La taverne de l'Irlandais

vous présente

Trois problèmes de Première Classe !

une trilogie de trois problèmes destinés aux Premières S voire ES concoctée par Jérôme ONILLON

Revendication !
Paraphrasant John Wayne, nous dirons qu'il y a globalement deux manières de voir toute chose : la bonne et la nôtre.
Depuis toujours, la **taverne de l'Irlandais** s'est fait l'apôtre du mouvement suprémathiste et de l'idéologie du "pédagogiquement incorrect". Persévérant dans nos erreurs, nous franchissons aujourd'hui les limites du supportable en proposant à l'Humanité trois problèmes avec leurs corrigés destinés aux Premières Scientifiques voire ES.
Dans un premier temps, nous vous proposons les énoncés, puis leurs corrigés. Des liens vous permettent d'accéder aux notions qui vous échappent encore...
Dans un Occident à la dérive ayant renoncé à la liberté et à la grandeur, hésitant entre couardises et renoncements face à ces totalitarismes religieux ou ethniques, nous vous proposons de suivre la voie de l'effort... C'est la plus dure !

Edition du lundi 22 mars 2004

Ne renonce jamais !

Les énoncés des trois problèmes

Premier problème : les variations d'un polynôme

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x)=x^4-5.x^3+5.x^2-3.x+16$$

a) Déterminer les limites de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

b) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur $]-\infty;+\infty[$?

Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f.

Démontrer que 3 est une racine du polynôme $f'(x)$.

En déduire une factorisation de $f'(x)$.

Etudier (déterminer par le calcul) les variations de la fonction f sur $]-\infty;+\infty[$.

Note : *on demande de dresser le tableau de variation de la fonction f en justifiant...*

c) $\boldsymbol{k}$ étant un réel fixé, combien l'équation $f(x)=\boldsymbol{k}$ admet-elle de solutions ?

Note : *on ne demande pas de résoudre une telle équation. On pourra passer plusieurs cas en revue et discuter suivant les valeurs de **k**. On justifiera toute réponse. Une réponse reposant sur la calculatrice et les courbes qu'elle trace, sera considérée comme nulle.*

Dernier problème : l'histoire d'une racine rationnelle

La fonction j est définie par :

$$j(x)=\frac{7-x}{\sqrt{3.x+9}}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction j.

b) Déterminer les limites de la fonction j aux bornes de son ensemble de définition.

c) Calculer la dérivée de la fonction j.
Dresser le tableau de tableau de variation de cette fonction j.

d) Tracer la courbe de la fonction j ainsi que ses éventuelles asymptotes.

Second problème : le cas d'une fonction rationnelle

La fonction rationnelle h est définie par :

$$h(x)=\frac{x^2-5.x+22}{3-x}$$

On appelle (C) la courbe représentant cette fonction h.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

b) Calculer les images par la fonction h de 7 et -1.
Déterminer le ou les antécédents par la fonction h de 11.

c) Déterminer les limites de la fonction h lorsque x tend vers 3.
Que peut-on en déduire graphiquement quant à la courbe (C) ?

d) Déterminer les limites de h(x) lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

e) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x \in D_h$:

$$h(x)=a.x+b+\frac{c}{3-x}$$

Démontrer que la courbe (C) représentant la fonction h admet au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ une asymptote oblique Δ dont on déterminera l'équation réduite.
Etudier la position relative de la courbe (C) et de son asymptote Δ.

f) Calculer la dérivée de la fonction h.
Etudier les variations de la fonction h sur son ensemble de définition.

g) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

h) Dans un repère orthogonal, tracer la courbe (C), ses deux asymptotes et la tangente T_1.

Premier problème : les variations d'un polynôme

La fonction f est définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x^4 - 5.x^3 + 5.x^2 - 3.x + 16$$

a) Déterminer les limites de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

Aux infinis, la fonction polynomiale $f(x) = x^4 - 5.x^3 + 5.x^2 - 3.x + 16$ se comporte comme son terme dominant x^4 . Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

b) Pourquoi la fonction f est-elle dérivable sur $]-\infty; +\infty[$?
Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f.
Démontrer que 3 est une racine du polynôme $f'(x)$.
En déduire une factorisation de $f'(x)$.
Etudier (déterminer par le calcul) les variations de la fonction f sur $]-\infty; +\infty[$.

Comme les fonctions x^4 ; $-5.x^3$; $5.x^2$; $-3.x$ et 16 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors leur somme f(x) l'est aussi. Pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = \left(x^4\right)' - 5.\left(x^3\right)' + 5.\left(x^2\right)' - 3.(x)' + (16)'$$

$$= 4.x^3 - 5 \times 3.x^2 + 5 \times 2.x - 3 \times 1 + 0 = 4.x^3 - 15.x^2 + 10.x - 3$$

Une racine d'un polynôme est une valeur qui l'annule. Nous calculons :

$$f'(3) = 4 \times (3)^3 - 15 \times (3)^2 + 10 \times 3 - 3 = 108 - 135 + 30 - 3 = 0$$

Donc 3 est un racine du polynôme $f'(x)$. Ce dernier est donc factorisable par $x - 3$.
Pour procéder à cette factorisation, on pose la division euclidienne de $f'(x)$ par son facteur $x - 3$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4.x^3 - 15.x^2 + 10.x - 3 & x - 3 \\ \cline{3-3}
\ominus & 4.x^2 - 12.x & 4.x^2 - 3.x + 1 \\ \cline{2-2}
 & -3.x^2 + 10.x - 3 & \\
\ominus & -3.x^2 + 9.x & \\ \cline{2-2}
 & x - 3 & \\
\ominus & x - 3 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : $f'(x) = \underbrace{4.x^3 - 15.x^2 + 10.x - 3}_{\textit{dividende}} = \underbrace{(x-3)}_{\textit{diviseur}}.\underbrace{\left(4.x^2 - 3.x + 1\right)}_{\textit{quotient}}$

Pour établir les variations de la fonction f, nous allons déterminer le signe de sa dérivée.
Nous avons écrit $f'(x)$ sous la forme d'un produit. Nous connaissons le signe du premier facteur affine $x - 3$.
Le second facteur $4.x^2 - 3.x + 1$ est une forme du second degré. Pour connaître son signe, calculons son discriminant : $\Delta_{4.x^2 - 3.x + 1} = (-3)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 9 - 16 = -7$

Son discriminant étant négatif, le trinôme $4.x^2 - 3.x + 1$ est toujours du même signe, celui de son coefficient dominant 4. Il est donc toujours positif.
A présent, nous pouvons dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x - 3$		-	0	+	
$4.x^2 - 3.x + 1$		+		+	
$f'(x)$		+	0	+	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

c) ***k*** étant un réel fixé, combien l'équation $f(x) = \boldsymbol{k}$ admet-elle de solutions ?
Note : *on ne demande pas de résoudre une telle équation. On pourra passer plusieurs cas en revue et discuter suivant les valeurs de **k**. On justifiera toute réponse. Une réponse reposant sur la calculatrice et les courbes qu'elle trace, sera considérée comme nulle.*

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \boldsymbol{k}$ où l'inconnue est x et ***k*** est un réel fixé, revient à s'intéresser au nombre d'antécédents de ***k*** par la fonction f.
Le tableau de variation de f dressé à la question précédente nous permet de répondre :

- Si $\boldsymbol{k} < -2$ alors l'équation $f(x) = \boldsymbol{k}$ n'a aucune solution.
- Si $\boldsymbol{k} = 2$ alors l'équation $f(x) = \boldsymbol{2}$ a une unique solution qui est 3.
- Si $\boldsymbol{k} > -2$ alors l'équation a deux solutions : l'une avant 3 et l'autre après.

Second problème : le cas d'une fonction rationnelle

La fonction rationnelle h est définie par :

$$h(x)=\frac{x^2-5.x+22}{3-x}$$

On appelle (C) la courbe représentant cette fonction h.

a) Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

La fraction h(x) existe $\Leftrightarrow$ Son dénominateur $3-x$ est non nul $\Leftrightarrow$ $x\neq 3$

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction h est $\mathbb{R}\setminus\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$.

b) Calculer les images par la fonction h de 7 et -1.
Déterminer le ou les antécédents par la fonction h de 11.

Calculons les images de 7 et -1 par la fonction h.

$$h(7)=\frac{7^2-5\times 7+22}{2-7}=\frac{36}{-4}=-9 \qquad h(-1)=\frac{(-1)^2-5\times(-1)+22}{3-(-1)}=\frac{28}{4}=7$$

Pour déterminer les antécédents de 11 par la fonction h, résolvons l'équation $h(x)=11$.

$$\frac{x^2-5.x+22}{3-x}-11=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5.x+22}{3-x}-\frac{11.(3-x)}{3-x}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6.x-11}{3-x}=0$$

Or une fraction est nulle si et seulement si son numérateur l'est. L'équation devient :

$$x^2+6.x-11=0$$

Son discriminant $\Delta=6^2-4\times 1\times(-11)=80$ étant positif, cette équation du second degré admet deux solutions que sont : $\frac{-6-\sqrt{80}}{2}=-3-2.\sqrt{5}$ et $\frac{-6+\sqrt{80}}{2}=-3+2.\sqrt{5}$.

Toutes deux sont dans l'ensemble de définition de la fonction h (valeurs non interdites).

Conclusion : 11 a deux antécédents par la fonction h que sont $-3-2.\sqrt{5}$ et $-3+2.\sqrt{5}$.

c) Déterminer les limites de la fonction h lorsque x tend vers 3.
Que peut-on en déduire graphiquement quant à la courbe (C) ?

Nous devons envisager deux limites en 3 : l'une à sa gauche et l'autre à sa droite.

Lorsque x tend vers 3 par la gauche :

- le numérateur $x^2-5.x+22$ tend vers $(3)^2-5\times 3+22=16$.
- le dénominateur $3-x$ tend vers $3-3=0$ mais en étant positif. En effet $x<3 \Leftrightarrow 0<3-x$

donc $h(x)$ tend vers $\frac{16}{0^+}=+\infty$

Lorsque x tend vers 3 par la droite :

- le numérateur $x^2-5.x+22$ tend aussi vers $(3)^2-5\times 3+22=16$.
- le dénominateur $3-x$ tend vers $3-3=0$ mais en étant négatif. En effet $x>3 \Leftrightarrow 0>3-x$

donc $h(x)$ tend vers $\frac{16}{0^-}=-\infty$

Les limites en 3 de la fonction h étant infinies, la droite verticale d'équation $x=3$ est une asymptote à la courbe (C) représentant la fonction h.

d) Déterminer les limites de h(x) lorsque x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

Aux infinis, la fonction rationnelle $h(x)$ se comporte comme le quotient de ses termes dominants $\frac{x^2}{-x}=-x$. Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} -x=-\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty.$$

e) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel $x\in D_h$:

$$h(x)=a.x+b+\frac{c}{3-x}$$

Démontrer que la courbe (C) représentant la fonction h admet au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ une asymptote oblique Δ dont on déterminera l'équation réduite.
Etudier la position relative de la courbe (C) et de son asymptote Δ.

Notre objectif est d'écrire h(x) sous la forme d'une somme d'une fonction affine et d'une quantité tendant vers 0 aux infinis. Pour ce faire, nous allons décomposer la fonction rationnelle h(x) en divisant euclidiennement son numérateur par son dénominateur.

$$\begin{array}{rl|l} & x^2-5.x+22 & -x+3 \\ \ominus & x^2-3.x & \overline{-x+2} \\ \hline & -2.x^2+22 & \\ \ominus & -2.x^2+6 & \\ \hline & 16 & \end{array}$$

Ainsi pour tout $x\in D_h$: $h(x)=\frac{\overbrace{x^2-5.x+22}^{\text{dividende}}}{3-x}=\frac{\overbrace{(3-x)}^{\text{diviseur}}.\overbrace{(-x+2)}^{\text{quotient}}+\overbrace{16}^{\text{reste}}}{3-x}=-x+2+\frac{16}{3-x}$

Or lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, $3-x$ s'en va respectivement vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Donc la quantité $\dfrac{16}{3-x}$ tend vers 0 aux infinis.

Conclusion : la courbe (C) représentant la fonction h admet aux voisinages des infinis une asymptote oblique Δ dont l'équation réduite est $y=-x+2$.

Pour étudier la position relative de la courbe (C) et de son asymptote Δ, on s'intéresse au signe de la différence d'ordonnées $h(x)-(-x+2)=\dfrac{16}{3-x}$.

Dressons le tableau de signe de cette dernière quantité.

X	$-\infty$		3		$+\infty$
16		+	|	+	
$3-x$		+	0	-	
$(C)-\Delta$		+	||	-	

Conclusion : le tableau permet d'affirmer :

- Lorsque $x<3$, la différence d'ordonnées est positive : (C) est au-dessus de Δ.
- Lorsque $x>3$, la différence est négative : (C) est au-dessous de Δ.

f) Calculer la dérivée de la fonction h.
Etudier les variations de la fonction h sur son ensemble de définition.

Les fonctions $x^2-5.x+22$ et $3-x$ sont dérivables sur $D_h=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. De plus, comme le dénominateur $3-x$ ne s'y annule pas alors leur quotient h(x) y est aussi dérivable.
Calculons la dérivée de cette fonction h. Pour tout $x\in D_h$, nous avons :

$$h'(x)=\left(\frac{x^2-5.x+22}{3-x}\right)'=\frac{\left(x^2-5.x+22\right)'.(3-x)-\left(x^2-5.x+22\right).(3-x)'}{(3-x)^2}$$

$$=\frac{(2.x-5).(3-x)-\left(x^2-5.x+22\right).(-1)}{(3-x)^2}=\frac{6.x-2.x^2-15+5.x+x^2-5.x+22}{(3-x)^2}$$

$$=\frac{-x^2+6.x+7}{(3-x)^2}$$

Pour factoriser le numérateur qui est une forme du second degré, calculons son discriminant : $\Delta_{-x^2+6.x+7}=(6)^2-4\times(-1)\times 7=36+28=64$.

$-x^2+6.x+7$ a donc deux racines que sont $\dfrac{-6-8}{-2}=7$ et $\dfrac{-6+8}{-2}=-1$. Il vient alors :

$$-x^2+6.x+7=\underbrace{(-1)}_{\text{coefficient dominant}}.(x-7).(x+1)=(7-x).(x+1)$$

La dérivée de la fonction h devient :

$$h'(x)=\frac{-x^2+6.x+7}{(3-x)^2}=\frac{(7-x).(x+1)}{(3-x)^2}$$

Connaissant les signes de tous les facteurs affines apparaissant dans cette dernière écriture de $h'(x)$, nous allons pouvoir déterminer son signe et ainsi accéder aux variations de la fonction rationnelle h.

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
$7-x$		+	|	+	|	+	0	-	
$x+1$		-	0	+	|	+	|	+	
$3-x$		+	|	+	0	-	|	-	
$3-x$		+	|	+	0	-	|	-	
$h'(x)$		-	0	+	||	+	0	-	
h	$+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$

g) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

La fonction h étant dérivable en 1, la tangente T_1 à la courbe (C) au point $A\left(1;\ \underbrace{9}_{h(1)}\right)$ existe et, est une droite horizontale ou oblique dont l'équation réduite est de la forme $y=m.x+p$.

Son coefficient directeur m est le nombre dérivé de la fonction h en 1, c'est-à-dire $h'(1)$.

Calculons-le en utilisant par exemple la forme factorisée de $h'(x)$.

$$h'(1)=\frac{(7-1).(1+1)}{(3-1)^2}=\frac{12}{4}=3$$

L'équation réduite de la tangente T_1 est donc de la forme $y=3.x+p$.

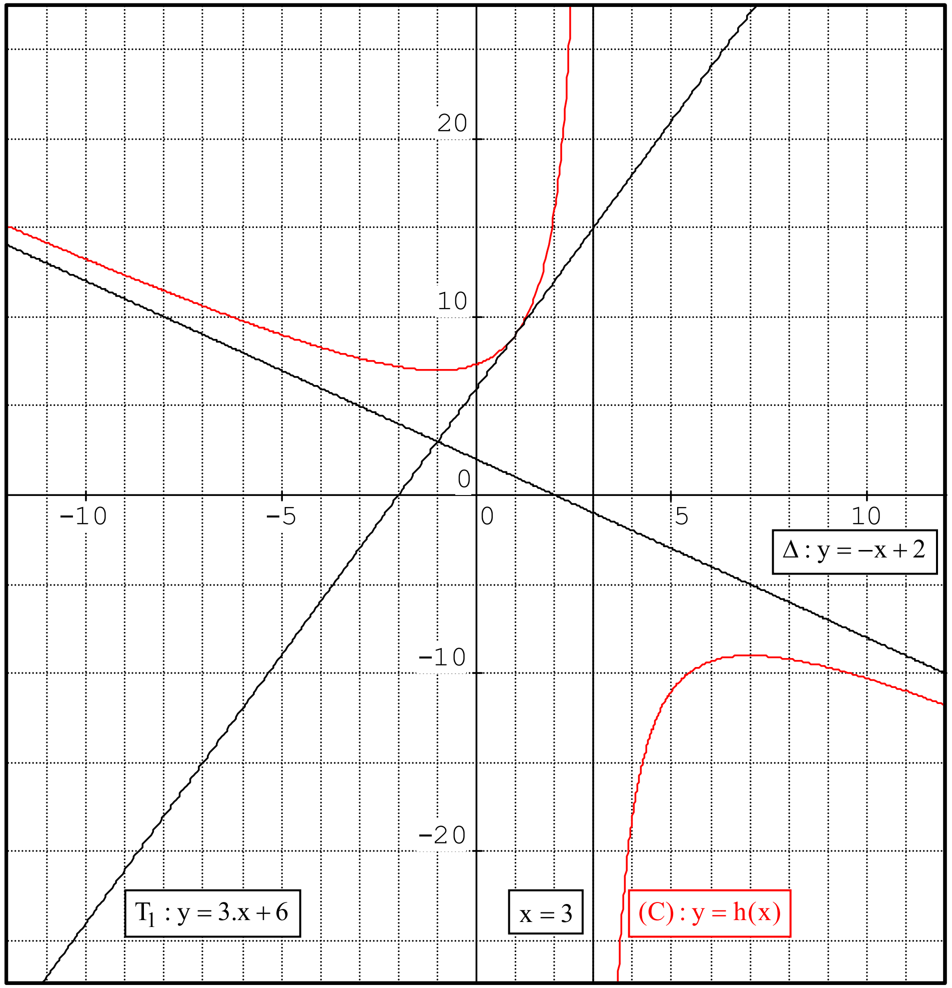
Il nous reste à déterminer l'ordonnée à l'origine p.

Cette droite T_1 passe par le point $A(1;9)$. Les coordonnées de ce dernier vérifient donc l'équation de cette première. Par conséquent, nous avons l'égalité :

$$y_A = 3.x_A + p \Leftrightarrow 9 = 3\times 1 + p \Leftrightarrow p = 9 - 3 = 6$$

Conclusion : l'équation réduite de la tangente T_1 est $y = 3.x + 6$.

h) A l'aide de ses deux asymptotes, de la tangente T_1 et de quelques points obtenus avec la table de valeurs de la calculatrice, on trace la courbe (C) représentant la fonction h.



Dernier problème : l'histoire d'une racine rationnelle

La fonction j est définie par :

$$j(x) = \frac{7-x}{\sqrt{3.x+9}}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction j.

La question qui se pose est de savoir à quelles conditions j(x) existe. Deux écueils doivent être évités : celui du dénominateur et celui présenté par la racine.

$$j(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{La racine } \sqrt{3.x+9} \text{ existe} \\ \text{Le dénominateur } \sqrt{3.x+9} \text{ est non nul} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.x+9 \text{ est positif ou nul} \\ 3.x+9 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3.x + 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{9}{3} = -3$$

Conclusion : l'ensemble de définition de la fonction j est $]-3;+\infty[$.

b) Déterminer les limites de la fonction j aux bornes de son ensemble de définition.

Il nous faut déterminer deux limites : l'une à droite de -3 et l'autre en $+\infty$.

Lorsque x tend vers -3 par la droite :

- $7 - x$ tend vers $7-(-3) = 10$
- $3.x+9$ tend vers 0^+ donc $\sqrt{3.x+9}$ tend vers $\sqrt{0^+} = 0^+$

donc j(x) tend vers $\frac{10}{0^+} = +\infty$.

Conclusion : la limite en -3 de la fonction j est $+\infty$. Donc sa courbe représentative (C) admet la droite verticale d'équation $x = -3$ pour asymptote.

La fonction j n'est pas rationnelle. Pour connaître sa limite en $+\infty$ et éviter la forme indéterminée qu'annonce son écriture, nous allons modifier son expression en factorisant numérateur et dénominateur par leurs termes les plus forts.

Pour tout réel $x > 0$ *(ceci pour pouvoir factoriser le dénominateur sans problème)* :

$$j(x) = \frac{7-x}{\sqrt{3.x+9}} = \frac{x.\left(\frac{7}{x}-1\right)}{\sqrt{x.\left(3+\frac{9}{x}\right)}} = \frac{x}{\sqrt{x}}.\frac{-1+\frac{7}{x}}{\sqrt{3+\frac{9}{x}}} = \sqrt{x}.\frac{-1+\frac{7}{x}}{\sqrt{3+\frac{9}{x}}}$$

Or lorsque x tend vers $+\infty$:

- $\frac{7}{x}$ tend vers 0 donc $-1+\frac{7}{x}$ tend vers -1
- $\frac{9}{x}$ tend vers 0 donc $3+\frac{9}{x}$ tend vers 3 donc $\sqrt{3+\frac{9}{x}}$ s'en va vers $\sqrt{3}$.

donc le quotient $\dfrac{-1+\frac{7}{x}}{\sqrt{3+\frac{9}{x}}}$ tend vers $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire vers un nombre négatif.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} j(x) = (+\infty)\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\infty$

c) Calculer la dérivée de la fonction j.
Dresser le tableau de tableau de variation de cette fonction j.

La fonction j est un quotient de la forme $\frac{u}{v}$ où :

La fonction affine $u(x)=7-x$ est dérivable sur $]-3;+\infty[$. De plus : $u'(x)=-1$.

La fonction racine est dérivable sur $]0;+\infty[$ c'est-à-dire là où elle ne s'annule pas. Or la fonction affine $3.x+9$ est strictement positive sur $]-3;+\infty[$.

Donc sa composée $v(x)=\sqrt{3.x+9}$ avec la fonction racine est dérivable sur $]-3;+\infty[$.

De plus : $v'(x)=(3.x+9)'.\dfrac{1}{2.\sqrt{3.x+9}}=\dfrac{3}{2.\sqrt{3.x+9}}$

Conclusion : la fonction j est un quotient de deux fonctions dérivables sur $]-3;+\infty[$.

Comme son dénominateur v(x) ne s'y annule jamais alors j est dérivable sur $]-3;+\infty[$.

Pour tout réel $x>-3$, nous pouvons écrire :

$$j'(x)=\frac{(-1).\sqrt{3.x+9}-\dfrac{3}{2.\sqrt{3.x+9}}.(7-x)}{3.x+9}=\frac{\dfrac{(-1).\sqrt{3.x+9}\times 2.\sqrt{3.x+9}.-3.(7-x)}{2.\sqrt{3.x+9}}}{3.x+9}$$

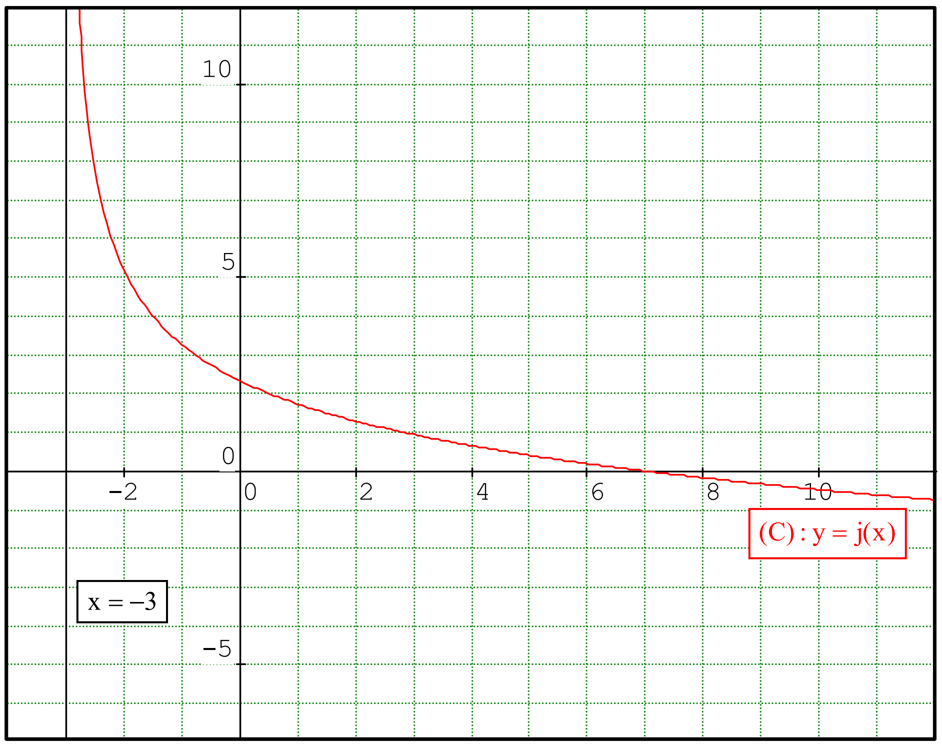
$$=\frac{(-2).(3.x+9)-3.(7-x)}{2.\sqrt{3.x+9}\times(3.x+9)}=\frac{-6.x-18-21+3.x}{2.\sqrt{3.x+9}\times(3.x+9)}=\frac{-3.x-39}{\sqrt{3.x+9}\times(6.x+18)}$$

Sachant qu'une racine (quand elle existe) est toujours positive, connaissant les signes des deux facteurs affines $-3.x-39$ et $6.x+18$, nous pouvons dresser le tableau de signe de $j'(x)$ et ainsi accéder aux variations de la fonction j sur son ensemble de définition.

x	-3		$+\infty$
$-3.x-39$	|	-	
$\sqrt{3.x+9}$	0	+	
$6.x+18$	0	+	
$j'(x)$	||	-	
j	$+\infty$	↘	$-\infty$

d) Tracer la courbe de la fonction j ainsi que ses éventuelles asymptotes.

La courbe (C) n'a qu'une seule asymptote : la droite verticale d'équation $x-3$.



Alors que x devient de plus en plus grand, la courbe (C) s'en va à son rythme de sénateur et sans précipitation plonger vers les abîmes de l'infiniment négatif...