

Puissance réelle d'un nombre positif

Nous connaissons déjà la puissance entière (naturelle ou relative) d'un nombre réel.

Puissance entière d'un nombre réel a

La puissance nième du réel a est le réel noté a^n et défini par :

$$a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs a si } n > 0} \quad \text{ou} \quad a^0 = 1 \quad \text{ou} \quad a^{-n} = \underbrace{\frac{1}{a} \times \dots \times \frac{1}{a}}_{n \text{ facteurs } \frac{1}{a}} = \frac{1}{a^n}$$

Dans la présente définition, n est un entier naturel.

Cette notion de puissance peut être étendue à tout exposant réel en s'appuyant sur les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

Puissance réelle d'un nombre réel positif a

La puissance b du réel positif a est le réel a^b et défini par :

$$a^b = e^{b \cdot \ln(a)}$$

Quelques remarques sur cette définition :

- La puissance réelle d'un réel a étant une exponentielle, c'est une quantité qui est toujours strictement positive.
- La fonction ln n'étant définie que sur $]0; +\infty[$, la définition précédente n'a que de sens que si a est un réel strictement positif.
Par contre, b est un réel quelconque.
Pour note, la puissance entière existe même pour les exposés a négatifs et 0.
- La puissance réelle est parfaitement compatible avec la puissance entière. Cela découle des propriétés de l'exponentielle. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\textcircled{1} \quad \underbrace{a^n = e^{n \cdot \ln(a)}}_{\text{Vu sous l'angle de la puissance réelle}} = \underbrace{e^{\overbrace{n \cdot \ln(a)}^{n \text{ termes}}} = e^{\ln(a) + \dots + \ln(a)}}_{\text{L'exponentielle du produit est la somme des...}} = \underbrace{e^{\ln(a)} \times \dots \times e^{\ln(a)}}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{a \times \dots \times a}_{\text{Puissance entière...}} = a^n$$

$$\textcircled{2} \quad \underbrace{a^0 = e^{0 \cdot \ln(a)}}_{\text{Puissance réelle}} = e^0 = \underbrace{1}_{\text{Puissance entière}} = a^0$$

$$\textcircled{3} \quad \underbrace{a^{-n} = e^{-n \cdot \ln(a)}}_{\text{Puissance réelle}} = \underbrace{\frac{1}{e^{n \cdot \ln(a)}}}_{\text{L'exponentielle de l'opposé...}} = \underbrace{\frac{1}{a^n}}_{\text{D'après } \textcircled{1}}} = \underbrace{\frac{1}{a} \times \dots \times \frac{1}{a}}_{\text{Puissance entière}} = a^{-n}$$

Propriétés de la puissance réelle

La puissance réelle présente les mêmes propriétés que sa petite soeur entière. Mais si celles de cette dernière découlent des propriétés du produit, celles de la puissance réelle proviennent des propriétés des fonctions ln et exponentielle.

Dans ce qui suit, a et a' sont des réels positifs. b et c sont deux réels quelconques.

- L'exposant d'un produit est la somme des exposants.**

$$a^b \times a^c = \underbrace{e^{b \cdot \ln(a)} \times e^{c \cdot \ln(a)}}_{\text{Le produit des exponentielles est l'exponentielle de la somme}} = e^{b \cdot \ln(a) + c \cdot \ln(a)} = e^{(b+c) \cdot \ln(a)} = a^{b+c}$$

- L'exposant d'un quotient est la différence des exposants**

$$\frac{a^b}{a^c} = \frac{e^{b \cdot \ln(a)}}{e^{c \cdot \ln(a)}} = e^{b \cdot \ln(a) - c \cdot \ln(a)} = e^{(b-c) \cdot \ln(a)} = a^{b-c}$$

Le quotient des exponentielles est l'exponentielle de la différence

En particulier, l'exposant de l'inverse est l'opposé de l'exposant (ici $b = 0$).

- L'exposant de la puissance est le produit des exposants**

$$(a^b)^c = \underbrace{\exp\left[c \times \ln(a^b)\right]}_{\substack{\bullet \ln(a^n) = n \cdot \ln(a) \\ \text{ne s'applique que} \\ \text{si n est un entier naturel}}} = \underbrace{\exp\left[c \times \ln(e^{b \cdot \ln(a)})\right]}_{\text{Car ln est la réciproque d'exponentielle}} = \exp\left[c \times b \cdot \ln(a)\right] = a^{b \times c}$$

- Produit de deux mêmes exposants.**

$$a^b \times a^{b'} = \underbrace{e^{b \cdot \ln(a)} \times e^{b' \cdot \ln(a)}}_{\text{Le produit des exponentielles est la somme...}} = e^{b \cdot \ln(a) + b' \cdot \ln(a)}$$

$$= \exp\left[b \cdot (\ln(a) + \ln(a'))\right] = \exp\left[b \cdot (\ln(a \times a'))\right] = (a \times a')^b$$

La somme des logarithmes est le logarithme du produit

- Logarithme d'une puissance**

$$\ln[a^b] = \ln[e^{b \cdot \ln(a)}] = b \cdot \ln(a)$$

car ln est la réciproque de l'exponentielle

Cette propriété prolonge celle qui existait déjà avec la puissance entière.

Etude des fonctions puissances x^α

Dans ce qui suit, α est un réel fixé quelconque. La fonction f_α est définie par :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(x)}$$

Puissance réelle.

Du fait de l'emploi de la puissance réelle et du logarithme népérien, la fonction f_α n'est définie que sur $]0; +\infty[$.

➤ Déterminons les limites de f_α aux bornes de son ensemble de définition :

Quand x se rapproche de 0 par la droite,

$\ln(x)$ va vers $-\infty$.

Si $\alpha < 0$ alors
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha \ln(x) = +\infty$

Si $\alpha > 0$ alors
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha \ln(x) = -\infty$

donc
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = +\infty$

donc
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = 0$

Quand x tend vers $+\infty$, $\ln(x)$ s'en va aussi

vers $+\infty$

Si $\alpha < 0$ alors
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln(x) = -\infty$

Si $\alpha > 0$ alors
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln(x) = +\infty$

donc
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$

donc
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$

Conséquence : lorsque $\alpha > 0$, f_α peut être prolongée en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0^\alpha = 0$.

➤ Comme la fonction $u(x) = \alpha \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ alors sa composée avec la fonction exponentielle est aussi dérivable sur cet intervalle et pour tout réel $x > 0$:

$$f'_\alpha(x) = [e^{u(x)}]' = u'(x) \cdot e^{u(x)} = \frac{\alpha}{x} \cdot e^{\alpha \ln(x)} = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Comme la puissance réelle $x^{\alpha-1}$ est toujours positive, α donne son signe à la dérivée.

Si l'exposant α est négatif

x	0	$+\infty$
$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$		-
f_α	$+\infty$	0

Si l'exposant α est positif

x	0	$+\infty$
$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$		+
f_α	0	$+\infty$

Dérivée et primitive de la puissance réelle d'une fonction

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors

- La fonction u^α est dérivable sur I et sa dérivée est $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u' \cdot u^{\alpha-1}$.
- Une primitive de la fonction $u' \cdot u^\alpha$ sur I est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Etude des fonctions exponentielles de base a

La fonction exponentielle de base a est notée $\exp_a$ et est définie par :

$$\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$$

Puissance réelle

Du fait de $\ln$, cette fonction n'a un sens que si le réel fixé a est strictement positif. Par contre, il n'y a aucune contre-indication sur x . Donc $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle $e^x = e^{x \times 1} = e^{x \cdot \ln(e)}$ est l'exponentielle de base e .

➤ Déterminons les limites de la fonction $\exp_a$ en $-\infty$ et $+\infty$.

Les limites de $\exp_a$ dépendent du signe de $\ln(a)$. Deux cas sont possibles :

Si $0 < a < 1$ alors $\ln(a)$ est négatif d'où

Si $a > 1$ alors $\ln(a)$ est positif d'où

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln(a)}}{a^x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln(a)}}{a^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x \ln(a)}}{a^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln(a)}}{a^x} = +\infty$$

➤ La fonction $u(x) = x \ln(a)$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour $e^{u(x)}$.

Pour tout réel x , il vient : $\exp_a'(x) = [e^{u(x)}]' = u'(x) \cdot e^{u(x)} = \ln(a) \cdot a^x$

La puissance réelle a^x étant toujours positive, $\ln(a)$ donne son signe à la dérivée. Donc

Si $0 < a < 1$ alors $\ln(a)$ est négatif d'où

Si $a > 1$ alors $\ln(a)$ est positif d'où

x	0	$+\infty$
$\ln(a) \cdot a^x$		-
f_α	$+\infty$	0

x	0	$+\infty$
$\ln(a) \cdot a^x$		+
f_α	0	$+\infty$

