux fonctions clairement dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;\pi/6]$. Ainsi :

$$I_1=\int_0^{\pi/6}\underbrace{x}_{u}.\underbrace{\sin(3.x)}_{v'}.dx=\left[x\times\frac{-\cos(3.x)}{3}\right]_0^{\pi/6}-\int_0^{\pi/6}1\times\frac{-\cos(3.x)}{3}.dx$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{-\cos(\pi/2)}{3}\right)}_{=0}-\underbrace{\left(0\times\frac{-\cos(0)}{3}\right)}_{=0}+\frac{1}{3}.\int_0^{\pi/6}\cos(3.x).dx=\frac{1}{3}.\int_0^{\pi/6}\cos(3.x).dx$$

Une primitive de la fonction $\cos(3.x)=\frac{1}{3}\times\underbrace{3}_{u'}\times\underbrace{\cos(3.x)}_{f(u)}$ sur $\mathbb{R}$ est $\frac{1}{3}\times F(u)=\frac{\sin(3.x)}{3}$.

$$I_1=\frac{1}{3}.\int_0^{\pi/6}\cos(3.x).dx=\frac{1}{3}.\left[\frac{\sin(3.x)}{3}\right]_0^{\pi/6}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sin(\pi/2)}{3}-\frac{\sin(0)}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{0}{3}\right)=\frac{1}{9}$$

2.a) Avant toute chose, établissons un résultat qui nous servira par la suite :

Si $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ alors $0\le 3.x\le\frac{\pi}{2}$ donc $\underbrace{0=\sin(0)\le\sin(3.x)\le\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1}_{\text{Car sinus est croissante sur l'intervalle }[0;\pi/2]}$

Soit n un entier naturel quelconque. Nous pouvons écrire :

Si $0\le x\le\underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\le 1}$ alors $0\le x\le 1$ donc $\underbrace{0\le x^{n+1}.\sin(3.x)\le x^n.\sin(3.x)}_{\text{On a multiplié l'inégalité par le réel positif } x^n.\sin(3.x)}$

x^n et $\sin(3.x)$ sont positifs car $x\in[0;\pi/6]$.

Cette inégalité est valable pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$. Intégrons-la sur cet intervalle. Il vient :

$$\int_0^{\pi/6}0.dx\le\int_0^{\pi/6}x^{n+1}.\sin(3.x).dx\le\int_0^{\pi/6}x^n.\sin(3.x).dx\quad\Leftrightarrow\quad 0\le I_{n+1}\le I_n$$

<u>Conclusion :</u> l'inégalité précédente $0\le I_{n+1}\le I_n$ nous permet de conclure :

☞ Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$ nous avons $I_n\ge I_{n+1}$, <u>alors</u> la suite (I_n) est décroissante.

☞ Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$ nous avons $I_n\ge 0$, <u>alors</u> la suite (I_n) est positive ou nulle.

☞ Comme la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 (car positive ou nulle) <u>alors</u> elle est convergente. Mais il serait prématuré d'affirmer que sa limite est 0.

2.b) Soit n un entier naturel quelconque. Nous avons établi précédemment :

Si $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ alors $0\le\sin(3.x)\le 1$ donc $\underbrace{0\le x^n.\sin(3.x)\le x^n}_{\text{On a multiplié par le réel positif ou nul } x^n}$

Intégrons cette dernière inégalité sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ où elle est valable. Il vient :

$$\int_0^{\pi/6}0.dx\le\int_0^{\pi/6}x^n.\sin(3.x).dx\le\int_0^{\pi/6}x^n.dx\quad\Leftrightarrow\quad 0\le I_n\le\int_0^{\pi/6}x^n.dx$$

2.c) Pour établir la limite de la suite, nous devons calculer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/6}x^n.dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/6}=\frac{1}{n+1}\times\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}-\frac{1}{n+1}\times 0^{n+1}=\frac{1}{n+1}\times\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$$

Donc pour tout entier naturel n, nous avons : $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}\times\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$

Comme $\frac{\pi}{6}\in]0;1[$ alors la suite géométrique $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$ tend vers 0 comme la suite $\frac{1}{n+1}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\times\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}=0\times 0=0$.

<u>Conclusion :</u> comme la suite (I_n) est coincée entre 0 et une suite qui y va, alors en application du théorème des gendarmes la limite de la suite (I_n) est égale à 0.

3.a) Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{I_{n+2} = \int_0^{\pi/6} \underbrace{x^{n+2}}_{u}.\underbrace{\sin(3.x)}_{v'}.dx = \left[x^{n+2} \times \frac{-\cos(3.x)}{3}\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} \underbrace{(n+2).x^{n+1}}_{u'} \times \underbrace{\frac{-\cos(3.x)}{3}}_{v}.dx}_{\text{Première intégration par parties...}}$$

$$= \underbrace{\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+2} \times \frac{0}{3}\right)}_{=0} - \underbrace{\left(0^{n+2} \times \frac{-1}{3}\right)}_{=0} + \frac{n+2}{3} \times \underbrace{\int_0^{\pi/6} \underbrace{x^{n+1}}_{u} \times \underbrace{\cos(3.x)}_{v'}.dx}_{\text{Seconde intégration par parties...}}$$

$$= \frac{n+2}{3} \times \left(\left[x^{n+1} \times \frac{\sin(3.x)}{3}\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} \underbrace{(n+1).x^n}_{u'} \times \underbrace{\frac{\sin(3.x)}{3}}_{v}.dx\right)$$

$$= \frac{n+2}{3} \times \left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} \times \frac{1}{3} - 0^{n+2} \times \frac{0}{3} - \frac{n+1}{3}.\int_0^{\pi/6} x^n.\sin(3.x).dx\right)$$

$$= \frac{n+2}{3} \times \left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} \times \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3} \times I_n\right) = \frac{n+2}{9} \times \left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - (n+1) \times I_n\right)$$

3.b) Calculons les troisième et quatrième de la suite (I_n).

☞ $I_2 = I_{0+2} = \frac{2}{9} \times \left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^{0+1} - I_0\right] = \frac{\pi - 2}{27}$

☞ $I_3 = I_{1+2} = \frac{3}{9} \times \left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1+1} - 2 \times I_1\right] = \frac{\pi - 8}{108}$

Devoir Surveillé No.4

Le contexte

Ce quatrième et dernier devoir de deux heures eut lieu à la mi-mai 2006. Il abordait le dénombrement, les probabilités discrètes et continues ainsi qu'une partie de la géoémtrie dans l'espace.
Pour cet au revoir, mon diabolique cerveau conçut trois exercices remarquables plus ou moins dans l'esprit du bac.
Les calculatrices étaient autorisées.

L'énoncé

Première partie : un bon plan pour une bonne droite

Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube dont tous les côtés mesurent 4 centimètres.
On appelle O le centre du carré ABEF. On note P le milieu du segment [BE].

Le point N est défini par la relation vectorielle : $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}.\overrightarrow{AB}$.

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ qui ont pour norme 1 centimètre, sont définis par :

$$\vec{i} = \frac{\overrightarrow{FA}}{4} \qquad \vec{j} = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} \qquad \vec{k} = \frac{\overrightarrow{AD}}{4}$$

Dans le présent exercice, nous travaillerons dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

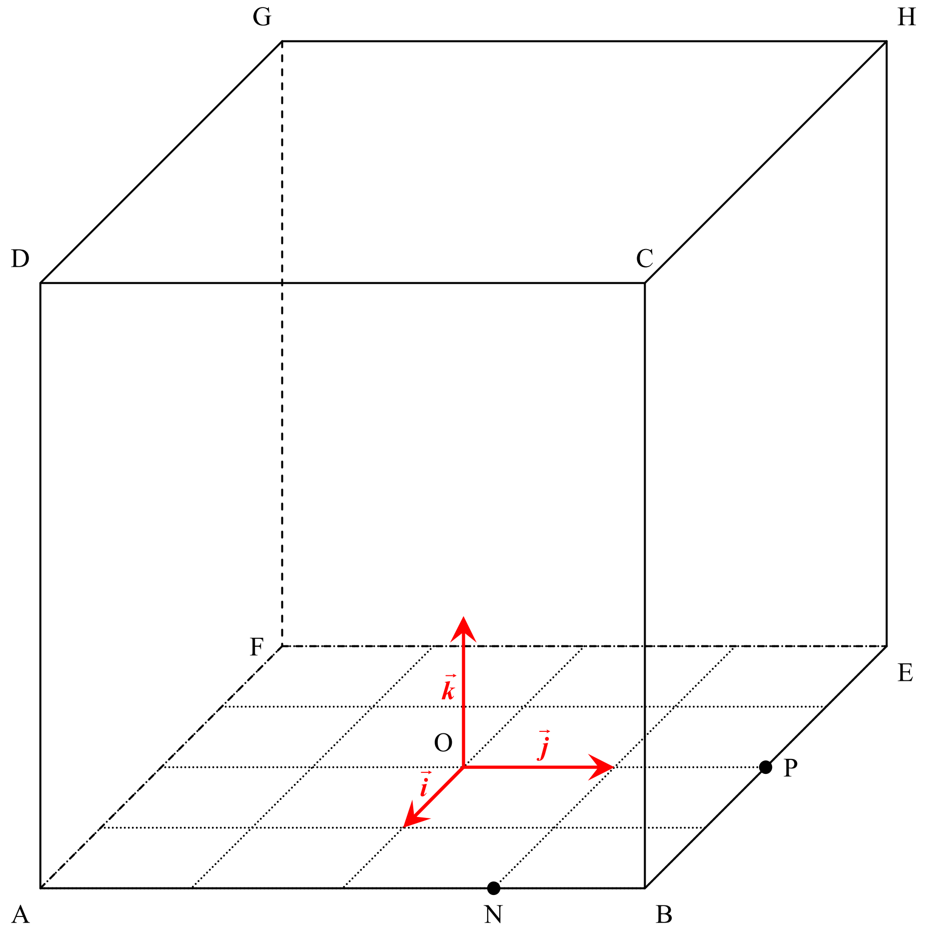
a) Compléter la figure ci-contre en indiquant les coordonnées dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de tous les points y apparaissant.

b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AP}$.

Pourquoi le vecteur $\vec{n}$ est-il un vecteur normal du plan (APH) ?
Déterminer une équation cartésienne du plan (APH).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (NG).

d) Démontrer que la droite (NG) n'est pas parallèle au plan (APH).
Déterminer les coordonnées du point I qui est l'intersection de la droite (NG) et du plan (APH).
Construire ce point I sur la figure.



Seconde partie : rien ne va plus !

La Blancoise des Jeux vient de lancer son nouveau produit : le Phyltonphryk. Expliquons le principe de ce nouveau jeu.
Pour participer, le joueur acquitte une mise de m euros.
Une urne contient une boule noire, deux boules vertes et quatre boules blanches. Toutes ces boules sont indiscernables au toucher.
Le joueur tire au hasard et simultanément une poignée de deux boules.
Si l'une des deux boules tirées est la boule noire, alors le joueur ne gagne rien.
Par contre, si le joueur tire deux boules vertes alors il gagne cinq fois sa mise.
Si la poignée ne comprend qu'une seule boule verte et pas la boule noire, alors le joueur a droit à une seconde chance. Il tire alors une troisième boule parmi celles restant dans l'urne. Si cette troisième boule est verte alors il gagne cinq fois sa mise. Sinon il est remboursé de sa mise.
Enfin si les deux boules tirées sont blanches, alors la Blancoise des Jeux remet généreusement au joueur un chèque de 1 euro.

On note :

- V_2 l'événement "les deux boules de la poignée sont vertes".
- V_1 l'événement "la poignée compte une seule boule verte mais pas la boule noire".
- B l'événement "les deux boules de la poignée sont blanches".
- N l'événement "une des deux boules de la poignée est la boule noire".
- G l'événement "le joueur a gagné cinq fois sa mise".

Dans le présent exercice, une grande attention sera accordée à la qualité de la rédaction ainsi qu'à la clarté des explications. On pourra faire un arbre pondéré pour bien comprendre la situation.

a) Calculer les probabilités des événements N, B, V_1 et V_2.

b) Calculer la probabilité de l'événement G sachant que l'événement V_1 est réalisé.

Démontrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{13}{105}$.

c) On sait que le joueur a gagné cinq fois sa mise. Calculer la probabilité qu'il ait tiré deux boules vertes au premier tirage.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain brut du joueur.

d) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

e) Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :

$$E(X) = \frac{97.m + 30}{105}$$

Dans un excès de générosité, la Blancoise des Jeux décide que le Phyltonphryk doit être un jeu équitable. A combien doit-elle fixer la mise pour qu'il en soit ainsi ?

f) Un joueur décide de jouer sept fois de suite au Phyltonphryk. On suppose que chaque partie est indépendante des autres. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement trois d'entre elles. On donnera le résultat sous la forme d'une valeur approchée arrondie au millième près.

Dernière partie : le prof s'appelle machine !

Afin de remplacer les professeurs de mathématiques qui partent à la retraite, le Ministère de l'Education Nationale a décidé d'acquérir un nouveau type d'enseignant : le Roboprof. Un organisme cybernétique capable d'enseigner 24 heures sur 24, de démontrer tous les théorèmes existants et de résoudre tous les exercices au programme. Un Terminator des maths en quelque sorte.
Mais comme toutes les machines, les Roboprofs peuvent tomber en panne. Les Roboprofs n'étant pas réparables, ceux qui tombent en panne sont irrémédiablement perdus.
On désigne par X la durée de vie exprimée en mois d'un Roboprof.
X est une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0;+\infty[$.
La loi de probabilité de X est une loi exponentielle de paramètre λ.
Les probabilités données seront arrondies au millième près.

a) Donner l'expression de la densité de probabilité f de la variable aléatoire continue X ainsi que son ensemble de définition.

b) Sachant que la probabilité qu'un Roboprof tombe en panne durant la première année est égale à 0,3 , déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près du paramètre λ.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que $\lambda = 0,03$.

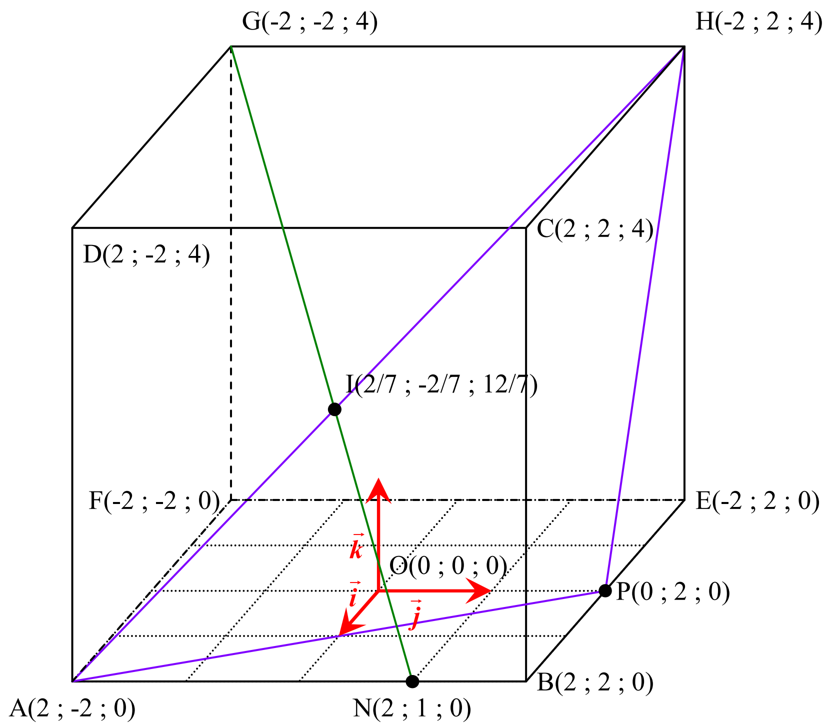
c) Calculer la probabilité qu'un Roboprof ait une durée de vie supérieure à trois ans.

d) Sachant qu'un Roboprof a déjà fonctionné trois ans, calculer la probabilité que sa durée de vie soit inférieure ou égale à cinq ans.

Le corrigé

Première partie : un bon plan pour une bonne droite

a) La figure complétée est la suivante :



b) Pour savoir si $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AP}$, nous allons calculer leurs produits scalaires respectifs.

Comme nous travaillons dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ alors ces produits scalaires s'expriment en fonction des coordonnées des vecteurs.

☞ $\vec{n}.\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix} = \underbrace{2\times(-4)+1\times4+1\times4}_{\text{Somme des produits de chaque coordonnée}} = -8+4+4=0$

Leur produit scalaire étant nul, les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.

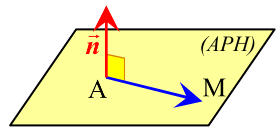
☞ $\vec{n}.\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix} = 2\times(-2)+1\times4+1\times0=-4+4+0=0$.

Comme leur produit scalaire est nul, alors $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont orthogonaux.

➲ Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (APH). Comme le vecteur non nul $\vec{n}$ leur est orthogonal, alors il est orthogonal à tous les vecteurs $\vec{v}$ contenus dans ce plan. Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (APH).

➲ Le plan (APH) est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{n}$. Par conséquent :

$M(x;y;z)\in \text{plan}(APH) \Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+2\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux



$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y+2\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\times2+(y+2)\times1+z\times1=0$

$\Leftrightarrow 2.x-4+y+2+z=0 \Leftrightarrow 2.x+y+z-2=0$

<u>Conclusion :</u> une équation cartésienne du plan (APH) est $2.x+y+z-2=0$.

Note : toutes les autres s'obtiennent en multipliant les coefficients par un même réel.

c) La droite (NG) est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{NM}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{NG}$.

$M(x;y;z)\in \text{droite}(NG) \Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{NM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NG}\begin{pmatrix}-4\\-3\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{NM}=t.\overrightarrow{NG}$

$\Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases}x-2=t\times(-4)\\ y-1=t\times(-3)\\ z=t\times4\end{cases}$

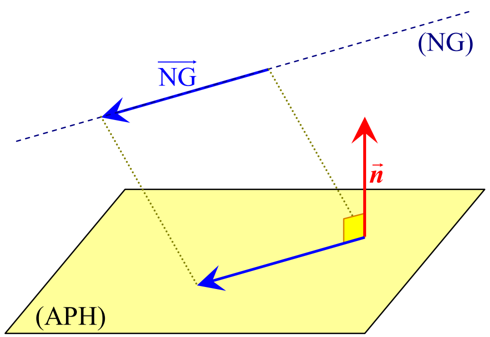
$$M(x;y;z) \in \text{droite}(NG) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Il existe un réel t tel que } \begin{cases} x = 2 - 4.t \\ y = 1 - 3.t \\ z = 4.t \end{cases}$$

Conclusion : une représentation paramétrique de la droite (NG) est :

$$\begin{cases} x = 2 - 4.t \\ y = 1 - 3.t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 4.t \end{cases}$$

d) Pour que la droite (NG) soit parallèle au plan (APH), il faut et il suffit qu'un vecteur directeur de la première soit orthogonal à un vecteur normal du second.

Regardons si les vecteurs $\overrightarrow{NG}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux en calculant leur produit scalaire.



Et si (NG) était parallèle au plan (APH) ?

$$\overrightarrow{NG}.\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= (-4) \times 2 + (-3) \times 1 + 4 \times 1$$
$$= -8 - 3 + 4 = -7 \neq 0$$

Conclusion : comme leur produit scalaire est non nul alors le vecteur directeur $\overrightarrow{NG}$ n'est pas orthogonal au vecteur normal $\vec{n}$. Donc la droite (NG) n'est pas parallèle au plan (APH). Ceux-ci sont donc sécants et leur intersection est un point que l'on note I.

➲ Comme d'habitude, appelons $(x_I; y_I; z_I)$ les coordonnées de ce point I.

Comme le point I appartient à la droite (NG) alors ses coordonnées en vérifient la représentation paramétrique. Autrement dit, il existe un réel t_I tel que $\begin{cases} x_I = 2 - 4.t_I \\ y_I = 1 - 3.t_I \\ z_I = 4.t_I \end{cases}$

De plus, comme le point I appartient aussi au plan (APH) alors les coordonnées du premier sont solutions de l'équation cartésienne du second. Ainsi :

$$2.x_I + y_I + z_I - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times (2 - 4.t_I) + (1 - 3.t_I) + 4.t_I - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 4 - 8.t_I + 1 - 3.t_I + 4.t_I - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -7.t_I + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -7.t_I = -3 \quad \Leftrightarrow \quad t_I = \frac{-3}{-7} = \frac{7}{3}$$

Il vient alors :

$$x_I = 2 - 4 \times \frac{3}{7} = \frac{14}{7} - \frac{12}{7} = \frac{2}{7} \qquad y_I = 1 - 3 \times \frac{3}{7} = \frac{7}{7} - \frac{9}{7} = -\frac{2}{7} \qquad z_I = 4 \times \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$$

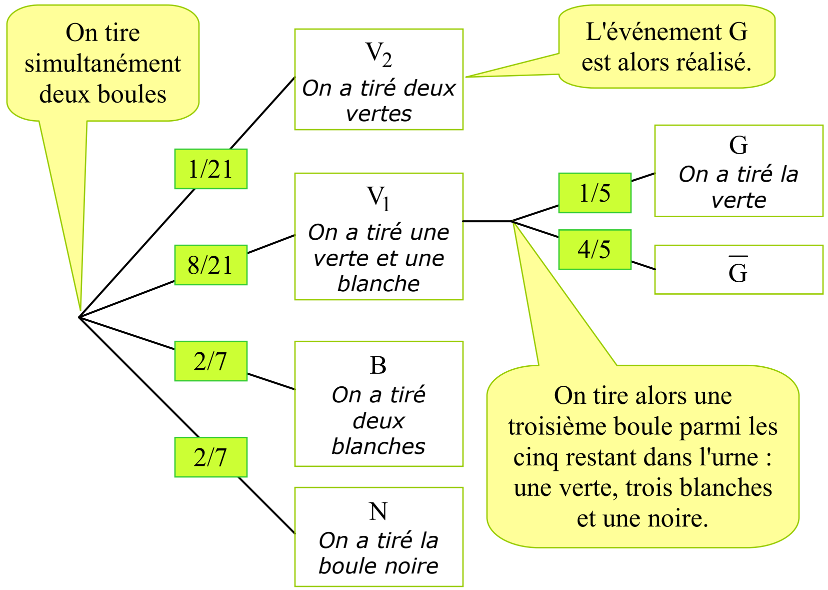
Conclusion : le point d'intersection I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{12}{7}\right)$.

Ce point I se trouve aux trois septièmes du segment [NG] à partir de N car $\overrightarrow{NI} = \frac{3}{7}.\overrightarrow{NG}$.

Et ce dans la réalité comme sur la perspective cavalière où les rapports de longueurs sont préservés. C'est ainsi qu'on le trace.

Seconde partie : rien ne va plus !

La clé de cet exercice est de bien comprendre la situation.
D'abord, comme toutes les boules sont indiscernables au toucher et que les tirages se font au hasard alors nous sommes en situation d'équiprobabilité.
Ensuite, le joueur tire une poignée ou une combinaison de deux boules. C'est un tirage sans ordre et simultané. Nous emploierons les "p parmi n".
Enfin, si cette poignée se constitue d'une boule verte et d'une boule blanche, alors le joueur tire une troisième boule.
La situation peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



a) Calculons les probabilités des événements demandés.

➲ L'événement N est réalisé lorsque la poignée est constituée de la boule noire et d'une des six autres boules. Ainsi :

$$p(N)=\frac{\text{Nombre de poignées "une noire une autre"}}{\text{Nombre de poignées total}}=\frac{\binom{1}{1}\times\binom{6}{1}}{\binom{7}{2}}=\frac{1\times 6}{21}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

➲ L'événement B est réalisé lorsque la poignée est constituée de deux boules blanches à choisir parmi les quatre présentes dans l'urne. Donc :

$$p(N)=\frac{\text{Nombre de poignées "deux blanches"}}{\text{Nombre de poignées total}}=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

➲ L'événement V_1 est réalisé lorsque la poignée est constituée d'une seule boule verte et d'une autre boule qui ne peut être blanche. Par conséquent :

$$p(V_1)=\frac{\text{Nombre de poignées "une verte une blanche"}}{\text{Nombre de poignées total}}=\frac{\binom{2}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}}=\frac{2\times 4}{21}=\frac{8}{21}$$

➲ L'événement V_2 est réalisé lorsque la poignée est constituée des deux boules vertes.

$$p(V_2)=\frac{\text{Nombre de poignées "deux vertes"}}{\text{Nombre de poignées total}}=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}}=\frac{1}{21}$$

b) Lorsque l'événement V_1 est réalisé, il reste dans l'urne cinq boules : une boule verte, trois blanches et la noire. Le joueur tire alors une troisième boule.
Pour qu'alors l'événement G se réalise, il faut que le joueur tire la seule boule verte.

Par conséquent : $p_{V_1}(G)=p(G\text{ sachant }V_1)=\frac{1}{5}$.

➲ L'événement G se réalise :

- ☞ soit lorsque l'événement V_2 se réalise.
- ☞ soit lorsque l'événement V_1 s'est réalisé et que la troisième boule tirée par le joueur est verte.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}p(G)&=p(V_2)+p(V_1\cap G)\\&=p(V_2)+p(V_1)\times p_{V_1}(G)=\frac{1}{21}+\frac{8}{21}\times\frac{1}{5}=\frac{5}{105}+\frac{8}{105}=\frac{13}{105}\end{aligned}$$

c) L'événement V_2 est inclus dans l'événement G. Par conséquent :

$$p_G(V_2)=\frac{p(G\cap V_2)}{p(G)}=\frac{p(V_2)}{p(G)}=\frac{\frac{1}{21}}{\frac{13}{105}}=\frac{1}{21}\times\frac{105}{13}=\frac{1}{\cancel{21}}\times\frac{5\times\cancel{21}}{13}=\frac{5}{13}$$

d) Le gain brut correspond à la somme que gagne le joueur. Le gain net est la différence entre le gain brut et la mise m du joueur. Ce sont les bénéfices du jeu en quelques sortes.
Les gains bruts X possibles sont : 5m ; m ; 1 et 0 euros.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la suivante :

Valeur de X	0	1	m	5 m	
Evénement correspondant	N	B	$V_1\cap\overline{G}$	G	***Total***
Probabilité	$2/7$	$8/21$	$32/105$	$13/105$	1

e) Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

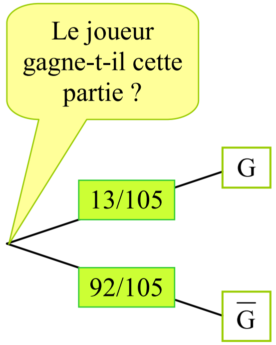
$$E(X)=\underbrace{\frac{2}{7}\times 0+\frac{2}{7}\times 1+\frac{32}{105}\times m+\frac{13}{105}\times 5.m}_{\text{Somme des probabilité}\times\text{valeur de X}}=0+\frac{30}{105}+\frac{32.m}{105}+\frac{65.m}{105}=\frac{97.m+30}{105}$$

➲ Un jeu est équitable lorsque l'espérance de gain brut est égale à la mise. Ainsi :

$$\text{Le jeu est équitable}\iff E(X)=m\iff\frac{97.m+30}{105}=m\iff 97.m+30=105.m$$
$$\iff 30=8.m\iff m=\frac{30}{8}=3,75€$$

<u>Conclusion :</u> pour que le Phylthonphryk soit équitable, la mise doit être fixée à 3,75€.

f) Chaque partie de Phylthonphryk est assimilable à une épreuve de Bernoulli où la question est de savoir si l'événement G se réalise.
Les sept parties successives de Phylthonphryk constituent un schéma de Bernoulli à sept épreuves.
On appelle N la variable aléatoire comptant le nombre de parties gagnées par le joueur sur les sept.
N prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et 7.



Sa loi de probabilité est la loi binomiale de paramètre $n = 7$ et $p = \frac{13}{105}$.

Il gagne exactement trois parties lorsque $N = 3$. Par suite :

$$P(N=3) = \binom{7}{3} \times \left(\frac{13}{105}\right)^3 \times \left(\frac{92}{105}\right)^4 = \frac{157391533312}{4020286921875} \approx 0,039$$

<u>Conclusion :</u> le joueur a moins de quatre pourcents de chance de gagner exactement trois parties sur les sept auxquelles il joue.

Dernière partie : le prof s'appelle machine !

a) La loi de probabilité de X étant une loi exponentielle de paramètre λ, la densité de probabilité de X est la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda.e^{-\lambda.x}$$

Une primitive de la fonction $f(x) = -\underbrace{(-\lambda)}_{u'}.\underbrace{e^{-\lambda.x}}_{e^u}$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est $-\underbrace{e^{-\lambda.x}}_{e^u}$.

b) Nous savons que la probabilité que l'appareil tombe en panne au cours de 12 premiers mois c'est-à-dire que X appartienne à l'intervalle $[0;12]$ est de 0,3. Par conséquent :

$$p(X\in[0;12]) = 0,3 \Leftrightarrow \int_0^{12} f(x).dx = 0,3 \Leftrightarrow \left[-e^{-\lambda.x}\right]_0^{12} = 0,3$$

$$\Leftrightarrow \left(-e^{-\lambda\times 12}\right) - \left(-e^{-\lambda\times 0}\right) = 0,3 \Leftrightarrow -e^{-12.\lambda} + 1 = 0,3$$

$$\Leftrightarrow -e^{-12.\lambda} = -0,7 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-12.\lambda} = 0,7}_{\text{Deux réels positifs égaux ont...}} \Leftrightarrow \underbrace{-12.\lambda = \ln(0,7)}_{\text{...des logarithmes égaux.}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,7)}{-12} \approx 0,0297$$

c) Désormais, la densité de probabilité de la variable aléatoire continue X à valeurs est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 0,03 \times e^{-0,03.x}$$

dont une primitive est $-e^{-0,03.x}$.

Calculons la probabilité qu'un Roboprof ait une durée de vie supérieure à trente-six mois c'est-à-dire la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[36;+\infty[$.

$$p(X\in[36;+\infty[) = \underbrace{1 - p(X\in[0;36])}_{\text{Evénement contraire...}} = 1 - \int_0^{36} f(x).dx = 1 - \left[-e^{-0,03.x}\right]_0^{36}$$

$$= 1 - \left(-e^{-1,08} + 1\right) = e^{-1,08} \approx 0,340$$

<u>Conclusion :</u> la probabilité qu'un Roboprof serve plus de trois ans est d'environ 0,34.

d) Calculons la probabilité que $\underbrace{\text{la durée de vie d'un Roboprof soit inférieure à cinq ans}}_{X\in[0;60]}$ sachant $\underbrace{\text{qu'il a déjà fonctionné trois années}}_{X\in[3;+\infty[}$.

$$p(X\in[0;60] \text{ sachant } X\in[36;+\infty[) = \frac{p(X\in[0;60]\cap[36;+\infty[)}{p(X\in[36;+\infty[)} = \frac{p(X\in[36;60])}{p(X\in[36;+\infty[)}$$

Nous connaissons déjà le dénominateur. Calculons le numérateur.

$$p(X\in[36;60]) = \int_{36}^{60} f(x).dx$$

$$= \left[-e^{-0,03.x}\right]_{36}^{60} = \left(-e^{-1,8}\right) - \left(-e^{-1,08}\right) = e^{-1,08} - e^{-1,8}$$

La probabilité conditionnelle devient alors :

$$p(X\in[0;60] \text{ sachant } X\in[36;+\infty[) = \frac{e^{-1,08} - e^{-1,8}}{e^{-1,08}}$$

$$= 1 - \frac{e^{-1,8}}{e^{-1,08}} = 1 - e^{-0,72} \approx 0,513$$

<u>Conclusion :</u> un Roboprof qui a fonctionné déjà trois années a moins d'une chance sur deux de dépasser son cinquième anniversaire.