

Une limite dont nous aurons besoin : celle de $\sin(h)/h$ en 0

Quelle est la limite lorsque h tend vers 0 (à gauche et à droite) du quotient $\frac{\sin(h)}{h}$?

Lorsque h tend vers 0, le numérateur $\sin(h)$ tend vers $\sin(0) = 0$.

Donc le quotient $\frac{\sin(h)}{h}$ est en 0 une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

Commençons par lever cette indétermination à droite de 0. Dans ce qui suit, h est un réel strictement positif et proche de 0

Pour trouver la limite qui nous intéresse, appuyons sur la situation ci-contre → M est le point du cercle trigonométrique associé au réel positif h . Ses coordonnées sont

$$M(\cos(h); \sin(h)).$$

T est le point d'intersection de la droite (OM) et de la première tangente au cercle trigonométrique, c'est-à-dire la verticale d'équation $x = 1$. Ses coordonnées sont :

$$T(1; \tan(h)).$$

Les projetés orthogonaux des points M et T sur l'axe $(O; \vec{i})$ ont pour coordonnées :

$$M'(\cos(h); 0) \quad T'(1; 0)$$

La part de disque T'OM contient le triangle OMM' et est contenue dans le triangle OTT'. Donc, du point de vue des aires, on a la double inégalité suivante :

$$\frac{OM \times M'M}{2} \leq \frac{h}{2\pi} \times \pi \times 1^2 \leq \frac{OT \times OT}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos(h) \times \sin(h)}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{1 \times \tan(h)}{2}$$

Aire du triangle OMM'
Aire de la part de disque T'OM
Aire du triangle OTT'

La part de disque T'OM correspond à un angle au centre O de h radians. Le disque complet correspond à un angle de 2π . Il a pour rayon 1.

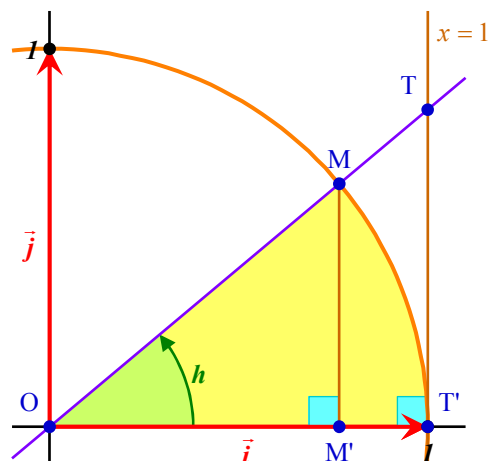
$$\cos(h) \times \sin(h) \leq h \leq \frac{\sin(h)}{\cos(h)}$$

$$\cos(h) \leq \frac{h}{\sin(h)} \leq \frac{1}{\cos(h)}$$

Cette égalité est uniquement valable à droite de 0, pour des "petits" réels strictement positifs h .

On a divisé par le réel strictement positif $\sin(h)$

Lorsque h tend vers 0 par la droite, $\cos(h)$ tend vers $\cos(0) = 1$. Donc $\frac{1}{\cos(h)}$ aussi !



Ainsi, à droite de 0, $\frac{h}{\sin(h)}$ est coincée entre deux quantités qui tendent vers 1.

En application du théorème des gendarmes, nous en déduisons : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{\sin(h)} = 1$

Et par conséquent, la limite à droite de 0 de son inverse $\frac{\sin(h)}{h}$ est $\frac{1}{1} = 1$.

Quant à la limite à gauche de 0 de $\frac{\sin(h)}{h}$, elle découle de l'imparité de la fonction sinus.

En effet, pour tout réel $h = -t$ strictement négatif et proche de 0, nous pouvons écrire :

$$\frac{\sin(h)}{h} = \frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{-\sin(t)}{-t} = \frac{\sin(t)}{t}$$

Car sinus est impaire

Lorsque h tend vers 0 par la gauche, $t = -h$ tend vers 0 par la droite.

Donc la quantité $\frac{\sin(h)}{h} = \frac{\sin(t)}{t}$ tend vers 1, d'après ce qui précède !

Finalement, nous concluons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Une autre limite utile : celle de $(\cos(h)-1)/h$ en 0

Quelle est la limite lorsque h tend vers 0 du quotient $\frac{\cos(h)-1}{h}$?

Lorsque h tend vers 0, $\cos(h)$ tend vers $\cos(0) = 1$.

Donc le numérateur tend vers $\cos(h) - 1$ tend vers 0.

Par conséquent, le quotient $\frac{\cos(h)-1}{h}$ est en 0 une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

Pour lever celle-ci, nous allons sur la limite qui vient d'être établie : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.

Pour tout réel h non nul et proche de 0, nous pouvons écrire :

$$-\sin(h) \times \frac{\sin(h)}{h} = \frac{-\sin^2(h)}{h} = \frac{\cos^2(h)-1}{h} = \frac{\cos(h)-1}{h} \times (\cos(h)+1)$$

Autrement dit, nous avons :

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = -\sin(h) \times \frac{\sin(h)}{h} \times \frac{1}{\cos(h)+1}$$

Et là, nous sommes en position de conclure. Sachant que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h) = \sin(0) = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) + 1 = \cos(0) + 1 = 2$$

Alors il vient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin(h) \right] \times \frac{\sin(h)}{h} \times \frac{1}{\cos(h) + 1} = -0 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

Désormais nous saurons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$

La dérivée de la fonction sinus

La fonction sinus est définie sur \mathbb{R} tout entier. Voyons si elle y est aussi dérivable.

Soit a un réel quelconque.

Pour savoir si la fonction sinus est dérivable en a , nous devons déterminer la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$$

Pour tout réel h non nul, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} &= \frac{\overbrace{\sin(a) \times \cos(h) + \cos(a) \times \sin(h)}^{\sin(a+h)} - \sin(a)}{h} \\ &= \cos(a) \times \frac{\sin(h)}{h} + \sin(a) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} \end{aligned}$$

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\frac{\sin(h)}{h}$ tend vers 1 et $\frac{\cos(h) - 1}{h}$ vers 0.

Donc le quotient $\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$ s'en va vers $\cos(a) \times 1 + \sin(a) \times 0 = \cos(a)$.

Par conséquent, la fonction sinus est dérivable en a et son nombre dérivé est $\cos(a)$.

Théorème : dérivabilité de la fonction sinus

La fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction cosinus.

$$\text{Pour tout réel } a, \quad (\sin(a))' = \cos(a)$$

Plus simplement, tangente est définie sur l'ensemble \mathbb{R} privé de tous les réels de la forme $\pi/2 + k \times \pi$ où k est un entier relatif.

La dérivée de la fonction cosinus

A l'instar de sa déphasée consoeur, la fonction cosinus est définie sur \mathbb{R} . Mais y est-elle aussi dérivable ?

Soit a un réel quelconque. Pour tout réel non nul h , nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} &= \frac{\cos(a) \times \cos(h) - \sin(a) \times \sin(h) - \cos(a)}{h} \\ &= \cos(a) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(a) \times \frac{\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$ alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = \cos(a) \times 0 - \sin(a) \times 1 = -\sin(a)$$

Donc la fonction cosinus est dérivable en a et son nombre dérivé est $-\sin(a)$.

Théorème : dérivabilité de la fonction cosinus

La fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est l'opposé de la fonction sinus.

$$\text{Pour tout réel } a, \quad (\cos(a))' = -\sin(a)$$

La dérivée de la fonction tangente

La fonction tangente peut être vue comme étant le quotient des fonctions sinus et cosinus. Comme son dénominateur cosinus est parfois nul, tangente n'est pas toujours définie.

Le quotient $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ n'existe pas \Leftrightarrow Son dénominateur $\cos(x) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$$

où k est un entier relatif quelconque.

L'ensemble de définition D_{\tan} de la fonction tangente est \mathbb{R} privé de tous les réels de la forme $\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ ou $-\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif quelconque.

Comme sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} donc sur D_{\tan} et que le dénominateur cosinus est non nul sur cet ensemble, alors la fonction tangente est dérivable sur D_{\tan} .

Pour tout réel $x \in D_{\tan}$, nous pouvons écrire :

$$(\tan(x))' = \frac{(\sin(x))' \times \cos(x) - (\cos(x))' \times \sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$