## Le mot de l'auteur

Comme chaque année, juste avant que n'arrivent l'été et ses hordes de vacanciers, je conclus ma saison en compilant tous les exercices et leurs corrigés que j'ai pu donner.
Comme pour la terminale S l'an passé, j'ai dû faire deux volumes : un premier pour l'analyse et un second pour le reste.
Comme l'an passé, les exercices que vous verrez sont soit issus du bac, soit des créations plus ou moins originales de mon cerveau aussi diabolique que volcanique.
Et comme chaque année, il m'est important de préciser que ce qui est présenté dans ce recueil doit être considéré comme 100% pédagogiquement incorrect et impropre à la consommation. A aucun moment, le Ministère de l'Education Nationale n'a apporté sa caution à ces deux volumes. Il ne peut en aucun cas être tenu pour responsable des propos tenus. Déjà que ces brillantes sommités qui irradient tout ce qui passe à leur portée ont à me supporter, il serait injuste de leur imputer mes méfaits.
Les années précédentes, je me plaisais à dénoncer ce qui n'allait pas dans l'Education Nationale. Mais là, je dois y renoncer pour cause de manque de place sur cette page. En plus, tout le monde s'en fout ! Ce qu'il faut juste retenir, c'est que tout est de la faute des profs, ces affreux conservateurs corporatistes qui refusent toute réforme. Vous n'avez qu'à demander à ceux de la Haute ! C'est ce qu'ils n'arrêtent pas de répéter à tous les caniches de la place de Paris qui s'empressent d'aller le colporter aux consommateurs d'école.
Juste un mot quand même ! Il y a dix ans, Monsieur Mérieu et ses amis pédagogistes avaient mis un terme à la sélection par les maths et diminué notre volume horaire pour mettre en oeuvre leurs bonnes idées. Résultat dix ans plus tard : il y a moins d'élèves à profil scientifique, le niveau s'est effondré et les cours particuliers ont explosé.
Aujourd'hui, notre glorieux président et son très inspiré ministre ont décidé de mettre un terme à la domination de la filière S. Qui plus est, ils veulent plus de travail en autonomie et moins de cours. Monsieur Mérieu doit être content. Normal, ils mettent moins de pognon donc moins de profs et moins d'heures de cours. Par contre, ils escomptent conserver un très large éventail de matières. Donc qui va encore trinquer ? Ben les maths et le français ! Mais bon, c'est sûr que les élèves apprendront mieux en deux heures ce qu'ils n'apprenaient pas en quatre. L'avenir des boites de cours particuliers est assuré !
La réforme qui s'annonce ne sera pas celle du renouveau mais celle de l'achèvement.
En définitive, ce n'est pas une réforme qu'il nous faudrait, mais une révolution !

**Les exercices d'analyse de ce volume sont classés par catégories :**



*La taverne de l'Irlandais*
[http://www.tanopah.com]
présente

# Ces dernières lueurs au loin : l'analyse

Le premier volume des exercices de maths donnés en TS durant la saison 2007-2008 par Jérôme ONILLON, prof. désagrégé et irrécupérable de mathématiques

*Edition du samedi 21 juin 2008*

# Analyse classique

## Hors d'oeuvres : limites et primitives

### Le contexte

Voilà un exercice de début d'année sur les limites et les primitives constituées de trois questions indépendantes.

### L'énoncé

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sqrt{4.x^2+3}-\sqrt{3.x^2+4}$$

Etablir la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+x\times\cos(x)}{x+1}$$

Etablir la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) La fonction f est définie par :

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{4.x+1}}+6.x-1$$

Déterminer l'expression de la primitive F de la fonction f telle que $F(2)=5$.

On précisera les ensembles de définition de la fonction f ainsi que de sa primitive F.

### Le corrigé

a) Quand x tend vers $+\infty$, les termes $\sqrt{4.x^2+3}$ et $\sqrt{3.x^2+4}$ tendent tous deux vers $+\infty$. Donc la fonction f est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\infty-\infty$. Pour lever celle-ci, nous allons factoriser chaque racine par son terme le plus fort : $x^2$.

Pour tout réel $x\in\,]0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\sqrt{4.x^2+3}-\sqrt{3.x^2+4}=\sqrt{x^2}\times\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{x^2}\times\sqrt{3+\frac{4}{x^2}}$$

$$=\sqrt{x^2}\times\left[\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{4}{x^2}}\right] \leftarrow \text{On peut s'arrêter là...}$$

$$=\underbrace{|x|\times\left[\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{4}{x^2}}\right]=x\times\left[\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{4}{x^2}}\right]}_{\text{Comme nous travaillons sur }]0;+\infty[\text{, autrement dit avec des valeurs positives de x, x est sa propre valeur absolue.}}$$

Essayons de déterminer la limite de cette (avant-)dernière forme. Quand x tend vers $+\infty$ :

- $\sqrt{x^2}$ tend vers $+\infty$.
- $\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}$ tend vers $\sqrt{4+0^+}=\sqrt{4}=2$.
- $\sqrt{3+\frac{4}{x^2}}$ tend vers $\sqrt{3+0^+}=\sqrt{3}$.

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)\times\underbrace{\left(2-\sqrt{3}\right)}_{\text{Réel positif}}=+\infty$

b) Lorsque x tend vers $+\infty$, le produit $x\times\cos(x)$ oscille entre $-\infty$ et $+\infty$.

Pour déterminer la limite de f, nous allons nous efforcer de l'encadrer par des fonctions dont nous pourrons connaître les limites. Pour tout réel $x\in\,]0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$-1\le\cos(x)\le1$$

On a multiplié par le réel positif x.

$$-x\le x\times\cos(x)\le x$$

$$x^2-x\le x^2+x\times\cos(x)\le x^2+x$$

On a ajouté $x^2$.

$$\frac{x^2-x}{x+1}\le\frac{x^2+x\times\cos(x)}{x+1}\le\frac{x^2+x}{x+1}$$

On a divisé par le réel positif $x+1$.

Intéressons-nous à la fonction minorante, celle de gauche. Nous pouvons écrire :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}\times\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x\times\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=(+\infty)\times\frac{1-0^+}{1+0^+}=(+\infty)\times1=+\infty$$

Conclusion : comme la fonction f est minorée sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x s'en va vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

c) Examinons chacun des termes de la somme $f(x)$.

- $\dfrac{2}{\sqrt{4.x+1}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{\sqrt{4.x+1}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ où la fonction $\left|\begin{array}{l}u(x)=4.x+1\\u'(x)=4\end{array}\right.$ est

  dérivable sur ℝ et est surtout strictement positive sur $]-1/4;+\infty[$.

  Une primitive de $\dfrac{2}{\sqrt{4.x+1}}$ sur $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ est $\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{u(x)}=\sqrt{4.x+1}$.

- Une primitive de $6.x-1=3\times2.x-1$ sur ℝ est $3\times x^2-x$.

Par conséquent, la primitive F de la fonction f a une expression de la forme :

$$F(x)=\sqrt{4.x+1}+3.x^2-x+\text{Constante}$$

Du fait des limitations évoquées précédemment, cette primitive F est seulement définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ ...comme sa dérivée f.

Déterminons la valeur de la constante. Nous savons :

$$F(2)=5 \Leftrightarrow \sqrt{4\times2+1}+3\times2^2-2+\text{Constante}=5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9}+3\times4-2+\text{Constante}=5 \Leftrightarrow \text{Constante}=5-3-12+2=-8$$

Conclusion : la primitive F est définie sur l'intervalle $]-0,25;+\infty[$ par :

$$F(x)=\sqrt{4.x+1}+3.x^2-x-8$$

Du fait de son expression, cette primitive F peut être prolongée en $-\dfrac{1}{4}$ par continuité.

Mais la racine s'annulant, elle n'y sera pas dérivable.

# La dérive des continues : dérivabilité et continuité d'une fonction

## Le contexte

Cet exercice traite de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction définie par morceaux. C'est aussi un exercice de début d'année. Il est constitué de deux blocs. Le premier est une série de questions de cours. Dans le second bloc, on appliquer ces questions de cours.

## L'énoncé

a) Quelques questions de cours.
Dans cette question, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et a est un réel fixé.
On suppose que la fonction f est dérivable en a.

1. Quelle est la limite lorsque x tend vers a du quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ?
2. Démontrer que la fonction f est continue en a. Cette démonstration a été vue en cours...mais défense de sortir son cahier !
3. Pourquoi la limite lorsque x tend vers 0 du quotient $\dfrac{\cos(x)-1}{x}$ est-elle égale à 0 ?

b) Dans cette question, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{Si} \quad x \in ]-\infty;-1[ \quad \text{alors} \quad f(x)=x-x^2 \\ \text{Si} \quad x \in [-1;0] \quad \text{alors} \quad f(x)=x+1 \\ \text{Si} \quad x \in ]0;+\infty[ \quad \text{alors} \quad f(x)=x+\cos(x) \end{cases}$$

Indiquer quelles sont les images de $-1$ et 0 par la fonction f.
Etudier la continuité, puis la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

## Le corrigé

a) D'après l'énoncé, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en a.

1. Comme la fonction f est dérivable en a, alors la limite lorsque x tend vers a du quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est égale au nombre dérivé de f en a que l'on note $f'(a)$.
2. Démontrons que la fonction f est continue en a, c'est-à-dire que $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f(x)=f(a)$.

   On appelle $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ par : $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

   Du fait de son dénominateur, la fonction $\varphi$ n'est pas définie en a.
   Mais comme f est dérivable en a, alors la limite lorsque x tend vers a de $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est égale à $f'(a)$.
   De plus, pour tout réel $x \neq a$, nous pouvons écrire :

   $$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Leftrightarrow \varphi(x)\times(x-a)=f(x)-f(a)$$
   $$\Leftrightarrow f(x)=f(a)+\varphi(x)\times(x-a)$$

   Lorsque x tend vers a, la différence $x-a$ tend vers 0 et $\varphi(x)$ vers $f'(a)$.
   Donc $f(x)=f(a)+\varphi(x)\times(x-a)$ tend vers $f(a)+f'(a)\times 0=f(a)$.
   Conclusion : la fonction f est continue en a.
3. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Sa dérivée est l'opposé de la fonction sinus.

   Ainsi, la limite lorsque x tend vers 0 du quotient $\dfrac{\cos(x)-1}{x}=\dfrac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}$ est égale au nombre dérivé de cosinus en 0, soit $-\sin(0)=-0=0$.

b) Comme les réels $-1$ et 0 appartiennent à l'intervalle $[-1;0]$, alors leurs images sont données par :

- $f(-1)=(-1)+1=0$
- $f(0)=0+1=1$

➲ Comme les fonctions $x-x^2$ ; $x+1$ et $x+\cos(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f est dérivable et donc continue sur l'ensemble $]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$.
Mais que se passe-t-il en $-1$ et en 0 : la fonction f y est-elle continue et dérivable ?
Pour commencer, regardons ce qu'il en est en $-1$.

- La fonction f est-elle continue en $-1$ ?
  Déterminons les limites de f à gauche et à droite de $-1$.

  ➔ $\underbrace{\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-} x-x^2}_{\text{On travaille sur } ]-\infty;-1[}=(-1)-(-1)^2=-1-1=-2\neq f(-1)$

  Donc la fonction f n'est pas continue à gauche de $-1$.
  Par conséquent, elle ne peut pas l'être tout court en $-1$ ...même si elle l'est à droite. En effet : $\underbrace{\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} x+1}_{\text{On travaille sur } [-1;0]}=0=f(-1)$.

- La fonction f n'étant pas continue en $-1$, elle ne peut pas y être dérivable.
  Par contre, la fonction f est dérivable à droite de $-1$ ...comme $x+1$.

A présent, intéressons-nous à ce qu'il advient de f en 0.

- La fonction f est-elle continue en 0 ?
  Pour le savoir, déterminons les limites de f à gauche et à droite de 0.

  ➔ $\underbrace{\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x+1}_{\text{On travaille sur } [-1;0]} = 0+1 = 1 = f(0)$ $\underbrace{\text{donc f est continue à gauche de 0.}}_{\text{Ce qui était prévisible car la fonction } x+1 \text{ est continue sur } [-1;0]}$

  ➔ $\underbrace{\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x+\cos(x)}_{\text{On travaille sur } ]0;+\infty[} = 0+1 = f(0)$ donc f est continue à droite de 0.

  Conclusion : la fonction f est continue en 0.

- La fonction f est-elle aussi dérivable en 0 ?
  Pour le savoir, nous allons établir les limites à gauche, puis à droite de 0 du quotient $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{f(x)-1}{x}$.

  ➔ $\underbrace{\lim_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-} \dfrac{x+1-1}{x} = \lim_{x\to0^-} \dfrac{x}{x} = \lim_{x\to0^-} 1 = 1}_{\text{On travaille sur l'intervalle } [-1;0].}$

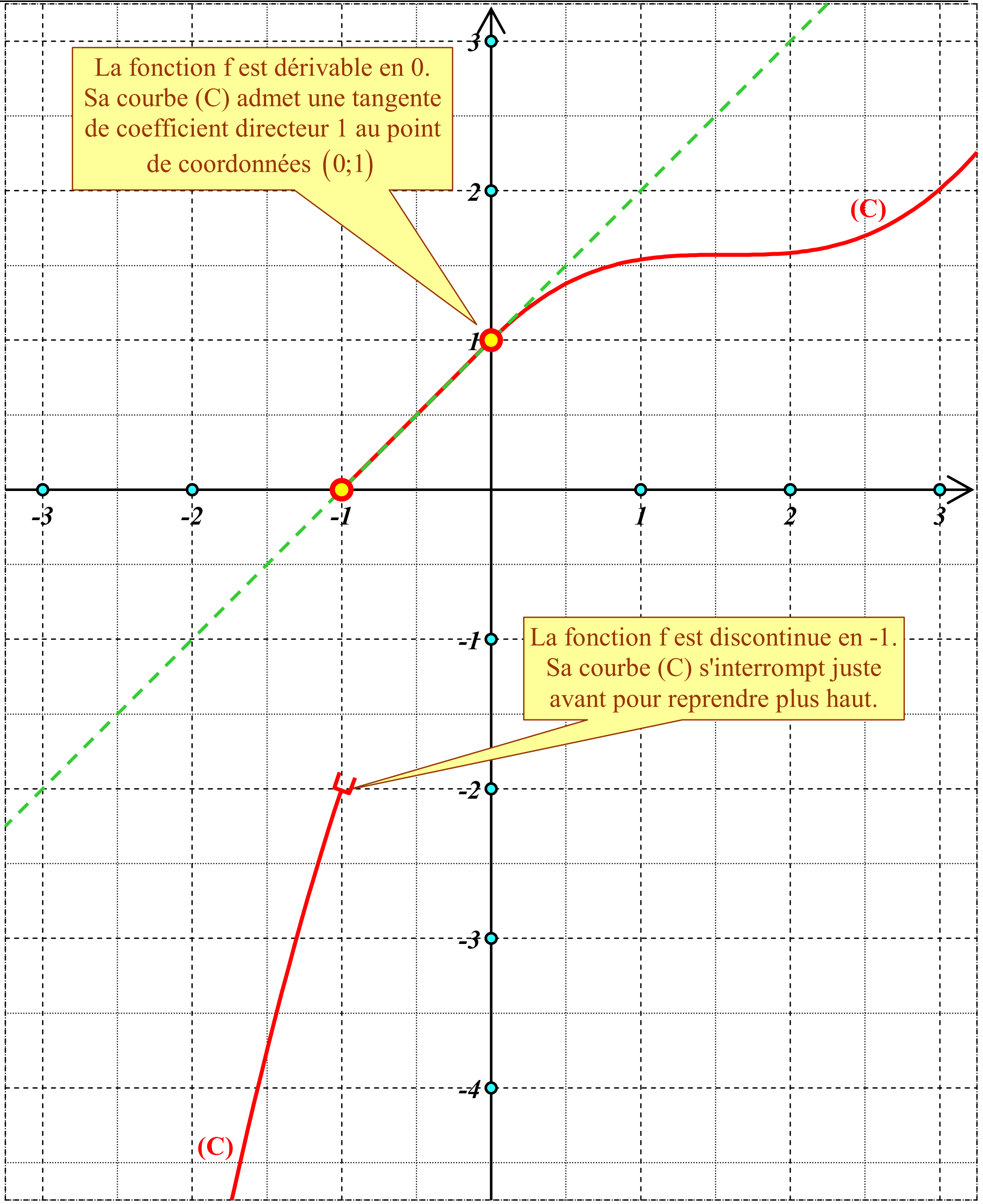
  ➔ $\underbrace{\lim_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \dfrac{x+\cos(x)-1}{x}}_{\text{On travaille sur l'intervalle } ]0;+\infty[.} = \lim_{x\to0^-} \dfrac{x}{x} + \dfrac{\cos(x)-1}{x}$

  $$= \lim_{x\to0^-} 1 + \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 1+0 = 1$$

  Conclusion : comme les limites à gauche et à droite de 0 du quotient $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ sont toutes deux égales à 1, alors f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

Conclusion finale : la fonction f est (seulement) continue et dérivable sur $]-\infty;-1[ \cup ]-1;+\infty[$.

Graphiquement, la courbe (C) représentant la fonction f est tracée ci contre ➔



# *Une fonction peut en cacher une autre : étude d'une fonction rationnelle*

## *Le contexte*

Voilà une étude d'une fonction rationnelle des plus classiques et aussi des plus costauds en début d'année. Au programme : limites, asymptotes, forme décomposée, dérivée et variations.

## *L'énoncé*

La fonction f est définie sur l'ensemble $D_f = ]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2.x^3-x^2+5}{x^2-1}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Pourquoi la fonction f n'est-elle pas définie sur ℝ ?

b) Déterminer quatre coefficients réels a, b, c et d tels que pour tout $x\in D_f$ on ait :

$$f(x)=a.x+b+\frac{c.x+d}{x^2-1}$$

En déduire que la courbe (C) admet aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation réduite.
Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ.

c) Déterminer toutes les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. On précisera quelles sont les conséquences graphiques de ces limites sur la courbe (C).
*<u>Note :</u> on pourra utiliser les résultats de la question précédente.*

d) La fonction auxiliaire g est définie sur ℝ par :

$$g(x)=x^3-3.x-4$$

Le but de cette question est de déterminer le signe de g.

1. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g sur ℝ.
3. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans ℝ une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au centième près à l'aide de la calculatrice.
4. En déduire le signe de g sur ℝ.

e) Après avoir établi que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition, prouver que pour tout réel $x\in D_f$, on a :

$$f'(x)=\frac{2x\times g(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

En déduire les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

f) Tracer la courbe (C) ainsi que toutes les asymptotes rencontrées au cours de l'exercice.

## *Le corrigé*

a) Les numérateur $u(x)=2.x^3-x^2+5$ et dénominateur $v(x)=x^2-1$ sont deux fonctions définies sur ℝ.

La seule chose qui puisse faire que le quotient $f=\frac{u}{v}$ n'existe pas est la potentielle nullité de son dénominateur.

Le quotient $f(x)$ n'existe pas $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $v(x)$ est nul

$$\Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \underbrace{x=-1 \quad \text{ou} \quad x=1}_{\text{Les deux réels qui ont pour carré 1.}}$$

D'où l'ensemble de définition de la fonction f : $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$

b) Deux méthodes permettent d'aboutir à la forme décomposée de la fonction f : celle par identification des coefficients et celle par extraction du dénominateur du numérateur.

🎬 ***La méthode par extraction du dénominateur du numérateur : l'oubliée***

Pour tout réel $x\in D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\frac{\overbrace{2.x^3}^{\text{Combien de fois } x^2-1 \text{ ?}}-x^2+5}{x^2-1}=\frac{\overbrace{2.x\times\left(x^2-1\right)+2.x}^{=2.x^3}-x^2+5}{x^2-1}=2.x\times\frac{\cancel{x^2-1}}{\cancel{x^2-1}}+\frac{-x^2+2.x+5}{x^2-1}$$

$$=2.x+\frac{\overbrace{-x^2}^{\text{Combien de fois } x^2-1 \text{ ?}}+2.x+5}{x^2-1}=2.x+\frac{\overbrace{(-1)\times\left(x^2-1\right)-1}^{=-x^2}+2.x+5}{x^2-1}$$

$$=2.x+(-1)\times\frac{\cancel{x^2-1}}{\cancel{x^2-1}}+\frac{2.x+4}{x^2-1}=2.x-1+\frac{2.x+4}{x^2-1}$$

***La méthode par identification : l'officielle***

Nous cherchons quatre réels a, b, c et d tels que pour tout réel $x \in D_f$, nous ayons :

$$f(x) = a.x + b + \frac{c.x+d}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{2.x^3 - x^2 + 5}{x^2-1} = \frac{(a.x+b)\times(x^2-1)+c.x+d}{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{2.x^3 - x^2 + 5}{x^2-1} = \frac{a.x^3 + b.x^2 - a.x - b + c.x + d}{x^2-1}}_{\text{Multiplions cette égalité par } x^2-1 \text{. Cette opération est possible car nous travaillons sur l'ensemble } \mathbb{R}\backslash\{-1;1\} \text{ où le facteur } x^2-1 \text{ est non nul.}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\times x^3 + (-1)\times x^2 + 0\times x + 5 = a.x^3 + b.x^2 + (c-a).x + (d-b)}_{\text{Nous avons à présent une égalité de deux polynômes. Or deux polynômes sont égaux si et seulement...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} \text{Egalité en } x^3 & : \quad a = 2 \\ \text{Egalité en } x^2 & : \quad b = -1 \\ \text{Egalité en } x & : \quad c - a = 0 \quad \text{d'où} \quad c = a = 2 \\ \text{Egalité en } x^0 & : \quad d - b = 5 \quad \text{d'où} \quad d = 5 + b = 4 \end{cases}}_{\text{...si leurs coefficients respectifs le sont}}$$

Conclusion : pour tout réel $x \in D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, nous avons : $f(x) = 2.x - 1 + \dfrac{2.x+4}{x^2-1}$

➲ La partie affine de la forme décomposée de $f(x)$ préfigure l'asymptote oblique que nous recherchons. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$, nous pouvons écrire :

$$f(x) - (2.x-1) = \frac{2.x+4}{x^2-1} = \frac{x}{x^2} \times \frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} \times \frac{2+\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

Cette dernière écriture va nous donner les limites aux infinis de la différence d'ordonnées.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (2.x-1) = 0^+ \times \frac{2+0^+}{1-0^+} = 0 \times 2 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (2.x-1) = 0^- \times \frac{2+0^-}{1-0^+} = 0$$

Conclusion : la droite Δ d'équation $y = 2.x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis.

➲ Pour établir la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ, étudions le signe de leur différence d'ordonnées

$$f(x) - (2.x-1) = \frac{2.x+4}{x^2-1}.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2.x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $x^2-1$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(C)-\Delta$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | \|\| | $+$ | |

Conclusion : sur les intervalles $]-\infty;-2[$ et $]-1;1[$, la courbe (C) est au-dessous de son asymptote Δ. Elle est au-dessus sur les intervalles $]-2;-1[$ et $]1;+\infty[$. Enfin, la courbe et la droite ont un seul point d'intersection : il a pour abscisse $-2$

c) L'ensemble de définition de f comporte six bornes. Il y a autant de limites à chercher.

➔ Comme la droite Δ d'équation $y = 2.x - 1$ est l'asymptote à la courbe (C) aux voisinages des infinis, alors elle donne ses limites à f. Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2.x - 1 = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2.x - 1 = +\infty$$

➔ Pour établir les limites de f à gauche et à droite de $-1$, nous allons utiliser son écriture initiale et nous nous appuierons aussi sur le tableau de signes de $x^2 - 1$ vu juste avant.

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{2.x^3 - x^2 + 5}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Par conséquent, la droite verticale d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe (C).

➔ Procédons de même pour connaître les limites de f à gauche et à droite de 1.

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{2.x^3 - x^2 + 5}{x^2-1} = \frac{6}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

Là encore, la droite verticale d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe (C).

d) Etudions le polynôme du troisième degré $g(x)=x^3-3.x-4$ qui est défini sur ℝ.

***1.*** Les limites aux infinis du polynôme $g(x)$ sont celles de son terme dominant $x^3$.
En effet :

➔ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\times\left(1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}\right)=(-\infty)\times\left(1-0^--0^-\right)=(-\infty)\times 1=-\infty$

➔ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\times\left(1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}\right)=(+\infty)\times\left(1-0^+-0^+\right)=(+\infty)\times 1=+\infty$ .

***2.*** Le polynôme $g(x)$ est clairement dérivable sur ℝ.

Pour tout réel x, nous avons :

$$g'(x)=3.x^2-3\times 1+0$$
$$=3\times\left(x^2-1\right)$$

Par conséquent, le tableau de variation de la fonction g est celui ci-contre ➔

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-6$ | ↗ | $+\infty$ |

***3.*** Comme la fonction g est dérivable sur ℝ, alors elle y est continue.
Pour connaître le nombre de solutions dans ℝ de l'équation $g(x)=0$ , scindons l'ensemble de résolution en deux intervalles complémentaires : $]-\infty;1[$ et $[1;+\infty[$ .

➔ Comme le maximum de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty;1[$ est $-2$ , alors l'équation $g(x)=0$ n'admet aucune solution dans cet intervalle.

➔ Comme la fonction g est strictement croissante et continue sur $[1;+\infty[$ , et que 0 appartient à l'ensemble $g([1;+\infty[)=[-6;+\infty[$ , alors en application du théorème de bijection, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[1;+\infty[$ .

Conclusion : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans ℝ. A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient que $\alpha\approx 2,20$ au centième près.

***4.*** Des questions c.2 et c.3, on déduit le signe de $g(x)$ .

➔ $g(x)$ est négatif avant $\alpha$, c'est-à-dire sur l'intervalle $]-\infty;\alpha[$ .

➔ $g(x)$ est nul en $\alpha$.

➔ $g(x)$ est positif après $\alpha$, c'est-à-dire sur l'intervalle $]\alpha;+\infty[$ .

Désormais, nous sommes en position de connaître les variations de la fonction f.

e) Comme les fonctions $\left|\begin{array}{l} u(x)=2.x^3-x^2+5 \\ u'(x)=6.x^2-2.x \end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l} v(x)=x^2-1 \\ v'(x)=2.x \end{array}\right.$ sont dérivables sur ℝ, et que le dénominateur v ne s'annule pas sur l'ensemble $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ , alors leur quotient $f=\frac{u}{v}$ est dérivable sur $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ .

Pour tout réel x de cet ensemble, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}=\frac{\left(6.x^2-2.x\right)\times\left(x^2-1\right)-2.x\times\left(2.x^3-x^2+5\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{6.x^4-6.x^2-2.x^3+2.x-4.x^4+2.x^3-10.x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2.x^4-6.x^2+8.x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

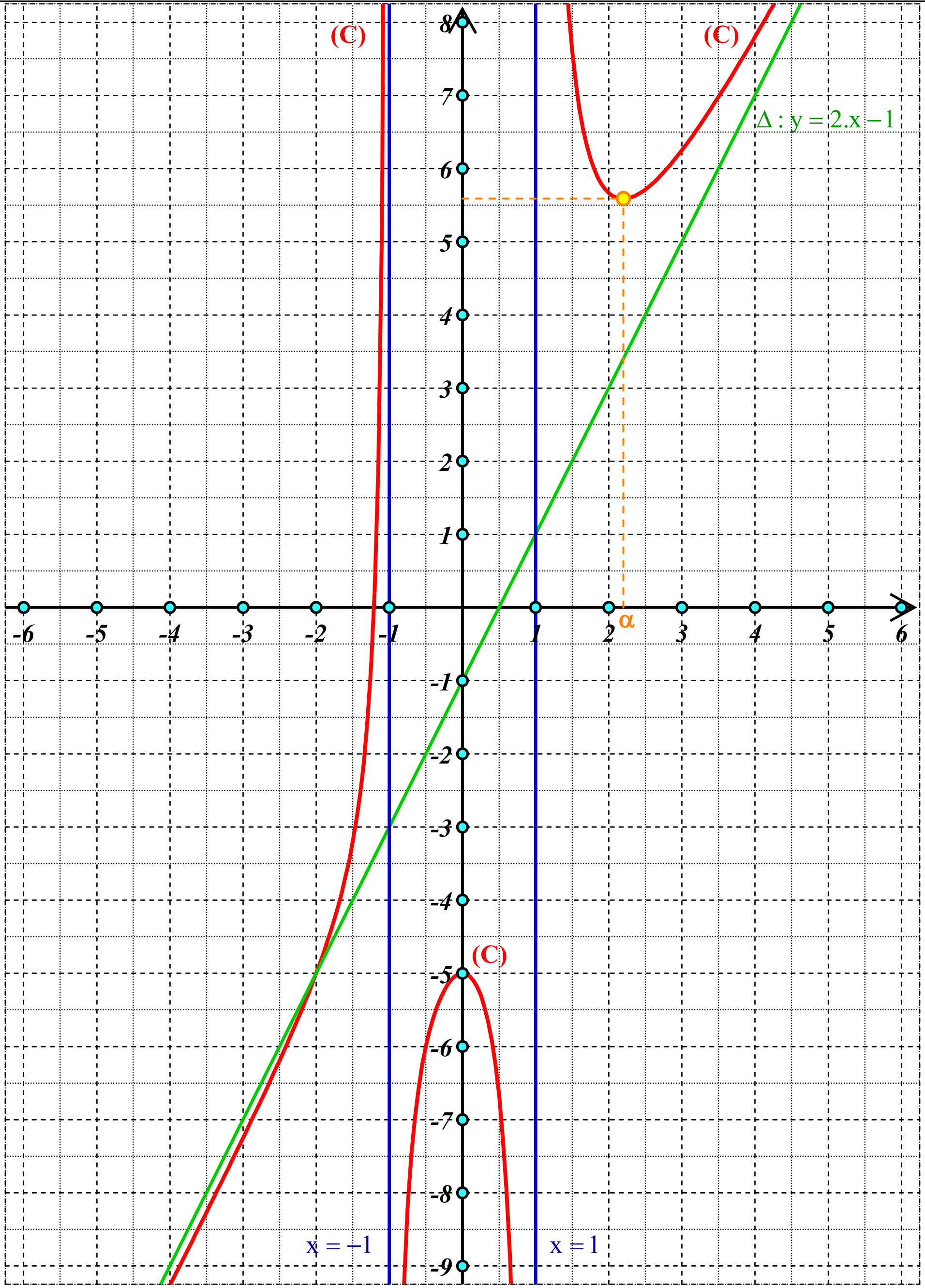
$$=\frac{2.x\times\left(x^3-3.x+4\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2.x\times g(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Nous connaissons les signes des trois facteurs intervenant dans ce quotient. Par conséquent, le tableau de variation de f est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2.x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\left(x^2-1\right)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-5$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

S'il est possible de calculer exactement l'image de 0 par la fonction f, la chose est impossible pour l'image de $\alpha$. Nous devrons juste nous contenter d'une valeur approchée.

f) La courbe (C) accompagnée de ses asymptotes oblique $\Delta$ d'équation $y = 2.x - 1$ et verticales d'équations $x = -1$ et $x = 1$ est tracée ci-contre ➔



# Qui Comprendra Mieux ?

## Le contexte

Un petit QCM faisant appel à diverses notions : dérivation d'une puissance, définition d'une fonction logarithmique, propriétés du logarithme et de l'exponentielle.

## L'énoncé

Dans le présent exercice, chaque bonne réponse rapporte 1,25 point et chaque mauvaise en enlève 0,25. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points obtenus à cet exercice est négatif, il est ramené à 0.
Pour chaque question, on entourera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (4.x-1)^3$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{16}\times(4.x-1)^4$ | $\frac{1}{4}\times(4.x-1)^4$ | $(4.x-1)^4$ | $4\times(4.x-1)^4$ |

b) La fonction f est définie par :

$$f(x) = \ln\left(1-e^x\right)$$

Parmi les intervalles suivants, lequel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $]-\infty;0[$ | $]0;+\infty[$ | $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ | $]-\infty;+\infty[$ |

c) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{e^{2.x+2}}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2\times\sqrt{e^{2.x+2}}}$ | $\frac{e^x}{2\times\sqrt{e^{2.x+2}}}$ | $e\times e^x$ | $e^2\times e^{2.x}$ |

d) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1+e^x\right)$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1+e^x$ | $\frac{1}{1+e^{-x}}$ | $\frac{1}{1+e^x}$ |

## Le corrigé

a) Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = (4.x-1)^3 = \frac{1}{4}\times 4\times(4.x-1)^3 = \frac{1}{4}\times u'(x)\times\left(u(x)\right)^3$$

où $\left|\begin{array}{l} u(x) = 4.x-1 \text{ est une fonction dérivable sur } \mathbb{R}. \\ u'(x) = 4 \end{array}\right.$

Par conséquent, toutes les primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(u(x)\right)^4 + \text{Constante} = \frac{1}{16}\times(4.x-1)^4 + \text{Constante}$$

b) La fonction logarithme népérien n'est définie que sur $]0;+\infty[$. Par conséquent :

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \text{Le logarithme } 1-e^x \text{ existe}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{1-e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow x < 0}$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $e^0=1$,
alors $e^x$ est strictement inférieur à 1 sur et seulement sur $]-\infty;0[$.

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction f est $]-\infty;0[$.

c) Appliquons les propriétés de l'exponentielle à la fonction f. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = \sqrt{\exp(2.x+2)} = \exp\left[\frac{1}{2}\times(2.x+2)\right] = \exp(x+1) = e^{x+1} = e^x\times e^1 = e^x\times e$$

Le nombre d'Euler e est une constante. L'exponentielle est sa propre dérivée.
Par conséquent, la dérivée de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$f'(x) = e\times\left(e^x\right)' = e\times e^x = f(x)$$

d) Une exponentielle est une quantité toujours positive. Par conséquent, pour tout réel x :

$$e^x > 0 \quad \text{d'où} \quad e^x+1 > 1 > 0 \quad \text{donc} \quad e^x+1 \text{ est une quantité positive}$$

Ainsi, comme la fonction $\left| \begin{array}{l} u(x) = e^x + 1 \\ u'(x) = e^x \end{array} \right.$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors

son logarithme népérien $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x} \times \left(\frac{1}{e^x} + 1\right)} = \frac{1}{e^{-x} + 1}$$

# Equations différentielles

## *Les équadiffs prennent la tangente ! France septembre 2007*

### *Le contexte*

Cet exercice est le quatrième du sujet donné en France en Septembre 2007. Il aborde la résolution d'une équation différentielle assez difficile à base de tangente et de cosinus.

### *L'énoncé*

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ :

$$(E) \quad y'+(1+\tan(x))\times y=\cos(x)$$
$$(E_0) \quad y'+y=1$$

1) Donner l'ensemble des solutions de l'équation $(E_0)$.

2) Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ telles que $f(x)=g(x)\times\cos(x)$.

Démontrer que la fonction f est solution de $(E)$ si et seulement si la fonction g est solution de $(E_0)$.

3) Déterminer la solution de f de $(E)$ telle que $f(0)=0$.

### *Le corrigé*

1) D'après un résultat du cours, les solutions de l'équation différentielle linéaire :

$$(E_0): y'+y=1 \quad \Leftrightarrow \quad y'=\underbrace{-y+1}_{a\times y+b}$$

sont les fonctions φ dérivables sur ℝ de la forme :

$$\varphi(x)=Constante\times e^{-x}-\frac{1}{-1}=Constante\times e^{-x}+1$$

2) Avant toute chose, exprimons la dérivée de f en fonction de g et de sa dérivée.

Pour tout réel $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(x)&=(g(x)\times\cos(x))' \\ &=g'(x)\times\cos(x)+g(x)\times(-\sin(x)) \\ &=g'(x)\times\cos(x)-g(x)\times\sin(x) \end{aligned}$$

**Note sur le raisonnement à venir**
Pour établir le résultat demandé, nous allons procéder par équivalences. Lorsque l'on progresse ainsi, il faut à chaque étape s'assurer que l'on peut revenir sur ses pas. Car contrairement à une implication, une équivalence se doit de fonctionner dans un sens et dans l'autre.

Nous pouvons écrire que :

f est solution de l'équation différentielle $(E)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f'(x)+(1+\tan(x))\times f(x)=\cos(x)}_{\text{Pour tout réel } x\in]-\pi/2;\pi/2[}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{g'(x)\times\cos(x)-g(x)\times\sin(x)+(1+\tan(x))\times g(x)\times\cos(x)=\cos(x)}_{\text{Pour tout réel } x\in]-\pi/2;\pi/2[}$$

↓ On divise ou on mutiplie ↑
par $\cos(x)$ qui est non nul sur l'intervalle $]-\pi/2;\pi/2[$

$$\Leftrightarrow \underbrace{g'(x)\times\frac{\cancel{\cos(x)}}{\cancel{\cos(x)}}-g(x)\times\frac{\sin(x)}{\cos(x)}+(1+\tan(x))\times g(x)\times\frac{\cancel{\cos(x)}}{\cancel{\cos(x)}}=\frac{\cancel{\cos(x)}}{\cancel{\cos(x)}}}_{\text{Pour tout réel } x\in]-\pi/2;\pi/2[}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{g'(x)\cancel{-g(x)\times\tan(x)}+g(x)+\cancel{\tan(x)\times g(x)}=1}_{\text{Pour tout réel } x\in]-\pi/2;\pi/2[}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{g'(x)+g(x)=1}_{\text{Pour tout réel } x\in]-\pi/2;\pi/2[} \quad \Leftrightarrow \quad \text{g est solution de l'équation } (E_0)$$

3) Nous venons d'établir l'équivalence :

$$f(x)=g(x)\times\cos(x) \text{ est solution de } (E) \quad\Leftrightarrow\quad g(x)=\frac{f(x)}{\cos(x)} \text{ est solution de } (E_0)$$

Or d'après la question 1, les solution de l'équation $(E_0)$ sont les fonctions g de la forme :

$$g(x)=\mathit{Constante}\times e^{-x}+1$$

Par conséquent, les solutions de $(E)$ sont les fonctions f de la forme :

$$f(x)=\left[\mathit{Constante}\times e^{-x}+1\right]\times\cos(x)$$

Or ces fonctions f doivent aussi vérifier la condition initiale $f(0)=0$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} f(0)=0 \quad&\Leftrightarrow\quad \left[\mathit{Constante}\times e^{-0}+1\right]\times\cos(0)=0 \quad&&\Leftrightarrow\quad \left[\mathit{Constante}\times 1+1\right]\times 1=0 \\ &\Leftrightarrow\quad \mathit{Constante}+1=0 &&\Leftrightarrow\quad \mathit{Constante}=-1 \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> la solution recherchée est la fonction f définie sur $]-\pi/2;\pi/2[$ par :

$$f(x)=\left(1-e^{-x}\right)\times\cos(x)$$

# Exponentielle

## *Equations différentielles et fonction exponentielle*

### *Le contexte*

Cet exercice est une reprise d'un problème assez classique dans sa forme donné dans les Antilles et en Guyane en Juin 2001. Il commence par une résolution d'équation différentielle avant d'enchaîner sur l'étude d'une solution particulière

### *L'énoncé*

**Partie A - Résolution de l'équation différentielle (1) : y'−2.y = x×ex**

1. Résoudre l'équation différentielle ***(2)*** : $y' - 2.y = 0$ .

2. Soient a et b deux réels et soit u une fonction définie sur ℝ par :

$$u(x) = (a.x + b) \times e^x$$

   a. Déterminer a et b pour que la fonction u soit solution de l'équation ***(1)***.
   b. Montrer que v est solution de l'équation différentielle ***(2)*** si, et seulement si, $u + v$ est solution de l'équation ***(1)***.
   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation ***(1)***.

3. Déterminer la solution de l'équation ***(1)*** qui s'annule en 0.

**Partie B - Etude de la fonction auxiliaire g**

La fonction g est définie sur ℝ par :

$$g(x) = 2 \times e^x - x - 2$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$ , puis celle en $+\infty$ .

2. Etudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variation.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles.
Vérifier que 0 est l'une de ces deux solutions.
Donner une valeur approchée au dixième de l'autre solution que l'on notera $\alpha$.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

**Partie C - Etude de la fonction principale f**

La fonction f est définie sur ℝ par :

$$f(x) = e^{2.x} - (x + 1).e^x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ , puis celle en $+\infty$ .

2. Calculer $f'(x)$ et, montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Etudier le sens de variation de f.

3. Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2.\alpha}{4}$ . En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ .

4. Tracer la courbe (C) représentant la fonction f.

**Partie D - Détermination d'une primitive particulière de f**

1. Soit h la fonction définie sur ℝ par :
$h(x) = x \times e^x$
Déterminer une expression de sa dérivée $h'(x)$ .

2. On note F la primitive de f définie sur ℝ telle que $F(0) = 3$ .
Déterminer une expression de $F(x)$ .

## Le corrigé

### Partie A - Résolution de l'équation différentielle (1) : y'−2.y = x×ex

A.1) Les solutions de l'équation différentielle homogène ***(2)*** : $y'-2.y=0 \Leftrightarrow y'=2.y$ sont les fonctions v définies et dérivables sur ℝ de la forme :

$$v(x)=\textit{Constante}\times e^{2.x}$$

A.2.a) Procédons par conditions nécessaires et en fait par identification...

Si la fonction $u(x)=(a.x+b)\times e^{x}$ est solution de l'équation ***(1)***, alors elle vérifie pour tout réel x l'égalité :

$$u'(x)-2\times u(x)=x\times e^{x} \Leftrightarrow \underbrace{a\times e^{x}+(a.x+b)\times e^{x}}_{u'(x)}-2\times\underbrace{(a.x+b)\times e^{x}}_{u(x)}=x\times e^{x}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{e^{x}}\times\left[a+(a.x+b)-2\times(a.x+b)\right]=x\times\cancel{e^{x}}}_{\text{Après factorisation, on divise les deux membres de l'égalité par le facteur toujours positif } e^{x}.}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-a\times x+(a-b)=1\times x+0}_{\text{Deux polynômes égaux ont...}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{cases}\text{Egalité des coefficients en x :} & -a=1 \quad \text{d'où} \quad a=-1\\ \text{Egalité des coefficients constants} & a-b=0 \quad \text{d'où} \quad a=b \quad \text{soit} \quad b=-1\end{cases}}_{\text{...leurs coefficients de même degré égaux.}}$$

Ainsi, si la fonction $u(x)=(a.x+b)\times e^{x}$ est solution de l'équation ***(1)***, alors $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$.

Mais cela dit, rien ne garantit que la réciproque soit vraie, c'est-à-dire que la fonction $u(x)=(-x-1)\times e^{x}$ qui est dérivable sur ℝ soit effectivement de ***(1)***. Nous devons le vérifier !

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$u'(x)-2\times u(x)=\underbrace{(-1)\times e^{x}+(-x-1)\times e^{x}}_{u'(x)}-2\times\underbrace{(-x-1)\times e^{x}}_{u(x)}$$

$$=\cancel{-e^{x}}-x\times e^{x}\cancel{-e^{x}}+2\times x\times e^{x}+\cancel{2\times e^{x}}=x\times e^{x}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction $u(x)=(-x-1)\times e^{x}$ définie et dérivable sur ℝ est bien une solution de l'équation différentielle ***(1)***.

A.2.b) Pour établir l'équivalence demandée, nous allons partir du second membre. A chaque étape, nous devrons nous assurer que l'équivalence des propositions est conservée.

$$\underbrace{\text{La fonction } \varphi=u+v \text{ est solution de } \textit{(1)}}_{\text{La fonction v est la différence entre } \varphi \text{ et u.}} \Leftrightarrow \underbrace{\varphi'(x)-2\times\varphi(x)=x\times e^{x}}_{\text{Pour tout réel x...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{u'(x)+v'(x)-2\times(u(x)+v(x))=x\times e^{x}}_{\text{Pour tout réel x...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\overbrace{u'(x)-2\times u(x)}^{\text{u est solution de } \textit{(1)}}+v'(x)-2\times v(x)=x\times e^{x}}_{\text{Pour tout réel x...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{x\times e^{x}}+v'(x)-2\times v(x)=\cancel{x\times e^{x}}}_{\text{Pour tout réel x...}}$$

$\boxed{\text{On retire } x\times e^{x} \text{ ou on le rajoute}}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{v'(x)-2\times v(x)=0}_{\text{Pour tout réel x...}}$$

$$\Leftrightarrow \text{La fonction } v=\varphi-u \text{ est solution de } \textit{(2)}$$

D'où l'équivalence demandée.

A.2.c) D'après la question précédente, chaque solution φ de l'équation ***(1)*** est la somme de la fonction $u(x)=(-x-1)\times e^{x}$ et d'une solution v de l'équation ***(2)***. Et réciproquement !

Par conséquent, les solutions de l'équation ***(1)*** sont les fonctions φ de la forme :

$$\varphi(x)=u(x)+v(x)=e^{x}\times(-x-1)+\textit{Constante}\times e^{2.x}$$

A.3) Cette solution $\varphi(x)=\textit{Constante}\times e^{2.x}-e^{x}\times(x+1)$ de l'équation ***(1)*** qui s'annule en 0 vérifie l'égalité :

$$\varphi(0)=0 \Leftrightarrow \textit{Constante}\times e^{2\times 0}-e^{0}\times(0+1)=0 \Leftrightarrow \textit{Constante}\times 1-1\times 1=0$$
$$\Leftrightarrow \textit{Constante}=1$$

<u>Conclusion :</u> la solution particulière recherchée est la fonction $\varphi(x)=e^{2.x}-e^{x}\times(x+1)$.

On reconnaît là la fonction f qui sera étudiée à l'occasion de la partie C.

### Partie B - Etude de la fonction auxiliaire g

B.1) La limite de g en $-\infty$ ne pose aucun problème, les termes n'entrant pas en opposition.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2\times e^{x}-x-2=2\times 0-(-\infty)+2=+\infty$$

Même si cela n'est pas demandé, on observe que c'est la quantité $-x-2$ qui donne sa limite en $-\infty$ à la fonction g. Cela révèle une asymptote au voisinage de $-\infty$ à la courbe représentant g qui a pour équation réduite $y=-x-2$.

➲ De l'autre côté, quand x tend vers $+\infty$, les termes $e^x$ et x entrent en opposition. Ils tendent tous deux vers $+\infty$. Pour lever cette indétermination, nous allons factoriser $g(x)$ par le plus fort d'entre eux. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$g(x) = 2\times e^x - x - 2 = e^x \times \left(2 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right)$$

Or quand x tend vers $+\infty$, les quotients $\frac{e^x}{x}$ et $\frac{e^x}{2}$ s'envolent tous deux vers $+\infty$.

Par conséquent leurs inverses $\frac{x}{e^x}$ et $\frac{2}{e^x}$ tendent tous deux vers $\frac{1}{+\infty} = 0^+$.

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x \times \left(2 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right) = (+\infty)\times\left(2 - 0^+ - 0^+\right) = (+\infty)\times 2 = +\infty$$

B.2) Comme tous ses termes, l'exponentielle $e^x$ et l'affine $-x-2$ sont dérivables sur ℝ, alors il en va de même pour la somme $g(x)$.

Pour tout réel x, il vient :

$$g'(x) = 2\times e^x - 1 - 0 = 2\times e^x - 1$$

Reste à connaître le signe de cette dérivée $g'(x)$ !

D'abord comme les fonctions exponentielles $u(x) = e^x$ et $v(t) = 2\times t - 1$ sont strictement croissantes sur ℝ, alors leur composée $v\circ u(x) = v(u(x)) = 2\times u(x) - 1 = g'(x)$ est aussi strictement croissante sur ℝ.

Mais où la dérivée $g'(x)$ s'annule-t-elle ? Si tant est qu'elle s'annule...

$$g'(x) = 0 \iff 2\times e^x - 1 = 0 \iff 2\times e^x = 1 \iff e^x = \frac{1}{2} \iff x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

Compte tenu de sa stricte croissance, la dérivée $g'(x)$ est donc négative avant $\beta = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ et positive après.

Et par suite, le tableau de variation de g est celui ci-contre ➔

| x | $-\infty$ | | $\beta = -\ln(2)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| g | $+\infty$ | ↘ | $\ln(2)-1$ | ↗ | $+\infty$ |

Calculons l'image de $\beta = -\ln(2)$ par g :

$$g(-\ln(2)) = g\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 2\times\exp\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 2\times\frac{1}{2} + \ln(2) - 2 = \ln(2) - 1$$

Comme la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors :

$$2 < e \Rightarrow \underbrace{\ln(2) < \ln(e) = 1}_{\text{ln conserve l'ordre...}} \Rightarrow \ln(2) - 1 < 0 \quad \text{donc} \quad g(-\ln(2)) \text{ est négatif}$$

Cela va nous être utile dans la question qui vient...

A.3) Comme la fonction g est dérivable sur ℝ, alors elle y est continue.

Comme la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty;-\ln(2)[$, alors en application du théorème de bijection, g est une bijection de cet intervalle sur $]\ln(2)-1;+\infty[$.

Donc le réel 0 qui appartient à $]\ln(2)-1;+\infty[$ a un unique antécédent par g dans l'intervalle $]-\infty;-\ln(2)[$.

Comme g est strictement croissante sur $[-\ln(2);+\infty[$, alors g est une bijection de l'intervalle sur $]\ln(2)-1;+\infty[$.

Le réel $0 \in ]\ln(2)-1;+\infty[$ a donc un unique antécédent par g dans $[-\ln(2);+\infty[$.

<u>Conclusion :</u> l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions dans ℝ.

➲ Calculons l'image de 0 par g.

$$g(0) = 2\times e^0 - 0 - 2 = 2\times 1 - 2 = 2 - 2 = 0$$

Donc 0 est l'une des deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

D'après la calculatrice, l'autre solution α qui appartient à l'intervalle $]-\infty;-\ln(2)[$ est comprise entre $-1,5$ et $-1,6$.

B.4) Compte tenu du tableau de variation de la fonction g (question B.2) et du résultat de la résolution de l'équation $g(x) = 0$ (question B.3), nous en déduisons que le tableau de signe de $g(x)$ est :

| x | $-\infty$ | | α | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | + | 0 | $-$ | 0 | + | |

## Partie C - Etude de la fonction principale f

C.1) Pour éviter toute opposition en $-\infty$, le mieux est encore de totalement développer f.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=e^{2.x}-(x+1).e^{x}=e^{2.x}-x\times e^{x}-e^{x}$$

Quand x tend vers $-\infty$, son double $2.x$ plonge aussi vers $-\infty$. Donc son exponentielle $e^{2.x}$ tend vers 0.

Quant au produit $x\times e^{x}$, il tend vers 0 d'après un résultat du cours.
Ainsi :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{2.x}-x\times e^{x}-e^{x}=0-0+0=0$$

Par conséquent, l'axe des abscisses (équation réduite $y=0$) est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

➲ De l'autre côté en $+\infty$, f est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$ car ses deux facteurs $e^{2.x}$ et $(x+1)\times e^{x}$ tendent tous deux vers $+\infty$. Pour éliminer celle-ci, appliquons notre vieux truc : factoriser la différence par son terme qui nous paraît le plus fort.

$$f(x)=e^{2.x}-(x+1).e^{x}=e^{2.x}\times\left[1-(x+1)\times\frac{e^{x}}{e^{2.x}}\right]=e^{2.x}\times\left[1-(x+1)\times\frac{\cancel{e^{x}}}{\left(e^{x}\right)^{\cancel{2}}}\right]$$

$$=e^{2.x}\times\left[1-(x+1)\times\frac{1}{e^{x}}\right]=e^{2.x}\times\left[1-\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}\right]$$

Comme déjà vu lors de question B.1, comme que les quantités $\frac{e^{x}}{x}$ et $e^{x}$ tendent vers $+\infty$, alors leurs inverses $\frac{x}{e^{x}}$ et $\frac{1}{e^{x}}$ tendent vers 0. Finalement, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{2.x}\times\left[1-\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}\right]=(+\infty)\times\left(1-0^{+}-0^{+}\right)=+\infty$$

C.2) Pour dériver la fonction f, on peut se rappeler qu'elle est la solution qui s'annule en 0 de l'équation différentielle ***(1)***. C'est le résultat de la question A.3.
Comme f est une solution de ***(1)***, alors pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)-2\times f(x)=x\times e^{x}\quad\text{soit}\quad f'(x)=x\times e^{x}+2\times f(x)$$
$$=x\times e^{x}+2\times e^{2.x}-2\times x\times e^{x}-2\times e^{x}$$
$$=2\times e^{x}\times e^{x}-x\times e^{x}-2\times e^{x}$$
$$=e^{x}\times\left(2\times e^{x}-x-2\right)=e^{x}\times g(x)$$

Une autre méthode consiste à dériver simplement la fonction f qui est une différence entre $e^{2.x}$ et le produit $(x+1)\times e^{x}$.
Comme les fonctions exponentielle et affines sont dérivables sur ℝ, alors il en va de même pour f qui est un cocktail de tout ce petit monde. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=\left(e^{2.x}\right)'-\left((x+1)\times e^{x}\right)'=2\times e^{2.x}-\left(1\times e^{x}+(x+1)\times e^{x}\right)$$
$$=2\times e^{2.x}-x\times e^{x}-2\times e^{x}=e^{x}\times g(x)$$

Comme l'exponentielle $e^{x}$ est toujours positive et que dans un produit, ce ne sont jamais les facteurs positifs qui font son signe, alors la dérivée $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

La question B.4 nous a donné le signe du facteur $g(x)$. Par conséquent, le tableau de variation de la fonction f est celui ci-contre →

Calculons l'image de 0 par f :

$$f(0)=e^{2\times0}-(0+1).e^{0}$$
$$=1-1\times1=0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $e^{x}$ | | + | | + | | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| f | 0 | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

C.3) Comme α est l'une des solutions de l'équation $g(x)=0$, alors il vérifie les égalités :

$$2\times e^{\alpha}-\alpha-2=0\quad\text{soit}\quad e^{\alpha}=\frac{\alpha+2}{2}\quad\text{d'où}\quad e^{2.\alpha}=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^{2}=\frac{\alpha^{2}+4.\alpha+4}{4}$$

Par conséquent, il vient pour son image par f :

$$f(\alpha)=e^{2.\alpha}-(\alpha+1)\times e^{\alpha}=\frac{\alpha^2+4.\alpha+4}{4}-(\alpha+1)\times\frac{\alpha+2}{2}$$

$$=\frac{\alpha^2+4.\alpha+4}{4}-\frac{\alpha^2+3.\alpha+2}{2}=\frac{\left(\alpha^2+4.\alpha+4\right)-2\times\left(\alpha^2+3.\alpha+2\right)}{4}=\frac{-\alpha^2-2.\alpha}{4}$$

D'où l'égalité demandée !

➲ Pour obtenir un encadrement de $f(\alpha)$, nous allons d'abord déterminer deux encadrements de $\alpha^2$ et $2\times\alpha$, puis nous les additionnerons avant de tout diviser par 4.

$$\begin{array}{lclcl} -1,6\le\alpha\le-1,5 & \xrightarrow{\text{Carré}} & \overbrace{2,56\ge\alpha^2\ge2,25}^{\text{La fonction carré est décroissante sur } ]-\infty;0]} & \text{soit} & 2,25\le\alpha^2\le2,56 \\ -1,6\le\alpha\le-1,5 & \xrightarrow{\times2} & -3,2\le2\times\alpha\le-3 & \text{soit} & -3,2\le2\times\alpha\le-3 \quad \oplus \\ \hline & & & & -0,95\le\alpha^2+2\times\alpha\le-0,44 \\ & & \boxed{\text{On divise par } -4\rightarrow} & & 0,2375\ge f(\alpha)\ge0,11 \end{array}$$

**Pourquoi ne peut-on pas soustraire membre à membre deux inégalités ?**
S'il est légitime d'additionner membres à membres deux inégalités (la somme des plus petits est inférieure à la somme des plus grands), on ne peut pas soustraire membres à membres deux inégalités. Cela peut donner des horreurs du type :

$$\begin{array}{c} 5\le8 \\ 7\le11 \quad \ominus \\ \hline -2\le-3 \end{array}$$

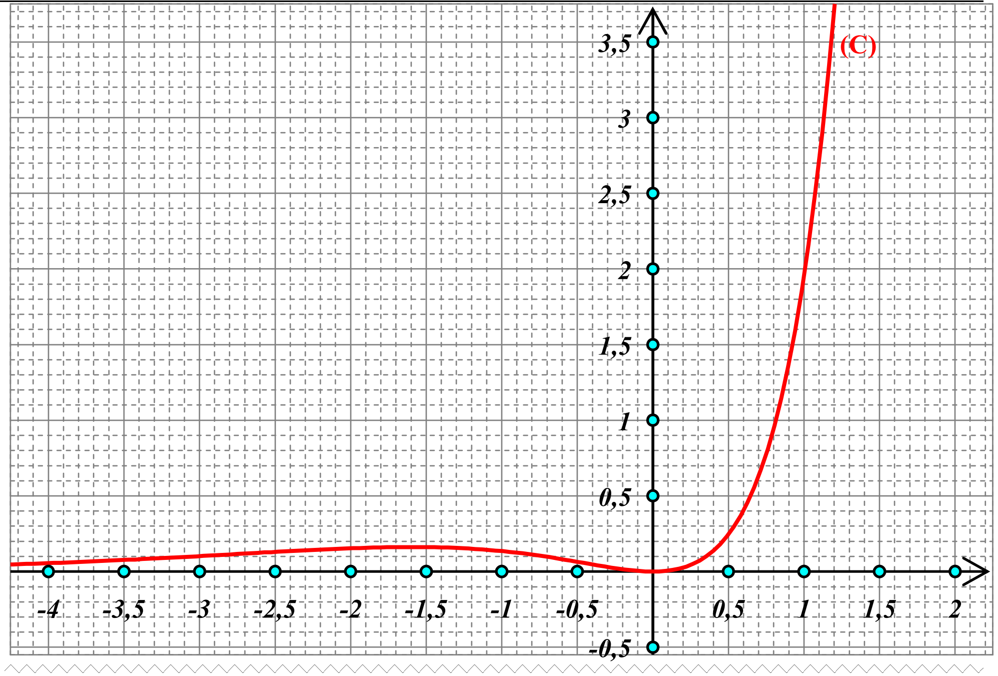
C.4) La courbe (C) représentant la fonction f est tracée ci-contre ➔

## Partie D - Détermination d'une primitive particulière de f

D.1) Comme les facteurs x et $e^x$ sont dérivables sur ℝ, alors leur produit h l'est aussi.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$h'(x)=\left(x\times e^x\right)'=1\times e^x+x\times e^x=e^x\times(x+1)$$

Donc une primitive de $e^x\times(x+1)$ sur ℝ est la fonction $h(x)=x\times e^x$.




D.2) Déterminons la primitive de F qui vaut 3 en 0.
Une primitive d'une différence est la différence de deux primitives des deux termes.
Nous connaissons déjà une primitive du deuxième terme $x\times e^x$. Voyons pour le premier !

Une primitive de la fonction $\underbrace{e^{2.x}=\frac{1}{2}\times2\times e^{2.x}=\frac{1}{2}\times u'(x)\times e^{u(x)}}_{\text{où } u(x)=2.x \text{ est une fonction dérivable sur } \mathbb{R}.}$ est $\frac{1}{2}\times e^{u(x)}=\frac{1}{2}\times e^{2.x}$.

Par conséquent, la primitive F a une expression de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{2}\times e^{2.x}-x\times e^x+\textit{Constante}$$

Reste à déterminer cette *Constante*. Nous savons que l'image de 0 par F est 3. Donc :

$$F(0)=3 \Rightarrow \frac{1}{2}\times e^{2\times0}-0\times e^0+\textit{Constante}=3 \Rightarrow \textit{Constante}=3-\frac{1}{2}\times1=\frac{5}{2}$$

<u>Conclusion :</u> la primitive F recherchée a pour expression $F(x)=\frac{1}{2}\times e^{2.x}-x\times e^x+\frac{5}{2}$.

# Exponentielle au recto, carrée au verso !

## Le contexte

Cet exercice est une étude d'une fonction rationnello-exponentielle issue de mon cerveau volcanique et diabolique. Il commence par une question de cours.

## L'énoncé

a) Une presque question de cours
Compléter le résultat du cours suivant :

$$\text{Pour tout entier naturel n non nul, } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \ldots$$

L'objet de cette première question est d'établir une limite sans utiliser le résultat précédent mais en s'appuyant sur les éléments suivants :

- L'exponentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est sa propre dérivée et qui vaut 1 en 0.
- Pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, on a : $e^x > x^2$.

En étudiant la fonction $\varphi(x) = e^x - \dfrac{x^3}{3}$ qui est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, établir la limite lorsque x tend vers $+\infty$ du quotient $\dfrac{e^x}{x^2}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - e^x}{x^2 + e^x}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

b) Pourquoi la fonction f est-elle définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

c) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
Quelles sont les conséquences graphiques de ces limites ?

d) Après avoir justifié que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition, démontrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{2.x \times (2-x) \times e^x}{\left(e^x + x^2\right)^2}$$

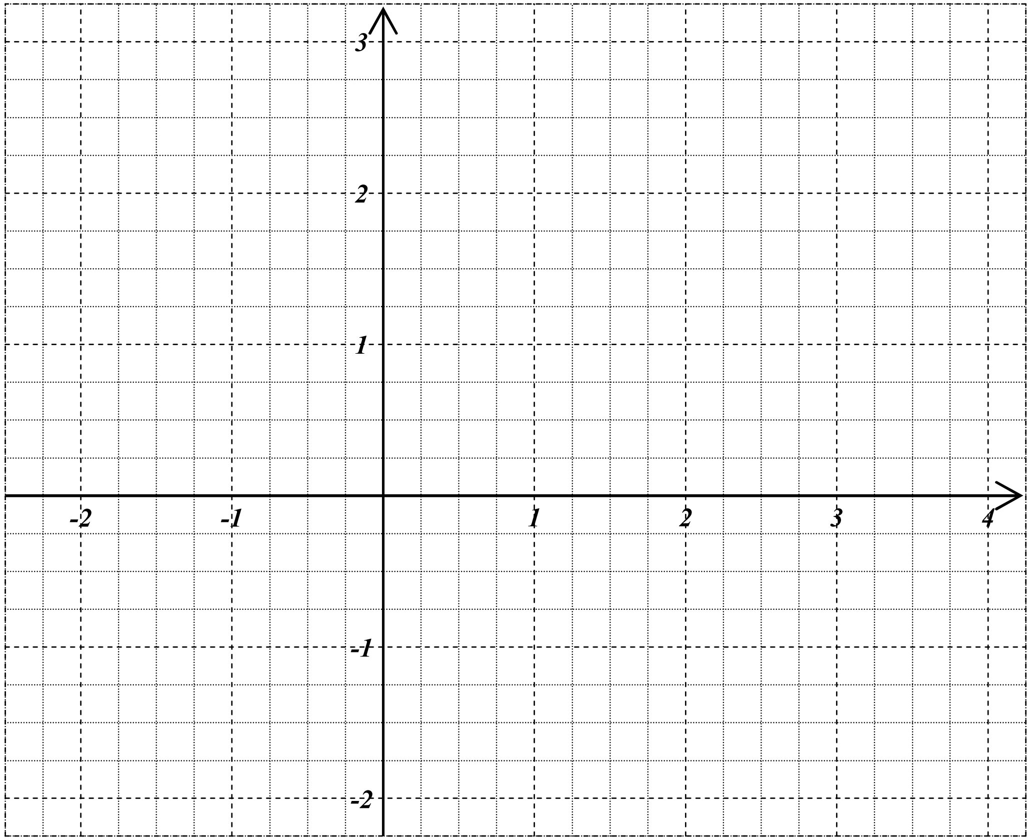
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On calculera les valeurs exactes des extrema locaux.

e) Démontrer que $f(2) = \dfrac{8}{4+e^2} - 1$.

Sachant que $2 < e < 3$, démontrer que $f(2)$ est une quantité strictement négative.

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha$ dont on déterminera une valeur approchée au centième près.
En déduire le tableau de signe de $f(x)$.

f) Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe (C) accompagnée des diverses droites rencontrées au cours du problème.



## Le corrigé

a) D'après un résultat du cours, pour tout entier naturel non nul n, nous avons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

➲ La démonstration qui vient ne sera pas sans rappeler celle permettant d'établir la limite en $+\infty$ du quotient $\frac{e^x}{x}$. Nous allons suivre le même cheminement.

Etudions les variations de la fonction $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{3}\times x^3$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Comme les fonctions exponentielle et cube sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors leur presque différence f est dérivable sur son ensemble de définition $[0;+\infty[$. Il vient alors :

$$\varphi'(x) = e^x - \frac{1}{3}\times 3.x^2 = e^x - x^2$$

Comme sur l'intervalle $[0;+\infty[$, nous avons $e^x > x^2$, alors la dérivée $\varphi'(x) = e^x - x^2$ est une quantité strictement positive sur cet ensemble.
Donc la fonction φ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Calculons l'image de 0 par φ :

$$\varphi(0) = e^0 - \frac{1}{3}\times 0^3 = 1 - 0 = 1$$

Comme φ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, alors pour tout réel $x \in ]0;+\infty[$, on a :

$$\varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow e^x - \frac{x^3}{3} > 1 \Rightarrow e^x > 1 + \frac{x^3}{3} \Rightarrow \underbrace{\frac{e^x}{x^2} > \frac{1}{x^2}\times\left[1+\frac{x^3}{3}\right] = \frac{1}{x^2} + \frac{x}{3}}_{\text{On a divisé l'inégalité par le facteur } x^2 \text{ qui est strictement positif sur } ]0;+\infty[.}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{x}{3} = 0^+ + (+\infty) = +\infty$, alors la fonction $\frac{e^x}{x^2}$ qui est minorée par cette première sur l'intervalle $]0;+\infty[$ s'envole aussi vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
Voilà pourquoi nous pouvons conclure :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

b) D'abord, le quotient $f(x)$ n'existe que lorsque et seulement lorsque son dénominateur $e^x + x^2$ est non nul.

Ensuite, les fonctions exponentielle $e^x$ et carrée $x^2$ sont définies sur $\mathbb{R}$.
Enfin, une exponentielle est toujours positive et un carré est toujours positif ou nul.
Par conséquent, leur somme $e^x + x^2$ est strictement positive, donc n'est jamais nulle.
C'est pour cela que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

c) L'ensemble de définition de f comporte deux bornes : autant de limites à chercher !

➲ ***La limite de f en -∞***

Quand x tend vers $-\infty$, $e^x$ tend vers 0 alors que $x^2$ s'envole vers $+\infty$.

Par conséquent, la fonction $f(x) = \frac{x^2 - e^x}{x^2 + e^x}$ est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour la lever, nous allons factoriser les numérateur et dénominateur de ce quotient par le caïd qui semble faire la loi au voisinage de l'infiniment négatif : $x^2$.

$\underbrace{\text{Pour tout réel } x \in ]-\infty;0[, \text{ nous pouvons écrire :}}_{\text{On prend x non nul pour pouvoir diviser par } x^2.}$

$$f(x) = \frac{x^2 - e^x}{x^2 + e^x} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \times \frac{1 - \frac{e^x}{x^2}}{1 + \frac{e^x}{x^2}} = \frac{1 - \frac{e^x}{x^2}}{1 + \frac{e^x}{x^2}}$$

Or :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{0^+}{+\infty} = 0^+ \times \frac{1}{+\infty} = 0^+ \times 0^+ = 0^+$$

<u>Conclusion :</u> lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x) = \frac{1 - e^x/x^2}{1 + e^x/x^2}$ tend vers $\frac{1-0^+}{1+0^+} = \frac{1}{1} = 1$.

Donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

➲ ***La limite de f en +∞***

Quand x tend vers $+\infty$, $e^x$ et $x^2$ s'envolent tous deux vers $+\infty$.

Donc le quotient $f(x) = \frac{x^2 - e^x}{x^2 + e^x}$ est une forme très indéterminée du type $\frac{\infty - \infty}{\infty}$.

Simplifions-la par le terme qui nous semble le plus fort en $+\infty$ à savoir $e^x$
Pour tout réel x, il vient :

$$f(x) = \frac{x^2 - e^x}{x^2 + e^x} = \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} \times \frac{\frac{x^2}{e^x} - 1}{\frac{x^2}{e^x} + 1} = \frac{\frac{x^2}{e^x} - 1}{\frac{x^2}{e^x} + 1}$$

Quand x tend vers $+\infty$, le quotient $\dfrac{e^x}{x^2}$ tend vers $+\infty$. Donc son inverse $\dfrac{x^2}{e^x}$ tend vers 0.

<u>Conclusion :</u> lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)=\dfrac{-1+x^2/e^x}{1+x^2/e^x}$ tend vers $\dfrac{-1+0}{1+0}=-1$.

Donc la droite d'équation $y=-1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

d) Les fonctions exponentielle et carré sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par conséquent :

Comme les fonctions $\left|\begin{array}{l} u(x)=x^2-e^x \\ u'(x)=2.x-e^x \end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l} v(x)=x^2+e^x \\ v'(x)=2.x+e^x \end{array}\right.$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et que le dénominateur $v(x)$ ne s'annule jamais, alors leur quotient $f=\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, il vient :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{\left[v(x)\right]^2}=\frac{\left(2.x-e^x\right)\times\left(x^2+e^x\right)-\left(2.x+e^x\right)\times\left(x^2-e^x\right)}{\left(x^2+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{\cancel{2.x^3}+2.x\times e^x-x^2\times e^x-\cancel{\left(e^x\right)^2}\cancel{-2.x^3}+2.x\times e^x-x^2\times e^x+\cancel{\left(e^x\right)^2}}{\left(x^2+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{4.x\times e^x-2.x^2\times e^x}{\left(x^2+e^x\right)^2}=\frac{e^x\times\left(4.x-2.x^2\right)}{\left(x^2+e^x\right)^2}=\frac{e^x\times 2.x\times(2-x)}{\left(x^2+e^x\right)^2}$$

L'exponentielle $e^x$ est toujours strictement positive.
Les facteurs affines $2.x$ et $2-x$ s'annulent respectivement en 0 et 2.

Calculons les images de 0 et 2 par la fonction f.

- $f(0)=\dfrac{0^2-e^0}{0^2+e^0}=\dfrac{0-1}{0+1}=\dfrac{-1}{1}=-1$

- $f(2)=\dfrac{2^2-e^2}{2^2+e^2}=\underbrace{\dfrac{4-e^2}{4+e^2}=\dfrac{\overbrace{4-1\times\left(4+e^2\right)+4}^{=-e^2}}{4+e^2}=\dfrac{8}{4+e^2}-1\times\dfrac{\cancel{4+e^2}}{\cancel{4+e^2}}=\dfrac{8}{4+e^2}-1}_{\text{De droite à gauche, c'est le début de la question 1.e...}}$

Le tableau de variation de f est le suivant :

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x$ | | + | \| | + | \| | + | |
| $2.x$ | | – | 0 | + | \| | + | |
| $-x+2$ | | + | \| | + | 0 | – | |
| $\left(x^2+e^x\right)^2$ | | + | \| | + | \| | + | |
| $f'(x)$ | | – | 0 | + | 0 | – | |
| f | 1 | ↘ | $-1$ | ↗ | $f(2)$ | ↘ | $-1$ |

e) Encadrons l'image de 2 par f à partir de l'encadrement de e.

$$2<e<3 \Rightarrow \underbrace{4<e^2<9}_{\substack{\text{La fonction carrée}\\ \text{est croissante sur } [0;+\infty[.}} \Rightarrow \underbrace{8<e^2+4<13}_{\text{On ajoute 4 à l'inégalité.}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{8}>\frac{1}{e^2+4}>\frac{1}{13}}_{\substack{\text{La fonction inverse est}\\ \text{décroissante sur } ]0;+\infty[.}} \Rightarrow \underbrace{1>\frac{8}{e^2+4}>\frac{8}{13}}_{\substack{\text{On multiplie}\\ \text{l'inégalité par 8.}}} \Rightarrow \underbrace{0>\overbrace{\frac{8}{e^2+4}-1}^{f(2)}>\frac{8}{13}}_{\text{On ajoute } -1 \text{ à l'inégalité.}}$$

<u>Conclusion :</u> $f(2)$ est une quantité strictement négative.

***Une autre manière de faire...***

On peut aussi remarquer que comme $e>2$ alors $e^2>2^2=4$.

Par conséquent, la différence $4-e^2$ est négative comme le quotient $f(2)=\dfrac{4-e^2}{4+e^2}=\dfrac{\ominus}{\oplus}$

➲ Comme la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur cet ensemble.
Les intervalles $]-\infty;0[$ et $[0;+\infty[$ forment une partition de l'ensemble de définition de f.
Comme la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$, alors f est une bijection de cet intervalle sur $]-1;1[=f\left(]-\infty;0[\right)$.

Donc $0 \in ]-1;1[$ admet par $f$ un unique antécédent $\alpha$ dans l'intervalle $]-\infty;0[$.

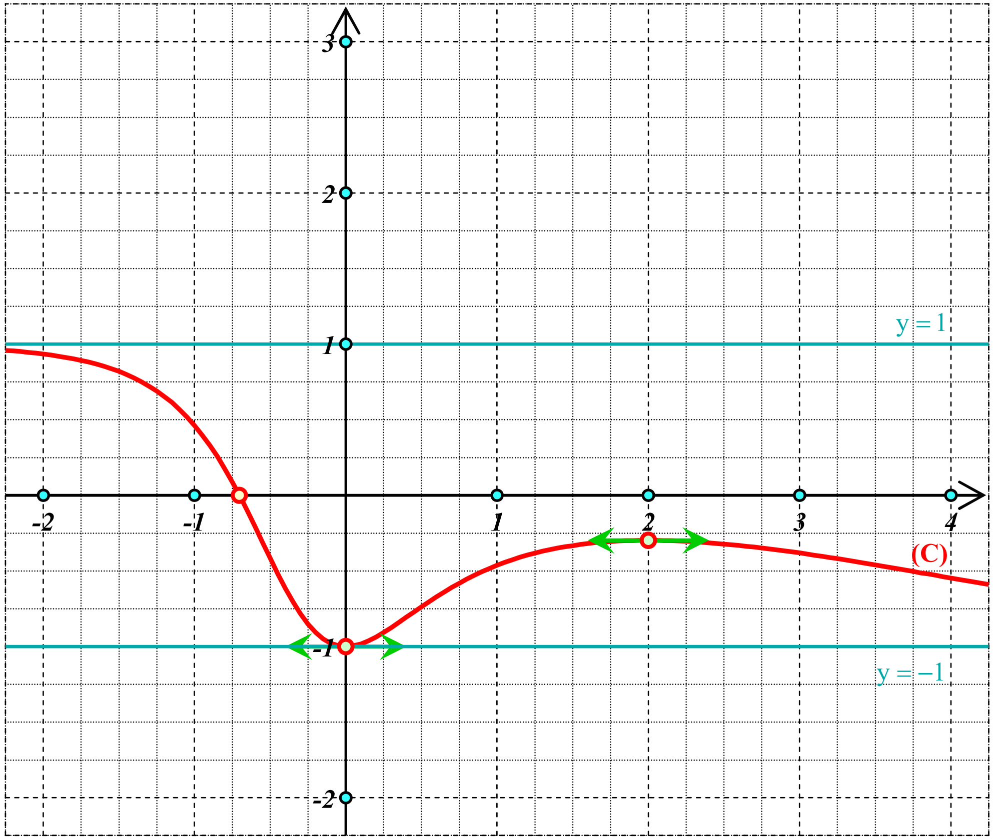
Comme le maximum de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est le réel négatif $f(2)$, alors 0 n'a aucun antécédent par f dans cet intervalle.

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha \approx -0,70$.

➲ Vu ses variations, le tableau de signe de $f(x)$ est le suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

f) La courbe (C) représentant la fonction f accompagnée de ses deux asymptotes horizontales d'équations $y=-1$ et $y=1$ ainsi que de ses deux tangentes horizontales est tracée sur le graphique suivant :



# Intégrales et primitives

## Décomposition primitive

### Le contexte

Cet exercice donné en devoir surveillé est une décomposition d'une fon fonction rationnelle pour en déterminer une primitive...logarithmique.

### L'énoncé

La fonction f est définie sur l'ensemble $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{12.x^2-24.x+5}{(2.x-3)^2}$$

L'objet de cet exercice est la détermination d'une primitive particulière de f.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x\in\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$, on ait :

$$f(x)=a+\frac{b}{2.x-3}+\frac{c}{(2.x-3)^2}$$

b) Déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ qui vérifie :

$$F(1)=4.$$

### Le corrigé

a) Nous voulons écrire la fonction $f(x)=\frac{12.x^2-24.x+5}{(2.x-3)^2}$ sous la forme :

$$f(x)=a+\frac{b}{2.x-3}+\frac{c}{(2.x-3)^2}=\frac{a\times(2.x-3)^2}{(2.x-3)^2}+\frac{b\times(2.x-3)}{(2.x-3)^2}+\frac{c}{(2.x-3)^2}$$

$$=\frac{a\times\left(4.x^2-12.x+9\right)+b\times(2.x-3)+c}{(2.x-3)^2}$$

$$=\frac{4.a\times x^2-12.a\times x+9.a+2.b\times x-3.b+c}{(2.x-3)^2}$$

Pour tout réel $x\in\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$, nous avons alors l'égalité :

$$\frac{12\times x^2+(-24)\times x+5}{(2.x-3)^2}=f(x)=\frac{4.a\times x^2+(2.b-12.a)\times x+(9.a-3.b+c)}{(2.x-3)^2}$$

$$\underbrace{\cancel{(2.x-3)^2}\times\frac{12\times x^2+(-24)\times x+5}{\cancel{(2.x-3)^2}}=\frac{4.a\times x^2+(2.b-12.a)\times x+(9.a-3.b+c)}{\cancel{(2.x-3)^2}}\times\cancel{(2.x-3)^2}}_{\text{Dans le but d'éliminer les dénominateurs, on multiplie les deux membres de l'inégalité par le facteur } (2.x-3)^2 \text{ qui est non nul sur l'ensemble } ]-\infty;1,5[\cup]1,5;+\infty[.}$$

$$\underbrace{12\times x^2+(-24)\times x+5=4.a\times x^2+(2.b-12.a)\times x+(9.a-3.b+c)}_{\text{Deux polynômes égaux...}}$$

Or deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux. Par suite :

$$\begin{cases}\text{Egalité des coefficients en } x^2 & : & 4.a=12 & \text{d'où} & a=12/4=3\\ \text{Egalité des coefficients en } x & : & 2.b-12.a=-24 & \text{d'où} & 2.b-36=-24\\ & & & \text{soit} & 2.b=12 \quad \text{donc} \quad b=6\\ \text{Egalité des coefficients en } x^0 & : & 9.a-3.b+c=5 & \text{d'où} & 27-18+c=5\\ & & & \text{soit} & c=5-27+18=-4\end{cases}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout réel $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$, nous avons :

$$f(x)=\frac{12.x^2-24.x+5}{(2.x-3)^2}=\underbrace{3+\frac{6}{2.x-3}-\frac{4}{(2.x-3)^2}}_{\text{Ecriture décomposée f}}$$

b) D'abord, comme la fonction f est dérivable donc continue sur $]-\infty;1,5[$, alors elle admet des primitives sur cet intervalle. Donc la fonction F que nous recherchons existe !
Pour déterminer une expression de cette primitive F, nous allons nous appuyer sur l'écriture décomposée de f. Examinons les divers termes composant cette somme :

- D'abord, une primitive de 3 sur $\mathbb{R}$ est $3.x$.
- Ensuite, pour tout réel $x \in ]-\infty;1,5[$, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\frac{6}{2.x-3}=3\times\frac{2}{2.x-3}=3\times\frac{2\times(-1)}{(2.x-3)\times(-1)}=3\times\frac{-2}{-2.x+3}=3\times\frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Très clairement, le quotient $\frac{6}{2.x-3}$ fait ses primitive en logarithme.
Petit problème : $2.x-3$ est négatif sur l'intervalle $]-\infty;1,5[$. Il fait donc s'intéresser à son opposé...

Comme $\left|\begin{array}{l} u(x)=-2.x+3 \\ u'(x)=-2 \end{array}\right.$ est une fonction dérivable et (surtout) strictement positive sur l'intervalle $]-\infty;1,5[$, alors une primitive de $\frac{6}{2.x-3}$ sur cet ensemble est la fonction $3\times\ln(u(x))=3\times\ln(-2.x+3)$.

- Enfin, pour tout réel $x \in ]-\infty;1,5[$, nous avons :

$$-\frac{4}{(2.x-3)^2}=-2\times\frac{2}{(2.x-3)^2}=-2\times\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$$

Comme $\left|\begin{array}{l} u(x)=2.x-3 \\ u'(x)=2 \end{array}\right.$ est une fonction dérivable et non nulle sur $]-\infty;1,5[$, alors une primitive de $-\frac{4}{(2.x-3)^2}$ est $-2\times\frac{-1}{u(x)}=-2\times\frac{-1}{2.x-3}=\frac{2}{2.x-3}$.

La primitive d'une somme étant la somme des primitives de chaque terme, nous en déduisons que la fonction F définie sur l'intervalle $]-\infty;1,5[$ est de la forme :

$$F(x)=3.x+3\times\ln(3-2.x)+\frac{2}{2.x-3}+\text{Constante}$$

Reste à déterminer la constante. Nous savons que l'image de 1 par F est 4. Par conséquent :

$$F(1)=4 \Leftrightarrow 3+3\times\ln(3-2)+\frac{2}{2-3}+\text{Constante}=4 \Leftrightarrow 3+3\times\ln(1)+\frac{2}{-1}+\text{Constante}=4$$

$$\Leftrightarrow 3+3\times 0-2+\text{Constante}=4 \Leftrightarrow \text{Constante}=4-1=3$$

<u>Conclusion :</u> la primitive F recherchée est définie sur l'intervalle $]-\infty;1,5[$ par :

$$F(x)=3.x+3\times\ln(3-2.x)+\frac{2}{2.x-3}+3$$

# Arccosinus sans en parler - France septembre 2007

## Le contexte

Cet exercice est la seconde partie du premier exercice du sujet de France Septembre 2007. Sans en dire le nom, il s'intéresse à la réciproque de la fonction cosinus, une fonction que l'on appelle arccosinus.

## L'énoncé

On désigne par g la fonction définie sur $]-1;1[$ par :

$$g(0)=0 \quad \text{et} \quad g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

où $g'$ désigne la dérivée de g sur l'intervalle $]-1;1[$.

On ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

a) Pourquoi peut-on affirmer que cette fonction g existe bien et surtout qu'elle est unique ?

On considère la fonction composée h définie sur l'intervalle $]-\pi;0[$ par :

$$h(x)=g(\cos(x))$$

b) Démontrer que pour tout réel $x\in]-\pi;0[$, on a :

$$h'(x)=1$$

c) Calculer $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, puis donner l'expression de la fonction $h(x)$.

## Le corrigé

a) La fonction $u(x)=1-x^2$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]-1;1[$.

Donc sa racine $\sqrt{u(x)}=\sqrt{1-x^2}$ est aussi dérivable et strictement positive sur $]-1;1[$.

Et par conséquent, l'inverse de celle-ci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est dérivable donc continue sur $]-1;1[$.

Or toutes les fonctions continues admettent des primitives. D'après un résultat du cours, il existe une unique primitive g de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $]-1;1[$ qui s'annule en 0.

C'est pour cela que la fonction g est parfaitement définie sur $]-1;1[$.

b) La fonction h définie sur $]-\pi;0[$ est la composée suivante :

$$\underset{\in]-\pi;0[}{x}\xrightarrow[\substack{\text{Dérivable sur } \mathbb{R}\\ u'(x)=-\sin(x)}]{u=\text{Cosinus}}\underset{\in]-1;1[}{\cos(x)}\xrightarrow[\substack{\text{Dérivable sur } ]-1;1[\\ v'(x)=g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}]{v=g}h(x)=g(\cos(x))$$

Etant la composée de deux fonctions dérivables sur leurs ensembles respectifs, la composée $h=v\circ u$ est elle-même dérivable sur l'intervalle $]-\pi;0[$

Pour tout réel $x\in]-\pi;0[$, il vient alors :

$$h'(x)=u'(x)\times v'(u(x))=-\sin(x)\times g'(\cos(x))=-\sin(x)\times\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}$$

$$=-\sin(x)\times\frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)}}=-\sin(x)\times\frac{1}{|\sin(x)|}$$

Or sur l'intervalle $]-\pi;0[$, $\sin(x)$ est strictement négatif. Par conséquent, sa valeur absolue est son opposé. Autrement dit, sur $]-\pi;0[$ nous avons :

$$|\sin(x)|=-\sin(x)$$

Il vient alors pour la dérivée de h :

$$h'(x)=-\sin(x)\times\frac{1}{|\sin(x)|}=\cancel{-\sin(x)}\times\frac{1}{\cancel{-\sin(x)}}=1$$

c) Calculons l'image de $-\frac{\pi}{2}$ par h :

$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=g(0)=0$$

➲ Comme sa dérivée est égale 1, alors la fonction h qui est une primitive de cette fonction est de la forme :

$$h(x)=x+\mathit{Constante}$$

Pour déterminer la *Constante*, utilisons l'image de $-\frac{\pi}{2}$ par h qui nous est connue.

$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2}+Constante=0 \quad \Leftrightarrow \quad Constante=\frac{\pi}{2}$$

Conclusion : l'expression de la fonction h sur l'intervalle $]-\pi;0[$ est $h(x)=x+\dfrac{\pi}{2}$.

**Le truc non dit : la réciproque de la fonction cosinus sur ]-π : 0[**

Comme pour tout réel $x\in]-\pi;0[$, nous avons :

$$h(x)-\frac{\pi}{2}=g(\cos(x))-\frac{\pi}{2}=x$$

alors la réciproque de cosinus sur $]-\pi;0[$ est la fonction $g(x)-\dfrac{\pi}{2}$ définie sur $]-1;1[$ .

En fait, g est la fonction arccosinus.

# *Intégration en parties - Antilles-Guyane septembre 2007*

## *Le contexte*

Cet exercice est issu du sujet donné aux Antilles et en Guyane durant la session de septembre 2007. Il traite d'intégration et aussi d'une fonction logarithme. Il débute par une question de cours assez classique : établir la formule d'intégration par parties.

## *L'énoncé*

### Question de cours

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I telles que leurs dérivées respectives $u'$ et $v'$ soient aussi continues sur cet intervalle I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a;b]$ de I.

### Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;1]$. On suppose que sa dérivée $f'$ est continue sur l'intervalle $[0;1]$.

1°) En utilisant la question de cours, démontrer que :

$$\int_0^1 f(x).dx = f(1) - \int_0^1 x \times f'(x).dx$$

2°) En déduire que $\int_0^1 \left(f(x) - f(1)\right).dx = -\int_0^1 x \times f'(x).dx$

### Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-2;2[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

On appelle (C) sa courbe représentative. Elle est tracée ci-contre dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres.

0°) Pourquoi la fonction f est-elle seulement définie sur intervalle $]-2;2[$ ?

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;2[$, on a : $f'(x) = \frac{4}{4-x^2}$.

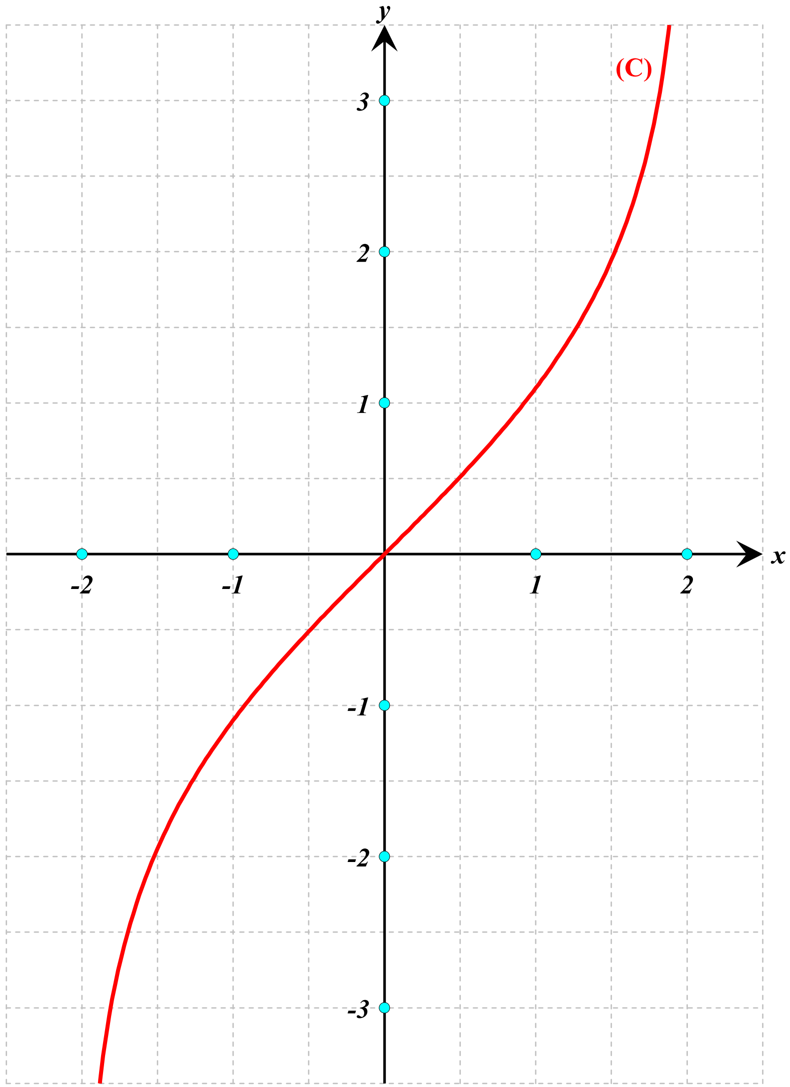
En déduire les variations de la fonction f.

### Partie C

Sur le graphique ci-après, hachurer la partie $\mathcal{P}$ du plan constituée des points $M(x;y)$ tels que :

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leq y \leq \ln(3)$$

En utilisant la partie A, calculer en centimètres carrés l'aire de la partie $\mathcal{P}$.




## Le corrigé

### Question de cours

a) Comme u et v sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle I, alors il en va de même pour leur produit $u\times v$ et pour tout réel $x\in I$, nous avons :

$$(u\times v)'(x)=u'(x)\times v(x)+v'(x)\times u(x)$$

Cette égalité s'écrit aussi :

$$v'(x)\times u(x)=(u\times v)'(x)-u'(x)\times v(x)$$

Comme les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle I, elles y sont donc continues...comme leurs dérivées $u'$ et $v'$.

Donc les produits $v'\times u$ et $u'\times v$ peuvent être intégrés sur tout intervalle $[a;b]$ de I.

La fonction $(u\times v)'$ qui est la dérivée de $u\times v$ peut aussi être intégrée. D'ailleurs, une de ses primitives sur I est... $u\times v$ . On est toujours une primitive de sa dérivée !

Intégrons donc notre égalité sur un intervalle $[a;b]$ de I. Il vient alors :

$$\int_a^b v'(x)\times u(x).dx=\underbrace{\int_a^b\Big((u\times v)'(x)-u'(x)\times v(x)\Big).dx=\overbrace{\int_a^b(u\times v)'}^{\text{Nous connaissons une primitive de cette dérivée...}}(x).dx-\int_a^b u'(x)\times v(x).dx}_{\text{Linéarité de l'intégrale : l'intégrale de la différence est la différence des intégrales...}}$$

$$=\big[u(x)\times v(x)\big]_a^b-\int_a^b u'(x)\times v(x).dx$$

<u>Conclusion :</u> pour tous réels a et b de l'intervalle I, nous venons d'établir la formule voulue

$$\underbrace{\int_a^b u(x)\times v'(x).dx=\big[u(x)\times v(x)\big]_a^b-\int_a^b u'(x)\times v(x).dx}_{\text{Formule d'intégration par parties}}$$

## Partie A

1°) Les fonctions $\left| \begin{array}{l} u(x)=f(x) \\ u'(x)=f'(x) \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{l} v(x)=x \\ v'(x)=1 \end{array} \right.$ sont dérivables sur l'intervalle $[0;1]$ et leurs dérivées y sont continues. Nous pouvons donc leur appliquer la formule d'intégration par parties que nous venons d'établir. Il vient alors :

$$\int_0^1 f(x)\times 1\times dx = \left[f(x)\times x\right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\times x\times dx$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\int_0^1 f(x)dx = f(1)\times 1 - f(0)\times 0 - \int_0^1 f'(x)\times x\times dx$$

$$= f(1) - 0 - \int_0^1 f'(x)\times x\times dx = f(1) - \int_0^1 x\times f'(x)\times dx$$

2°) Même s'il n'en a pas l'air, $f(1)=M$ est une constante, un nombre fixé. Très exactement , $f(1)=M$ est le nombre qui est associé à 1 par la fonction f.
Mais pour éviter toute ambiguïté à son sujet (on pourrait penser qu'il dépend de x), remplaçons-le par la lettre M. Nous pouvons écrire :

$$\int_0^1 \left(f(x)-f(1)\right).dx = \underbrace{\int_0^1 \left(f(x)-M\right).dx = \int_0^1 f(x).dx - \int_0^1 M\times dx}_{\text{L'intégrale de la différence...}} = \int_0^1 f(x).dx - M\times(1-0)$$

$$= \underbrace{\int_0^1 f(x).dx - M}_{\text{Ho mais...}} = \underbrace{\cancel{f(1)} - \int_0^1 x\times f'(x)\times dx}_{\text{...d'après A.1}} - \cancel{f(1)} = -\int_0^1 x\times f'(x)\times dx$$

## Partie B

0°) Le tableau de signe du quotient $Q(x)=\dfrac{x+2}{-x+2}$ est celui ci-contre ➔

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $-x+2$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Q(x) | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | |

Et la fonction ln n'est définie que sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Par conséquent, le logarithme $\ln(Q(x))$ ne peut exister que lorsque et seulement lorsque le quotient $Q(x)$ est strictement positif. Autrement dit, seulement sur l'intervalle $]-2;2[$.

## Partie B

1°) L'ensemble de définition de f ayant deux bornes ouvertes, nous avons deux limites à y chercher. Heureusement, le tableau de signe précédent va nous être très utile...

- Quand x tend vers $-2$ par la droite, le quotient $Q(x)=\dfrac{x+2}{-x+2}$ tend vers $0^+$.

  Donc son logarithme $f(x)=\ln(Q(x))$ tend vers $-\infty$.

  Et conséquence graphique : la droite verticale d'équation $x=-2$ est une asymptote à la courbe (C).
- Quand x tend vers 2 par la gauche, le numérateur $x+2$ tend vers $2+2=4$.

  Le dénominateur $-x+2$ tend lui vers $0^+$.

  Donc le quotient $Q(x)=\dfrac{x+2}{-x+2}$ s'envole vers $\dfrac{4}{0^+}=+\infty$.

  Et son logarithme $f(x)=\ln(Q(x))$ aussi !

  Donc re-conséquence graphique : la droite verticale d'équation $x=2$ est une asymptote à la courbe (C).

2°) Avant de dériver le logarithme d'un quotient, nous connaître la dérivée de ce quotient.

Le quotient $Q(x)=\dfrac{x+2}{-x+2}$ est clairement dérivable sur l'intervalle $]-2;2[$ car ses numérateur et dénominateur le sont et que ce dernier a la bonne idée d'y être non nul.
Par conséquent, pour tout réel $x\in]-2;2[$, nous pouvons écrire :

$$Q'(x)=\frac{(x+2)'\times(-x+2)-(-x+2)'\times(x+2)}{(-x+2)^2}=\frac{1\times(-x+2)-(-1)\times(x+2)}{(-x+2)^2}$$

$$=\frac{-x+2+x+2}{(-x+2)^2}=\frac{4}{(-x+2)^2}$$

Si seules les variations de la fonction f nous intéressaient, nous pourrions nous arrêter là.
La dérivée $Q'(x)$ est clairement positive donc le quotient Q est croissant sur $]-2;2[$.
La fonction ln est elle-aussi croissante mais sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Par conséquent, leur composée $f=\ln\circ Q$ est strictement croissante sur $]-2;2[$.
Mais non ! Nous devons trouver la dérivée de f ! Pourquoi ? Ben, juste pour la partie C...

Reprenons : comme la fonction Q est dérivable et strictement positive sur $]-2;2[$, alors son logarithme $f=\ln(Q)$ est aussi dérivable sur cet intervalle.

Pour tout réel $x \in ]-2;2[$, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=\frac{Q'(x)}{Q(x)}=\frac{\frac{4}{(2-x)^2}}{\frac{2+x}{2-x}}=\frac{4}{(2-x)^{\cancel{2}}}\times\frac{\cancel{2-x}}{2+x}$$

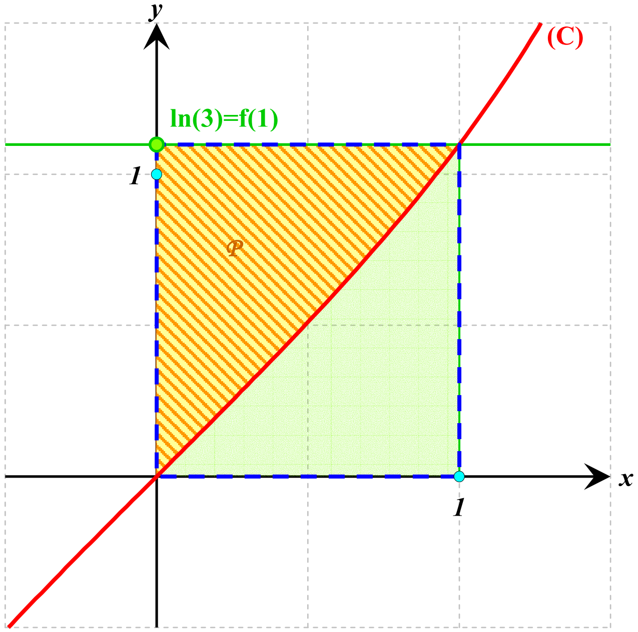
$$=\frac{4}{(2-x)\times(2+x)}=\frac{4}{4-x^2}$$

Par conséquent, le tableau de variation de f est celui ci-contre ➔

| $x$ | $-2$ $\qquad$ $2$ |
|---|---|
| $4$ | $+$ |
| $-x+2$ | $+$ |
| $x+2$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

## Partie C

Ci contre, nous avons agrandi la figure d'un facteur 2. ➔




Le domaine $\mathcal{P}$ est la partie du plan hachurée ci-contre et située au-dessus la courbe (C), sous de la droite horizontale d'équation $y=\ln(3)$ et à droite de l'axe des ordonnées.

L'aire de $\mathcal{P}$ est celle du grand rectangle diminuée de celle de la partie du plan se trouvant sous la courbe (C), au-dessus de l'axe des abscisses et à gauche de la droite l'horizontale d'équation $x=1$.

Ainsi :

$$\text{Aire de } \mathcal{P} = \underbrace{1\times f(1)}_{\text{Aire du rectangle}} - \underbrace{\int_0^1 f(x).dx}_{\text{Aire sous la courbe (C)}} = \underbrace{f(1)-\int_0^1 f(x).dx = \int_0^1 x\times f'(x)\times dx}_{\text{D'après la partie A qui est applicable à f dont la dérivée f' est continue sur } [0;1]} = \int_0^1 \frac{4.x}{4-x^2}.dx$$

La fonction $\begin{cases} u(x)=4-x^2 \\ u'(x)=-2.x \end{cases}$ est dérivable et strictement positive sur l'intervalle $]-2;2[$.

Par conséquent, une primitive de la fonction $g(x)=\frac{4.x}{4-x^2}=\frac{-2\times(-2.x)}{4-x^2}=-2\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur l'intervalle $]-2;2[$ est la fonction $G(x)=-2\times\ln\left(4-x^2\right)$.

Ainsi :

$$\text{Aire de } \mathcal{P} = \int_0^1 g(x).dx = \left[G(x)\right]_0^1 = G(1)-G(0) = -2\times\ln(3)+2\times\ln(4)$$

$$= \underbrace{2\times\ln(4/3)\text{ unités d'aires} = 8\times\ln(4/3)\text{ centimètres carrés}}_{\text{Ce qui est crédible vu la figure...Ouf !}}$$

# Exponentielle, suite...mais d'intégrales !

## Le contexte

Cet exercice qui est une création originale mais somme toute classique de mon incroyable cerveau aurait pu être aussi classé dans les chapitre Exponentielle et Suites. Il traite d'une suite d'intégrales définie par une fonction exponentielle.

## L'énoncé

La fonction f est définie sur ℝ par :

$$f(x) = x \times e^{2.x-1}$$

La courbe (C) représentant cette fonction f est tracée ci-contre.

a) Une petite question de cours
Soit x un réel quelconque. On pose alors $t = -x$.

Exprimer le produit $x \times e^x$ en fonction de t.

Sachant que $\underbrace{\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = \ldots}_{\text{Egalité à compléter}}$, en déduire la limite de $x \times e^x$ lorsque x tend vers $-\infty$.

b) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$, puis en $+\infty$. On indiquera les éventuelles conséquences graphiques.

c) Etudier les variations de la fonction f sur ℝ.

Pour tout entier naturel n, on appelle $I_n$ l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 x^n \times e^{2.x-1}.dx$$

d) Vérifier que $I_0 = \int_0^0 e^{2.x-1}.dx = \frac{e^4 - 1}{2.e}$.

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_1 = \int_0^2 x \times e^{2.x-1}.dx$.

Donner une interprétation graphique du nombre $I_1$. On représentera cette interprétation sur le graphique ci-contre.

e) Démonter que pour tout réel $x \in [0;2]$, on a :

$$\frac{1}{e} \times x^n \leq x^n \times e^{2.x-1} \leq e^3 \times x^n$$

En déduire un encadrement de $I_n$ (en fonction de n).

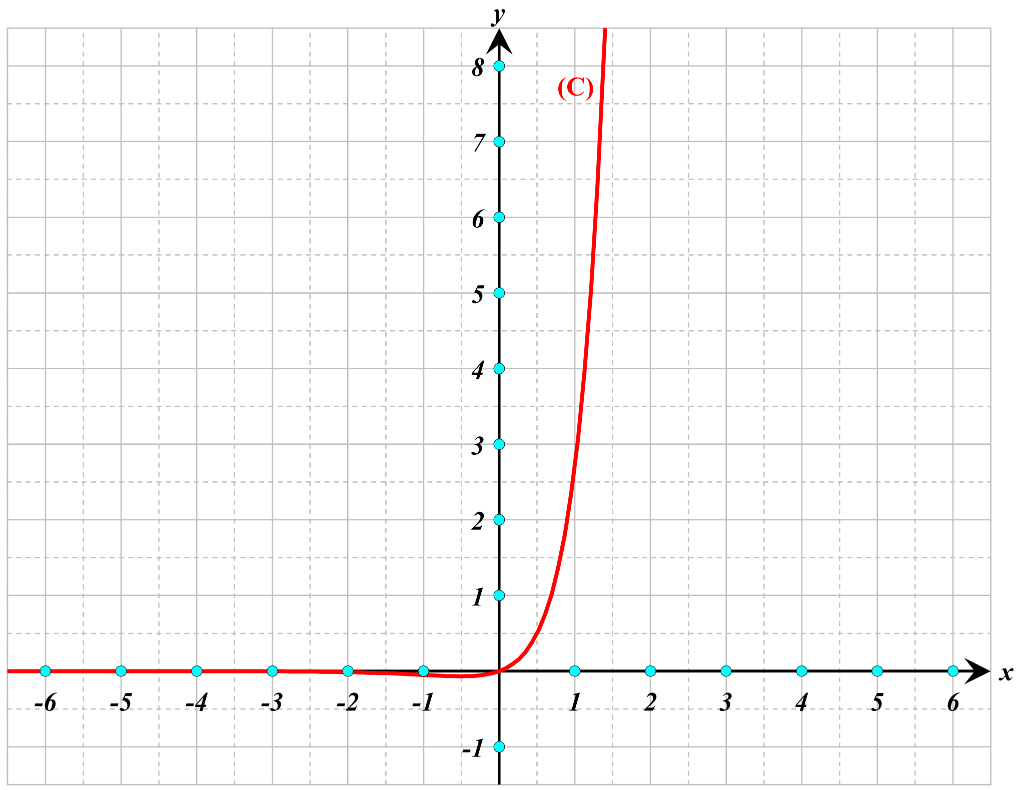
f) On appelle $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)$$

Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = (n+1) \times \left[\ln(2) - \frac{\ln(n+1)}{n+1}\right]$.

En déduire la limite de la suite $(u_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Conclure quant à la limite de la suite $(I_n)$.



## *Le corrigé*

a) Pour tout réel x, si l'on pose $t=-x \quad \Leftrightarrow \quad x=-t$ , nous pouvons écrire :

$$x\times e^{x}=(-t)\times e^{-t}=-\frac{t}{e^{t}}$$

Lorsque x tend vers $-\infty$ , son opposé $t=-x$ tend vers $+\infty$ .

Donc le quotient $\frac{e^{t}}{t}$ tend vers $+\infty$ et l'opposé de son inverse $-\frac{t}{e^{t}}$ vers $-\frac{1}{+\infty}=0^{-}$ .

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} x\times e^{x}=0^{-}$ .

b) L'ensemble de définition de f est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ : deux limites sont à chercher.

➲ Lorsque x tend $-\infty$ , $2.x-1$ tend vers $-\infty$ , donc son exponentielle $e^{2.x-1}$ tend vers 0.

Par conséquent, la fonction $f(x)=x\times e^{2.x-1}$ est une forme indéterminée du type $\infty\times 0$ .

Mais en modifiant légèrement cette écriture de f, nous allons pouvoir lever l'incertitude.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=x\times e^{2.x-1}=x\times\frac{e^{2.x}}{e}=x\times e^{x}\times e^{x}\times\frac{1}{e}$$

A présent, essayons de nous prononcer !

Quand x tend vers $-\infty$ , le produit $x\times e^{x}$ et l'exponentielle $e^{x}$ tendent vers 0.

Donc leur (presque) produit $f(x)=\frac{\left(x\times e^{x}\right)\times e^{x}}{e}$ tend aussi vers $\frac{0\times 0}{e}=0$ .

<u>Conséquence graphique :</u> l'axe des abscisses (c'est-à-dire la droite d'équation $y=0$ ) est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$ .

➲ Quand x tend vers $+\infty$ , x ; $2.x-1$ et son exponentielle $e^{2.x-1}$ s'envolent tous vers $+\infty$ .

Par conséquent, leur produit $f(x)=x\times e^{2.x-1}$ tend vers $+\infty$ .

Vu la forme de la fonction f, sa courbe représentative (C) n'admet pas d'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ .

c) Comme les fonctions x ; $2.x-1$ et exponentielle sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors il en va de même pour le produit f. Nous pouvons écrire :

$$f'(x)=(x)'\times e^{2.x-1}+\left(e^{2.x-1}\right)'\times x=1\times e^{2.x-1}+2\times e^{2.x-1}\times x=e^{2.x-1}\times(1+2.x)$$

L'image de $-\frac{1}{2}$ par la fonction f est : $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\times e^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1}=-\frac{1}{2}\times e^{-2}=-\frac{1}{2\times e^{2}}$

L'exponentielle $e^{2.x-1}$ est toujours strictement positive.
Le signe du facteur affine $2.x+1$ ne pose aucun problème.
Par conséquent, le tableau de variation de f est celui ci-contre ➔

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{2.x-1}$ | | + | | + | |
| $2.x+1$ | | − | 0 | + | |
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| f | 0 | ↘ | $-\frac{1}{2.e^{2}}$ | ↗ | $+\infty$ |

d) Une primitive de la fonction $e^{2.x-1}=\frac{1}{2}\times 2\times e^{2.x-1}=\frac{1}{2}\times u'(x)\times e^{u(x)}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $\frac{1}{2}\times e^{u(x)}=\frac{1}{2}\times e^{2.x-1}$ . Par conséquent :

$$I_0=\int_0^2 e^{2.x-1}.dx=\left[\frac{1}{2}\times e^{2.x-1}\right]_0^2=\left(\frac{1}{2}\times e^{2\times2-1}\right)-\left(\frac{1}{2}\times e^{2\times0-1}\right)=\frac{1}{2}\times e^{3}-\frac{1}{2}\times e^{-1}=\frac{e^{4}-1}{2.e}$$

➲ Pour calculer l'intégrale $I_1$ , nous allons procéder à une intégration par parties en posant

$$\left|\begin{array}{l}u(x)=x\\ u'(x)=1\end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left|\begin{array}{l}v(x)=\frac{1}{2}\times e^{2.x-1}\\ v'(x)=e^{2.x-1}\end{array}\right.$$

où u et v sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont les dérivées sont continues. Ainsi :

$$I_1=\int_0^2 \underbrace{x\times e^{2.x-1}}_{u\times v'}.dx=\underbrace{\left[x\times\frac{1}{2}\times e^{2.x-1}\right]_0^2}_{u\times v}-\int_0^2 \underbrace{1\times\frac{1}{2}\times e^{2.x-1}}_{u'\times v}.dx$$

$$=\left(2\times\frac{1}{2}\times e^{2\times2-1}\right)-\left(0\times\frac{1}{2}\times e^{2\times0-1}\right)-\frac{1}{2}\times\int_0^2 \times e^{2.x-1}.dx$$

$$=e^{3}-0-\frac{1}{2}\times I_0=\frac{4.e^{4}}{4.e}-\frac{e^{4}-1}{4.e}=\frac{3.e^{4}+1}{4.e}$$

➲ Ce nombre $I_1$ correspond à l'aire du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0$ (c'est axe des ordonnées) et $x = 2$.

e) Nous pouvons écrire que pour tout réel $x \in [0;2]$

$$0 \le x \le 2$$

On multiplie par 2.

$$0 \le 2 \times x \le 4$$

On soustrait 1.

$$-1 \le 2 \times x - 1 \le 3$$

La fonction exponentielle est croissante sur ℝ.

$$\underbrace{e^{-1} \le e^{2\times x-1} \le e^{3}}_{\text{L'ordre est conservé.}}$$

On multiplie par le réel $x^n$ qui est positif ou nul car $x \in [0;2]$.

$$\underbrace{x^n \times \frac{1}{e} \le x^n \times e^{2\times x-1} \le x^n \times e^3}_{\text{L'ordre est encore conservé.}}$$

➲ Comme les trois fonctions intervenant dans cette inégalité sont continues sur ℝ, alors nous pouvons l'intégrer sur l'intervalle $[0;2]$ :

$$\int_0^2 x^n \times \frac{1}{e}.dx \le \int_0^2 x^n \times e^{2\times x-1}.dx \le \int_0^2 x^n \times e^3.dx$$

$$\underbrace{\frac{1}{e} \times \int_0^2 x^n.dx \le \int_0^2 x^n \times e^{2\times x-1}.dx \le e^3 \times \int_0^2 x^n.dx}_{\text{Linéarité de l'intégrale...}}$$

Les facteurs $\frac{1}{e}$ et $e^3$ étant constants et (surtout) ne dépendant pas de x, on peut les sortir de l'intégrale.

$$\frac{1}{e} \times \left[\frac{1}{n+1} \times x^{n+1}\right]_0^2 \le I_n \le e^3 \times \left[\frac{1}{n+1} \times x^{n+1}\right]_0^2$$

$$\frac{1}{e} \times \left(\frac{1}{n+1} \times 2^{n+1} - \frac{1}{n+1} \times 0^{n+1}\right) \le I_n \le e^3 \times \left(\frac{1}{n+1} \times 2^{n+1} - \frac{1}{n+1} \times 0^{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{e} \times \frac{2^{n+1}}{n+1} \le I_n \le e^3 \times \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

f) Pour tout entier naturel non nul n, nous pouvons écrire :

$$u_n = \underbrace{\ln\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}\right) = \ln\left(2^{n+1}\right) - \ln(n+1)}_{\text{Le logarithme du quotient est la différence des logarithmes}}$$

$$= \underbrace{(n+1) \times \ln(2)}_{\text{Le logarithme d'une puissance...}} - \ln(n+1) = \underbrace{(n+1) \times \left[\ln(2) - \frac{\ln(n+1)}{n+1}\right]}_{\text{On factorise par n+1...}}$$

➲ Quand n tend vers $+\infty$, l'entier $t = n+1$ s'envole aussi vers $+\infty$.

Par conséquent, le quotient $\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \frac{\ln(t)}{t}$ tend vers $0^+$ et le facteur $\ln(2) - \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ (de $u_n$) tend vers $\ln(2) - 0^+ = \ln(2)$ qui est une quantité strictement positive.

Finalement, nous en déduisons que le produit $u_n$ s'en va vers $(+\infty) \times \ln(2) = +\infty$.

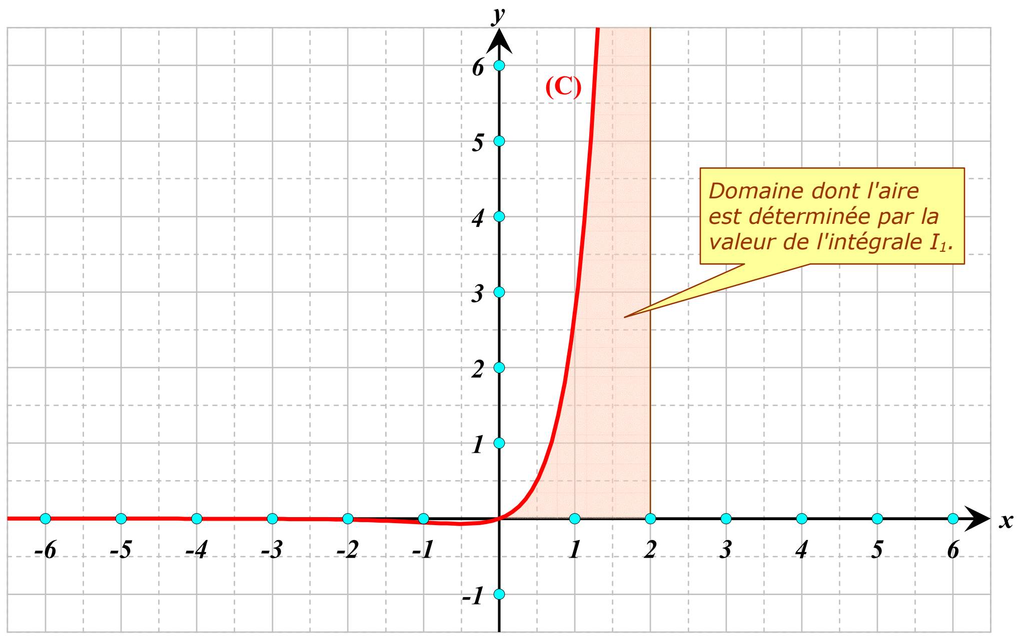
➲ On appelle $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$v_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} = \exp\left(\ln\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)\right) = e^{u_n}$$

Quand n tend vers $+\infty$, $u_n$ s'en va vers $+\infty$. Nous venons de l'établir !

Par conséquent, son exponentielle $v_n = e^{u_n}$ s'envole aussi vers $+\infty$.

Comme la suite $(I_n)$ est minorée par la suite $\frac{1}{e} \times v_n$ qui tend vers $+\infty$, alors elle-même s'en va aussi vers $+\infty$.



# Les intégrales levantines - Liban juin 2006

## Le contexte

Cet exercice est une adaptation d'un exercice donné au Liban en juin 2006. Il aurait pu être répertoirié dans les chapitres *Logarithme népérien* ou *Suites*, vu qu'il aborde aussi ces sujets.

## L'énoncé

### Partie A - Etude d'une fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x \times \ln(x+1)$$

Sa courbe représentative (C) est tracée sur le graphique ci-dessous où une unité de longueur vaut trois centimètres.

**1°)** Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. On indiquera les conséquences graphiques sur la courbe (C) de ces limites.

**2°)** Démontrer que pour tout réel $x \in ]-1;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$$

Etablir le signe de la somme $f'(x)$ sur l'intervalle $]-1;0[$, puis sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
En déduire les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

On appelle I le réel :

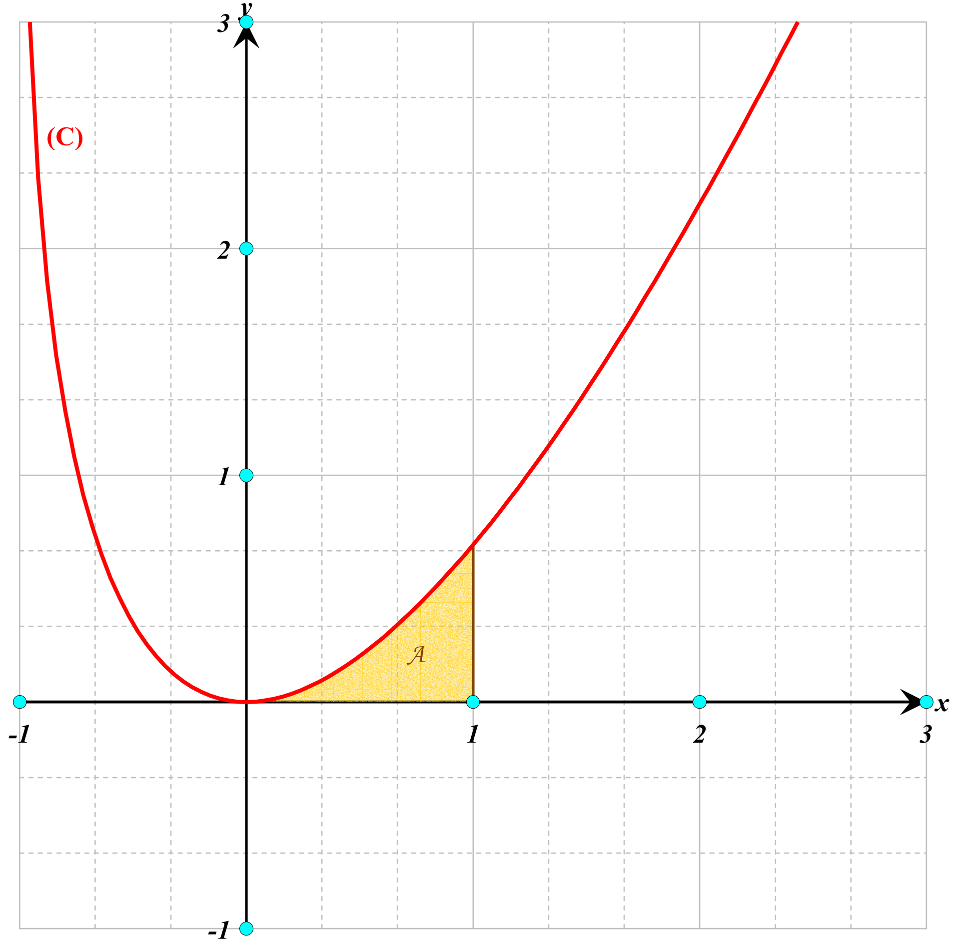
$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}.dx$$

**3°)** Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x différent de $-1$, on ait :

$$\frac{x^2}{x+1} = a.x + b + \frac{c}{x+1}$$

En déduire que $I = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

**4°)** A l'aide d'une intégration par parties et du résultat de la question A.3, calculer, en centimètres carrés, l'aire du domaine $\mathcal{A}$ compris entre la courbe (C) et les droites d'équation $x = 1$ et $y = 0$.




### Partie B - Etude d'une suite $(u_n)$ définie par une intégrale

La suite $(u_n)$ est définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \int_0^1 x^n \times \ln(x+1).dx$$

**1°)** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^n \times (x-1) \times \ln(x+1).dx .$$

Déduire de cette dernière intégrale le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ .

Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente.

**2°)** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$0 \le u_n \le \frac{\ln(2)}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)$ .

## *Le corrigé*

### Partie A - Etude d'une fonction f

**1°)** L'ensemble de définition de f comporte deux bornes ouvertes : $-1$ par la droite et $+\infty$ .

- Quand x tend vers $-1$ par la droite, $x+1$ tend vers $0^+$ .
  Donc son logarithme $\ln(x+1)$ tend vers $-\infty$ .
  Et le produit $f(x) = x \times \ln(x+1)$ s'en va vers $(-1)\times(-\infty) = +\infty$ .
  Graphiquement, la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe (C).

- Quand x tend vers $+\infty$ , $x+1$ et son logarithme $\ln(x+1)$ s'en vont vers $+\infty$ .
  Par conséquent, le produit $f(x) = x \times \ln(x+1)$ aussi !
  Graphiquement, cela ne préjuge d'aucune asymptote.

**2°)** Pour déterminer les variations de la fonction f, cherchons le signe de sa dérivée !

Comme la fonction $\left| \begin{array}{l} u(x) = x+1 \\ u'(x) = 1 \end{array} \right.$ est dérivable et strictement positive sur $]-1;+\infty[$ ,

alors son logarithme $\ln(u) = \ln(x+1)$ est dérivable sur cet intervalle et :

$$\left(\ln(x+1)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x+1}$$

Vu que ses deux facteurs x et $\ln(x+1)$ sont dérivables sur $]-1;+\infty[$ , alors il en va de même pour la fonction produit $f(x) = x \times \ln(x+1)$ . Il vient :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \times x = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

➲ Une chose est claire : le dénominateur $x+1$ est toujours positif sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ .

Ensuite, quand x appartient à l'intervalle $]-1;0[$ , alors :

- x est négatif. Donc le quotient $\frac{x}{x+1}$ est $\frac{\text{négatif}}{\text{positif}} = \text{négatif}$ .
- $x < 0$ donc $x+1 < 1$ d'où $\underbrace{\ln(x+1) < \ln(1) = 0}_{\text{Ln est strictement croissante sur } ]0;+\infty[.}$

Donc la somme $f'(x)$ des deux termes négatifs $\frac{x}{x+1}$ et $\ln(x+1)$ est elle-aussi négative.

De même, quand x fait partie de l'intervalle $]0;+\infty[$ , alors :

- x est positif et par conséquent, le quotient $\frac{x}{x+1} = \frac{\text{positif}}{\text{positif}}$ aussi !
- $x > 0$ donc $x+1 > 1$ d'où $\underbrace{\ln(x+1) > \ln(1) = 0}_{\text{Ln est toujours croissante sur } ]0;+\infty[.}$

Par conséquent, la somme $f'(x)$ est-elle positive car ses deux termes le sont.

Pour tout connaître du signe de $f'(x)$, calculons le nombre dérivé de f en 0 :

$$f'(0) = \frac{0}{0+1} + \ln(0+1) = \frac{0}{1} + \ln(1)$$
$$= 0 + 0 = 0$$

Par conséquent, le tableau de variation de f est celui ci-contre ➔

| x | $-1$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| f | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

**3°)** Dans cette question, il s'agit de décomposer la fonction rationnelle $\frac{x^2}{x+1}$ .

Pour ce faire, deux méthodes : l'officielle par identification et l'officieuse qui suit :

Pour tout réel $x \neq 1$ , nous pouvons écrire :

$$\frac{\overbrace{x^2}^{\text{Combien de fois } x+1?}}{x+1} = \frac{\overbrace{x\times(x+1) - x}^{=x^2}}{x+1} = \frac{x \times \cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} + \frac{\overbrace{-x}^{\text{Combien de fois } x+1?}}{x+1} = x + \frac{\overbrace{(-1)\times(x+1)+1}^{=-x}}{x+1}$$

$$= x + \frac{(-1)\times\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} + \frac{1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

➲ Pour pouvoir calculer l'intégrale I, nous devons connaître une primitive sur $[0;1]$ de la fonction rationnelle $x-1+\dfrac{1}{x+1}$.

D'abord, une primitive sur ℝ de la fonction affine $x-1$ est la fonction $\dfrac{1}{2}\times x^2 - x$.

Ensuite, une primitive sur $]-1;+\infty[$ de la fonction $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln(u)=\ln(x+1)$

où $\left|\begin{array}{l} u(x)=x+1 \\ u'(x)=1\end{array}\right.$ est une fonction dérivable et strictement positive sur $]-1;+\infty[$.

A présent, nous sommes en mesure de calculer l'intégrale I sans trop d'efforts !

$$I=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}.dx=\left[\frac{1}{2}\times x^2-x+\ln(x+1)\right]_0^1=\left(\frac{1}{2}\times 1-1+\ln(2)\right)-\left(\frac{1}{2}\times 0-0+\ln(1)\right)$$

$$=\frac{1}{2}-1+\ln(2)-0=\ln(2)-\frac{1}{2}\underbrace{=\ln(2)-\frac{1}{2}\times\ln(e)=\ln(2)-\ln\left(\sqrt{e}\right)=\ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right)}_{\text{Pour ceux qui aiment les calculs sans intérêt !}}$$

**4°)** L'aire du domaine $\mathcal{A}$ exprimée en unités d'aire est la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x).dx$.

Pour calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 x\times\ln(x+1).dx$, nous allons procéder à une intégration par parties en appliquant la formule :

$$\underbrace{\int_0^1 u(x)\times v'(x).dx=\left[u(x)\times v(x)\right]_0^1-\int_0^1 u'(x)\times v(x).dx}_{\text{Formule d'intégration par parties}}$$

où les fonctions $\left|\begin{array}{l} u(x)=\ln(x+1) \\ u'(x)=\dfrac{1}{x+1}\end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l} v(x)=\dfrac{1}{2}\times x^2 \\ v'(x)=x\end{array}\right.$ sont dérivables sur $[0;1]$ et leurs dérivées sont aussi continues sur cet intervalle.

Faisons notre office !

$$\int_0^1 x\times\ln(x+1).dx=\left[\frac{1}{2}\times x^2\times\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}\times x^2\times\frac{1}{x+1}.dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times 1\times\ln(2)-\frac{1}{2}\times 0\times\ln(1)\right)-\frac{1}{2}\times\int_0^1\frac{x^2}{x+1}.dx$$

$$=\frac{1}{2}\times\ln(2)-0-\frac{1}{2}\times I$$

$$=\frac{1}{2}\times\ln(2)-\frac{1}{2}\times\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

<u>Conclusion :</u> l'aire du domaine $\mathcal{A}$ est d'un quart d'unité d'aire, soit 2,25 centimètres carrés. En effet, une unité d'aire vaut $3\times 3=9$ centimètres carrés.

## Partie B - Etude d'une suite $(u_n)$ définie par une intégrale

**1°)** Pour tout entier naturel non nul n, nous pouvons écrire :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 x^{n+1}\times\ln(x+1).dx-\int_0^1 x^n\times\ln(x+1).dx$$

$$=\underbrace{\int_0^1\left(x^{n+1}\times\ln(x+1)-x^n\times\ln(x+1)\right).dx}_{\text{Linéarité de l'intégrale}}$$

$$=\underbrace{\int_0^1\left(x\times x^n\times\ln(x+1)-x^n\times\ln(x+1)\right).dx}_{\text{Dans chaque terme, on remarque les facteurs communs } x^n \text{ et } \ln(x+1).}=\int_0^1 x^n\times\ln(x+1)\times(x-1).dx$$

Examinons sur l'intervalle $[0;1]$ les signes des trois facteurs intervenant dans l'intégrale :

- La puissance $x^n$ est positive ou nulle.
- Depuis la question A.2, nous savons le logarithme $\ln(x+1)$ est positif ou nul.
- Comme $x\le 1$ alors la différence $x-1$ est négative ou nulle.

Par conséquent, le produit $x^n\times\ln(x+1)\times(x-1)$ est négatif ou nul sur l'intervalle $[0;1]$.

Donc l'intégrale $\int_0^1 x^n\times\ln(x+1)\times(x-1).dx$ est aussi négative ou nulle.

En fait, comme la fonction $x^n \times \ln(x+1) \times (x-1)$ n'est pas toujours nulle, alors l'intégrale en question ne peut être que strictement négative.

Conclusion : pour tout entier naturel non nul n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est négative.

Donc la suite $(u_n)$ est décroissante.

➲ Vu que nous savons déjà qu'elle est décroissante, l'idéal serait que nous découvrions que la suite $(u_n)$ est minorée. Mais minorée par quoi ? Et bien par 0 !

En effet, nous avons vu que les facteurs $x^n$ et $\ln(x+1)$ sont positifs sur l'intervalle $[0;1]$.

Donc la fonction $x^n \times \ln(x+1)$ est positive ou nulle sur $[0;1]$.

Par conséquent, l'intégrale $u_n = \int_0^1 x^n \times \ln(x+1).dx$ est aussi positive (mais pas nulle...)

Conclusion : Etant décroissante et minorée par 0, la suite $(u_n)$ est convergente.

2°) Pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, nous pouvons écrire :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$1 \leq x+1 \leq 2$$

La fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

$$\underbrace{0 = \ln(1) \leq \ln(x+1) \leq \ln(2)}_{\text{L'ordre est conservé}}$$

On multiplie par le facteur $x^n$ qui est positif ou nul sur $[0;1]$.

$$0 \leq x^n \times \ln(x+1) \leq x^n \times \ln(2)$$

Les fonctions 0 ; $x^n \times \ln(x+1)$ et $x^n$ étant continues sur $[0;1]$, nous pouvons intégrer l'inégalité précédente sur cet intervalle. Il vient alors :

$$\int_0^1 0.dx \leq \int_0^1 x^n \times \ln(x+1).dx \leq \int_0^1 x^n \times \ln(2).dx$$

$$\underbrace{\int_0^1 0.dx}_{\text{Cette intégrale est nulle !}} \leq u_n \leq \ln(2) \times \underbrace{\int_0^1 x^n.dx}_{\text{Une primitive de } x^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

$$0 \leq u_n \leq \ln(2) \times \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$0 \leq u_n \leq \ln(2) \times \left(\frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}\right) = \frac{\ln(2)}{n+1}$$

Conclusion : comme la suite $(u_n)$ est comprise entre 0 et la suite $\frac{\ln(2)}{n+1}$ qui elle-même tend vers 0, alors, en application du théorème des gendarmes, la suite $(u_n)$ converge aussi vers 0.

# Le comptoir des aires d'antan - Pondichéry avril 2005

## Le contexte

Cet exercice est une adaptation d'un exercice du sujet de Pondichéry d'avril 2005. Son objet est de prouver que la dérivée de chaque intégrale est la fonction. C'est une sorte de question de cours par étape.

## L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

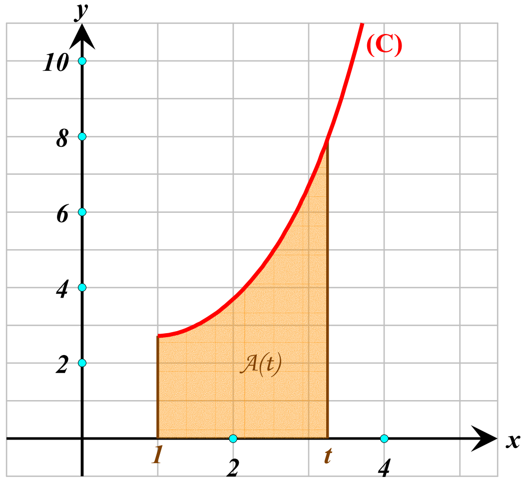
$$f(t)=\frac{e^t}{t}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

**1°)** Pourquoi peut-on affirmer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$ ?

Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Pour tout réel $t\in[1;+\infty[$, on appelle $\mathcal{A}(t)$ l'aire exprimée en unités d'aires du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites verticales d'équation $x=1$ et $x=t$, et situé sous la courbe (C).



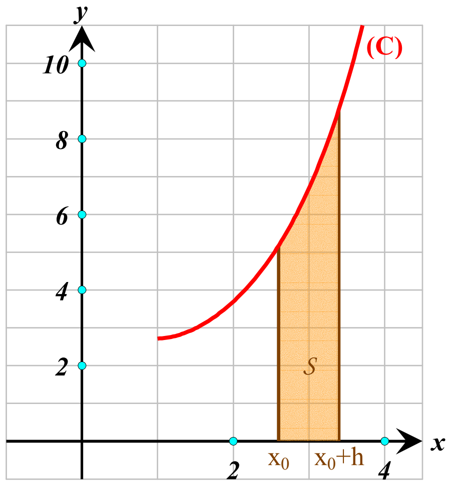

**2°)** Le but des questions qui suivent est de montrer que la fonction $\mathcal{A}(t)$ est une primitive de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Dans ce qui suit, $x_0$ désigne un réel quelconque de l'intervalle $[1;+\infty[$.

Pour certaines questions, on pourra s'appuyer sur les deux figures ci-contre.

**a.** Que vaut $\mathcal{A}(1)$ ?

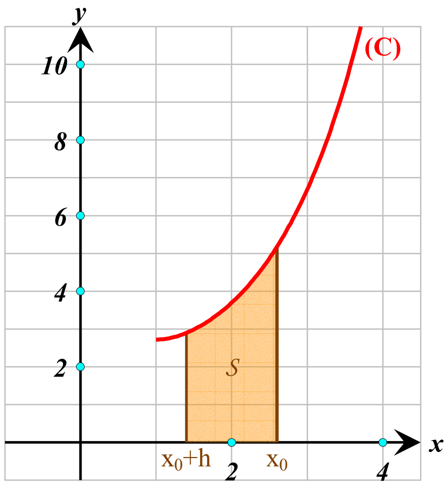
**b.** Soit h un réel strictement positif quelconque.
Sur la figure ci-après, on appelle $\mathcal{S}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x=x_0$ et $x=x_0+h$.




Etablir l'encadrement $f(x_0)\le\dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h}\le f(x_0+h)$.

En déduire que la fonction $\mathcal{A}(t)$ est dérivable à droite de $x_0$.

**c.** En utilisant la figure ci-dessous où h est un réel négatif tel que $x_0+h\in[1;+\infty[$, démontrer que la fonction $\mathcal{A}(t)$ est dérivable à gauche de $x_0$.




**d.** Conclure.

## *Le corrigé*

**1°)** Comme les fonctions $\left|\begin{array}{l}u(t)=e^t\\ u'(t)=e^t\end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{l}v(t)=t\\ v'(t)=1\end{array}\right.$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que le dénominateur $v(t)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, alors leur quotient $f(t)=\dfrac{u(t)}{v(t)}$ est dérivable donc continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$. Qui peut le plus, peut le moins !

Pour tout réel $t\in[1;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f'(t)=\frac{u'(t)\times v(t)-v'(t)\times u(t)}{(v(t))^2}$$

$$=\frac{e^t\times t-1\times e^t}{t^2}=\frac{e^t\times(t-1)}{t^2}$$

Tous les facteurs apparaissant dans ce quotient sont positifs sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

De plus :

$$f(1)=\frac{e^1}{1}=e \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$$

Finalement, le tableau de variation de f est celui-ci contre ➔

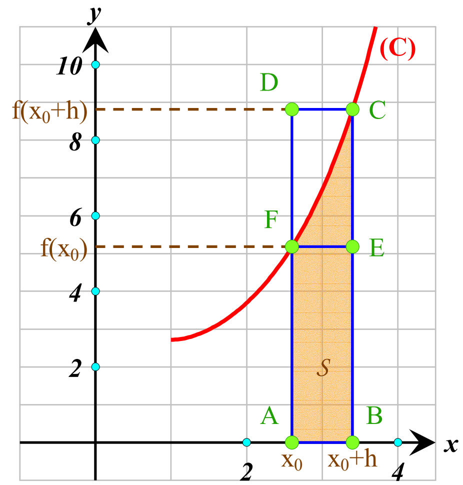
| $t$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $e^t$ | $+$ | |
| $t-1$ | $0$ $+$ | |
| $t^2$ | $+$ | |
| $f'(t)$ | $+$ | |
| $f$ | $e$ ↗ | $+\infty$ |

**2.a)** $\mathcal{A}(1)$ est l'aire d'un segment. Par conséquent, $\mathcal{A}(1)=0$.

**2.b)** D'abord, le domaine $\mathcal{S}$ correspond au domaine $\mathcal{A}(x_0+h)$ privé du domaine $\mathcal{A}(x_0)$.

Par conséquent :

$$\text{Aire}(\mathcal{S})=\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)$$




Ensuite, le domaine $\mathcal{S}$ est inclus dans le grand rectangle ABCD $\left|\begin{array}{l}\text{base}=(x_0+h)-x_0=h\\ \text{hauteur}=f(x_0+h)\end{array}\right.$

Par conséquent :

$$\text{Aire}(\mathcal{S})\leq\text{Aire(ABCD)}=h\times f(x_0+h)$$

Enfin, le domaine $\mathcal{S}$ contient le petit rectangle ABEF $\left|\begin{array}{l}\text{base}=(x_0+h)-x_0=h\\ \text{hauteur}=f(x_0)\end{array}\right.$

Par conséquent :

$$\text{Aire(ABEF)}=h\times f(x_0)\leq\text{Aire}(\mathcal{S})$$

Récapitulons ce que nous avons trouvé !

$$f(x_0)\times h\leq\text{Aire}(\mathcal{S})\leq f(x_0+h)\times h \iff \underbrace{f(x_0)\leq\frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h}\leq f(x_0+h)}_{\text{On a divisé l'inégalité par le réel positif h.}}$$

➲ Quand le réel positif h tend vers 0 par la droite, $x_0+h$ tend vers $x_0$ (par la droite).

La fonction f étant continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$, elle l'est en particulier en $x_0$.

Donc $f(x_0+h)$ tend vers $f(x_0)$.

Ainsi lorsque h tend vers 0 par la droite, le quotient $\dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h}$ est coincé entre $f(x_0)$ et une quantité qui y va. En application du théorème des gendarmes, il vient :

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h}=f(x_0)$$

<u>Conclusion :</u> la fonction $\mathcal{A}(t)$ est dérivable à droite de $x_0$ et le nombre dérivé de $\mathcal{A}(t)$ à droite de $x_0$ est $f(x_0)$.

**2.c)** Soit h un réel négatif tel que la somme $x_0 + h$ appartienne à l'intervalle $[1;+\infty[$.

Cette fois-ci, le domaine $\mathcal{S}$ correspond au domaine $\mathcal{A}(x_0)$ privé du domaine $\mathcal{A}(x_0+h)$.

Par conséquent :

$$\text{Aire}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x_0+h)$$

Ensuite, le domaine $\mathcal{S}$ est inclus dans le grand rectangle ABEF $\left|\begin{array}{l}\text{base} = x_0 - (x_0+h) - = -h \\ \text{hauteur} = f(x_0)\end{array}\right.$

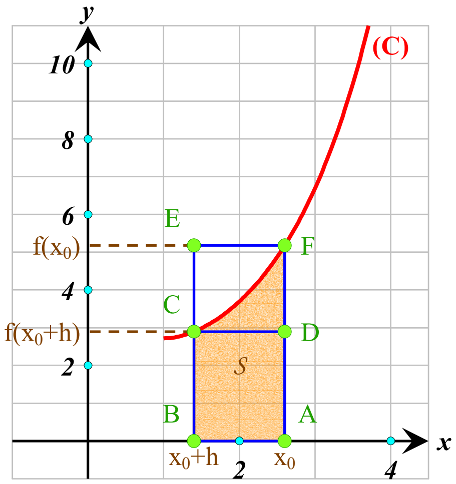
Par conséquent :

$$\text{Aire}(\mathcal{S}) \leq \text{Aire(ABEF)} = -h \times f(x_0)$$

Enfin, le domaine $\mathcal{S}$ contient le petit rectangle ABCD $\left|\begin{array}{l}\text{base} = x_0 - (x_0+h) = -h \\ \text{hauteur} = f(x_0+h)\end{array}\right.$

Par conséquent :

$$\text{Aire}(\mathcal{S}) \geq \text{Aire(ABCD)} = -h \times f(x_0+h)$$




Ainsi, nous venons d'établir :

$$f(x_0+h)\times(-h) \leq \text{Aire}(\mathcal{S}) \leq f(x_0)\times(-h) \Leftrightarrow \underbrace{f(x_0+h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0)-\mathcal{A}(x_0+h)}{-h} \leq f(x_0)}_{\text{On a divisé l'inégalité par le réel positif } (-h).}$$

$$\Leftrightarrow f(x_0+h) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

➲ Quand le réel négatif h tend vers 0 par la gauche, $x_0+h$ tend vers $x_0$ (par la gauche). Comme la fonction f est continue en $x_0$, alors $f(x_0+h)$ tend vers $f(x_0)$.

Ainsi lorsque h tend vers 0 par la gauche, le quotient $\dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h}$ est encore coincé entre $f(x_0)$ et une quantité qui s'y rend. Le théorème des gendarmes s'applique et :

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$$

<u>Conclusion :</u> la fonction $\mathcal{A}(t)$ est aussi dérivable à gauche de $x_0$ et le nombre dérivé de $\mathcal{A}(t)$ à gauche de $x_0$ est encore $f(x_0)$.

**2.d)** Comme la fonction $\mathcal{A}(t)$ est dérivable à gauche et à droite de $x_0$, et que ses nombres dérivés à gauche et à droite de $x_0$ sont égaux, alors nous pouvons conclure que la fonction $\mathcal{A}(t)$ est dérivable en $x_0$ et que $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$.

Et cela quelque soit le réel $x_0 \in [1;+\infty[$.

<u>Conclusion :</u> comme f est la dérivée de la fonction $\mathcal{A}(t)$ sur l'intervalle $[1;+\infty[$, alors une primitive de la fonction f sur $[1;+\infty[$ est la fonction $\mathcal{A}(t)$.

# Logarithme népérien

## *Etude d'une fonction logarithmique*

### *Le contexte*

Cet exercice donné en devoir à la maison aborde l'étude d'une fonction définie avec un logarithme népérien. Il fait appel à beaucoup de points développés dans le chapitre éponyme.

### *L'énoncé*

La fonction f est définie par :

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer les ensembles de définition $D_f$ et de dérivabilité de la fonction f.

b) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition $D_f$.

c) Etudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

### *Le corrigé*

a) Examinons les deux termes composant la différence $f(x)$.

- La fonction x est définie et dérivable sur ℝ.
- Comme la fonction $\left| \begin{array}{l} u(x) = x^2+1 \\ u'(x) = 2.x \end{array} \right.$ est dérivable et (surtout) strictement positive (car supérieure ou égale à 1) sur ℝ, alors sa composée logarithmique $\ln(u)$ est définie et dérivable sur ℝ. On a alors pour tout réel x :

$$\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' = \left(\ln(u)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2.x}{x^2+1}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction f est la différence de deux fonctions définies et dérivables sur ℝ. Il en va de même pour elle. Nous calculerons sa dérivée à l'occasion de la question c.

b) L'ensemble de définition de la fonction f étant $]-\infty;+\infty[$, deux limites sont à établir.

➲ ***La limite de f en -∞.***

Lorsque x tend vers $-\infty$, la quantité $u(x) = x^2+1$ s'en va vers $+\infty$.

Donc son logarithme $\ln\left(x^2+1\right)$ tend vers $+\infty$.

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x - \ln\left(x^2+1\right) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$ .

➲ ***La limite de f en +∞.***

Lorsque x tend vers $+\infty$, le terme $\ln\left(x^2+1\right)$ s'en va aussi vers $+\infty$.

Donc la différence $f(x)$ est une forme indéterminée du type $(+\infty)-(+\infty)$.

Une indétermination due à une opposition entre x et un logarithme.

Pour lever celle-ci dernière, nous allons modifier l'écriture de $f(x)$ et chercher à faire apparaître une quantité dont nous connaissons la limite en $+\infty$ : $\dfrac{\ln(x)}{x}$

Pour tout réel strictement positif x, nous pouvons écrire :

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right) = \underbrace{x - \ln\left(x^2 \times \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - \left[\ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}_{\text{La première étape est de faire apparaître } \ln(x).}$$

$$= x - 2\times\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x\times\left[1-2\times\frac{\ln(x)}{x}\right] - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Voyons si cette écriture nous permet de conclure. Quand x tend vers $+\infty$ :

- $1+\dfrac{1}{x^2}$ tend vers $1+0^+ = 1$.

  Donc son logarithme $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ tend vers $\ln(1) = 0$.

- D'après un résultat du cours, le quotient $\dfrac{\ln(x)}{x}$ tend vers 0.

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\times\left[1-2\times\dfrac{\ln(x)}{x}\right] - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$= (+\infty)\times[1-2\times 0] - 0 = (+\infty)\times 1 = +\infty$$

c) Lors de la question a, nous avons vu que la fonction f était dérivable sur ℝ. Pour connaître ses variations, calculer sa dérivée.

Pour tout réel x, il vient :

$$f'(x) = 1 - \frac{2.x}{x^2+1} = \frac{1\times\left(x^2+1\right)}{x^2+1} - \frac{2.x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-2.x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

Le numérateur $(x-1)^2$ est un carré qui est positif quand il n'est pas nul en 1.

Le dénominateur $x^2+1$ est lui toujours positif. Déjà vu à la question a !

Par conséquent, le tableau de variation de f est celui ci-contre ➔

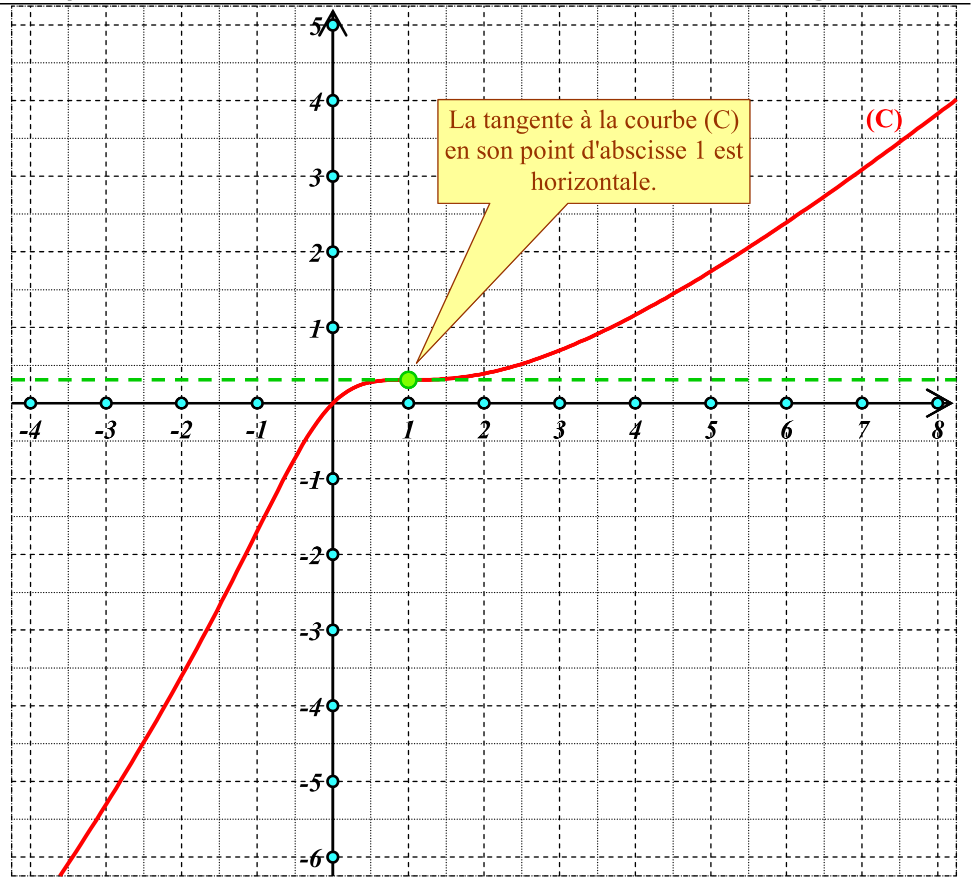
| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)^2$ | | + | 0 | + | |
| $x^2+1$ | | + | \| | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $f(1)$ | ↗ | $+\infty$ |

Pour être complet, calculons l'image de 1 par f.

$$f(1) = 1 - \ln\left(1^2+1\right) = 1 - \ln(2)$$

<u>Précision :</u> la fonction f est comme la fonction cube en 0 : même si sa dérivée s'annule en 1 (d'où une tangente horizontale), on peut affirmer que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$ car sa dérivée est strictement positive ailleurs.

La courbe (C) représentant la fonction f est tracée ci-contre ➔



# Etude d'une seconde fonction logarithmique

## Le contexte

Cet exercice fut aussi donné en devoir à la maison. C'est encore une étude de fonction définie à partir d'un logarithme. Il y est également questions de limites, de variations...

## L'énoncé

La fonction $\varphi$ est définie par :

$$\varphi(x) = 2.x + 3 + \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer l'intervalle de définition $D_\varphi$ de la fonction $\varphi$ dont l'une des bornes est $+\infty$.

b) Déterminer les limites de $\varphi$ aux bornes de son ensemble de définition $D_\varphi$.

c) Démontrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique $\Delta$ dont on donnera l'équation réduite.
Etudier la position relative de la courbe (C) vis-à-vis de son asymptote $\Delta$.

d) Etudier les variations de la fonction $\varphi$ sur son intervalle de définition.

e) Sur un même graphique, tracer la courbe (C) accompagnée de toutes ses asymptotes.

## Le corrigé

a) Examinons les deux termes composant la somme $\varphi(x)$ :

- La fonction $2.x+3$ est définie (et dérivable) sur $\mathbb{R}$.
- Le logarithme du quotient $u(x) = \frac{x-3}{x+2}$ n'existe que si et seulement si $u(x)$ est strictement positif. Dressons son tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $u(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$u(x)$ n'est strictement positif que sur l'ensemble $]-\infty;-2[\cup]3;+\infty[$.

Son logarithme $\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$ ne peut être défini sur ces deux intervalles.

<u>Conclusion :</u> l'ensemble de définition recherché de $\varphi$ est l'intervalle $D_\varphi = ]3;+\infty[$. Cela dit, la fonction $\varphi$ est aussi définie sur l'autre intervalle $]-\infty;-2[$.

b) L'ensemble de définition de $\varphi$ étant $D_\varphi = ]3;+\infty[$, deux limites sont à étudier :

➲ ***La limite à droite de 3.***
Quand x tend vers 3 par la droite :

- La fonction <u>continue</u> $2.x+3$ tend vers $2\times3+3=9$.

> **L'importance de la continuité dans cette limite**
> Si la fonction $f(x) = 2.x+3$ n'était pas continue en 3, alors nous n'aurions pas :
> $$\lim_{\substack{x\to3\\x\neq3}} f(x) = f(3) = 9 \leftarrow \text{C'est la définition de la continuité !}$$

- Le quotient $u(x) = \frac{x-3}{x+2}$ tend vers $\frac{0^+}{3+2} = 0^+$. *(Voir son tableau de signe).*

  Donc son logarithme $\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$ tend vers $-\infty$.

<u>Conclusion :</u> $\lim_{x\to3^+} \varphi(x) = \lim_{x\to3^+} 2.x+3+\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = 9+(-\infty) = -\infty$.
Par conséquent, la droite verticale d'équation $x=3$ est une asymptote à la courbe (C).

➲ ***La limite de f en +∞.***
Quand x tend vers 3 par la droite :

- La fonction $2.x+3$ tend vers $+\infty$.
- Le quotient $u(x) = \frac{x-3}{x+2} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \times \frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}}$ tend vers $\frac{1-0^+}{1+0^+} = \frac{1}{1} = 1$.

  Donc son logarithme $\ln(u(x))$ tend vers $\ln(1)=0$ car ln est continue en 1.

<u>Conclusion :</u> $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} 2.x+3+\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = (+\infty)+0 = +\infty$.

**Et avant -2 ? Quid des limites de φ ?**

➲ Quand x tend vers $-2$ par la gauche, le quotient $u(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ tend vers $\dfrac{-5}{0^-}=+\infty$.

Donc son logarithme $\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$ tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^-}\varphi(x)=-4+3+(+\infty)=+\infty$

➲ Quand x tend vers $-\infty$, le quotient $u(x)=\dfrac{1-\cancel{3}/x}{1+\cancel{2}/x}$ tend vers 1...comme en $+\infty$.

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2.x+3+\ln(u(x))=(-\infty)+3+0=-\infty$

c) Lorsque nous avons établi la limite de φ en $+\infty$ lors de la question précédente, nous avons mis en évidence l'asymptote oblique. Pour tout réel $x\in]3;+\infty[$, nous avons :

$$\varphi(x)-(2.x+3)=2.x+3+\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)-(2.x+3)=\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$$

<u>Conclusion :</u> comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)-(2.x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)=0$, alors la droite Δ d'équation réduite $y=2.x+3$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

➲ Pour déterminer la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote Δ, nous allons étudier le signe de leur différence d'ordonnées (pour une même abscisse x) :

$$(C)-\Delta=\varphi(x)-(2.x+3)=\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$$

Le signe du logarithme $\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$ dépend de la position de la quantité $\dfrac{x-3}{x+2}$ par rapport à 1. Pour la connaître, intéressons-nous au signe de leur différence :

$$\frac{x-3}{x+2}-1=\frac{x-3}{x+2}-\frac{x+2}{x+2}=\frac{(x-3)-(x+2)}{x+2}=\frac{-5}{x+2}$$

Or sur l'intervalle $]3;+\infty[$, le dénominateur $x+2$ est positif.

Pour tout réel $x\in]3;+\infty[$, il vient alors :

La différence $\dfrac{x-3}{x+2}-1=\dfrac{\ominus}{\oplus}$ est négative $\Rightarrow\ \dfrac{x-3}{x+2}<1\ \Rightarrow\ \underbrace{\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)<\ln(1)=0}_{}$

Car ln est croissante sur $]0;+\infty[$.
Donc cette fonction conserve l'ordre.

<u>Conclusion :</u> comme leur différence d'ordonnées est négative sur l'intervalle $]3;+\infty[$, alors la courbe (C) est au-dessous de son asymptote Δ sur cet intervalle.

**Et avant -2 ? (C) admet-elle une asymptote oblique au voisinage de -∞ ?**

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)-(2.x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)=0$, alors la droite $\Delta: y=2.x+3$ est aussi une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

Par contre, comme la différence $\dfrac{x-3}{x+2}-1=\dfrac{-5}{x+2}$ est positive sur $]-\infty;-2[$, alors la courbe (C) est au-dessus de son asymptote Δ sur cet intervalle.

d) D'abord, $u(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur ℝ. Comme le dénominateur $x+2$ ne s'annule pas sur $]3;+\infty[$, alors u est dérivable sur cet intervalle.

Pour tout réel $x\in]3;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$u'(x)=\frac{1\times(x+2)-1\times(x-3)}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x+3}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$$

Ensuite, comme u est dérivable et strictement positive sur $]3;+\infty[$ (voir son tableau de signe), alors son logarithme $\ln(u)$ est dérivable sur cet intervalle. Nous avons alors :

$$(\ln(u))'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\dfrac{5}{(x+2)^2}}{\dfrac{x-3}{x+2}}=\frac{5}{(x+2)^{\cancel{2}}}\times\frac{\cancel{x+2}}{x-3}=\frac{5}{(x+2)\times(x-3)}$$

Enfin, la fonction $2.x+3$ est dérivable ℝ. Donc la somme $\varphi(x)=(2.x+3)+\ln(u(x))$ est dérivable sur l'intervalle $]3;+\infty[$. Pour tout réel $x\in]3;+\infty[$, il vient :

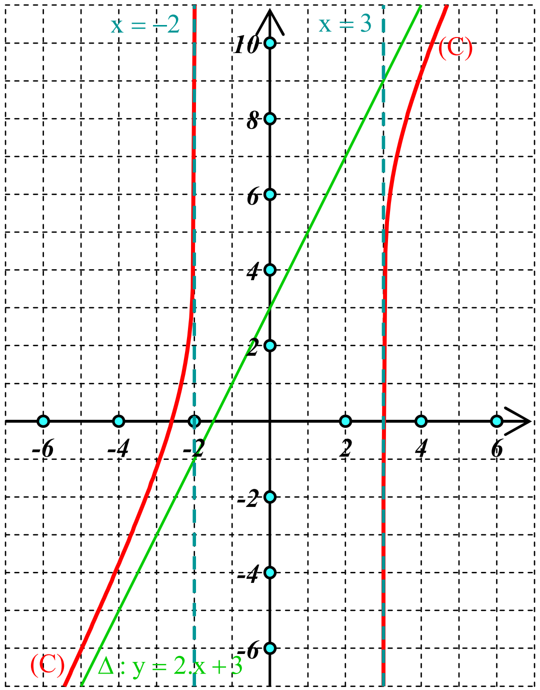
$$\varphi'(x)=2+\frac{5}{(x+2)\times(x-3)}$$

Et là, point besoin d'aller plus loin ! En effet, sur l'intervalle $]3;+\infty[$, les facteurs $x+2$ et $x-3$ sont du même signe : positifs. Donc leur produit et le quotient $\dfrac{5}{(x+2)\times(x-3)}$ sont positifs.

<u>Conclusion :</u> Comme sur l'intervalle $]3;+\infty[$, la dérivée $\varphi'(x)$ est la somme de deux quantités strictement positives, alors elle est elle aussi strictement positive.
Donc la fonction φ est strictement croissante sur l'intervalle $]3;+\infty[$.

**Et avant -2 ? Quid des variations de φ ?**
Les facteurs $x+2$ et $x-3$ étant tous deux négatifs sur $]-\infty;-2[$, la dérivée $\varphi'(x)$ est là encore positive. Donc la fonction φ est croissante avant $-2$.

e) La courbe (C) représentant la fonction φ flanquée de ses trois asymptotes est tracée ci-dessous.



# Affinités logarithmiques : étude d'une troisième fonction logarithmique

## Le contexte

Voilà un exercice donné en devoir surveillé qui ressemble furieusement au précédent. Au menu : limites, asymptotes et dérivation.

## L'énoncé

La fonction f est définie sur l'ensemble $D_f = ]-\infty;2[ \cup ]4;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Pourquoi la fonction f ne peut-elle pas être définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

b) L'affirmation suivante est-elle vraie ? On justifiera sa réponse.

"Pour tout réel $x \in ]-\infty;2[ \cup ]4;+\infty[$, $\ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right) = \ln(x-2) - \ln(x-4)$"

c) Démontrer que la courbe (C) admet aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$ une asymptote oblique $\Delta$ dont on précisera l'équation réduite.
Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote $\Delta$.

d) Déterminer toutes les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
On précisera quelles sont les conséquences graphiques de ces limites sur la courbe (C).

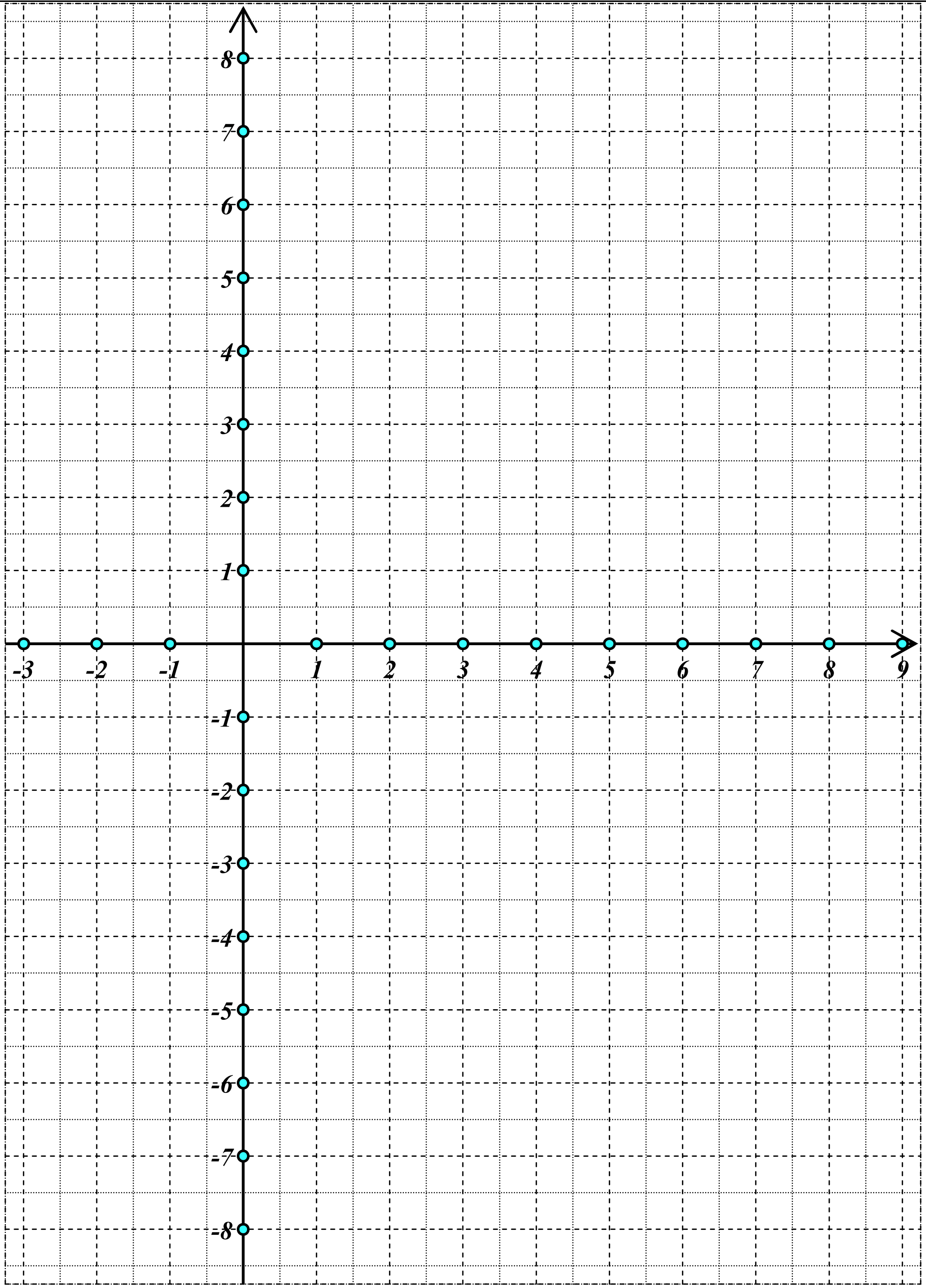
e) Après avoir justifié que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition, démontrer que pour tout réel $x \in ]-\infty;2[ \cup ]4;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6.x + 6}{(x-2)\times(x-4)}$$

En déduire les variations de la fonction f sur $D_f$. On calculera les valeurs exactes des extrema locaux.

f) Démontrer qu'aucune tangente à la courbe (C) n'est parallèle à l'asymptote $\Delta$.

g) Sur le graphique ci-contre, tracer la courbe (C) ainsi que toutes les asymptotes rencontrées au cours de l'exercice.



## Le corrigé

a) Examinons les deux termes composants la somme $f(x)$ :

- D'abord, la fonction $x-2$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc là, pas de problème !
- Par contre, pour que le logarithme $\ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)$ existe, il faut et il suffit que le quotient $u(x)=\frac{x-2}{x-4}$ soit positif. Dressons son tableau de signe.

| x | $-\infty$ | | 2 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x - 2 | | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| x - 4 | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| u(x) | | $+$ | 0 | $-$ | \|\| | $+$ | |

Le quotient $u(x)$ est (seulement) positif sur les intervalles $]-\infty;2[$ et $]4;+\infty[$.
Leur réunion donne l'ensemble de définition de f.

b) Le logarithme népérien transforme les quotients en différences. C'est la célèbre propriété : pour tous réels <u>positifs</u> a et b, $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.

Cette propriété ne s'applique donc pas aux acteurs $a=x-2$ et $b=x-4$ qui sont tous deux négatifs sur l'intervalle $]-\infty;2[$

Donc l'affirmation "Pour tout réel $x\in\mathbb{R}\backslash[2;4]$, $\ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)=\ln(x-2)-\ln(x-4)$" est fausse. Par contre, si l'on se restreint à l'intervalle $]4;+\infty[$, alors elle est vraie.
Comme quoi, toute vérité est relative aux gens auxquels elle s'applique !

c) Déterminons les limites aux infinis du quotient $u(x)=\frac{x-2}{x-4}$.

Pour tout réel non nul $x\in]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$u(x)=\frac{x-2}{x-4}=\frac{\cancel{x}\times\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\times\left(1-\frac{4}{x}\right)}=\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x}}$$

Par conséquent :

- Quand x tend vers $+\infty$, le quotient $u(x)=\frac{1-2/x}{1-4/x}$ tend vers $\frac{1-0^+}{1-0^+}=\frac{1}{1}=1$.

  Donc, comme ln est une fonction continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors le logarithme $\ln(u(x))=\ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)$ tend vers $\ln(1)=0$.

- Quand x tend vers $-\infty$, le quotient $u(x)$ tend aussi vers $\frac{1-0^-}{1-0^-}=\frac{1}{1}=1$.

  Donc, comme précédemment, son logarithme $\ln(u(x))$ tend vers $\ln(1)=0$.

On appelle $\Delta$ la droite d'équation $y=x-2$.
La différence d'ordonnées entre la courbe (C) et la droite $\Delta$ pour une même abscisse est donnée par :

$$f(x)-(x-2)=x-2+\ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)-x+2=\ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)=0$, alors la droite $\Delta$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

De même, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)=0$, alors la droite $\Delta$ est aussi une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

➲ Pour connaître la position relative de la courbe (C) par rapport à son asymptote $\Delta$, nous allons étudier le signe de leur différence d'ordonnées $f(x)-(x-2)=\ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)$.

Pour ce faire, nous devons préalablement déterminer la position relative du quotient $\frac{x-2}{x-4}$ vis-à-vis de 1. Regardons le signe de leur différence !
Pour tout réel $x\in]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$\frac{x-2}{x-4}-1=\frac{x-2}{x-4}-\frac{1\times(x-4)}{x-4}$$
$$=\frac{x-2-(x-4)}{x-4}=\frac{2}{x-4}$$

Là, deux cas sont à envisager :

- Sur l'intervalle $]-\infty;2[$ , le facteur $x-4$ est négatif donc le quotient $\dfrac{2}{x-4}$ aussi !

  Donc $\dfrac{x-2}{x-4}-1<0$ d'où $\dfrac{x-2}{x-4}<1$ d'où $\underbrace{\ln\left(\dfrac{x-2}{x-4}\right)<\ln(1)=0}_{\text{Car la fonction ln est croissante sur }]0;+\infty[\text{ donc elle conserve l'ordre}}$

  Comme la différence d'ordonnées $(C)-\Delta=f(x)-(x-2)=\ln\left(\dfrac{x-2}{x-4}\right)$ est négative sur l'intervalle $]-\infty;2[$ , alors la courbe (C) est au-dessous de son asymptote $\Delta$.

- Sur l'intervalle $]4;+\infty[$ , le facteur $x-4$ est positif comme le quotient $\dfrac{2}{x-4}$.

  Donc $\dfrac{x-2}{x-4}-1>0$ d'où $\dfrac{x-2}{x-4}>1$ d'où $\underbrace{\ln\left(\dfrac{x-2}{x-4}\right)>\ln(1)=0}_{\text{Car la fonction ln est croissante sur }]0;+\infty[\text{ donc elle conserve l'ordre}}$

  La différence d'ordonnées $(C)-\Delta=\ln\left(\dfrac{x-2}{x-4}\right)$ étant positive sur $]4;+\infty[$ , la courbe (C) est au-dessus de son asymptote $\Delta$ sur cet intervalle.

d) L'ensemble de définition de f qu'est $]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$ comporte quatre bornes. Il y a autant de limites à chercher. Mais certaines ont déjà été trouvées...

➲ ***Les deux limites aux infinis***

Aux infinis, la courbe (C) (ou plutôt la fonction f) a les mêmes limites que son asymptote $\Delta$ d'équation réduite $y=x-2$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-2=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-2=+\infty$$

➲ ***La limite à gauche de 2***

Quand x tend vers 2 par la gauche, le quotient $\dfrac{x-2}{x-4}$ tend vers $\dfrac{0^-}{-2}=0^+$ *(Voir son tableau de signe question 1.a))*

Donc son logarithme $\ln\left(\dfrac{x-2}{x-4}\right)$ plonge vers $-\infty$ .

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-} x-2+\ln\left(\dfrac{x-2}{x-4}\right)=2-2+(-\infty)=-\infty$

Par conséquent, la droite verticale d'équation $x=2$ est une asymptote à la courbe (C).

➲ ***La limite à droite de 4***

Quand x tend vers 4 par la droite, le quotient $\dfrac{x-2}{x-4}$ tend vers $\dfrac{2}{0^+}=+\infty$ .

Donc son logarithme népérien s'envole vers $+\infty$ .

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to4^+} x-2+\ln\left(\dfrac{x-2}{x-4}\right)=4-2+(+\infty)=+\infty$ .

Donc la droite verticale d'équation $x=4$ est une asymptote à la courbe (C).

e) Le calcul de la dérivée de f va se faire en trois étapes.

D'abord, comme les fonctions $x-2$ et $x-4$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et que $x-4$ ne s'annule pas sur $]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$ , alors leur quotient $u(x)=\dfrac{x-2}{x-4}$ est dérivable sur cet ensemble. Calculons sa dérivée :

$$u'(x)=\frac{1\times(x-4)-1\times(x-2)}{(x-4)^2}=\frac{x-4-x+2}{(x-4)^2}=\frac{-2}{(x-4)^2}$$

Ensuite, comme la fonction u est dérivable et strictement positive sur $]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$ , alors son logarithme $\ln(u(x))$ est dérivable sur cet ensemble. Sa dérivée est donnée par :

$$(\ln(u(x)))'=\frac{u'(x)}{u(x)}=\underbrace{\frac{\frac{-2}{(x-4)^2}}{\frac{x-2}{x-4}}=\frac{-2}{(x-4)^{\cancel{2}}}\times\frac{\cancel{x-4}}{x-2}}_{\text{Diviser, c'est multiplier par l'inverse}}=\frac{-2}{(x-4)\times(x-2)}$$

Enfin, comme la fonction $x-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa somme avec $\ln(u)$ qui est la fonction f, est dérivable sur la réunion d'intervalles $]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$ . Nous avons :

$$f'(x)=1+\frac{-2}{(x-2)\times(x-4)}=\frac{(x-2)\times(x-4)}{(x-2)\times(x-4)}+\frac{-2}{(x-2)\times(x-4)}$$
$$=\frac{x^2-2.x-4.x+8-2}{(x-2)\times(x-4)}=\frac{x^2-6.x+6}{(x-2)\times(x-4)}$$

**La chose à ne pas faire pour calculer la dérivée de la fonction f !**

On pourrait être tenté de calculer la dérivée de f à partir de son expression erronée $f(x)=x-2+\ln(x-2)-\ln(x-4)$ dont la dérivée est $f'(x)=1+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}$ .

C'est plus certes simple ! Mais la question 1.b nous a appris que cette expression n'avait de sens que sur l'intervalle $]4;+\infty[$ alors que nous travaillons sur $]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$ .

➲ Pour obtenir les variations de la fonction f, déterminons le signe de sa dérivée $f'(x)$.
Le signe des deux facteurs $x-2$ et $x-4$ du dénominateur nous est connu.
Pour connaître celui du numérateur $N(x)=x^2-6.x+6$ qui est une fonction du second degré, calculons son discriminant.

$$\Delta_{N(x)}=(-6)^2-4\times1\times6=36-24=12=4\times3=\left(2.\sqrt{3}\right)^2$$

Comme son discriminant est strictement positif, la forme du second degré $N(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-(-6)-2.\sqrt{3}}{2\times1}=\frac{6-2.\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3} \qquad x_2=\frac{-(-6)+2.\sqrt{3}}{2\times1}=\frac{6+2.\sqrt{3}}{2}=3+\sqrt{3}$$

Et nous pouvons aussi affirmer :

- $N(x)$ est du signe de son coefficient dominant 1 (le coefficient en $x^2$) à l'extérieur de ses racines. Donc $N(x)$ est positif sur $\left]-\infty;3-\sqrt{3}\right[\cup\left]3+\sqrt{3};+\infty\right[$.
- $N(x)$ est du signe contraire de son coefficient dominant 1 à l'intérieur de ses racines. Donc $N(x)$ est négatif sur l'intervalle $\left]3-\sqrt{3};3+\sqrt{3}\right[$.

A présent, nous pouvons dresser le tableau de signe de $f'(x)$, puis nous en déduirons celui de variation de f.

| $x$ | $-\infty$ | | $3-\sqrt{3}$ | | $2$ | | $4$ | | $3+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-6.x+6$ | | + | 0 | − | | − | | − | 0 | + | |
| $x-2$ | | − | | − | 0 | + | | + | | + | |
| $x-4$ | | − | | − | | − | 0 | + | | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | | La fonction f n'est pas définie sur l'intervalle $[2;4]$. | | − | 0 | + | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $f\left(3-\sqrt{3}\right)$ | ↘ | $-\infty$ | | $+\infty$ | ↘ | $f\left(3+\sqrt{3}\right)$ | ↗ | $+\infty$ |

Et pour que la fête soit complète, calculons les deux extrema locaux de f, c'est-à-dire les images par f de $3-\sqrt{3}$ et $3+\sqrt{3}$.

- $$f\left(3-\sqrt{3}\right)=\left(3-\sqrt{3}\right)-2+\ln\left(\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)-2}{\left(3-\sqrt{3}\right)-4}\right)=1-\sqrt{3}+\ln\left(\frac{1-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}}\right)$$
$$=1-\sqrt{3}+\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\right)=1-\sqrt{3}+\ln\left(\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\times\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\times\left(\sqrt{3}-1\right)}\right)$$
$$=1-\sqrt{3}+\ln\left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\times\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}\right)=1-\sqrt{3}+\ln\left(\frac{3-2\times\sqrt{3}+1}{3-1}\right)$$
$$=1-\sqrt{3}+\ln\left(\frac{4-2\times\sqrt{3}}{2}\right)=1-\sqrt{3}+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)\approx-2{,}05$$

- $$f\left(3+\sqrt{3}\right)=\left(3+\sqrt{3}\right)-2+\ln\left(\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)-2}{\left(3+\sqrt{3}\right)-4}\right)=1+\sqrt{3}+\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$
$$=1+\sqrt{3}+\ln\left(\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\times\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\times\left(\sqrt{3}+1\right)}\right)=1+\sqrt{3}+\ln\left(\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}\right)$$
$$=1+\sqrt{3}+\ln\left(\frac{4+2\times\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\approx4{,}05$$

Chacun comprendra qu'il est difficile de faire tenir de telles valeurs dans notre petit tableau de variation...

f) Deux droites obliques ou horizontales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.
Le coefficient directeur de la droite Δ d'équation réduite $y = 1 \times x - 2$ est 1.
Le coefficient directeur d'une tangente $T_x$ à la courbe (C) en son point d'abscisse x est le nombre dérivé de f en x à savoir $f'(x)$.
Par conséquent, nous avons l'équivalence :

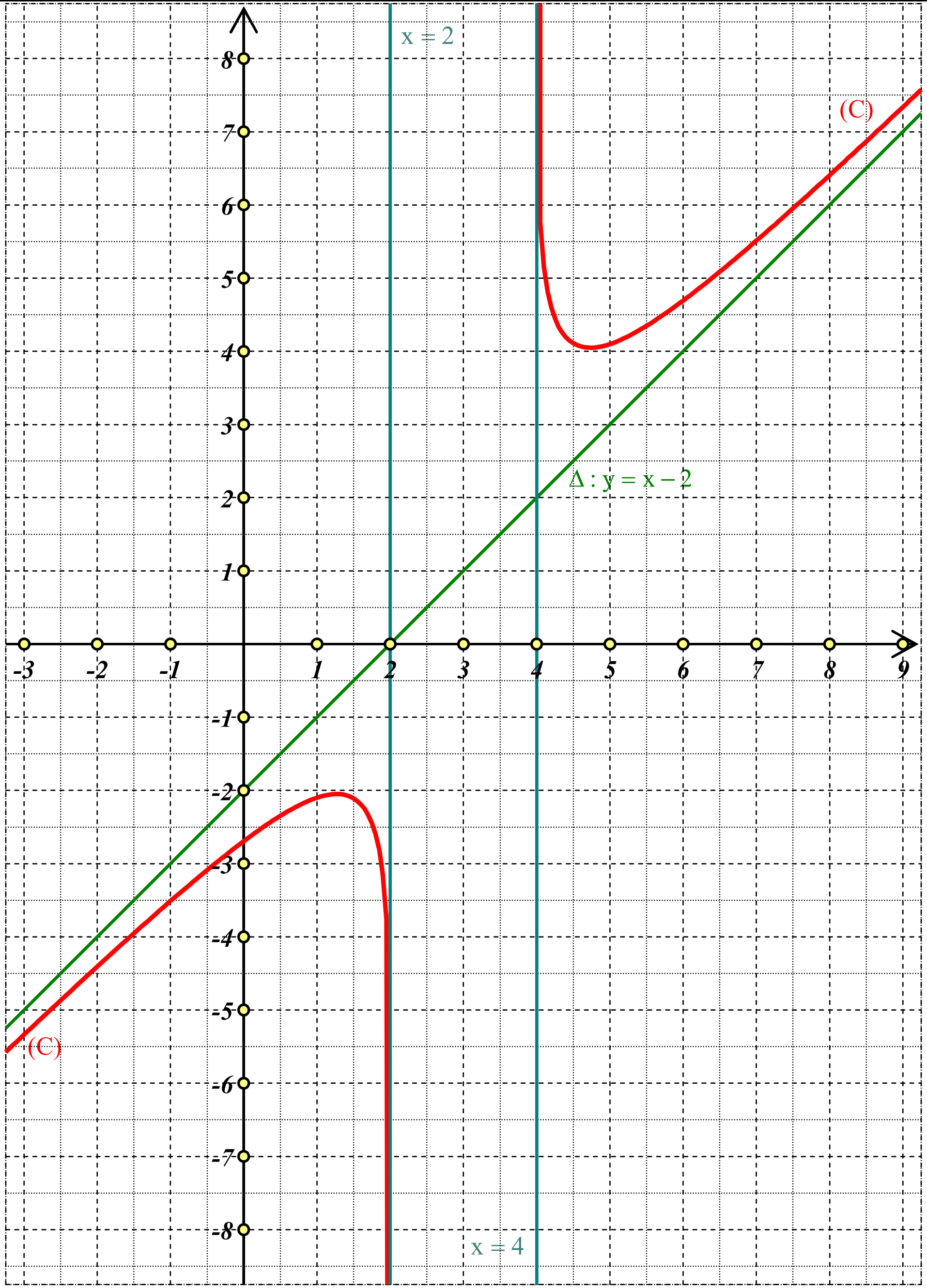
$$T_x \text{ et } \Delta \text{ sont parallèles} \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow \overbrace{\frac{x^2 - 6.x + 6}{(x-2)\times(x-4)} = 1}^{\text{Cette égalité n'a de sens que dans l'ensemble de défintion de f c'est-à-dire que dans } ]-\infty;2[\cup]4;+\infty[}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cancel{(x-2)\times(x-4)} \times \frac{x^2 - 6.x + 6}{\cancel{(x-2)\times(x-4)}} = 1 \times (x-2)\times(x-4)}_{\text{Comme on travaille dans l'ensemble } ]-\infty;2[\cup]4;+\infty[\text{, on peut multiplier l'égalité par les facteurs } x-2 \text{ et } x-4 \text{ qui y sont non nuls.}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6.x + 6 = x^2 - 4.x - 2.x + 8 \Leftrightarrow \underbrace{6 = 8}_{\text{Bof...}}$$

<u>Conclusion :</u> comme 6 n'est jamais égal à 8, alors aucune tangente $T_x$ ne peut être parallèle à l'asymptote Δ.

g) La courbe (C) flanquée de ses trois asymptotes qui sont la droite Δ d'équation $y = x - 2$ et les deux droites verticales d'équation $x = 2$ et $x = 4$ sont tracées ci-contre ➔



# *Ln's primitive story !*

## *Le contexte*

Cet exercice donné en devoir surveillé aborde la continuité et la dérivabilité en 0 d'une fonction qui est est une primitive de la fonction ln.

## *L'énoncé*

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x \times (\ln(x) - 1)$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 (par la droite).

Comme cette limite est finie, alors on peut étendre par continuité la fonction f en 0. On définit l'image de 0 par f en posant :

$$f(0) = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x \neq 0}} f(x) = \ldots$$

Ainsi prolongée, la fonction f est bien évidemment continue en 0.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? On justifiera sa réponse.
Quelle est la conséquence graphique de ce résultat ?

c) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

## *Le corrigé*

a) Pour tout réel $x \in ]0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = x \times (\ln(x) - 1) = x \times \ln(x) - x$$

Un résultat du cours nous apprend : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \times \ln(x) = 0$. Par conséquent, il vient :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x \times \ln(x) - x = 0 - 0 = 0$$

**Les coulisses de cette fonction f**

En posant $f(0) = 0$, on prolonge par continuité la fonction f en 0. La fonction f est à présent définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Comme les fonctions x et ln sont respectivement dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur $]0;+\infty[$, alors la fonction f est (au moins) dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Mais l'est-elle en 0 ? C'est l'objet de la question qui arrive...

b) Pour savoir si la fonction f est dérivable en 0 (à droite), nous devons déterminer la limite lorsque x tend vers 0 par la droite du quotient $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Justement ce quotient, à quoi ressemble-t-il ? Pour tout réel $x \in ]0;+\infty[$, nous avons :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \times (\ln(x) - 1) - 0}{x} = \frac{\cancel{x} \times (\ln(x) - 1)}{\cancel{x}} = \ln(x) - 1$$

Or quand x tend vers 0 par la droite, $\ln(x)$ tend vers $-\infty$.

<u>Conclusion :</u> comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$, alors la fonction f n'est pas dérivable en 0.

La conséquence graphique de cette limite infinie est que la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0 sera verticale. On retrouve le même phénomène avec la fonction racine en 0.

c) Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln(x)$ tend vers $+\infty$. Par conséquent :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \times (\ln(x) - 1) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

La courbe (C) n'admet aucune asymptote, même pas au voisinage de $+\infty$.

➲ Comme la fonction $\left| \begin{array}{l} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{array} \right.$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\left| \begin{array}{l} v(x) = \ln(x) - 1 \\ v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, alors leur produit $f = u \times v$ est seulement dérivable sur ce dernier intervalle.

Pour tout $x \in ]0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 1 \times (\ln(x) - 1) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x) \end{aligned}$$

Connaissant le signe de $\ln(x)$, nous pouvons en déduire les variations de la fonction f.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)=\ln(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Calculons l'image de 1 par f :

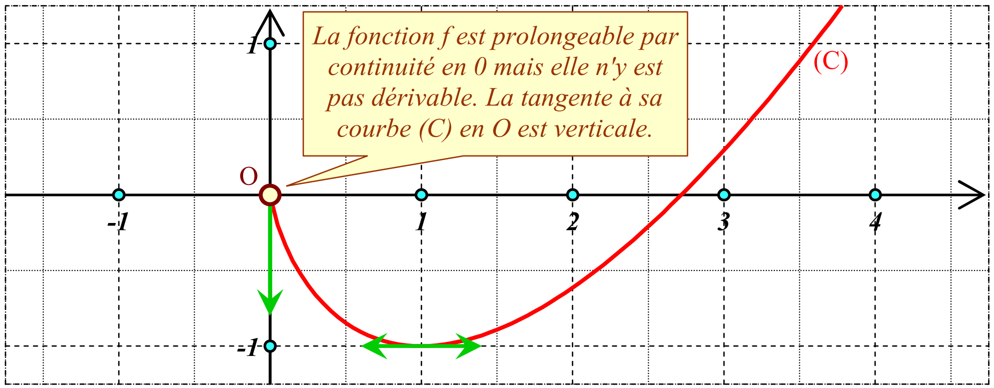
$$f(1)=1\times(\ln(1)-1)$$
$$=1\times(0-1)=-1$$

**Les coulisses de cette fonction f**

Une fonction dérivable étant une primitive de sa dérivée, alors nous pouvons affirmer :

Une primitive de ln sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est la fonction $f(x)=x\times(\ln(x)-1)$

La courbe (C) représentant la fonction f est tracée ci-dessous :



# Suites

## Equations différentielles, fonction exponentielle mais aussi...suite !

### Le contexte

Le présent exercice qui est une création assez classique de mon diabolique cerveau a été classé dans le chapitre *Suites* mais il aurait pu aussi l'être dans les chapitres *Equations différentielles* et *Exponentielle*. Chacune de ses parties est consacrée à l'un de ses chapitres.

### L'énoncé

Cet exercice est composé de trois époques faisant parfois appel aux autres.

**Première époque : il était une fois une équation différentielle...**

On appelle ***(E)*** l'équation différentielle :

$$2\times y' = y - x$$

L'objet de cette époque est la résolution de cette équation différentielle ***(E)***.

1.a) Quelles sont les solutions de l'équation différentielle ***(E')*** $: 2\times y' = y$ ?

1.b) Déterminer une fonction affine $\varphi(x) = a\times x + b$ qui est solution de l'équation différentielle ***(E)***.

1.c) Dans cette question, u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$u(x) = \varphi(x) + v(x)$$

Démontrer que la fonction $u(x) = \varphi(x) + v(x)$ est solution de l'équation différentielle ***(E)*** si et seulement si, la fonction v est solution de l'équation différentielle ***(E')***.

1.d) En déduire les solutions de l'équation différentielle ***(E)***.

1.e) Déterminer la solution de l'équation différentielle ***(E)*** qui vaut 1 en 0.

**Seconde époque : il était une fois une fonction f**

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{\frac{x}{2}} + 2$$

On appelle (C) la courbe représentative de cette fonction f.

2.a) Déterminer les limites de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.
La courbe (C) admet-elle des asymptotes aux voisinages des infinis ? Si oui, on indiquera sa position par rapport à celles-ci.

2.b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - \frac{1}{2}\times e^{\frac{x}{2}} > 0$

2.c) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est $2\times\ln(2)$.

**Troisième époque : il était une fois une suite définie par récurrence**

La suite $(u_n)$ est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - e^{\frac{u_n}{2}} + 2 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Dans cette époque, on pourra réutiliser des résultats établis précédemment.

3.a) Sur le graphique ci-dessous, construire en s'appuyant sur la courbe (C) les termes $u_0$ ; $u_1$ ; $u_2$ et $u_3$. On laissera apparents les traits de construction.

3.b) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que : $0 \le u_n \le \ln(4)$.

3.c) Etablir le sens de variation de la suite $(u_n)$.

3.d) Pourquoi peut-on affirmer que la suite $(u_n)$ est convergente ?
Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

## Le corrigé

### Première époque : il était une fois une équation différentielle...

1.a) Les solutions de l'équation différentielle homogène ***(E')*** : $2\times y'=y \Leftrightarrow y'=\frac{1}{2}\times y$

sont les fonctions v de la forme $v(x)=Constante\times e^{\frac{1}{2}\times x}$.

1.b) Pour que la fonction affine $\varphi(x)=a\times x+b$ soit une solution de l'équation différentielle ***(E)***, il faut et il suffit que :

$$\underbrace{2\times\varphi'(x)=\varphi(x)-x}_{\text{Pour tout réel x}} \Leftrightarrow \underbrace{2\times a=a\times x+b-x}_{\text{Pour tout réel x}} \Leftrightarrow \underbrace{(1-a)\times x+(2\times a-b)=0}_{\text{Seul le polynôme nul...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases}\text{Coefficient en x :} & 1-a=0 \quad\text{soit}\quad a=1\\ \text{Coefficient constant :} & 2\times a-b=0 \quad\text{soit}\quad b=2\end{cases}}_{\text{...a tous ses coefficients nuls}}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction affine $\varphi(x)=x+2$ est l'une des solutions de l'équation différentielle ***(E)***.

1.c) Etablissons l'équivalence demandée.

$$\underbrace{\text{La fonction } u=\varphi+v \text{ est solution de } (E)}_{\text{La fonction v est la différence entre u et }\varphi\text{.}} \Leftrightarrow \underbrace{2\times u'(x)=u(x)-x}_{\text{Pour tout réel x...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\times\varphi'(x)+2\times v'(x)=\varphi(x)+v(x)-x}_{\text{Pour tout réel x...}}$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\underbrace{\cancel{2\times\varphi'(x)}+2\times v'(x)=\cancel{\varphi(x)}+v(x)\cancel{-x}}_{\text{Pour tout réel x...}}}^{\text{Car la fonction affine }\varphi\text{ est une solution de }(E)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\times v'(x)=v(x)}_{\text{Pour tout réel x...}}$$

$$\Leftrightarrow \text{La fonction } v=u-\varphi \text{ est solution de } (E')$$

1.d) D'après la question précédente, toute solution u de l'équation différentielle ***(E)*** est la somme de la fonction affine $\varphi$ et d'une solution de l'équation différentielle homogène ***(E')***.
Par conséquent, les solutions de ***(E)*** sont les fonctions f de la forme :

$$f(x)=x+2+Constante\times e^{\frac{x}{2}}$$

1.e) La solution f de l'équation différentielle ***(E)*** que nous recherchons vérifie :

$$f(0)=1 \Leftrightarrow 0+2+Constante\times e^{\frac{0}{2}}=1 \Leftrightarrow Constante\times 1=-1 \Leftrightarrow Constante=-1$$

<u>Conclusion :</u> la seule solution de l'équation différentielle ***(E)*** qui vaut 1 en 0 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x+2-e^{\frac{x}{2}}$$

Et comme par hasard, c'est la fonction que nous allons étudier dans la seconde époque !

### Seconde époque : il était une fois une fonction f

2.a) Déterminons la limite de f en $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, sa moitié $\frac{x}{2}$ et son exponentielle $e^{\frac{x}{2}}$ s'en vont aussi vers $+\infty$.

Donc f est une forme indéterminée de la forme $\infty-\infty$.

Pour lever celle-ci, factorisons la somme f par son terme le plus fort $e^{x/2}$.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f(x)=x-e^{\frac{x}{2}}+2=e^{x/2}\times\left[\frac{x}{e^{x/2}}-1+\frac{2}{e^{x/2}}\right]=e^{x/2}\times\left[2\times\frac{x/2}{e^{x/2}}-1+\frac{2}{e^{x/2}}\right]$$

Reprenons ! Quand x s'en va vers $+\infty$, sa moitié $t=\frac{x}{2}$ tend aussi vers $+\infty$.

Donc le quotient $\frac{e^t}{t}$ s'envole vers $+\infty$ et son inverse $\frac{t}{e^t}=\frac{x/2}{e^{x/2}}$ tend lui vers $\frac{1}{+\infty}=0^+$.

Finalement, il vient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=(+\infty)\times\left[2\times 0^+-1+\frac{2}{+\infty}\right]=(+\infty)\times\left[0^+-1+0^+\right]=(+\infty)\times(-1)=-\infty$$

De plus, comme c'est la fonction exponentielle $e^{x/2}$ qui fait la limite de la fonction f, alors la courbe (C) n'a pas d'asymptote au voisinage de $+\infty$.

➲ Déterminons la limite de f en $-\infty$.

Quand x tend vers $-\infty$, sa moitié $\frac{x}{2}$ tend aussi vers $-\infty$. Donc l'exponentielle $e^{\frac{x}{2}}$ tend vers 0. Il vient alors :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+2-e^{\frac{x}{2}}=(-\infty)-0^+=-\infty$$

D'après ce qui précède, quand x tend vers $-\infty$, la différence $f(x)-(x+2)=-e^{x/2}$ tend vers 0. Par conséquent, la droite $\Delta$ d'équation $y=x+2$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
Pour connaître la position relative de la courbe (C) par rapport à $\Delta$, il nous suffit de déterminée le signe de la différence d'ordonnées pour une même abscisse x entre ces deux objets qui est donnée par :

$$(C)-\Delta = f(x)-(x+2) = -e^{\frac{x}{2}}$$

Comme l'exponentielle $e^{x/2}$ est toujours strictement positive, alors la différence d'ordonnées $(C)-\Delta$ est toujours strictement négative. Par conséquent, la courbe (C) est toujours au-dessous de son asymptote $\Delta$.

2.b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation proposée :

$$1-\frac{1}{2}\times e^{\frac{x}{2}}>0 \iff 1>\frac{1}{2}\times e^{\frac{x}{2}} \iff 2>e^{\frac{x}{2}} \iff \ln(2)>\frac{x}{2} \iff \underbrace{2\times\ln(2)}_{\text{ou } \ln(4)}>x$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $\left]-\infty;2\times\ln(2)\right[$.

2.c) Comme les fonctions affine $x+2$ et exponentielle $e^{\frac{x}{2}}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors il en va de même pour leur différence f.
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$f'(x)=(x+2)'-\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'=1-\left(\frac{x}{2}\right)'\times e^{\frac{x}{2}}=\underbrace{1-\frac{1}{2}\times e^{\frac{x}{2}}}_{\text{Tiens donc...}}$$

Depuis la question précédente, nous savons que la dérivée $f'(x)$ est positive sur l'intervalle $\left]-\infty;\ln(4)\right[$.
Par des résolutions analogues, nous en déduisons qu'elle est nulle en ln(4) et négative après.
Par conséquent, le tableau de variation de la fonction f est celui ci-contre →

| x | $-\infty$ | | $2\times\ln(2)=\ln(4)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| f | $-\infty$ | ↗ | $2\times\ln(2)$ | ↘ | $-\infty$ |

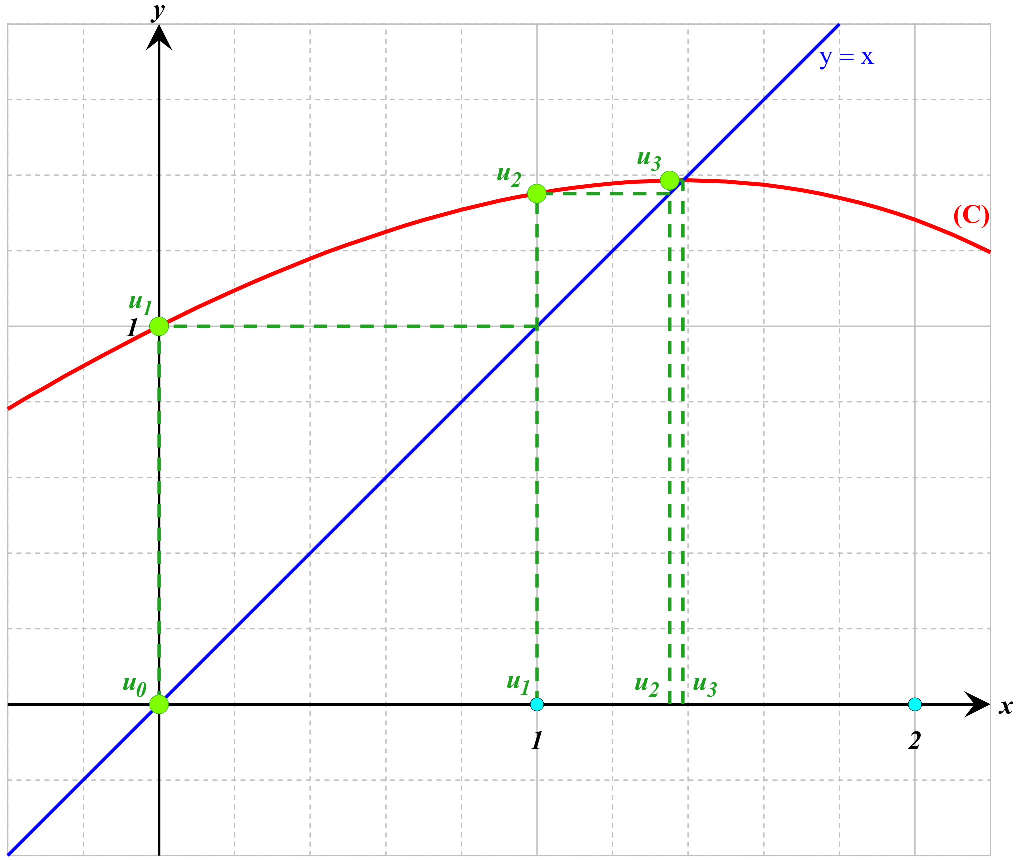
Calculons l'image de $\ln(4)=2\times\ln(2)$ par la fonction f.

$$f(\ln(4))=\ln(4)-\exp\left(\frac{\cancel{2}\times\ln(2)}{\cancel{2}}\right)+2=\ln(4)-\exp(\ln(2))+2=\ln(4)-2+2=\ln(4)$$

On observe que le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est bien $\ln(4)=\ln\left(2^2\right)=2\times\ln(2)$. D'ailleurs, il est atteint en... $\ln(4)=2\times\ln(2)$.
Comme quoi, $\ln(4)$ est invariant par f. C'est l'une des solutions de l'équation $f(x)=x$.

## Troisième époque : il était une fois une suite définie par récurrence

3.a) On passe du terme $u_n$ au terme suivant $u_{n+1}$ en appliquant la fonction f à ce premier.



Pour construire les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$, on s'appuie la courbe (C) représentant f et la première bissectrice du plan qui est aussi la droite d'équation $y = x$.
Cela donne la figure suivante :

3.b) Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n : 0 \leq u_n \leq \ln(4)$.

- Au premier rang, la propriété $\mathcal{P}_0$ est-elle vraie ?
  Le premier terme $u_0 = 0$ est bien compris entre 0 et $\ln(4)$.
  Donc la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Le principe de récurrence : la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie implique-t-elle que la propriété suivante $\mathcal{P}_{n+1}$ soit vraie ?

Si la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $0 \leq u_n \leq \ln(4)$

L'image de 0 par f est 1.
$\ln(4)$ est sa propre image par f.

donc $\underbrace{f(0) \leq f(u_n) \leq f(\ln(4))}_{\text{La fonction f est croissante sur l'intervalle } ]-\infty;\ln(4)]}$

d'où $1 \leq u_{n+1} \leq \ln(4)$

d'où $0 \leq u_{n+1} \leq \ln(4)$

donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, le terme $u_n$ est minoré par 0 et majoré par $\ln(4)$.

3.c) Deux méthodes permettent d'établir la variation de la suite $(u_n)$. Elles utilisent des résultats établis précédemment.

➥ ***Première méthode : déterminer le signe de la différence de deux termes consécutifs.***

Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \cancel{u_n} - e^{\frac{u_n}{2}} + 2 - \cancel{u_n} = 2 - e^{\frac{u_n}{2}}$$

Or, depuis la question précédente, nous savons que tout $u_n$ est compris entre 0 et $\ln(4)$.

$$0 \leq u_n \leq \underbrace{2 \times \ln(2)}_{=\ln(4)} \Rightarrow \underbrace{0 \leq \frac{u_n}{2} \leq \ln(2)}_{\text{On divise tout par 2}} \Rightarrow \underbrace{e^0 \leq e^{\frac{u_n}{2}} \leq e^{\ln(2)} = 2}_{\text{La fonction exponentielle est croissante sur } \mathbb{R}.} \Rightarrow 2 - e^{\frac{u_n}{2}} \geq 0$$

<u>Conclusion :</u> comme la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est toujours positive, alors la suite $(u_n)$ est croissante. En fait, cette croissance est même stricte.

➥ ***Seconde méthode : avec les variations de f et un raisonnement par récurrence***

Quand on compare les termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on observe que $u_0 < u_1$.
Et si cet ordre se propageait aux terme suivants ?
Montrons par récurrence sur l'entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n : u_n < u_{n+1}$.

- Au premier rang, nous savons déjà que la propriété $\mathcal{P}_0 : u_0 < u_1$ est vraie.
- Le principe de récurrence : $\mathcal{P}_n$ vraie implique-t-elle que $\mathcal{P}_{n+1}$ soit vraie ?

Si la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\underbrace{u_n < u_{n+1}}_{\text{Deux réels de l'intervalle } [0;\ln(4)]}$

donc $\underbrace{f(u_n) < f(u_{n+1})}_{\text{La fonction f est croissante sur l'intervalle } ]-\infty;\ln(4)].}$

d'où $u_{n+1} < u_{(n+1)+1}$

donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

<u>Conclusion :</u> comme pour tout entier naturel n, on a $u_n < u_{n+1}$, alors la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

3.d) Comme la suite $(u_n)$ est strictement croissante et majorée par $\ln(4)$, alors elle converge vers une limite finie $\ell$.
Comme pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ et que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, alors cette limite $\ell$ est l'une des solutions de l'équation $f(x) = x$. Résolvons là !

$$f(x) = x \Leftrightarrow \cancel{x} - e^{\frac{x}{2}} + 2 = \cancel{x} \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \ln(2) \Leftrightarrow x = 2 \times \ln(2) = \ln(4)$$

<u>Conclusion :</u> comme l'équation $f(x) = x$ n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{R}$, alors nous pouvons conclure que la suite $(u_n)$ converge vers cette unique solution qui est $\ln(4)$.

# Logarithme…mais aussi suite !

## Le contexte

Cet exercice assez classique et encore issu de mon génial cerveau est une quasi copie du précédent. Seules différences : il ne commence pas par une résolution d'équation différentielle et la fonction définissant la suite récurrente mais appelle à la fonction ln.

## L'énoncé

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(x+3) + 1$$

La courbe (C) représentant la fonction f est tracée ci-contre.

a) Pourquoi la fonction f n'est-elle définie que sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ ?

b) Démontrer que pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f(x) = x \times \left[1 - \frac{\ln(x)}{x}\right] - \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) + 1$$

Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. On prend soin à bien détailler chaque limite. On précisera aussi les conséquences graphiques de celles-ci.

c) Etablir les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

La suite $(u_n)$ est définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n + 3) + 1 \quad \text{pour tout entier naturel n} \end{cases}$$

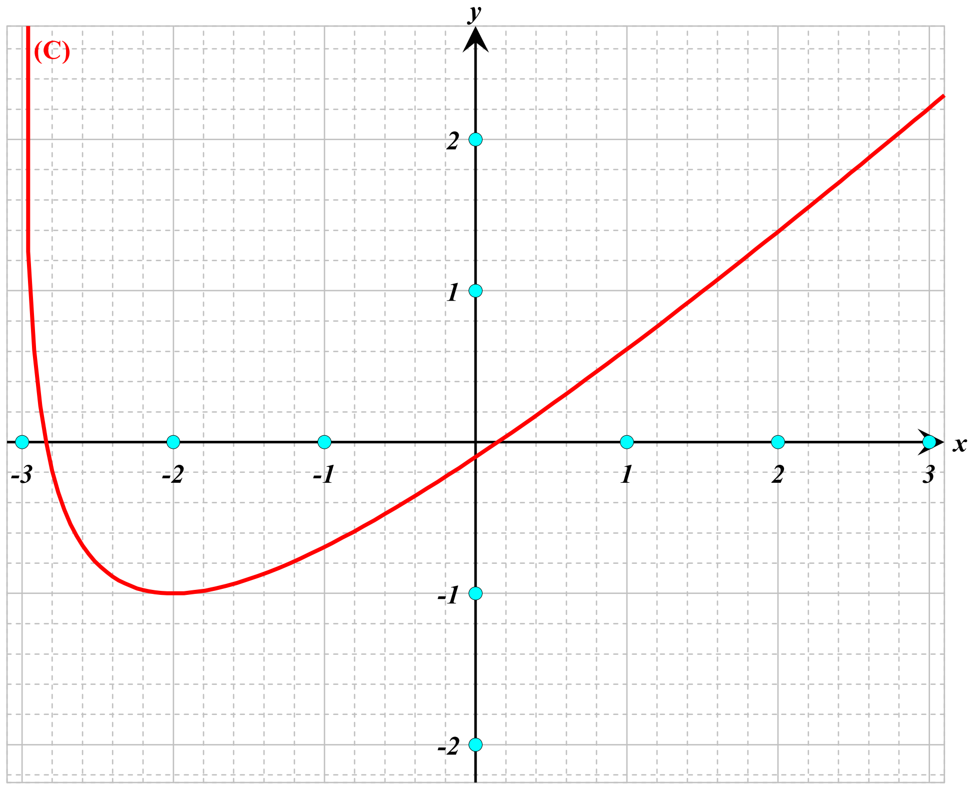
d) Sur le graphique ci-contre, construire sur l'axe des abscisses les termes $u_0$ ; $u_1$ ; $u_2$ et $u_3$ en s'appuyant sur la courbe (C). On laissera apparents les traits de construction.

e) Calculer $u_1$.
En remarquant que $e < 5$, établir le signe de la différence $u_1 - u_0$.

f) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que $-2 \leq u_n \leq 2$.

g) En utilisant un raisonnement par récurrence, établir le sens de variation de la suite $(u_n)$.

h) Démontrer que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$ que l'on déterminera.




## Le corrigé

a) Les fonctions affines $x+1$ et $x+3$ sont définies sur ℝ.
Par contre, le logarithme $\ln(x+3)$ n'existe que lorsque et seulement lorsque la quantité $x+3$ est strictement positive autrement dit lorsque $x > 3$. Ceci car la fonction ln n'est définie que sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
C'est pour cela que la fonction f n'est définie que sur $]-3;+\infty[$.

b) Pour tout réel x strictement positif, nous pouvons écrire :

$$f(x) = x - \ln(x+3) + 1 = x - \underbrace{\ln\left(x \times \left(1 + \frac{3}{x}\right)\right)}_{\text{On fait émerger } \ln(x)} + 1$$

$$= \underbrace{x - \ln(x)}_{\text{Factorisons par x.}} - \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) + 1 = x \times \left[1 - \frac{\ln(x)}{x}\right] - \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) + 1$$

Désormais, nous disposons d'une nouvelle écriture de $f(x)$ qui va nous être utile sous peu.

Mais attention car la forme précédente n'est utilisable qu'après 0 ! A cause de $\ln(x)$...

➲ L'ensemble de définition de f comporte deux bornes ouvertes : autant de limites pour f !

➥ Déterminons la limite de f à droite de $-3$

Procédons avec l'écriture initiale de $f(x) = x - \ln(x+3) + 1$.

Lorsque x tend vers $-3$ par la droite, la quantité $x+3$ tend vers $0^+$.

Donc son logarithme $\ln(x+3)$ tend vers $-\infty$.

Finalement :

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = -3 - (-\infty) + 1 = +\infty$$

Graphiquement : la droite verticale d'équation $x = -3$ est une asymptote à la courbe (C).

➥ Déterminons la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

Voyons s'il est possible de se prononcer à partir de la forme $f(x) = x - \ln(x+3) + 1$.

Lorsque x s'en va vers $+\infty$, les quantités $x+1$ ; $x+3$ et son logarithme $\ln(x+3)$ s'envolent aussi vers $+\infty$.

Par conséquent, $f(x) = x - \ln(x+3) + 1$ est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\infty - \infty$ qui résulte de l'opposition de x et d'un logarithme.

Regardons ce qu'il en est avec l'autre forme $f(x) = x \times \left[1 - \frac{\ln(x)}{x}\right] - \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) + 1$ qui est valable après 0 donc au voisinage de $+\infty$ en particulier.

Quand x tend vers $+\infty$, l'inverse $\frac{3}{x}$ tend vers $0^+$ et $1+\frac{3}{x}$ vers $1 + 0^+ = 1$.

Donc son logarithme $\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$ tend vers $\ln(1) = 0$ du fait de la continuité de ln sur $\mathbb{R}^{*+}$.

De plus, d'après un résultat du cours, le quotient $\frac{\ln(x)}{x}$ tend vers $0^+$.

Il vient alors pour la fonction f :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \times \left[1 - 0^+\right] - 0^+ + 1 = (+\infty) \times 1 + 1 = +\infty$$

Graphiquement : du fait de l'opposition existant entre la partie affine $x+1$ et celle logarithmique $\ln(x+3)$, la courbe (C) n'admet aucune asymptote au voisinage de $+\infty$.

c) Première étape de cette question : déterminer le signe de la dérivée de la fonction f.

Comme la fonction $\left| \begin{array}{l} u(x) = x+3 \\ u'(x) = 1 \end{array} \right.$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $]-3;+\infty[$, alors son logarithme $\ln(u(x)) = \ln(x+3)$ est dérivable sur ce dernier intervalle. De plus :

$$\left(\ln(x+3)\right)' = \left(\ln(u)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x+3}$$

Ensuite, comme la fonction affine $x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa différence avec $\ln(x+3)$ qui est la fonction f, est elle aussi seulement dérivable sur $]-3;+\infty[$.

Pour tout réel $x > -3$, nous pouvons alors écrire :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+3} = \frac{(x+3)-1}{x+3} = \frac{x+2}{x+3}.$$

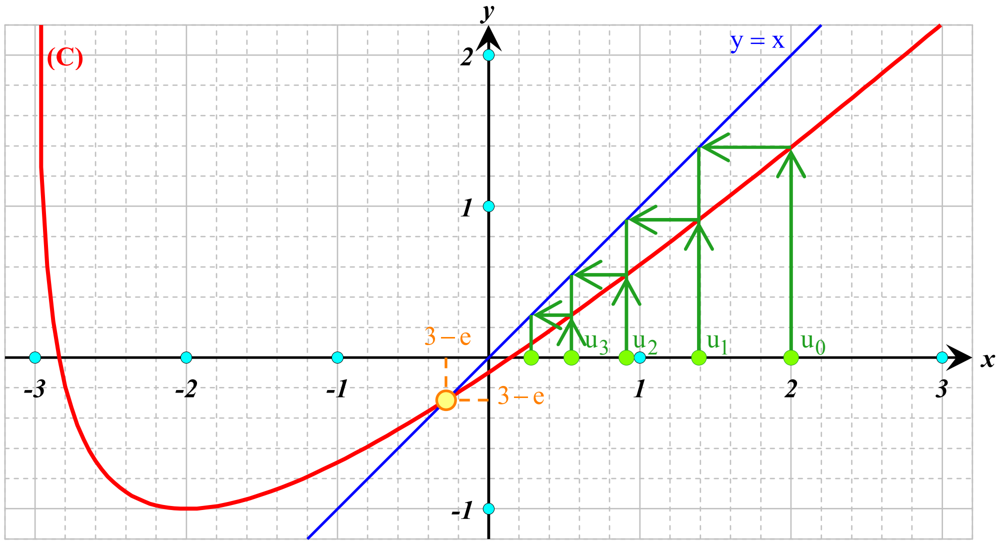
Le signe de la dérivée $f'(x)$ nous donne les variations de la fonction f ci-contre ➔

| x | $-3$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x+3$ | | $+$ | \| | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| f | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

Calculons l'image de $-2$ par f :

$$f(x) = (-2) - \ln((-2)+3) + 1$$
$$= -1 - \ln(1) = -1 - 0 = -1$$

d) Après avoir tracé la première bissectrice du plan, on place sur l'axe des abscisses le point d'abscisse $u_0 = 2$. Puis en s'appuyant sur la courbe (C) et en se rétablissant sur la droite d'équation $y = x$, on construit le point d'abscisse $u_1 = f(u_0)$ et ainsi de suite...




e) Avant de nous intéresser au signe de la différence, d'abord calculons $u_1$.

$$u_1 = u_0 - \ln(u_0+3)+1 = 2-\ln(2+3)+1 = 3-\ln(5)$$

Il vient alors :

$$u_1 - u_0 = 3-\ln(5)-2 = 1-\ln(5)$$

Or comme $e<5$ alors $\underbrace{1=\ln(e)<\ln(5)}_{\text{Ln est croissante sur } ]0;+\infty[.}$ donc la différence est $\underbrace{u_1-u_0}_{1-\ln(5)}$ est négative.

f) Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n la propriété : $\mathcal{P}_n : -2 \le u_n \le 2$.

- Au premier rang, la propriété $\mathcal{P}_0$ est-elle vraie ?
  Le premier terme $u_0 = 2$ étant bien compris entre $-2$ et 2. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Le principe de récurrence : la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie implique-t-elle que la propriété suivante $\mathcal{P}_{n+1}$ soit vraie ?

Si la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\underbrace{-2 \le u_n \le 2}_{\text{Trois réels de l'intervalle } [-2;+\infty[}$

donc $\underbrace{f(-2) \le f(u_n) \le f(2)}_{\text{La fonction f est croissante sur } [-2;+\infty[.\ \text{L'ordre est conservé...}}$

Les images de $-2$ et 2 par f ont déjà été calculées...

d'où $-1 \le u_{n+1} \le 3-\ln(5)$

Or, nous savons que $3-\ln(5) = u_1$ est inférieur à $2 = u_0$ depuis la question e.
Et lorsque l'on est plus grand que $-1$, on est aussi supérieur à $-2$.
Par conséquent, il vient : $-2 \le -1 \le u_{n+1} \le 3-\ln(5) \le 2$.

Donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, le terme $u_n$ est minoré par $-2$ et majoré par 2.

g) Au vu de ses premiers termes, la suite $(u_n)$ semble décroissante. Prouvons-le !
Montrons par récurrence sur l'entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n : u_n > u_{n+1}$.

- Au premier rang, la propriété $\mathcal{P}_0 : u_0 > u_1$ est vraie car depuis la question e, nous savons que la différence $u_1 - u_0$ est strictement négative.
- Le principe de récurrence : $\mathcal{P}_n$ vraie implique-t-elle que $\mathcal{P}_{n+1}$ soit vraie ?

Si la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\underbrace{u_n > u_{n+1}}_{\text{Deux réels de l'intervalle } [-2;+\infty[}$

donc $\underbrace{f(u_n) > f(u_{n+1})}_{\text{f est croissante sur l'intervalle } [-2;+\infty[,\ \text{L'ordre est conservé !}}$

d'où $u_{n+1} > u_{n+2} = u_{(n+1)+1}$

donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

<u>Conclusion :</u> comme pour tout entier naturel n, $u_n > u_{n+1}$, alors la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

h) Comme la suite $(u_n)$ est strictement décroissante et minorée par $-2$, alors elle converge vers une limite finie $\ell$...qui est l'une des solutions de l'équation $f(x)=x$.
Une équation que nous allons nous contenter de résoudre dans l'intervalle $[-2;2]$ qui contient tous les termes de la suite $(u_n)$ et sur lequel la fonction f qui permet de passer d'un terme $u_n$ au suivant $u_{n+1}$ est continue. Alors résolvons !

$$f(x)=x \Leftrightarrow \cancel{x} - \ln(x+3)+1 = \cancel{x} \Leftrightarrow \ln(x+3)=1 \Leftrightarrow x+3=e^1=e$$
$$\Leftrightarrow x = \underbrace{e-3}_{\in[-2;2]}$$

<u>Conclusion :</u> comme l'équation $f(x)=x$ a une seule solution, alors nous pouvons conclure que la suite $(u_n)$ converge vers la différence $e-3$.

# Ces destinées qui s'entremèlent...

## Le contexte

Cet exercice qui est une création originale assez classique de mon volcanique cerveau aborde les suites adjacentes, un point peu abordé du programme.

## L'énoncé

### Partie A - Une question presque de cours

Dans cette partie, $(a_n)$ et $(b_n)$ sont deux suites adjacentes. Cela signifie qu'elles vérifient les quatre conditions suivantes :

- ***(1)*** La suite $(a_n)$ est strictement croissante.
- ***(2)*** La suite $(b_n)$ est strictement décroissante.
- ***(3)*** Pour tout entier naturel n, on a : $a_n \leq b_n$.
- ***(4)*** $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$

Pour fixer les idées, nous supposerons que les premiers termes des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont respectivement $a_0$ et $b_0$.

L'objet de cette partie est de prouver en trois étapes que deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

a) Démontrer que la suite $(a_n)$ est convergente. Nous noterons $\alpha$ sa limite.

b) Démontrer que la suite $(b_n)$ est aussi convergente. Nous appellerons $\beta$ sa limite.

c) Démontrer que ces deux limites $\alpha$ et $\beta$ sont égales.

### Partie B - Deux suites adjacentes...et leur limite !

Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{4\times u_n + v_n}{5} \quad \text{pour tout entier n} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4\times v_n}{5} \quad \text{pour tout entier n} \end{cases}$$

**1°)** Vérifier que $u_1 = 2$ et $v_1 = 8$, puis calculer les termes $u_2$ et $v_2$.

On appelle $(w_n)$ la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = v_n - u_n$$

**2°)** Démontrer que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \dfrac{3}{5}\times w_n$.

En déduire la nature de la suite $(w_n)$, puis l'expression de $w_n$ en fonction de n.

Déterminer la limite de la suite $(w_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

**3°)** Soit n un entier naturel quelconque. Lequel des deux termes $u_n$ et $v_n$ est le plus grand ? On justifiera brièvement sa réponse.

**4°)** Etablir le sens de variation de la suite $(u_n)$.

Etablir le sens de variation de la suite $(v_n)$.

**5°)** Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers une même limite $\ell$.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$t_n = u_n + v_n$$

**6°)** A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$t_n = 10$$

En déduire la valeur de cette limite $\ell$.

## Le corrigé

### Partie A - Une question presque de cours

a) D'après la condition ***(2)***, la suite $(b_n)$ est strictement croissante. Donc pour tout entier naturel n, nous avons :

$$b_n \leq b_0$$

En application de la condition ***(3)***, nous en déduisons que pour tout entier naturel n :

$$\underbrace{a_n \leq b_n}_{\text{Condition } (3)} \leq b_0 .$$

Ainsi la suite $(a_n)$ qui était déjà croissante (condition ***(1)***) est en plus majorée par le réel fixé $b_0$. Par conséquent, la suite $(a_n)$ est convergente.

b) De même, la suite $(a_n)$ étant strictement croissante (condition ***(1)***), nous pouvons écrire pour tout entier naturel n, nous avons :

$$a_0 \leq \underbrace{a_n \leq b_n}_{\text{Condition } (3)}$$

La suite $(b_n)$ étant strictement décroissante (condition ***(2)***) et minorée par le réel fixé $a_0$, nous en déduisons qu'elle est elle-aussi convergente.

c) Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ convergeant respectivement vers les réels α et β, leur différence $b_n - a_n$ converge vers $\beta - \alpha$.
Or d'après la condition ***(4)***, la différence $b_n - a_n$ tend vers 0. La limite d'une suite étant unique, nous en déduisons :

$$0 = \alpha - \beta \iff \alpha = \beta$$

Conclusion : les suites adjacentes $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent vers une même limite.

**Partie B - Deux suites adjacentes...et leur limite !**

**1°)** Calculons les premiers termes des deux suites :

| | |
|---|---|
| $u_1 = \dfrac{4\times u_0 + v_0}{5} = \dfrac{4\times 0 + 10}{5} = 2$ | $v_1 = \dfrac{u_0 + 4\times v_0}{5} = \dfrac{0 + 4\times 10}{5} = 8$ |
| $u_2 = \dfrac{4\times u_1 + v_1}{5} = \dfrac{4\times 2 + 8}{5} = \dfrac{16}{5} = 3,2$ | $v_2 = \dfrac{u_1 + 4\times v_1}{5} = \dfrac{2 + 4\times 8}{5} = \dfrac{34}{5} = 6,8$ |

**2°)** Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$
$$= \frac{u_n + 4\times v_n}{5} - \frac{4\times u_n + v_n}{5} = \frac{3\times v_n - 3\times u_n}{5} = \frac{3}{5}\times(v_n - u_n) = \frac{3}{5}\times w_n$$

Donc la suite $(w_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10$.

Par conséquent, pour tout entier naturel n, il vient :

$$w_n = w_0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n = 10\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

➲ Quand n tend vers $+\infty$, la puissance $0,6^n$ tend vers 0. Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} 10\times\left(\frac{3}{5}\right)^n = 10\times 0 = 0$$

**3°)** La différence $v_n - u_n = w_n = 10\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ étant positive (produit de deux facteurs positifs), nous en déduisons que le terme $v_n$ est toujours plus grand que le terme $u_n$.

**4°)** Le mieux pour voir comment se comporte la suite $(u_n)$ est encore de regarder le signe de la différence de deux termes consécutifs quelconques. Pour tout entier naturel n, nous pouvons écrire :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4\times u_n + v_n}{5} - \frac{5\times u_n}{5} = \frac{v_n - u_n}{5} = \frac{w_n}{5}$$

Comme le terme $w_n$ est toujours positif, alors nous en déduisons que la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est toujours positive.
Conclusion : la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

➲ De même, pour tout entier naturel n, nous avons :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4\times v_n}{5} - \frac{5\times v_n}{5} = \frac{u_n - v_n}{5} = -\frac{w_n}{5}$$

Cette fois-ci, la différence de deux termes consécutifs $v_{n+1} - v_n$ est toujours négative.
Conclusion : la suite $(v_n)$ est strictement décroissante.

**5°)** Récapitulons ce que nous ont appris les questions précédentes :

- ***(1)*** La suite $(u_n)$ est strictement croissante d'après la question B.4.
- ***(2)*** La suite $(v_n)$ est strictement décroissante d'après la question B.4 encore.
- ***(3)*** Pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq v_n$ car la différence $w_n = v_n - u_n$ est positive d'après la question B.2
- ***(4)*** $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{v_n - u_n}_{w_n} = 0$ d'après la question B.3.

Par conséquent, les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes. Donc elles convergent vers une même limite $\ell$.

**6°)** Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n : t_n = 10$.

- Au premier rang, la propriété $\mathcal{P}_0 : t_0 = 10$ est vraie car $t_0 = u_0 + v_0 = 0 + 10 = 10$
- Le principe de récurrence : la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie implique-t-elle que la propriété suivante $\mathcal{P}_{n+1}$ soit vraie ?
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie, autrement dit que $t_n = 10$.
  Nous pouvons alors écrire :

$$t_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$$
$$= \frac{4\times u_n + v_n}{5} + \frac{u_n + 4\times v_n}{5} = \frac{5\times u_n + 5\times v_n}{5} = \frac{\cancel{5}\times t_n}{\cancel{5}} = t_n = 10$$

Donc la propriété suivante $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $t_n = 10$. La suite $(t_n)$ est constante.

➲ Comme les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers le même réel $\ell$, alors la suite $(t_n)$ converge vers $\ell + \ell = 2\times\ell$.

Or la suite $(t_n)$ est constante et égale à 10. Par conséquent, elle converge surtout vers 10.

La limite d'une suite étant unique, nous en déduisons alors :

$$10 = 2\times\ell \quad\Leftrightarrow\quad \ell = 5$$

Conclusion : les suites adjacentes $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent toutes deux vers 5.