La question qui se pose...

Des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, nous en connaissons des tas comme les polynômes ou les fonctions sinus et cosinus. Mais, mis à part la fonction nulle, nous n'en connaissons aucune qui soit sa propre dérivée.
En effet, la dérivée de la fonction nulle $f(x)=0$ est $f'(x)=0$.

Notre quête : une fonction qui serait sa propre dérivée
Existe-t-il une (voire plusieurs) fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- f est sa propre dérivée $\Leftrightarrow$ Pour tout réel x, on a : $f'(x)=f(x)$
- $\underbrace{\text{L'image de 0 par f est égale à 1} \;\Leftrightarrow\; f(0)=1}_{\text{Pour ne pas retrouver la fonction nulle...}}$

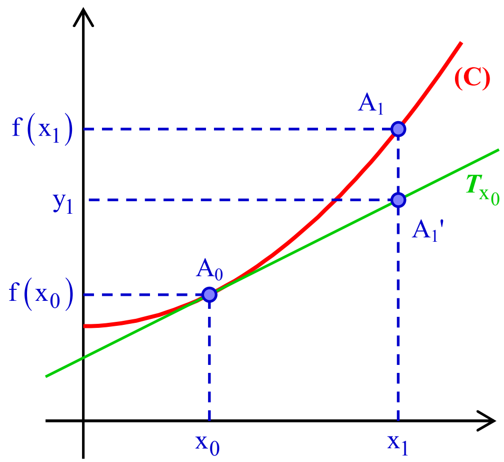
Dans l'état actuel de nos connaissances, nous sommes incapables de définir précisément une telle fonction. D'ailleurs, rien ne nous permet de dire qu'il en existe une !
A défaut de prouver qu'il en existe une, nous allons juste nous contenter de construire une approximation de la courbe d'une telle fonction en utilisant la méthode d'Euler.

C'est quoi la méthode d'Euler ?

La méthode d'Euler est un algorithme de calcul qui repose sur l'adage suivant :

Localement, la courbe d'une fonction se confond avec sa tangente.

Expliquons de quoi il retourne plus précisément.
Soit f une fonction définie et dérivable dont nous ne connaissons pas l'expression.
Nous notons (C) sa courbe représentative.
Soit x_0 un réel quelconque.
Imaginons que nous connaissions son image $f(x_0)$ et son nombre dérivé $f'(x_0)$ qui est le coefficient directeur de la tangente T_{x_0} à la courbe (C) en x_0.
Maintenant soit x_1 un réel "proche" de x_0.
Nous ne savons pas calculer la valeur exacte de son image par f mais est-il possible d'en obtenir une approximation ?
La réponse est : oui par la méthode d'Euler.
En effet, la courbe (C) se confond comme localement au voisinage de A_0 avec sa tangente T_{x_0}, alors le point $A_1(x_1;f(x_1))$ est (assez) "proche" du point $A_1'(x_1;y_1)$ de la tangente T_{x_0}.



Et par conséquent, une valeur approchée de l'image $f(x_1)$ est cette ordonnée y_1.
Tout le problème est de calculer cette ordonnée y_1 ?
Mais ça, nous savons faire car les points $A_0(x_0;f(x_0))$ et $A_1'(x_1;y_1)$ appartiennent tous deux à la tangente T_{x_0} dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$. Par conséquent, nous avons l'égalité :

$$f'(x_0)=\frac{\text{Variation d'ordonnées}}{\text{Variation d'abscisses}}=\frac{y_1-f(x_0)}{x_1-x_0} \Leftrightarrow y_1=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)\times(x_1-x_0)}_{\text{Là-dedans, on connait tout le monde donc on peut calculer } y_1.}$$

<u>Conclusion :</u> Une valeur approchée de $f(x_1)$ est la quantité $f(x_0)+f'(x_0)\times(x_1-x_0)$.
La qualité de la valeur approchée dépend de la fonction f et de la proximité de x_1 par rapport à x_0.
Voilà le principe de la méthode d'Euler !

Une esquisse de courbe d'une ces fonctions...avec la méthode d'Euler

Soit f une fonction qui serait solution de notre problème. On suppose qu'elle existe...
Construisons une "approximation" de la courbe (C) représentant cette fonction f en utilisant la méthode d'Euler.
D'abord, il faut choisir un pas de progression. Nous optons pour 0,4.

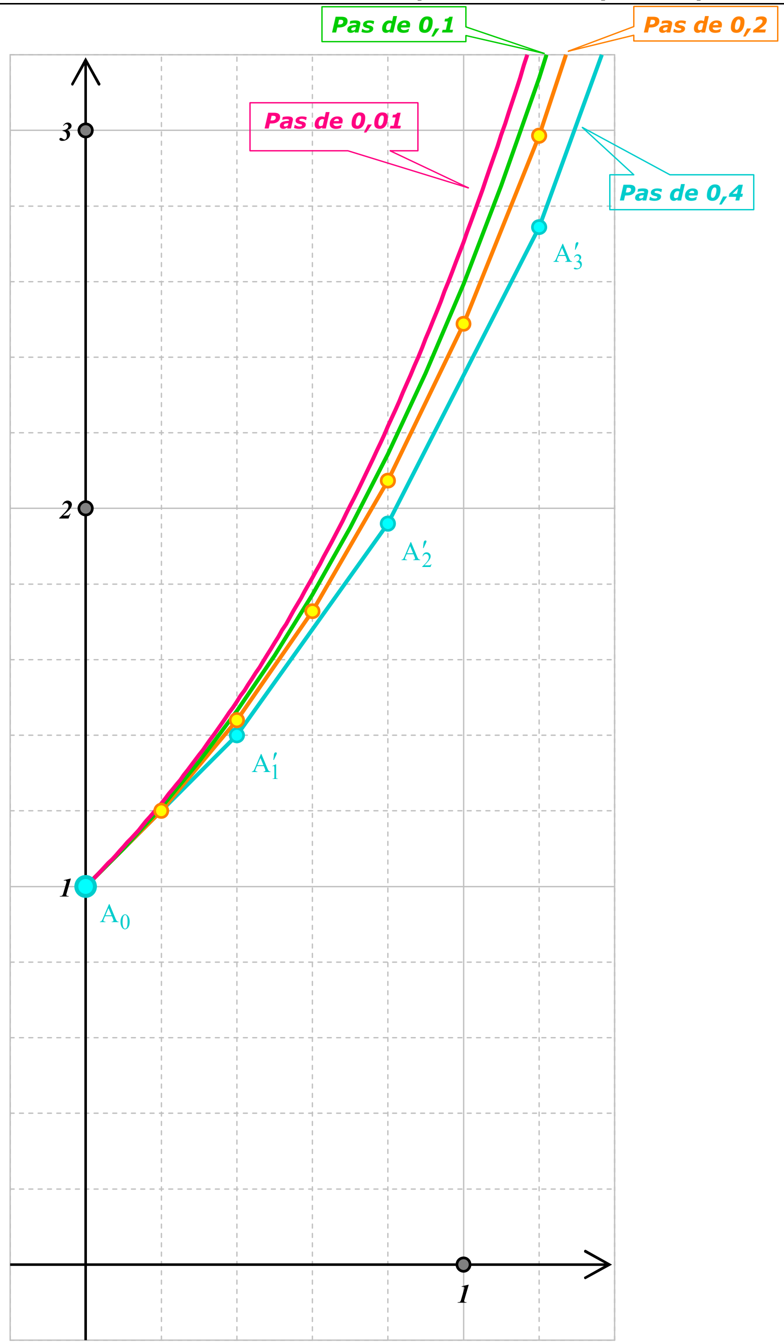
1. Au départ, nous savons que la courbe (C) passe par le point $A_0(0;1)$ puisque $f(0)=1$.
Comme la fonction f est supposée définie sur $\mathbb{R}$, alors 0,4 a une image par f.
Donc la courbe (C) passe par un point $A_1(0,4;f(0,4))$.
Cependant, nous ne savons pas calculer $f(0,4)$!
Heureusement, nous savons en déterminer une valeur approchée avec la méthode d'Euler.
En effet, d'après celle-ci :

$$f(0,4)\approx\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)\times(x_1-x_0)=f(0)+f'(0)\times(0,4-0)}_{\text{Car } x_0 \text{ et } x_1 \text{ valent respectivement 0 et 0,4.}}$$

Et là, cri d'effroi ! Raaah ! Car si $f(0)=1$, nous ignorons ce que vaut $f'(0)$.
Or la fonction f répond à notre problème : elle est sa propre dérivée donc $f'(0)=f(0)=1$.
Par conséquent :

$$f(0,4)\approx 1+1\times(0,4-0)=1,4$$

Donc la courbe (C) passe à proximité du point de coordonnées $A_1'(0,4;1,4)$.



2. Recommençons le calcul. Cette fois, nous allons chercher à approcher l'image $f(0,8)$.

Mais cette fois, nous repartons du point $A'_1(0,4;1,4)$ que nous savons proche de cette courbe (C). D'après, ce qui a été fait précédemment, nous avons :

$$f(0,8) \approx \underbrace{f(0,4)+f'(0,4)\times(0,8-0,4) \approx 1,4+1,4\times 0,4 = 1,96}_{\substack{\text{Car la fonction f est toujours sa propre dérivée.} \\ \text{Nous ne connaissons qu'une valeur approchée de } f(0,4).}}$$

Donc la courbe (C) passe à proximité du point de coordonnées $A'_2(0,8;1,96)$.

Attention car le point A'_2 est une approximation calculée à partir du point A'_1 qui était déjà une approximation. L'erreur se superposant à l'erreur, le mot proximité est très relatif.

2.5. Si nous continuions notre progression, le prochain point à calculer aurait pour abscisse $0,8+0,4=1,2$. Mais nous allons faire une petite parenthèse dans notre progression et calculer une estimation de l'image de 1 par f en partant du point $A'_2(0,8;1,96)$.

D'après ce que nous avons dit, nous pouvons écrire :

$$f(1) \approx \underbrace{f(0,8)+f'(0,8)\times(1-0,8) \approx 1,96+1,96\times 0,2 = 2,352}_{\substack{\text{f est toujours sa propre dérivée et} \\ \text{nous ne connaissons qu'une valeur approchée de } f(0,8).}}$$

Donc une valeur approchée de l'image de 1 par f est 2,352.

3. En partant du point $A'_2(0,8;1,96)$, calculons une valeur approchée de $f(1,2)$.

$$f(1,2) \approx \underbrace{f(0,8)+f'(0,8)\times(1,2-0,8) \approx 1,96+1,96\times 0,4 = 2,744}_{\text{Car f est sa propre dérivée et nous ne connaissons pas } f(0,8) \text{ exactement.}}$$

Donc la courbe (C) passe à proximité du point $A'_3(1,2;2,744)$.

Nous pourrions continuer nos calculs mais déjà ces quatre points A_0, A'_1, A'_2 et A'_3 nous donne une certaine idée de cette courbe (C). Mais, plus nous nous éloignons de A_0, plus l'erreur commise devient potentiellement grande.

Pour minimiser cette erreur, on peut diminuer le pas de progression. Mais cela qui entraîne une augmentation du nombre de points à calculer. Ainsi, pour aller de 0 à 1, s'il faut calculer 2,5 points avec un pas de 0,4, il faut calculer :

- $\dfrac{1-0}{0,2}=5$ points pour aller de 0 à 1 avec un pas de 0,2 (courbe orange ci-contre)
- 10 points avec un pas de 0,1 (courbe verte ci-contre)
- 100 points avec un pas de 0,01 (courbe fuchsia ci-contre)

Pour ce travail de puces, il faut recourir à une calculatrice ou un ordinateur.
Mais plus le pas de progression est petit, meilleure est l'approximation. Par contre, plus l'on s'éloigne du point de départ, plus l'on s'écarte de la position exacte de la courbe (C).

Et s'il y avait plusieurs fonctions qui étaient leurs propres dérivées ?

L'application de l'algorithme d'Euler semble suggérer qu'il n'y aurait qu'une seule courbe possible, donc qu'une seule fonction définie et dérivable sur ℝ qui serait sa propre dérivée et par laquelle l'image de 0 serait égale à 1. Mais est-ce réellement le cas ?

Soient f et g deux fonctions répondant à notre problème. Ces deux fonctions f et g présentent les propriétés suivantes :

✎ f est définie et dérivable sur ℝ. ✎ f est sa propre dérivée. Pour tout réel x, on a : $f'(x)=f(x)$. ✎ $f(0)=1$	✎ g est définie et dérivable sur ℝ. ✎ g est sa propre dérivée. Pour tout réel x, on a : $g'(x)=g(x)$. ✎ $g(0)=1$

Pour savoir si ces deux fonctions sont égales, nous allons étudier la fonction φ définie pour tout réel x par :

$$\varphi(x)=f(x)\times g(-x)=f(x)\times g(u(x))=f(x)\times g\circ u(x)$$

Pour ce faire, calculons la dérivée de la fonction φ.

D'abord, comme les fonctions g et $\left| \begin{array}{l} u(x)=-x \\ u'(x)=-1 \end{array} \right.$ sont dérivables sur ℝ, alors il en va de même leur composée $g\circ u$. Pour tout réel x, nous avons :

$$(g\circ u)'(x)=\underbrace{u'(x)\times g'(u(x))=(-1)\times g(u(x))}_{\text{Car g est sa propre dérivée}}=-g(-x)$$

Par suite, comme les fonctions f et $g\circ u$ sont dérivables sur ℝ, alors il en va de même pour leur produit φ et pour tout réel x, nous avons :

$$\varphi'(x)=f'(x)\times g\circ u(x)+f(x)\times(g\circ u)'(x)$$
$$=f(x)\times g(-x)+f(x)\times(-g(-x))=\cancel{f(x)\times g(-x)}-\cancel{f(x)\times g(-x)}=0$$

Comme sa dérivée est nulle, alors la fonction φ est constante.
Déterminons la valeur de cette constante en calculant l'image de 0 par φ.

$$\varphi(0)=f(0)\times g(-0)=f(0)\times g(0)=1\times 1=1$$

Ainsi, venons-nous d'établir le résultat suivant :

Pour tout réel x, nous avons $f(x)\times g(-x)=\varphi(x)=1$

Ce résultat a plusieurs conséquences. D'abord, si la fonction g est égale à f, alors l'égalité précédente devient :

Pour tout réel x, on a : $f(x)\times f(-x)=1$

Cette dernière égalité implique de facto :

1. La fonction f ne s'annule jamais sur ℝ.
   En effet, dans le cas contraire, l'égalité $f(x)\times f(-x)=1$ ne peut être vraie.
2. Les images par la fonction f de deux réels opposés sont inverses.
   En effet, pour tout réel x, on a : $f(x)\times f(-x)=1 \Leftrightarrow f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$

Ces résultats (et en particulier le second) s'appliquent à toutes les fonctions solutions de notre problème : donc aussi bien à f qu'à g. En particulier $\forall x\in\mathbb{R},\ g(-x)=\dfrac{1}{g(x)}$

Par conséquent, en reprenant le résultat initial, il vient que pour tout réel x :

$$f(x)\times g(-x)=\varphi(x)=1 \Leftrightarrow f(x)\times\frac{1}{g(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

Autrement dit, il n'existe qu'une seule fonction définie et dérivable sur ℝ qui est sa propre dérivée et qui vaut 1 en 0. C'est elle que l'on appelle la fonction exponentielle.

Théorème : définition de la fonction exponentielle
La fonction exponentielle notée exp est l'unique fonction définie et dérivable sur ℝ telle que :

- Exp est sa propre dérivée : pour tout réel x, $\exp'(x)=\exp(x)$.
- L'image de 0 par la fonction exponentielle est 1 : $\exp(0)=1$

Nous avons établi que cette fonction exponentielle ne s'annulait jamais et qu'elle vérifiait la propriété suivante :

Pour tout réel x, on a : $\underbrace{\exp(x)\times\exp(-x)=1 \Leftrightarrow \exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}}_{\text{Les images de deux réels opposés sont inverses}}$

L'exponentielle du réel x est aussi notée $e^x=\exp(x)$.
Nous verrons dans la suite le pourquoi de cette notation sous forme de puissance.

La dérivée de l'exponentielle d'une fonction

La fonction exponentielle $v(x)=\underbrace{\exp(x)=e^x}_{\text{Deux notations}}$ est définie et dérivable sur ℝ.

Si une fonction u est définie et dérivable sur un intervalle I, alors la composée $v\circ u(x)=\exp(u(x))=e^{u(x)}$ est aussi dérivable sur I et pour tout réel $x\in I$, on a :

$$\left(e^u\right)'(x)=(v\circ u)'(x)=\underbrace{u'(x)\times v'(u(x))=u'(x)\times\exp(u(x))}_{\text{La fonction exponentielle v est sa propre dérivée...}}.$$

Théorème : dérivée de l'exponentielle d'une fonction

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors la composée e^u est aussi dérivable sur l'intervalle I et :

$$\underbrace{\left(e^u\right)' = u' \times e^u}_{\text{La formule à retenir}} \Leftrightarrow \underbrace{\forall x \in I,\ \left(\exp(u)\right)'(x) = u'(x) \times \exp\left(u(x)\right) = u'(x) \times e^{u(x)}}_{\text{Ce que signifie effectivement la formule...}}$$

Par exemple, comme la fonction $\left| \begin{array}{l} u(x) = 3.x + 1 \\ u'(x) = 3 \end{array} \right.$ est dérivable sur ℝ, alors la fonction

$f(x) = e^{3.x+1} = \exp(3.x+1) = e^{u(x)}$ est aussi dérivable sur ℝ et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = 3 \times e^{3.x+1}$$

Cette dérivée est très sympathique, mais elle ne nous donne pas pour autant les variations de la fonction f vu que nous ignorons encore beaucoup de choses sur cette exponentielle. En particulier, son signe et ses variations.

Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

A l'instar de la puissance, la fonction exponentielle transforme les produits en...somme.

Théorème : l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles

Pour tous réels a et b, nous avons :

$$\underbrace{e^{a+b} = e^a \times e^b \Leftrightarrow \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}_{\text{Une même formule : deux notations}}$$

La preuve de ce théorème

Soit b un réel quelconque. Pour établir le théorème, nous allons nous intéresser à la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x \times e^b}{e^{x+b}} = \frac{\exp(x) \times \exp(b)}{\exp(x+b)} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Examinons les numérateur et dénominateur du quotient f :

- La fonction $\left| \begin{array}{l} u(x) = e^b \times e^x = \text{Constante} \times e^x \\ u'(x) = e^b \times e^x \end{array} \right.$ est définie et dérivable sur ℝ.
- La fonction $\left| \begin{array}{l} v(x) = e^{x+b} \\ v'(x) = (x+b)' \times e^{x+b} = 1 \times e^{x+b} = e^{x+b} \end{array} \right.$ est définie, dérivable

  mais surtout $v(x)$ non nulle sur ℝ car c'est une exponentielle.

Donc le quotient $f = \frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur ℝ. Pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{\left[v(x)\right]^2} = \frac{\cancel{e^x \times e^b \times e^{x+b}} - \cancel{e^{x+b} \times e^x \times e^b}}{\left[e^{x+b}\right]^2} = 0$$

Comme sa dérivée est la fonction nulle, alors la fonction f est constante.
Pour connaître la valeur de cette constante, calculons l'image de 0 par f.

$$f(0) = \frac{e^0 \times e^b}{e^{0+b}} = \frac{1 \times e^b}{e^b} = 1$$

Ainsi, pour tout réel x, venons-nous de prouver :

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^x \times e^b}{e^{x+b}} = 1 \Leftrightarrow \underbrace{e^x \times e^b = e^{x+b}}_{\substack{\text{Le produit des exponentielles est l'exponentielle de la somme.} \\ \text{Une égalité vraie pour tout réel x...et pour tout réel b.}}}$$

D'où le théorème !

Le théorème précédent a plusieurs conséquences opératoires sur la fonction exponentielle.

Corollaire : d'autres propriétés (algébriques) de l'exponentielle

1. L'exponentielle de l'opposé est l'inverse de l'exponentielle.

Pour tout réel a : $\underbrace{\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \Leftrightarrow e^{-a} = \frac{1}{e^a}}_{\text{Une même formule, deux notations}}$

2. L'exponentielle de la différence est le quotient des exponentielles.

Pour tous réels a et b : $\underbrace{\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \Leftrightarrow e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}}_{\text{Une même formule, deux notations}}$

3. L'exponentielle d'un produit par un entier n est la puissance nième de l'exponentielle.

Pour tout réel a, pour tout entier relatif n : $\underbrace{\left(\exp(a)\right)^n = \exp(n \times a) \Leftrightarrow \left(e^a\right)^n = e^{n \times a}}_{\text{Une même formule, deux notations}}$

4. Une exponentielle est une quantité toujours strictement positive.
Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ.

5. La racine d'une exponentielle est l'exponentielle de la moitié.

Pour tout réel a : $\underbrace{\sqrt{\exp(a)} = \exp\left(\frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}}_{\text{Une même formule, deux notations}}$

La preuve de ce corollaire

Le théorème précédent induit une cascade de conséquences !

1. L'exponentielle de l'opposé est l'inverse de l'exponentielle

La somme du réel a et de son opposé $-a$ est égale à 0. Il vient alors :

$$\underbrace{\exp(a)\times\exp(-a)=\exp(a+(-a))=\exp(0)=1}_{\text{Le produit des exponentielles est l'exponentielle de la somme}} \quad \text{d'où} \quad \exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$$

2. L'exponentielle de la différence est le quotient des exponentielles

Diviser, c'est multiplier par l'inverse. Soustraire, c'est additionner l'opposé. On a :

$$\frac{\exp(a)}{\exp(b)}=\exp(a)\times\frac{1}{\exp(b)}=\exp(a)\times\exp(-b)=\exp(a+(-b))=\exp(a-b)$$

3. L'exponentielle du produit est la puissance de l'exponentielle

La puissance nième d'un réel est un produit de n facteurs égaux à ce réel. Ainsi pour tout entier positif n, nous pouvons écrire :

$$\left(e^a\right)^n=\overbrace{\underbrace{e^a\times e^a\times\ldots\times e^a}_{\text{n facteurs}}=\exp\underbrace{(a+a+\ldots+a)}_{\text{n termes}}}^{\text{Le produit des exponentielles...}}=\exp(n\times a)=e^{n\times a}$$

Et si n est un entier négatif, alors la propriété ***1*** vient à notre secours. En effet, car à ce moment là, son opposé $-n$ est alors un entier positif.

$$\exp(n\times a)=\underbrace{\exp((-n)\times(-a))=(\exp(-a))^{-n}}_{\text{La propriété établie avec les entiers positifs s'applique}}=\underbrace{\left(\frac{1}{e^a}\right)^{-n}=\left(e^a\right)^n}_{\text{Ici, on parle de puissances...}}$$

4. Une exponentielle est une quantité strictement positive...

En effet, pour tout réel a, nous pouvons écrire :

$$\exp(a)=\exp\left(2\times\left(\frac{1}{2}.a\right)\right)=\left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$$

Or un carré est une quantité qui est toujours positive ou nulle. Mais , comme l'exponentielle $\exp\left(\frac{a}{2}\right)$ ne peut pas être nulle, alors le carré $e^a=\left(e^{a/2}\right)^2$ ne peut être que strictement positif.

Par conséquent, comme sa dérivée, c'est-à-dire elle-même est strictement positive, alors la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. ...et la racine d'une exponentielle est l'exponentielle de la moitié

Sachant que toutes les exponentielles sont des quantités strictement positives, c'est donc qu'elles admettent des racines. Ainsi :

$$\exp(a)=\left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{\exp(a)}=\exp\left(\frac{a}{2}\right)$$

A quoi toutes ces belles propriétés peuvent-elles bien servir ?

1. Déterminons les variations de la fonction $f(x)=e^{3.x+1}\times e^{x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Avant nous aurions du calculer la dérivée d'un produit mais désormais, nous disposons de certaines propriétés. En effet, pour tout réel x, nous avons :

$$f(x)=\underbrace{\exp(3.x+1)\times\exp(x+1)=\exp((3.x+1)+(x+1))}_{\text{Le produit des exponentielles est l'exponentielle de la somme}}=\exp(4.x+2)$$

Et comme les fonctions $u(x)=4.x+2$ et exponentielle sont croissantes sur $\mathbb{R}$, alors il en va de même pour leur composée $f(x)=e^{u(x)}$.

2. Déterminons les variations de la fonction $f(x)=\frac{e^{x+3}}{e^{x-2}}$ qui est définie sur $\mathbb{R}$.

Là encore, la terrible épreuve de la dérivation d'un quotient va être évitée en recourant à l'une des propriétés de l'exponentielle ! Pour tout réel x, nous avons :

$$f(x)=\underbrace{\frac{\exp(x+3)}{\exp(x-2)}=\exp((x+3)-(x-2))}_{\text{Le quotient des exponentielles est l'exponentielle de la différence}}=\exp(5)=e^5$$

Autrement dit, cette fonction f est constante.

3. Déterminons les variations de la fonction $f(x)=\sqrt{e^{4.x+2}}$ qui est définie sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction est une composée de composée. A dériver, c'est une horreur ! Heureusement, les propriétés de l'exponentielle sont là ! Pour tout réel x, on a :

$$f(x)=\underbrace{\sqrt{\exp(4.x+2)}=\exp\left(\frac{4.x+2}{2}\right)}_{\text{La racine de l'exponentielle est l'exponentielle de la moitié.}}=e^{2.x+1}$$

On conclut sans peine de la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée de deux fonctions strictement croissante.

En fait, dés le départ, nous aurions pu remarquer que f était la composée de trois fonctions strictement croissantes...

Le nombre e

Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponentielle.

A son propos, remarquons la cohérence des différentes notations de l'exponentielle. Car :

$$e=\exp(1)=e^1=e$$

Et d'après les propriétés précédentes, $e^2=\exp(2)$ est le carré de notre nombre e.

De même : $\exp(0,5)=e^{1/2}=\sqrt{e^1}=\sqrt{e}$

Les limites de la fonction exponentielle

Même si nous savons que la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ, cela ne nous donne pas pour autant ses limites.

Pour connaître la limite en $+\infty$ de la fonction exponentielle, nous allons la comparer à la fonction identité $\mathrm{id}(x)=x$. Etudions la fonction φ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\varphi(x)=e^x-x$$

D'abord, calculons l'image de 0 par cette fonction φ :

$$\varphi(0)=e^0-0=1-0=1.$$

Comme les fonctions exponentielle et identité sont définies et dérivables sur ℝ, alors leur différence $\varphi(x)=e^x-x$ est dérivable sur son intervalle de définition $[0;+\infty[$.

Pour tout réel $x\in[0;+\infty[$, nous avons :

$$\varphi'(x)=\left(e^x-x\right)'=e^x-1$$

Or la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ. Par conséquent :

$$\text{Si} \quad \underbrace{x>0}_{\text{ou } x\in]0;+\infty[} \quad \text{alors} \quad \underbrace{e^x>e^0=1}_{\text{Car l'exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}.} \quad \text{d'où} \quad \varphi'(x)=e^x-1>0$$

Comme la dérivée $\varphi'(x)$ est strictement positive sur l'intervalle $]0;+\infty[$, alors la fonction φ est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Pour tout réel $x\in[0;+\infty[$, nous avons :

$$\varphi(x)\geq\varphi(0) \quad\Leftrightarrow\quad e^x-x\geq1 \quad\Leftrightarrow\quad e^x\geq x+1$$

Comme la fonction exponentielle est minorée sur $[0;+\infty[$ par la fonction $x+1$ dont la limite en $+\infty$ est $+\infty$, alors lorsque x tend vers $+\infty$, e^x tend aussi vers $+\infty$.

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty}$$

A présent, déterminons la limite lorsque x tend vers $-\infty$ de l'exponentielle.
Pour déterminer celle-ci, nous allons nous appuyer sur une propriété algébrique de l'exponentielle et sa limite en $+\infty$. Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{e^x=\exp(x)=\exp(-(-x))=\frac{1}{\exp(-x)}=\frac{1}{e^{-x}}=\frac{1}{e^t}}_{\text{En posant } t=-x}$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, son opposé $t=-x$ tend vers $+\infty$.

Donc l'exponentielle $e^t=e^{-x}$ s'envole aussi vers $+\infty$.

Par conséquent, $e^x=\exp(x)=\dfrac{1}{e^t}$ tend vers $\dfrac{1}{+\infty}=0^+$.

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x=0^+}$$

<u>Conséquence graphique :</u> l'axe des abscisses (la droite horizontale d'équation $y=0$) est une asymptote à la courbe de la fonction exponentielle au voisinage de $-\infty$.

Exponentielle contre fonction puissance...à l'infiniment positif

Le paragraphe précédent nous a appris qu'au voisinage de $+\infty$, la fonction exponentielle était minorée par la fonction identité $\mathrm{id}(x)=x$. Mais comment se comporte-t-elle réellement vis-à-vis de cette dernière ? L'écrase-t-elle complètement ou y est-elle juste supérieure ? Pour le savoir, étudions la fonction ψ définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$

$$\psi(x)=e^x-\frac{1}{2}.x^2$$

A l'instar des fonctions exponentielle et carrée, cette fonction ψ est dérivable sur $[0;+\infty[$.

Calculons sa dérivée. Pour tout réel $x\in[0;+\infty[$, nous pouvons écrire :

$$\psi'(x)=\left(e^x-\frac{1}{2}.x^2\right)'=e^x-\frac{1}{2}\times2.x=e^x-x=\underbrace{\varphi(x)}_{\text{Ca alors...}}$$

Lors du paragraphe précédent, il a été établi que $\varphi(x)$ était supérieur ou égal à $\varphi(0)=1$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Comme sa dérivée $\psi'(x)=\varphi(x)$ est strictement positive sur $[0;+\infty[$, alors la fonction ψ est strictement croissante sur cet intervalle.

Par suite, $\underbrace{\text{pour tout réel } x\in]0;+\infty[}_{\text{On exclut 0 pour pouvoir diviser par.}}$, nous pouvons écrire :

$$\psi(x)>\psi(0) \quad\Rightarrow\quad e^x-\frac{1}{2}.x^2>1>0 \quad\Rightarrow\quad e^x>\frac{1}{2}.x^2 \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\frac{e^x}{x}>\frac{1}{2}.x}_{\substack{\text{On a divisé par x}\\ \text{qui est strictement positif}}}$$

Comme, lorsque x s'en va vers $+\infty$, la fonction $\dfrac{x}{2}$ s'envole vers $+\infty$, alors il en va de même pour le quotient $\dfrac{e^x}{x}$.

Conclusion : la fonction exponentielle écrabouille la fonction identité en $+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty}$$

La fonction exponentielle est plus forte que la fonction identité x. Mais comment se comporte-t-elle face à n'importe laquelle des fonctions puissances x^n où n est un entier positif ?

Pour le savoir, nous allons déterminer la limite du quotient $\frac{e^x}{x^n}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\frac{e^x}{x^n}=\frac{\exp\left(n\times\frac{x}{n}\right)}{\left(n\times\frac{x}{n}\right)^n}=\frac{\exp(n\times t)}{(n\times t)^n}=\frac{(\exp(t))^n}{n^n\times t^n}=\frac{1}{n^n}\times\frac{\left(e^t\right)^n}{t^n}=\frac{1}{n^n}\times\left(\frac{e^t}{t}\right)^n}_{\text{On pose } t=\frac{x}{n}}$$

Dans cette égalité, n est un entier positif fixé. Donc la quantité $\frac{1}{n^n}$ est une constante.

Lorsque x s'en va vers $+\infty$, la quantité $t=\frac{x}{n}$ tend aussi vers $+\infty$.

Par conséquent, le quotient $\frac{e^t}{t}$ et sa puissance nième $\left(\frac{e^t}{t}\right)^n$ s'envolent aussi vers $+\infty$.

Et en définitive, nous avons :

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{n^n}\times\left(\frac{e^t}{t}\right)^n}_{\text{Avec } t=x/n}=\frac{1}{n^n}\times(+\infty)=+\infty$$

Conclusion : la fonction exponentielle pulvérise toute fonction puissance x^n en $+\infty$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier positif n, on a : } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty}$$

Exponentielle contre fonction puissance...à l'infiniment négatif

Déterminons la limite lorsque x tend vers $-\infty$ du produit $e^x\times x^n$ où n est un entier strictement positif.

Lorsque x tend vers $-\infty$:

- L'exponentielle e^x tend vers 0.
- La fonction puissance x^n tend vers $+\infty$ si la puissance n est paire, $-\infty$ s'il s'agit d'une puissance impaire.

Donc, au voisinage de $-\infty$, le produit $e^x\times x^n$ est une forme indéterminée du type $0\times\infty$.
Pour lever cette terrible incertitude, nous allons nous appuyer sur les propriétés algébriques de l'exponentielle et les limites établies en $+\infty$. Le match recommence !
Pour tout réel x, nous pouvons écrire :

$$e^x\times x^n=\exp(-(-x))\times((-1)\times(-x))^n=\frac{1}{\exp(-x)}\times(-1)^n\times(-x)^n=\underbrace{(-1)^n\times\frac{t^n}{e^t}}_{\text{En posant } t=-x}$$

Quand x tend vers $-\infty$, la quantité $t=-x$ tend vers $+\infty$.

Donc $\frac{e^t}{t^n}$ s'envole vers $+\infty$ et son inverse $\frac{t^n}{e^t}$ tend vers $\frac{1}{+\infty}=0^+$.

On en déduit alors :

$$\underbrace{\lim_{x\to-\infty}e^x\times x^n=\lim_{t\to+\infty}(-1)^n\times\frac{t^n}{e^t}}_{\text{Avec } t=-x}=(\pm1)\times0^+=0$$

Conclusion : même en $-\infty$, la fonction exponentielle s'impose à toute fonction puissance.

$$\boxed{\text{Pour tout entier positif n, on a : } \lim_{x\to-\infty}e^x\times x^n=0}$$

Une autre limite parfois bien utile

Quelle est la limite lorsque x tend vers 0 du quotient $\frac{e^x-1}{x}$?

Lorsque x tend vers 0 , l'exponentielle e^x tend vers $e^0=1$. Donc e^x-1 tend vers 0.

Par conséquent, le quotient $\frac{e^x-1}{x}$ est en 0 une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.

Sauf que la fonction exponentielle est dérivable en 0. Le nombre dérivé de l'exponentielle en 0 est 1. Pareil que l'image ! D'ailleurs, nous avons l'égalité :

$$\underbrace{1=e^0=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{C'est la définition du nombre dérivé et la fonction exponentielle est sa propre dérivée.}}$$

Ainsi et ce truc est à retenir :

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

Epilogue : les autres fonctions qui sont leurs propres dérivées

L'exponentielle est LA fonction définie et dérivable sur ℝ qui est sa propre dérivée ET par laquelle l'image de 0 est 1.
Mais, lorsque l'on enlève cette dernière condition d'image, quelles sont les autres fonctions définies et dérivables sur ℝ qui sont simplement leurs propres dérivées ?

Soit f une de ces fonctions définies et dérivables sur ℝ qui sont leurs propres dérivées.
Pour mieux connaître f, on définit la fonction g en posant :

$$g(x)=\frac{f(x)}{e^x} \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=g(x)\times e^x$$

Comme les fonctions f et exponentielle sont dérivables sur ℝ, et surtout comme l'exponentielle ne s'annule jamais, alors cette fonction g est aussi dérivable sur ℝ. Ouf !
D'ailleurs pour tout réel x, nous avons :

$$f'(x)=\underbrace{\left(g(x)\times e^x\right)'}_{(u\times v)'}=\underbrace{g'(x)\times e^x+e^x\times g(x)}_{u'\times v+v'\times u}$$

Or, la fonction f est sa propre dérivée ! Donc pour tout réel x, il vient :

$$\cancel{g(x)\times e^x}=f(x)=f'(x)=g'(x)\times e^x+\cancel{e^x\times g(x)}$$

D'où :

$$g'(x)\times e^x=0 \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\frac{0}{e^x}=0$$

Comme sa dérivée est nulle, alors la fonction g est constante.
Par conséquent, si la fonction f définie et dérivable sur ℝ est sa propre dérivée, alors elle est de la forme :

$$\text{Pour tout réel } x, \quad f(x)=\text{Constante}\times e^x$$

Et réciproquement, on établit sans problème que toute fonction de la forme $\text{Constante}\times e^x$ est dérivable sur ℝ et, surtout, qu'elle est sa propre dérivée !
Le mystère est résolu !

Ce qu'il faut retenir de l'exponentielle

1. La fonction exponentielle notée $\exp(x)=e^x$ est définie et dérivable sur ℝ.
C'est la seule fonction qui vérifie les deux conditions suivantes :

- Elle est sa propre dérivée : pour tout réel x, $\left(e^x\right)'=e^x$
- L'image de 0 par l'exponentielle est 1 : $\exp(0)=e^0=1$

Le nombre $e=e^1$ est l'image de 1 par la fonction exponentielle.

2. Le tableau de variation de la fonction exponentielle ci-contre a deux conséquences :

- Une exponentielle est toujours strictement positive.
- L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentant la fonction exponentielle au voisinage de $-\infty$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Exp			$+\infty$
		↗	
	0		

3. L'exponentielle vérifie les propriétés algébriques suivantes :
Pour tous réels a et b, pour tout entier relatif n, on a

$$e^{a+b}=e^a\times e^b \qquad e^{-a}=\frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b} \qquad \left(e^a\right)^n=e^{n\times a} \qquad \sqrt{e^a}=e^{\frac{a}{2}}$$

4. Aux infinis, l'exponentielle est plus forte que toutes les fonctions puissances x^n .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}e^x\times x^n=0$$