Le mot de l'auteur

Comme chaque année, juste avant que n'arrivent l'été et ses hordes de vacanciers, je conclus ma saison en compilant tous les exercices et leurs corrigés que j'ai pu donner.
Comme pour la terminale S l'an passé, j'ai dû faire deux volumes : un premier pour l'analyse et un second pour le reste.
Comme l'an passé, les exercices que vous verrez sont soit issus du bac, soit des créations plus ou moins originales de mon cerveau aussi diabolique que volcanique.
Et comme chaque année, il m'est important de préciser que ce qui est présenté dans ce recueil doit être considéré comme 100% pédagogiquement incorrect et impropre à la consommation. A aucun moment, le Ministère de l'Education Nationale n'a apporté sa caution à ces deux volumes. Il ne peut en aucun cas être tenu pour responsable des propos tenus. Déjà que ces brillantes sommités qui irradient tout ce qui passe à leur portée ont à me supporter, il serait injuste de leur imputer mes méfaits.
Les années précédentes, je me plaisais à dénoncer ce qui n'allait pas dans l'Education Nationale. Mais là, je dois y renoncer pour cause de manque de place sur cette page. En plus, tout le monde s'en fout ! Ce qu'il faut juste retenir, c'est que tout est de la faute des profs, ces affreux conservateurs corporatistes qui refusent toute réforme. Vous n'avez qu'à demander à ceux de la Haute ! C'est ce qu'ils n'arrêtent pas de répéter à tous les caniches de la place de Paris qui s'empressent d'aller le colporter aux consommateurs d'école.
Juste un mot quand même ! Il y a dix ans, Monsieur Mérieu et ses amis pédagogistes avaient mis un terme à la sélection par les maths et diminué notre volume horaire pour mettre en oeuvre leurs bonnes idées. Résultat dix ans plus tard : il y a moins d'élèves à profil scientifique, le niveau s'est effondré et les cours particuliers ont explosé.
Aujourd'hui, notre glorieux président et son très inspiré ministre ont décidé de mettre un terme à la domination de la filière S. Qui plus est, ils veulent plus de travail en autonomie et moins de cours. Monsieur Mérieu doit être content. Normal, ils mettent moins de pognon donc moins de profs et moins d'heures de cours. Par contre, ils escomptent conserver un très large éventail de matières. Donc qui va encore trinquer ? Ben les maths et le français ! Mais bon, c'est sûr que les élèves apprendront mieux en deux heures ce qu'ils n'apprenaient pas en quatre. L'avenir des boites de cours particuliers est assuré !
La réforme qui s'annonce ne sera pas celle du renouveau mais celle de l'achèvement.
En définitive, ce n'est pas une réforme qu'il nous faudrait, mais une révolution !

Les exercices de ce volume sont classés par catégories :

La taverne de l'Irlandais
[http://www.tanopah.com]
présente

Ces dernières lueurs au loin : le reste

Le second volume des exercices de maths donnés en TS durant la saison 2007-2008 par Jérôme ONILLON, prof. désagrégé et irrécupérable de mathématiques

Edition du samedi 21 juin 2008

Géométrie dans l'espace

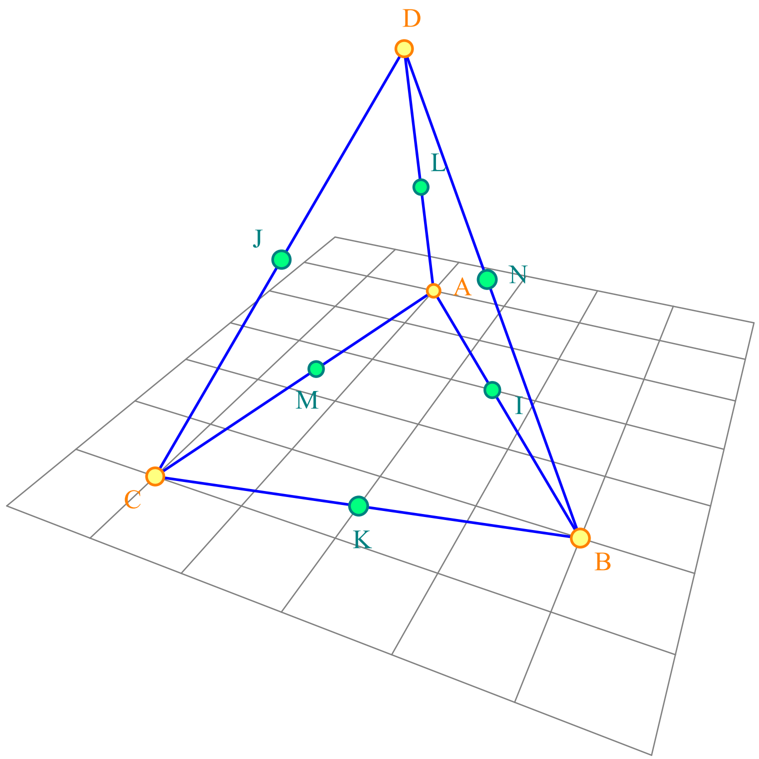
Un tétraèdre sur le comptoir - Pondichéry avril 2008

Le contexte

Les exercices de géométrie dans l'espace non analytiques sont assez rares en métropole. Par contre, il arrive qu'il en sorte dans des sujets de bac à l'étranger. Tel fut le cas cette année avec le présent exercice qui étudiait certaines propriétés des tétraèdres équifaciaux. Les figures d'illustrations ont été réalisées en perspective centrale (vision réelle).

L'énoncé

On considère un tétraèdre ABCD. Dans celui-ci, les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].



On appelle G l'isobarycentre des quatre points A, B, C et D.

1°) Démontrer que les trois droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, le tétraèdre ABCD est supposé équifacial, c'est-à-dire que ses quatre faces sont des triangles isométriques tel que deux côtés non consécutifs soient égaux. Par conséquent, nous avons les égalités :

$$AB = CD \qquad BC = AD \qquad AC = BD$$

2.a) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Préciser également les natures des quadrilatères IMJN et KNLM.
2.b) En déduire que les droite (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra de même que les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales ainsi que (KL) et (MN).

3.a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).
3.b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{MK}$?
En déduire que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB).
Montrer de même que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (CD).
3.c) Montrer que le point G appartient aux plans médiateurs des segments [AB] et [CD].
3.d) Comment démontrerait-on que le point G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD ?
[Cette question est dite ouverte. C'est-à-dire qu'on ne s'attend pas à ce que le candidat élabore une démonstration mais seulement à ce qu'il ébauche une stratégie de résolution].

Le corrigé

1°) Nous allons prouver que le point G appartient aux trois droites (IJ), (KL) et (MN).
Pourquoi le point G appartient-il à la droite (IJ) ?
Le milieu I est l'isobarycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;1)$. Il vérifie l'égalité :

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$

De même, J étant l'isobarycentre des points pondérés $(C;1)$ et $(D;1)$, nous avons :

$$\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$$

Enfin, comme G est l'isobarycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;1)$, $(C;1)$ et $(D;1)$, alors nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}}_{\overrightarrow{GA}}+\underbrace{\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}}_{\overrightarrow{GB}}+\underbrace{\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}}_{\overrightarrow{GC}}+\underbrace{\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JD}}_{\overrightarrow{GD}}=\vec{0}$$

Nonobstant, nous sommes en train de redémontrer le théorème d'associativité des barycentres.

$$\Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{GI}+2\times\overrightarrow{GJ}+\underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}}_{=\vec{0}}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\times\overrightarrow{GI}+2\times\overrightarrow{GJ}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$$

Donc le point G est isobarycentre des points I et J, c'est-à-dire leur milieu.

L'essentiel pour nous est que nous savons désormais que le point G appartient à (IJ).

Pourquoi le point G appartient-il à la droite (KL) ?

Et bien pour les mêmes raisons qu'il appartient à la droite (IJ) ! Mais cette fois, nous allons être plus direct et utiliser ce théorème d'associativité des barycentres.

Le milieu K est l'isobarycentre des points $(B;1)$ et $(C;1)$.

Le milieu L est l'isobarycentre des points $(A;1)$ et $(D;1)$.

Par conséquent, l'isobarycentre G des quatre points $\underbrace{(B;1) \text{ et } (C;1)}_{\text{Barycentre K}}$ et $\underbrace{(A;1) \text{ et } (D;1)}_{\text{Barycentre L}}$ est aussi le barycentre des deux points pondérés $\underbrace{(K;1+1=2)}_{\text{Remplace (B;1) et (C;1)}}$ et $\underbrace{(L;1+1=2)}_{\text{Remplace (A;1) et (D;1)}}$.

Ainsi G est-il aussi l'isobarycentre des points $(K;2)$ et $(L;2)$, c'est-à-dire leur milieu.

Donc G appartient à la droite (KL).

Pourquoi le point G appartient-il à la droite (MN) ?

G étant le barycentre des points $\underbrace{(A;1) \text{ et } (C;1)}_{\text{Isobarycentre M}}$ et $\underbrace{(D;1) \text{ et } (D;1)}_{\text{Isobarycentre N}}$, il vient en application du théorème d'associativité qu'il est aussi l'isobarycentre des points $(M;2)$ et $(N;2)$.

Là encore G est le milieu de [MN], donc il appartient à la droite (MN).

Conclusion : comme le point G appartient aux trois droites (IJ), (KL) et (MN) qui sont distinctes (on l'admettra), alors elles sont concourantes en G.

2.a et b) Comme ses diagonales [IJ] et [LK] se croisent en leur milieu G, alors le quadrilatère (IKJL) est déjà un parallélogramme. Mais ce n'est pas tout !

En effet, comme les points J et L sont les milieux respectifs des côtés [DA] et [DC], alors en vertu du théorème des milieux appliqué dans le triangle DCA, nous avons :

$$JL = \frac{1}{2} \times AC$$

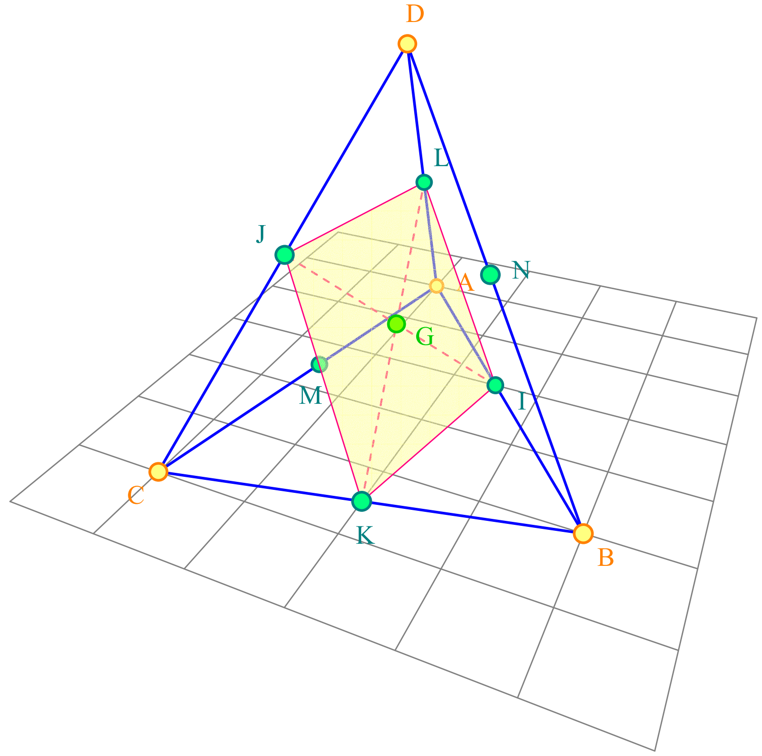
De même, J et K étant les milieux des côtés [CD] et [CB] dans le triangle CDB, alors :

$$JK = \frac{1}{2} \times DB$$

Or, les arêtes non consécutives [AC] et [DB] ont des longueurs égales. Par conséquent :

$$JL = \frac{1}{2} \times AC = \frac{1}{2} \times DB = JK$$

Conclusion : le parallélogramme IKJL ayant deux côtés consécutifs égaux en J, nous en déduisons que c'est un losange. Donc ses diagonales [IJ] et [KL] se coupent perpendiculairement.

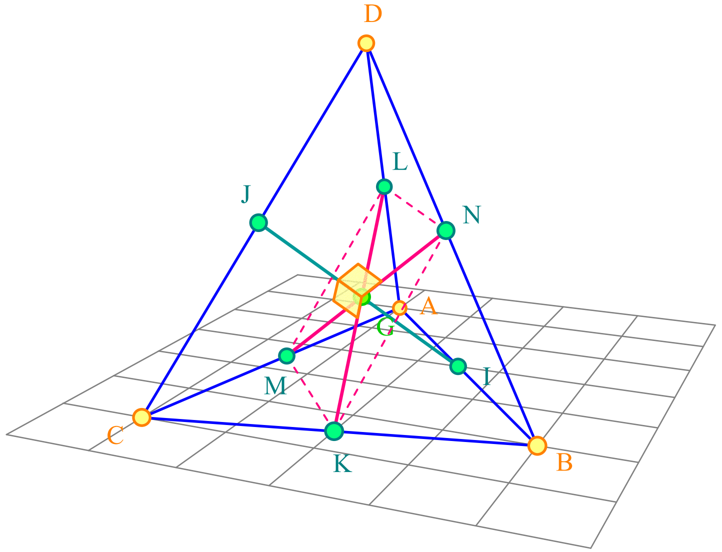


De la même façon et pour les mêmes raisons, on prouve que les quadrilatères IMJN et KNLM sont des parallélogrammes ayant deux côtés consécutifs égaux, c'est-à-dire des losanges. Par conséquent, leurs paires de diagonales respectives [IJ] et [MN], ainsi que [KL] et [MN] se coupent perpendiculairement.

3.a) Les droites (KL) et (MN) se coupent en G dans le plan (MNK).

Comme la droite (IJ) est orthogonale aux deux droites (KL) et (MN) sécantes du plan (MNK), alors la droite (IJ) est orthogonale au plan (MNK).

3.b) Comme le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (MNK), alors il est orthogonal à tous les vecteurs (directeurs) portés par le plan (MNK). En particulier, il est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{MK}$. Par conséquent, le produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$ est nul.



➲ M et K étant les milieux respectifs des côtés [CA] et [CB] dans le triangle ABC, le vecteur $\overrightarrow{MK}$ mesure la moitié du vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB}$.

Surtout les vecteurs $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Par conséquent, comme le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{MK}$, alors il est aussi orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
<u>Conclusion :</u> la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB).

➲ De la même façon, le vecteur normal $\overrightarrow{IJ}$ est aussi orthogonal au vecteur $\overrightarrow{KN}$ qui est porté par le plan (MNK).
Or, dans le triangle BCD, comme K et N sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [BD], alors $\overrightarrow{KN}$ mesure la moitié de $\overrightarrow{CD}$ et là encore, ces deux vecteurs sont colinéaires.
Donc le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est donc aussi orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CD} = 2 \times \overrightarrow{KN}$.
<u>Conclusion :</u> la droite (IJ) est aussi orthogonale à la droite (CD).

3.c) Le plan médiateur du segment [AB] que nous appellerons $\mathscr{P}$ est le plan passant par son milieu I et perpendiculaire à la droite (AB).
Or comme la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB), alors elle est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
Comme $I \in (AB)$ appartient au plan $\mathscr{P}$, alors c'est toute la droite (IJ) est incluse dans $\mathscr{P}$.
Le point G appartenant à la droite (IJ), il fait partie de facto du plan $\mathscr{P}$.
De la même façon, le plan médiateur $\mathscr{Q}$ du segment [CD] est le plan passant par son milieu J et orthogonal au segment [CD].

Comme la droite (IJ) est orthogonale à (CD) et qu'elle contient un point de $\mathscr{Q}$ qui est J, alors la droite (IJ) est aussi parallèle et incluse dans le plan $\mathscr{Q}$.
Par suite, le point $G \in (IJ)$ appartient aussi à $\mathscr{Q}$.

3.d) Le point G appartenant au plan médiateur $\mathscr{P}$ de [AB], il est équidistant de A et de B.
De même, son appartenance au plan médiateur $\mathscr{Q}$ de [CD] fait qu' il est aussi équidistant de C et de D.
Ainsi avons-nous les égalités :

$$GA = GB \qquad\qquad GC = GD$$

Ce qu'il faudrait, c'est que par exemple, les distances GB et GC soient aussi égales.
Et bien, c'est le cas car la droite (KL) est orthogonale à (BC). En effet :

> Les droites (MN) et (IJ) sont deux droites sécantes en G du plan (MJNI).
> Comme, d'après la question 2.b, la droite (KL) est orthogonale aux deux droites sévantes (MN) et (IJ), alors (KL) est normale au plan (MJNI).
> De facto, (KL) est orthogonale à toute droite portée par ce plan : en particulier à la droite (IM)...qui est parallèle à la droite (BC) du fait du théorème des milieux appliqué dans le triangle ABC.
> Donc la droite (KL) est bien orthogonale à (BC).

Poursuivons !
Comme (KL) est orthogonale au segment [BC] qu'elle coupe en son milieu K, alors la droite (KL) est incluse dans le plan médiateur de [BC].
Le point G qui fait partie de la droite (KL) appartient au plan médiateur de [BC]. Donc il est équidistant de B et C. Ainsi :

$$GB = GC$$

<u>Conclusion :</u> comme $GA = GB = GC = GD$, alors le point G est équidistant des quatre sommets du tétraèdre. Il est le centre de la sphère circonscrite au polyèdre ABCD.

Nombres complexes

Polynôme avec racines et complexes !

Le contexte

Un très classique petit exercice qui aborde la résolution d'une équation du troisième degré dans le corps des complexes $\mathbb{C}$.

L'énoncé

On appelle $\mathrm{P}(z)$ le polynôme du troisième degré à coefficients complexes suivant :

$$\mathrm{P}(z)=5\times z^3+(8+10.\boldsymbol{i})\times z^2+(4+16.\boldsymbol{i})\times z+8.\boldsymbol{i}$$

a) Démontrer que $-2.\boldsymbol{i}$ est une racine du polynôme $\mathrm{P}(z)$.

b) Déterminer trois coefficients réels a, b et c tels que pour tout complexe z, l'on ait :

$$\mathrm{P}(z)=(z+2.\boldsymbol{i})\times\left(a\times z^2+b\times z+c\right)$$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.

Le corrigé

a) Avant de déterminer l'image de $-2.\boldsymbol{i}$ par le polynôme $\mathrm{P}(z)$, calculons son carré et son cube :

$$(-2.\boldsymbol{i})^2=(-2)^2\times\boldsymbol{i}^2=4\times(-1)=-4 \qquad (-2.\boldsymbol{i})^3=(-2.\boldsymbol{i})^2\times(-2.\boldsymbol{i})=-4\times(-2.\boldsymbol{i})=8.\boldsymbol{i}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(-2.\boldsymbol{i})&=5\times(-2.\boldsymbol{i})^3+(8+10.\boldsymbol{i})\times(-2.\boldsymbol{i})^2+(4+16.\boldsymbol{i})\times(-2.\boldsymbol{i})+8.\boldsymbol{i}\\&=5\times 8.\boldsymbol{i}+(8+10.\boldsymbol{i})\times(-4)+(4+16.\boldsymbol{i})\times(-2.\boldsymbol{i})+8.\boldsymbol{i}\\&=\cancel{40.\boldsymbol{i}}\cancel{-32}\cancel{-40.\boldsymbol{i}}\cancel{-8\boldsymbol{i}}\cancel{+32}\cancel{+8.\boldsymbol{i}}=0\end{aligned}$$

Conclusion : comme son image par le polynôme $\mathrm{P}(z)$ est nulle, alors $-2.\boldsymbol{i}$ est une racine de ce dernier. Donc, le polynôme $\mathrm{P}(z)$ est factorisable par le facteur $z-(-2.\boldsymbol{i})=z+2.\boldsymbol{i}$.

b) Deux méthodes permettent de factoriser le polynôme $\mathrm{P}(z)$ par le facteur $z+2.\boldsymbol{i}$:

1. La méthode à éviter : faire apparaître le facteur recherché dans chacun des termes

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(z)&=\overbrace{5\times z^3}^{\text{Combien de fois } z+2.\boldsymbol{i}\text{ ?}}+(8+10.\boldsymbol{i})\times z^2+(4+16.\boldsymbol{i})\times z+8.\boldsymbol{i}\\&=\overbrace{5\times z^2\times(z+2.\boldsymbol{i})-10.\boldsymbol{i}\times z^2}^{=5\times z^3}+(8+10.\boldsymbol{i})\times z^2+(4+16.\boldsymbol{i})\times z+8.\boldsymbol{i}\\&=5\times z^2\times(z+2.\boldsymbol{i})+\overbrace{8\times z^2}^{\text{Combien de fois } z+2.\boldsymbol{i}\text{ ?}}+(4+16.\boldsymbol{i})\times z+8.\boldsymbol{i}\\&=5\times z^2\times(z+2.\boldsymbol{i})+\overbrace{8\times z\times(z+2.\boldsymbol{i})-16.\boldsymbol{i}\times z}^{=8\times z}+(4+16.\boldsymbol{i})\times z+8.\boldsymbol{i}\\&=5\times z^2\times(z+2.\boldsymbol{i})+8\times z\times(z+2.\boldsymbol{i})+\overbrace{4\times z+8.\boldsymbol{i}}\\&=5\times z^2\times\underbrace{(z+2.\boldsymbol{i})}_{\text{Le...}}+8\times z\times\underbrace{(z+2.\boldsymbol{i})}_{\text{...facteur...}}+4\times\underbrace{(z+2.\boldsymbol{i})}_{\text{...commun}}=(z+2.\boldsymbol{i})\times\left(5\times z^2+8\times z+4\right)\end{aligned}$$

2. La méthode à choisir : la méthode par identification

On veut écrire le polynôme $\mathrm{P}(z)=5\times z^3+(8+10.\boldsymbol{i})\times z^2+(4+16.\boldsymbol{i})\times z+8.\boldsymbol{i}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(z)&=(z+2.\boldsymbol{i})\times\left(a\times z^2+b\times z+c\right)\\&=a\times z^3+b\times z^2+c\times z+2.a.\boldsymbol{i}\times z^2+2.b.\boldsymbol{i}\times z+2.c.\boldsymbol{i}\\&=a\times z^3+(b+2.a.\boldsymbol{i})\times z^2+(c+2.b.\boldsymbol{i})\times z+2.c.\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

Or deux polynômes égaux ont des coefficients de même degré égaux. Il vient alors :

$$\underbrace{\begin{cases}\text{Egalité en } z^3 & : \quad a=5\\ \text{Egalité en } z^2 & : \quad b+2.a.\boldsymbol{i}=8+10.\boldsymbol{i} \quad \text{d'où} \quad b+10.\boldsymbol{i}=8+10.\boldsymbol{i} \quad \text{soit} \quad b=8\\ \text{Egalité en } z & : \quad c+2.b.\boldsymbol{i}=4+16.\boldsymbol{i} \quad \text{d'où} \quad c+16.\boldsymbol{i}=4+16.\boldsymbol{i} \quad \text{soit} \quad c=4\\ \text{Egalité en } z^0 & : \quad 2.c.\boldsymbol{i}=8.\boldsymbol{i} \quad \text{d'où} \quad c=4\end{cases}}_{\text{Trois inconnues a, b et c. Quatre équations. Une pour confirmer les trois autres...}}$$

Conclusion : quelque soit la méthode utilisée, à l'issue de cette question, nous pouvons écrire que pour tout nombre complexe z, nous avons :

$$\underbrace{\mathrm{P}(z)=5\times z^3+(8+10.\boldsymbol{i})\times z^2+(4+16.\boldsymbol{i})\times z+8.\boldsymbol{i}}_{\text{Forme développée de } \mathrm{P}(z)}=\underbrace{(z+2.\boldsymbol{i})\times\left(5\times z^2+8\times z+4\right)}_{\text{Forme factorisée de } \mathrm{P}(z)}$$

c) Désormais, nous sommes en position de pouvoir résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$P(z)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(z+2.\boldsymbol{i})\times\left(5\times z^2+8\times z+4\right)=0}_{\text{Dans } \mathbb{C}\text{, un produit est nul si et...}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{z+2.\boldsymbol{i}=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad 5\times z^2+8\times z+4=0}_{\text{...seulement si l'un de ses facteurs l'est.}}$$

Résolvons dans $\mathbb{C}$ ces deux sous-équations :

- D'une part : $\underbrace{z+2.\boldsymbol{i}=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=-2.\boldsymbol{i}}_{\text{C'était prévisible...}}$

- D'autre part, pour résoudre l'équation du second degré $5\times z^2+8\times z+4=0$, calculons son discriminant :

$$\Delta=8^2-4\times5\times8=64-80=-16=(4.\boldsymbol{i})^2$$

Comme son discriminant est négatif, alors cette équation à coefficients réels admet deux solutions complexes :

$$z_1=\frac{-8-4.\boldsymbol{i}}{2\times5}=\frac{-4-2.\boldsymbol{i}}{5} \quad \underline{\text{et}} \quad z_2=\frac{-8+4.\boldsymbol{i}}{2\times5}=\frac{-4+2.\boldsymbol{i}}{5}$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $P(z)=0$ admet dans $\mathbb{C}$ trois solutions : $-2.\boldsymbol{i}$; $-\frac{4+2.\boldsymbol{i}}{5}$ et $\frac{2.\boldsymbol{i}-4}{5}$.

Premiers complexes

Le contexte

Issu d'un sujet de bac, l'exercice suivant aborde les nombres complexes de manière assez classique. Il commence par une résolution d'équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$ avant d'enchaîner sur des savoirs de base : écriture complexe d'une rotation ou d'une translation, caractérisation complexe d'une orthogonalité...

L'énoncé

1) On considère le polynôme $P(z)$ défini par :

$$P(z) = z^3 + \left(14 - i.\sqrt{2}\right)\times z^2 + \left(74 - 14.i.\sqrt{2}\right)\times z - 74.i.\sqrt{2}$$

a. Démontrer que $i.\sqrt{2}$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

b. Trouver deux nombres réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = \left(z - i.\sqrt{2}\right)\times\left(z^2 + a\times z + b\right)$$

c. Résoudre dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

a. Sur le graphique ci-joint, placer les points A, B et I d'affixes respectives :

$z_A = -7 + 5.i$ $\quad z_B = -7 - 5.i$ $\quad z_I = i.\sqrt{2}$

b. Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

c. Placer le point C d'affixe $z_C = 1 + i$.

Déterminer l'affixe du point N tel que ABCN soit un parallélogramme.

d. Placer le point D d'affixe $z_D = 1 + 11.i$.

Calculer $Z = \dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Le corrigé

1.a) Avant de calculer l'image du complexe $i.\sqrt{2}$ par le polynôme $P(z)$, commençons par calculer son carré et son cube. Ca allègera nos calculs par la suite !

$$\left(i.\sqrt{2}\right)^2 = i^2\times\left(\sqrt{2}\right)^2 = -1\times 2 = -2$$

$$\left(i.\sqrt{2}\right)^3 = \left(i.\sqrt{2}\right)\times\left(i.\sqrt{2}\right)^2 = \left(i.\sqrt{2}\right)\times(-2) = -2.i.\sqrt{2}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} P\left(i.\sqrt{2}\right) &= \left(i.\sqrt{2}\right)^3 + \left(14 - i.\sqrt{2}\right)\times\left(i.\sqrt{2}\right)^2 + \left(74 - 14.i.\sqrt{2}\right)\times\left(i.\sqrt{2}\right) - 74.i.\sqrt{2} \\ &= -2.i.\sqrt{2} + \left(14 - i.\sqrt{2}\right)\times(-2) \cancel{+74.i.\sqrt{2}} - 14\times i^2\times\left(\sqrt{2}\right)^2 \cancel{-74.i.\sqrt{2}} \\ &= \cancel{-2.i.\sqrt{2}} \cancel{-28} \cancel{+2.i.\sqrt{2}} \cancel{+28} = 0 \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> comme son image par le polynôme $P(z)$ est nulle, alors le complexe $i.\sqrt{2}$ est l'une de ses racines. Par conséquent, le polynôme $P(z)$ est factorisable par $z - i.\sqrt{2}$.

1.b) Deux méthodes permettent d'arriver à l'écriture mi-factorisée de $P(z)$:

On peut procéder par identification des coefficients de même degré...

On veut écrire le polynôme $P(z) = z^3 + \left(14 - i.\sqrt{2}\right)\times z^2 + \left(74 - 14.i.\sqrt{2}\right)\times z + \left(-74.i.\sqrt{2}\right)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} P(z) &= \left(z - i.\sqrt{2}\right)\times\left(z^2 + a\times z + b\right) \\ &= z^3 + a\times z^2 + b\times z - i.\sqrt{2}\times z^2 - i.\sqrt{2}.a\times z - i.\sqrt{2}\times b \\ &= z^3 + \left(a - i.\sqrt{2}\right)\times z^2 + \left(b - i.\sqrt{2}.a\right)\times z + \left(-i.\sqrt{2}\times b\right) \end{aligned}$$

Or deux polynômes égaux ont leurs coefficients de même degré égaux. Par conséquent :

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{lcll} \text{Egalité en } z^3 & : & 1 = 1 & \text{Quelle avancée !} \\ \text{Egalité en } z^2 & : & a - i.\sqrt{2} = 14 - i.\sqrt{2} & \text{d'où} \quad a = 14 \\ \text{Egalité en } z & : & b - \cancel{i.\sqrt{2}\times a} = 74 - \cancel{14.i.\sqrt{2}} & \text{d'où} \quad b = 74 \\ \text{Egalité en } z^0 & : & -b\times i.\sqrt{2} = -74.i.\sqrt{2} & \text{d'où} \quad b = 74 \end{array}\right.}_{\text{Deux inconnues a et b. Quatre équations dont une ne sert à rien !}}$$

...ou on peut chercher à faire apparaître le facteur dans chacun des termes de P(z).

$$P(z) = \overset{\text{Combien de fois } z-i.\sqrt{2}\ ?}{\overbrace{z^3}} + \left(14-i.\sqrt{2}\right)\times z^2 + \left(74-14.i.\sqrt{2}\right)\times z - 74.i.\sqrt{2}$$

$$= \overbrace{z^2\times\left(z-i.\sqrt{2}\right)\cancel{+i.\sqrt{2}\times z^2}}^{z^3} + 14\times z^2 \cancel{-i.\sqrt{2}\times z^2} + \left(74-14.i.\sqrt{2}\right)\times z - 74.i.\sqrt{2}$$

$$= z^2\times\left(z-i.\sqrt{2}\right) + \overset{\text{Combien de fois } z-i.\sqrt{2}\ ?}{\overbrace{14\times z^2}} + \left(74-14.i.\sqrt{2}\right)\times z - 74.i.\sqrt{2}$$

$$= z^2\times\left(z-i.\sqrt{2}\right) + \overbrace{14\times z\times\left(z-i.\sqrt{2}\right)\cancel{+14.i.\sqrt{2}\times z}}^{14\times z^2} + 74\times z \cancel{-14.i.\sqrt{2}\times z} - 74.i.\sqrt{2}$$

$$= z^2\times\underbrace{\left(z-i.\sqrt{2}\right)}_{\text{Voici...}} + 14\times z\times\underbrace{\left(z-i.\sqrt{2}\right)}_{\text{...le facteur...}} + 74\times\underbrace{\left(z-i.\sqrt{2}\right)}_{\text{...commun}}$$

$$= \left(z-i.\sqrt{2}\right)\times\left(z^2+14\times z+74\right)$$

Conclusion : pour tout nombre complexe z, on a : $P(z) = \left(z-i.\sqrt{2}\right)\times\left(z^2+14\times z+74\right)$.

1.c) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$ ...mais sans recourir au discriminant !

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \left(z-i.\sqrt{2}\right)\times\underbrace{\left(z^2+14\times z+74\right)}_{\text{Factorisons cette forme du second degré}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z-i.\sqrt{2}\right)\times\left[(z+7)^2-49+74\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z-i.\sqrt{2}\right)\times\left[(z+7)^2+25\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z-i.\sqrt{2}\right)\times\left[(z+7)^2-(-25)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(z-i.\sqrt{2}\right)\times\left[(z+7)^2-(5.i)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(z-i.\sqrt{2}\right)\times\left((z+7)-5.i\right)\times\left((z+7)+5.i\right)}_{\text{Ce produit est nul si et seulement...}}=0$$

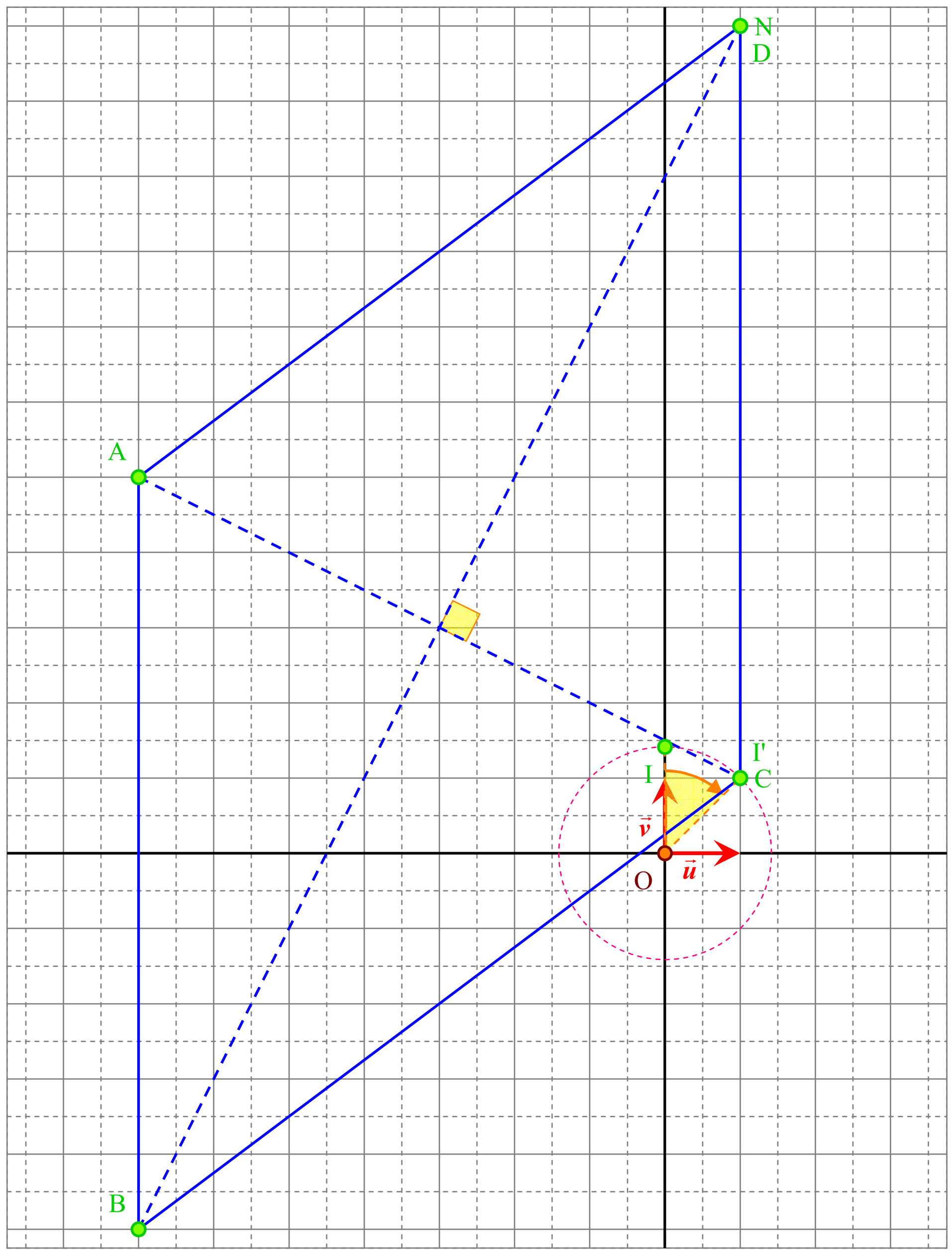
$$\Leftrightarrow \underbrace{z-i.\sqrt{2}=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad z+7-5.i=0 \quad \underline{\text{ou}} \quad z+7+5.i=0}_{\text{...si l'un de ses trois facteurs l'est !}}$$

$$\Leftrightarrow z=i.\sqrt{2} \quad \underline{\text{ou}} \quad z=-7+5.i \quad \underline{\text{ou}} \quad z=-7-5.i$$

Conclusion : l'équation du troisième degré $P(z)=0$ a trois solutions (distinctes) dans $\mathbb{C}$:

$$i.\sqrt{2}\ ;\ -7-5.i \ \text{ et } \ -7+5.i$$

2.a) Les divers points demandés sont placés sur la figure ci-dessous.



2.b) Appelons I' l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Les affixes de ces trois vérifient l'égalité complexe :

$$z_{I'} - z_O = e^{-i.\frac{\pi}{4}} \times \left(z_{I'} - z_O\right)$$

$$z_{I'} - 0 = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \times \left(i.\sqrt{2} - 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times i.\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2} \times i - \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2} \times i^2 = \frac{2}{2}\times i - \frac{2}{2}\times(-1) = i + 1$$

<u>Conclusion :</u> le point I' a pour affixe $1+i$. Et comme par hasard, le point I correspond à C.

2.c) Comme ABCN est un parallélogramme, alors ces quatre points vérifient la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CN}$$

Et les affixes de ces vecteurs et donc de ces quatre points vérifient les égalités complexes :

$$z_{\overrightarrow{BA}} = z_{\overrightarrow{CN}} \Leftrightarrow z_A - z_B = z_N - z_C \Leftrightarrow (-7+5.i) - (-7-5.i) = z_N - (1+i)$$

$$\Leftrightarrow 10.i = z_N - (1+i) \Leftrightarrow z_N = 10.i + (1+i) = 1 + 11.i$$

<u>Conclusion :</u> le point N a pour affixe $1+11.i$.

Et comme les choses sont bien faîtes, N est confondu avec D...

2.d) Simplifions le quotient complexe qui nous est proposé :

$$Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \frac{(-7+5.i)-(1+i)}{(1+11.i)-(-7-5.i)} = \frac{-8+4.i}{8+16.i} = \frac{\cancel{4}\times(-2+i)}{\cancel{4}\times(2+4.i)}$$

$$= \frac{(-2+i)\times(2-4.i)}{(2+4.i)\times(2-4.i)} = \frac{-4+8.i+2.i+4}{(2)^2-(4.i)^2} = \frac{10.i}{4-(-16)} = \frac{10.i}{20}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\times i}_{\text{Forme algébrique}} = \underbrace{\frac{1}{2}\times\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\times\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}_{\text{Forme trigonométrique}} = \underbrace{\frac{1}{2}\times e^{i.\frac{\pi}{2}}}_{\text{Forme exponentielle}}$$

Les arguments du quotient $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sont les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}\right)$.

Or un de ces arguments est égal à $\frac{\pi}{2}$.

<u>Conclusion :</u> comme $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2}$ modulo 2π, alors les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Cela fait du parallélogramme ABCD un losange.

Ni rotation, ni homothétie et pourtant...

Le contexte

Le présent exercice issu de mon cerveau diabolique étudie une transformation du plan définie par son expression complexe qui marie les caractéristiques d'une rotation et d'une homothétie. Et pourtant, elle n'est ni l'une, ni l'autre.
Cet exercice requiert une bonne maîtrise des nombres complexes. C'est presque un exercice de spécialité.

L'énoncé

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On appelle $\boldsymbol{f}$ la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \boldsymbol{f}(z) = -3.\boldsymbol{i}\times z + 7 + \boldsymbol{i}$$

Au cours de l'exercice, on reportera les points rencontrés sur la figure fournie en annexe.

On appelle A et B' les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - 3.\boldsymbol{i} \qquad z_{B'} = 1 + 7.\boldsymbol{i}$$

On note O' et A' les images respectives des points O et A par la transformation $\boldsymbol{f}$.
B est l'antécédent du point B' par la transformation $\boldsymbol{f}$.

a) Calculer les affixes $z_{O'}$ et $z_{A'}$ des points O' et A'.

Déterminer l'affixe z_B du point B.

On appelle G le barycentre des points trois pondérés $(A;2)$, $(B;3)$ et $(O;1)$.

On note G' l'image du point G par la transformation $\boldsymbol{f}$.

b) Calculer l'affixe du point G.
Démontrer que le point G' est le barycentre des points pondérés $(B;2)$, $(B';3)$ et $(O';1)$.

c) On dit qu'un point M est fixe de la transformation $\boldsymbol{f}$ lorsqu'il est sa propre image par $\boldsymbol{f}$.
En résolvant dans $\mathbb{C}$ l'équation $\boldsymbol{f}(z) = z$, déterminer les affixes des points fixes de $\boldsymbol{f}$.

On appelle Ω le point d'affixe $\omega = 1 - 2.\boldsymbol{i}$.

d) Etablir que pour tout nombre complexe z :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = -3.\boldsymbol{i}$$

En utilisant les module et arguments de ce quotient, répondre aux questions suivantes en justifiant :

1. Les points Ω d'affixe ω, M d'affixe z et son image M' d'affixe z' sont-ils alignés ? La transformation $\boldsymbol{f}$ peut-elle être une homothétie ?
2. La transformation $\boldsymbol{f}$ peut-elle être une rotation ?

On note $\boldsymbol{h}$ l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}$ et de centre Ω.

On appelle M'' d'affixe z'' l'image du point M' d'affixe z' par l'homothétie $\boldsymbol{h}$.
On rappelle que M' est l'image de M par la transformation $\boldsymbol{f}$.

e) Déterminer une expression complexe de l'homothétie $\boldsymbol{h}$ faisant intervenir z', z'' et ω.

Pour tout nombre complexe z, écrire le quotient $\frac{z'' - \omega}{z - \omega}$ sous forme exponentielle.

En déduire la nature de la composée $\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{f}$.

Le corrigé

a) Calculons les affixes des images O' et A'.

- $z_{O'} = \boldsymbol{f}(z_O) = -3.\boldsymbol{i}\times 0 + 7 + \boldsymbol{i} = 0 + 7 + \boldsymbol{i} = 7 + \boldsymbol{i}$
- $z_{A'} = \boldsymbol{f}(z_A) = -3.\boldsymbol{i}\times(1 - 3.\boldsymbol{i}) + 7 + \boldsymbol{i} = -3.\boldsymbol{i} - 9 + 7 + \boldsymbol{i} = -2 - 2.\boldsymbol{i}$

➲ Comme le point B a pour image B' par la transformation $\boldsymbol{f}$, alors leurs affixes vérifient :

$$\boldsymbol{f}(z_B) = z_{B'} \Leftrightarrow -3.\boldsymbol{i}\times z_B + 7 + \boldsymbol{i} = 1 + 7.\boldsymbol{i} \Leftrightarrow -3.\boldsymbol{i}\times z_B = -6 + 6.\boldsymbol{i}$$

$$\Leftrightarrow z_B = \frac{-6 + 6.\boldsymbol{i}}{-3.\boldsymbol{i}} = \underbrace{\frac{-6 + 6.\boldsymbol{i}}{3\times(-\boldsymbol{i})} = (-2 + 2.\boldsymbol{i})\times \boldsymbol{i}}_{\text{Diviser par } -\boldsymbol{i}, \text{ c'est multiplier par son inverse } \boldsymbol{i}.} = -2.\boldsymbol{i} - 2$$

Conclusion : l'affixe du point B est $-2 - 2.\boldsymbol{i}$.

b) Comme G est le barycentre des points $(A;2)$, $(B;3)$ et $(O;1)$, alors son affixe vérifie :

$$z_G = \frac{2\times z_A + 3\times z_B + 1\times z_O}{2+3+1} = \frac{2\times(1 - 3.\boldsymbol{i}) + 3\times(-2 - 2.\boldsymbol{i}) + 1\times 0}{2+3+1}$$

$$= \frac{2 - 6.\boldsymbol{i} - 6 - 6.\boldsymbol{i} + 0}{6} = \frac{-4 - 12.\boldsymbol{i}}{6} = -\frac{2}{3} - 2.\boldsymbol{i}$$

➲ Comme G' est l'image du point G par la transformation ***f***, alors son affixe est donnée par :

$$z_{G'} = \boldsymbol{f}(z_G) = -3.\boldsymbol{i}\times\left(-\frac{2}{3}-2.\boldsymbol{i}\right)+7+\boldsymbol{i} = 2.\boldsymbol{i}-6+7+\boldsymbol{i} = 1+3.\boldsymbol{i}$$

A présent, calculons l'affixe du barycentre H des points $(B;2)$, $(B';3)$ et $(O';1)$. Celle-ci nous est donnée par :

$$z_H = \frac{2\times z_B+3\times z_{B'}+1\times z_{O'}}{2+3+1} = \frac{2\times(-2-2.\boldsymbol{i})+3\times(1+7.\boldsymbol{i})+1\times(7+\boldsymbol{i})}{2+3+1}$$
$$= \frac{-4-4.\boldsymbol{i}+3+21.\boldsymbol{i}+7+\boldsymbol{i}}{6} = \frac{6+18.\boldsymbol{i}}{6} = 1+3.\boldsymbol{i} = z_{G'}$$

<u>Conclusion :</u> G' est le barycentre des points pondérés $(B;2)$, $(B';3)$ et $(O';1)$.

c) Déterminons le ou les points fixes de la transformation ***f***.

M d'affixe z est fixe par ***f*** $\Leftrightarrow \boldsymbol{f}(z) = z \Leftrightarrow -3.\boldsymbol{i}\times z+7+\boldsymbol{i} = z$

$$\Leftrightarrow 7+\boldsymbol{i} = (1+3.\boldsymbol{i})\times z$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{7+\boldsymbol{i}}{1+3.\boldsymbol{i}} = \frac{(7+\boldsymbol{i})\times(1-3.\boldsymbol{i})}{(1+3.\boldsymbol{i})\times(1-3.\boldsymbol{i})} = \frac{7-21.\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}+3}{1^2+3^2}$$
$$= \frac{10-20.\boldsymbol{i}}{10} = 1-2.\boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion :</u> la transformation ***f*** admet une unique point fixe : il a pour affixe $1-2.\boldsymbol{i}$ et par la suite, nous l'appellerons Ω. Ce point est le centre de la similitude directe ***f***.

d) Pour tout nombre complexe z, nous pouvons écrire :

$$\frac{z'-\omega}{z-\omega} = \frac{-3.\boldsymbol{i}\times z+7+\boldsymbol{i}-1+2.\boldsymbol{i}}{z-1+2.\boldsymbol{i}} = \frac{-3.\boldsymbol{i}\times z+6+3.\boldsymbol{i}}{z-1+2.\boldsymbol{i}}$$
$$= \frac{\overbrace{-3.\boldsymbol{i}\times z+(-3.\boldsymbol{i})\times 2.\boldsymbol{i}-1\times(-3.\boldsymbol{i})}^{\text{On factorise le numérateur par } -3.\boldsymbol{i}\text{...}}}{z-1+2.\boldsymbol{i}} = \overbrace{\frac{(-3.\boldsymbol{i})\times\cancel{(z+2.\boldsymbol{i}-1)}}{\cancel{z-1+2.\boldsymbol{i}}}}^{\text{...et ça se simplifie !}} = -3.\boldsymbol{i}$$

➲ Pour pouvoir exploiter ce quotient $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$, déterminons module et arguments de $-3.\boldsymbol{i}$.

D'abord calculons son module :

$$|-3.\boldsymbol{i}| = |0+\boldsymbol{i}\times(-3)| = \sqrt{0^2+(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Il vient alors :

$$\frac{z'-\omega}{z-\omega} = -3.\boldsymbol{i} = 3\times(0+\boldsymbol{i}\times(-1)) = 3\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\boldsymbol{i}\times\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3\times e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{2}}$$

Donc les arguments du quotient $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ sont les réels de la forme $-\dfrac{\pi}{2}+k\times 2\pi$ où k est un entier relatif.

Comme les points Ω, M et M' ont respectivement pour affixes ω, z et z', alors il vient :

1. $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π

   Donc les points Ω, M et M' ne sont pas alignés. En fait, le triangle ΩMM' est rectangle en Ω.
   Or par une homothétie, le centre, un point et son image sont toujours alignés. La transformation ***f*** ne peut donc pas être une homothétie.

2. $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 3$. La transformation ***f*** multiplie la distance ΩM par 3.

   Or une rotation est une isométrie, c'est-à-dire qu'elle conserve les distances.
   Par conséquent, la transformation ***f*** ne peut pas être une rotation.

e) Comme le point M'' est l'image de M' pat l'homothétie ***h*** de rapport $\dfrac{1}{3}$ et de centre Ω alors on a la relation :

$$\overrightarrow{\Omega M''} = \frac{1}{3}\times\overrightarrow{\Omega M}$$

Traduisons cette égalité vectorielle sous forme complexe. Il vient :

$$z_{\overrightarrow{\Omega M''}} = \frac{1}{3}\times z_{\overrightarrow{\Omega M''}} \Leftrightarrow z''-\omega = \frac{1}{3}\times(z'-\omega) \Leftrightarrow \underbrace{\frac{z''-\omega}{z'-\omega} = \frac{1}{3}}_{\text{A condition que z et ω soient différents...}}$$

➲ Pour tout nombre complexe z (différent de ω), nous pouvons écrire :

$$\frac{z''-\omega}{z-\omega} = \frac{z''-\omega}{z'-\omega}\times\frac{z'-\omega}{z-\omega} = \frac{1}{3}\times 3\times e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{2}} = e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{2}}$$

➲ Comme le point Ω est le centre de l'homothétie ***h***, alors il est invariant par celle-ci.
Par conséquent, sa situation vis-à-vis de la composée $\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{f}$ est la suivante :

$$\Omega \xrightarrow{\text{Simulitude } \boldsymbol{f}} \Omega \xrightarrow{\text{Homothétie } \boldsymbol{h}} \Omega$$

Le point Ω est fixe par la composée $\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{f}$.

L'image du point M d'affixe z par cette même composée $h \circ f$ est le point M" d'affixe z".

En effet, nous avons la situation :

$$M \xrightarrow{\text{Simulitude } f} M' \xrightarrow{\text{Homothétie } h} M''$$

Mais l'essentiel n'est pas là mais dans la forme exponentielle du quotient $\dfrac{z''-\omega}{z-\omega}$. D'après celle-ci, nous pouvons écrire :

- $\dfrac{\Omega M''}{\Omega M} = \left|\dfrac{z''-\omega}{z-\omega}\right| = \left|e^{-i\frac{\pi}{2}}\right| = 1$ donc $\Omega M'' = \Omega M$
- $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}\right) = \arg\left(\dfrac{z''-\omega}{z-\omega}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.

Conclusion : le point M" est l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Voilà ce qu'est la composée $h \circ f$.

La vraie nature de la similitude directe f

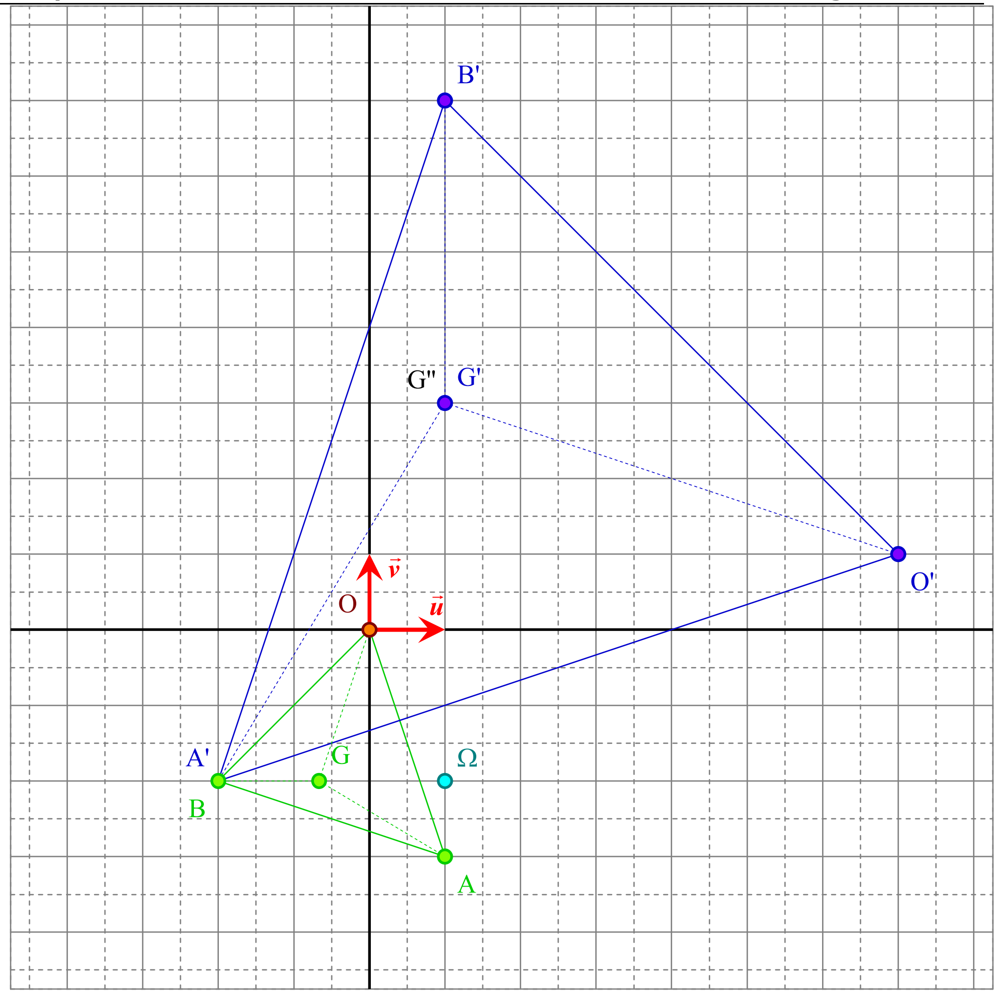
Les caractéristiques de la transformation ***f*** tiennent à la fois de celles d'une homothétie et de celles d'une rotation.

Comme les homothéties et les rotations, ***f*** a un unique point fixe Ω qui est son centre.

Comme les homothéties, ***f*** a un rapport qui est 3 (elle multiplie les distances par 3).

Comme les rotations, ***f*** a un angle qui est $\dfrac{\pi}{2}$ (elle fait pivoter tous les points de $\dfrac{\pi}{2}$ radians).

En fait, la transformation ***f*** est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et de l'homothétie aussi de centre Ω et de rapport 3.



Le mystère pi sur douze - France septembre 2007

Le contexte

Cet exercice est le troisième du sujet France septembre 2007. Il mélange à la fois nombres complexes, trigonométrie et significations géométriques.

L'énoncé

Soit les nombres complexes : $z_1=\sqrt{2}+\boldsymbol{i}.\sqrt{6}$; $z_2=2+2.\boldsymbol{i}$ et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

a) Ecrire Z sous forme algébrique.

b) Donner les modules et arguments de z_1 ; z_2 et Z.

c) En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

d) Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ où une unité graphique vaut deux centimètres.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1 ; z_2 et Z.
Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

e) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

Le corrigé

a) Nous pouvons écrire :

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}+\boldsymbol{i}.\sqrt{6}}{2+2.\boldsymbol{i}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\boldsymbol{i}.\sqrt{6}\right)\times(2-2.\boldsymbol{i})}{(2+2.\boldsymbol{i})\times(2-2.\boldsymbol{i})}$$
$$=\frac{2.\sqrt{2}-2.\boldsymbol{i}.\sqrt{2}+2.\boldsymbol{i}.\sqrt{6}-2\times(-1)\times\sqrt{6}}{(2)^2-(2.\boldsymbol{i})^2}=\frac{2.\sqrt{2}+2\sqrt{6}-2.\boldsymbol{i}.\sqrt{2}+2.\boldsymbol{i}.\sqrt{6}}{4-(-4)}$$
$$=\frac{2\times\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{8}+\boldsymbol{i}.\frac{2\times\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{8}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\boldsymbol{i}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

b) Commençons par calculer le module de $z_1=\sqrt{2}+\boldsymbol{i}.\sqrt{6}$.

$$|z_1|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{2+6}=\sqrt{8}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2.\sqrt{2}$$

Il vient alors pour ses arguments :

$$\frac{z_1}{|z_1|}=\frac{\sqrt{2}+\boldsymbol{i}.\sqrt{6}}{2.\sqrt{2}}=\frac{\cancel{\sqrt{2}}+\boldsymbol{i}\times\cancel{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}}{2.\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\boldsymbol{i}.\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}$$

<u>Conclusion :</u> z_1 a pour module $2.\sqrt{2}$ et ses arguments sont de la forme $\dfrac{\pi}{3}+k\times 2.\pi$ où k est un entier relatif.

➲ Passons au nombre complexe $z_2=2+2.\boldsymbol{i}$:

$$|z_2|=\sqrt{(2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2.\sqrt{2}$$

Il vient alors :

$$\frac{z_2}{|z_2|}=\frac{\cancel{2}+\cancel{2}.\boldsymbol{i}}{\cancel{2}.\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\boldsymbol{i}.\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\boldsymbol{i}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\boldsymbol{i}.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{4}}$$

<u>Conclusion :</u> z_2 a pour module $2.\sqrt{2}$ et ses arguments sont de la forme $\dfrac{\pi}{4}+k\times 2.\pi$ où k est un entier relatif.

➲ Le module du quotient Z est le quotient des modules de z_1 et z_2.

$$|Z|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{\cancel{2.\sqrt{2}}}{\cancel{2.\sqrt{2}}}=1$$

Et les arguments du quotient Z sont les différences des arguments de z_1 et z_2.

$$\arg(Z)=\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{4.\pi}{12}-\frac{3.\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\quad\text{modulo } 2\pi$$

<u>Conclusion :</u> Z a pour module 1 et ses arguments de la forme $\dfrac{\pi}{12}+k\times 2.\pi$ où k est un entier relatif.

c) De Z, nous connaissons son écriture algébrique, son module et ses arguments. Par conséquent, nous avons l'égalité suivante :

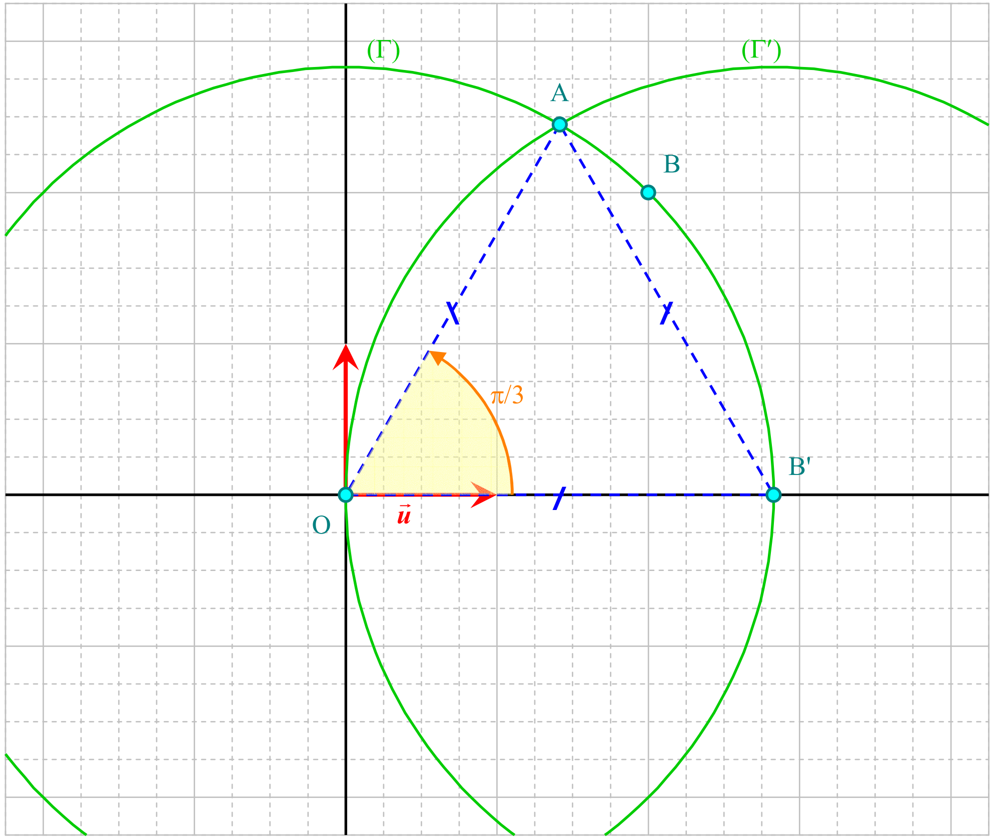
$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\boldsymbol{i}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=Z=1\times e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{12}}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\boldsymbol{i}.\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Or deux nombres complexes égaux ont des parties réelles et imaginaires égales. Il vient :

Parties réelles égales	Parties imaginaires égales
$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

d) Après avoir placé le point B, on construit cercle (Γ) de centre O et passant par B.
Ce cercle de rayon $OB=|z_2|=2.\sqrt{2}$ coupe la demi-droite $(O;\vec{u})$ en B'.

On trace alors le cercle (Γ') de centre B' et passant par O. Son rayon est égal à $2.\sqrt{2}$.
On appelle A le point d'intersection des cercles (Γ) et (Γ') dont les coordonnées sont positives.



Le point A est équidistant de O et B' : il se trouve à $2.\sqrt{2}$ de ses deux points. Exactement la distance entre O et B'. Par conséquent, le triangle OB'A est équilatéral direct.

Par conséquent, l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OA})$ mesure $\frac{\pi}{3}$ radians.

Donc ce point A a pour affixe le nombre complexe z_1 de module $2.\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

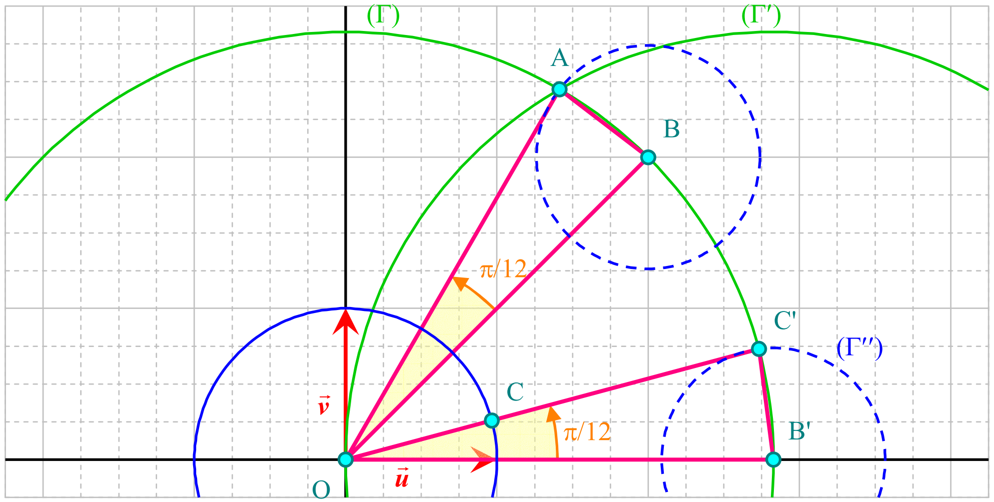
Dans le triangle OBA, l'angle orienté $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$ mesure $\frac{\pi}{12}$ radians.

On trace le cercle (Γ") de centre B' et de rayon BA.
On désigne par C' le point d'intersection des cercles (Γ") et (Γ) dont les coordonnées sont positives. Les triangles OAB et OC'B' sont isométriques (ils ont les mêmes dimensions).

En fait, le triangle OC'B' est l'image de OAB par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Donc les angles orientés $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OB'},\overrightarrow{OC'})$ ont la même mesure : $\frac{\pi}{12}$ radians.

Le point C est alors l'intersection du cercle trigonométrique et du segment [OC'].



e) Les module et argument de Z sont 1 et $\frac{\pi}{12}$. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$Z^{2007} = \left(1 \times e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{12}}\right)^{2007} = \left(e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{12}}\right)^{2007} = \exp\left(2007 \times \boldsymbol{i}.\frac{\pi}{12}\right)$$

Dans un tour de $2.\pi$, il y a 24 douzièmes de π. La division euclidienne de 2007 par 24 donne l'égalité :

$$2007 = 24 \times 83 + 15$$

Il vient alors :

$$Z^{2007} = \exp\left(\frac{2007}{12} \times \boldsymbol{i}.\pi\right) = \exp\left(\left(\frac{24 \times 83}{12} + \frac{15}{12}\right) \times \boldsymbol{i}.\pi\right) = \exp\left(\left(83 \times 2.\pi + \frac{5.\pi}{4}\right) \times \boldsymbol{i}\right)$$

$$= e^{\boldsymbol{i}.\frac{5.\pi}{4}} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}.\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \boldsymbol{i}.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2} + \boldsymbol{i}.\sqrt{2}}{2}$$

Ensembles de points et nombres complexes

Le contexte

Le présent exercice traite des traductions complexes de droites et de cercles du plan. Là encore, c'est une création de mon volcanique cerveau.

L'énoncé

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Les points A et B ont pour affixes respectives :

$$z_A = 2 - \boldsymbol{i} \quad \text{et} \quad z_B = \boldsymbol{i}$$

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

a) De quelle forme sont les affixes z des points M du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB].

d) On appelle E le point du plan tel que :

$$\frac{BE}{BA} = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi .$$

Déterminer par le calcul la forme algébrique de l'affixe du point E.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z - 2 + \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \times \overline{z} - 1$.

On représentera sur le graphique ci-contre l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M dont les affixes z sont solutions de cette équation.

d) Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a :

$$\left|\boldsymbol{i}\times\overline{z} - 1\right| = \left|z - \boldsymbol{i}\right|$$

Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z vérifiant l'égalité :

$$\left|z - 2 + \boldsymbol{i}\right| = \left|\boldsymbol{i}\times\overline{z} - 1\right|$$

Le corrigé

a) Le centre du cercle de diamètre [AB] est le milieu I du segment [AB]. Calculons son affixe z_I.

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 - \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Le rayon de ce cercle $\mathcal{C}$ est égal à la longueur IB. Calculons la !

$$IB = \left|z_I - z_B\right| = \left|1 - \boldsymbol{i}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Finalement, nous concluons que le cercle $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M du plan dont les affixes z sont de la forme :

$$z = 1 + \sqrt{2} \times e^{\boldsymbol{i}.\theta}$$

où θ est un réel quelconque.

b) Le quotient des longueurs $\frac{BE}{BA}$ est le module du quotient $\frac{z_E - z_B}{z_A - z_B}$.

Les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}\right)$ sont les arguments de ce même quotient.

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\frac{z_E - z_B}{z_A - z_B} = \sqrt{2} \times e^{\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} + \boldsymbol{i}.\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 1 + \boldsymbol{i}$$

Il vient alors :

$$z_E - z_B = (1+\boldsymbol{i}) \times (z_A - z_B) \Leftrightarrow z_E - \boldsymbol{i} = (1+\boldsymbol{i}) \times (2 - \boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}) = (1+\boldsymbol{i}) \times (2 - 2.\boldsymbol{i})$$

$$= 2 \cancel{- 2.\boldsymbol{i}} + \cancel{2.\boldsymbol{i}} + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow z_E = 4 + \boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion :</u> l'affixe du point E est $4 + \boldsymbol{i}$.

c) Pour résoudre cette équation, il nous faut descendre jusqu'aux parties réelle x et imaginaire y de l'inconnue complexe z. Nous avons alors :

$$z = x + \boldsymbol{i}.y \quad \text{et} \quad \overline{z} = x - \boldsymbol{i}.y$$

Nous pouvons écrire :

$$z - 2 + \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\times\overline{z} - 1 \Leftrightarrow (x + \boldsymbol{i}.y) - 2 + \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \times (x - \boldsymbol{i}.y) - 1$$

$$\Leftrightarrow x + \boldsymbol{i}.y - 2 + \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}.x + y - 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-2) + \boldsymbol{i}.(y+1) = (y-1) + \boldsymbol{i}.x}_{\text{Deux nombres complexes égaux ont des...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x - 2 = y - 1}_{\text{...des parties réelle...}} \quad \underline{\text{et}} \quad \underbrace{y + 1 = x}_{\text{...et imaginaire égales}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x - y = 1 \quad \underline{\text{et}} \quad x - y = 1}_{\text{C'est la même équation...de droite !}}$$

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite d'équation $x - y = 1$ ...qui n'est rien d'autre que la médiatrice du segment [AB]

d) L'égalité demandée peut être établie de deux manières :

➥ ***En utilisant les propriétés du module et de la conjugaison***

Pour tout nombre complexe z, nous pouvons écrire

$$\left|\boldsymbol{i}\times\overline{z}+1\right|=\left|\boldsymbol{i}\times\left(\overline{z}+\boldsymbol{i}\right)\right|=\left|\boldsymbol{i}\right|\times\left|\overline{z}+\boldsymbol{i}\right|=1\times\left|\overline{z}+\boldsymbol{i}\right|=\left|\overline{z}+\boldsymbol{i}\right|$$

Or le conjugué de $\overline{z}+\boldsymbol{i}$ est $\overline{\overline{z}+\boldsymbol{i}}=\overline{\overline{z}}-\boldsymbol{i}=z-\boldsymbol{i}$.

Comme un nombre $\overline{z}+\boldsymbol{i}$ et son conjugué $z-\boldsymbol{i}$ ont des modules égaux, alors nous en concluons :

$$\left|\boldsymbol{i}\times\overline{z}+1\right|=\left|z-\boldsymbol{i}\right|$$

➥ ***En s'appuyant sur les parties réelle x et imaginaire y du nombre complexe z***

Exprimons les deux modules en fonction de x et y. Nous avons :

➔ D'une part : $\left|\boldsymbol{i}\times\overline{z}+1\right|=\left|\boldsymbol{i}\times\left(x+\boldsymbol{i}.y\right)+1\right|=\left|\boldsymbol{i}.x-y+1\right|=\left|\left(1-y\right)+\boldsymbol{i}.x\right|$

$$=\sqrt{\left(1-y\right)^2+x^2}=\sqrt{x^2+y^2+1-2\times y}$$

➔ De l'autre : $\left|z-\boldsymbol{i}\right|=\left|x+\boldsymbol{i}.y-\boldsymbol{i}\right|=\left|x+\boldsymbol{i}\times\left(y-1\right)\right|$

$$=\sqrt{x^2+\left(1-y\right)^2}=\sqrt{x^2+1+y^2-2\times y}$$

D'où l'égalité demandée.

Cette égalité connue, l'ensemble $\mathcal{F}$ devient alors beaucoup moins mystérieux.

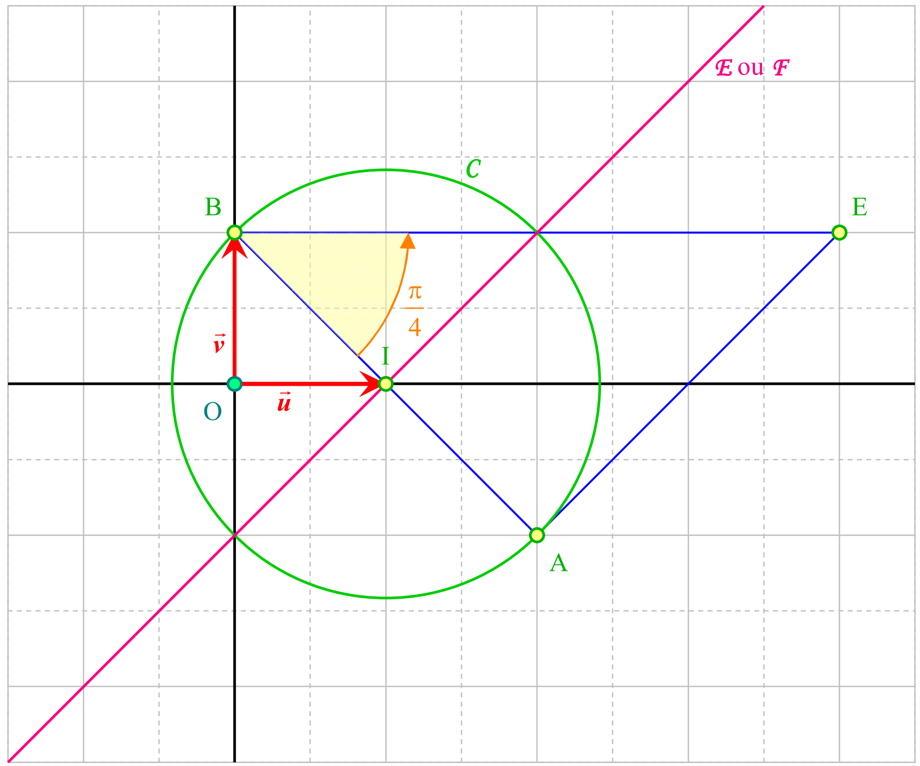
M d'affixe z appartient à $\mathcal{F}$ $\Leftrightarrow$ $\left|z-2+\boldsymbol{i}\right|=\left|\boldsymbol{i}\times\overline{z}-1\right|=\left|z-\boldsymbol{i}\right|$

$\Leftrightarrow$ $\left|z-z_A\right|=\left|z-z_B\right|$ $\Leftrightarrow$ AM = BM

$\Leftrightarrow$ M est équidistant des points A et B

$\Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice du segment [AB]

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{F}$ est la médiatrice du segment [AB].



Les complexes des Caraïbes - Antilles-Guyane juin 2000

Le contexte

Cet exercice débute par une très classique équation équation du troisième de gré à résoudre dans $\mathbb{C}$ avant d'obliquer sur le produit scalaire. Des choses devenues rares..

L'énoncé

1°) Le polynôme $P(z)$ est défini pour tout nombre complexe z par :

$$P(z) = z^3 - 3\times z^2 + 3\times z + 7$$

a. Calculer $P(-1)$.

b. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = (z+1)\times\left(z^2 + a\times z + b\right)$$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

2°) Sur la figure ci-contre, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ où une unité graphique vaut deux centimètres.

On appelle A, B, C et G les points d'affixes respectives :

$z_A = -1$ $\quad$ $z_B = 2 + \boldsymbol{i}.\sqrt{3}$ $\quad$ $z_C = 2 - \boldsymbol{i}.\sqrt{3}$ $\quad$ $z_G = 3$

a. Déterminer la nature du triangle ABC. On justifiera sa réponse.

b. Ecrire sous forme algébrique le quotient $\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$, puis en donner un argument.

En déduire la nature du triangle GAC.

3°) $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\left(-\overrightarrow{MA} + 2.\overrightarrow{MB} + 2.\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{CG} = 12 \qquad \textit{(1)}$$

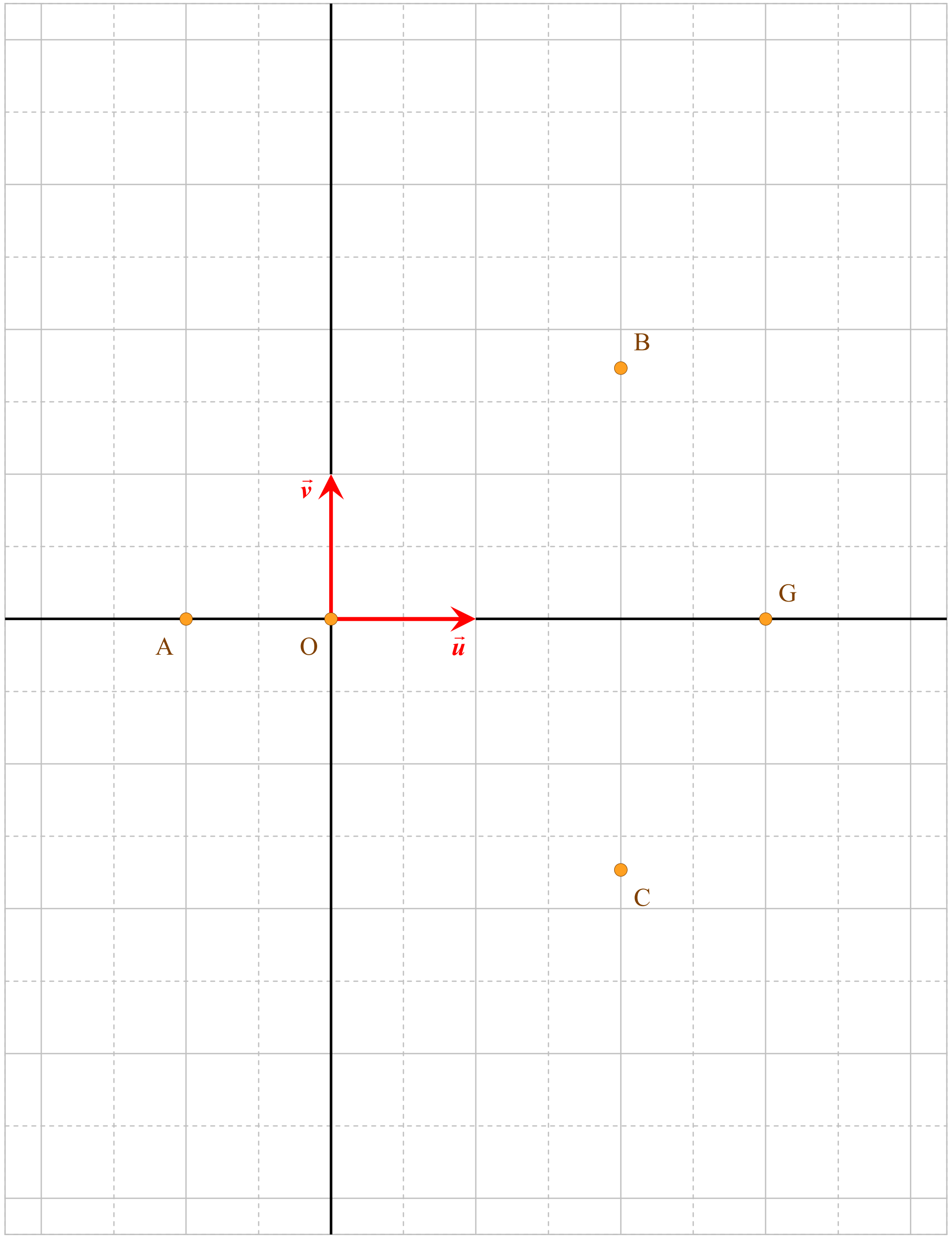
a. Montrer que G est le barycentre des trois points pondérés $(A;-1)$, $(B;2)$ et $(C;2)$.

b. Montrer que la relation *(1)* est équivalente à la relation $\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{CG} = -4$ *(2)*.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{CG}$.
Que peut-on en déduire quant au point A ?

d. Montrer que la relation *(2)* est équivalente à la relation $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CG} = 0$.

e. En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$.



Le corrigé

1°) Calculons l'image de -1 par le polynôme $P(z)$.

$$P(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2+3\times(-1)+7=-1-3-3+7=0$$

-1 étant une racine de $P(z)$, ce polynôme est factorisable par le facteur $z-(-1)=z+1$.

Procédons à cette factorisation !

$$P(z)=\overbrace{z^3}^{\text{Combien de fois z+1 ?}}-3\times z^2+3\times z+7=\overbrace{z^2\times(z+1)-z^2}^{=z^3}-3\times z^2+3\times z+7$$

$$=z^2\times(z+1)\overbrace{-4\times z^2}^{\text{Combien de fois z+1 ?}}+3\times z+7=z^2\times(z+1)\overbrace{-4\times z\times(z+1)+4\times z}^{=-4\times z}+3\times z+7$$

$$=z^2\times(z+1)-4\times z\times(z+1)+7\times z+7=z^2\times\underbrace{(z+1)}_{\text{Fac...}}-4\times z\times\underbrace{(z+1)}_{\text{...tor...}}+7\times\underbrace{(z+1)}_{\text{...isons}}$$

$$=(z+1)\times\left(z^2-4\times z+7\right)$$

Nous aurions aussi pu procéder par identification ! L'essentiel est que $P(z)$ soit factorisé.

A présent, la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$ ne pose plus aucun problème !

$$P(z)=0 \Leftrightarrow \underbrace{(z+1)\times\left(z^2-4\times z+7\right)=0}_{\text{Un produit est nul si et seulement si...}} \Leftrightarrow \underbrace{z+1=0 \quad \text{ou} \quad z^2-4\times z+7=0}_{\text{...l'un de ses facteurs l'est !}}$$

La première sous-équation $z+1=0$ a pour seule solution -1. Ce qui n'est pas un scoop !

Pour résoudre la seconde sous-équation du second degré $z^2-4\times z+7=0$, on peut :

- ...soit calculer son discriminant :

$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times7=16-28=-12=\left(\boldsymbol{i}.\sqrt{12}\right)^2=\left(\boldsymbol{i}.2.\sqrt{3}\right)^2$$

Comme son discriminant est négatif, alors l'équation du second degré a deux racine complexes et conjuguées :

$$z_1=\frac{-(-4)-\boldsymbol{i}.2.\sqrt{3}}{2\times1}=\frac{4-\boldsymbol{i}.2.\sqrt{3}}{2}=2-\boldsymbol{i}.\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-(-4)+\boldsymbol{i}.2.\sqrt{3}}{2\times1}=2+\boldsymbol{i}.\sqrt{3}$$

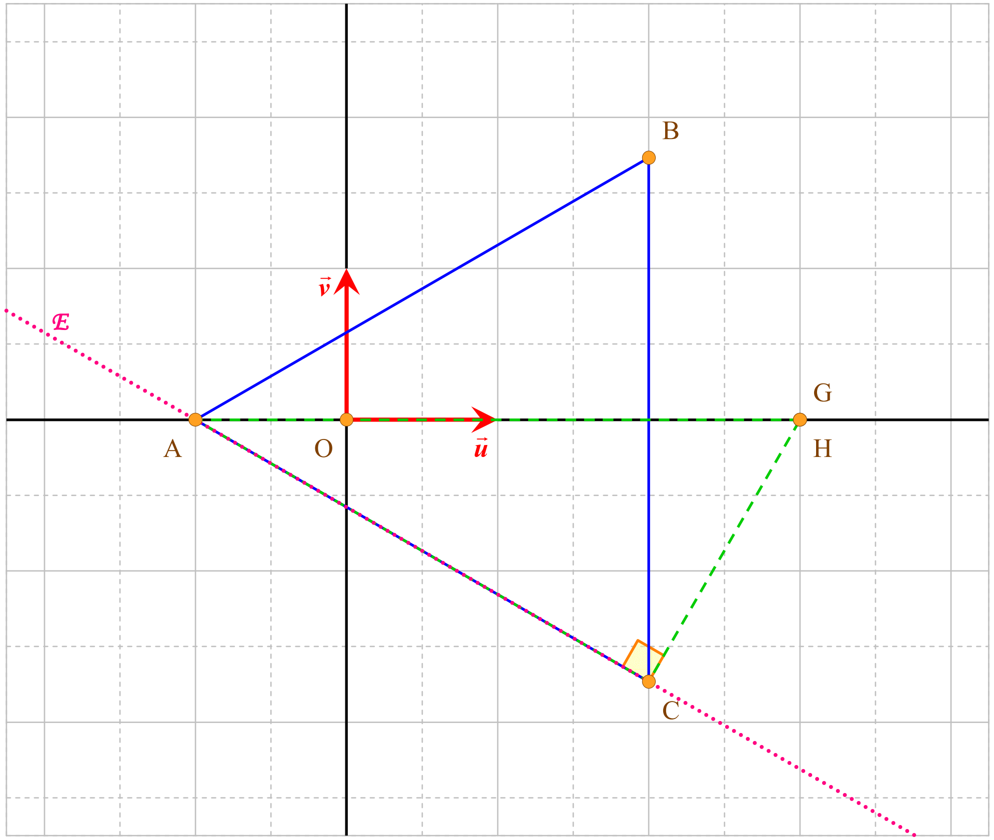
- ..ou poursuivre la factorisation :

$$\underbrace{z^2-4\times z}_{\text{Début d'une identité...}}+7=\underbrace{(z-2)^2-4}_{=z^2-4\times z}+7=(z-2)^2+3=(z-2)^2-(-3)$$

$$=(z-2)^2-\left(\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right)^2=\underbrace{\left(z-2-\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right)\times\left(z-2+\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right)}_{\text{On voit apparaître les deux solutions...}}$$

Conclusion : l'équation $P(z)=0$ a trois solutions dans $\mathbb{C}$: -1 ; $2-\boldsymbol{i}.\sqrt{3}$ et $2+\boldsymbol{i}.\sqrt{3}$.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



2.a) Sur la figure, le triangle ABC semble équilatéral. On peut l'établir de deux façons :

- Soit en calculant les longueurs des trois côtés à partir des affixes des points A, B et C.

$$AB=\left|z_B-z_A\right|=\left|\left(2+\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right)-(-1)\right|=\left|3+\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right|=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}=2.\sqrt{3}$$

$$BC=\left|z_C-z_B\right|=\left|\left(2-\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right)-\left(2+\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right)\right|=\left|-2\times\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right|=2.\sqrt{3}$$

$$AC=\left|z_C-z_A\right|=\left|\left(2-\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right)-(-1)\right|=\left|3-\boldsymbol{i}.\sqrt{3}\right|=\sqrt{3^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}=2.\sqrt{3}$$

Conclusion : comme ses trois côtés ont la même longueur, alors le triangle ABC est équilatéral.

En s'intéressant à un certain quotient complexe :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{3+i.\sqrt{3}}{3-i.\sqrt{3}} = \frac{\left(3+i.\sqrt{3}\right)\times\left(3+i.\sqrt{3}\right)}{\left(3-i.\sqrt{3}\right)\times\left(3+i.\sqrt{3}\right)} = \frac{9+3.i.\sqrt{3}+3.i.\sqrt{3}-3}{3^2-\left(i.\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{6+6.i.\sqrt{3}}{9-(-3)} = \frac{6\times\left(1+i.\sqrt{3}\right)}{12} = \frac{1+i.\sqrt{3}}{2} = e^{i.\frac{\pi}{3}}$$

Conclusion : comme $\underbrace{\frac{AB}{AC} = \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{3}}_{\text{En fait, B est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle } \pi/3}$,

alors nous en déduisons que le triangle ACB est équilatéral direct.

2.b) Avant de lui trouver un argument, simplifions le quotient qui nous est proposé.

$$\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \frac{(-1)-\left(2-i.\sqrt{3}\right)}{3-\left(2-i.\sqrt{3}\right)} = \frac{-3+i.\sqrt{3}}{1+i.\sqrt{3}} \quad \underbrace{\ldots = \frac{\left(i.\sqrt{3}\right)^2+i.\sqrt{3}}{1+i.\sqrt{3}} = i.\sqrt{3}\times\frac{\cancel{i.\sqrt{3}+1}}{\cancel{1+i.\sqrt{3}}} = i.\sqrt{3}}_{\text{Une voie possible à condition de voir le facteur commun...}}$$

$$\underbrace{= \frac{\left(-3+i.\sqrt{3}\right)\times\left(1-i.\sqrt{3}\right)}{\left(1+i.\sqrt{3}\right)\times\left(1-i.\sqrt{3}\right)} = \frac{\cancel{-3}+3.i.\sqrt{3}+i.\sqrt{3}\cancel{+3}}{1^2-\left(i.\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4\times i.\sqrt{3}}{1-(-3)} = \frac{\cancel{4}\times i.\sqrt{3}}{\cancel{4}} = i.\sqrt{3}}_{\text{La voie classique en multipliant par le conjugué du dénominateur...}}$$

Un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = i.\sqrt{3}$ est $\frac{\pi}{2}$.

Conclusion : comme $\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CA}\right) = \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}\right) = \frac{\pi}{2}$, alors le triangle GCA est rectangle en C. Par contre, il n'est pas isocèle car $\frac{CA}{CG} = \left|\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}\right| = \left|i.\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$.

3.a) Calculons l'affixe du barycentre H des trois pondérés $(A;-1)$, $(B;2)$ et $(C;2)$.

$$z_H = \frac{-z_A + 2\times z_B + 2\times z_C}{-1+2+2} = \frac{-(-1)+2\times\left(2+i.\sqrt{3}\right)+2\times\left(2-i.\sqrt{3}\right)}{3}$$

$$= \frac{1+4+\cancel{2.i.\sqrt{3}}+4\cancel{-2.i.\sqrt{3}}}{3} = \frac{9}{3} = 3 = z_G$$

Conclusion : comme les points G et H ont la même affixe, alors G est le barycentre des trois points pondérés $(A;-1)$, $(B;2)$ et $(C;2)$.

3.b) Comme G est le barycentre des points pondérés $(A;-1)$, $(B;2)$ et $(C;2)$, alors il est le seul point du plan qui vérifie la relation vectorielle :

$$-\overrightarrow{GA} + 2\times\overrightarrow{GB} + 2\times\overrightarrow{GC} = \vec{o}.$$

Par conséquent, pour tout point M du plan, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{-\overrightarrow{MA} + 2\times\overrightarrow{MB} + 2\times\overrightarrow{MC} = -\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right) + 2\times\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right) + 2\times\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right) = (-1+2+2)\times\overrightarrow{MG}\underbrace{-\overrightarrow{GA}+2\times\overrightarrow{GB}+2\times\overrightarrow{GC}}_{=\vec{o}} = 3\times\overrightarrow{MG}}_{\text{Nous venons d'établir the famous théorème de réduction des sommes vectorielles}}$$

La relation ***(1)*** devient alors :

$$\underbrace{\left(-\overrightarrow{MA}+2.\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{CG} = 12}_{\text{Relation } (1)} \Leftrightarrow \left(-3\times\overrightarrow{GM}\right)\cdot\overrightarrow{CG} = 12 \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{CG} = -4}_{\text{On divise l'égalité par } -3}$$

3.c) Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{CG}$ en utilisant les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix} = (-4)\times 1 + 0\times\sqrt{3} = -4+0 = -4$$

Comme le point A vérifie la relation ***(2)*** $\Leftrightarrow$ ***(1)***, alors il appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.

3.d) Compte-tenu de ce qui vient d'être établi, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{CG} = -4}_{\text{Relation } (2)} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM}\cdot\underbrace{\overrightarrow{CG}}_{\text{Facteur...}} - \overrightarrow{GA}\cdot\underbrace{\overrightarrow{CG}}_{\text{...commun}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{GA}\right)\cdot\overrightarrow{CG} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{AG}\right)\cdot\overrightarrow{CG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CG} = 0$$

3.e) Récapitulons tout ce que nous ont appris les questions 3 à propos de l'ensemble $\mathcal{E}$.

$$M\in\mathcal{E} \Leftrightarrow \underbrace{\left(-\overrightarrow{MA}+2.\overrightarrow{MB}+2.\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{CG} = 12}_{\text{Relation } (1)} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{CG} = -4}_{\text{Relation } (2) \text{ d'après 3.b.}} \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CG} = 0}_{\text{D'après 3.d.}}$$

$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont orthogonaux.

$\Leftrightarrow$ Le point M appartient à la perpendiculaire à la droite (CG) passant par A

Conclusion : comme le triangle GAC est rectangle en C, alors nous en déduisons que l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est rien d'autre que la droite (AC).

Probabilités

Alevin rouge mais la main verte ! Nouvelle-Calédonie mars 2008

Le contexte

Cet exercice est la reprise du premier exercice donné en Nouvelle-Calédonie en mars 2008. Il est assez classique et aussi assez facile. Il aborde les probabilités conditionnelles, les lois de Bernoulli ainsi que les variables aléatoires. Comme pour la plupart des exos de proba, un bon arbre au début et tout est quasiment fait ! D'où l'utilité d'avoir la main verte.

L'énoncé

Deux éleveurs produisent une même espèce de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois.

- Pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10% ne survivent pas, 75% deviennent rouges et les 15% restant deviennent gris.
- Pour les alevins du second élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5% ne survivent pas, 65% deviennent rouges et les 30% restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins à l'âge de deux mois : 60% proviennent du premier élevage et 40% proviennent du second.

Les dons de voyance des correcteurs étant très limités, l'aimable participant veillera à bien expliquer les événements qu'il pourrait être amené à introduire et à utiliser. Il peut aussi prendre toute initiative (légale) qu'il estime nécessaire à la résolution de cet exercice.

1°) Un enfant achète un poisson le soir même de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

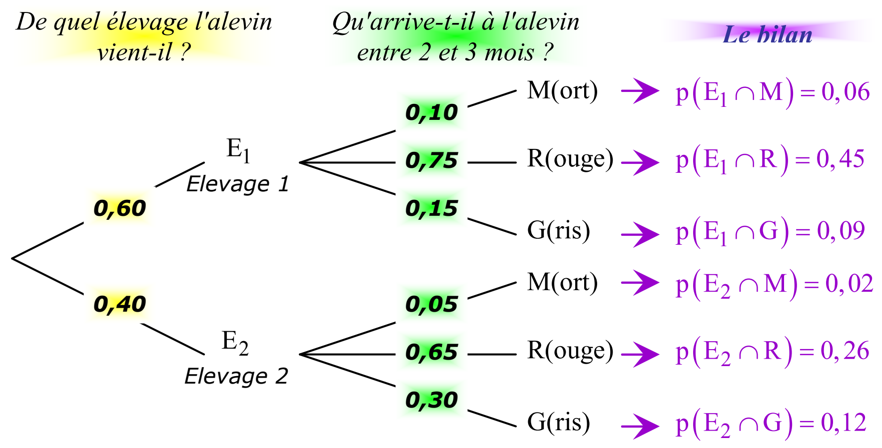
a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.
b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du second élevage.

2°) Une personne choisit au hasard et de façon indépendante cinq alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois alevins soient en vie ? On donnera une valeur approchée au centième près.

3°) L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1€ si le poisson vendu est rouge, 0,25€ s'il est gris et perd 0,10€ s'il ne survit pas.
On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté aux élevages.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique dont on précisera la signification.

Le corrigé

1°) Avant toute chose, examinons la situation du point de vue du garnement face à un alevin frétillant dans son bocal :



Grâce à notre arbre pondéré, l'exercice est pratiquement fait. Il n'y a plus qu'à répondre aux questions.

a. Les événements E_1 et E_2 formant une partition de l'univers des probabilités, nous pouvons écrire en application de la formule des probabilités totales :
$$p(M) = p(E_1 \cap M) + p(E_2 \cap M) = 0,06 + 0,02 = 0,08$$
La probabilité que l'alevin quitte ce monde entre ses deuxième et troisième mois étant de 0,08, celle qu'il survive est : $p(\overline{M}) = 1 - p(M) = 1 - 0,08 = 0,92$.

b. Là encore, en application de la formule des probabilités totales, nous pouvons écrire :
$$p(R) = p(E_1 \cap R) + p(E_2 \cap R) = 0,45 + 0,26 = 0,71$$
La probabilité que l'alevin soit rouge au bout de son troisième mois est de 0,71.

c. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle :

$$p\left(E_2 \text{ sachant } G\right) = \frac{p\left(E_2 \cap G\right)}{p\left(G\right)}$$

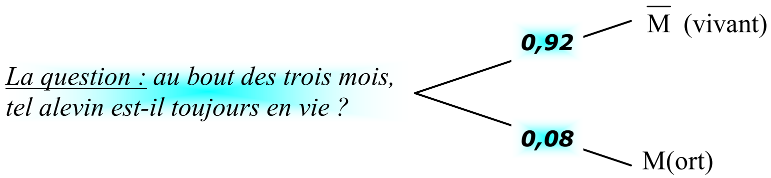
Calculons $p\left(G\right)$. D'après la formule des probabilités totales, nous avons :

$$p\left(G\right) = p\left(E_1 \cap G\right) + p\left(E_2 \cap G\right) = 0,09 + 0,12 = 0,21$$

Et finalement :

$$p\left(E_2 \text{ sachant } G\right) = \frac{p\left(E_2 \cap G\right)}{p\left(G\right)} = \frac{0,12}{0,21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

2°) Au bout de leurs trois mois, pour chacun de ces cinq alevins, se pose la question suivante :



C'est une épreuve de Bernoulli mais aussi pour l'alevin et l'acheteur !
Et cette question posée à propos de cinq alevins qui évoluent de manière indépendante constitue un schéma de Bernoulli à cinq épreuves.
Si on appelle N la variable aléatoire comptant le nombre d'alevins vivant au bout de leurs trois mois, sa loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,92$.

Par conséquent :

$$p\left(\text{"3 alevins vivant au bout des trois mois"}\right) = p\left(N = 3\right) = \binom{5}{3} \times 0,92^3 \times 0,08^2 \approx 0,05$$

3°) La variable aléatoire X peut prendre pour valeurs $-0,10$; 0,25 et 1.
Chacune des probabilités de ces valeurs est celle d'un événement que nous avons déjà calculée :

$\underbrace{p\left(X=1\right) = p\left(R\right)}_{\text{L'alevin est devenu rouge}} = 0,71$	$\underbrace{p\left(X=0,25\right) = p\left(G\right)}_{\text{L'alevin est devenu gris}} = 0,21$	$\underbrace{p\left(X=-0,10\right) = p\left(M\right)}_{\text{L'alevin est devenu mort}} = 0,08$

L'espérance de cette variable aléatoire X est donnée par :

$$E\left(x\right) = p\left(X=1\right) \times 1 + p\left(X=0,25\right) \times 0,25 + p\left(X=-0,10\right) \times \left(-10\right) = 0,7545€$$

<u>Conclusion :</u> sur chacun des poissons qu'elle achète aux élevages, l'animalerie fait un bénéfice net 0,7545€.

En avant la musique, les combinaisons et variables aléatoires continues !

Le contexte

Cet exercice est une création originale (et aussi assez classique) de mon volcanique et diabolique cerveau. Il commence par des combinaisons avant d'embrayer sur une variable alétoire continue qui suit une loi de probabilité presque exponentielle.

L'énoncé

C'est bientôt l'été et pour l'*Orchestre Philharmonique du Blanc* une tournée de quatre mois (juin, juillet, août et septembre) va bientôt démarrer. A raison d'un récital tous les jours, ils vont parcourir l'Europe entière.
Mais pour le Chef d'Orchestre, c'est aussi le début des soucis car il ne peut pas emmener tout le monde dans son minibus qui n'a que huit places (hormis la sienne).
Dans son effectif qui se monte à quinze musiciens, il dispose d'un accordéoniste, de deux clarinettistes, de trois percussionnistes, de quatre trompettistes et cinq violonistes.

a) En admettant qu'il choisisse ses musiciens au hasard, calculer la probabilité qu'il parte en tournée avec un accordéoniste, un clarinettiste, un percussionniste, deux trompettistes et trois violonistes. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

On appelle λ une constante strictement positive qui sera déterminée par la suite.
On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=3\times\lambda\times x^2\times e^{-\lambda\times x^3}$$

b) Démontrer que pour tout réel $t\in[0;+\infty[$, on a :

$$\int_0^t f(x).dx=1-e^{-\lambda\times t^3}$$

En déduire que la fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Le souci des violonistes est qu'au fur et à mesure des récitals leurs cordes de violons s'usent. Ils partent en tournée avec des cordes neuves.
On appelle T la variable aléatoire continue mesurant le temps exprimé <u>en mois</u> au bout duquel une corde de violon casse.
On fixe l'origine des temps c'est-à-dire l'instant $T=0$ au début de la tournée, le 1er juin à minuit. On considère qu'un mois compte 30 jours.

La loi de probabilité de la variable aléatoire continue T a pour densité de probabilité la fonction f. Par conséquent, on rappelle que pour tous réels positifs a et b :

$$p\left(T\in[a;b]\right)=\int_a^b f(x).dx$$

c) Sachant qu'une corde a une chance sur deux de casser durant les deux premiers mois, déterminer la valeur exacte de la constante λ. On vérifiera qu'une valeur approchée au millième par excès de cette constante λ est 0,087.

Dans les questions qui viennent, on donnera d'abord la valeur exacte de chaque probabilité (éventuellement en utilisant le paramètre λ), puis une valeur approchée arrondie au millième.

d) Calculer la probabilité qu'une corde ne casse pas durant les quatre mois de la tournée.

e) Une corde a parfaitement tenu durant les deux premiers mois de la tournée. Calculer la probabilité qu'elle casse durant le troisième mois.

Le corrigé

a) Du point de vue du Chef d'Orchestre, ce départ s'apparente à un tirage au sort simultané. Au total, le Chef d'Orchestre doit choisir huit musiciens parmi les quinze à sa disposition.

Il y a donc $\binom{15}{8}=\dfrac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8}{8!}=6435$ équipes possibles.

Mais pour le cas qui nous intéresse, il doit choisir :

- Un accordéoniste parmi le seul dont il dispose donc 1 choix possible.
- Un clarinettiste parmi les deux dont il dispose donc $\binom{2}{1}=2$ choix possibles.
- Un percussionniste parmi les trois dont il dispose donc $\binom{3}{1}=3$ choix possibles.
- Deux trompettistes parmi les quatre donc $\binom{4}{2}=\dfrac{4\times3}{2}=6$ choix possibles.
- Deux violonistes parmi les cinq soit $\binom{5}{3}=\dfrac{5\times4\times3}{2\times3}=10$ choix possibles.

Donc il peut constituer $1\times2\times3\times6\times10=360$ équipes avec la composition souhaitée.
<u>Conclusion :</u> la probabilité qu'il parte en tournée avec la composition souhaitée est

$$\frac{360}{6435}=\frac{8\times\cancel{45}}{143\times\cancel{45}}=\frac{8}{143}$$

b) Pour tout réel $x \in [0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$f(x) = 3\times\lambda\times x^2 \times e^{-\lambda\times x^3} = -\left(-3\times\lambda\times x^2\right)\times e^{-\lambda\times x^3} = -u'\times e^u$$

où $\left| \begin{array}{l} u(x) = -\lambda\times x^3 \\ u'(x) = -3\times\lambda\times x^2 \end{array} \right.$ est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc une primitive de f sur $[0;+\infty[$ est $-e^u = -e^{-\lambda\times x^3}$.

Il vient alors pour $t \in [0;+\infty[$:

$$\int_0^t f(x).dx = \left[-e^{-\lambda\times x^3}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda\times t^3}\right) - \left(-e^0\right) = -e^{-\lambda\times t^3} + 1 = 1 - e^{-\lambda\times t^3}$$

➲ Pour prouver que la fonction f est une densité de probabilité, trois choses sont à établir :

1. La fonction $f(x) = 3\times\lambda\times x^2 \times e^{-\lambda\times x^3}$ est continue sur $[0;+\infty[$ car elle est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $f(x) = 3\times\lambda\times x^2 \times e^{-\lambda\times x^3}$ est positive ou nulle sur $[0;+\infty[$ car elle est le produit de quatre facteurs 3 ; λ ; x^2 et $e^{-\lambda\times x^3}$ qui sont positifs ou nuls.

3. Lorsque t tend vers $+\infty$, le cube t^3 s'envole vers $+\infty$.
Mais son produit $-\lambda\times t^3$ plonge vers $-\infty$ car la constante λ est positive.
Donc l'exponentielle $e^{-\lambda\times x^3}$ tend vers 0.
Par conséquent l'intégrale $\int_0^t f(x).dx = 1 - e^{-\lambda\times t^3}$ tend vers $1-0=1$.

Ainsi obtenons-nous : $\int_0^{+\infty} f(x).dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\int_0^t f(x).dx\right) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-e^{-\lambda\times t^3}\right) = 1$.

<u>Conclusion :</u> comme elle remplit les trois conditions fixées par la définition, la fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Comme la loi de probabilité de la variable aléatoire T a pour densité de probabilité f alors :

$$p\left(T\in[0;t]\right) = \int_0^t f(x).dx = 1 - e^{-\lambda\times t^3}$$

c) La probabilité qu'une corde casse durant les deux premiers mois, c'est-à-dire la probabilité que la variable aléatoire T appartienne à l'intervalle $[0;2]$ est égale à $\frac{1}{2}$.

Ainsi la constante λ est telle que :

$$p\left(T\in[0;2]\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda\times 2^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -e^{-8\times\lambda} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-8\times\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -8\times\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -8\times\lambda = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{8} \approx 0,087$$

d) Calculons la probabilité qu'une corde ne casse pas durant les quatre premiers mois, c'est-à-dire que la variable aléatoire T appartienne à l'intervalle $]4;+\infty[$. Nous avons :

$$p\left(T\in]4;+\infty[\right) = 1 - p\underbrace{\left(T\in[0;4]\right)}_{\text{Evénement contraire.}} = 1 - \left(1 - e^{-\lambda\times 4^3}\right) = e^{-\lambda\times 64} \approx 0,004$$

e) On veut calculer la probabilité que $\underbrace{T\in]2;3]}_{\text{La corde casse durant le troisième mois.}}$ sachant que $\underbrace{T\in]2;+\infty[}_{\text{La corde n'a pas cassé les deux premiers mois.}}$.

Soit :

$$p\left(T\in]2;3] \text{ \underline{sachant} } T\in]2;+\infty[\right) = \frac{p\left(T\in]2;3] \text{ \underline{et} } T\in]2;+\infty[\right)}{p\left(T\in]2;+\infty[\right)} = \frac{p\left(T\in]2;3]\right)}{p\left(T\in]2;+\infty[\right)}$$

Si une corde a une chance sur deux de casser durant les deux premiers mois, c'est qu'elle a aussi une chance sur deux de ne pas casser durant cette même période. En effet :

$$p\left(T\in]2;+\infty[\right) = 1 - p\underbrace{\left(T\in[0;2]\right)}_{\text{Evénement contraire.}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

De plus :

$$p\left(T\in]2;3]\right) = \int_2^3 f(x).dx$$

$$= \left[-e^{-\lambda\times t^3}\right]_2^3 = \left(-e^{-\lambda\times 3^3}\right) - \left(-e^{-\lambda\times 2^3}\right) = e^{-8\times\lambda} - e^{-27\times\lambda} = \frac{1}{2} - e^{-27\times\lambda}$$

Il vient alors :

$$p\left(T\in]2;3] \text{ \underline{sachant} } T\in]2;+\infty[\right) = \frac{\frac{1}{2} - e^{-27\times\lambda}}{\frac{1}{2}} = 2\times\left(\frac{1}{2} - e^{-27\times\lambda}\right) = 1 - 2\times e^{-27\times\lambda} \approx 0,807$$

Spécialité

Arithmétique pacifique - Nouvelle-Calédonie novembre 2007.

Le contexte

Cet exercice d'arithmétique est l'exercice de spécialité du sujet de Nouvelle-Calédonie de novembre 2007. Au menu : congruences, théorème de Gauss et équations diophantiennes.

L'énoncé

1°) Dans cette question, une grande attention sera portée à la clarté du raisonnement :

a. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.

b. Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.

c. En déduire que $6^{40} \equiv 1 \text{ modulo } 11$ et que $6^{40} \equiv 1 \text{ modulo } 5$.

d. ***Question de cours***
a, b et c sont trois entiers relatifs non nuls.
Démontrer que si a et b divisent c, et que si les entiers a et b sont premiers entre eux, alors le produit $a \times b$ divise c.

e. Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2°) Dans cette question, x et y désignent deux entiers relatifs.

a. Montrer que l'équation
$$(E) \quad 65 \times x - 40 \times y = 1$$
n'a pas de solution.

b. Montrer que l'équation
$$(E') \quad 17 \times x - 40 \times y = 1$$
admet au moins une solution.

c. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').

d. Résoudre l'équation (E').
En déduire qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que :
$$17 \times x_0 \equiv 1 \quad \text{modulo } 40$$

3°) Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b(55)$ et $a^{40} \equiv 1(55)$ alors :
$$b^{33} \equiv a(55)$$

Le corrigé

1.a) Intéressons-nous d'abord au carré de 6 modulo 11 :
$$6^2 \equiv 36 \equiv 3 \times 11 + 3 \equiv 3 \text{ modulo } 11$$
Il vient alors :
$$6^{10} \equiv \left(6^2\right)^5 \equiv 3^5 \equiv 243 \equiv 22 \times 11 + 1 \equiv 1 \text{ modulo } 11$$

1.b) Modulo 5, le carré de 6 qui est 36 est congru à 1 car $36 = 7 \times 5 + 1$.
Par conséquent :
$$6^4 \equiv \left(6^2\right)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \text{ modulo } 5$$

1.c) Pour répondre à cette question, appuyons-nous sur les résultats des deux questions précédentes.

- $6^{40} \equiv 6^{10 \times 4} \equiv \left(6^{10}\right)^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \text{ modulo } 11$
- $6^{40} \equiv 6^{4 \times 10} \equiv \left(6^4\right)^{10} \equiv 1^{10} \equiv 1 \text{ modulo } 11$

1.d) Comme les entiers a et b divisent tous deux c, alors il existe deux entiers relatifs λ et μ tels que :
$$c = \lambda \times a \qquad \text{et} \qquad c = \mu \times b$$
Comme les entiers relatifs a et b sont premiers entre eux, alors en application de théorème de Bezout (ou de l'identité de Bezout), il existe deux entiers relatifs u et v tels que :
$$a \times u + b \times v = 1 \iff \underbrace{a \times c \times u + b \times c \times v = 1}_{\text{On multiplie les deux membres de l'égalité par } c}$$
$$\iff a \times \mu \times b \times u + b \times \lambda \times a \times v = c$$
$$\iff (a \times b) \times \underbrace{(\mu \times u + \lambda \times v)}_{\in \mathbb{Z}} = c$$
Donc le produit $a \times b$ divise c.

1.e) Comme $6^{40} \equiv 1 \text{ modulo } 11$ alors 11 divise la différence $6^{40} - 1$
Comme $6^{40} \equiv 1 \text{ modulo } 5$ alors 5 divise la différence $6^{40} - 1$.
Comme les entiers 5 et 11 sont premiers entre eux, alors d'après la question précédente, leur produit $5 \times 11 = 55$ divise la différence $6^{40} - 1$.

2.a) Procédons par l'absurde : supposons que l'équation (E) admette (au moins) un couple solution que nous noterons $(u;v)$.

Ces deux entiers relatifs u et v vérifient l'égalité $65\times u-40\times v=1$.
Comme 5 est un diviseur commun de 65 et 40, alors il divise chacune de leurs combinaisons linéaires. En particulier, il divise la combinaison $65\times u-40\times v=1$.
Ce qui est absurde car les seuls diviseurs de 1 dans $\mathbb{Z}$ sont lui-même et son opposé -1.
<u>Conclusion :</u> ce que nous avions supposé était erroné : l'équation (E) n'admet aucune solution.

2.b) Clairement, le Plus Grand Diviseur Commun à 17 et -40 est 1.
En application du théorème de l'identité de Bezout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$17\times u-40\times v=1$$

Le couple $(u;v)$ formé par ces deux entiers est une solution de l'équation (E').

2.c) Appliquons l'algorithme d'Euclide aux entiers 40 et 17.

1. La division euclidienne de 40 par 17 donne pour quotient 2 et pour reste 6 car :
$$40=2\times 17+6 \Leftrightarrow 6=40-2\times 17$$

2. La division euclidienne de 17 par 6 donne pour quotient 2 et pour reste 5 car :
$$17=2\times 6+5 \Leftrightarrow 5=17-2\times 6=17-2\times(40-2\times 17)$$
$$=17-2\times 40+4\times 17=5\times 17-2\times 40$$

3. La division euclidienne de 6 par 5 donne pour quotient 1 et pour reste 1 car :
$$6=1\times 5+1 \Leftrightarrow 1=6-5=(40-2\times 17)-(5\times 17-2\times 40)$$
$$=40-2\times 17-5\times 17+2\times 40=3\times 40-7\times 17$$

4. Comme 5 est divisible par 1, alors l'algorithme d'Euclide s'arrête.

<u>Conclusion :</u> comme suite à l'algorithme d'Euclide $17\times(-7)-40\times(-3)=1$, alors le couple $(-7;-3)$ est une des solutions de l'équation (E').

2.d) Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ l'équation diophantienne (E') : $17\times x-40\times y=1$.

La forme générale des solutions

Soit $(u;v)$ une solution de l'équation (E'). Ce couple d'entiers relatifs vérifie l'égalité :

$$17\times u-40\times v=\underbrace{1=17\times(-7)-40\times(-3)}_{\text{D'après la question précédente}} \Leftrightarrow 17\times u+17\times 7=40\times v+40\times 3$$
$$\Leftrightarrow 17\times(u+7)=40\times(v+3)$$

Donc 17 divise le produit $40\times(v+3)$.

Comme 17 est premier avec le premier facteur 40, alors en application du théorème de Gauss, 17 divise nécessairement le second facteur $v+3$.
Donc il existe un entier relatif k tel que $v+3=17\times k \Leftrightarrow v=-3+17\times k$
A présent, exprimons l'entier u en fonction de k.
D'après ce qui précède, nous pouvons écrire :

$$\cancel{17}\times(u+7)=40\times(v+3)=40\times\cancel{17}\times k \Leftrightarrow u+7=40\times k \Leftrightarrow u=-7+40\times k$$

<u>Conclusion :</u> si un couple $(u;v)$ est une solution de l'équation (E'), alors il est de la forme $(-7+40\times k;-3+17\times k)$ où k est un entier relatif.

Maintenant, rien ne dit que tous les couples de cette forme sont des solutions de (E').

Tous les couples de cette forme sont solutions de (E')

Soit k un entier relatif quelconque. Nous pouvons écrire

$$17\times(-7+40\times k)-40\times(-3+17\times k)=17\times(-7)-40\times(-3)\cancel{+40\times 17\times k}\cancel{-40\times 17\times k}$$
$$=-119+120+0=1$$

Donc tous les couples de la forme $(-7+40\times k;-3+17\times k)$ sont solution de l'équation.

<u>Conclusion :</u> les solutions de l'équation (E') sont les couples d'entiers relatifs de la forme $(-7+40\times k;-3+17\times k)$ où k est un entier relatif

➲ Si x est solution de l'équation $17\times x\equiv 1(40)$, alors il existe un entier relatif v tel que

$$17\times x=1+40\times v \Leftrightarrow 17\times x-40\times v=1$$
$$\Leftrightarrow \text{Le couple } (x;v) \text{ est solution de } (E').$$

En application de ce qui précède, il existe alors un entier relatif k tel que :

$$x=-7+40\times k$$

Mais quels sont les entiers de cette forme compris entre 0 et 40 ? Résolvons l'inéquation !

$$0\le x\le 40 \Leftrightarrow 0\le -7+40\times k\le 40 \Rightarrow 7\le 40\times k\le 47 \Rightarrow \frac{7}{40}\le k\le\frac{47}{40}$$

Il n'existe qu'un seul entier k compris entre $\frac{7}{40}$ et $\frac{47}{40}$. Il s'agit de $k=1$

Résumons ce que nous venons d'établir :
Si l'entier x est une solution de $17\times x\equiv 1(40)$ comprise entre 0 et 40, alors

$$x=-7+40\times 1=33$$

Réciproquement, on vérifie sans problème que 33 est solution de l'équation $17\times x\equiv 1(40)$.
En effet :

$$17\times 33=561=14\times 40+1\equiv 1 \quad \text{modulo } 40.$$

<u>Conclusion :</u> l'équation $17\times x\equiv 1(40)$ n'a qu'une seule solution comprise entre 0 et 40 : 33.

3°) Comme $b \equiv a^{17}$ modulo 55 alors $b^{33} \equiv \left(a^{17}\right)^{33} \equiv a^{17\times 33} \equiv a^{561}$ modulo 55 .

La division euclidienne de 561 par 40 donne pour quotient 14 et pour reste 1.

Comme $a^{40} \equiv 1$ modulo 55 alors $a^{560} \equiv a^{14\times 40} \equiv \left(a^{40}\right)^{14} \equiv 1^{14} \equiv 1$ modulo 55 .

Et finalement, il vient :

$$b^{33} \equiv a^{561} \equiv a^{561} \times a \equiv 1 \times a \equiv a \text{ modulo } 55$$

Le total de vos chiffres - Antilles-Guyane juin 2005

Le contexte

Le présent exercice qui traite de la congruence est l'exercice de spécialité du sujet Antilles-Guyane de juin 2005. Il n'est pas très difficile mais un peu casse-tête.

L'énoncé

1.a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

b) Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7 \quad (9)$.

2.a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$10^n \equiv 1 \quad (9)$$

b) On désigne par N un entier naturel écrit en base 10. On appelle S la somme de ses chiffres.
Démontrer la relation suivante :

$$\mathrm{N} \equiv \mathrm{S} \quad (9)$$

c) En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On appelle A l'entier naturel :

$$\mathrm{A} = 2005^{2005}$$

On définit alors les entiers naturels B, C et D par :

- B est la somme des chiffres de A.
- C est la somme des chiffres de B.
- D est la somme des chiffres de C.

a) Démontrer la relation suivante :

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{D} \quad (9)$$

b) Sachant que $2005 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $\mathrm{B} \leq 72180$.

c) Démontrer que $\mathrm{C} \leq 45$.

d) En étudiant la liste des entiers inférieurs ou égaux à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e) Démontrer que $\mathrm{D} = 7$.

Antilles-Guyane, juin 2005

Le corrigé

1.a) De façon à nous faire une idée de la situation, examinons les restes des divisions euclidiennes des premières puissances de 7^n modulo 9.

0. $7^0 = 1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 9$
1. $7^1 = 7 \equiv 7 \quad \text{modulo } 9$
2. $7^2 = 49 = 5 \times 9 + 4 \equiv 4 \quad \text{modulo } 9$
3. $7^3 = 7 \times 7^2 \equiv 7 \times 4 \equiv 28 \equiv 3 \times 9 + 1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 9$.

Dans un autre problème, nous aurions dit que l'ordre de 7 modulo 9, c'est-à-dire la plus petite puissance de 7 congrue à 1 modulo 9, est 3.
En tout cas, il semble qu'il y ait trois restes possibles : 7 ; 4 et 1. Prouvons notre affirmation.
Soit n un entier naturel quelconque.
On appelle q et r les quotient et reste de la division euclidienne de n par 3. Nous avons :

$$n = 3 \times q + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < 3$$

Comme $7^3 \equiv 1 \quad \text{modulo } 9$ alors $7^{3 \times q} = \left(7^3\right)^q \equiv 1^q \equiv 1 \quad \text{modulo } 9$

$$\text{Donc} \quad 7^n = 7^{3 \times q + r} = 7^{3 \times q} \times 7^r \equiv 1 \times 7^r \equiv 7^r \quad \text{modulo } 9$$

Comme $r \in \{0;1;2\}$, alors cela signifie que le reste de la division euclidienne de 7^n est soit 1 (le reste de 7^0 par 9), soit 7 (le reste de 7^1 par 9), soit 4 (le reste de 7^2 par 9).

b) Comme $2005 = 222 \times 9 + 7$, alors $2005 \equiv 7 \quad \text{modulo } 9$.
En passant cette égalité de congruence à la puissance 2005, il vient alors :

$$2005^{2005} \equiv 7^{2005} \quad \text{modulo } 9$$

De plus, comme $2005 = 668 \times 3 + 1$, alors :

$$2005^{2005} \equiv 7^{2005} \equiv 7^1 \equiv 7 \quad \text{modulo } 9$$

2.a) Démontrons par récurrence sur l'entier naturel n que $10^n \equiv 1 \quad (9)$.

- Au premier rang pour $n = 0$:
  Nous avons : $10^0 = 1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 9$. Donc la propriété est vraie.
- Le principe de récurrence ou de propagation :
  Supposons que la propriété soit vraie au rang n. Nous supposons donc :

$$10^n \equiv 1 \quad \text{modulo } 9$$

  Multiplions cette égalité de congruence par 10. Il vient alors :

$$10^{n+1} = 10 \times 10^n \equiv 10 \times 1 \equiv 10 \equiv 9 + 1 \equiv 1 \quad \text{modulo } 9$$

  Donc la propriété est alors vraie au rang suivant $n+1$. Le principe de récurrence est établi.

Conclusion : pour tout entier naturel n, nous avons : $10^n \equiv 1 \quad (9)$.

2.b) Pour tout entier naturel N, on peut construire une suite (c_n) d'entiers tous compris entre 0 et 9 qui sont en fait ses chiffres. Cette suite (c_n) peut être définie par récurrence de la manière suivante en utilisant une suite annexe (q_n) :

- q_0 et c_0 sont les quotient et reste de la division euclidienne de N par 10.
  Donc $N = 10 \times q_0 + c_0$ et le reste c_0 est un entier compris entre 0 et 9.
- Pour tout entier naturel non nul n, on définit q_n et c_n comme étant les quotient et reste de la division euclidienne de q_{n-1} par 10. Nous avons alors :

$$q_{n-1} = 10 \times q_n + c_n \quad \text{et} \quad c_n \in \{0;\ldots;9\}$$

Pour bien en saisir le mécanisme, mettons ces suites en application sur l'entier $N = 2005$:

Rang n	Division euclidienne	c_n	q_n
0	$2005 = 10 \times 200 + 5$	5	200
1	$200 = 10 \times 20 + 0$	0	20
2	$20 = 10 \times 2 + 0$	0	2
3	$2 = 10 \times 0 + 2$	2	0
4	$0 = 10 \times 0 + 0$	0	0
5	$0 = 10 \times 0 + 0$	0	0

A partir du rang 4, tous les chiffres c_n sont nuls. Cette propriété vaut pour tous les entiers : à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (c_n) sont nuls.

L'entier N peut être exprimé en fonction des termes des suites (c_n) et (q_n). En effet :

$$\begin{aligned} N &= 10 \times q_0 + c_0 \\ &= 10 \times (10 \times q_1 + c_1) + c_0 = 100 \times q_1 + c_1 \times 10 + c_0 \\ &= 100 \times (10 \times q_2 + c_2) \times + c_1 \times 10 + c_0 = 1000 \times q_2 + c_2 \times 100 + c_1 \times 10 + c_0 \\ &\ldots \\ &= 10^{n+1} \times q_n + c_n \times 10^n + \ldots + c_2 \times 10^2 + c_1 \times 10^1 + c_0 \times 10^0 \end{aligned}$$

Pour ce qui nous concerne, vu qu'après un certain rang m, tous les termes des suites (c_n) et (q_n) sont nuls, nous retiendrons juste :

$$N = c_m \times 10^m + \ldots + c_2 \times 10^2 + c_1 \times 10^1 + c_0 \times 10^0$$

où les entiers $\underbrace{c_0}_{\text{Unité}}\ ;\ \underbrace{c_1}_{\text{Dizaine}}\ ;\ \underbrace{c_2}_{\text{Centaine}}\ ;\ldots;\ \underbrace{c_m}_{10^m}$ sont les chiffres de l'entier naturel N dans la base 10.

La somme des chiffres S est alors donnée par :

$$S = c_m + \ldots + c_2 + c_1 + c_0.$$

Or, d'après la question 2.a, nous avons que pour tout entier naturel $n \in \{0;1;2;\ldots;m\}$:

$$10^n \equiv 1 \quad \text{modulo } 9 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{c_n \times 10^n \equiv c_n \times 1 \equiv c_n \quad \text{modulo } 9}_{\text{Après multiplication par } c_n}$$

En additionnant ces $m+1$ égalités de congruence, il vient alors :

$$N = c_m \times 10^m + \ldots + c_1 \times 10^1 + c_0 \times 10^0 \equiv c_m + \ldots + c_1 + c_0 \equiv S \quad \text{modulo } 9$$

2.c) Cette question est une conséquente directe de la précédente. En effet :

$$\text{N est divisible par 9} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{N \equiv 0 \ (9) \quad \Leftrightarrow \quad S \equiv 0 \ (9)}_{\text{car } N \equiv S \text{ modulo } 9} \quad \Leftrightarrow \quad \text{S est divisible par 9}$$

3.a) Cette question est une application en cascade du résultat de la question 2.b. En effet :

- Comme B est la somme des chiffres de A, alors $A \equiv B \quad (9)$.
- Ensuite, comme C est la somme des chiffres de B, alors $B \equiv C \quad (9)$.
- Enfin, comme D est la somme des chiffres de C, alors $C \equiv D \quad (9)$.

Finalement, nous avons :

$$A \equiv B \equiv C \equiv D \quad \text{modulo } 9$$

3.b) Comme $2005 < 10000 = 10^4$, alors $A = (2005)^{2005} < (10^4)^{2005} = 10^{4 \times 2005} = 10^{8020}$.

Or, 10^{8020} est le plus petit entier comptant 8021 chiffres. Comme l'entier naturel A lui est strictement inférieur, A ne peut compter au plus que 8020 chiffres.
De plus, comme chacun des 8020 chiffres de A est inférieur ou égal à 9, alors leur somme B est inférieure ou égale à $9 \times 8020 = 72180$.

3.c) Comme les cinq chiffres de B sont tous inférieurs ou égaux à 9, alors leur somme C est inférieure ou égale à $9 \times 5 = 45$.

3.d) C est un entier constitué de deux chiffres :

- Celui des dizaines qui est inférieur ou égal à 4.
- Celui des unités qui est inférieur ou égal à 9.

Par conséquent, la somme D de ceux-ci est inférieure ou égale à $4 + 9 = 13$.

3.e) En application des résultats des questions 1.b et 3.a, nous pouvons écrire :

$$D \equiv A \equiv (2005)^{2005} \equiv 7 \quad \text{modulo } 9$$

Or, d'après la question 3.d, D est un entier compris entre 0 et 13. Le seul de ceux-ci qui soit congru à 7 modulo 9 est 7. Nous en déduisons alors que $D = 7$.

Similitude de triangles semblables - Antilles-Guyane septembre 2007

Le contexte

Contrairement à la généralité du genre, le présent exercice aborde les similitudes par leurs caractéristiques géométriques plus que par leur traduction complexe. C'est un exercice assez abstrait qui est issu du sujet d'Antilles-Guyane de septembre 2007.

L'énoncé

ABC est un triangle équilatéral tel qu'une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ soit $\dfrac{\pi}{3}$.

Soit t un nombre réel fixé et soient M, N et P trois points deux à deux distincts définis par :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\times\overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{BN}}=t\times\overrightarrow{\mathrm{BC}} \qquad \overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\times\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

Le but de cet exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe $\boldsymbol{\sigma}$ transformant les points A, B et C en respectivement M, N et P et d'en préciser les éléments caractéristiques.

Pour ce faire, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note a, b, c, m, n et p les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P.

1°) On rappelle que toute similitude conserve les barycentres.

a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.

b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont le même centre de gravité. On notera G ce centre de gravité.

c. On suppose que $\boldsymbol{\sigma}$ existe. Déterminer l'image de G par $\boldsymbol{\sigma}$.

2°) On considère la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Vérifier que M est le barycentre des deus points pondérés $\left(\mathrm{A};1-t\right)$ et $\left(\mathrm{B};t\right)$.

En déduire que $\boldsymbol{r}\left(\mathrm{M}\right)=\mathrm{N}$.

Par extension, on admettra que $\boldsymbol{r}\left(\mathrm{N}\right)=\mathrm{P}$ et $\boldsymbol{r}\left(\mathrm{P}\right)=\mathrm{M}$

b. Soit $\boldsymbol{\sigma_1}$, la similitude directe de centre G, de rapport $\dfrac{\mathrm{GM}}{\mathrm{GA}}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}},\overrightarrow{\mathrm{GM}}\right)$.

Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P

c. Conclure sur l'existence et l'unicité de $\boldsymbol{\sigma}$.

Le corrigé

1.a) Traduite sous forme complexe, l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\times\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ devient :

$$z_{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}=t\times z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \Leftrightarrow m-a=t\times\left(b-a\right) \Leftrightarrow m=a+t\times\left(b-a\right)=\left(1-t\right)\times a+t\times b$$

De la même manière, on établit les égalités suivantes :

- $\overrightarrow{\mathrm{BN}}=t\times\overrightarrow{\mathrm{BC}} \Leftrightarrow n-b=t\times\left(c-b\right) \Leftrightarrow n=b+t\times\left(c-b\right)=\left(1-t\right)\times b+t\times c$
- $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\times\overrightarrow{\mathrm{CA}} \Leftrightarrow p-c=t\times\left(a-c\right) \Leftrightarrow p=c+t\times\left(a-c\right)=\left(1-t\right)\times c+t\times a$

1.b) Appelons G d'affixe g, le centre de gravité du triangle ABC. L'affixe g vérifie l'égalité

$$g=\frac{a+b+c}{3}$$

Quant à l'affixe h du centre de gravité H du triangle MNP, elle vérifie l'égalité :

$$h=\frac{m+n+p}{3}=\frac{\overbrace{\left(1-t\right)\times a+t\times b}^{m}+\overbrace{\left(1-t\right)\times b+t\times c}^{n}+\overbrace{\left(1-t\right)\times c+t\times a}^{p}}{3}$$

$$=\frac{\left(1-t+t\right)\times a+\left(1-t+t\right)\times b+\left(1-t+t\right)\times c}{3}=\frac{1\times a+1\times b+1\times c}{3}=g$$

<u>Conclusion :</u> comme les affixes g et h sont égales, alors c'est que les points G et H sont confondus. Par conséquent, les triangles ABC et MNP ont le même centre de gravité.

1.c) La similitude $\boldsymbol{\sigma}$ conservant les barycentres, elle conserve de particulier les isobarycentres, autre appellation savante des centres de gravité.
Par conséquent, comme les images des points A, B et C par la similitude $\boldsymbol{\sigma}$ sont respectivement M, N et P, alors l'image du isobarycentre G des points A, B et C par la similitude $\boldsymbol{\sigma}$ est l'isobarycentre des points M, N et P. Tiens ? Mais ne s'agirait-il pas de G ? La question précédente dissipe toute interrogation.
<u>Conclusion :</u> Le point G est sa propre image par $\boldsymbol{\sigma}$, il est fixe par cette similitude.

2.a) Cette question peut se faire à l'aide des affixes des points m, n et p. En effet, nous avons déjà établi lors de la question 1.a que :

$\underbrace{m=\left(1-t\right)\times a+t\times b}$	$\underbrace{n=\left(1-t\right)\times b+t\times c}$	$\underbrace{p=\left(1-t\right)\times c+t\times a}$
C'est l'affixe du barycentre des points pondéres $\left(\mathrm{A};1-t\right)$ et $\left(\mathrm{B};t\right)$	C'est l'affixe du barycentre des points pondéres $\left(\mathrm{B};1-t\right)$ et $\left(\mathrm{C};t\right)$	C'est l'affixe du barycentre des points pondéres $\left(\mathrm{C};1-t\right)$ et $\left(\mathrm{A};t\right)$

Ou aussi par simples calculs vectoriels à partir de l'égalité définissant les points M, N et P.

- $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\times\overrightarrow{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}=\underbrace{t\times\overrightarrow{\mathrm{AM}}+t\times\overrightarrow{\mathrm{MB}}}_{\text{Vive Chasles !}} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{0}=\left(1-t\right)\times\overrightarrow{\mathrm{MA}}+t\times\overrightarrow{\mathrm{MB}}}_{\text{C'est l'égalité de la définition ! Donc M est le barycentre des points pondérés }\left(\mathrm{A};1-t\right)\text{ et }\left(\mathrm{B};t\right)}$

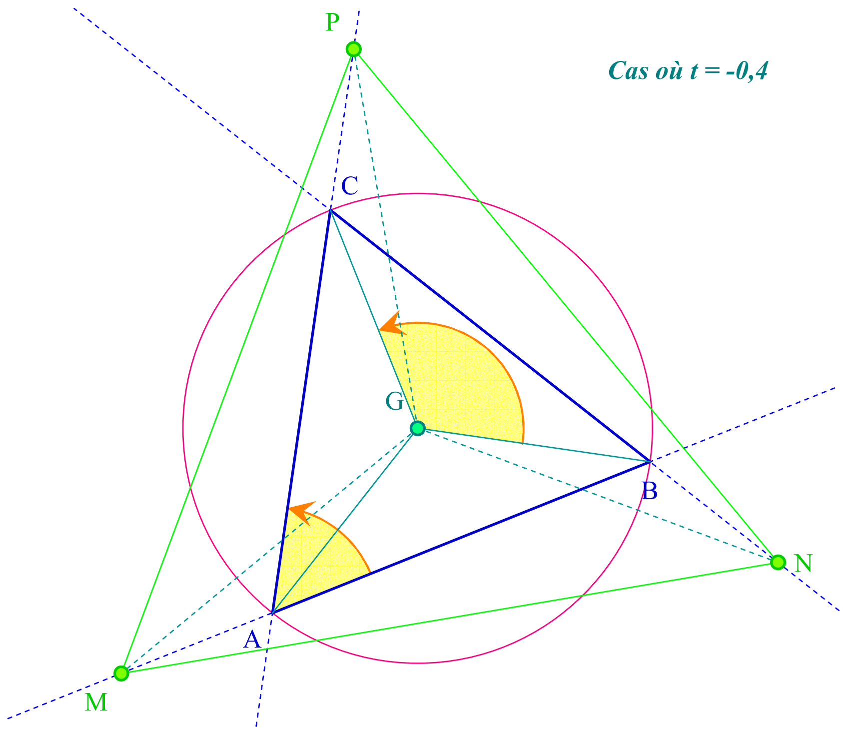
$$\overrightarrow{BN}=t\times\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN}=\underbrace{t\times\overrightarrow{BN}+t\times\overrightarrow{NC}}_{\text{Re-vive Chasles !}} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{0}=(1-t)\times\overrightarrow{NB}+t\times\overrightarrow{NC}}_{\text{Donc N est le barycentre des points pondérés } (B;1-t) \text{ et } (C;t)}$$

$$\overrightarrow{CP}=t\times\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CP}=\underbrace{t\times\overrightarrow{CP}+t\times\overrightarrow{PA}}_{\text{Chasles est grand !}} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{0}=(1-t)\times\overrightarrow{PC}+t\times\overrightarrow{PA}}_{\text{Donc P est le barycentre des points pondérés } (C;1-t) \text{ et } (A;t)}$$

➲ Les points M, N et P étant définis à partir de A, B et C, pour accéder aux images des premiers par la rotation $\boldsymbol{r}$, nous allons passer par les seconds.
Le point G étant le centre de gravité du triangle équilatéral direct ABC, il en est aussi l'orthocentre (bof...), le centre du cercle inscrit (rebof...) et le centre du cercle circonscrit.
Voilà qui est intéressant car déjà, cela nous dit que G est équidistant des points A, B et C.

$$GA = GB = GC$$

Mais ce n'est pas tout ! Petite figure histoire de bien comprendre les enjeux !



Dans ce cercle circonscrit, l'angle au centre $\left(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}\right)$ intercepte le même arc $\widehat{BC}$ que l'angle inscrit $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. Donc, sa mesure est double et $\left(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}\right)=2\times\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=2\times\frac{\pi}{3}$.

De même : $\left(\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GA}\right)=2\times\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{2.\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)=2\times\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{2.\pi}{3}$

Comme $\begin{cases}\left(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}\right)=\frac{2\pi}{3}\\ GB=GC\end{cases}$ alors l'image de B par la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre G et d'angle $\frac{2.\pi}{3}$ est le point C. De la même manière, on établit que :

$$\left.\begin{matrix}\left(\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GA}\right)=\frac{2\pi}{3}\\ GC=GA\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}(C)=A \qquad \left.\begin{matrix}\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)=\frac{2\pi}{3}\\ GA=GB\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}(A)=B$$

Tout cela pour dire que les images des points A, B et C par la rotation $\boldsymbol{r}$ sont respectivement B, C et A. Le triangle équilatéral ABC est globalement invariant par $\boldsymbol{r}$.
Sauf qu'une rotation est une similitude. Donc elle aussi conserve les barycentres.
Par conséquent, l'image par la rotation $\boldsymbol{r}$ du barycentre M des points pondérés $(A;1-t)$ et $(B;t)$ est le barycentre des points pondérés $(\boldsymbol{r}(A)=B;1-t)$ et $(\boldsymbol{r}(B)=C;t)$ soit N.
En procédant de même, on établit également que $\boldsymbol{r}(N)=P$ et $\boldsymbol{r}(P)=M$.

2.b) La similitude directe $\boldsymbol{\sigma_1}$ est définie par son centre G, son rapport k et son angle θ.

Déjà, comme $\underbrace{\frac{GM}{GA}=k \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GM}\right)=\theta}_{\text{Un seul point vérifie ces deux égalités}}$, alors l'image du point A par $\boldsymbol{\sigma_1}$ est M.

A présent, intéressons-nous aux images des points B et C.

Comme les images des point M, N et P par la rotation $\boldsymbol{r}$ de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ sont respectivement les points N, P et M alors nous avons deux grandes séries d'égalités :

$$\underbrace{GM=GN=GP}_{\text{Les trois points sont sur la même orbite de centre G}} \qquad \underbrace{\left(\overrightarrow{GM},\overrightarrow{GN}\right)=\left(\overrightarrow{GN},\overrightarrow{GP}\right)=\left(\overrightarrow{GP},\overrightarrow{GM}\right)=\frac{2\pi}{3}}_{\text{C'est le même angle de rotation}}$$

Comme le point G est équidistant de A, B et C, alors pour les rapports de longueurs, on a :

$$k=\frac{GM}{GA}=\frac{GN}{GB}=\frac{GP}{GC}$$

Et du point de vue des angles :

$$\left(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GN}\right)=\underbrace{\left(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GM}\right)+\left(\overrightarrow{GM},\overrightarrow{GN}\right)}_{\text{Merci Chasles !}}=\cancel{-\frac{2\pi}{3}}+\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GM}\right)+\cancel{\frac{2\pi}{3}}=\theta$$

$$\left(\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GP}\right)=\left(\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GM}\right)+\left(\overrightarrow{GM},\overrightarrow{GP}\right)=\cancel{\frac{2\pi}{3}}+\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GM}\right)+\cancel{-\frac{2\pi}{3}}=\theta$$

<u>Conclusion :</u> comme $\dfrac{GN}{GB}=k$ et $\left(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GN}\right)=\theta$ <u>et</u> $\dfrac{GP}{GC}=k$ et $\left(\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GP}\right)=\theta$, alors les images respectives des points B et C par la similitude directe σ_1 sont N et P.

2.c) De par la question 2.b, il existe au moins une similitude directe transformant les points A, B et C respectivement en M, N et P. Il s'agit de σ_1 .

Imaginons qu'il en existe une autre que nous appellerons σ.
D'après la question 1.c, elle a alors un point fixe qui est G. De facto, la similitude directe σ a un centre, mais aussi un rapport et un angle. En tout cas, ce n'est pas une translation !
Mais comme A a pour image M par cette similitude directe de centre G, alors le rapport de σ est donné par le rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et son angle par une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GM}\right)$.

Autrement dit, cette similitude σ n'est rien d'autre que la similitude σ_1 . D'où l'unicité !

le complexe d'un printemps andin - Amérique du sud novembre 2007

Le contexte

Ce exercice est une version légèrement modifiée de l'exercice de spécialité du sujet Amérique du sud novembre 2007. Il aborde les similitudes et les ensembles de points.

L'énoncé

Sur la figure ci-contre, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On appelle A et B les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 \qquad\qquad z_B = \boldsymbol{i}$$

On désigne par ***s*** la réflexion (ou symétrie axiale) d'axe (AB).
On appelle ***h*** l'homothétie de centre A et de rapport -2.

1°) Déterminer l'écriture complexe de la réflexion ***s***.

2°) Donner l'écriture complexe de l'homothétie ***h***.

On note ***f*** la composée $\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{s}$

3°) Répondre aux questions suivantes sans utiliser les expressions complexes des similitudes ***s***, ***h*** et ***f*** :

a. Pourquoi peut-on affirmer la transformation ***f*** est-elle une similitude indirecte ? On précisera son rapport.

b. Démontrer que la similitude ***f*** n'a au plus qu'un point fixe.

c. En déduire que A est le seul point fixe de ***f***.

4°) Démontrer que l'écriture complexe de cette transformation ***f*** est :

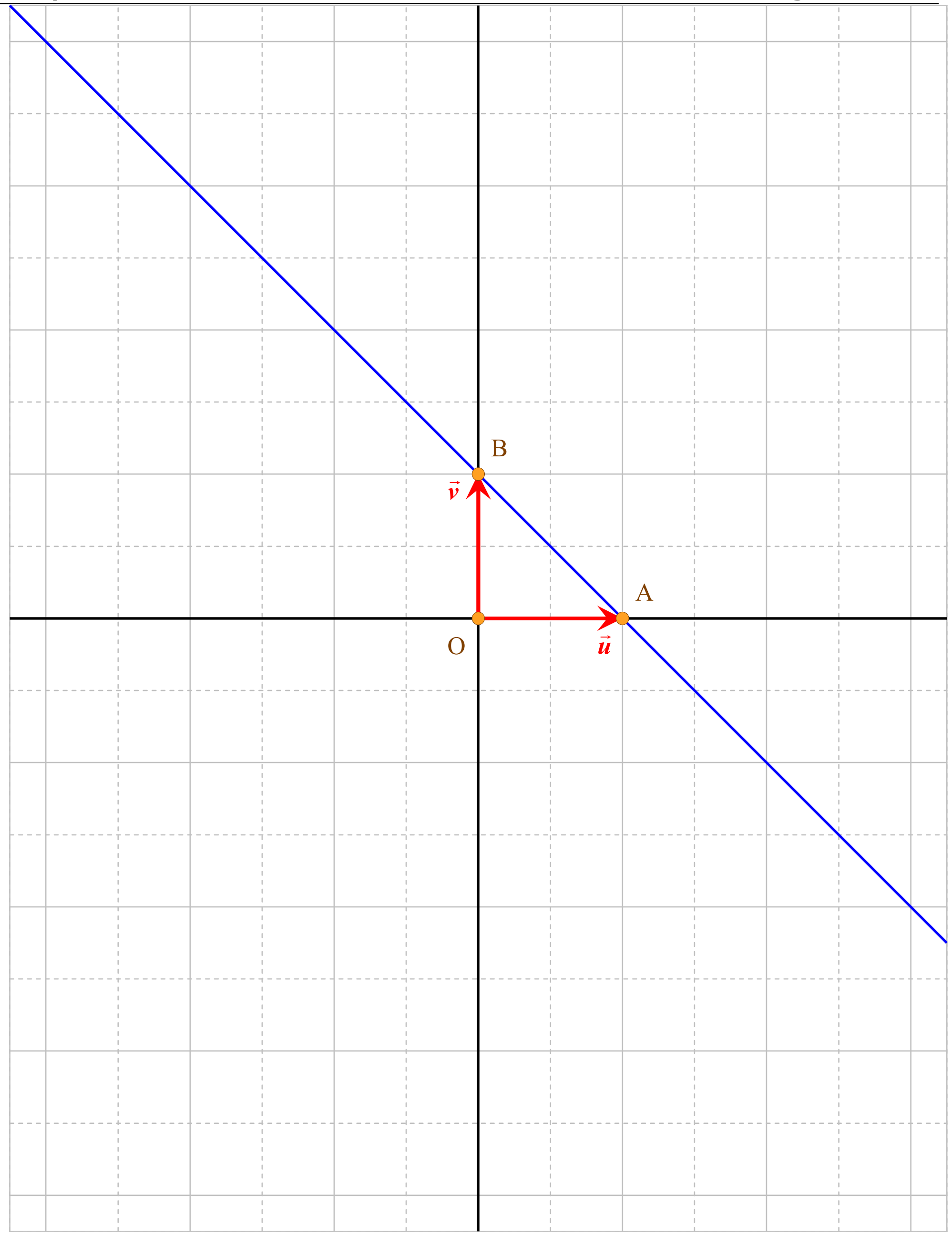
$$z' = 2\boldsymbol{i} \times \overline{z} + 1 - 2\boldsymbol{i}$$

où z' est l'affixe du point M' qui est l'image par la similitude ***f*** du point M d'affixe z.

5°) On appelle M'' l'image du point M par la transformation ***f***.

a. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = -2 \times \overrightarrow{AM}$ est la droite (AB).

b. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM''} = 2 \times \overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par A.



Le corrigé

1°) La symétrie axiale ***s*** est une similitude indirecte. Par conséquent, son expression complexe est de la forme :

$$s(z) = a \times \overline{z} + b$$

où a et b sont deux nombres complexes que nous allons déterminer.
Appartenant à l'axe de symétrie, les points A et B sont leurs propres images par ***s***. Ainsi :

$$s(A) = A \Leftrightarrow a \times \overline{z_A} + b = z_A \Leftrightarrow a \times \overline{1} + b = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 \quad \textit{(1)}$$

$$s(B) = B \Leftrightarrow a \times \overline{z_B} + b = z_B \Leftrightarrow a \times \overline{\boldsymbol{i}} + b = \boldsymbol{i} \Leftrightarrow -\boldsymbol{i} \times a + b = \boldsymbol{i} \quad \textit{(2)}$$

Les coefficients complexes a et b sont les solutions du système de deux équations à deux inconnues complexes :

$$\begin{cases} a + b = 1 & \textit{(1)} \\ -\boldsymbol{i} \times a + b = \boldsymbol{i} & \textit{(2)} \end{cases}$$

Pour déterminer a, nous allons soustraire l'équation ***(2)*** à l'équation ***(1)***. Il vient :

$$\underbrace{(a+b) - (-\boldsymbol{i} \times a + b) = 1 - \boldsymbol{i}}_{\textit{(1)}-\textit{(2)}} \Leftrightarrow (1+\boldsymbol{i}) \times a = 1 - \boldsymbol{i} \Leftrightarrow a = \frac{1-\boldsymbol{i}}{1+\boldsymbol{i}}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{(1-\boldsymbol{i}) \times (1-\boldsymbol{i})}{(1+\boldsymbol{i}) \times (1-\boldsymbol{i})} = \frac{1 - \boldsymbol{i} - \boldsymbol{i} - 1}{1 - \boldsymbol{i}^2} = \frac{-2.\boldsymbol{i}}{1-(-1)} = \frac{-2.\boldsymbol{i}}{2} = -\boldsymbol{i}$$

Pour obtenir b, il suffit juste de remplacer a par sa valeur $-\boldsymbol{i}$ dans l'équation ***(1)***.

$$a + b = 1 \Leftrightarrow -\boldsymbol{i} + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 + \boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion :</u> l'écriture complexe de la réflexion ***s*** est $s(z) = -\boldsymbol{i} \times \overline{z} + 1 + \boldsymbol{i}$.

2°) Dire que le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par l'homothétie ***h*** de centre A et de rapport -2 signifie :

$$\overrightarrow{AM'} = -2 \times \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow (z' - z_A) = -2 \times (z - z_A) \Leftrightarrow z' = -2 \times (z - 1) + 1 = -2 \times z + 3$$

<u>Conclusion :</u> l'expression complexe de l'homothétie ***h*** est $h(z) = -2 \times z + 3$.

3.a) La transformation ***f*** est la composée de la réflexion ***s*** qui est une similitude indirecte de rapport 1 suivie de l'homothétie ***h*** de rapport -2 qui est une similitude directe de rapport 2.
Par conséquent, la transformation ***f*** est une similitude indirecte de rapport $1 \times 2 = 2$.

3.b) Procédons par l'absurde : imaginons que la similitude ***f*** ait plus d'un point fixe, c'est-à-dire qu'elle en ait au moins deux. D'après un théorème du cours, elle serait alors soit une réflexion, soit l'application identique du cours (trois points fixes non alignés).
Dans ces deux cas, elle serait une isométrie, c'est-à-dire une similitude de rapport 1.
Or son rapport étant égal à 2, ce n'est pas une isométrie. Notre supposition était erronée !
<u>Conclusion :</u> la similitude indirecte ***f*** n'a <u>au plus</u> qu'un seul point fixe.

3.c) Le point A appartenant à l'axe de la réflexion ***s***, il est sa propre image par ***s*** :

$$s(A) = A$$

Le point A étant le centre de l'homothétie ***h***, il est encore sa propre image par ***h*** :

$$h(A) = A$$

Finalement, l'image de A par la similitude indirecte f est :

$$f = h \circ s(A) = h(s(A)) = h(A) = A$$

Donc le point A est fixe par ***f***.
Comme cette similitude ne pouvait avoir qu'au plus un seul point, alors A est le seul point fixe de ***f***.

4°) Pour tout nombre complexe z, nous pouvons écrire :

$$f(z) = h \circ s(z) = h(s(z)) = -2 \times s(z) + 3$$
$$= -2 \times (-\boldsymbol{i} \times \overline{z} + 1 + \boldsymbol{i}) + 3 = 2.\boldsymbol{i} \times \overline{z} - 2 - 2.\boldsymbol{i} + 3 = 2.\boldsymbol{i} \times \overline{z} + 3 - 2.\boldsymbol{i}$$

5.a) Pour tout nombre complexe z, nous noterons x et y ses parties réelle et imaginaire. Ainsi :

$$z = x + \boldsymbol{i}.y \qquad \text{et} \qquad \overline{z} = x - \boldsymbol{i}.y$$

Voyons ce qu'est cet ensemble $\mathcal{E}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM''} = -2 \times \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow z'' - 1 = -2 \times (z - 1) \\
&\Leftrightarrow 2.\boldsymbol{i} \times \overline{z} + 1 - 2.\boldsymbol{i} = -2 \times z + 2 \\
&\Leftrightarrow 2.\boldsymbol{i} \times (x - \boldsymbol{i}.y) - 2.\boldsymbol{i} = -2 \times (x + \boldsymbol{i}.y) + 2 \\
&\Leftrightarrow 2.\boldsymbol{i} \times x + 2 \times y - 2.\boldsymbol{i} = -2 \times x - 2.\boldsymbol{i} \times y + 2 \\
&\Leftrightarrow 2.\boldsymbol{i} \times x + 2 \times y - 2.\boldsymbol{i} + 2 \times x + 2.\boldsymbol{i} \times y - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{(2 \times y + 2 \times x - 2) + \boldsymbol{i} \times (2 \times x + 2 \times y - 2) = 0}_{\text{On regroupe les parties réelles et imaginaires}} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{(2 \times x + 2 \times y - 2) \times (1 + \boldsymbol{i}) = 0}_{\text{On factorise par } 2\times x+2\times y-2.} \Leftrightarrow \underbrace{2 \times x + 2 \times y - 2 = 0}_{\text{On divise par le complexe } 1+\boldsymbol{i} \text{ qui est non nul.}} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{x + y = 1}_{\text{Après avoir divisé par 2.}}
\end{aligned}$$

L'équation $x + y = 1$ est celle d'une droite. Plus exactement celle de la droite (AB).
En effet, on vérifie sans peine que les coordonnées $(1;0)$ de A et $(0;1)$ de B vérifient l'équation $x + y = 1$.
<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite (AB).

5.b) Là encore, nous noterons x et y les parties réelle et imaginaire de tout nombre complexe z, affixe d'un point M.

Voyons ce qu'est cet ensemble $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM''} = 2\times\overrightarrow{AM} \quad \Leftrightarrow \quad z''-1 = 2\times(z-1) \\ &\Leftrightarrow \quad 2.\boldsymbol{i}\times\bar{z}+1-2.\boldsymbol{i} = 2\times z-2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2.\boldsymbol{i}\times(x-\boldsymbol{i}.y)-2.\boldsymbol{i} = 2\times(x+\boldsymbol{i}.y)-2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2.\boldsymbol{i}\times x+2\times y-2.\boldsymbol{i} = 2\times x+2.\boldsymbol{i}\times y-2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2.\boldsymbol{i}\times x+2\times y-2.\boldsymbol{i}-2\times x-2.\boldsymbol{i}\times y+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{(2\times y-2\times x+2)+\boldsymbol{i}\times(2\times x-2\times y-2)=0}_{\text{Un nombre complexe est nul si et seulement si...}} \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{2\times y-2\times x+2=0}_{\text{...sa partie réelle est nulle...}} \quad \underline{\text{et}} \quad \underbrace{2\times x-2\times y-2=0}_{\text{...sa partie imaginaire l'est aussi !}} \\ &\Leftrightarrow \quad \overbrace{\underbrace{x-y-1=0}_{\text{On a divisé par }-2.} \quad \underline{\text{et}} \quad \underbrace{x-y-1=0}_{\text{On a divisé par 2.}}}^{\text{Mais, c'est la même équation !!!}} \quad \Leftrightarrow \quad x-y=1 \end{aligned}$$

*On pourrait là aussi factoriser par 2.y-2.x+2, puis diviser par 1-**i**...*

Encore une fois, $x-y=1$ est l'équation d'une droite mais laquelle ?

Déjà, cette droite passe par le point A car ses coordonnées vérifient l'équation.

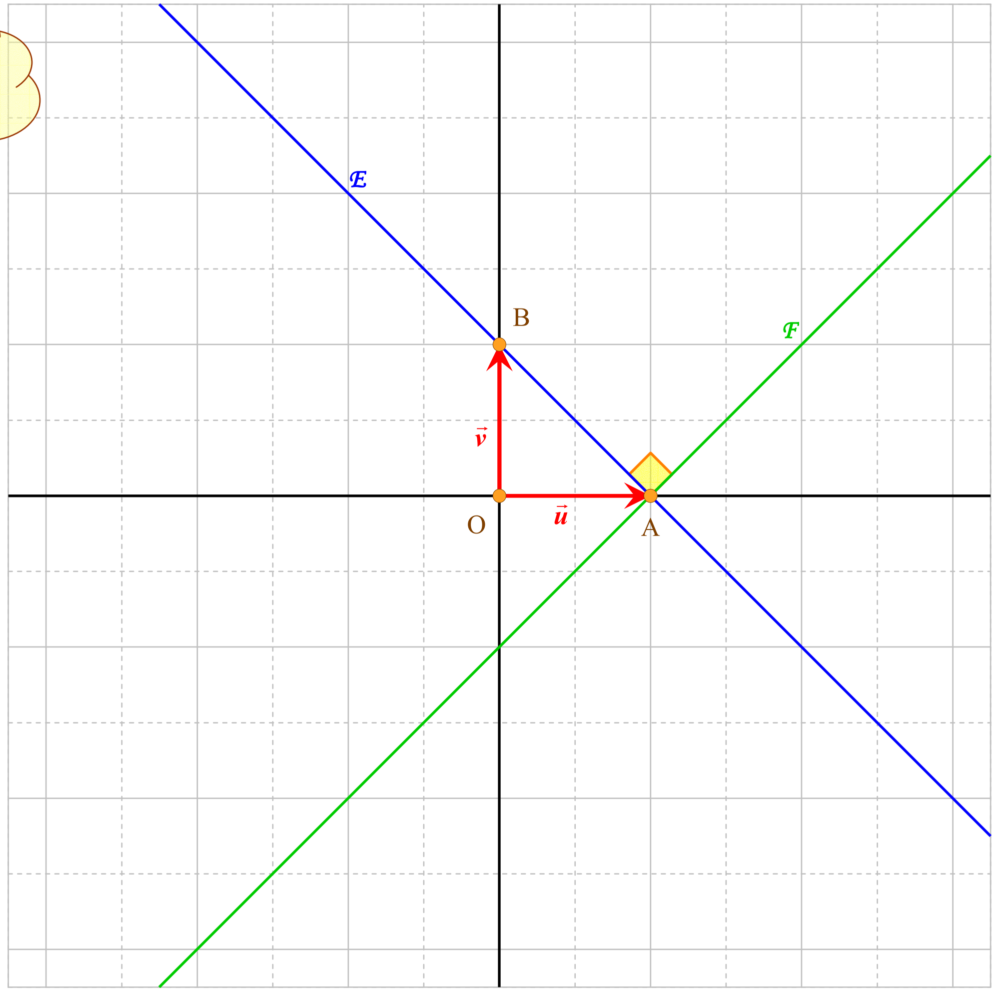
De plus, un vecteur normal de la droite d'équation $1\times x+(-1)\times y=1$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

A ce propos, calculons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

D'après leurs coordonnées, les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont opposés. Par conséquent, un autre vecteur normal de la droite $\mathcal{F}$ est le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Tout cela est une question de direction !

<u>Conclusion :</u> l'ensemble $\mathcal{F}$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$, c'est la perpendiculaire que nous recherchions.

A l'issue de l'exercice, la figure est la suivante :



Histoires de similitudes

Le contexte

Le présent exercice issu de mon cerveau peu inspiré traite des similitudes. Les questions sont des applications directes de ce qui peut être vu en cours. Point de grands mouvements, juste des propriétés essentielles à connaître.

L'énoncé

Le plan complexe ci-contre est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On appelle I ; J et K les trois points de ce plan d'affixes respectives :

$$z_I = 3 \qquad z_J = -\boldsymbol{i} \qquad z_K = 2-\boldsymbol{i}$$

a) Donner les écritures complexes des transformations suivantes :

1. La rotation ***r*** de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
2. La translation ***t*** de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
3. L'homothétie ***h*** de centre K et de rapport -4.
4. La symétrie axiale ***S*** d'axe $\left(O;\vec{v}\right)$.

On appelle ***f*** la similitude qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \left(3-3.\boldsymbol{i}\right)\times z+1+5.\boldsymbol{i}$$

b) Déterminer l'image du point K par la similitude ***f***.
Démontrer que la similitude ***f*** admet un unique point fixe Ω dont on déterminera l'affixe z_Ω.

c) Déterminer la nature et les attributs de la similitude ***f***.

A, B et C sont trois points du plan tels que :

- La longueur AB mesure $\sqrt{8}$ unités de longueur.
- L'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ mesure $-\dfrac{5.\pi}{6}$ radians (à 2π-près).

On appelle alors A' ; B' et C' les images des points A ; B et C par la similitude ***f***.

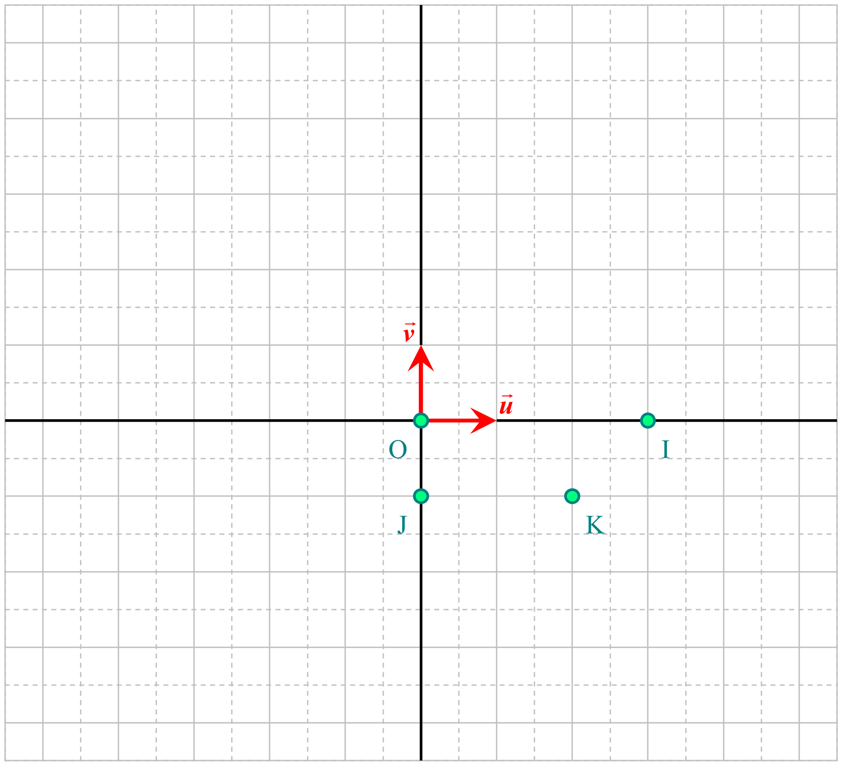
d) En justifiant brièvement, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer la valeur du rapport $\dfrac{\Omega A'}{\Omega A}$.
2. Déterminer la longueur A'B'.
3. Déterminer des mesures des angles orientés $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}\right)$.

On appelle ***s*** la similitude qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \boldsymbol{i}.\bar{z}+2+\boldsymbol{i}$$

e) Pourquoi peut-on dire que la similitude ***s*** est une isométrie indirecte ?
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points fixes par la transformation ***s***.
En déduire la nature de la similitude ***s***.



Le corrigé

a.1) Dire que le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la rotation ***r*** de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ signifie que :

$$\left|\frac{z'-z_J}{z-z_J}\right|=\frac{JM'}{JM}=1 \quad \underline{\text{et}} \quad \arg\left(\frac{z'-z_J}{z-z_J}\right)=\left(\overrightarrow{JM},\overrightarrow{JM'}\right)=-\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z'-z_J}{z-z_J}=1\times e^{-i.\frac{\pi}{2}}=-\boldsymbol{i}$$

Il vient alors :

$$z'=\boldsymbol{r}(z)=z_J-\boldsymbol{i}\times(z-z_J)=(-\boldsymbol{i})-\boldsymbol{i}\times(z-(-\boldsymbol{i}))=-\boldsymbol{i}\times z-1-\boldsymbol{i}$$

a.2) Dire que le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la translation ***t*** de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ signifie que :

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{IJ} \quad \Leftrightarrow \quad z'-z=z_J-z_I=-\boldsymbol{i}-3 \quad \Leftrightarrow \quad z'=\boldsymbol{t}(z)=z-3-\boldsymbol{i}$$

a.3) Dire que le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par l'homothétie ***h*** de centre K et de rapport -4 signifie que :

$$\overrightarrow{KM'}=-4\times\overrightarrow{KM} \quad \Leftrightarrow \quad z'-z_K=-4\times(z-z_K) \quad \Leftrightarrow \quad z'=\boldsymbol{h}(z)=(2-\boldsymbol{i})-4\times(z-2+\boldsymbol{i})$$
$$=-4\times z+10-5.\boldsymbol{i}$$

a.4) Dire que le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la symétrie d'axe $(O;\vec{v})$ signifie que les points M et M' ont mêmes ordonnées mais des abscisses opposées.
Par conséquent :

$$z'=\boldsymbol{s}(z)=-\mathrm{Re}(z)+\boldsymbol{i}\times\mathrm{Im}(z)=-\left(\mathrm{Re}(z)-\boldsymbol{i}\times\mathrm{Im}(z)\right)=-\overline{z}$$

b) Déterminons l'affixe de l'image K' du point K par la similitude ***f***.

$$z_{K'}=\boldsymbol{f}(z_k)=(3-3.\boldsymbol{i})\times z_K+1+5.\boldsymbol{i}=(3-3.\boldsymbol{i})\times(2-\boldsymbol{i})+1+5.\boldsymbol{i}$$
$$=6-3.\boldsymbol{i}-6.\boldsymbol{i}-3+1+5.\boldsymbol{i}=4-4.\boldsymbol{i}$$

➲ Dire que le point M d'affixe z est fixe par la similitude ***f*** signifie que :

$$\boldsymbol{f}(z)=z \quad \Leftrightarrow \quad (3-3.\boldsymbol{i})\times z+1+5.\boldsymbol{i}=z \quad \Leftrightarrow \quad (2-3.\boldsymbol{i})\times z=-1-5.\boldsymbol{i}$$
$$\Leftrightarrow \quad z=\frac{-1-5.\boldsymbol{i}}{2-3.\boldsymbol{i}}=\frac{(-1-5.\boldsymbol{i})\times(2+3.\boldsymbol{i})}{(2-3.\boldsymbol{i})\times(2+3.\boldsymbol{i})}=\frac{-2-3.\boldsymbol{i}-10.\boldsymbol{i}+15}{2^2+3^2}=\frac{13-13.\boldsymbol{i}}{13}=1-\boldsymbol{i}$$

Conclusion : la similitude directe ***f*** admet un unique point fixe Ω qui a pour affixe $1-\boldsymbol{i}$.

c) La similitude directe ***f*** ayant un point fixe, elle n'est ni une translation, ni l'application (sinon elle n'en aurait aucun) identique du plan. Par conséquent, elle a un angle et un rapport.

Le rapport de ***f*** est le module du coefficient directeur $3-3.\boldsymbol{i}$:

$$\text{Rapport}(\boldsymbol{f})=|3-3.\boldsymbol{i}|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\times\sqrt{2}$$

Son angle est un argument de son coefficient directeur de $3-3.\boldsymbol{i}$.

$$\frac{3-3.\boldsymbol{i}}{|3-3.\boldsymbol{i}|}=\frac{3-3.\boldsymbol{i}}{3\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\boldsymbol{i}.\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\boldsymbol{i}\times\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=e^{-\boldsymbol{i}.\frac{\pi}{4}}$$

Donc un angle de la similitude directe ***f*** est $-\frac{\pi}{4}$.

d) Voilà quelques questions d'application directe du cours :

4. La similitude ***f*** multiplie les longueurs par la valeur de son rapport $3.\sqrt{2}$.
   Comme $\begin{cases}\boldsymbol{f}(\Omega)=\Omega\\ \boldsymbol{f}(A)=A'\end{cases}$, alors $\Omega A'=3.\sqrt{2}\times\Omega A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Omega A'}{\Omega A}=3.\sqrt{2}$
5. Comme $\begin{cases}\boldsymbol{f}(A)=A'\\ \boldsymbol{f}(B)=B'\end{cases}$, alors $A'B'=3\times\sqrt{2}\times\sqrt{8}=3\times\sqrt{16}=12$.
6. La similitude ***f*** conserve les angles orientés.
   Comme $\begin{cases}\boldsymbol{f}(A)=A'\\ \boldsymbol{f}(B)=B'\\ \boldsymbol{f}(C)=C'\end{cases}$, alors $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{5.\pi}{6}$.

   Enfin, la similitude directe ***f*** fait pivoter tous les vecteurs de son angle $-\frac{\pi}{4}$.

   Par conséquent, comme $\begin{cases}\boldsymbol{f}(\Omega)=\Omega\\ \boldsymbol{f}(A)=A'\end{cases}$ alors $\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}\right)=-\frac{\pi}{4}$.

e) Comme son expression complexe est de la forme $a\times\overline{z}+b$ c'est-à-dire affine-conjuguée, alors la similitude ***s*** est indirecte.
➲ Dire que le point M d'affixe $\underbrace{z=x+\boldsymbol{i}.y}_{\text{où x et y sont les abscisse et ordonnée de M.}}$ est fixe par la similitude indirecte ***f*** signifie que :

$$\boldsymbol{s}(z)=z \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{i}.\overline{z}+2+\boldsymbol{i}=z \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{i}.(x-\boldsymbol{i}.y)+2+\boldsymbol{i}=x+\boldsymbol{i}.y$$
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{i}.x+y+2+\boldsymbol{i}=x+\boldsymbol{i}.y \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(y-x+2)+\boldsymbol{i}.(x-y+1)=0}_{\text{Un nombre complexe est nul si et seulement...}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{y-x+2=0}_{\text{...si ses partie réelle et...}} \quad \underline{\text{et}} \quad \underbrace{x-y+1=0}_{\text{...imaginaire sont nulles.}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x-y=2 & \textit{(1)}\\ x-y=-1 & \textit{(2)}\end{cases}$$

Or la différence $x-y$ ne peut pas être à la fois égale à 2 et à -1. Par conséquent, l'équation $\boldsymbol{s}(z)=z$ n'admet pas de solution.

Conclusion : la similitude indirecte ***s*** n'a aucun point fixe.

➲ Le rapport de la similitude indirecte ***s*** est égal au module de son coefficient directeur ***i***.
Comme son rapport est égal $|\boldsymbol{i}|=1$, alors la similitude ***s*** est une isométrie...indirecte.

Or il n'existe que deux types d'isométries indirectes : les symétries glissées (composées d'une translation et d'une symétrie axiale) et les symétries axiales.
Comme ***s*** n'a aucun point fixe, elle est nécessairement une symétrie glissée.

La vérité sur la symétrie glissée *s*
Par exemple, ***s*** est la composée $\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{v}$ où :

- ***v*** est la symétrie d'axe la première bissectrice du plan, c'est-à-dire la droite d'équation $y=x$. On a alors $\underbrace{\boldsymbol{v}(z)=\boldsymbol{v}(x+\boldsymbol{i}.y)=y+\boldsymbol{i}.x}_{\text{L'ordonnée devient l'abscisse et réciproquement...}}=\boldsymbol{i}\times(-\boldsymbol{i}.y+x)=\boldsymbol{i}\times\overline{z}$
- ***u*** est la translation de vecteur d'affixe $2+\boldsymbol{i}$. On a alors : $\boldsymbol{u}(z)=z+2+i$.

Et finalement, il vient que pour tout nombre complexe z :

$$\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{v}(z)=\boldsymbol{v}(z)+2+i=\boldsymbol{i}.\overline{z}+2+\boldsymbol{i}=\boldsymbol{s}(z)$$

Une classification des similitudes par leurs points fixes

Les similitudes peuvent classées suivant le nombre de leurs points fixes.

	Similitudes directes Conservent les angles orientés	**Similitudes indirectes** Inversent les angles orientés
Aucun point fixe	Translation	Symétrie glissée *Composée d'une réflexion et d'une translation. Le vecteur de translation n'est pas normal à l'axe de symétrie*
Un seul point fixe	Homothétie, rotation ou composée permutable d'une homothétie et d'une rotation de même centre	Composée d'une symétrie axiale ou glissée suivie d'une homothétie
Au moins deux points fixes	L'application identique du plan	Symétrie axiale

Conséquence : une similitude qui n'est pas une isométrie a un unique point fixe.

Coupes d'un cône désaxé

Le contexte

Le présent exercice qui est issu de mon volcanique cerveau aborde les sections d'un cône désaxé par des plans parallèles aux plans de coordonnées avant l'estocade finale portée par une droite. Un exercice qui vous avez peu de chance de retrouver le jour du bac.

L'énoncé

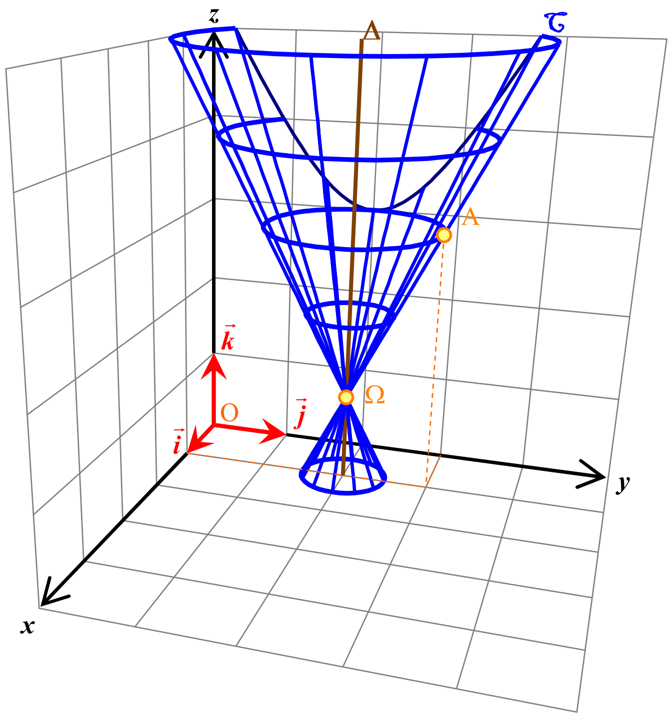
L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Dans celui-ci, les points A et Ω ont pour coordonnées :

$A(1;3;3)$ $\Omega(1;2;1)$

On appelle Δ la droite parallèle à l'axe $Oz=\left(O;\vec{k}\right)$ et passant par le point Ω.

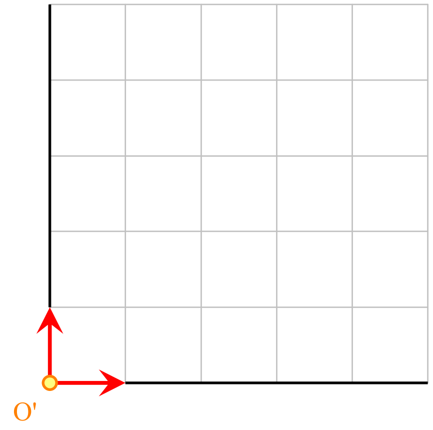
On note $\mathcal{C}$ le cône droit de sommet Ω, d'axe Δ et contenant le point A.
La situation est représentée ci-dessous en perspective centrale (vision réelle de près).



a) Etablir qu'une équation du cône $\mathcal{C}$ est :

$$4\times\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]=(z-1)^2.$$

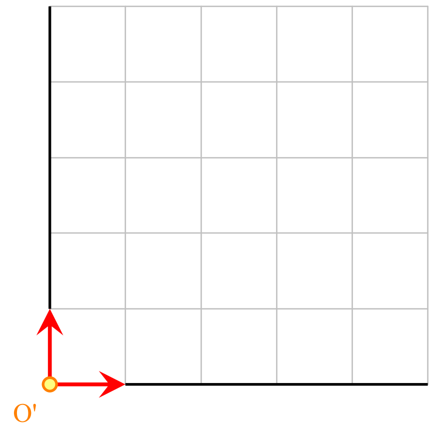
b) Déterminer et représenter dans le repère ci-dessous l'intersection $\mathcal{I}_1$ du cône $\mathcal{C}$ et du plan xOy.



Le repère ci-contre du plan xOy est formé :

- Du point O' qui est le projeté orthogonal de l'origine O sur le plan xOy.
- De deux vecteurs issus de la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On précisera de qui il s'agit.

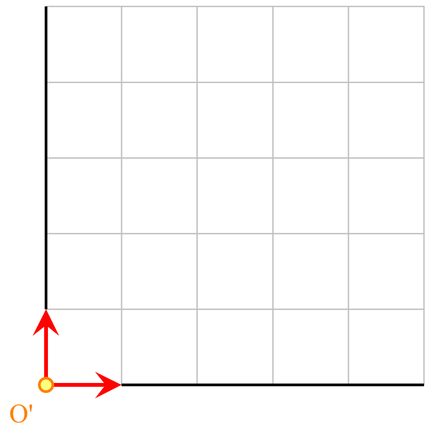
c) Déterminer et représenter dans le repère ci-dessous l'intersection $\mathcal{I}_2$ du cône $\mathcal{C}$ et du plan d'équation $x=2$.



Le repère ci-contre du plan d'équation $x=2$ est formé :

- Du point O' qui est le projeté orthogonal de l'origine O sur le plan d'équation $x=2$.
- De deux vecteurs issus de la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On précisera de qui il s'agit.

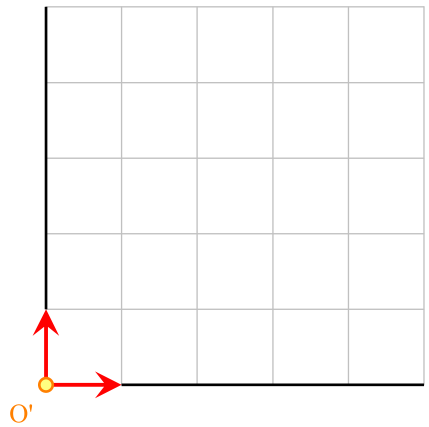
d) Déterminer et représenter dans le repère ci-dessous l'intersection $\mathcal{I}_3$ du cône $\mathcal{T}$ et du plan d'équation $z = 1$.



Le repère ci-contre du plan d'équation $z = 1$ est formé :

- Du point O' qui est le projeté orthogonal de l'origine O sur le plan d'équation $z = 1$.
- De deux vecteurs issus de la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On précisera de qui il s'agit.

e) Déterminer et représenter dans le repère ci-dessous l'intersection $\mathcal{I}_4$ du cône $\mathcal{T}$ et du plan d'équation $y = 2$.



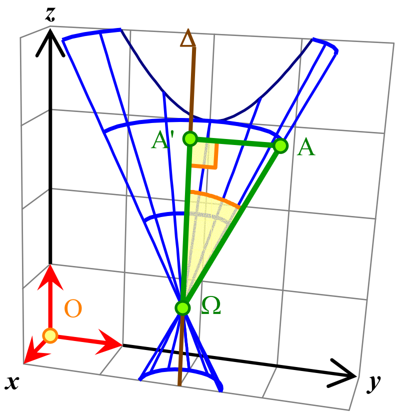
Le repère ci-contre du plan d'équation $y = 2$ est formé :

- Du point O' qui est le projeté orthogonal de l'origine O sur le plan d'équation $y = 2$.
- De deux vecteurs issus de la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On précisera de qui il s'agit.

f) A est l'un des deux points d'intersection de la droite (OA) et du cône $\mathcal{T}$. Mais il en existe un second.
Déterminer les coordonnées du point B qui est l'autre point d'intersection de la droite (OA) et du cône $\mathcal{T}$.
Indication : on pourra commencer par chercher une représentation paramétrique de la droite (OA). Euh, vous savez ce que c'est une représentation paramétrique de droite ?

Le corrigé

a) Pour pouvoir obtenir l'équation du cône $\mathcal{T}$, il nous faut au préalable connaître son demi-angle au sommet Ω ou tout du moins la valeur de la tangente de celui-ci.
Le projeté orthogonal du point $A(1;3;3)$ sur l'axe Δ est le point $A'(1;2;3)$.
Par conséquent, le demi-angle au sommet du cône $\mathcal{T}$ est aussi l'angle géométrique $\widehat{A\Omega A'}$.
Le triangle AΩA' est rectangle en A'. Donc, nous pouvons écrire :



$$\tan\left(\widehat{A\Omega A'}\right) = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Coté adjacent}} = \frac{A'A}{A'\Omega}$$

Sachant que $\overrightarrow{A'A}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'\Omega}\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$, il vient alors :

$$\tan\left(\widehat{A\Omega A'}\right) = \frac{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}{\sqrt{0^2+0^2+(-2)^2}} = \frac{1}{2}$$

Désormais, nous sommes en mesure de déterminer simplement une équation du cône $\mathcal{T}$.
Le projeté de tout point $M(x;y;z)$ de l'espace sur l'axe Δ est le point $M'(1;2;z)$.
En effet, ce projeté M' est à la verticale du point Ω dont il hérite de l'abscisse 1 et de l'ordonnée 2. Et il est aussi à la même altitude que M dont il hérite de la côte z.
Le cône $\mathcal{T}$ (abstraction faite du sommet Ω) est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant l'égalité :

$$\tan\left(\widehat{M\Omega M'}\right) = \frac{M'M}{\Omega M'} = \frac{1}{2}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{M'M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ ont pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\z-1\end{pmatrix}$. Il vient alors :

$$M(x;y;z)\in\mathcal{T} \Leftrightarrow \frac{M'M}{\Omega M'} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \underbrace{2\times M'M = \Omega M' \Leftrightarrow 4\times M'M^2 = \Omega M'^2}_{\text{Comme on travaille avec des distances, c'est-à-dire avec des réels positifs ou nuls, alors il y a équivalence...}}$$

$$\Leftrightarrow 4\times\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+0^2}\right)^2 = \left(\sqrt{0^2+0^2+(z-1)^2+0^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\times\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right] = (z-1)^2$$

b) La projection orthogonale du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ dans le plan xOy est le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
C'est dans celui-ci que nous allons chercher à connaître la nature de l'intersection $\mathscr{I}_1$.

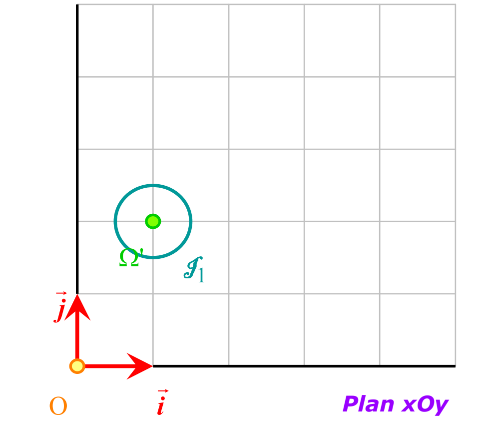
On travaille de facto dans le plan xOy muni du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

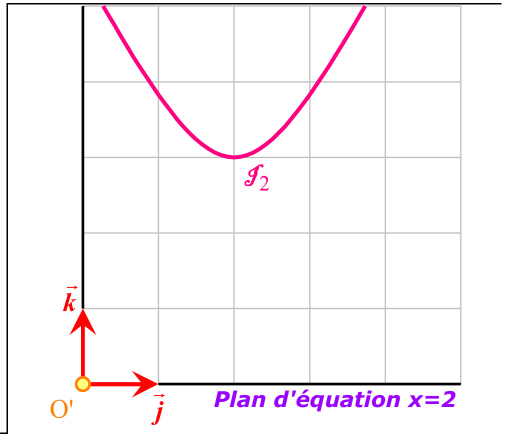
$$M(x;y;0)\in\mathscr{I}_1 \Leftrightarrow 4\times\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]=(0-1)^2 \Leftrightarrow 4\times\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]=1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2+(y-2)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \Omega'M^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \Omega M=\frac{1}{2}}_{\substack{\text{où } \Omega'(1;2;0) \text{ est le projeté du sommet } \Omega \text{ sur le plan xOy.}\\ \text{Le vecteur } \overrightarrow{\Omega' M} \text{ a pour coordonnées } (x-1;y-2;0).}}$$

$$\Leftrightarrow M\in\text{Cercle du plan xOy de centre } \Omega' \text{ et de rayon } \frac{1}{2}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathscr{I}_1$ est le cercle du plan xOy de centre $\Omega'(1;2;0)$ et de rayon 0,5.





c) La projection orthogonale du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ dans le plan d'équation $x=2$ est le repère $\left(O';\vec{j},\vec{k}\right)$ où le point $O'(2;0;0)$ est le projeté orthogonal de O dans ce plan.

On travaille dans le plan d'équation x=2 muni du repère $\left(O';\vec{j},\vec{k}\right)$.

$$M(2;y;z)\in\mathscr{I}_2 \Leftrightarrow 4\times\left[(2-1)^2+(y-2)^2\right]=(z-1)^2 \Leftrightarrow \underbrace{4\times\left[1+(y-2)^2\right]=(z-1)^2}_{\text{Deux carrés sont égaux si et ...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{z-1=2\times\sqrt{1+(y-2)^2}}_{\text{...seulement si les nombres sont égaux...}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{z-1=-2\times\sqrt{1+(y-2)^2}}_{\text{...ou opposés}}$$

Conclusion : $\mathscr{I}_2$ est l'hyperbole d'équation $\frac{1}{4}\times(z-1)^2-(y-2)^2=1$ du plan $x=2$.

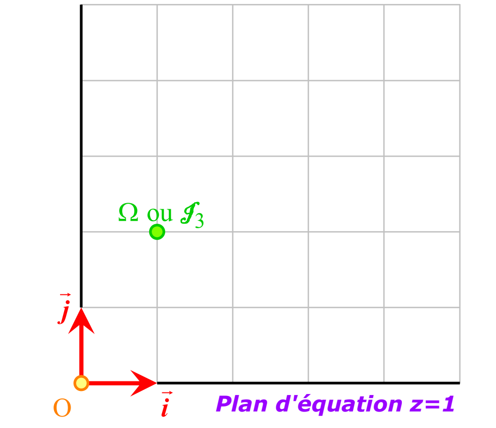
c) La projection orthogonale du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ dans le plan d'équation $z=1$ qui est parallèle au plan xOy, est le repère $\left(O';\vec{i},\vec{j}\right)$ où O' a pour coordonnées $(0;0;1)$.

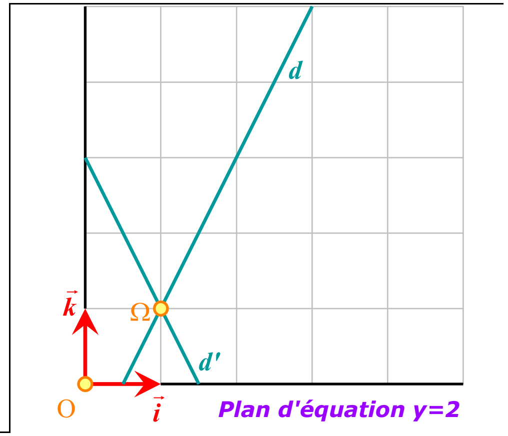
On travaille de facto dans le plan d'équation z=1 muni du repère $\left(O';\vec{i},\vec{j}\right)$.

$$M(x;y;1)\in\mathscr{I}_3 \Leftrightarrow 4\times\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]=(1-1)^2 \Leftrightarrow 4\times\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2+(y-2)^2=0 \Leftrightarrow \Omega M^2=0 \Leftrightarrow \Omega M=0 \Leftrightarrow M=\Omega}_{\substack{\text{Le point } \Omega(1;2;1) \text{ appartient au plan d'équation z=1}\\ \text{et le vecteur } \overrightarrow{\Omega M} \text{ a pour coordonnées } (x-1;y-2;0).}}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathscr{I}_3$ se résume au sommet Ω du cône $\mathscr{C}$. Un résultat prévisible !





e) La projection orthogonale du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ dans le plan d'équation $y=2$ est le repère $\left(O';\vec{i},\vec{k}\right)$ où le point $O'(0;2;0)$ est le projeté orthogonal de l'origine dans ce plan.

On travaille dans le plan d'équation y=2 muni du repère $\left(O';\vec{i},\vec{k}\right)$.

$$M(x;2;z)\in\mathscr{I}_4 \Leftrightarrow 4\times\left[(x-1)^2+(2-2)^2\right]=(z-1)^2 \Leftrightarrow \underbrace{4\times(x-1)^2=(z-1)^2}_{\text{Deux carrés sont égaux si et ...}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\times(x-1)=z-1}_{\text{...seulement si les nombres sont égaux...}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{2\times(x-1)=-(z-1)}_{\text{...ou opposés}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{z=2\times x-1}_{\text{L'équation d'une droite } \boldsymbol{d}.} \quad \text{ou} \quad \underbrace{z=-2\times x+3}_{\text{L'équation d'une autre droite } \boldsymbol{d'}.}$$

Conclusion : $\mathscr{I}_4$ est la réunion de la droite ***d*** d'équation réduite $z=2\times x-1$ et de la droite ***d'*** d'équation $z=-2\times x+3$.

f) Nous allons déterminer les coordonnées de B de la même manière que s'il avait été le point d'intersection d'une droite et d'un plan dont nous aurions connu l'équation.

Comme le point B appartient à la droite (OA), alors les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires. Donc il existe un réel t tel que $\overrightarrow{OB} = t \times \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x_B = t \\ y_B = 3 \times t \\ z_B = 3 \times t \end{cases}}_{\text{Une représentation paramétrique qui ne dit pas son nom...}}$.

De plus, comme le point B appartient aussi au cône $\mathcal{C}$, alors ses coordonnées en vérifient l'équation. Par conséquent :

$$4 \times \left[(x_B - 1)^2 + (y_B - 2)^2 \right] = (z_B - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \times \left[(t-1)^2 + (3 \times t - 2)^2 \right] = (3 \times t - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \times \left[t^2 - 2 \times t + 1 + 9 \times t^2 - 12 \times t + 4 \right] = 9 \times t^2 - 6 \times t + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \times \left[10 \times t^2 - 14 \times t + 5 \right] = 9 \times t^2 - 6 \times t + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 40 \times t^2 - 56 \times t + 20 = 9 \times t^2 - 6 \times t + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 31 \times t^2 - 50 \times t + 19 = 0$$

Calculons le discriminant de cette équation du second degré d'inconnue t :

$$\Delta = (-50)^2 - 4 \times 31 \times 19 = 2500 - 2356 = 144 = 12^2$$

Comme son discriminant est positif, alors l'équation admet deux solutions :

Soit : $t = \dfrac{50-12}{2 \times 31} = \dfrac{38}{62} = \dfrac{19}{31}$

Il vient alors :

$$x_B = \frac{19}{31} \quad y_B = \frac{57}{31} \quad z_B = \frac{57}{31}$$

Soit : $t = \dfrac{50+12}{2 \times 31} = \dfrac{62}{62} = 1$

Il vient alors :

$$\underbrace{x_B = 1 \quad y_B = 3 \quad z_B = 3}_{\text{On retombe sur le point A.}}$$

<u>Conclusion :</u> l'autre point d'intersection de la droite (OA) et du cône $\mathcal{C}$ est $B\left(\dfrac{19}{31};\dfrac{57}{31};\dfrac{57}{31}\right)$.

Les hyperboles, les paraboles, les ellipses : une belle bande de coniques !
Une conique est une courbe qui est l'intersection d'un cône et d'un plan.

Toute conique admet une équation de la forme : $a \times x^2 + b \times y^2 + c \times x + d \times y = 1$

Lorsque a et b sont nuls <u>mais</u> c ou d ne le sont pas, alors la conique est une <u>droite</u>.
Lorsque a est nul <u>et</u> si b et c ne le sont pas, alors la conique est une <u>parabole</u>.
Lorsque a et b sont positifs, alors la conique est une <u>ellipse</u> et un cercle s'ils sont égaux.
Lorsque a et b sont de signes contraires, alors la conique est une <u>hyperbole</u>.