Théorème sur les limites du logarithme népérien en 0 et $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

<u>Conséquence graphique :</u> l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe représentant ln.

La preuve de ce théorème

❶ La limite de ln en $+\infty$

Soit M un réel strictement positif.
Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que $\ln(1)=0$ alors $\ln(2)$ est un réel strictement positif.

Par conséquent, le quotient $\dfrac{M}{\ln(2)}$ est un réel strictement positif.

On appelle n le plus petit entier naturel tel que :

$$n \geq \frac{M}{\ln(2)} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{n\times\ln(2)\geq M}_{\substack{\text{On multiplie par } \ln(2) \\ \text{qui est positif.}}} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2^n\right)\geq M$$

Comme ln est une fonction croissante, alors pour tout $x \geq 2^n$ nous avons :

$$\ln(x) \geq \ln\left(2^n\right) \geq M$$

<u>Conclusion :</u> nous venons d'établir que pour tout réel strictement positif M, il existe un moment $x_0 = 2^n$ à partir duquel $\ln(x)\geq M$.

C'est la définition d'une limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. D'où $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

❷ La limite de ln à droite de 0

Pour tout réel $x\in\,]0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Quand x tend vers 0 par la droite, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $\dfrac{1}{0^+}=+\infty$. Donc $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède.
Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Théorème sur les croissances comparées de ln et x

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x.\ln(x) = 0$$

En d'autres termes, ln est la plus faible de toutes les fonctions connues en terminale.

La preuve de ce théorème

❶ La limite de ln(x)/x en $+\infty$

Le quotient $\dfrac{\ln(x)}{x}$ est en $+\infty$ une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Pour lever cette indétermination, étudions la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - 2.\sqrt{x}$$

D'abord, calculons l'image de 1 par f.

$$f(1) = \ln(1) - 2.\sqrt{1} = 0 - 2 = -2$$

Ensuite les fonctions ln et racine étant dérivables sur $]0;+\infty[$, elles le sont de facto aussi sur $[1;+\infty[$. Donc leur différence f l'est également.

Pour tout $x\in[1;+\infty[$, il vient :

$$f'(x) = \left[\ln(x)\right]' - 2.\left[\sqrt{x}\right]'$$
$$= \frac{1}{x} - 2.\frac{1}{2.\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

Or si $x>1$ alors $\underbrace{\sqrt{x} > \sqrt{1} = 1}_{\substack{\text{La racine est strictement} \\ \text{croissante sur } [0;+\infty[}}$

donc $1-\sqrt{x} < 0$.
Le tableau de signe de la dérivée $f'(x)$ et de variation de f est donc celui ci-contre.

x	1	$+\infty$
$1-\sqrt{x}$	$-$	
x	$+$	
$f'(x)$	$-$	
f	-2 ↘	?

La fonction f décroissant depuis -2, elle est donc négative sur l'intervalle sur $[1;+\infty[$.

Ainsi pour tout $x\in[1;+\infty[$, avons-nous :

$$f(x)<0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) - 2.\sqrt{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) < 2.\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{\ln}{x} < \frac{2.\sqrt{x}}{x}}_{\substack{\text{On divise par } x\in[1;+\infty[\text{ qui est} \\ \text{positif. L'ordre est conservé}}} = \frac{2.\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

De plus sur l'intervalle $]1;+\infty[$, $\dfrac{\ln(x)}{x}$ est positif car c'est le quotient de deux quantités positives. Ce même quotient est nul lorsque x vaut 1 car $\dfrac{\ln(1)}{1}=\dfrac{0}{1}=0$.

Autrement dit, nous venons d'établir que pour tout réel $x\in[1;+\infty[$, nous avons :

$$0\le\frac{\ln(x)}{x}\le\frac{2}{\sqrt{x}}$$

Or lorsque x tend vers $+\infty$, $\sqrt{x}$ s'en va vers $+\infty$ donc $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ tend vers $\dfrac{2}{+\infty}=0^+$.

Ainsi au voisinage de $+\infty$, le quotient $\dfrac{\ln(x)}{x}$ est-il coincé entre 0 et la quantité $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ qui y va.

<u>Conclusion :</u> en application du théorème des gendarmes, nous pouvons conclure :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

❷ La limite de x.ln(x) à droite de 0

Pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$x.\ln(x)=\frac{1}{1/x}\times[-\ln(1/x)]=-\frac{\ln(1/x)}{1/x}$$

Quand x tend vers 0 par la droite, $1/x$ tend vers $\dfrac{1}{0^+}=+\infty$.

Or d'après ce qui précède $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(t)}{t}=0$ avec ici $t=1/x$.

Donc $\dfrac{\ln(1/x)}{1/x}$ tend vers 0.

<u>Conclusion :</u> $\lim\limits_{x\to0^+}x.\ln(x)=\lim\limits_{x\to0^+}-\dfrac{\ln(1/x)}{1/x}=0$